UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

DES PROCESSUS DE COMPRÉHENSION SOUS L'ANGLE DES REPRÉSENTATIONS : UN *TEACHING EXPERIMENT* AUTOUR DE LA DÉRIVÉE

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN ÉDUCATION

PAR
SARAH DUFOUR

MARS 2019

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon comité de recherche. Merci Fernando Hitt pour ta patience à toute épreuve. Tu m'as permis d'aller au bout de mes idées, de justifier mes choix, de les confronter, et ce, toujours avec sérénité et confiance. Merci Caroline Lajoie pour ta compréhension et ta sensibilité. Tu as su poser toujours les bonnes questions pour amener mes réflexions plus loin et surtout pour en assurer leur cohérence. Tu as aussi su m'aider à gérer mes émotions et à prendre le recul nécessaire pour ne pas céder à la panique!

Merci aux membres du jury d'avoir accepté de lire et commenter cette thèse. Je suis très reconnaissante du temps et des efforts que vous y avez mis. C'est très important pour moi que vous ayez fait partie de ce grand processus. Merci également au Conseil de recherches en sciences humaines et à la faculté des sciences de l'éducation pour le soutien financier.

Je souhaite aussi remercier les étudiants et l'enseignante qui ont participé à ce projet. Merci pour votre implication et votre motivation.

Je remercie également des collègues étudiants que j'ai côtoyés pendant mon parcours. Je pense plus particulièrement à Sarah, ma réviseure en titre pendant ma collecte de données, entre bien d'autres choses. Je pense aussi à Mathieu, François et Déborah, merci d'avoir partagé ce bout de chemin avec moi. Un merci bien spécial à mes deux amies Claudia et Doris. Vous me donnez envie de faire de la recherche, de me dépasser, de m'affirmer. Vous êtes de si beaux modèles de femmes fortes, brillantes, sensibles et incarnées. Merci de m'avoir soutenue, de m'avoir écoutée sans jugement, de me permettre d'être des vôtres. Je nous souhaite de nombreuses années de recherches stimulantes et complices.

Un remerciement spécial à ma famille et mes amis. Merci à Dany qui a cru en moi à la minute où je l'ai rencontré. Qui m'a fait confiance et non seulement accompagnée alors que j'étais déjà engagée dans cette aventure, mais qui l'a fait avec fierté, et sans jamais mettre de pression. Merci à mes amis proches qui assurent mon équilibre. Merci d'être là! Merci à ma fille Élisabeth qui m'a donné un temps d'arrêt parfois nécessaire pour terminer une aventure comme celle-là. Enfin, je remercie mes parents. Merci de m'avoir transmis l'envie de me réaliser tout en gardant un équilibre. Vous m'avez donné la curiosité, l'envie du dépassement, mais aussi les outils pour y arriver, la discipline, la rigueur, l'enthousiasme.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES EXTRAITS

LISTE DES ÉQUATIONS

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

MEES	Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur
MELS	Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport
MEN	Minitère de l'Éducation nationale (France)
TE	*Teaching Experiment*
TRM	*Triple representation model*
TV	Table des valeurs
TVM	Taux de variation moyen
RA	Représentation algébrique
RG	Représentation graphique
RN	Représentation numérique
RT	Représentation tabulaire
RV	Représentation verbale

RÉSUMÉ

Cette thèse, qui se situe dans le champ de la didactique des mathématiques, offre un éclairage sur le concept de dérivée dans l'enseignement postsecondaire. Plus particulièrement, elle vise à documenter les processus de compréhension de la dérivée chez des étudiants de niveau collégial.

Le concept de dérivée a fait l'objet de nombreuses études scientifiques dans le domaine de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Par exemple, des chercheurs ont tenté d'identifier des difficultés rencontrées par les étudiants lors de leur apprentissage du concept de dérivée. D'autres ont mis en évidence des facteurs pouvant expliquer ces difficultés et ont proposé des avenues possibles pour aider les étudiants à surmonter ces difficultés. Parmi ces auteurs, Zandieh, au tournant des années 2000, propose un cadre théorique pour l'analyse de la compréhension du concept de dérivée chez les élèves. Or, comme Zandieh (2000) le mentionne, ce schéma ne prétend pas expliquer comment ni pourquoi les étudiants apprennent le concept de dérivée d'une certaine façon. L'observation d'étudiants en action, en plein processus de compréhension du concept de dérivée, pourrait permettre d'ajouter une nouvelle dimension à ce modèle.

Dans le cadre de cette thèse, nous poursuivons donc ce travail, d'abord avec l'objectif de modéliser la compréhension qu'ont des étudiants de la dérivée en posant un regard sur l'aspect processuel de cette compréhension et la mise en place d'un cadre d'analyse permettant de décrire ou d'observer ces processus. Ensuite, en observant la façon dont le contexte, dans lequel les étudiants auront été observés, influence leur processus de compréhension.

Sur le plan théorique, un point de vue sur le recours à différentes représentations est adopté comme position sur la compréhension. Dans cette optique, le cadre théorique de cette thèse s'appuie sur la théorie des registres de représentations sémiotiques de Duval (1988, 1993, 2006) et le cadre sur les représentations fonctionnelles de Hitt (2003b, 2006). Ainsi, trois aspects primordiaux sont identifiés afin de pouvoir mieux observer et comprendre le processus de compréhension des étudiants. Ce processus relève en effet, selon la position adoptée pour ce projet, des types de représentations (algébrique, graphique, verbal, tabulaire, numérique) utilisés ou produits par les étudiants, de la nature de ces représentations (institutionnelle ou fonctionnelle), et des actions posées sur celles-ci (reconnaissance, production, traitement, conversion, coordination). Cette position sur la compréhension situe la recherche dans un contexte particulier où le recours à différentes représentations doit être encouragé. De plus, c'est l'observation du travail des étudiants, fait *sur* et *avec* ces représentations, qui permettra de construire des modèles du processus de compréhension de la dérivée chez des étudiants observés.

Afin de mettre en place un tel contexte, un *Teaching Experiment* (TE) a été planifié. En effet, le TE a permis d'assumer pleinement le rôle du chercheur-enseignant comme acteur de ces processus de compréhension. Le TE a pris la forme de cinq séances d'enseignement qui ont eu lieu en parallèle d'un cours de calcul différentiel au collégial et impliquant six étudiants.

Les résultats obtenus, pour rejoindre le premier objectif, prennent la forme de deux modèles relevant, sous forme de texte suivi, les éléments clés du processus de compréhension des étudiants observés. Les modèles dégagent, entre autres, la place que prennent les concepts « fondateurs » du concept de dérivée dans les processus de compréhension de ce dernier. L'importance d'une compréhension approfondie du concept de taux de variation en est un exemple. De plus, on remarque également que les registres graphique et verbal ont semblé prendre une place d'importance dans le développement du concept de dérivée. Bien que nous remarquions, en contrepartie, que le registre algébrique semble avoir un statut particulier pour les étudiants.

L'analyse du contexte mis en place dans le TE permet aussi de tirer des conclusions intéressantes. Par exemple, les observations sur le contexte mis en place dans le TE permettent de remettre en question l'utilisation du contexte de déplacement, temps et vitesse pour l'introduction d'un nouveau concept, dans ce cas, le concept de dérivée. D'un autre côté, il s'est avéré que le travail dans un contexte purement mathématique et essentiellement dans le registre graphique a été très porteur pour le développement de la compréhension des étudiants du concept de dérivée.

Mots-clés : didactique des mathématiques, compréhension, dérivée, représentations, *Teaching Experiment*.

INTRODUCTION

Mon questionnement autour des concepts introduits dans le cours de calcul différentiel remonte au moment où j'ai moi-même participé à ce cours en tant qu'étudiante. Mon excellent résultat obtenu pour ce cours m'a rendue perplexe en raison de l'impression que j'avais de ne pas avoir réellement saisi l'essence des concepts du cours. En arrivant dans le monde de la didactique des mathématiques, il y a déjà de cela 10 ans, j'ai bien vu que ce malaise était partagé. De nombreuses recherches ont déjà été menées en lien avec le cours de calcul différentiel. J'en fais d'ailleurs état dans la problématique de cette thèse. L'analyse critique de ma propre compréhension des objets mathématiques liés au cours de calcul différentiel et une meilleure connaissance des travaux à ce sujet en didactique des mathématiques m'ont permis de formuler des questions de recherche plus précises. Cela m'a menée à observer les représentations utilisées par des enseignantes dans des cours de calcul différentiel lors de ma maitrise. Ce travail, avec un regard sur l'enseignement, m'a par la suite amenée à m'intéresser aux étudiants à leur façon d'aborder, d'apprendre, de comprendre les concepts en calcul différentiel. Plus particulièrement, cette thèse vise donc à rendre compte d'une observation fine de processus de compréhension de la dérivée, plus particulièrement de la construction d'une compréhension conceptuelle dans un contexte d'enseignement conçu pour favoriser une telle compréhension.

Cette thèse est présentée en six chapitres. D'abord, le premier chapitre met en place une problématique qui aborde différentes entrées adoptées par plusieurs études autour du calcul différentiel. Ces entrées sont catégorisées de la façon suivante : les études visant à souligner des difficultés des étudiants ; celles visant à mieux comprendre l'enseignement, ou les approches d'enseignement, utilisé ; et celles qui s'intéressent plus directement à la compréhension des étudiants.

Le deuxième chapitre installe les assises théoriques de la thèse qui s'inspirent de la théorie des représentations sémiotiques de Duval (1988, 1993, 2006) et des travaux de Hitt (2003b, 2006) sur les représentations fonctionnelles. Cela mène à formuler deux objectifs plus spécifiques de recherche :

- Construire un ou des modèles du processus de compréhension de la dérivée des étudiants dans un contexte particulier.
    - Identifier les principales représentations sollicitées ou produites par les étudiants, qu'elles soient fonctionnelles ou institutionnelles.
    - Décrire et analyser la façon dont les étudiants ont recours à ces représentations en termes de reconnaissance, production, traitement, conversion ou coordination.
- Examiner de quelle manière le contexte mis en place (tâches, approche, interactions, etc.) a pu contribuer à faire ressortir, évoluer et articuler ou non différentes représentations produites ou manipulées par les étudiants.

Un survol de différentes représentations institutionnelles du concept de dérivée et de concepts qui y sont liés est également présenté.

Le troisième chapitre décrit la méthodologie adoptée pour la thèse, soit le *Teaching Experiment*. Ce choix de méthodologie est justifié par la nature du rôle des chercheurs engagés dans une telle démarche et par ses visées centrées sur l'activité mathématique des étudiants. Les cinq séances d'enseignement mises en place pour ce *Teaching Experiment* sont également décrites.

Le quatrième chapitre propose deux modèles de processus de compréhension collectifs, soit un pour chaque équipe de travail formée pendant les séances d'enseignement. En plus de ces modèles, quelques éléments communs aux deux modèles et qui semblent des éléments clés dans les processus observés sont relevés.

Le cinquième chapitre se concentre sur l'atteinte du deuxième objectif. Il offre un regard sur l'approche utilisée pour la mise en place du *Teaching Experiment*. Du travail d'équipe, aux interventions de la chercheure-enseignante, en passant par l'apport des contextes dans lesquels les problèmes sont proposés, divers éléments du dispositif particulier au *Teaching Experiment* sont abordés.

Enfin, le sixième chapitre, la conclusion, présente une synthèse de la thèse. Elle met également en lumière quelques contributions et retombées pour le champ de la didactique des mathématiques. De plus, des limites ou difficultés rencontrées sont décrites et des prolongements possibles sont suggérés.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

Dans ce chapitre, la problématique de recherche est présentée en s'appuyant sur plusieurs écrits scientifiques analysés sous différents angles. D'abord, des facteurs pouvant expliquer des difficultés des étudiants en calcul différentiel sont présentés, tels que la complexité des concepts, certaines conceptions des étudiants et certains éléments liés à l'enseignement. De plus, une recension des écrits scientifiques autour de la compréhension des étudiants du concept de dérivée est faite. Tour à tour sont analysées des études qui visent à favoriser la compréhension conceptuelle, des études qui mettent en lumière des éléments de la compréhension des étudiants par l'observation de ces derniers, et des études qui proposent des modèles de la compréhension de la dérivée par des étudiants.

Les étudiants qui ont à suivre des cours de mathématiques au collégial commencent souvent, dès leur première session, avec un cours de calcul différentiel. Bien qu'ils aient déjà travaillé, au secondaire, certains concepts liés au calcul différentiel (comme la fonction et le taux de variation, entre autres), les étudiants rencontrent ce domaine mathématique de façon plus « formelle » par l'étude explicite de concepts comme la limite ou l'infini. Ces nouveaux concepts mathématiques ainsi qu'une nouvelle façon de faire dans les cours au collégial peuvent provoquer quelques difficultés chez les étudiants.

Plusieurs écrits scientifiques portant sur les cours d'introduction au calcul différentiel au Québec, mais aussi aux États-Unis ou en Europe, adoptent un regard sur les difficultés que rencontrent les étudiants dans le cadre de ces cours. Ces difficultés recensées par différents auteurs peuvent informer sur la compréhension des étudiants. Des difficultés liées à des conceptions des étudiants, à des obstacles épistémologiques, à des approches d'enseignement et à des tâches proposées sont mises de l'avant. Des études ont aussi été menées afin d'observer plus précisément différents aspects de l'apprentissage des concepts du calcul différentiel. Une recension des écrits portant sur l'apprentissage et la compréhension des concepts en jeu dans les cours de calcul différentiel est présentée dans le but d'éclairer les différentes dimensions de ces processus d'apprentissage et de compréhension, et de circonscrire l'objet de recherche de ce projet.

1.1 Les difficultés des étudiants lors de l'étude du calcul différentiel

D'abord, il est important de situer le contexte dans lequel les cours de calcul différentiel, tant au Québec qu'ailleurs dans le monde, sont proposés. Au Québec, les cours de calcul différentiel sont offerts au cégep, une institution unique au monde qui assure la transition entre le secondaire et l'université, entre autres programmes. Les étudiants qui suivent ces cours au cégep ont généralement choisi un programme préuniversitaire en sciences de la nature (incluant les programmes avec concentration en sciences de la santé) ou en sciences de la gestion. Les cours de calcul différentiel sont souvent les premiers cours de mathématiques que ces étudiants suivront au cégep. Ils font donc partie des cours où la transition entre le secondaire et le cégep doit être prise en compte. Les programmes des cours de calcul différentiel pour les différentes concentrations fournies par le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES) se veulent plutôt généraux. En effet, dans le programme de sciences de la nature, par exemple, la partie octroyée au cours de calcul différentiel n'occupe pas plus d'une page (MEES, 2010, p. 93). Le cours de calcul différentiel, pour cette concentration, se résume à une compétence : « Appliquer les méthodes du calcul différentiel à l'étude de fonctions et à la résolution de problèmes » (*ibid.*, p. 93). Cette compétence se décline ensuite en quelques éléments de compétence et en critères de performance, ce qui peut guider les enseignants dans leur préparation.

Voici un extrait de ce programme :

Éléments de la compétence	Critères de performance
1. Reconnaître et décrire les caractéristiques d'une fonction représentée sous forme d'expression symbolique ou sous forme graphique.	• Utilisation appropriée des concepts.
	• Représentation d'une situation sous forme de fonction.
2. Déterminer si une fonction a une limite, est continue, est dérivable, en un point et sur un intervalle.	• Représentation graphique exacte d'une fonction.
	• Choix et application correcte des techniques de dérivation.
3. Appliquer les règles et les techniques de dérivation.	• Manipulations algébriques conformes aux règles.
	• Exactitude des calculs.
4. Utiliser la dérivée et les notions connexes pour analyser les variations d'une fonction et tracer son graphique.	• Interprétation juste des résultats.
	• Justification des étapes de la résolution de problèmes.
5. Résoudre des problèmes d'optimisation et de taux de variation.	• Utilisation d'une terminologie appropriée.

Figure 1.1 Extrait du programme de la concentration Sciences de la nature (MEES, 2010, p. 93)

Ce court libellé n'est pas accompagné de progression d'apprentissages (contrairement aux programmes du primaire et du secondaire), de possibilités de séquences ou d'approches d'enseignement. Une grande liberté est donc laissée aux enseignants pour la préparation des cours de calcul différentiel au collégial.

Ailleurs dans le monde, la tendance veut qu'une brève introduction au calcul différentiel soit faite à l'intérieur des cours de mathématiques préalables à l'université (ces cours sont considérés comme équivalents au cours de Cégep au Québec) et qu'un cours de calcul différentiel, plus consistant, soit donné dans la première année universitaire (on parle ici d'étudiants de 19-20 ans) (Tall, 1992). Par exemple, les notions de dérivée en un point et de fonction dérivée font partie du programme de mathématiques de la classe de première de la série économique et sociale, et de la série littéraire en France (étudiants âgés de 16 à 17 ans) (Ministère de l'Éducation nationale [MEN], 2010). Le concept de dérivée fait également l'objet d'un cours préuniversitaire en 12e année en Ontario et aux États-Unis (étudiants âgés de 16 à 18 ans) (Ministère de l'Éducation de l'Ontario [MEO], 2007; Straus *et al.*, s. d.)

Or, bien que les programmes soient différents partout dans le monde, la complexité du cours de calcul, entre autres due à la complexité des concepts, comme nous allons le voir[1], s'élargit bien au-delà du contexte québécois et est reconnue partout dans le monde. Tall (1992) écrit : « *Whichever way the calculus is approached, there seems to be inherently difficult concepts which seem to cause problems no matter how they are taught* » (p. 14). Il faut considérer que l'étude de la dérivée, concept central du cours de calcul différentiel, ne va pas sans l'étude des concepts de fonctions, de taux de variation, de limite, d'infini et de tangente, entre autres. Plus particulièrement, deux concepts sont à la base de la dérivée :

1. Le concept de fonction et les sous-concepts qui y sont associés comme la covariation entre variables, le taux de variation, la continuité, etc.
2. Le concept d'infini et les sous-concepts qui y sont associés comme la tangente, la limite, la continuité, l'infini potentiel et actuel, etc.

---

[1] Plusieurs difficultés et obstacles épistémologiques des concepts du calcul différentiel recensés dans différents écrits scientifiques provenant de différents pays sont présentés à la section 2.5 et témoignent de la complexité des concepts en jeu en calcul différentiel.

En plus des différents concepts liés à la dérivée, il faut aussi considérer que plusieurs domaines des mathématiques sont en jeu lors de l'étude de la dérivée. En effet, ce concept renvoie autant à la pensée algébrique, arithmétique et géométrique qu'à la trigonométrie et à la modélisation. Comme il est présenté dans la section suivante, plusieurs études ont d'ailleurs permis d'identifier certaines difficultés liées à des conceptions d'étudiants ou à certaines méthodes d'enseignement.

1.1.1 Des difficultés liées aux conceptions

En premier lieu, des études proposent la possibilité que certaines conceptions des étudiants deviennent un obstacle pour leur apprentissage des contenus du cours de calcul différentiel. Par exemple, plusieurs chercheurs (Biza, Christou et Zachariades, 2008 ; Castela, 1995 ; Fischbein, 1987) se sont penchés sur le concept de tangente, un concept important dans l'étude de la dérivée. Certains chercheurs (Tall, 1987 et Vinner, 1982, 1991, cités dans Biza et Zachariades, 2010 ; Castela, 1995) observent que les étudiants arrivant dans les cours de calcul différentiel ont déjà abordé au secondaire le concept de tangente, et ce, dans le contexte de la tangente au cercle. Ce contexte amène une conception de la tangente restreinte à l'image d'une droite qui « touche » un cercle en un point. Or, cette idée implique que la droite « touchera » la courbe en un seul point et qu'en aucun cas elle ne croisera ni ne traversera la courbe[2]. Castela (1995) et Biza (2010) associent cette conception de la tangente à une vision globale du concept. Cependant, dans le cours de calcul différentiel, c'est la tangente à une courbe en un point en particulier qui est traitée. Ce contexte nécessite, selon Castela

[2] L'histoire de la définition de la tangente montre d'ailleurs que la tangente s'appelait à l'origine la « touchante ».

(*ibid.*) et Biza (*ibid.*), une vision locale de la tangente. La figure 1.2 illustre ces deux visions de la tangente :

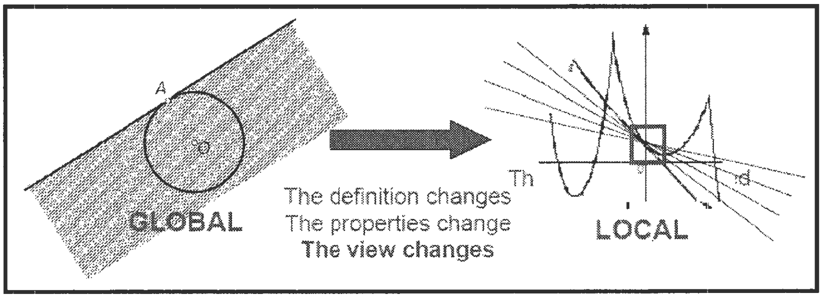


Figure 1.2 Visions globale et locale sur la tangente (Biza, 2010)

Ainsi, cette différence de point de vue peut causer des difficultés lors de l'étude de la dérivée au cours de laquelle les élèves seront confrontés à des cas particuliers. Par exemple, quand une tangente en un point traverse le graphique en un autre point (voir image de droite dans la figure 1.2), l'élève ayant une vision globale de la tangente peut ne pas accepter la droite étudiée comme tangente. Un autre exemple perturbant pour les élèves est une tangente en un point d'inflexion (voir figure 1.3). Comme cette tangente peut « couper » le graphique en ce point d'inflexion, l'élève a tendance à ne pas accepter cette droite comme étant une tangente (Biza et Zachariades, 2010).

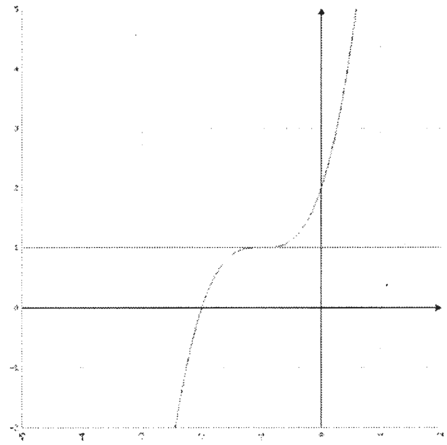


Figure 1.3 Tangente (droite horizontale dans le graphique) en un point d'inflexion

Enfin, l'étudiant qui commence un cours de calcul différentiel peut avoir des idées intuitives ou plus formelles sur certains concepts. Or, il faut considérer le fait que certaines de ces idées ou conceptions sont viables dans certains contextes (par exemple, la conception de la tangente qui est viable dans le contexte où l'on s'intéresse à la tangente au cercle), mais qu'elles ne le sont plus dans le contexte plus élargi de la dérivée, lié au calcul de la tangente de certaines fonctions. Ces conceptions peuvent parfois devenir des obstacles dans les cours de calcul différentiel.

1.1.2 Des difficultés liées à des obstacles épistémologiques

Un concept utilisé dans les travaux en didactique pour mieux comprendre la source de certaines difficultés des étudiants est l'*obstacle épistémologique*. Sierpinska (1985) et Hitt (2003a), par exemple, ont recours à ce concept dans leurs travaux portant respectivement sur la limite et l'infini. Le concept d'obstacle épistémologique ne fait toutefois pas l'objet d'une définition unanime dans la communauté didactique. En effet, l'identification des conditions nécessaires à un obstacle pour qu'il soit qualifié d'*épistémologique* est un point litigieux entre les chercheurs. Sierpinska (*ibid.*) et Hitt (*ibid.*) s'entendent cependant sur deux caractéristiques essentielles pour décrire l'obstacle épistémologique (inspiré de Bachelard, 1938 et Brousseau, 1976/1983 dans Sierpinska, *ibid.*). D'abord, le caractère inévitable de l'apparition de ces obstacles, c'est-à-dire « [que l'on] doit buter contre l'obstacle, en prendre conscience et ensuite le franchir pour progresser dans le développement de son savoir » (Sierpinska, 1985, p. 8). Ensuite, « la répétition de leur apparition dans la phylogenèse et l'ontogenèse des concepts » (*ibid.*) est la seconde caractéristique pour décrire l'obstacle épistémologique. Ce dernier critère note le caractère historique d'un tel obstacle. En effet, on peut le voir apparaitre dans le développement historique d'un concept. Ainsi, des obstacles épistémologiques importants liés à la limite ont été relevés dans l'étude de Sierpinska (1985), tels que les obstacles « géométriques », les obstacles « logiques », l'obstacle du symbole, ceux liés à la notion de fonction, et finalement l'« Horror Infiniti », un obstacle lié au concept d'infini qui rejoint les résultats des travaux de Hitt (2003a)[3]. Comme ces obstacles ont un caractère inévitable, selon les auteurs cités, il est donc important d'y être attentif dans l'enseignement et l'apprentissage des notions du cours de calcul différentiel afin de pouvoir identifier les étudiants confrontés à ces obstacles et les aider à les surmonter.

1.1.3 Des difficultés liées à l'enseignement

Le troisième facteur explicatif des difficultés des étudiants serait en lien avec l'enseignement. Entre autres auteurs, Sierpinska (1985) attribue certaines difficultés au fait que l'enseignement est souvent axé sur les procédures et méthodes, ce qui mène les étudiants vers une *compréhension procédurale* des concepts, sans nécessairement

---

[3] Certains de ces obstacles sont décrits plus en détail dans la section 2.5.

les mener vers une *compréhension conceptuelle*[4] (Zimmermann, 1991). Dans le même ordre d'idées, des auteurs remarquent que les travaux et examens élaborés par les enseignants sont souvent, eux aussi, axés sur des tâches qui demandent une connaissance des techniques et méthodes. Ainsi, ceci enclencherait une boucle autour d'un enseignement et d'un apprentissage basés sur les procédures et méthodes (Hardy, 2009 ; Odierna, 2004 ; Tall, 1996). Cette importance accordée aux procédures et méthodes peut être provoquée par le désir des étudiants d'apprendre des procédures, des recettes qui peuvent leur sembler rassurantes, mais aussi par le désir des enseignants de voir les étudiants réussir et donc de leur fournir ce contexte rassurant. De plus, Lithner (2004) cite différents auteurs lorsqu'il mentionne :

> *Many authors have described students' focus on memorising procedures, without understanding the underlying central ideas, as an important reason behind learning and achievement difficulties in mathematics, for example Henningsen and Stein (1997), Schoenfeld (1992), and Shield (1998).* (p. 406)

En conséquence, Lithner (*ibid.*) s'inquiète des faibles stratégies de résolution de problèmes qui sont adoptées par les étudiants. Il soutient que les étudiants ne sont pas souvent amenés à résoudre des problèmes leur demandant des stratégies de résolution qui sollicitent un raisonnement mathématiquement fondé. Ainsi, les étudiants auraient pour habitude de mobiliser des stratégies de résolution superficielles. Un exemple de ce type de stratégie est l'identification de similarités entre une tâche à résoudre et des tâches déjà résolues, et l'utilisation, par la suite, de cette même procédure. Le problème

---

[4] Les expressions *compréhension procédurale* et *compréhension conceptuelle* ont été privilégiées pour l'instant, mais ces concepts feront l'objet d'une analyse dans le cadre théorique.

est que les étudiants n'ont pas besoin d'avoir « une compréhension réelle[5] » pour résoudre les tâches qui leur sont généralement proposées (*ibid.*).

Dans une étude faite aux États-Unis, Selden, Selden, Hauk et Mason (1999)[6] montrent que des étudiants (de 1re année universitaire) ayant réussi un cours de calcul différentiel éprouvent d'importantes difficultés à résoudre des problèmes « non routiniers », c'est-à-dire des problèmes demandant de comprendre le sens des concepts en jeu. En fait, seulement 20 des 136 essais de solutions analysés étaient corrects. Le tableau 1.1 montre un exemple de problème utilisé par Selden *et al.* (*ibid.*) dans ses formulations routinières et non routinières, et les éléments mathématiques que les deux formulations sollicitent.

---

[5] Termes utilisés par l'auteur.

[6] Il s'agit d'ailleurs d'une reprise d'une étude que trois des auteurs avaient faite dix ans auparavant et qui donnait des résultats similaires (voir Selden, Mason et Selden, 1989).

Tableau 1.1
Les éléments mathématiques en jeu dans le même problème énoncé en version routinière et non routinière

Problème non routinier proposé par Selden *et al.* (1999)	Problème routinier proposé dans un autre test de Selden *et al.* (1999)	Éléments mathématiques en jeu dans les deux problèmes
« Find values of a and b so that the line $2x + 3y = a$ is tangent to the graph of $f(x)=bx^2$ at the point where $x=3$. »	« 1. (a) What is the slope of the line tangent to $y=x^2$ at $x=1$? (b) At what point does that tangent line touch the graph of $y=x^2$? 2. Find the slope of the line $x+3y=5$. »	Traitement de $2x + 3y = a$ à $y=-\frac{2}{3}x+\frac{a}{3}$. Substitution et résolution d'une équation avec une inconnue. Reconnaissance de la pente étant donnée l'équation de la droite. Calcul de la dérivée d'un polynôme. Reconnaissance de la pente de la tangente, de la dérivée en un point. Égalité de deux fonctions en un point.

Le test de Selden *et al.* (*ibid.*) a aussi été proposé à des étudiants québécois au baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire qui avaient réussi un cours de calcul différentiel au cégep (Dufour, 2009) et à des étudiants à la fin d'un cours de calcul différentiel au cégep (Dufour et Jeannotte, 2013) et les résultats sont semblables. Il a été relevé que les étudiants ont de la difficulté à mobiliser et à mettre en lien les concepts nécessaires pour résoudre les problèmes. Par conséquent, même si les participants à ces études ont réussi leur cours de calcul différentiel, ils ne l'ont pas nécessairement fait grâce à une *compréhension conceptuelle*[7] des objets mathématiques.

Les éléments mis de l'avant dans l'étude de Selden *et al.* (1999) rejoignent ceux de Sierpinska (1985) et Odierna (2004), entre autres. En effet, ces auteures mettent en lumière l'importance accordée aux techniques et procédures, et ce, à différents niveaux : dans les manuels, les examens et les tâches proposées aux étudiants (Hardy, 2009; Odierna, 2004), dans l'enseignement (Dufour, 2011; Sierpinska, 1985) et dans les solutions fournies par les étudiants (Dufour et Jeannotte, 2013; Dufour, 2009; Selden *et al.*, 1999).

Il faut également préciser que la compréhension conceptuelle et la compréhension procédurale sont toutes deux nécessaires. Au-delà de connaitre les techniques et procédures liées à des concepts, il est important que l'étudiant comprenne la nature et l'utilité du concept (plutôt liées à la compréhension conceptuelle) en plus de s'approprier son fonctionnement (plutôt lié à la compréhension procédurale). Ces deux types de compréhension, qui se veulent donc étroitement liés (Hiebert et Carpenter, 1992), contribueront à l'autonomie de l'étudiant et lui permettront d'élaborer ses propres stratégies de résolution.

Bien que la dérivée et les concepts de limite, d'infini, de fonction et de tangente aient fait l'objet de plusieurs études, les difficultés et problèmes d'apprentissage liés à ces notions demeurent. Pourtant, ces concepts sont le cœur du cours de calcul différentiel offert en première session au cégep pour les étudiants de sciences de la nature, entre

[7] Compréhension conceptuelle ou *conceptual understanding* sont des termes utilisés par différents auteurs en didactique des mathématiques tels que Kieran (2013) et Hiebert et Carpenter (1992). Je vais utiliser ce terme pour l'instant pour référer à une compréhension profonde du sens des concepts en jeu, mais une analyse de ce concept sera élaborée dans le prochain chapitre.

autres. Ils serviront de base pour les prochains cours de mathématiques du cégep (calcul différentiel et calcul intégral) et même, dans certains cas, pour des cours universitaires. Il apparait donc important d'approfondir les connaissances sur l'apprentissage et l'enseignement de ce concept, et surtout sur sa compréhension par les étudiants. Dans cet ordre d'idées, il serait intéressant de mieux comprendre différentes façons de favoriser l'émergence d'une compréhension conceptuelle, en plus d'une compréhension procédurale, dans le cas du calcul différentiel et, plus particulièrement, dans celui de la dérivée.

1.2 La compréhension conceptuelle en calcul différentiel

Depuis quelques années déjà, on retrouve chez certains chercheurs une préoccupation quant à la compréhension conceptuelle des étudiants en calcul différentiel. Notamment, au cœur des études d'Engelbrecht, Harding et Potgieter (2005), Carlson, Oehrtman et Engelke (2010), Chappell et Kilpatrick (2003), Zerr (2010), Haciomeroglu, Aspinwall et Presmeg (2010) et Baker, Cooley et Trigueros (2000), il y a cette préoccupation commune autour de la compréhension conceptuelle des étudiants en calcul différentiel. Ces chercheurs proposent des idées ou des pistes quant aux éléments qui pourraient mener vers une compréhension conceptuelle des concepts des cours de calcul différentiel. Entre autres, les approches adoptées par les enseignants, les types de tâches proposées aux étudiants et le recours à différents types de représentations pourraient intervenir dans le développement d'une compréhension conceptuelle. Ils ont toutefois des points de vue différents pour aborder le sujet.

1.2.1 Des moyens de favoriser la compréhension conceptuelle en calcul différentiel

Dans leur étude, Chappell et Kilpatrick (2003) adoptent un point de vue sur les « *instructional environments* » dans lesquels les étudiants évoluent. Ils ont voulu voir comment ces différents environnements affectaient les connaissances conceptuelles et procédurales[8] des étudiants. Deux environnements ont donc été mis en place dans un cours d'introduction au calcul différentiel : un « *concept-based environment* » et un « *procedure-based environment* ». Bien que ces environnements soient décrits, cela est fait de façon plutôt générale. Afin d'observer comment les connaissances des étudiants étaient affectées par les différents environnements, ils ont fait passer des tests : deux « *skills examinations* », pour évaluer les compétences procédurales, de même qu'un examen de mi-session et un examen final, axés tant sur la compréhension conceptuelle que procédurale. Ainsi, leurs outils de collecte de données sont principalement les tâches contenues dans ces tests et les solutions fournies par les étudiants. Dans les tests à caractère plus procédural, les étudiants n'ont pas à expliquer leur réponse ou à décrire le sens derrière les procédures utilisées (*ibid.*, p. 26). Les examens qui sont axés sur les connaissances plus conceptuelles, quant à eux, sont composés de trois types d'items : des questions qui nécessitent une explication en mots, d'autres qui demandent l'interprétation d'un graphique et d'autres encore qui forcent les étudiants à étendre leurs connaissances à des situations nouvelles (*ibid.*). Enfin, les résultats de l'étude montrent qu'il est possible d'accorder plus de temps en classe à des tâches qui développeraient plus la compréhension conceptuelle, sans pour autant avoir à sacrifier les connaissances procédurales. En effet, les résultats soutiennent qu'un enseignement axé sur une compréhension conceptuelle ne nuirait pas aux habiletés techniques des étudiants. Cependant, peu d'information ressort sur la compréhension conceptuelle développée par les étudiants. Par exemple, les éléments — dans les réponses des

---

[8] *Conceptual and procedural knowledge.*

étudiants — qui ont été considérés dans leur analyse comme étant des « manifestations » d'une compréhension conceptuelle ne sont pas présentés. De plus, peu d'éléments permettent de cerner comment les visées des deux environnements ont été opérationnalisées dans la pratique. Ainsi, plusieurs questions demeurent concernant l'influence de ces environnements, les éléments qui auraient pu améliorer la compréhension conceptuelle ou procédurale, et surtout la façon dont la compréhension conceptuelle a pu se développer à travers ces environnements.

Dans le même ordre d'idées, Engelbrecht, Harding et Potgieter (2005) se sont aussi intéressées à la compréhension conceptuelle des étudiants en calcul différentiel. Les chercheures ont voulu comparer les performances d'étudiants face à des problèmes demandant des connaissances procédurales et conceptuelles en étudiant le niveau de confiance des étudiants envers leur réponse, et en comparant ce niveau de confiance et la validité de leur réponse. Cette approche permet de mettre en lumière certaines conceptions des étudiants. En effet, un niveau de confiance élevé combiné à une mauvaise réponse peut indiquer que la conception de l'élève ne serait pas viable pour la tâche proposée. Ainsi, ils observent que les étudiants semblent avoir une meilleure confiance en leurs réponses lorsqu'il s'agit de problèmes conceptuels, et ce, même s'ils ne réussissent pas mieux à un type de problème qu'à l'autre. Cette étude est éclairante quant à des difficultés et conceptions possibles des étudiants. Elle peut être utile pour cibler des éléments importants à travailler pour favoriser une compréhension conceptuelle. On pourrait même la considérer comme complémentaire à l'étude de Chappell et Kilpatrick (2003) en ce qui concerne l'ajout d'éléments pouvant faire partie des environnements décrits précédemment. Par contre, peu d'indices sont donnés par rapport à la compréhension en tant que telle des étudiants ayant participé à l'étude.

Encore une fois avec une préoccupation semblable, une étude de Zerr (2010) a pour but de permettre une meilleure compréhension conceptuelle en calcul différentiel en plus d'observer l'effet sur les étudiants de changements dans le curriculum habituel. Zerr (*ibid.*) présente trois leçons conçues dans le but de promouvoir une pensée conceptuelle chez les étudiants d'un cours d'introduction au calcul différentiel. Le chercheur s'est concentré sur le concept d'infini. Afin d'examiner la compréhension conceptuelle des étudiants, influencée par les trois leçons, il passe un prétest et un post-test (qui sont le même) avant et après la mise en place des séances. Il fait ensuite une analyse quantitative des solutions des étudiants. L'auteur observe une progression intéressante quant à la compréhension conceptuelle des étudiants à travers les trois leçons mises en place. Par contre, il note également qu'à la fin de l'expérimentation un rapport de 50 : 50 existait entre les étudiants qui montraient une compréhension conceptuelle significative et ceux qui ne montraient pas une telle progression. Aussi, l'auteur mentionne qu'il est difficile d'attribuer cette évolution directement à l'approche préconisée dans les leçons, qui se voulaient différentes de ce à quoi les étudiants étaient habitués. De plus, l'auteur accorde une grande place aux sentiments des étudiants envers ce changement. En effet, une partie importante des résultats consiste en l'appréciation des étudiants pour une telle méthode. Ces derniers semblent avoir reconnu qu'une telle approche leur a permis de réfléchir de façon différente (*ibid.*, p. 15). À la lumière de ces résultats, les mêmes questions que pour l'étude de Chappell et Kilpatrick (2003) peuvent être soulevées. En effet, l'aspect quantitatif de cette recherche est éclairant quant au fait qu'une compréhension conceptuelle semble accessible et que la compréhension procédurale n'est pas défavorisée par la compréhension conceptuelle. Par contre, peu d'informations sont données sur l'influence réelle de ces séances en classe sur la compréhension des étudiants et sur la façon dont ces derniers ont pu construire une telle compréhension.

Un autre travail intéressant qui se préoccupe de l'approfondissement de la compréhension conceptuelle en calcul différentiel est celui de Carlson, Oehrtman et Engelke (2010). Cette étude adopte toutefois un point de vue plus centré sur le développement d'un outil pour évaluer la compréhension et l'habileté[9] à raisonner. Cet instrument consiste en un questionnaire de 25 questions à choix multiples. Un cadre énumérant les principaux aspects de raisonnement abordés dans le cours de calcul différentiel accompagne le questionnaire. Ce travail a également été repris et prolongé par le projet doctoral de Passaro (2015). En effet, elle s'inspire des travaux de Carlson *et al.* (*ibid.*) sur le raisonnement covariationnel pour faire « une analyse de la dynamique du développement de ce raisonnement chez des petits groupes d'élèves de la fin du secondaire et du début du collégial » (Passaro, 2015, p. iii). D'une part, l'étude de Carlson *et al.* (2010) informe sur plusieurs éléments faisant partie d'un raisonnement approfondi en calcul différentiel. Cet article pourrait donc devenir un outil intéressant pour construire des leçons à caractère conceptuel en calcul différentiel, une étape importante pour pouvoir observer l'évolution de la compréhension des étudiants. D'autre part, la thèse de Passaro (2015) informe sur le développement du raisonnement covariationnel qui est, selon elle, un enjeu de transition vers le concept de dérivée. Or, les unités de raisonnement présentées par Passaro abordent le raisonnement covariationnel qui est bien sûr lié au concept de dérivée, mais qui est plutôt lié à un processus de compréhension préalable à celui particulièrement centré sur le concept de dérivée.

Enfin, les cinq études présentées précédemment permettent de situer notre travail de recherche dans le contexte de la recherche en didactique des mathématiques. Tous ces auteurs avaient comme préoccupation de favoriser une compréhension conceptuelle en calcul différentiel. Il en ressort plusieurs éléments intéressants. Entre autres, des contextes de classe ou d'enseignement ont été présentés pour promouvoir une compréhension conceptuelle. Quelques difficultés des étudiants ont aussi été observées telles que certaines conceptions possibles liées aux concepts du calcul différentiel.

[9] Les auteurs parlent de « *reasoning abilities and understandings* ».

Cependant, les études présentées précédemment informent peu sur la compréhension des étudiants en tant que telle, la façon dont elle évolue, les éléments qui la définissent. Dans cet ordre d'idées, il existe certaines études qui montrent une évolution ponctuelle du type prétest/post-test, mais l'aspect processuel, évolutif de la compréhension, n'est pas mis de l'avant. C'est vers cet aspect processuel que ce projet se dirige.

1.2.2 L'observation de la compréhension conceptuelle d'étudiants en calcul différentiel

Quelques auteurs ont mis la compréhension et le raisonnement de l'étudiant à l'avant-plan dans leurs études. Entre autres, Haciomeroglu *et al.* (2010) et Baker *et al.* (2000) abordent le problème de la compréhension conceptuelle des étudiants en calcul différentiel d'un point de vue différent des cinq études présentées ci-haut.

L'étude de Baker *et al.* (2000) a pour but

> [...] d'analyser la compréhension des étudiants lors de la résolution de problèmes non routiniers incluant des graphiques et de déterminer, le plus spécifiquement possible, comment les étudiants intègrent leurs connaissances des concepts en calcul différentiel, à quels moments ils montrent le plus de difficultés et comment ils peuvent surmonter ces difficultés (traduction libre, p. 563).

Ils utilisent un contexte d'entrevues pendant lesquelles les étudiants ont à résoudre un problème. Ce problème consiste en la construction du graphique d'une fonction à partir de conditions que la fonction à tracer doit satisfaire. Les chercheurs font ensuite l'observation des solutions des étudiants. Afin de faire cette analyse, les auteurs se basent sur trois phases dans un processus dynamique du développement du « *graphing schema* » : la phase intra, la phase inter et la phase trans (« la triade de Piaget et Garcia

[1983/1989, 1996] », *ibid.*, p. 558). Ils établissent ensuite une catégorisation des trois phases. Cette catégorisation est directement liée aux concepts et actions associés au calcul différentiel, c'est-à-dire que les phases sont décrites en termes de capacité de l'étudiant à isoler une condition donnée dans le problème et à la relier à une propriété dans le graphique, par exemple. Ces trois phases s'observent également sur deux dimensions : les propriétés de la fonction et les intervalles dans le graphique. Les auteurs obtiennent alors un tableau à double entrée dans lequel ils classent les solutions d'étudiants, à l'aide d'une analyse qualitative des données. Ils ont ainsi identifié quatre obstacles importants que les étudiants pouvaient rencontrer lors de la résolution du problème : « *(a) a cusp point, (b) a vertical tangent, (c) removal of continuity, (d) the second derivative* » (*ibid.*, p. 576). Ces résultats, corroborant les résultats de certaines études en calcul différentiel, sont certainement notables pour favoriser le développement du cours ou d'activités favorisant la compréhension des étudiants. Par contre, l'étape suivante serait de voir comment des étudiants peuvent surmonter ces obstacles. Bien que des hypothèses puissent être émises à ce sujet, il serait très riche de pouvoir observer le cheminement d'un étudiant qui, non seulement se retrouve face à ces obstacles, mais qui arrive à les surmonter. Ce processus serait alors documenté et pourrait faire avancer les recherches sur le développement de la compréhension conceptuelle en calcul différentiel.

L'étude de Haciomeroglu *et al.* (2010) est particulièrement intéressante pour obtenir des indices sur la façon dont des étudiants « *create meaning for derivative graphs* » (*ibid.*, p. 152). Les auteurs voulaient mieux comprendre, dans un premier temps, quelle « pensée mathématique » (visuelle, analytique ou mixte) les étudiants utilisent pour comprendre le graphique d'une dérivée. C'est en s'appuyant sur plusieurs auteurs qui prônent l'utilisation de la visualisation (Lesh, Post et Behr, 1987, cité dans *ibid.*, p. 153, par exemple) ou de plusieurs types de représentations que les auteurs ont voulu observer le « comportement » d'étudiants ayant une préférence pour des pensées mathématiques différentes[10]. Dans un deuxième temps, Haciomeroglu *et al.* (*ibid.*) voulaient comparer comment des étudiants avec une préférence pour une pensée mathématique différente (visuelle, analytique ou mixte) construisaient leur compréhension de la dérivée. Ainsi, les chercheurs pouvaient mieux comprendre la nature de la compréhension des étudiants de la dérivée (*ibid.*, p. 154). Afin de faire ces observations, ils ont fait une étude de cas de trois étudiants présentant une préférence pour une pensée mathématique différente. Ils ont mené des entrevues pendant lesquelles les étudiants avaient à résoudre des problèmes incluant des graphiques (représentations visuelles des concepts). Afin d'avoir un portrait de l'évolution de la compréhension des étudiants, ils ont fait treize entrevues tout au long de la session. Ils ont observé que les étudiants qui se campent dans une pensée précise, que ce soit une pensée analytique ou visuelle, se butent à certaines difficultés dans les problèmes alors que les étudiants qui ont une pensée mixte arrivent à résoudre les problèmes. Dans cette étude, les chercheurs donnent beaucoup d'information sur la façon dont les étudiants réfléchissent face à des problèmes qui demandent une pensée conceptuelle. Le centre d'intérêt sur les différentes pensées mathématiques, sur la nature de la compréhension des étudiants, est un élément très important pour la recherche sur la compréhension en calcul différentiel. Le contexte d'entrevue, sous forme de problèmes à résoudre, était un bon moyen pour permettre l'observation et la description de ces différentes façons de faire. Maintenant qu'on en sait un peu plus sur la nature de la compréhension des étudiants, il serait intéressant d'observer le processus de construction de cette compréhension. Un contexte de cours, où il y a enseignement, pourrait permettre d'observer cette construction.

---

[10] Ils s'appuient entre autres sur Kruttskii (1976) et Presmeg (1985, 1986, 2006) (cités dans Haciomeroglu *et al.*, 2010) pour catégoriser les différentes pensées mathématiques, soit analytique, visuelle ou mixte (harmonique-logique et harmonique-visuelle).

1.2.3 Des modèles de la compréhension des étudiants en calcul différentiel

Deux auteurs ont fourni des modèles de compréhension du concept de dérivée. Zandieh (2000) a réalisé un schéma théorique pour analyser la compréhension d'un étudiant du concept de dérivée. Hähkiöniemi (2006a), de son côté, a proposé un « *hypothetical learning path* » du concept de dérivée.

L'étude de Zandieh (2000), qui est issue de son travail au doctorat (Zandieh, 1997), présente un schéma théorique pour analyser la compréhension d'un étudiant du concept de dérivée. La chercheure (Zandieh, 2000) présente ce schéma comme étant : « *an attempt to clarify, describe and organize the facets that we, as a mathematical community, consider to be part of the understanding of the concept of derivative to allow us to more systematically analyze and discuss [different] issues* » (p. 103).

L'élaboration du schéma a été faite à partir de la description de la dérivée qu'ont faite des didacticiens, des mathématiciens, des étudiants gradués en mathématiques et des étudiants des classes de calcul. Comme la dérivée est décrite comme une fonction dont la valeur est définie par la limite d'un taux, le schéma est composé de trois niveaux : taux, limite et fonction (*ibid.*, p. 106). L'étude de Zandieh décrit, en s'appuyant sur la théorie « *Process-Object pairs* » de Sfard (1992, cité dans *ibid.*) entre autres, les « *process* » et les « *objects* » qui sont liés à chacun des trois niveaux. En plus, Zandieh (*ibid.*) tient compte des différents types de représentations de ces niveaux, soit graphique, verbal, physique et symbolique. Elle obtient ainsi un tableau à double entrée pour y positionner les différents éléments de compréhension possibles de dégager du travail d'un étudiant : les trois niveaux se retrouvent en colonnes et les représentations en lignes. Elle se sert par la suite de ce tableau pour analyser la compréhension d'étudiants en utilisant différents symboles qui représentent un « *process* » ou un « *object* ». Voici un exemple d'utilisation de son schéma :

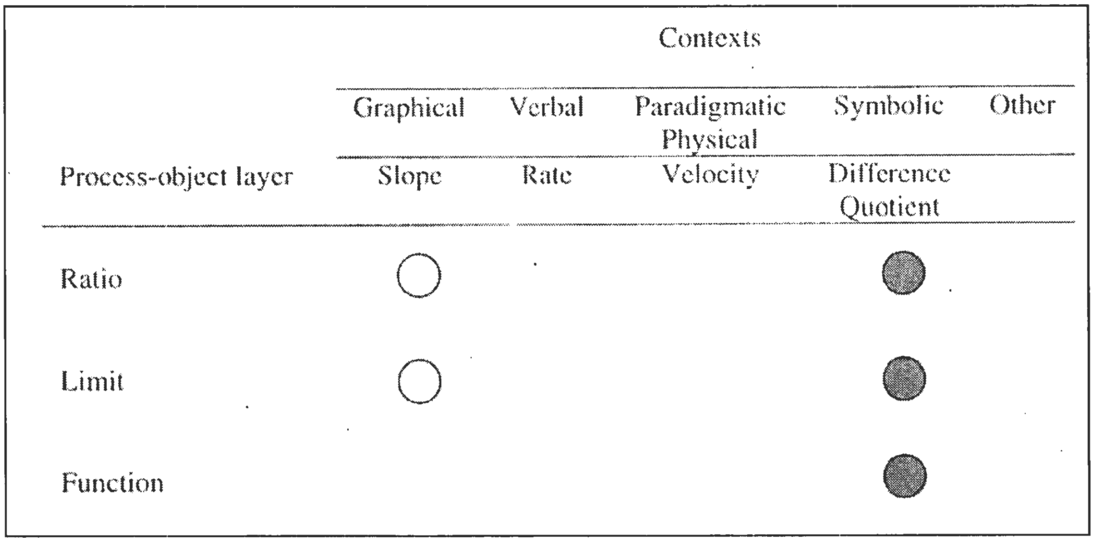


Figure 1.4 Exemple d'un schéma à la suite de l'analyse d'une entrevue avec un étudiant (Zandieh, 2000, p. 116)

Elle explique son utilisation des cercles de cette façon :

> [...] *a circle in a box denotes that a student has demonstrated (at least) a pseudo-object understanding of the row and column which intersect in that box. If the circle is shaded, then a student has also demonstrated an understanding of the process involved in the layer and context which intersect in the box.* (*Ibid.*, p. 115)

Ce schéma est certainement un outil intéressant pour informer sur les aspects que des étudiants ont développés ou non autour du concept de dérivée à un moment précis de leur apprentissage. Or, comme Zandieh (*ibid.*) le mentionne, ce schéma ne prétend pas expliquer comment ni pourquoi les étudiants apprennent le concept de dérivée d'une certaine façon. Il propose plutôt « *a map of the territory, a tool of a certain grain size that we, as teachers, researchers and curriculum developers, can wield as we organize our thinking about teaching and learning the concept of derivative* » (*ibid.*, p. 103). De plus, le schéma a été construit théoriquement en s'appuyant sur la façon dont des étudiants (entre autres) parlent du concept de dérivée et non sur la façon dont ils

« construisent/utilisent » le concept de dérivée. L'observation d'étudiants en action, en train de construire le concept de dérivée, pourrait permettre de modifier ce schéma.

Pour sa part, Hähkiöniemi (2006a) propose, sous forme de schéma, une « *hypothetical learning path* » pour la dérivée. La construction de ce schéma hypothétique de l'apprentissage de la dérivée se produit en deux temps. D'abord, il développe et met en place, dans un cours de calcul différentiel, une séquence d'enseignement de cinq séances basées sur cinq principes qu'il a dégagés à partir d'une recension des écrits. Ces cinq principes sont : « *Multiple representations as tools for thinking about the derivative advance learning* »; « *students should construct both procedural and conceptual knowledge* »; « *Students' conceptions develop partially from processes to the object* »; « *Perceptual activity and gesturing advance learning* »; et « *Open problem solving gives students possibilities to develop multiple representations* ». Ensuite, il conduit des entretiens basés sur la résolution de tâches choisies avec cinq étudiants qui ont suivi cette séquence. Il analyse ces entretiens en s'appuyant sur la théorie des « *three worlds of mathematics* » (Tall, 2004, entre autres). Ces analyses lui permettent de construire le schéma hypothétique de l'apprentissage des étudiants. Le schéma que Hähkiöniemi (2006a) propose permet d'identifier quelques éléments qui peuvent permettre aux étudiants d'approfondir leur apprentissage de la dérivée. Par contre, le schéma construit est basé sur des entretiens avec des étudiants après avoir « construit » le concept en classe. Le fait de proposer une séquence d'enseignement basée sur des principes provenant entre autres de la recherche est très intéressant. Or, l'observation de l'apprentissage des étudiants pendant cette séquence, et non après, aurait pu informer davantage sur le « chemin » possible de leur apprentissage. En effet, Hähkiöniemi (*ibid.*) construit ce schéma à partir de l'observation des étudiants une fois qu'ils ont eu l'occasion de construire le concept de dérivée. Ainsi, il ne peut que proposer une hypothèse sur la façon dont l'étudiant a construit sa compréhension du concept observée lors des entretiens.

1.3 L'objectif général de recherche

À la lumière de ce qui précède, il est clair que la compréhension des étudiants, en particulier en calcul différentiel, est un sujet qui rejoint plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques. Bien que beaucoup d'avancées aient été faites depuis plusieurs années autour de cette problématique, beaucoup de questions restent encore à explorer. En effet, le travail autour des difficultés, obstacles épistémologiques ou conceptions est énorme et offre une base solide pour le développement de tâches, activités, séances en classe pour le cours de calcul différentiel. D'ailleurs, plusieurs études ont apporté des éclairages importants autour de cet aspect. Par exemple, l'expérimentation de différents environnements d'apprentissage, de problèmes liés à la visualisation et aussi l'observation du raisonnement des étudiants lors de la résolution de ces problèmes font partie de ces avancées dans le domaine. Tous ces aspects sont aussi importants pour arriver, finalement, à pouvoir observer le développement de la compréhension de l'étudiant en tant que tel et, si possible, dans un contexte où les éléments précédents sont pris en compte, c'est-à-dire dans un cadre où l'enseignement aurait pour but de favoriser une compréhension conceptuelle.

L'objectif général de cette recherche est donc d'observer le processus d'apprentissage de la dérivée, plus particulièrement la construction d'une compréhension conceptuelle, dans un contexte d'enseignement conçu pour favoriser une telle compréhension.

CHAPITRE II

CADRE CONCEPTUEL

Dans ce chapitre, les bases conceptuelles de la recherche sont installées. La problématique mène à un questionnement autour de la compréhension conceptuelle. Il est donc primordial de prendre position sur ce qui est entendu par ce concept. Un point de vue sur le recours à différentes représentations sera adopté pour établir cette position. Dans cette optique, la théorie des registres de représentations sémiotiques de Duval (1988, 1993, 2006) et le concept de représentation fonctionnelle de Hitt (2003b, 2006) seront particulièrement convoqués. De plus, il est également incontournable de faire une analyse conceptuelle du concept ciblé dans ce projet, soit la dérivée dans le cours de calcul différentiel, dans le but de se préparer à mieux observer et décrire le processus de compréhension de ce concept par des étudiants du collégial.

2.1 La compréhension conceptuelle

Compte tenu de ce qui précède, la problématique oriente la recherche vers une perspective de compréhension conceptuelle dans les cours de calcul différentiel et en particulier vers le processus de compréhension de certains concepts précis de ce « domaine » des mathématiques. Il est donc primordial de prendre position sur ce qui est entendu par l'expression *compréhension conceptuelle* étant donné qu'elle appelle à différents points de vue en éducation, en particulier dans la communauté de didactique des mathématiques.

Dans le chapitre précédent, des études de Selden *et al.* (1989; 1999) ont été mentionnées pour montrer que plusieurs étudiants ont de la difficulté à résoudre des problèmes qui nécessitent une « compréhension conceptuelle » des concepts (voir section 1.1). À la suite de l'étude de Selden *et al.* (1989), Eisenberg et Dreyfus (1991) ont réagi. Pour eux, une explication à ces difficultés était la réticence des étudiants à utiliser des représentations visuelles des concepts en jeu. En fait, en s'appuyant sur plusieurs auteurs[11], ils écrivent que de nombreux étudiants auraient une forte préférence pour une pensée plutôt analytique que visuelle. Ils expliquent cette réticence par trois raisons : (1) la croyance ancrée que la communication en mathématiques se fait à l'aide de représentations « non visuelles » ; (2) le besoin d'enseigner les concepts dans une séquence définie (en référence aux concepts de compartimentation et linéarisation de Chevallard [cité dans *ibid.*, p. 32]) ; et (3) la difficulté qui réside dans l'identification, dans l'action, des informations (à propos des concepts) contenues dans les représentations visuelles.

Eisenberg et Dreyfus (*ibid.*) ne sont pas les seuls à accorder une grande importance à l'utilisation de la visualisation en mathématiques pour une compréhension « riche ». Zimmermann et Cunningham (1991), Vinner (1989) et Lesh, Behr et Post (1987) sont d'autres chercheurs qui ont pavé la voie à la promotion de la visualisation dans les cours de mathématiques.

De plus, comme le mentionnent plus récemment Haciomeroglu *et al.* (2010) :

[11] Mundy, Dick, Monk, Swan, Vinner (cités dans Eisenberg et Dreyfus, 1991, p. 29).

> *A growing body of research supports the assertion that understanding of mathematics is strongly related to the ability to use visual and analytic thinking. Researchers (e.g. Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996; Aspinwall & Shaw, 2002) contend that in order for students to construct a rich understanding of mathematical concepts, both visual and analytic reasoning must be present and integrated.* (p. 153)

Il est donc possible de regarder l'utilisation de la visualisation sous l'angle qu'avaient aussi adopté Eisenberg et Dreyfus (1991), soit celui de différentes pensées mathématiques. Ces pensées, brièvement mentionnées dans la section 1.2.2, qui pourraient être plutôt analytiques ou visuelles, mais qui pourraient surtout être mixtes. Lesh, Behr et Post (1987) expliquent leur vision de la compréhension comme suit : « *understanding an idea is the ability to recognize the idea embedded in different representations, to manipulate the idea within given representations, and to translate the idea from one representation to another.* » (cité dans Haciomeroglu *et al.*, 2010, p. 153).

Les auteurs s'inscrivent ici dans un mouvement qui a fait beaucoup de bruit aux États-Unis dans les années 1980-1990. Il s'agit d'une approche pratique du type « *Triple Representations Model* » (TRM), liée à trois types de représentations, soit algébriques, numériques et graphiques (Schwarz, Dreyfus et Bruckheimer, 1990). Ces représentations permettent de construire et utiliser les concepts mathématiques. En fait, la possibilité de construire et de travailler avec des objets mathématiques dépend de leurs représentations sémiotiques (Duval, 1993).

Il est clair que le concept de *compréhension conceptuelle* est très complexe et ne peut être défini en faisant l'unanimité. Une orientation doit donc être prise afin de pouvoir modéliser avec précision un processus de compréhension. En insistant sur un angle d'entrée particulier, celui des représentations, il sera possible de détailler le modèle en profondeur dans ce sens.

À la lumière de ce qui précède, l'angle privilégié pour discuter du processus de compréhension est celui des représentations sémiotiques. Pour ce faire, deux visions sur les représentations, l'une en continuité avec l'autre, seront convoquées. D'abord, la *théorie des registres de représentations sémiotiques* de Duval (1988, 1993, 2006) met de l'avant des activités cognitives importantes liées aux représentations dans différents registres sémiotiques. Entre autres, l'articulation entre représentations dans différents registres représente, pour Duval, une activité cognitive liée à l'appréhension conceptuelle d'un objet mathématique. De plus, comme l'objectif de la présente recherche est de s'informer sur le « processus » de compréhension des étudiants, une vision des représentations qui considère particulièrement les représentations intuitives des étudiants est nécessaire, puisque la théorie de Duval considère les représentations plus institutionnelles. Le concept de *représentations fonctionnelles* de Hitt (2003b, 2006) décrit les représentations intuitives en construction, en évolution, qui vont à la rencontre des représentations institutionnelles propres aux registres de représentations sémiotiques de Duval.

2.2 Les registres de représentations sémiotiques

Duval (1993) entend par *représentation sémiotique* « une production constituée par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (p. 39). Un certain nombre de caractéristiques peuvent être identifiées afin de « définir » un système de représentation donné. Duval (1995) identifie ces caractéristiques comme les règles de conformité : « Les règles de conformité permettent d'identifier un ensemble d'éléments physiques ou de traces [...] comme étant une représentation de quelque chose dans un système sémiotique. [...] Elles permettent donc la reconnaissance des représentations comme représentations dans un registre déterminé. » (p. 38).

Un système de représentation sémiotique est dit « registre·sémiotique » s'il satisfait ces « trois activités cognitives fondamentales liées à la *sémiosis* [la production de représentations] » (Duval, 1993, p. 41) : la formation d'une représentation identifiable, le traitement d'une représentation dans le registre où elle a été formée et la conversion d'une représentation vers un autre registre. De telle manière que ce sont, entre autres, les règles de conformité qui permettent les activités de formation, de traitement et de conversion nécessaires à la définition d'un registre.

Par ailleurs, Duval argumente qu'il ne s'agit pas seulement de pouvoir effectuer ces trois activités pour atteindre l'appréhension conceptuelle d'un objet (la *noésis*). En effet, c'est à travers l'articulation entre représentations internes à un même registre et l'articulation de représentations appartenant à différents registres que la *noésis* peut exister.

> *This functional difference between the various semiotic representation systems used in mathematics is essential because it is intrinsically connected with the way mathematical processes run : within a mono-functional semiotic system the processes take the form of algorithms, while within a multifunctional semiotic system the processes can never be converted into algorithms.* (Duval, 2006, p. 109)

En conséquence, pour Duval, toute activité mathématique, dont la construction d'un nouveau concept, nécessite d'avoir recours à des représentations dans différents registres sémiotiques. Il argumente que les multiples facettes d'un concept mathématique peuvent être plus ou moins explicites ou accessibles dépendamment dans quel registre elles sont représentées. Il écrit : « *Some processes are easier in one semiotic system than in another one, or even can be made in only one system* » (Duval, 2006, p. 108). Voici un exemple pour illustrer ce propos. La figure 2.1 montre deux représentations d'une même fonction :

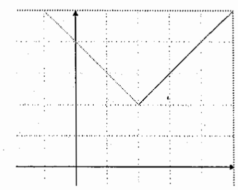
$f(x) = \lvert x - 2 \rvert + 2$	

Figure 2.1 Représentations algébrique et graphique d'une même fonction

La représentation graphique (à droite) permet de repérer sans transformation, si l'on connait les unités signifiantes de ce registre pour ce concept, un point où la fonction n'est pas dérivable. La représentation algébrique (à gauche) demande quelques manipulations afin de vérifier si la fonction est dérivable en tout point. En effet, la fonction exprimée dans le registre algébrique donne une information implicite qui demande une manipulation pour être accessible.

Un autre exemple, pour illustrer les multiples facettes d'un objet mathématique plus ou moins accessible dans différents registres, est la comparaison de deux fonctions dans le registre algébrique ou dans le registre graphique.

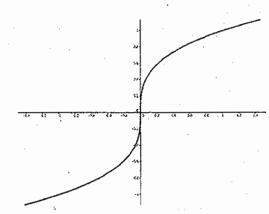
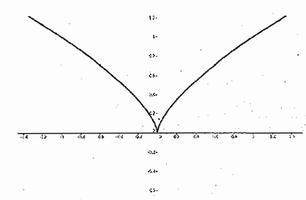
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	
$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$	

Figure 2.2 Comparaison de deux fonctions dans le registre algébrique (à gauche) et dans le registre graphique (à droite)

Encore une fois, la comparaison des deux représentations graphiques (à droite) est plus explicite sur le comportement des deux fonctions que les deux représentations algébriques (à gauche).

Cette vision de la compréhension va tout à fait dans le sens de Hiebert et Carpenter (1992) qui définissent la compréhension comme :

> *A mathematical idea or procedure is understood if it is part of an internal network. More specifically, the mathematics is understood if its mental representation is part of a network of representations. The degree of understanding is determined by the number and the strength of the connections.* (p. 67)

En effet, Hiebert et Carpenter (*ibid.*) mentionnent, comme Duval (1988), l'idée de créer un réseau, des relations entre des représentations. De plus, le concept de « *strenght* » de ces liens pourrait être associé aux différentes actions que l'élève peut poser, qui peuvent être plus ou moins difficiles.

Plus tard, Duval (2006) ajoute qu'une bonne compréhension conceptuelle permet de reconnaître dans des représentations (de différents registres) les éléments nécessaires pour résoudre un problème. Ainsi, dans la construction d'un concept mathématique, il serait nécessaire de construire une articulation entre les représentations, ce qui implique que dans l'apprentissage d'un nouveau concept, un registre ne devrait pas être favorisé au dépend d'un autre. Or, il a été révélé qu'une préférence pour le registre algébrique est souvent notable dans la pratique des enseignants et dans les manuels (Dufour, 2011; Tall, 1992). La priorité à un registre ou à un autre devrait donc être déplacée dans l'enseignement une fois que l'articulation entre représentations fait partie de la pensée des étudiants. De plus, cette priorité pourrait être déterminée, autant que possible, par les étudiants et non imposée par les enseignants ou les manuels. Ainsi, dans un processus d'apprentissage, les différentes représentations des objets mathématiques devraient être, le plus possible, au même niveau d'importance.

Voici un schéma que Duval (1993) utilise pour résumer sa théorie :

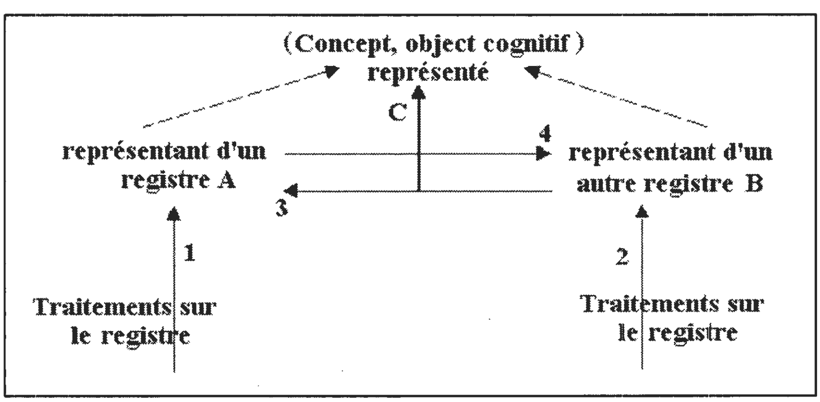


Figure 2.3 Modèle de la représentation centrée sur la fonction d'objectivation

> Les flèches 1 et 2 correspondent aux transformations internes d'un registre. Les flèches 3 et 4 correspondent aux transformations externes, c'est-à-dire à des conversions de représentation par changement de registre. La flèche C correspond à ce que nous appellerons la compréhension intégrative d'une représentation : elle suppose une coordination des deux registres. Les flèches en pointillé correspondent à la distinction classique entre représentant et représenté. Naturellement, ce schéma envisage le cas le plus simple de coordination entre deux registres. (Duval, 1993, p. 51)

Duval décrit plusieurs types d'actions possibles sur les représentations d'un concept. Bien que l'articulation ou la coordination des représentations soit l'étape ultime de l'intégration d'un concept selon lui, la reconnaissance, la formation, le traitement et la conversion sont aussi des actions, préliminaires à l'articulation, importantes sur les représentations pour la construction d'un concept. Il est important de bien établir ce que Duval entend par ces différentes actions.

2.2.1 Les activités cognitives fondamentales sur les représentations

D'abord, l'activité de « formation » d'une représentation dans un certain registre consiste en la production d'une nouvelle représentation dans ce registre. Étant donné que, dans le cadre de Duval, les systèmes sémiotiques sont déterminés *par* et *pour* un domaine particulier à l'aide de règles de conformités, la formation de représentations demande, tout d'abord, le respect de ces règles. Par exemple, une règle de conformité du registre graphique est la présence de deux axes, un axe horizontal et un vertical, qui se coupent en un point qui est caractérisé par les coordonnées (0,0).

Or, bien que les règles permettent d'abord l'action de « reconnaissance » d'une représentation, c'est-à-dire l'identification de l'appartenance d'une représentation à un certain registre, l'action de « formation » d'une représentation va au-delà de ces dernières. En effet, pour produire une représentation nouvelle, il n'est pas suffisant de traiter une à une les différentes règles de conformité. Cela demande une analyse globale des informations nécessaires, liées à différentes règles, pour produire cette représentation. Par exemple, pour « former » une représentation dans le registre graphique d'une fonction (objet mathématique en jeu), il faut produire des axes et savoir que l'axe horizontal représente la variable indépendante de la fonction et que l'axe vertical représente la variable dépendante de la fonction. De plus, il faut aussi considérer que pour chaque valeur de la variable indépendante, il existe au plus une valeur de la variable dépendante. Dans le registre graphique, cette propriété du concept de fonction se traduit souvent par une règle de conformité qui est souvent formulée ainsi : « Lorsqu'on imagine des droites verticales dans un plan cartésien, chacune d'elles doit croiser la relation en *au plus* un point pour que la relation soit une fonction. » (Boucher, Marotte et Coupal, 2007, p. 72).

Une deuxième activité cognitive possible est le « traitement » d'une représentation. Il s'agit d'une transformation de représentation à l'intérieur d'un même registre en utilisant des règles d'expansion, propres ou non à ce registre donné. Par exemple, la transformation de l'équation d'une fonction donnée sous sa forme générale ($f(x) = ax^2 + bx + c$) en sa représentation sous sa forme canonique ($f(x) = (x - h)^2 + k$). Un autre exemple, la dérivée en un point d'une fonction donnée par sa représentation algébrique peut être calculée à l'intérieur de ce registre en appliquant une règle de dérivation ou en utilisant une définition dans le registre algébrique de la dérivée (voir figure 2.4 à gauche). Il s'agit alors d'un traitement, car la représentation de départ (représentation algébrique d'une fonction) est manipulée pour obtenir une nouvelle représentation (représentation algébrique de la dérivée de la fonction donnée) tout en restant dans le même registre de représentation. Dans ce cas, le traitement mène à modifier une représentation au point où la représentation de départ ne représente pas le même concept ou le même objet que la représentation d'arrivée (fonction vers fonction dérivée). Le même traitement, de la fonction à la fonction dérivée en un point donné, est aussi présenté dans le registre graphique (voir figure 2.4 à droite).

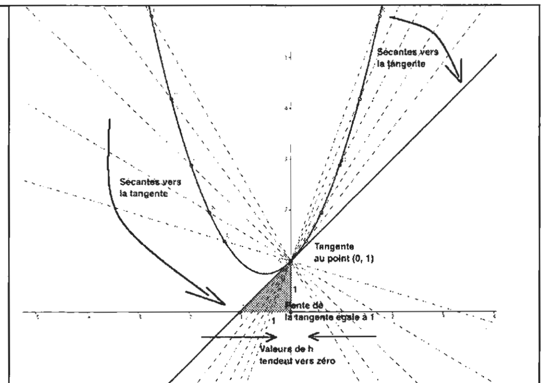
$f(x) = x^2 + x + 1$ $f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0 + \Delta x)^2 + (0 + \Delta x) + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{\Delta x}$ $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 1)}{\Delta x}$ $f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + 1 = 1$	
Traitement algébrique du calcul de la dérivée en $x = 0$	Traitement graphique de la dérivée en x = 0

Figure 2.4 Traitement algébrique et graphique d'une fonction vers sa dérivée en x=0

La troisième activité cognitive à laquelle Duval accorde beaucoup d'importance est l'activité de « conversion ». Cette activité consiste en la modification d'une représentation dans un certain registre pour produire une nouvelle représentation dans un registre différent (Duval, 1995). Comme mentionné précédemment, les représentations dans les registres variés d'un concept donnent des informations différentes sur ce dernier. Par exemple, l'étudiant ne retirera pas nécessairement toutes les mêmes informations sur un concept à partir de sa représentation algébrique ou à partir de sa représentation graphique (comme on peut le voir dans le tableau 2.1). En conséquence, lors d'une conversion, certaines informations sont sélectionnées, jugées nécessaires pour la production de la nouvelle représentation, et ce, parfois au prix de quelques informations qui deviennent implicites dans la nouvelle représentation.

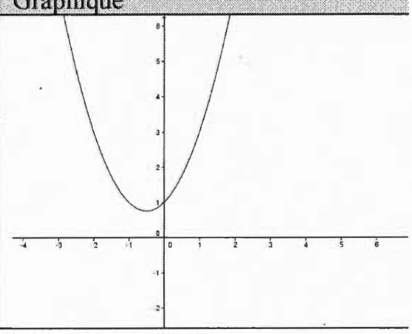
Duval insiste sur le fait que la conversion est une activité cognitive complexe : « La conversion des représentations sémiotiques constitue l'activité cognitive la moins spontanée et la plus difficile à acquérir chez la grande majorité des élèves. » (Duval, 1995, p. 44).

> [...] changer la forme d'une représentation s'avère être, pour beaucoup d'élèves aux différents niveaux d'enseignement, une opération difficile et parfois même impossible. Tout se passe comme si la compréhension que la grande majorité des élèves avaient d'un contenu restait limitée à la forme de représentation utilisée. (Duval, 1995, p. 19)

La conversion ne se limite pas à l'application de règles de correspondance. En effet, elle se distingue des activités d'*interprétation* ou de *codage* qui elles, relèvent de règles de correspondance ou de substitution. Par *interprétation*, Duval (1993) reconnait plutôt un changement de contexte qu'un changement de registre. Il s'agit d'un changement souvent basé sur des analogies, ce qui évoque des contextes particuliers plus que des registres différents. Par *codage*, il (*ibid.*) identifie une « transcription » ou une série de substitutions. En fait, le *codage* implique un travail « sur les signifiants composant la représentation, sans prendre en compte l'organisation de la représentation ni ce qu'elle représente. » (Duval, 1993, p. 43).

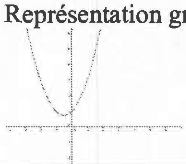
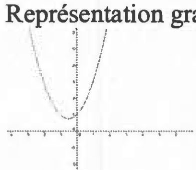
Un bon exemple de la distinction entre *codage* et *conversion* est la production d'une représentation graphique d'une fonction à partir de sa représentation algébrique. Pour effectuer cette « transformation » par *codage*, il s'agirait de trouver, en calculant, quelques coordonnées qui appartiennent à la fonction donnée, de reporter ces couples dans le plan cartésien et de les relier. Ceci consiste en une succession d'étapes qui sont plutôt algorithmiques et dépourvues de sens. Pour faire une conversion, il s'agirait d'abord d'identifier des unités signifiantes de la représentation algébrique pour les transformer en unités signifiantes de la représentation graphique. Par exemple, des unités signifiantes de la représentation algébrique pourraient être : identifier si la fonction appartient à une famille de fonctions (polynomiale, exponentielle, etc.), identifier (ou calculer si nécessaire) les zéros, identifier les extrémums, etc. Ainsi, la conversion est une activité cognitive importante parce qu'une fois que ces unités signifiantes sont identifiées, il faut ensuite savoir comment elles se transforment en unités signifiantes du registre d'arrivée. Par exemple, avec la fonction déjà proposée en exemple à la figure 2.4, il est possible de dégager des unités signifiantes pour la représentation algébrique, des unités signifiantes pour la représentation graphique et de les mettre en correspondance afin de faire une conversion (voir tableau 2.1 qui suit).

Tableau 2.1
Unités signifiantes associées à des représentations différentes d'une même fonction

Registre	Algébrique	Algébrique	Graphique
Représentation d'une fonction donnée	$f(x) = x^2 + x + 1$ (forme générale)	$f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ (forme canonique)	
Unités signifiantes	Polynôme de degré 2 $f(x) > 0$ Si x =0 alors y =1.	Polynôme de degré 2 Le sommet a comme coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. $f(x) > 0$	Forme de parabole Ouverte vers le haut La courbe est au-dessus de l'axe des x. Le sommet a comme coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. La courbe coupe l'axe des y en y=1.

La conversion, dans le sens de Duval, consiste à identifier et associer les unités signifiantes de chaque registre. En référence à l'exemple précédent, une conversion de la représentation algébrique (« forme générale ») à une représentation graphique nécessite l'association : du polynôme de degré deux à une parabole, de la valeur de *f(x)* quand *x=0* à l'endroit sur le graphique où la courbe coupera l'axe des *y* et des valeurs de *f(x)* plus grandes que zéro à la présence de la courbe au-dessus de l'axe des x (voir tableau 2.2).

Tableau 2.2
Correspondance entre les unités signifiantes des deux représentations impliquées dans une conversion.

Conversion	Correspondance des unités signifiantes
Représentation algébrique $f(x) = x^2 + x + 1$ (forme générale) VERS Représentation graphique 	Polynôme de degré 2 $\rightarrow$ parabole (dû à la caractéristique de variation) $f(x) > 0 \rightarrow$ La courbe est au-dessus de l'axe $f(x) > 0 \rightarrow$ La parabole est ouverte vers le haut Quand *x=0, y=1* $\rightarrow$ La courbe coupe l'axe des y quand *y=1*. $\boxed{\quad\quad} \rightarrow$ Le sommet a les coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
Représentation algébrique $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ (forme canonique) VERS Représentation graphique 	Polynôme de degré 2 $\rightarrow$ parabole (dû à la caractéristique de variation) $f(x) > 0 \rightarrow$ La courbe est au-dessus de l'axe Le sommet a les coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \rightarrow$ Le sommet a les coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ Le sommet a les coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) + f(x) > 0 \rightarrow$ La parabole est ouverte vers le haut $\boxed{\quad\quad} \rightarrow$ La courbe coupe l'axe des y quand *y=1*.

Par contre, la mise en correspondance de ces unités signifiantes n'est pas toujours suffisante pour pouvoir produire une nouvelle représentation. Bien que certaines de ces unités signifiantes puissent tenir sur une liste, la justification de leur correspondance et la production de la nouvelle représentation dans le registre d'arrivée nécessitent une interprétation globale de l'objet mathématique dans le registre de départ. D'ailleurs, Duval (2007) mentionne que la correspondance entre les unités de signifiances de deux représentations ne relève pas de « règles de correspondance » bien établies, cette correspondance va bien au-delà. Il justifie cette affirmation par deux raisons dont une à laquelle il accorde plus d'importance : « Ensuite, et c'est la raison la plus importante, les correspondances sont indiquées entre des unités de sens qui ne sont pas immédiatement isolables comme telles, c'est-à-dire qui ne constituent pas des éléments discrets pouvant être assemblés en une représentation. » (*Ibid.*, p. 23).

En conséquence, si l'activité de *formation* demande de connaitre les unités signifiantes liées à un registre donné, la *conversion* requiert la reconnaissance des unités signifiantes des deux registres, mais également l'articulation entre celles-ci. La conversion se distingue donc de la formation de deux représentations dans deux registres différents, mais faites de façon parallèle (Duval, 1993). Un étudiant peut former deux représentations dans deux registres différents, mais ne pas convertir l'une pour obtenir la deuxième.

De plus, la conversion d'un registre à un autre peut être plus ou moins évidente, selon le niveau de correspondance entre les deux représentations. Deux caractéristiques peuvent informer sur ce niveau de correspondance de la conversion : la congruence/non-congruence et la réversibilité/non-réversibilité. Afin d'analyser la congruence entre deux représentations, il faut d'abord dégager les unités signifiantes des deux représentations pour ensuite les mettre en correspondance et les comparer (un peu comme dans l'exemple précédent). Il y a trois critères de congruence (Duval, 1995) :

- « La possibilité d'une correspondance "sémantique" des éléments signifiants : à chaque unité signifiante simple de l'une des représentations, on peut associer une unité signifiante élémentaire. » (*Ibid.*, p. 49). En d'autres termes, afin de faire correspondre les unités signifiantes de chaque registre, il n'est pas nécessaire d'effectuer de manipulation interne (traitement) pour y arriver. Les unités signifiantes sont plus ou moins explicites dans leur registre respectif, la correspondance sémantique est donc plus ou moins grande.

- L'univocité « sémantique » terminale : « à chaque unité signifiante élémentaire de la représentation de départ, il ne correspond qu'une seule unité signifiante élémentaire dans le registre de la représentation d'arrivée. » (*Ibid.*, p. 49). En d'autres termes, une correspondance qu'on pourrait qualifier de « fonctionnelle » existe entre les unités signifiantes de chaque registre : à une unité signifiante d'une représentation dans un registre est associée une unité signifiante d'une représentation de l'autre registre. Il arrive qu'une unité signifiante dans un registre puisse être associée à plus d'une unité signifiante dans un autre registre. Par exemple, l'unité signifiante $f(x) > 0$ dans les représentations algébriques données dans les tableaux 2.1 et 2.2 correspondant à deux unités signifiantes dans le registre graphique, ainsi la courbe sera au-dessus de l'axe des x et la parabole sera ouverte vers le haut. Dans ce cas, il n'y a pas une univocité sémantique terminale.

- L'ordre dans l'arrangement des unités composant chacune des deux représentations : « Les organisations respectives des unités signifiantes des deux représentations comparées conduit à y appréhender les unités en correspondance sémantique selon le même ordre dans les deux représentations. » (*Ibid.*, p. 49)

En faisant l'analyse de ces trois critères, il est possible de voir si les deux représentations ont une plus ou moins grande correspondance sémantique et donc de voir si elles sont plus ou moins congruentes. Il va sans dire que moins les représentations sont congruentes, plus la conversion est difficile. Par exemple, dans le tableau 2.1, la représentation algébrique de « forme générale » et la représentation graphique ont une moins grande correspondance que la représentation algébrique de « forme canonique » et la représentation graphique, surtout en raison des coordonnées du sommet qui sont explicites dans la représentation algébrique de « forme canonique ». Pour la même raison, cette deuxième conversion (représentation algébrique de « forme canonique » et représentation graphique) est aussi plus facilement réversible que la conversion impliquant la représentation algébrique de « forme générale ».

L'autre caractéristique importante à considérer dans une conversion est la réversibilité. Il s'agit en fait de reconnaitre que le niveau de congruence ou de difficulté d'une conversion ne sera pas nécessairement le même dans un sens ou dans l'autre. En fait, si l'on change la direction de la conversion, celle-ci devient une tout autre tâche, une nouvelle conversion (Duval, 2006).

Finalement, afin de comprendre un concept, il faut coordonner ou articuler des représentations de différents registres. Lorsque l'élève peut articuler différentes représentations de registres variés, c'est qu'il peut former, traiter et surtout convertir (dans diverses directions) des représentations dans différents registres. En effet, Duval (2007) écrit :

> Mais pour qu'une multireprésentation puisse favoriser la compréhension, il faut que les élèves soient capables d'effectuer eux-mêmes les différents passages entre les représentations que l'on juxtapose ou que l'on associe par leur mise en parallèle. C'est la condition cognitive pour une compréhension « conceptuelle ». (p. 15)

Ainsi, dans ce projet, le processus de compréhension des élèves sera discuté en termes de représentations et d'actions posées sur ces dernières.

2.2.2 Les registres en calcul différentiel

Les registres de représentation sont propres au domaine étudié. Ils ne seront pas les mêmes en mathématiques ou en français, par exemple. C'est également le cas dans différentes branches des mathématiques. Il y aura des registres différents en géométrie et en analyse. Ainsi, il est important, comme ce projet se concentre sur le domaine de l'analyse en mathématiques et plus particulièrement autour du concept de dérivée, de définir les différents registres de représentation associés à ce domaine.

Les différents registres identifiés dans ce domaine sont : verbal (la langue naturelle, qu'elle soit parlée ou écrite), algébrique, graphique, tabulaire et numérique.

Bien que l'élève doive construire sa propre compréhension du concept de dérivée, certaines représentations et actions possibles sur celles-ci sont admises par la communauté mathématique, particulièrement du collégial (enseignants, manuels, programmes). Afin d'illustrer les registres de représentations cités plus haut, des exemples de ces représentations dites « institutionnelles » ou « formelles » seront présentés.

Une représentation verbale, qu'elle soit orale ou écrite, peut prendre la forme d'un mot, d'une expression, d'une phrase ou d'une explication propre à un concept. Par exemple, « la dérivée », représentation verbale en soi de ce concept, peut aussi être représentée par les expressions : taux de variation instantané et vitesse instantanée (dans un contexte particulier), entre autres. Le registre verbal est particulier, car il complète souvent des représentations d'un autre registre. La connotation entre la représentation verbale et d'autres représentations du même objet dans d'autres registres est souvent forte. Par exemple, la représentation verbale « pente de la droite tangente » renvoie presque automatiquement, dans la pratique, à une représentation graphique de la dérivée (Dufour, 2011). Il est aussi clair que le registre verbal a un statut particulier dans un contexte d'enseignement, comme Duval (2006) le mentionne : « *And in the classroom we have a very specific practice of simultaneously using two registers. It is spoken in natural language, while it is written in symbolic expressions as if verbal explanations could make any symbolic treatment transparent (Duval, 2000b, pp. 150-155).* » (Duval, 2006, p. 114).

Ce phénomène est possiblement plus facile à observer chez un enseignant, mais il sera certainement présent chez les élèves, et ce, en particulier lors de discussions entre l'élève et l'enseignant, ou entre élèves. L'utilisation de représentations appartenant au registre verbal sera peut-être plus fréquemment observée dans le processus de compréhension de l'élève que celle d'autres registres, entre autres en raison de la promotion des interactions lors de l'expérimentation (voir chapitre III).

Les représentations propres au registre algébrique sont celles qui sont exprimées à l'aide des symboles mathématiques. Bien que des règles de conformité existent pour chaque registre, celles du registre algébrique sont particulièrement nombreuses. En effet, chaque symbole est associé à un concept, à un sens précis. Il y a diverses représentations dans le registre algébrique utilisées pour représenter le concept de dérivée. En voici quelques-unes:

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a),$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a),$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Figure 2.5 Différentes représentations algébriques de la dérivée

Ces représentations occupent une place importante dans la communauté mathématique et plus particulièrement dans celle du collégial (Tall, 1992). Il semble être un registre privilégié par des enseignants et des manuels de mathématique au cégep (Dufour, 2011; González-Martín, Seffah et Nardi, 2009).

Les représentations formelles dans le registre graphique sont un peu moins nombreuses que dans le registre verbal ou algébrique.

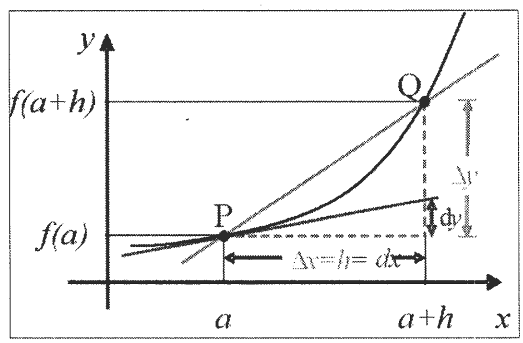


Figure 2.6 Représentation graphique d'une droite sécante et d'une droite tangente en un point d'une courbe[12]

Une autre représentation qui peut apparaitre lors de l'étude du calcul différentiel est associée à une approche basée sur le changement des graduations dans un plan cartésien pour créer un effet de zoom sur le graphique (voir figure 2.7). La figure 2.7 montre des graphiques (les deux graphiques du haut) de la fonction $f(x) = x^2 + x + 1$ et d'une droite qui peut sembler être une droite tangente en un point de la fonction. Par contre, avec l'effet du zoom, les deux graphiques du bas montrent que la droite qui semblait être tangente ne l'est pas, et qu'il s'agit plutôt d'une droite sécante. Cette approche peut

[12] Image tirée du site internet d'un enseignant au collégial : http://calculdifferentiel.jvilleneuve.ep.profweb.qc.ca/index.php/Chapitre_3:_La_d%C3%A9riv%C3%A9e

permettre d'apprendre à considérer des valeurs de x ou des intervalles très petits (voire éventuellement, infiniment petits).

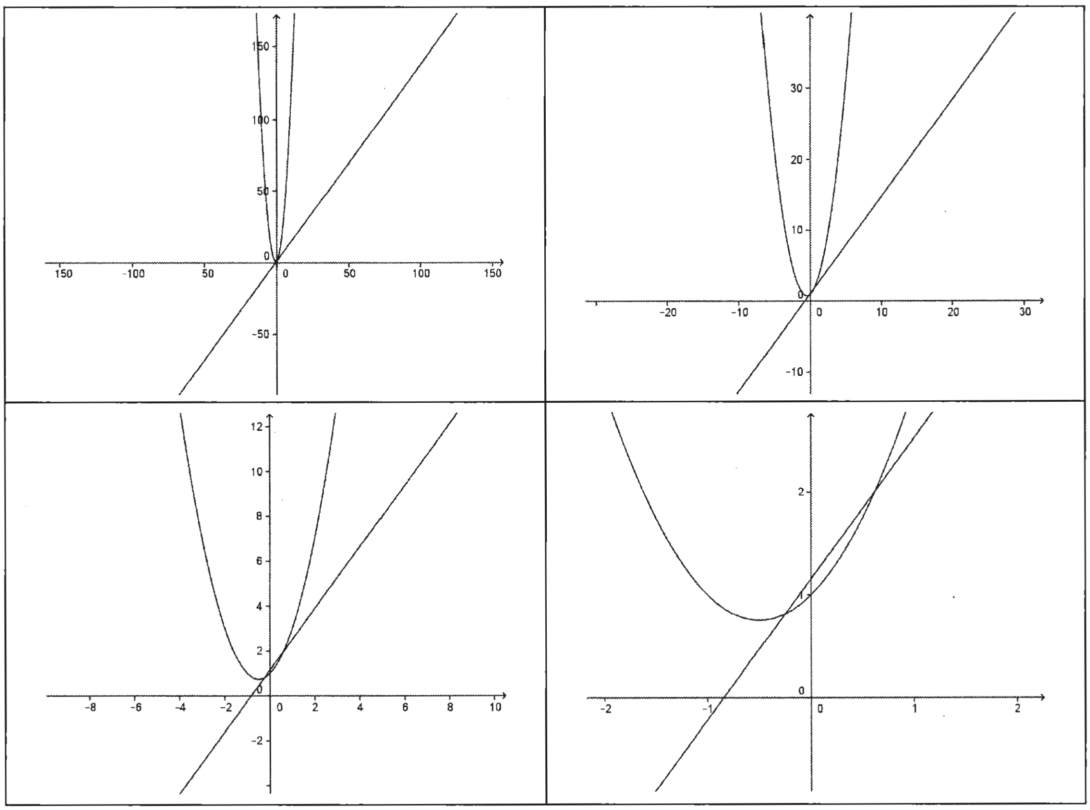


Figure 2.7 Graphiques de la fonction $f(x)+\ x^2+x+1$ zoomé à l'aide du logiciel GéoGebra

Au niveau du registre tabulaire, dans le cours de calcul différentiel, les tableaux de valeurs prennent le plus souvent la forme d'un tableau de signes ou d'un tableau de croissance. Voici un exemple pour chacun de ces tableaux :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Figure 2.8 Tableau de signes pour une fonction *f(x)*[13]

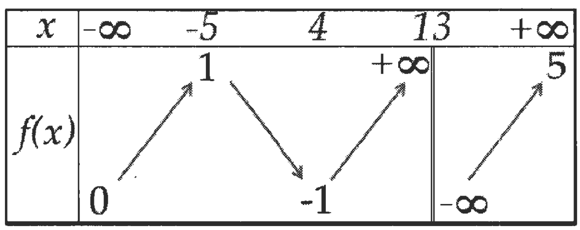


Figure 2.9 Tableau de croissance d'une fonction *f(x)*[14]

Ces représentations ne seront pas nécessairement utilisées pour représenter le concept de dérivée en tant que tel, mais plutôt pour représenter une application de ce dernier dans l'étude de fonctions. Ces tableaux sont habituellement liés à une représentation d'un autre registre (algébrique et graphique) ou encore ils servent de lien entre ces deux derniers registres afin de compléter une conversion.

Pour ce qui est du registre numérique, il sera le plus souvent sous forme de valeurs associées à une autre lors de l'évaluation d'une fonction ou du calcul de la dérivée en un point. Ce type de représentations sera absolument issu d'une conversion à partir

[13] Source : http://braise.univ-rennes1.fr/donnees/ParamHTML/Fonctions%20de%20R%20dans%20R/met/Eudier%20le%20signe%20d%27une%20fonction/cst.html (image consultée le 26 avril 2013).

[14] Source : http://www.siteduzero.com/sciences/tutoriels/les-equations-4/tableaux-de-variation (image consultée le 26 avril 2013).

d'un autre registre. La figure 2.10 montre des exemples de conversions de différentes représentations d'une fonction vers le registre numérique.

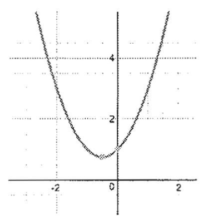
Représentations dans un registre de départ	Représentations dans le registre numérique
$f(x) = x^2 + x + 1$ Représentation d'une fonction dans le registre algébrique	$f(1) = 3$ Représentation numérique de la fonction *f* pour une valeur donnée de *x*, soit *x=1*. Cette représentation reste tout de même liée, par sa forme, au registre algébrique.
	(1,3) Représentation numérique de la fonction pour une valeur donnée de *x*, soit *x=1*. Cette représentation reste tout de même liée, par sa forme, au registre graphique.

Figure 2.10 Exemples de conversions vers le registre numérique

La section 2.2 présente les grandes lignes de la théorie des registres de représentations sémiotiques de Duval. Ce qui précède a permis, dans un premier temps, de définir ce qui était entendu par registre de représentations et, par la suite, d'identifier différents registres propres au domaine du calcul différentiel. Dans un deuxième temps, des actions possibles sur ces représentations ont aussi été identifiées.

Par contre, cette articulation des différentes représentations d'un concept est un processus. Ainsi, non seulement les élèves ne peuvent faire naturellement toutes les activités cognitives sur les différentes représentations, mais ils ne peuvent pas non plus connaitre toutes les règles de conformité de chacun des registres pour le nouvel objet mathématique. Tout ça se construit à travers un processus. Afin d'éclairer ce processus de compréhension du concept de dérivée, il faut donc admettre une forme de représentation qui n'est pas nécessairement formelle ou institutionnelle, qui ne respecte pas nécessairement les règles de conformité des différents registres de représentations. Il faut observer et caractériser des représentations plus intuitives.

2.3 L'aspect évolutif de la compréhension à travers les représentations

Dans cette section, l'aspect évolutif de la compréhension est mis de l'avant à l'aide du cadre théorique des représentations fonctionnelles de Hitt (2006, entre autres). Ces représentations sont liées aux représentations intuitives des étudiants tout au long du processus de compréhension. Ces nouvelles représentations imposent également la considération d'un nouveau « type » de représentation, le schéma ou les représentations schématiques.

2.3.1 Les représentations fonctionnelles

Les travaux de diSessa, Hammer et Sherin (1991) mettent de l'avant l'aspect intuitif des représentations. Leur idée sur les représentations prend la forme du concept de *méta-représentations*. Ces chercheurs définissent le concept de « *meta-representational competence by [...] the faculty to generate, critique, and refine representational forms* » (diSessa *et al.*, 1991, p. 118). Ils insistent sur le fait que cette compétence ne requiert aucune habileté particulière en ce qui concerne les représentations. En fait, en ajoutant le terme « méta », ils amènent l'idée de l'intuition de la production d'une représentation qui peut aider à expliquer une situation, un phénomène. Il s'agit d'un type de représentations qui ne colle pas nécessairement aux représentations établies par l'institution. C'est plutôt l'idée de pouvoir créer et modifier une représentation viable et intuitive d'un concept mathématique.

Les travaux de Hitt (2003b, 2006) et Hitt et Morasse (2009) vont aussi dans cette direction. Ils approfondissent le concept de représentation fonctionnelle qui est, d'un point de vue théorique, en continuité avec les méta-représentations de diSessa *et al.* (1991), entre autres. D'abord, Hitt (2006) décrit les représentations institutionnelles comme les représentations admises par la communauté mathématique (dans cette étude, la communauté mathématique du collégial). Ce sont les représentations dans les programmes, dans les manuels et celles souvent utilisées par les enseignants. En conséquence, il décrit les représentations fonctionnelles comme les représentations spontanées utilisées ou produites le plus souvent par les étudiants, mais aussi parfois par les enseignants. Ces représentations accompagnent le processus de compréhension d'un nouveau concept. Comme exemple de représentations fonctionnelles, voici celles d'un étudiant qui recherche la forme qu'aurait la représentation graphique d'une fonction donnée (voir figure 2.11).

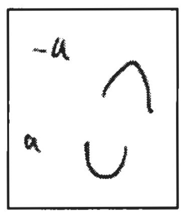


Figure 2.11 Représentations fonctionnelles liées au registre graphique d'un étudiant lors d'une résolution de problème (Cahier de l'étudiant Guillaume, Séance 5, p. 1)

Dans le but de déterminer dans quel « sens » serait l'ouverture de la courbe représentant une fonction donnée par sa représentation algébrique, l'étudiant produit deux possibilités de représentations sans placer les courbes dans un plan cartésien. Ainsi, ces représentations sont fonctionnelles, car elles ne respectent pas les règles de conformité du registre graphique, mais elles peuvent quand y être associées.

En développant l'idée des représentations fonctionnelles, Hitt est dans une perspective de complémentarité avec la théorie de Duval. Il voit les représentations de la théorie de Duval comme des représentations plus formelles ou institutionnelles, mais les actions posées sur ces représentations sont aussi possibles et souhaitables avec les représentations fonctionnelles. Or, Hitt (2003b) remarque que « lors de la construction des concepts, les représentations produites par les étudiants sont loin d'être celles qui sont attendues par le professeur (représentations institutionnelles) » (p. 258). Il est important de considérer ces représentations fonctionnelles dans le processus de compréhension de l'élève.

Comme elles sont intuitives et souvent propres à un élève ou un enseignant, les représentations fonctionnelles sont caractérisées par le fait qu'elles ne respectent pas les règles de conformité définissant les registres de représentations. C'est d'ailleurs aussi ce qui les distingue des représentations institutionnelles. Les représentations fonctionnelles peuvent cependant se rapprocher d'un registre. Dans ce cas, il est possible d'y reconnaitre quelques éléments qui permettent de les associer à un registre. Dans ce projet, les représentations observées seront « liées » à un registre, mais il sera précisé si elles sont institutionnelles (respectent les règles de conformité du registre) ou fonctionnelles. De cette façon, une représentation sera qualifiée par deux éléments : son type, c'est-à-dire le registre auquel elle appartient ou s'apparente ; et sa nature, soit institutionnelle ou fonctionnelle.

Hitt et Morasse (2009) ajoutent que ces représentations fonctionnelles, qui sont un aspect du processus de compréhension d'un nouveau concept, sont en évolution. Les représentations fonctionnelles, comme l'ont aussi observé diSessa *et al.* (1991), évoluent à travers des interactions avec d'autres élèves et avec l'enseignant. C'est en confrontant ses représentations fonctionnelles avec celles d'autres élèves et celles de son enseignant (possiblement institutionnelles) qu'un élève sera appelé, dans un premier temps, à expliquer dans le même registre ou dans un autre (ce qui l'amènerait alors à effectuer une conversion) sa représentation et, dans un deuxième temps, à faire évoluer sa représentation. Ainsi, afin de mieux comprendre le processus de compréhension des étudiants, ces représentations fonctionnelles doivent être prises en compte. De plus, ces interactions nécessaires à provoquer des conversions ou traitements entre différents types de représentations (fonctionnelles ou institutionnelles) ouvrent la possibilité de mieux décrire un processus de compréhension qui pourrait être entièrement ou en partie lié à un ou plusieurs étudiants.

2.3.2 Deux autres « types » de représentation : le schéma et le geste

L'ouverture aux représentations fonctionnelles, c'est-à-dire à des représentations qui ne respectent pas nécessairement des règles de conformité établies, nécessite la définition de nouveaux types de représentations, les schémas et les gestes. Les schémas rassemblent toutes sortes de représentations fonctionnelles, comme les dessins, les croquis ou les esquisses. La catégorie « schéma » ne peut pas être qualifiée de « registre » étant donné qu'elle ne possède pas de règles de conformité proprement dites. Dans ce projet, elle sera considérée comme un type de représentations possible, au même titre que les représentations faisant partie du registre algébrique ou graphique par exemple. Or, il faut préciser que toutes les représentations fonctionnelles ne sont pas schématiques. En effet, comme il a été dit précédemment, une représentation fonctionnelle pourra être « associée » à un registre même si celle-ci ne respecte pas nécessairement toutes les règles de conformité de ce registre.

Voici un exemple d'une représentation dans le registre schématique d'une situation dans laquelle la dérivée pourrait être étudiée :

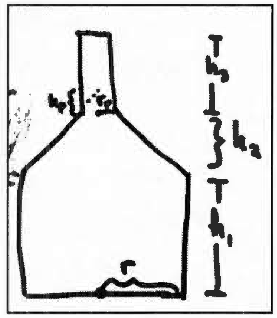


Figure 2.12 Schéma d'une situation proposée en mots d'une bouteille que l'on remplit

Dans ce cas, la représentation n'appartient à aucun registre défini précédemment (graphique, algébrique, verbal, tabulaire, numérique). Elle est une représentation se rapprochant d'un dessin qui contient tout de même des informations de plus sur une situation donnée à étudier. Dans ce schéma, l'étudiant a identifié des variables à étudier et même différentes phases qui auront une variation différente. D'autres exemples de schémas qui contiennent plus ou moins d'information sur une situation donnée se trouvent dans un article de González-Martín, Hitt et Morasse (2008) (voir figure 2.13).

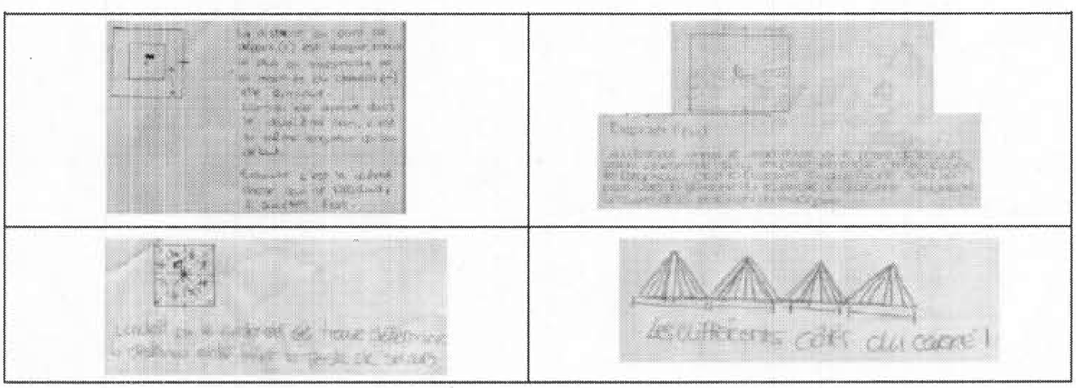


Figure 2.13 Schémas faits par des élèves dans le cadre de la résolution d'une situation-problème lors de la construction du concept de covariation (González-Martín *et al.*, 2008)

Les gestes font aussi partie des représentations qui ne suivent pas nécessairement les règles établies liées à un registre en particulier. Ils peuvent cependant être très intéressants pour mieux comprendre le processus de compréhension des étudiants, que ce soit plus généralement ou des représentations plus précises. Les gestes vont souvent être complémentaires à une représentation d'un autre type. Par exemple, plusieurs étudiants, voire enseignants, vont appuyer une représentation verbale, une explication en mots, par un ou des gestes qui aideront à illustrer leur propos.

Ces types de représentations s'avèrent importants à analyser afin de mieux comprendre le processus de compréhension des étudiants. Le schéma apparait souvent au début d'une résolution de problème, il donne alors beaucoup d'éléments permettant de mieux comprendre les informations et concepts que l'étudiant identifie dans une situation. Les gestes, quant à eux, peuvent venir appuyer une représentation d'un autre type.

2.3.3 En résumé

À la lumière des trois sections précédentes (2.1, 2.2 et 2.3), trois aspects primordiaux ont été identifiés afin de pouvoir mieux observer et comprendre le processus de compréhension des étudiants. Ce processus relève, selon la position adoptée pour ce projet, des types de représentations (algébrique, graphique, verbal, tabulaire, numérique, schématique, gestuel), de la nature des représentations (institutionnelle ou fonctionnelle), et des actions posées sur celles-ci (reconnaissance, production, traitement, conversion, coordination).

2.4 Les objectifs spécifiques de recherche

À la lumière de la position prise sur la compréhension conceptuelle et le processus de compréhension, la recherche se situe dans un contexte particulier où le recours à différentes représentations doit être encouragé. De plus, l'observation du processus de compréhension se fera à travers l'observation des représentations au cours de la construction du concept de dérivée par un et des étudiants.

Il est possible de déterminer des objectifs spécifiques :

- Construire un ou des modèles du processus de compréhension de la dérivée des étudiants dans un contexte particulier.
    - Identifier les principales représentations sollicitées ou produites par les étudiants, qu'elles soient fonctionnelles ou institutionnelles.
    - Décrire et analyser la façon dont les étudiants ont recours à ces représentations en termes de reconnaissance, production, traitement, conversion ou coordination.
- Examiner de quelle manière le contexte mis en place (tâches, approche, interactions, etc.) a pu contribuer à faire ressortir, évoluer et articuler ou non différentes représentations produites ou manipulées par les étudiants.

2.5 Une analyse conceptuelle du concept de dérivée

Le concept central de ce projet de recherche est celui de la dérivée, concept au cœur des cours de calcul différentiel. Dans le but de se préparer à mieux observer et décrire le processus de compréhension de ce concept par des étudiants du collégial, une analyse conceptuelle de la dérivée est présentée. D'abord, une courte analyse historique sera présentée permettant de mieux connaitre la construction de la dérivée dans l'histoire et de faire quelques parallèles avec son enseignement aujourd'hui. Ensuite, des représentations de la dérivée, acceptées et utilisées dans la communauté mathématique — principalement du collégial —, seront répertoriées. Enfin, la façon dont d'autres concepts peuvent entrer en jeu dans la compréhension de la dérivée sera approfondie à travers, entre autres, différentes représentations possibles de ces concepts et les écrits d'autres auteurs.

2.5.1 Un survol historique de la dérivée : différentes manières de la concevoir[15]

Dans l'histoire, l'idée de dérivée[16] a d'abord été introduite à travers des méthodes. Ce sont les Grecs (dans l'Antiquité) qui ont construit les premières méthodes pour trouver la tangente à des points appartenant à des courbes. Chaque courbe était associée à une méthode pour trouver des tangentes. L'arrivée de la géométrie analytique, qui soutient que toute courbe peut être représentée par une équation[17], a poussé les mathématiciens à élaborer des méthodes généralisables pour trouver « la droite touchante » qui est par la suite devenue la droite tangente.

---

[15] Les éléments historiques présentés dans cette section sont principalement tirés de l'ouvrage de Boyer (1949). De plus, un résumé plus complet de l'histoire de la dérivée est proposé dans Dufour (2011).

[16] On ne parlait pas de « dérivée » à l'époque. C'est plus tard que le lien a été fait entre le concept de dérivée et les méthodes que les Grecs avaient construites.

[17] Il s'agit bien sûr des courbes qui étaient traitées à l'époque de Descartes, par exemple, au XVIe siècle.

Une autre utilisation du concept de dérivée est la méthode de Fermat (XVIIe siècle) pour trouver les extrémums d'une fonction. Sa méthode basée sur les concepts de limite et des infiniment petits permettait de résoudre des problèmes d'optimisation en encadrant un point par des intervalles de plus en plus petits. Les problèmes d'optimisation occupent une place importante dans le développement du concept de dérivée. C'est le cas encore aujourd'hui dans les cours de calcul différentiel. En effet, un chapitre entier est dédié à ces problèmes dans plusieurs manuels (Brunelle et Désautels, 2011; Hamel et Amyotte, 2007). Or, il est rare qu'ils soient utilisés comme entrée pour aborder la dérivée. Ils viennent souvent après que la dérivée ait été introduite, comme application.

Plus tard, Newton et Leibniz (fin du XVIIe siècle, début du XVIIIe siècle) développent le concept de dérivée comme un taux de variation[18]. Ils commencent à considérer le concept de dérivée comme un objet en soi et non comme un outil. En effet, Leibniz commence à s'intéresser à la finalité, au résultat obtenu après l'application des méthodes citées précédemment. Il considère cet objet comme un ratio de différences d'infiniment petits ou un quotient différentiel. Ainsi, la notion de taux de variation, et surtout la notion intuitive de limite d'un taux de variation, font leur apparition. Le processus impliquant de considérer le taux de variation entre deux points d'une courbe vers une limite de ce taux de variation, c'est-à-dire le taux de variation entre deux points qui seraient confondus (pour ainsi devenir un seul point), est mis en place. Le taux de variation en ce point limite est donc calculé et est alors nommé taux de variation instantané, ou dérivée.

[18] Les idées de Newton et Leibniz ne sont bien sûr pas exactement comme le concept de dérivée connu aujourd'hui. Elles sont tout de même fondatrices du concept étant donné qu'elles ont été reprises et développées jusqu'au XXe siècle.

Bref, l'histoire de la dérivée peut informer de différentes manières. On peut toutefois relever trois façons de voir la dérivée : comme tangente, comme outil d'optimisation et comme taux de variation.

2.5.2 Les représentations institutionnelles de la dérivée

Il est possible d'identifier des représentations de la dérivée qui sont reconnues par la communauté mathématique du collégial (institutionnelles). Ainsi, ces représentations sont susceptibles de faire partie des attentes des enseignants à l'égard de leurs étudiants. Afin d'identifier ces représentations institutionnelles, différentes sources ont été consultées, en particulier différents manuels de calcul différentiel (Brunelle et Désautels, 2011; Charron et Parent, 2007; Hamel et Amyotte, 2007, entre autres), le programme de calcul différentiel pour le programme de sciences de la nature du MEES (2010), et mon mémoire de maitrise (Dufour, 2011) qui rend compte de différentes représentations utilisées par les enseignants dans le cours de calcul différentiel.

Les différentes représentations identifiées sont rapportées sous forme de tableau[19] :

[19] L'ordre d'apparition des représentations n'a pas d'objectif de hiérarchisation. Au contraire, comme il a été mentionné dans la section 2.2, il est souhaité que tous les registres soient traités au même niveau.

Tableau 2.3
Représentations institutionnelles du concept de dérivée

Représentation	Registre	Concept associé/explication
$f'(x_0)$	Algébrique	Cette représentation exprime la dérivée en un point donné de la fonction *f*.
$f'(x)$	Algébrique	Cette représentation exprime la fonction dérivée de la fonction *f(x)*
$\frac{df}{dx}$	Algébrique	Cette représentation exprime la fonction dérivée de la fonction *f(x)*
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	Algébrique	Cette représentation exprime la dérivée en un point donné de la fonction *f*.
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	Algébrique	Cette représentation exprime la dérivée en un point donné de la fonction *f*.
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$	algébrique	Cette représentation exprime la fonction dérivée de la fonction *f*. Le fait de changer le x_0 pour le x a une grande influence sur ce que la représentation exprime.
Voir figure 2.6	Graphique	Observation de la limite d'une séquence de pentes de différentes sécantes. C'est le processus dans lequel un des deux points de la sécante se rapproche du point commun des différentes sécantes et de la tangente en ce point commun. L'objet est finalement la pente de la tangente en ce point commun. Il s'agit de la représentation graphique de la dérivée en un point de la fonction.
Voir figure 2.7	Graphique	Procéder par zoom sur le point d'intérêt.
Le taux de variation instantané	Verbal	
La pente de la droite tangente	Verbal	
La vitesse instantanée	Verbal	
La fonction dérivée	Verbal	

Ces représentations sont reconnues comme étant différentes représentations de la dérivée ou des représentations de notions importantes pour comprendre la dérivée. Ce sont des représentations institutionnelles. Elles peuvent être reconnues ou produites par les étudiants. Selon la théorie des représentations présentée précédemment, il ne suffit pas de reconnaitre ou de produire ces représentations institutionnelles pour comprendre un concept, il est important que l'étudiant puisse les convertir et les coordonner. Pour arriver à poser ces différentes actions (reconnaissance, production, articulation) sur des représentations institutionnelles, d'autres représentations, particulièrement des représentations fonctionnelles, entreront certainement en jeu.

Ainsi, les représentations fonctionnelles et les actions posées sur ces dernières informeraient sur le processus de compréhension de la dérivée. C'est pourquoi, afin d'atteindre les objectifs fixés, la méthode privilégiée impliquerait de repérer ces représentations dans l'action, au fur et à mesure que les représentations sont produites et qu'elles évoluent. Cette observation détaillée des représentations produites et utilisées par les étudiants pourrait prendre place dans le cadre d'un cours de calcul au cours duquel la compréhension de l'étudiant se construit.

2.5.3 La dérivée : plusieurs concepts en jeu

Afin de reconnaitre, produire et coordonner ces représentations, les étudiants doivent passer par un processus de construction du concept de dérivée, qui impliquera des représentations fonctionnelles, et ce, autour de différents concepts. En effet, pour pouvoir comprendre la dérivée, l'étudiant doit pouvoir reconnaitre, produire, traiter, convertir et coordonner les différentes représentations de plusieurs concepts clés sur lesquels la dérivée est basée. Comme, par définition, la dérivée est la limite d'un taux de deux différences et que celle-ci peut être considérée comme une fonction, les concepts de taux de variation, de limite et de fonction sont essentiels dans la construction du concept de dérivée.

L'intérêt pour la dérivée en un point d'une fonction implique une considération de la limite des taux de variation sur des intervalles autour de ce point. Il faut donc pouvoir articuler différentes représentations du concept de taux de variation. Différents auteurs proposent des modèles de la compréhension du taux de variation. Weber (2012) a récemment fait, dans sa thèse, une revue de différentes études sur le taux de variation. Il se réfère entre autres à Thompson (1994) qui décrit d'abord un taux comme « *a reflectively abstracted constant ratio, where a ratio is the result of comparing two quantities multiplicatively* (p. 15) » (cité dans Weber, 2012, p. 33). Il ne s'agit pas seulement de voir le taux comme une donnée statique, l'étudiant doit pouvoir considérer le lien multiplicatif qui existe entre les deux parties d'un taux. De plus, dans le cas du taux de variation, il doit y reconnaitre « la variation » qui est amenée par les deux parties du taux qui sont des différences. Ainsi, l'étudiant doit passer de la comparaison de deux quantités à la comparaison de deux variations de chaque quantité. Il est important de faire la différence entre les deux. Un décalage peut exister entre les deux représentations ou entre deux interlocuteurs. Par exemple, dans le mémoire de Dufour (2011), une discussion entre un élève et son enseignante est rapportée. L'élève produit une représentation verbale du taux de variation représentant la vitesse de sorte que la distance totale et le temps total sont traités en tant que quantités. Pour sa part, l'enseignante parle du taux entre les variations de deux quantités. Or, ni l'une ni l'autre ne repère ce décalage.

Ce type de décalage est intéressant à observer dans l'action puisqu'il informe, d'abord sur les représentations spontanées de l'élève et de l'enseignante, et par la suite, il pourra informer sur la façon dont la représentation de l'élève se transformera à travers les interactions avec l'enseignante.

La même difficulté peut être induite par l'utilisation, très tôt dans la construction de l'idée de taux de variation, de la représentation algébrique institutionnelle « $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ». Il est important de comprendre le sens du symbole Δ. Si les étudiants avaient déjà de la difficulté à voir la différence entre observer une quantité et observer la variation d'une quantité, le symbole peut contribuer à ce flou conceptuel.

Il existe différentes représentations institutionnelles du taux de variation. Voici des exemples de représentations algébriques institutionnelles :

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Figure 2.14 Représentations algébriques institutionnelles du taux de variation

Dans le contexte du cours de calcul différentiel, d'autres représentations algébriques sont susceptibles d'apparaitre, telles que :

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Figure 2.15 Représentations algébriques institutionnelles du taux de variation dans le contexte des cours de calcul différentiel

Certaines représentations du concept de taux de variation en tant que tel ne sont pas toujours explicites. En effet, elles peuvent être dégagées des représentations d'une fonction linéaire, entre autres. Ainsi, pour les faire ressortir, il faut traiter la représentation de la fonction donnée. Par exemple, on peut représenter une fonction par une table de valeurs. Or, le taux de variation est le lien multiplicatif entre deux valeurs correspondantes de la table de valeurs. L'exemple suivant montre le concept de taux de variation qui a été mis en évidence dans le graphique d'une fonction linéaire :

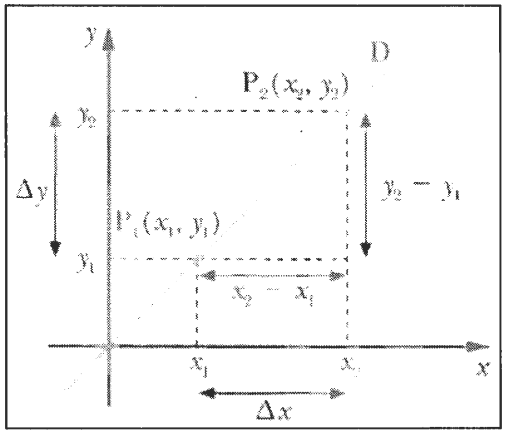


Figure 2.16 Image tirée du manuel *Calcul différentiel* de Charron et Parent (2007, p. 6)

Étant donné que le concept de dérivée implique de considérer un processus de limite, en général, sur une infinité de taux de variation, il est primordial que l'étudiant puisse articuler les différentes représentations de ce concept. Or, bien que les étudiants aient travaillé ce concept dans leurs études préalables au cours de calcul différentiel, plusieurs auteurs soutiennent qu'ils ont toujours de la difficulté avec ce concept dans les cours de calcul différentiel (Carlson, 1998; Thompson, 1994).

Le concept de limite n'est guère moins complexe que celui de taux de variation. Plusieurs auteurs s'y sont également intéressés. Dans un article publié en 2001, Williams fait une recension des écrits qui traitent de la compréhension du concept de limite. Il relève entre autres un article de Tall et Vinner (1981, cité dans Williams, 2001) qui s'attarde sur la description des concept-image et concept-définition de la limite. Il mentionne aussi des articles s'intéressant aux obstacles que ce concept peut provoquer comme ceux de Sierpinska (1985, 1987, cités dans *ibid.*) et celui de William (1991, cité dans *ibid.*). Bien que tous ces auteurs aient une approche différente pour observer la compréhension du concept de limite, Williams (2001) relève des éléments communs.

> [...] *a fairly set of standard conceptions, or mental models, that student seems to have about limit. These conceptions include beliefs that a limit is a boundary, whether local or global (see, Szydlik, 2000); that functions cannot reach their limits; and that limit is best described in terms of a dynamic process of points or numbers "getting close to" a limit point or number. Contrasted with this are various static views, ranging from informal and intuitive (e.g., "The limit of a function is L if whenever x is close to the limiting value s, the function is close to L." [Szydlik, 2000, p.268]) to the formal ε–δ definition.* (Williams, 2001, p. 344)

La dualité entre des visions dynamiques et statiques peut causer des difficultés pour la compréhension du concept de limite. Il est possible de se rapporter à l'histoire pour comprendre d'où proviennent ces visions. Comme le fait remarquer Güçler (2012), elles sont en fait liées aux définitions du concept de limite de Cauchy (1823, cité dans Güçler, 2012) et de Weierstrass (également cité dans Güçler, 2012), respectivement. En effet, la définition que faisait Cauchy de la limite était plus intuitive et liée à un processus dynamique : « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. » (Cauchy, 1823, p. 4, cité dans Güçler, 2012). Bien qu'il ait voulu se détacher d'une vision géométrique et rendre les définitions des concepts du calcul plus rigoureuses, il a tout de même conservé, dans sa définition, des éléments qui renvoient à une vision dynamique de la limite (Boyer, 1949, p. 286). Plusieurs représentations dans le registre verbal qui sont utilisées dans les cours de calcul différentiel peuvent être associées à cette vision. Des exemples de ces représentations sont présentés dans le tableau suivant :

Tableau 2.4
Représentations verbales liées à une vision dynamique de la limite extraites du mémoire de maitrise de Dufour (2011)

« se rapproche le plus près possible »	L'utilisation du verbe « se rapprocher » amène à voir la limite comme un processus dynamique.
« la variation des *x* va se rapprocher de chaque côté du point souhaité »	
« tend vers zéro »	« Tendre vers » est aussi une expression qui ramène à une action, un processus.

La vision statique de la limite est plutôt associée au développement que Weierstrass a apporté au calcul. En effet, il a retiré de la définition de la limite l'idée de processus dynamique. Sa définition plus formelle impliquant ε et δ est toujours utilisée aujourd'hui :

> *The number L is the limit of the function f(x) for $x = x_0$, if, given any arbitrarily small number ε, another number δ can be found such that for all values x differing from x_0 by less than δ, the value of f(x) will differ from that of L by less than ε.* (Boyer, 1949, p. 287)

Ainsi, Weierstrass décrit plutôt la limite comme un nombre, ce qui peut référer aujourd'hui à l'infini actuel, et non comme un processus itératif comme le faisait Cauchy qui, avec l'expression « s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe », réfère à l'infini potentiel. Des représentations existant dans les cours de calcul différentiel peuvent être associées à cette vision statique de la limite, comme cela est présenté au tableau suivant :

Tableau 2.5
Représentations verbales associées à une vision statique de la limite

« $\mathcal{E}$ plays the role of measuring how close we are to L [the limited value] in our function values. "	L'utilisation du mot "*close*" [proche] plutôt que du verbe « s'approcher » amène à observer un entourage, statique, autour d'un point plutôt qu'un processus pour s'en approcher...
"The limit is equal to 2."	Traitement de la limite comme un nombre.
"The limit is 1. »	

Tiré d'extraits du discours d'un enseignant dans Güçler (2012)

Or, il est important de préciser que dans le contexte des cours de calcul différentiel au Québec, la définition formelle, telle qu'écrite par Weierstrass, ne fait pas partie du programme. En effet, le concept de limite n'est pas défini en impliquant ε et δ, qui apportent une dimension statique à la définition formelle de la limite. Ainsi, les définitions de la limite, représentations institutionnelles verbales, que l'on retrouve dans différents manuels de calcul différentiel ne contiennent pas ε et δ, qui sont souvent vus comme un gage d'une définition rigoureuse du concept de limite. D'ailleurs, la plupart des manuels consultés précisent que les définitions proposées sont des définitions intuitives de la limite.

Voici quelques exemples de définitions retrouvées dans les manuels :

Tableau 2.6
Représentations verbales retrouvées dans des manuels de calcul différentiel du collégial

« Soit $x \in R$ et $x \neq a$. Nous disons que x est **voisin** de a si $x < a$ ou $x > a$, et si x est le plus près possible de a. » (Charron et Parent, 2007, p. 45)	L'utilisation du mot « voisin » évoque l'observation d'un état statique. On s'intéresse alors au « voisinage », à « l'entourage » d'un point et non au processus pour s'en approcher.
« On obtient bien sûr le même résultat que celui obtenu à partir du graphique : plus x s'approche de 2, plus la valeur de la fonction $f(x)$ s'approche de 4. » (Hamel et Amyotte, 2007, p. 4)	Représentation à l'intérieur d'un exemple. Les auteurs utilisent le verbe « se rapprocher » qui se rapporte à une action, un processus (dynamique).
« Évaluer une limite, c'est étudier le comportement d'une fonction $f(x)$ quand x devient de plus en plus proche d'une certaine valeur. » (Hamel et Amyotte, 2007, p. 11)	Sans utiliser le verbe « s'approcher », les auteurs évoquent l'idée d'un processus par l'étude du « comportement » d'une fonction.
« On dit que la limite de la fonction $f(x)$ quand x tend vers a vaut L, si la fonction $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches de L lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, mais différentes de a. On écrira alors $\lim_{x \to a} f(x) = L$.» (Hamel et Amyotte, 2007, p. 12)	

Les représentations verbales pour discuter de la limite sont souvent à cheval entre une vision statique et dynamique. Güçler (2012) souligne :

> *Dr. Brenner's* [le professeur observé] *word use indicates that he alterned between the metarules of using of continuous motion (when talking about the behavior of the functions)* [une vision dynamique] *and using the metaphor of discreteness (when reporting on the end result of the limiting process)* [une vision statique] *in the context of the informal definition and computing limits.* (Güçler, 2012, p. 444)

Dans le même ordre d'idées, Tall et Katz (s. d.) soulèvent un élément intéressant lié à ces deux visions du concept de limite. Ils soutiennent qu'il y a un décalage entre la vision de la limite des étudiants et celle des enseignants. En effet, la vision des étudiants est très intuitive et souvent liée à un processus dynamique tandis que les enseignants utilisent dans leurs explications des représentations liées à la vision dynamique de la limite tout en ayant étudié et travaillé avec la définition statique de la limite. Ainsi, sans introduire formellement la définition qui amène la vision plus statique de la limite, les enseignants utiliseraient des représentations liées à cette dernière.

> *Like Cauchy, our modern students will have experiences with graphs and manipulating symbols but are unlikely to have encountered the formal set-theoretic epsilon-delta approach that has become the basis of modern analysis. However, the mathematical community, including mathematics educators at this level, have an expertise in formal methods that enables them to view the limit concept from a more sophisticated viewpoint.* (Tall et Katz, s. d., p. 22)

Du point de vue des représentations, cette analyse permet de croire que les représentations fonctionnelles de la limite seront plutôt liées à la vision dynamique et que les représentations institutionnelles seront un mélange des visions dynamique et statique.

De plus, le contexte dans lequel le concept de limite est évoqué a aussi une influence sur le type de vision convoqué. Par exemple, la résolution de problèmes impliquant une limite demande le plus souvent une vision plus statique avec l'application de règles liées à une définition plus formelle de la limite. Par exemple, pour « calculer une limite », la procédure utilisée implique souvent de « remplacer » la valeur de x dans « l'énoncé » et de faire le calcul nécessaire. Cette façon de faire nécessite une vision statique de la limite. En effet, le processus dynamique de se « rapprocher » d'une valeur donnée n'apparait pas dans ce processus de résolution.

Un autre exemple est la difficulté des étudiants avec l'idée d'atteindre la limite ou non, comme Williams (2001) le mentionne (voir citation à la page 135 de ce document). La représentation verbale suivante, provenant d'un extrait du discours d'un élève dans l'article de Williams (2001), peut être interprétée comme étant liée à une vision dynamique de la limite et peut laisser sous-entendre que la limite est inatteignable : « *Well, you're kind of sandwiching your number between the values that you're choosing, so you never get to the number but you keep closing* » (p. 356). D'un autre côté, la procédure de calcul de limite liée à une vision statique qui implique de remplacer x laisse sous-entendre que la limite est bel et bien atteignable. Ainsi, en alternant ces deux visions, autant dans la définition que dans l'utilisation du concept de limite, il est possible d'hésiter sur le « caractère accessible ou non » de la limite.

En bref, les deux points de vue sur le concept de limite, dynamique et statique, ont des répercussions sur la compréhension de ce dernier. En effet, autant dans l'enseignement que dans l'apprentissage, les deux points de vue plus ou moins formels se côtoient, ce qui peut causer des décalages ou des difficultés. Il sera intéressant d'observer la présence de ces points de vue dans les représentations sollicitées par les étudiants lors du processus de compréhension de la dérivée.

De plus, la dérivée n'est pas seulement traitée comme une dérivée en un point, mais également comme une fonction dérivée. L'étudiant doit alors faire intervenir sa compréhension du concept de fonction. Au-delà de traiter la fonction dérivée comme une répétition de la dérivée en un point, l'étudiant doit arriver à voir la covariation qui existe entre les valeurs du domaine d'une fonction de départ et la valeur du taux de variation instantané pour chaque point de ce domaine. Il faut noter que le concept de fonction est un concept clé du programme du secondaire. En effet, à partir du deuxième secondaire jusqu'en cinquième secondaire, les élèves construisent le concept de fonction à partir de la covariation jusqu'à l'étude de familles de fonctions. La considération des différents registres de représentations fait également partie du programme de formation de l'école québécoise (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport [MELS], 2004). Les élèves ont donc travaillé avec différentes représentations du concept de fonction depuis déjà quatre années lorsqu'ils commencent leurs études au collégial. Ainsi, les étudiants doivent arriver à pouvoir produire, traiter et articuler ce concept de fonction dérivée, dans différents registres. La fonction dérivée est donc un objet en soi, une fonction avec toutes les représentations et propriétés que cela implique, qui possède cependant un lien particulier avec d'autres fonctions (fonction primitive et éventuellement dérivée seconde). Cela demande donc à l'étudiant, non seulement d'effectuer l'articulation entre différentes représentations de la fonction dérivée, mais aussi entre des représentations de la fonction primitive et des représentations de la fonction dérivée. Il y a deux niveaux d'articulation : l'articulation des représentations d'un objet et l'articulation de deux objets (ou plus).

Trouver l'équation de la fonction dérivée à partir de l'équation d'une fonction donnée est une tâche fréquente en calcul différentiel. Il s'agit d'un traitement dans le registre algébrique dont la représentation de départ et la représentation d'arrivée ne représentent pas le même objet mathématique, c'est-à-dire qu'elles représentent deux fonctions différentes. Il faut donc, en plus d'effectuer le traitement correctement, reconnaitre que la représentation d'arrivée devient un objet en soi, qui est évidemment lié à la représentation de départ et qui a ses propres représentations. Ainsi, ce traitement est plus difficile que le traitement nécessaire pour transformer l'équation d'une fonction de la forme canonique en équation de la forme générale, par exemple. Dans ce cas, l'objet de départ et l'objet d'arrivée sont le même, soit une fonction donnée. En reprenant les termes introduits à la section 2.2.1, ce traitement met en jeu des représentations qui n'ont pas un niveau de congruence très élevé.

Un autre exemple est de produire la représentation graphique de la fonction primitive à partir de caractéristiques de la fonction dérivée données (souvent sous forme de représentations algébriques). Par exemple, « Esquissez le graphique d'une fonction satisfaisant aux conditions suivantes : $f'(x) < 0$ si $x < 0$ ou si $x > 0$, $f'(0) = 0$ et

$f(0) = 0$. » est un problème tiré du manuel de Hamel et Amyotte (2007, p. 128). Dans ce cas, il faut convertir les représentations algébriques de la fonction dérivée en représentation graphique de la fonction primitive, c'est-à-dire articuler différentes représentations du même objet pour produire une représentation d'un objet nouveau.

Un autre exemple est de produire une représentation (esquisse) graphique de la fonction primitive à partir du graphique ou de la représentation algébrique de la fonction dérivée. Il s'agit d'effectuer un traitement dans le registre graphique entre deux fonctions différentes (même concept, mais différents objets) qui ont un lien particulier entre elles. C'est dans ce type de tâches que le registre tabulaire est parfois sollicité. Afin d'effectuer le traitement du graphique de la fonction dérivée au graphique de la fonction primitive, il est possible de passer par une représentation intermédiaire sous forme de tableau de croissance ou de tableau de signes (voir Figure 2.8 et Figure 2.9).

En bref, le fait de traiter le concept de dérivée comme une fonction amène un niveau de complexité important. En effet, les exemples précédents montrent que l'articulation entre les représentations devient plus complexe quand il faut traiter deux objets différents. Pour pouvoir effectuer ces tâches, il faut avoir un recul sur chacun des objets et avoir une compréhension permettant d'articuler leurs représentations.

Enfin, dans le processus de compréhension du concept de dérivée, l'étudiant doit non seulement produire, traiter et articuler les représentations de différents concepts, mais il doit à l'intérieur de ce concept produire, traiter et articuler les représentations de différents objets. En plus de reconnaitre les représentations des concepts de taux de variation, de limite et de fonction (entre autres), il doit aussi pouvoir identifier à quels objets appartiennent les différentes représentations, et ce, dans différents registres. De plus, le but de ce projet n'est pas de voir comment chacun de ces concepts évolue, mais bien comment l'articulation de tous ces concepts prend forme à travers le processus de compréhension du concept de dérivée.

2.6 Vers la méthodologie

À la lumière de ce qui précède, la recherche s'installe dans une perspective de construction de la compréhension à travers plusieurs actions posées sur des représentations de différents types et dans des registres de représentations variés des concepts. Cette perspective a été choisie afin d'observer et de décrire des processus de compréhension du concept de dérivée. Plusieurs études ont apporté une contribution importante sur la compréhension de ces processus (obstacles, difficultés, conceptions, étapes de l'évolution, etc.). Par contre, il est clair que pour mieux comprendre l'évolution de la construction de ce concept, l'observation des étudiants doit se situer dans l'action, c'est-à-dire dans une situation où l'intention d'enseigner et d'apprendre, et la possibilité d'échanges entre enseignant et étudiants et entre étudiants sont présentes. L'éclairage provenant d'une observation fine des étudiants en action dans un contexte d'enseignement, et ce, au cours de la construction du concept de dérivée, est donc nécessaire.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Dans ce chapitre, la méthodologie choisie pour ce projet est : le *Teaching Experiment*. Son opérationnalisation dans ce projet est décrite. De plus, la mise en place du TE est présentée par l'explication de la préparation et du déroulement des cinq séances d'enseignement du TE.

3.1 Le choix d'une méthodologie

Comme il a déjà été mentionné, plusieurs travaux ont été réalisés en didactique des mathématiques autour du calcul différentiel. À travers ces études, différents aspects de l'enseignement et de l'apprentissage du calcul différentiel ont été étudiés, par exemple : les conceptions des étudiants (Biza, 2007; Castela, 1995), plus particulièrement les obstacles épistémologiques (Hitt, 2003a; Sierpinska, 1985), certaines tâches proposées d'un point de vue institutionnel (Hardy, 2009) et des pratiques enseignantes (Dufour, 2011). Ces différentes études ont déjà été abordées à travers les chapitres I et II de ce document. Dans cette partie, c'est plutôt les méthodologies et les outils de collecte utilisés dans ces études qui seront présentés.

Dans le contexte du calcul différentiel, et plus particulièrement avec une perspective sur les représentations, on recense des méthodologies variées. Une méthodologie utilisée est l'étude de cas (Haciomeroglu *et al.*, 2010, entre autres). Le plus souvent, les données recueillies dans ce genre d'études sont issues d'entrevues ou d'observations en contexte naturel de classe. Par contre, le projet de recherche concerné dans cette thèse se situe dans le contexte particulier où le recours à différentes représentations par les étudiants est observé. Ainsi, le contexte naturel de classe, bien qu'il permette l'observation d'étudiants dans un contexte d'enseignement, permet plus difficilement une observation fine de cette utilisation. Un contexte où il y a enseignement, mais avec un groupe restreint d'étudiants, serait donc l'idéal pour atteindre les objectifs de cette recherche.

D'autres études, qui ont été présentées dans le premier chapitre de ce document, s'inscrivent dans des méthodologies qui mettent l'accent sur la passation de prétests et post-tests ou d'examens avant ou après une séquence d'enseignement. Les études de Chappell et Kilpatrick (2003) et Zerr (2010) en sont des exemples. Ce type d'outils de collecte est intéressant, mais il n'est pas suffisant pour observer des processus de compréhension d'étudiants. Comme il a été présenté dans la problématique, la méthodologie choisie pour cette recherche doit permettre une observation fine de l'étudiant en plein apprentissage.

Une autre étude consultée (Habre et Abboud, 2006) présente un contexte d'expérimentation qui pourrait être intéressant. Dans leur étude, les auteurs mettent en place une approche particulière dans le cadre d'un cours. Un chercheur se trouve à enseigner le concept avec l'approche prévue et l'autre est un observateur. Ils observent ensuite la compréhension des étudiants dans ce contexte. Cette étude incite à porter un regard spécifique sur des méthodologies qui mettent l'accent sur un contexte où il y a enseignement. Il semble que la démarche utilisée par Habre et Abboud (*ibid.*) s'apparente en certains points à une méthodologie de recherche propre à la didactique des mathématiques et des sciences: le *Teaching Experiment*. Thompson (1994) utilise d'ailleurs cette méthodologie pour observer le développement des concepts de vitesse et d'accélération dans le cadre d'un cours de calcul différentiel. En plus de placer les élèves dans un contexte particulier d'enseignement, le *Teaching Experiment* permet d'observer l'évolution de la compréhension de l'élève. Cette méthodologie semble rendre possible l'observation de la compréhension comme un processus.

En résumé, compte tenu des objectifs de ce projet, deux éléments sont primordiaux. D'abord, l'observation des processus de compréhension des étudiants se fera sous forme de construction d'un ou des modèles de ces processus. La méthodologie choisie doit donc être en cohérence avec cet objectif central. De plus, l'objectif installe aussi la recherche dans un contexte particulier de séances d'enseignement conçues pour favoriser l'utilisation de différentes représentations. Cet aspect du projet exclut l'entrevue individuelle ou les questionnaires (pré ou post tests) comme seuls outils de collecte. Les étudiants qui seront observés devront l'être dans un contexte d'enseignement.

Le *Teaching Experiment*[20] (TE) semble tout indiqué pour ce projet. En effet, cette méthodologie a pour but de documenter, à travers la production d'un modèle, le développement mathématique des étudiants en observant, entre autres, leur processus d'apprentissage et leurs conceptions dans un contexte d'enseignement (Steffe et Thompson, 2000). Le chercheur qui fait un TE manifeste l'intention : « *to test the limits of a model he has of the child's knowledge with regard to particular content structures and to investigate how various components of that model may change under the pressure of directed interference* » (Steffe, 1983, p. 470).

[20] Il n'existe pas vraiment de traduction pour cette méthodologie qui a principalement été développée en didactique des mathématiques, il y a plusieurs années par l'école russe, et plus récemment aux États-Unis.

3.2 L'opérationnalisation du *Teaching Experiment*

La prochaine section décrit comment s'opérationnalise le TE pour cette recherche. D'abord, la prise de position sur le TE associée à l'aspect social de la classe est mise de l'avant. De plus, une réflexion sur le nombre et le format des modèles proposés est présentée. Ensuite, le rôle de chacun des participants est établi.

3.2.1 Un type de TE particulier

La position théorique sur la compréhension de cette recherche, en particulier la perspective de Hitt (2003) suggérant que les représentations des élèves évoluent à travers des interactions avec l'enseignant et les autres élèves, installe un contexte particulier pour la mise en place d'un TE. C'est donc inspiré par la position de Cobb (2000), entre autres, que le TE prendra forme dans cette thèse.

La vision de Cobb (*ibid.*) du *Teaching Experiment* s'inscrit dans une position tenant compte du contexte naturel de classe où les interactions, les moments individuels et un esprit de communauté se côtoient. Cette vision se situe donc dans une perspective différente de celle du TE plus traditionnel qui prend habituellement place dans un contexte d'entrevue individuelle, en dehors de la classe de mathématique (Steffe, 2002). Cobb appuie la nécessité de conduire un TE en classe par les aspects individuel et social de l'apprentissage, ce qui rejoint la position prise dans cette thèse.

Or, il a déjà été argumenté qu'un contexte de classe complètement naturel rendrait l'observation fine des différentes représentations utilisées difficile. Le TE mis en place pour la collecte de données de cette thèse propose donc une forme « hybride » qui se situe entre l'entrevue individuelle en dehors de la classe et le contexte naturel de classe.

Un TE se déroulant avec un groupe restreint d'étudiants, qui permet des moments de travail individuel, en équipe ou en grand groupe avec l'enseignant, semble approprié.

De plus, le TE prenant place dans un contexte amenant diverses interactions — qu'elles soient entre les étudiants et l'enseignante, ou entre les étudiants —, il est possible que les processus de compréhension observés soient associés à des étudiants individuellement, mais aussi à un groupe d'étudiants. Ainsi, les résultats de la thèse pourraient consister en un ou plusieurs modèles de processus de compréhension observés. Ce ou ces modèles pourraient également décrire le processus de compréhension d'un étudiant en particulier ou le processus de compréhension partagé par un groupe d'étudiants.

3.2.2 L'élaboration de modèles en termes de représentations

L'objectif général du projet est d'élaborer un ou des modèles des processus de compréhension des étudiants, et ce, plus particulièrement à travers l'observation de leur utilisation et production de différentes représentations mathématiques. Le cadre de référence est la théorie des représentations sémiotiques (Duval, 1993, entre autres) et celle des représentations fonctionnelles (Hitt, 2003, entre autres). Ce cadre est centré sur les actions et productions d'un individu, ce qui permet son utilisation comme cadre d'analyse. En effet, il permet une observation fine des actions et productions des étudiants. Ainsi, le cadre théorique sera également le cadre d'analyse et la production de modèles se fera dans ces termes. Le processus de compréhension sera décrit en termes de types de représentations (algébrique, graphique, verbal, numérique, etc.), de la nature des représentations (institutionnelle ou fonctionnelle) et d'actions posées sur celles-ci (traitement, production, conversion, etc.). Cette façon de faire est d'ailleurs en cohérence avec la vision de Cobb et Steffe (1983) : « *children's mathematical* *knowledge can be modeled in terms of coordinated schemes of actions and operations (von Glasersfeld, 1980).* » (p. 88) En bref, il s'agit, au moyen du cadre de référence évoqué, d'analyser les actions et opérations des étudiants avec les différentes représentations, ce qui formera éventuellement le ou les modèles en question.

3.2.3 Le modèle initial ou l'ensemble d'hypothèses de départ

La méthodologie du TE suggère de commencer avec un modèle initial ou un ensemble d'hypothèses qui guideront le chercheur pour préparer la première séance, entre autres. Selon les différentes études qui s'inscrivent dans une telle méthodologie, la forme et la profondeur du modèle initial sont très variées. Deux aspects seront mis de l'avant concernant le modèle initial pour ce projet. Le premier aspect est la partie processuelle de la compréhension de la dérivée, qui est peu documentée dans les écrits scientifiques. Le deuxième aspect est composé des éléments « disponibles » qui permettront de créer un point de départ pour ce projet, par exemple, certaines difficultés ou conceptions des étudiants par rapport au concept de dérivée, mais aussi de certains sous-concepts de la dérivée comme le taux de variation et la fonction.

Le premier chapitre de cette thèse a présenté des arguments par rapport à l'aspect processuel de la compréhension des étudiants qui est non seulement un intérêt de recherche, mais un aspect peu documenté dans les écrits scientifiques. Or, comme le processus de compréhension est peu documenté, il y a peu de modèles pertinents proposés qui peuvent servir de modèle initial pour ce projet. En fait, deux modèles ont été cités[21] comme étant des modèles de la compréhension des étudiants pour le concept de dérivée, celui de Zandieh (2000) et celui de Hähkiöniemi (2006b). Ces deux modèles

---

[21] Voir section 1.2.3.

donnent des pistes pour mieux comprendre certains aspects du processus de compréhension de la dérivée. Cependant, ils ne s'inscrivent pas dans la même perspective sur la compréhension que celle prise dans cette thèse. Par exemple, Hähkiöniemi base son modèle sur des représentations des étudiants. Or, il ne définit pas les représentations comme elles ont été décrites dans le chapitre II de cette thèse, c'est-à-dire à l'aide de la théorie des représentations sémiotiques de Duval et des représentations fonctionnelles de Hitt. D'autres différences de point de vue avec ces modèles sont exposées dans la section 2.6. Il est donc difficile de reprendre ces modèles en entier comme modèle initial pour cette étude. Bien que ces deux modèles ne permettent pas de donner une structure précise au modèle initial, ils fournissent certainement plusieurs éléments intéressants du processus de compréhension de la dérivée.

D'autre part, plusieurs éléments provenant des écrits scientifiques sont proposés dans le chapitre II. Ces éléments informent indirectement sur le processus de compréhension de la dérivée, c'est-à-dire sur différents aspects de ce dernier. Par exemple, à travers une analyse conceptuelle de la dérivée, différentes entrées et applications possibles pour aborder et utiliser la dérivée sont présentées. Aussi, certaines représentations, plutôt institutionnelles, ont été décrites en se basant sur des manuels et des écrits scientifiques concernant l'apprentissage et l'enseignement de la dérivée. Cette analyse conceptuelle met également en lumière le fait que le concept de dérivée repose sur l'articulation de plusieurs concepts mathématiques complexes : la fonction, le taux de variation, la limite, l'infini, entre autres. Une revue de plusieurs études, qui informent sur des difficultés ou des conceptions d'étudiants en lien avec ces différents concepts, a également été présentée dans le chapitre II.

Enfin, les deux éléments abordés dans les paragraphes précédents servent ainsi de bases pour la préparation et l'analyse des séances d'enseignement qui mènent à la construction d'un modèle de processus de compréhension de la dérivée du point de vue des représentations. Par contre, ces deux aspects ne fournissent pas assez d'éléments centrés sur le processus de compréhension pour pouvoir en dégager un modèle initial, de telle sorte que, dans ce projet, le modèle initial sera émergent. Il sera construit à partir de l'analyse de la première séance d'enseignement, séance et analyse qui tiendront compte des éléments décrits précédemment dans cette section. Par la suite, le modèle sera modifié et enrichi par des représentations fonctionnelles et institutionnelles, et par les actions posées sur ces représentations.

3.2.4 Les acteurs

Il existe trois types d'acteurs possibles pour un TE : le chercheur-enseignant, le chercheur-témoin et le ou les étudiants participants. Dans ce projet, il y aura une chercheure[22], une enseignante du milieu collégial et quelques étudiants.

Le premier acteur du TE est le chercheur-enseignant. J'assumerai le rôle de la chercheure-enseignante. Ce rôle consiste à mener les séances d'enseignement avec en tête l'objectif d'enseigner un nouveau concept et l'objectif de construire un modèle du processus de compréhension. Étant donné le cadre théorique décrit au chapitre II, la chercheure-enseignante devra être particulièrement attentive à deux éléments : les représentations produites et évoquées par les participants, et les différentes conceptions et difficultés relevées ou non dans les écrits scientifiques, qui peuvent apparaitre lors de l'étude du concept de dérivée. De plus, il sera important d'offrir aux participants un contexte riche en différents registres de représentations, autant dans les représentations

[22]En considérant le fait que la chercheure est aussi encadrée par un comité de direction de thèse.

proposées par la chercheure que par l'ouverture à plusieurs possibilités de représentations provenant des étudiants.

Le deuxième acteur du TE est le chercheur-témoin. Le rôle du chercheur-témoin est assumé par une enseignante collaboratrice pour ce projet. Peu de TE ont été faits en collaboration avec un enseignant. C'est surtout Cobb (2000) qui a élargi cette méthodologie en la mettant en place dans la classe de mathématique plutôt qu'en entretien, souvent individuel. L'expertise de l'enseignante offre un regard différent, autant pour l'élaboration et la planification des séances d'enseignement que pour la construction du modèle de la compréhension des étudiants. Cela permet également que chacun ait son propre rôle à jouer dans le fonctionnement des séances en classe.

Dans les cas où un chercheur et un enseignant collaborent, l'enseignant est, le plus souvent, le chercheur-enseignant. Or, dans ce projet, l'enseignante est le témoin. Ce choix a été fait pour deux raisons. D'abord, il est plus facile pour un enseignant de s'impliquer dans une telle recherche à titre de témoin, car son niveau d'implication peut s'arrimer à sa disponibilité. Les implications possibles du chercheur-témoin dans le projet sont nombreuses : contribuer à l'élaboration des séances, être présent pendant les séances, participer à l'analyse des données. Son rôle est donc négocié entre la chercheure responsable et l'enseignante afin de trouver un niveau d'implication qui permettra à l'enseignante de conserver sa motivation et son intérêt pour le projet et à la chercheure de profiter d'un point de vue externe par rapport à différents aspects du projet. De plus, le fait que l'enseignante soit la chercheure-témoin laisse une plus grande liberté à la chercheure. En effet, la chercheure sera alors libre de poursuivre des approches ou des intuitions qui ne sont pas nécessairement près d'un contexte naturel de classe (Cobb, 2000), tout en ayant le point de vue lié à la connaissance d'une réalité pratique de l'enseignante pour la conseiller dans ses choix.

Finalement, le rôle de l'enseignante collaboratrice dans ce projet est particulièrement lié à l'élaboration et la planification des séances d'enseignement. Elle a également assisté, en tant que témoin, à une séance d'enseignement.

Le troisième acteur d'un TE est l'étudiant. Pour ce projet, pour des raisons précisées précédemment, le TE doit impliquer plusieurs étudiants. Dans cette optique, Komorek et Duit (2004) suggèrent un groupe de deux à quatre élèves pour rendre des interactions possibles tout en ayant la possibilité d'observer de près les élèves participants. Huit participants se sont portés volontaires pour participer à l'étude, mais deux d'entre eux ont abandonné en cours de route. Six participants font donc partie de l'étude : Annie, Judith, Karine, Guillaume, Antoine et Jérémie[23].

Ces participants sont des étudiants en première ou deuxième année de cégep. Leur implication dans le projet est volontaire et n'est pas rattachée à un cours de façon formelle[24]. Ils sont tous engagés dans un programme dit préuniversitaire en sciences de la nature. Afin de pouvoir suivre un tel programme, les étudiants ont réussi au secondaire les cours de mathématique obligatoires de la séquence « sciences naturelles » ou de la séquence « technicosciences ». Ils ont donc travaillé les concepts de « covariation », de « fonction (familles de fonctions, étude de fonctions) », de « taux de variation », et de « taux de variation moyen », entre autres, et ce, dans les différents registres de représentations. Ils ont également touché aux concepts de « vitesse moyenne » et de « vitesse instantanée » à travers les cours de sciences du secondaire. De plus, ils ont aussi touché aux concepts de « limite » et « d'infini » lors de l'étude

---

[23] Il s'agit de noms fictifs.

[24] La participation au projet ne permettra aucune compensation en lien direct avec un cours (notes, évaluation, travaux).

des « asymptotes ». Ils en ont fait une étude très intuitive et surtout implicite. Cependant, aucune introduction « formelle » de ces concepts n'a été faite.

Trois des six étudiants, Annie, Karine et Judith, ont déjà suivi un cours de calcul différentiel qu'elles ont échoué. Elles doivent donc reprendre ce cours au moment de la mise en place du TE. De plus, avant de s'inscrire au programme de sciences de la nature, Jérémie avait entamé un programme technique en administration. Il a donc suivi un cours de mathématiques financières lors d'une session précédant la tenue du TE.

3.3 Les outils de collecte

Afin de pouvoir produire et raffiner le modèle du processus de compréhension des étudiants au fur et à mesure du déroulement des séances d'enseignement, il faut recueillir différentes manifestations de ce processus. D'abord, les séances d'enseignement sont filmées au moyen de trois caméras. Ainsi, chaque équipe d'étudiants est filmée. Pour chacune des séances, un cahier de l'étudiant, contenant les tâches proposées durant la séance et de l'espace pour écrire, est distribué aux étudiants et ramassé à la fin. Ces productions sont conservées et analysées. Aussi, j'ai tenu un journal de bord dans lequel des éléments de réflexion, pouvant servir à l'analyse, ont été notés autant avant, pendant qu'après les séances.

3.4 La mise en place du *Teaching Experiment*

Dans cette section, des éléments de la mise en place du TE, pour ce projet, sont développés. Les intentions d'enseignement et les tâches prévues pour chacune des séances sont présentées. Les séances sont préparées au fur et à mesure du déroulement de la collecte de données, c'est-à-dire que les tâches sont choisies en fonction de ce qui a été fait à la séance précédente. Les tâches sont donc présentées telles qu'elles ont été prévues. De courts commentaires sont également ajoutés afin de préciser la façon dont les tâches ont réellement été utilisées lors des séances, sans entrer dans une analyse exhaustive de ce qui a été fait, ceci fera l'objet du chapitre suivant.

L'élaboration des tâches suit généralement les étapes suivantes :

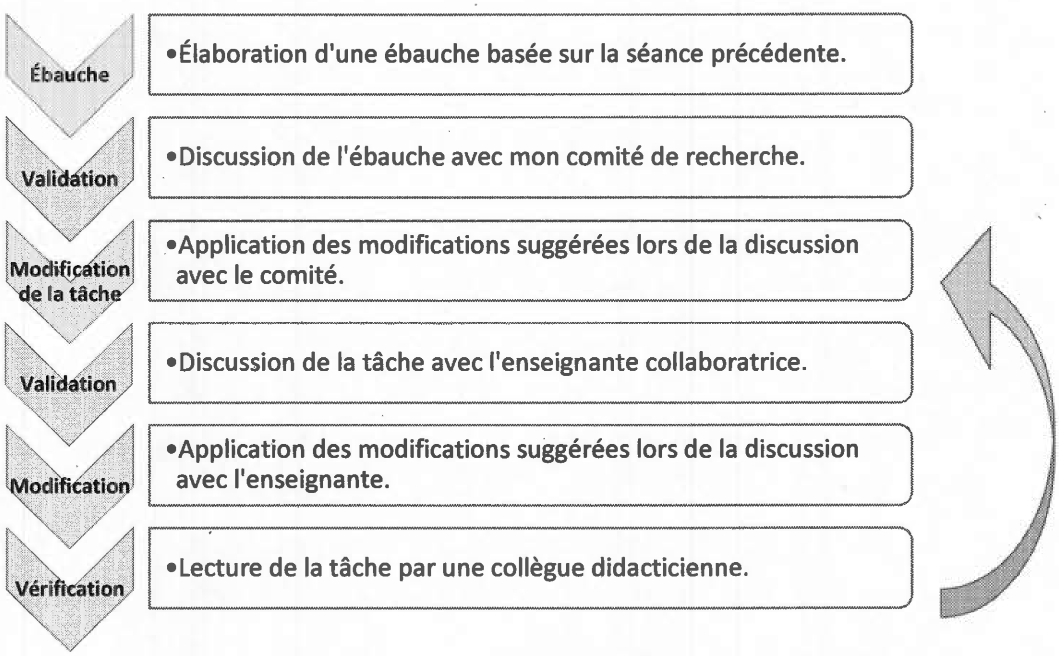


Figure 3.1 Cycle d'élaboration des tâches pour chaque séance

Le travail en équipe est privilégié pendant chacune des séances. Des moments individuels sont aussi proposés. Cette approche s'inspire du contexte d'enseignement proposé dans la méthodologie ACODESA qui privilégie l'Apprentissage COllaboratif, le DÉbat Scientifique et l'Auto-réflexion (Hitt, 2006). Cette méthodologie met de l'avant une approche privilégiant des moments de réflexion individuels afin que les étudiants reconnaissent et traitent les représentations proposées dans un problème ou produisent de nouvelles représentations pour résoudre un problème. L'approche met également l'emphase sur des moments de travail en équipe pendant lesquels des débats cognitifs peuvent prendre place et ainsi faire évoluer les représentations des étudiants.

De plus, la résolution de problème ou de situation-problème fait également partie des éléments mis de l'avant par la méthodologie ACODESA. Afin d'être en mesure d'observer le processus de compréhension des étudiants, le fait de mettre les étudiants dans un contexte où ils auront à s'exprimer et à communiquer leurs pensées est tout désigné.

3.4.1 La première séance d'enseignement

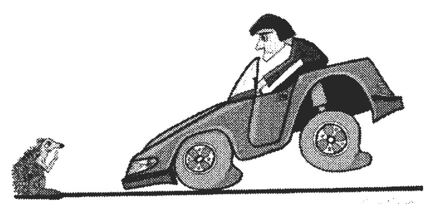
La préparation de la première séance peut être rapportée en trois aspects : le choix de l'entrée pour introduire la dérivée, le choix du contexte et l'analyse *a priori* de la tâche choisie.

À partir de l'analyse conceptuelle de la dérivée présentée dans le chapitre II et à la suite de l'observation de différents manuels de calcul différentiel, une entrée a été privilégiée pour la première séance d'enseignement. Il s'agit d'une entrée par le travail sur le taux de variation moyen pour permettre un passage vers le taux de variation instantané. Cette entrée est très présente dans l'enseignement du calcul différentiel. En effet, plusieurs des manuels de calcul différentiel qui sont utilisés dans différents cégeps du Québec (Brunelle et Désautels, 2011; Hamel et Amyotte, 2007) privilégient cette approche. Ainsi, afin de pouvoir rejoindre la communauté des cégeps, il a semblé intéressant d'utiliser une entrée qui leur est familière. De plus, bien que certains chercheurs aient quelques réserves quant à cette entrée (Vivier, 2010, entre autres), elle s'inspire tout de même de la construction du concept de dérivée dans l'histoire.

Aussi, cette entrée est amenée dans le contexte physique de la vitesse qui est un contexte pratiquement incontournable lorsqu'on parle de calcul différentiel. À la lumière de différents manuels de calcul différentiel utilisés au Québec (Brunelle et Désautels, 2011; Charron et Parent, 2007; Hamel et Amyotte, 2007), le contexte de vitesse est très présent. De plus, la représentation verbale « vitesse instantanée » est très utilisée par les enseignants (Dufour, 2011) pour désigner la dérivée. En effet, cette représentation verbale, bien qu'en contexte, est considérée comme une représentation du concept de dérivée au même titre que la représentation verbale « taux de variation instantané ».

Voici la situation[25] prévue pour l'introduction au TE :

Distance de freinage



Une voiture roule sur l'autoroute. Le conducteur aperçoit un animal à environ 70 mètres devant lui et appuie tout de suite sur les freins. Il s'est arrêté après 4 secondes et n'a pas frappé l'animal de justesse.

Si l'animal avait été plus près, disons à 35 mètres, et que le conducteur n'avait pas pu l'éviter, à quelle vitesse l'aurait-il frappé?

Figure 3.2 Situation proposée pour la première séance du TE

Cette situation s'inspire de l'extrait d'une discussion entre un enseignant du collégial et un enseignant du secondaire au sujet d'une situation problème à proposer aux élèves

[25] Une ébauche de cette tâche a été proposée lors d'une pré-expérimentation. Cela a permis de changer quelques détails de la situation.

(Corriveau, 2013)[26]. Les deux enseignants y voyaient là une tâche fertile pour travailler le concept de taux de variation, de taux de variation moyen et enfin de taux de variation instantané (dérivée).

C'est une situation ouverte pour deux raisons. D'abord, elle admet plusieurs réponses possibles dépendant, entre autres, des variables avec lesquelles les étudiants choisissent de travailler. Par exemple, s'ils choisissent d'observer la distance parcourue (croissante) par rapport au temps, ou la distance entre les deux voitures (décroissante) par rapport au temps, la réponse ne sera pas la même. De plus, bien qu'il y ait un modèle théorique qui existe pour ce genre de situation (distance de freinage), telle qu'elle est proposée, la situation permet aux étudiants de modéliser eux-mêmes la situation.

La question dans cette situation est : à quelle vitesse allait la voiture au moment de l'impact ? Il s'agit en fait de connaitre la vitesse instantanée après 35 mètres de freinage. Il faut alors identifier à quel temps est associé cette distance. Comme les étudiants ne connaissent pas encore le concept de taux de variation instantané, ils devront faire appel à ce qu'ils connaissent. Ceci est d'ailleurs un autre exemple de l'ouverture de la situation : plusieurs stratégies de résolution différentes peuvent être amenées par les étudiants. Comme il a déjà été mentionné, cette tâche permet un accès à la dérivée par le travail sur le taux de variation moyen, puis instantané (dérivée).

Quelques sous-questions ont tout de même été formulées afin de guider un minimum les étudiants dans leur démarche, mais aussi pour garder plus de traces de leurs raisonnements. Aucun registre en particulier n'est suggéré dans les sous-questions du problème. Pour ne pas précipiter le travail, les sous-questions ont été placées sur des pages différentes du cahier de l'étudiant. J'ai aussi demandé aux étudiants d'attendre

[26] Cette discussion a eu lieu dans le cadre d'une recherche doctorale.

que je leur fasse signe avant d'aller plus loin dans le cahier de l'étudiant. Voici les sous-questions de la première tâche :

Page 2
Prends d'abord un moment pour réfléchir à une stratégie de résolution pour ce problème. Laisse les traces de cette réflexion.
Pages 3 et 4
En équipe, comparez vos idées et décidez d'une stratégie à adopter pour résoudre le problème.
Pages 5 et 6
À quelle vitesse roulait le conducteur avant de freiner?

Figure 3.3 Sous-questions de la tâche dans le cahier de l'étudiant, séance 1

Ainsi, les objectifs poursuivis en choisissant cette tâche sont d'une part de permettre aux étudiants de décider de leur stratégie de résolution, et surtout des représentations avec lesquelles travailler. D'autre part, la tâche se situe dans un contexte connu des étudiants, ce qui permet aux étudiants d'utiliser différentes représentations de plusieurs concepts qu'ils ont déjà vus au secondaire. Par exemple, ils ont travaillé les concepts de taux de variation moyen (vitesse moyenne) et de taux de variation instantané (vitesse instantanée) dans leur cours de mathématiques et de physique au secondaire.

Finalement, la question à la page 5 du cahier de l'élève n'a pas été abordée. En effet, la mise en situation et la question de départ étaient assez denses pour permettre un moment de réflexion individuel, différents moments de travail en équipe et de discussions en plénière. À la fin de la première séance, les étudiants avaient des pistes de solutions, mais n'avaient pas trouvé de valeur pour la vitesse instantanée quand $d=35$.

En réalité, la séance a été entrecoupée de moments de travail individuel, de travail en équipe et de travail en grand groupe (moins fréquemment). Une intention d'enseignement importante était de se coller le plus possible aux représentations fonctionnelles produites et choisies par les étudiants afin de faire évoluer ces représentations pour amener le concept de dérivée. En conséquence, les deux équipes ont choisi de travailler avec le temps et une distance définie par la distance entre la voiture et l'animal (qui diminue plus le temps augmente). En raison d'une telle définition des variables en jeu, la vitesse observée dans la situation est donc négative. Cette vitesse est négative parce que la distance diminue par rapport au temps. Les deux variables ne varient donc pas dans le même sens. En d'autres termes, la façon dont le déplacement est défini implique un taux de variation qui sera négatif malgré le fait que la voiture accélère ou décélère. Ce qui a provoqué plusieurs difficultés d'interprétation. Ce sujet sera d'ailleurs abordé dans le chapitre IV.

3.4.2 La deuxième séance d'enseignement

Pour la deuxième séance, compte tenu du fait que le problème de la séance 1 ait été bien avancé, mais pas terminé, j'ai voulu poursuivre avec ce problème. Je reprenais ce problème pour poursuivre deux objectifs (entre autres). Le premier objectif était de reprendre certains éléments qui étaient ressortis dans la séance 1 pour voir comment les étudiants les utilisaient, les réinvestissaient. Aussi, je désirais aller plus loin dans le problème, entre autres, pour travailler/coordonner des représentations liées au concept de taux de variation instantané/dérivée dans le registre algébrique. Je voulais amener l'idée d'intervalle en lien au calcul d'un taux de variation afin d'introduire l'idée d'un intervalle très petit (associé au concept de limite). Ainsi, à partir de la même situation problème, de nouvelles questions ont été formulées afin d'atteindre ces deux objectifs.

Voici les nouvelles sous-questions proposées pour la séance 2 à partir de la même situation que la séance 1 :

Page 2
Au dernier atelier, nous avons étudié la situation décrite à la page précédente. Trace le graphique que nous avions obtenu pour représenter la situation. À partir de ce graphique, trouve la vitesse de la voiture lorsqu'elle se trouve à 35 mètres de l'animal. Explique ta démarche.
Pages 3 et 4
As-tu l'impression qu'il te manque des informations pour y arriver? Si oui, lesquelles?
Pages 5 et 6
À quelle vitesse roulait le conducteur avant de freiner?

Figure 3.4 Sous-questions de la tâche dans le cahier de l'étudiant, séance 2

Lors de cette séance, les étudiants ont finalement été un peu moins volubiles qu'à la première séance pendant le travail d'équipe. Ils semblaient un peu démotivés. Il est vrai que travailler pendant plus de trois heures (deux séances d'une heure et demie) sur le même problème peut provoquer une certaine démotivation ou un désintérêt face au problème. En conséquence, j'ai privilégié des moments en grand groupe. Le travail s'est principalement déroulé dans les registres verbal et algébrique tout en continuant de faire des liens avec ces représentations dans le registre graphique.

3.4.3 La troisième séance d'enseignement

Pour la troisième séance d'enseignement, le registre tabulaire, qui n'a pas vraiment été travaillé jusqu'à maintenant, a été mis de l'avant. Le problème choisi est toujours dans un contexte où la distance et le temps sont les variables en jeu (voir figure 3.5). Or, cette fois, la distance est la variable indépendante et le temps est la variable dépendante. Cela est plutôt contrintuitif pour les étudiants.

Deux problèmes sont proposés pour cette séance. Par contre, un seul a été travaillé avec les participants. Le premier problème provient d'un manuel déjà utilisé par l'enseignante collaboratrice dans le passé (Thomas, Finney, Weir, Hass et Giordano, 2008). Le problème est présenté dans la figure 3.5.

Page 1

Problème #1 Course de chevaux pur-sang[27]

Une course de chevaux se déroule sur une distance de 10 furlongs (à titre d'information, un furlong vaut 220 verges ou 201,2 mètres). Un chronométreur est assigné à chaque furlong ***F*** et mesure le temps de passage ***t*** d'un cheval; ***t*** est exprimé en secondes après le début de la course. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	0	20	33	46	59	73	86	100	112	124	135

a) En combien de temps le cheval a-t-il terminé la course?

Page 2

b) Quelle a été la vitesse moyenne du cheval au cours des cinq premiers furlongs?

c) Quelle a été la vitesse approximative du cheval lorsqu'il a passé la marque du troisième furlong?

Page 3

d) Au cours de quelle portion de la course le cheval a-t-il galopé le plus vite?

e) Au cours de quelle portion de la course le cheval a-t-il accéléré le plus?

Page 4

Pourrais-tu représenter cette situation par un graphique?

Peux-tu expliquer les résultats obtenus précédemment dans le graphique? Par quoi est représentée la vitesse moyenne trouvée en b) par exemple?

Figure 3.5 Problème proposé aux participants pendant la séance 3

Le problème proposé est morcelé en différentes tâches, et ce, pour deux raisons. Premièrement, la dernière séance s'est déroulée avec beaucoup de travail en grand groupe. Je voulais donc revenir à du travail en plus petites équipes, voire à du travail

[27] Problème tiré du manuel de Thomas, Finney, Weir, Hass et Giordano, 10e édition, 2003, p. 131.

individuel, afin de pouvoir faire des interventions plus courtes et ciblées. Deuxièmement, la tâche travaillée lors des deux dernières séances était assez longue et très ouverte, ce qui, à mon avis, a un peu déstabilisé, voire un peu frustré les participants. En conséquence, j'ai voulu proposer une tâche plus courte et un peu moins ouverte pour la séance 3 afin que les étudiants aient le sentiment d'aller au bout d'un problème.

Malheureusement, seulement trois des participants se sont présentés à cette séance (dont une qui était très en retard). L'activité a donc pris la forme d'une discussion ou d'un travail collaboratif, tous ensemble, tout au long de la séance.

3.4.4 La quatrième séance d'enseignement

À la suite de la séance 3, j'ai voulu proposer aux étudiants un problème qui ne serait pas dans un contexte de distance, vitesse et accélération, et qui permettrait la manipulation de représentations dans plusieurs registres, particulièrement graphique, algébrique et tabulaire (étant donné qu'il n'y avait que trois étudiants à la dernière séance, qui était plutôt concentrée sur ce dernier registre). De plus, comme les étudiants avaient commencé à voir le concept de dérivée en classe[28], j'ai voulu essayer de les amener à travailler avec la fonction dérivée plutôt qu'avec la dérivée en un point seulement.

La situation est donc morcelée en plusieurs questions pour permettre aux étudiants de réfléchir et travailler sur les différentes représentations proposées. Certaines questions

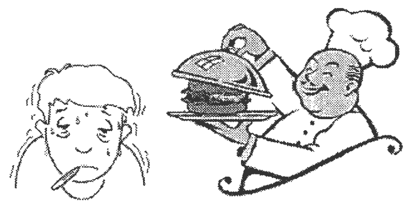
[28] Les observations faites en classe lors de l'introduction du concept de dérivée sont décrites à la section 3.5 de ce document.

sont plutôt dirigées et évoquent une utilisation particulière du concept de dérivée. Par exemple, la représentation verbale « cesse d'augmenter et commence à diminuer » évoque le moment précis où l'on remarque un changement de croissance, ce qui correspond au moment où la dérivée est égale à 0.

Comme deux des participants étaient dans un programme où l'économie était mise de l'avant, j'ai d'abord pensé à prendre un problème dans ce contexte. Or, après plusieurs essais, je ne suis pas parvenue à utiliser ce contexte pour travailler le concept de dérivée en continuation avec ce que j'avais fait avec les étudiants dans les premières séances. J'ai donc opté pour un problème dans un contexte de biologie (impliquant une prolifération de bactéries). Le problème a été composé en collaboration avec mes directeurs et l'enseignante participante, bien que plusieurs problèmes de ce type existent dans les différents manuels de calcul différentiel (Thomas *et al.*, 2008, p. 142, par exemple).

Voici la mise en situation pour la séance 4:

La maladie du Hamburger



On entend parfois que des gens attrapent la « maladie du hamburger ». Il s'agit en fait d'une infection à la bactérie *Escherichia coli*, mieux connue sous le nom E. Coli. Afin de traiter l'infection, la prise d'un antibiotique est nécessaire.

Plusieurs antibiotiques peuvent traiter cette maladie. Afin de mieux connaître l'efficacité d'un de ces antibiotiques, des médecins observent le comportement d'une population de bactéries E. Coli présente chez un patient à partir du moment où ils administrent une dose de cet antibiotique.

Figure 3.6 Mise en situation pour la tâche de la séance 4

Les questions qui accompagnent cette mise en situation sont présentées de façon à ce qu'il y ait une question par page. Ainsi, les étudiants doivent répondre à une question à la fois sans connaitre les questions qui suivent. Je leur ai d'ailleurs demandé de commencer par les pages 1 et 2 et de me consulter avant d'aller plus loin. Voici les questions (voir figure 3.7):

Page 2

Voici les données que les médecins ont recueillies pendant les 4 premières heures du traitement :

Temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique (t)	**0**	**2**	**4**
Nombre de bactéries dans la population (b(t))	**1 000 000**	**1 025 200**	**1 044 800**

1- Crois-tu que l'antibiotique a un effet sur la population de bactéries présente chez le patient? Pourquoi? Explique ta réponse.

Page 3

Les médecins effectuent d'autres analyses quelques heures plus tard.

Temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique (t)	**0**	**2**	**4**	**12**	**14**
Nombre de bactéries dans la population (b(t))	**1 000 000**	**1 025 200**	**1 044 800**	**1 067 200**	**1 058 800**

2- Fais un bilan du comportement de la population de bactéries pendant les quatorze premières heures du traitement.

Page 4

3- Afin de bien voir le bilan de la situation, trace une esquisse d'un graphique qui pourrait représenter cette situation.

Page 5

Pour mieux comprendre ce qui se passe avec la population de bactéries présente chez leur patient, les médecins ont trouvé une formule qui modéliserait bien leur situation :

$$b(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2,$$

où *t* est le temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique et *b(t)* le nombre de bactéries dans la population.

4- Connaissant cette formule, que peux-tu dire de ton esquisse graphique tracé précédemment?

Page 6

5- Une donnée importante pour leur recherche est le temps nécessaire pour que la population de bactéries cesse d'augmenter et commence à diminuer. Que se passe-t-il avec le taux de croissance de la population à ce moment?

Page 7

6- Trouve une façon de calculer à quel moment exactement la population de bactéries a cessé d'augmenter pour commencer à diminuer dans cette situation.

Figure 3.7 Tâches proposées pour la séance 4 (Cahier de l'étudiant, séance 4)

Un élément important à préciser est que les variables en jeu dans cette situation ne sont pas toutes deux continues. En effet, la variable « nombre de bactéries dans la population » est discrète. Or, pendant le travail avec les étudiants, la représentation algébrique proposée nous amène à traiter le problème comme si les variables étaient continues. On peut parler de l'utilisation d'un modèle mathématique continu servant à étudier un phénomène biologique discret qui se rapproche beaucoup de ce modèle mathématique. J'ai tout de même pris soin d'avoir une discussion avec chacune des équipes à ce sujet. Les étudiants ont accepté assez facilement ce décalage entre discret et continu. En fait, la discussion a été amenée par moi, les étudiants ne se souciant pas vraiment de cet aspect particulier de la situation. Évidemment, la considération d'un modèle mathématique continu pour représenter cette situation est primordiale pour avancer dans le problème en utilisant la dérivée. Une condition de la dérivabilité étant bien sûr la continuité.

Aussi, il faut préciser que la représentation algébrique proposée dans le cahier original n'était pas en cohérence avec la table de valeurs proposée. En fait, cette nouvelle représentation algébrique (voir équation 3.1) a donc été proposée aux étudiants pendant la séance 4.

Équation 3.1 $$b(t) = -700t^2 + 14000t + 10^6$$

De plus, avec la consigne suivant laquelle il faut répondre à une question à la fois, les étudiants ne voient pas l'équation avant au moins la moitié de la séance.

Cette fois-ci, la séance s'est principalement déroulée en travail d'équipe. En effet, d'un côté, il y avait l'équipe[29] composée d'Annie, Judith et Karine, et de l'autre, l'équipe composée d'Antoine, Guillaume et Jérémie. La plupart du temps, les étudiants

---

[29] Les équipes ont été formées en considération avec le fait qu'Annie, Judith et Karine avaient déjà fait un cours de calcul différentiel et qu'Antoine, Guillaume et Jérémie en étaient à leur premier cours de calcul différentiel.

discutaient entre eux, mais ils prenaient aussi des moments de réflexion plus individuels. Pour ma part, j'ai d'abord respecté leur moment individuel au début de la séance, pendant lequel chacun s'est fait une idée de la situation. Par la suite, j'ai accompagné les deux équipes à tour de rôle. En définitive, j'ai passé plus de temps avec l'équipe des garçons pendant cette séance.

3.4.5 La cinquième séance d'enseignement

Deux problèmes ont été proposés dans la cinquième séance. Dans le premier problème, le concept de dérivée n'est pas directement imposé, mais plutôt implicitement nécessaire. Après avoir introduit le concept de dérivée et demandé une application de cette dernière dans un contexte de bactéries, j'ai voulu proposer un problème dans un contexte mathématique dans lequel le concept de dérivée était implicite. De plus, la dérivée nécessaire dans ce problème est la dérivée d'une fonction quadratique simple. Il s'agit d'une des premières règles de dérivation travaillées avec les étudiants. L'enjeu de ce problème se situe donc au niveau de la reconnaissance de l'utilité de la dérivée et la production et le traitement d'une représentation algébrique (RA) adéquate impliquant la dérivée. L'article de Dufour et Jeannotte (2013) fait une analyse *a priori* assez complète de ce problème. Bien que cette analyse soit faite sous l'angle du contrôle (Saboya, 2010), plusieurs représentations susceptibles d'apparaitre lors de la résolution de ce problème par des étudiants sont identifiées. Voici le premier problème proposé à la séance 5 (tiré de Selden *et al.*, 1989) :

1- Trouve une valeur de a et b telle que la droite $2x + 3y = a$ est tangente au graphique de la fonction $f(x) = bx^2$ au point où $x=3$.

Ensuite, le deuxième problème est proposé et doit se résoudre presque exclusivement dans le registre graphique. Les problèmes précédents proposaient des représentations verbales, tabulaires, algébriques, mais peu de questions étaient posées directement dans le registre graphique. C'est l'enseignante témoin qui a proposé l'idée du problème suivant (figure 3.8) :

2. En laissant les traces de ta démarche, trace le graphique de la fonction dérivée de la fonction représentée par le graphique suivant :

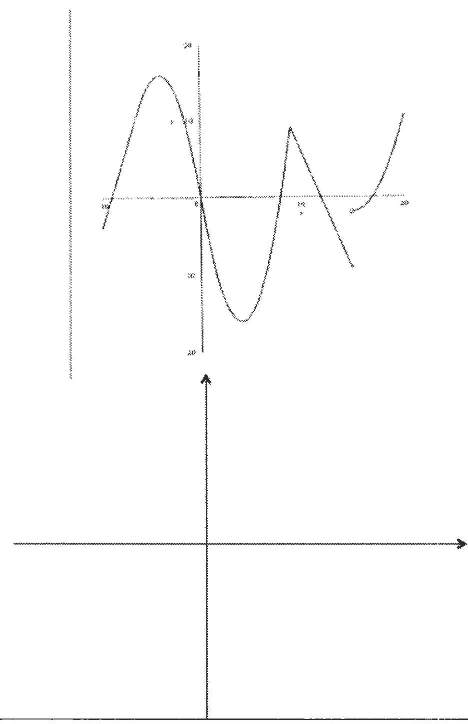
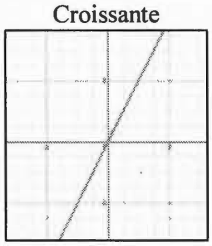
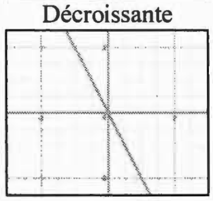
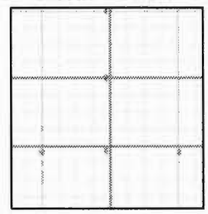
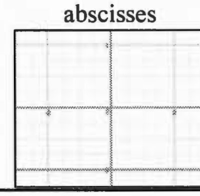
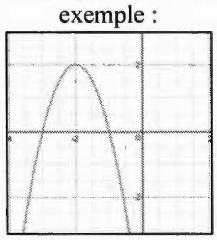
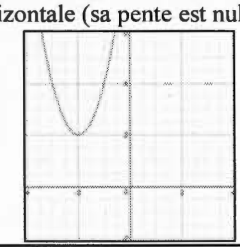
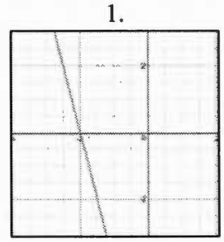
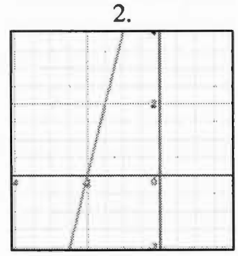
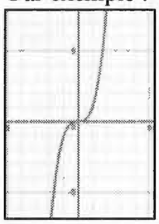
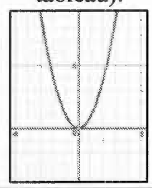
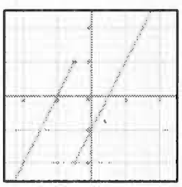
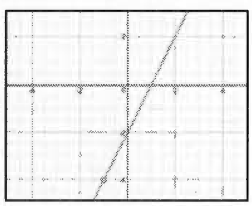
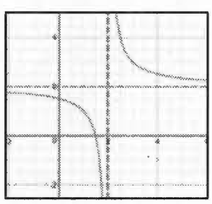
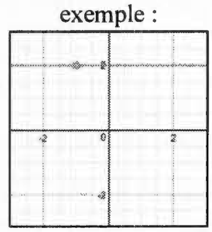
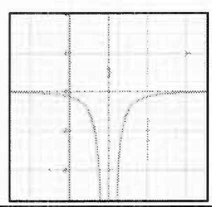
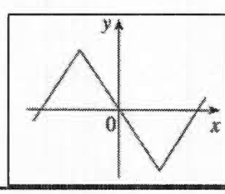
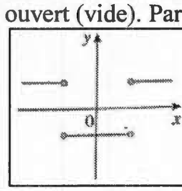


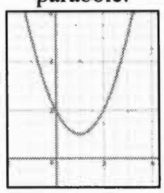
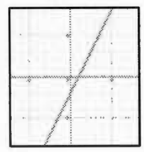
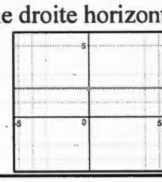
Figure 3.8 Deuxième problème proposé dans la séance 5

Il s'agit d'un problème très ouvert. En effet, comme la représentation graphique (RG) proposée représente une fonction par parties, dont on ne donne pas la RA, les étudiants pouvaient émettre différentes conjectures quant à l'allure de la RA d'une possible fonction dérivée. Pour ce faire, ils devaient identifier plusieurs unités signifiantes liées au RG de la fonction d'origine et les convertir en unités signifiantes de la RG de la fonction dérivée. Des unités signifiantes accessibles pour les participants sont rassemblées dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1
Unités signifiantes dans la RG de la fonction d'origine et leur conversion en unités signifiantes dans la RG de la fonction dérivée : les cas susceptibles d'être reconnus dans la situation proposée

Unités signifiantes dans la RG de la fonction d'origine	Unités signifiantes dans la RG de la fonction dérivée
Croissance de la fonction sur un intervalle donné Croissante  Décroissante 	Signe de la fonction sur cet intervalle. Positive – au-dessus de l'axe des abscisses  Négative – au-dessous de l'axe des abscisses 
Présence d'un sommet, c'est-à-dire d'un point où il y a un changement de croissance : De croissante à décroissante (maximum) et/ou point où la droite tangente à la courbe en ce point est horizontale (sa pente est nulle/zéro). Par exemple :  De décroissante à croissante (minimum) et/ou point où la droite tangente à la courbe en ce point est horizontale (sa pente est nulle/zéro). 	Dans les deux cas, cela représente la présence d'un zéro en ce point, c'est-à-dire un point où la courbe de la fonction dérivée croise l'axe des abscisses. 1.  2. 

Unités signifiantes dans la RG de la fonction d'origine	Unités signifiantes dans la RG de la fonction dérivée
La présence d'un changement de concavité nommé « point d'inflexion » (représentation visuelle [RV]). Par exemple : 	De façon générale, cela indique la présence d'un sommet (maximum ou minimum). Par contre, un point d'inflexion pourrait également permettre la présence d'une droite tangente verticale (voir cas « droite tangente verticale » plus bas dans ce tableau). 
La présence d'un saut dans la fonction, d'un point ouvert (vide) ou d'une asymptote, c'est-à-dire un point de discontinuité. Par exemple :   	Si la fonction est discontinue, la fonction n'est pas dérivable. Ainsi, il y aura un point ouvert (vide) ou une asymptote en ce point dans la RG de la fonction dérivée. Par exemple :  
La présence d'un point anguleux : la fonction n'est pas dérivable. Par exemple : 	Comme la fonction n'est pas dérivable en ce point, la RG de la fonction dérivée aura un point ouvert (vide). Par exemple : 

Unités signifiantes dans la RG de la fonction d'origine	Unités signifiantes dans la RG de la fonction dérivée
Reconnaissance d'une famille de fonctions par la courbe dans RG. Dans la RG proposée, les étudiants pourraient reconnaitre, entre autres : - Une RG d'une fonction de degré deux, soit une parabole.  - Une RG d'une fonction affine, soit une droite. 	Les étudiants connaissent la RG d'un certain nombre de familles de fonctions et la RG de leur fonction dérivée. Ils peuvent donc tenter d'identifier le type de fonctions représenté et s'y fier pour produire la RG de la fonction dérivée. Dans ce cas, il est possible que les étudiants soient tentés de passer par le registre algébrique et d'avoir recours à certaines règles de dérivation. - Une RG d'une fonction affine, soit une droite.  - Une RG d'une fonction constante, soit une droite horizontale. 

Il n'était donc pas attendu des étudiants qu'ils produisent une représentation graphique complète d'une possible fonction dérivée pour la fonction proposée, mais plutôt de voir quelles unités signifiantes ils allaient reconnaitre.

Cette séance s'est déroulée exclusivement en travail d'équipe avec les mêmes équipes que pour la séance précédente.

3.5 Les observations en classe

Tous les participants suivent en parallèle des séances d'enseignement avec moi, un cours d'introduction au calcul différentiel avec soit l'enseignante collaboratrice ou une autre enseignante du même collège. Afin d'être en mesure de savoir ce que les participants voyaient en classe « ordinaire », j'ai assisté à tous les cours des participants pendant le déroulement de la collecte de données ainsi que quelques cours avant de commencer la collecte de données.

L'approche utilisée par les deux enseignantes est sensiblement la même. À savoir, il s'agit d'une approche magistrale pendant laquelle elles écrivent beaucoup de notes au tableau que les étudiants peuvent retranscrire. Sans faire une analyse exhaustive des représentations utilisées par les enseignantes, elles ont principalement recours à des représentations dans les registres algébrique et verbal. Elles ont parfois recours à des RG afin d'appuyer des propos. Ces RG sont principalement utilisées lors d'exemples.

Mes observations ont commencé lorsque les enseignantes venaient de terminer la partie sur le calcul de limite. Elles entamaient donc la partie sur l'introduction de la dérivée. Pour ce faire, elles ont commencé par un travail sur le taux de variation de droites sécantes, puis le taux de variation de droites tangentes, et ce, principalement dans le registre algébrique. Elles sont rapidement arrivées au travail sur la RA de la dérivée incluant le concept de limite.

Il est important de noter que l'approche utilisée par les enseignantes a également été considérée dans le choix de mettre en place des séances d'enseignement spécifiquement pour ce projet en dehors des cours. En effet, comme les enseignantes utilisaient une approche d'enseignement magistral, il aurait été très difficile de suivre le processus de compréhension des étudiants à travers les représentations qu'ils utilisent. Ainsi, le choix de créer des séances dans lesquelles ils auraient la possibilité de s'exprimer davantage (autant oralement qu'à l'écrit), allait de soi. De plus, en assistant aux cours avec les étudiants, il devient également possible de faire le lien entre certaines représentations utilisées ou produites par les étudiants et les représentations produites par les enseignantes en classe.

CHAPITRE IV

MODÈLES DES PROCESSUS DE COMPRÉHENSION DES ÉTUDIANTS

Le chapitre IV présente l'analyse des données recueillies lors de séances d'enseignement mises en place afin d'atteindre le premier objectif énoncé dans le chapitre II. D'abord, une explication de la méthode d'analyse est fournie. Ensuite, une justification du choix des données analysées est présentée. De plus, l'analyse des séances 4 et 5 est faite pour chacune des équipes formées lors de ces séances. Cette analyse permet d'atteindre le premier objectif de la thèse, soit de construire des modèles des processus de compréhension des étudiants observés.

4.1 La méthode d'analyse des données

Afin d'analyser les données, plusieurs étapes ont été suivies (inspirées par le modèle de Powell, Francisco et Maher, 2003). Il faut dire que cette analyse s'est échelonnée sur une longue période et a permis d'observer en profondeur le processus de compréhension des étudiants.

La première étape d'analyse était très sommaire et se déroulait en parallèle avec la mise en place du TE, c'est-à-dire de la collecte de données en tant que telle. En effet, la méthodologie choisie exigeait que les séances d'enseignement soient construites au fur et à mesure de la collecte de données en s'appuyant, pour planifier les séances, sur les séances précédentes. Ainsi, après chaque séance, je consultais les données brutes, les vidéos prises pendant la séance, je les commentais et je retenais, le cas échéant, des éléments pouvant servir de base pour l'élaboration de la séance suivante (cette étape fait d'ailleurs partie des étapes de mise en place du TE [Figure 3.1]).

La deuxième étape a été réalisée à partir des transcriptions de chacune des rencontres. Les transcriptions ont été codées et commentées. Les représentations « clées » utilisées ou produites, qui semblaient informer sur les processus de compréhension des étudiants, ont été identifiées. De plus, des moments clés ont été ciblés afin de concentrer une prochaine étape d'analyse sur ces moments particuliers.

À partir de ces transcriptions codées et commentées, la troisième étape d'analyse consistait à relater le déroulement des séances en les découpant en moments clés qui suivent l'ordre chronologique de la séance. Chaque moment de la séance est donc divisé en s'appuyant sur ce qui se passe au niveau de la résolution du problème proposé. Puis, ces moments sont interprétés en s'appuyant sur le cadre théorique choisi. Cette étape d'analyse prend la forme suivante : une courte description de ce qui se passe au moment choisi de la séance est d'abord proposée, ce moment est ensuite interprété par rapport aux représentations « présentes » et aux actions des étudiants sur ces représentations, cette partie est ensuite présentée avec des points de forme. Finalement, un extrait ou une figure provenant des cahiers de travail des étudiants sont ajoutés afin d'appuyer les éléments d'interprétations de ces moments sous l'angle du cadre théorique.

Enfin, la quatrième étape d'analyse est accomplie à partir du document produit lors de l'étape d'analyse précédente. Les moments de la séance qui sont directement liés au concept de dérivée sont identifiés. En s'appuyant sur les analyses déjà produites de ces moments, il a été possible d'établir des liens entre différents moments et de ressortir des éléments clés qui permettent de décrire les processus de compréhension des étudiants du concept de dérivée. Les sections suivantes du chapitre IV présentent d'ailleurs cette étape de l'analyse.

Le schéma suivant (Figure 4.1) illustre les différentes étapes d'analyse des données pour cette thèse.

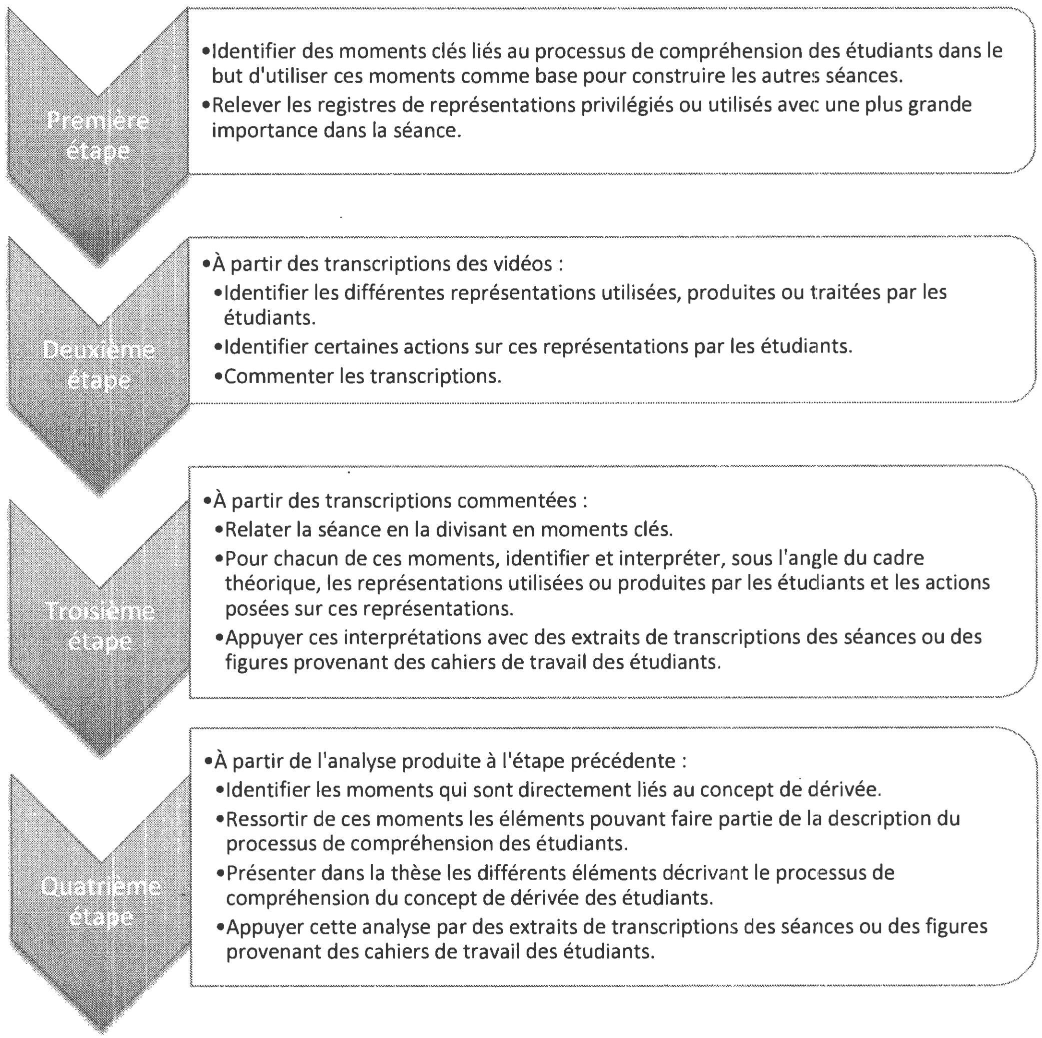


Figure 4.1 Étapes de l'analyse des données recueillies

Finalement, la présentation des quatre couches d'analyse serait très lourde pour les lecteurs. Les premières étapes d'analyse, suivant un modèle d'analyse proposé par Powell, Francisco et Maher (2003), permettent de filtrer et retenir l'information qui mène ensuite à une analyse répondant aux objectifs de recherche. Ainsi, dans ce qui suit, seule la quatrième étape de l'analyse est présentée. Des exemples des étapes d'analyse sont présentés en Annexe A afin d'assurer un certain compte rendu de la méthode d'analyse.

4.2 Les modèles des processus de compréhension des étudiants

Le contenu des prochaines sections de ce chapitre constitue les modèles obtenus par l'analyse des séances de TE. J'ai choisi de présenter deux modèles : un modèle par équipe de travail pendant les séances. À la lumière des différentes étapes d'analyse, il est devenu clair qu'il serait très difficile de distinguer des modèles individuels du processus de compréhension des étudiants. En effet, l'approche mise en place, qui propose des problèmes ouverts et du travail d'équipe, a créé un contexte dans lequel le processus de compréhension observé est collectif. Un modèle qui décrit plus particulièrement le processus de compréhension d'un étudiant est aussi présenté afin d'avoir une idée de certains éléments du modèle qui seraient plus individuels (voir section 4.4.2.4). De plus, la section 4.5 présente des éléments qui sont communs aux deux modèles « collectifs » proposés ou qui ont eu une importance particulière dans un ou l'autre des modèles.

Parmi les analyses des cinq séances mises en place, toutes ne se retrouvent pas dans les modèles présentés dans la thèse. En effet, les modèles des processus de compréhension des étudiants du concept de dérivée ont été formulés à partir de l'analyse des séances 4 et 5, et ce, pour plusieurs raisons.

D'abord, les premières séances sont teintées d'un certain malaise ressenti au début de la collecte de données dû, par exemple, à l'adaptation des étudiants à la présence de caméras, à l'approche impliquant de la résolution de problèmes très ouverts, en plus de l'apprivoisement entre les participants et la chercheure-enseignante. Tous ces éléments ont produit un terrain peu fertile sur le plan de l'observation du processus de compréhension d'un concept ciblé lors des deux premières séances.

Ensuite, une importante confusion règne pendant le déroulement des séances 1 et 2. Cette confusion prend la forme d'une difficulté de communication entre les participants et entre les participants et la chercheure-enseignante. La très grande ouverture (possiblement trop grande) de la situation proposée a fortement déstabilisé les participants, ce qui a provoqué une confusion entre les différentes représentations en jeu pendant les séances 1 et 2. Cependant, la confusion n'étant pas liée directement au concept de dérivée, l'analyse pour faire ressortir le processus de compréhension lié à la dérivée est très difficile. Ces séances ne sont donc pas considérées pour la description du processus de compréhension du concept de dérivée par les étudiants. Or, comme le contexte de la situation — soit celui de déplacement, temps et vitesse — semble être une raison de la confusion, ces séances sont plutôt considérées dans l'analyse servant à l'atteinte du deuxième objectif de la thèse qui consiste à mieux comprendre comment le contexte mis en place lors des séances influence la production et l'utilisation de représentations par les étudiants. Cette analyse fait d'ailleurs l'objet du chapitre V de ce document.

De plus, suite au déroulement « confus » des deux premières séances, les objectifs et intentions de ces séances ont été repris pour les séances 4 et 5. En effet, la séance 4 présente une situation-problème qui, sans être dans le contexte des séances 1 et 2, est semblable à la situation-problème de ces séances. Les séances 4 et 5 se sont très bien déroulées sur le plan de la motivation et de la communication entre les participants, et se sont avérées très riches en représentations produites et utilisées directement liées à la dérivée. Elles ont donc été privilégiées pour décrire le processus de compréhension des étudiants.

Enfin, étant donné que seulement deux étudiants se sont présentés à la séance 3, cette dernière n'est pas prise en compte dans les analyses. Les objectifs et intentions établis pour la séance 3 sont repris pour l'élaboration des séances suivantes.

Le format des modèles pourrait surprendre. Ils sont présentés sous forme de texte suivi. Étant donné que l'aspect processuel est l'aspect privilégié dans les objectifs de la thèse, il était important de pouvoir suivre le chemin parcouru par les étudiants lors de leur processus de compréhension. Un format de présentation plus synthétique des modèles aurait probablement contribué à une perte d'information importante et ainsi, provoquer le danger de passer à côté de l'objectif de la thèse. Le choix a tout de même été fait de présenter des schémas résumant les grandes étapes des différentes parties des modèles au début de chacune de ces parties. Or, il est important de souligner que ces schémas sont présentés afin de faciliter la lecture des modèles et ne représentent pas les modèles des processus de compréhension des étudiants.

Bref, les analyses de toutes les séances sont utilisées afin d'atteindre les objectifs de cette thèse. L'objectif 1 est atteint grâce aux analyses des séances 4 et 5, et l'objectif 2 est atteint en s'appuyant sur l'analyse de l'ensemble des cinq séances (chapitre V de ce document).

4.3 Le modèle du processus de compréhension de la dérivée pour l'équipe d'Annie, Judith et Karine

4.3.1 La première partie du modèle : travail en contexte sur la dérivée en un point

Voici d'abord un rappel du problème proposé dans la séance 4 :

Page 1

On entend parfois que des gens attrapent la « maladie du hamburger ». Il s'agit en fait d'une infection à la bactérie *Escherichia coli*, mieux connue sous le nom E. Coli. Afin de traiter l'infection, la prise d'un antibiotique est nécessaire.

Plusieurs antibiotiques peuvent traiter cette maladie. Afin de mieux connaître l'efficacité d'un de ces antibiotiques, des médecins observent le comportement d'une population de bactéries E. Coli présente chez un patient à partir du moment où ils administrent une dose de cet antibiotique.

Page 2

Voici les données que les médecins ont recueillies pendant les 4 premières heures du traitement :

Temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique (t)	**0**	**2**	**4**
Nombre de bactéries dans la population (b(t))	**1 000 000**	**1 025 200**	**1 044 800**

1- Crois-tu que l'antibiotique a un effet sur la population de bactéries présente chez le patient? Pourquoi? Explique ta réponse.

Page 3

Les médecins effectuent d'autres analyses quelques heures plus tard.

Temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique (t)	**0**	**2**	**4**	**12**	**14**
Nombre de bactéries dans la population (b(t))	**1 000 000**	**1 025 200**	**1 044 800**	**1 067 200**	**1 058 800**

2- Fais un bilan du comportement de la population de bactéries pendant les quatorze premières heures du traitement.

Page 4

3- Afin de bien voir le bilan de la situation, trace une esquisse d'un graphique qui pourrait représenter cette situation.

Page 5
Pour mieux comprendre ce qui se passe avec la population de bactéries présente chez leur patient, les médecins ont trouvé une formule qui modéliserait bien leur situation : $$b(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2,$$ **où t est le temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique et $b(t)$ le nombre de bactéries dans la population.**   4- Connaissant cette formule, que peux-tu dire de ton esquisse graphique tracé précédemment?
Page 6
5- Une donnée importante pour leur recherche est le temps nécessaire pour que la population de bactéries cesse d'augmenter et commence à diminuer. Que se passe-t-il avec le taux de croissance de la population à ce moment?
Page 7
6- Trouve une façon de calculer à quel moment exactement la population de bactéries a cessé d'augmenter pour commencer à diminuer dans cette situation.

Figure 4.2 Premières questions du problème de la séance 4 (Cahier de l'étudiant, séance 4)

Afin de faciliter la lecture du modèle qui suit, un schéma présentant les grandes étapes de la séance est présenté (voir Figure 4.3). Il est important de préciser que ce schéma n'est pas LE modèle du processus de compréhension des étudiantes pour cette séance. En effet, le véritable modèle, présenté sous forme de texte suivi dans les prochaines lignes, met en lumière les éléments qui représentent les « passages », associés aux flèches dans le schéma de la figure 4.3. Ce sont ces éléments qui représentent un véritable apport pour la compréhension des processus de compréhension du concept de dérivée. Ainsi, les schémas sont proposés afin de permettre un suivi du déroulement de la séance et de mieux reconnaître le découpage du modèle proposé. D'ailleurs, cet exercice sera repris au début de chacune des parties des deux modèles.

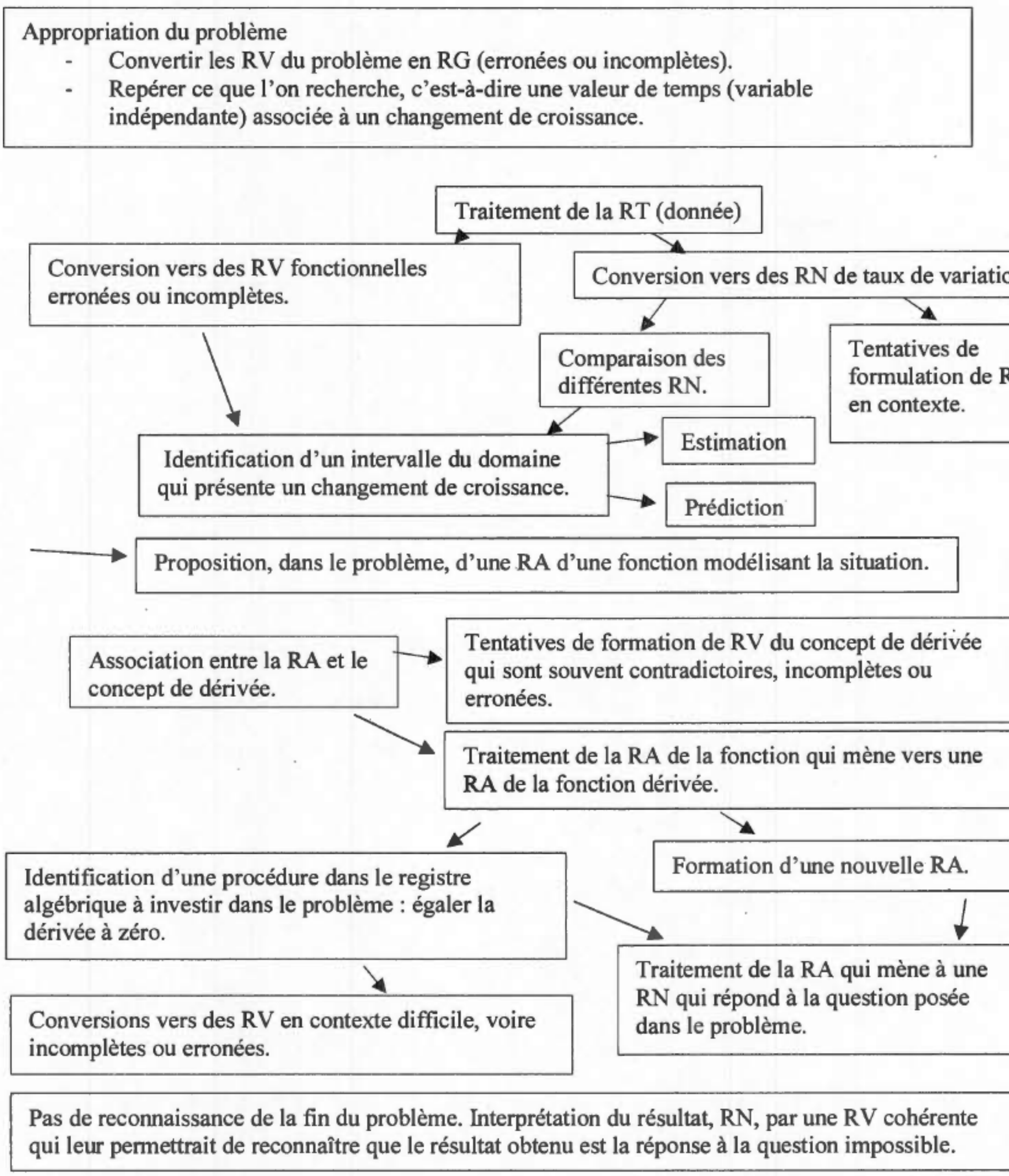


Figure 4.3 Les principales étapes de la résolution du problème dans le contexte de bactéries par l'équipe d'Annie, Judith et Karine.

Dans la quatrième séance du TE, les participantes s'affairent d'abord à comprendre et à modéliser le problème en formulant, traitant et reconnaissant des représentations dans les registres tabulaire, verbal, numérique et graphique. Après avoir produit une première version de représentations graphiques et avoir discuté longuement sur la « nature » de la courbe qui représenterait bien cette situation, les équipes discutent enfin du taux de variation (taux de croissance) et évoquent le concept de dérivée. C'est à ces moments en particulier auxquels s'intéressent les prochaines lignes.

Cet épisode illustre bien le début d'un processus de compréhension du concept de dérivée. Après avoir abordé le concept de façon plus théorique en classe (voir section 3.5) et l'avoir utilisé comme outil de résolution de problème lors des premières séances de ce TE, les étudiantes identifient le concept de dérivée comme outil possible pour faire avancer la résolution de leur problème. En effet, elles montrent qu'elles savent produire des représentations de ce concept dans différents registres. Or, elles ne peuvent pas toujours coordonner ces représentations, ce qui provoque un désaccord entre elles. De plus, elles ne semblent pas pouvoir justifier l'utilisation de ce concept autrement que par sa « nouveauté ».

D'abord, à l'aide de manipulations sur la table de valeurs, les étudiantes produisent une représentation numérique présentant le taux de croissance moyen de la population de bactéries pour un intervalle donné (voir extrait 4.1). Il faut tout de même noter qu'elles n'utilisent pas les termes « taux de croissance moyen » pour nommer le concept avec lequel elles travaillent.

> Karine : [...] le nombre de bactéries qui fait augmenter le nombre de bactéries de ma population, elle est comme vraiment petite là ! Tu sais comme dans l'espace de 8 heures, je pense que ça faisait, en moyenne, comme 2800 bactéries par heure?!

Extrait 4.1 Verbalisation du taux de variation par Karine (Séance 4, p. 3)

Karine a obtenu ce taux de croissance moyen en calculant la variation du nombre de bactéries entre 4 et 12 heures et en divisant par 8, soit la variation du temps entre 4 et

12 heures $(\frac{1067200-1044800}{12-4} = \frac{22400}{8} = 2800/h)$. Karine semble reconnaitre qu'elle doit mettre en relation les variations du nombre de bactéries et les variations du temps. Elle reconnait que la variation du nombre de bactéries pour cet intervalle de temps est plus grande que les variations du nombre de bactéries pour d'autres intervalles, mais que la variation de temps aussi est plus grande (voir traitements effectués sur la représentation tabulaire dans la Figure 4.4).

Temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique (t)	0	2 +25 200	4 +44 800	12 +67 200	14 +58 800
Nombre de bactéries dans la population (b(t))	1 000 000	1 025 200	1 044 800	1 067 200	1 058 800

+25 200 +19600 +22 400 −8400

Figure 4.4 Manipulations de la table de valeurs par Annie (Cahier de l'étudiante Annie, séance 4, p. 3)

Le groupe repère donc la présence d'un changement de croissance de la population de bactéries dans l'intervalle [12, 14]. Cela leur permettra, plus tard, de se concentrer sur cet intervalle pour répondre à une question du problème.

Ce n'est que plus tard que le concept de dérivée est proposé par les étudiantes. Annie suggère en premier de faire appel à ce concept après avoir lu la question 3 qui propose la règle d'une fonction (représentation algébrique) pour représenter la situation. Elle l'évoque en disant que c'est ce qu'elle a vu dans le cours (de calcul) aujourd'hui (Extrait 4.2). C'est intéressant de voir que c'est à ce moment qu'Annie suggère d'utiliser le concept de dérivée puisque le concept de dérivée n'est pas encore utile si on cherche à répondre aux questions posées dans la situation pour le moment. Mon hypothèse est qu'Annie relie le concept de dérivée — ou plutôt « le nouveau concept vu en classe dans la journée » (un nouvel outil pour elle) — au registre algébrique. En effet, le concept de dérivée a été présenté en classe en s'appuyant principalement sur un processus algébrique (traitement de représentations algébriques). Ainsi, en reconnaissant une représentation présentée dans ce registre (celle proposée à la page 5 du cahier de l'étudiant de la séance 4 [Figure 4.2]), elle fait possiblement un lien avec des représentations vues dans le cours suivi plus tôt dans la journée. On peut également parler d'un possible « effet de contrat » (Brousseau, 1998), phénomène connu en didactique des mathématiques qui permettrait d'expliquer que l'élève a tendance à vouloir utiliser les nouveaux concepts dans les tâches proposées suivant l'introduction de ces derniers.

Annie : C'est quoi l'affaire qu'on a vue aujourd'hui? La **dérivée**?! C'est la **vitesse** à...
Karine : ... moyenne ou la vitesse.
Annie : La vitesse par rapport à...
Karine : Quand tu dérives une fois une fonction, ça revient à la **vitesse... moyenne**?!?
Annie : Non, c'est la **pente de la tangente** non?! Quand on dérive une première fois, c'est la pente de la tangente.
Sarah : Ok...
Annie : Deuxième dérivée, c'est la vitesse...
Karine : C'est l'**accélération**.
Annie : ... ou l'accélération, c'est ça!

Extrait 4.2 Tentative de définitions « fonctionnelles » pour le concept de dérivée par Annie et Karine (Séance 4, p. 21)

On peut ressortir dans l'extrait précédent (Extrait 4.2) des éléments qui montrent une certaine confusion des étudiantes par rapport au concept de dérivée. La façon dont elles évoquent les différentes représentations verbales institutionnelles de la dérivée montre qu'elles ne peuvent coordonner ces représentations. D'abord, les représentations utilisées par Karine sont toutes dans le même contexte, celui de vitesse, qui n'est d'ailleurs pas le contexte dans lequel la situation proposée prend place. Elle évoque les concepts de dérivée première et de dérivée seconde, mais il manque la distinction entre vitesse moyenne (vitesse sur un intervalle donné) et vitesse instantanée (vitesse à un moment précis, en un point), cette dernière représentant le concept de dérivée en un point. De plus, on peut constater que le contexte de vitesse est très présent dans les représentations utilisées par les étudiantes. Cela n'est pas très surprenant étant donné la place importante donnée à ce contexte dans les représentations institutionnelles de la dérivée (Dufour, 2009).

Ainsi, les deux étudiantes produisent des représentations qui pourraient être associées à la dérivée, mais sur deux plans différents. Karine installe le concept dans le contexte de vitesse, sans toutefois produire une représentation verbale dans ce contexte qui représente bel et bien la dérivée, soit la « vitesse instantanée » ; elle parle plutôt de vitesse, vitesse moyenne. On sent qu'elle est à la recherche d'une représentation du concept de dérivée qui est nouveau pour elle, d'une représentation qu'elle a vue en classe plus tôt dans la journée. Quant à Annie, elle l'installe plutôt dans le contexte de « pente » qui est particulièrement lié au registre graphique : pente de la tangente. Or, comme elles n'arrivent pas à coordonner les représentations produites par l'autre, elles ne semblent pas voir qu'elles pourraient effectivement parler de la même chose. Par exemple, le fait qu'Annie réponde à la conjecture de Karine, qui cherche une représentation du concept de dérivée liée à une vitesse, d'abord par un « Non », confirme le manque de coordination entre les représentations produites dans cet extrait. Elles veulent toutes les deux parler du même concept (représentations verbales de la dérivée), mais chacune sur un plan différent : vitesse moyenne, vitesse instantanée VS pente de la sécante, pente de la tangente. Elles semblent commencer à se rejoindre à la fin de l'extrait en parlant d'accélération. Or, les deux demeurent confuses et surtout incertaines des représentations qu'elles ont produites et de la façon de les interpréter.

Les questions 5 et 6 proposent une représentation verbale particulière du concept de dérivée. En effet, on demande aux étudiants de repérer « le moment précis quand la population de bactéries cesse d'augmenter pour commencer à diminuer ». La question propose même la représentation verbale « taux de croissance pour un moment donné » (voir les questions posées aux étudiants à la Figure 4.2) ce qui correspond à la « dérivée » ou « taux de variation instantané ». Annie suggère assez rapidement de « faire la pente égale à 0 » (Séance 4, p. 32) ; elle y fait référence comme étant « l'affaire qu'on a vue aujourd'hui [en classe] » (Séance 4, p. 32). Ce qu'elle suggère ici manque un peu de précision. En fait, elle parle de la fonction dérivée, qui représente toutes les pentes de tangente en tout point de la fonction d'origine, qu'on devrait égaler à zéro afin de trouver à quel moment (valeur de la variable temps) il y a un changement de croissance (comme le demande la question), marqué par le fait que la pente de la droite tangente à ce moment serait nulle. La représentation verbale d'Annie ne précise pas de quelle « pente » elle parle, et surtout, ne justifie pas la raison pour laquelle on devrait égaler cette pente à zéro. Il s'agit possiblement, une fois de plus, d'un effet de contrat, sachant qu'elles ont vu un exemple de cette utilisation de la dérivée en classe plus tôt dans la journée.

Plus tard, Annie reformule son idée : « Trouver quand la pente de la tangente, quand elle est égale à zéro, c'est là qu'on va avoir le sommet de la parabole. » (Séance 4, p. 34) En verbalisant, elle se trouve à coordonner une représentation algébrique-verbale, voire graphique-verbale (« quand la pente [représentation liée au graphique], de la tangente est égale à 0 [représentation liée au registre algébrique] »), à une représentation graphique-verbale (« sommet de la parabole »). On peut penser qu'elle associe le sommet dans son graphique au « moment quand la population de bactéries cesse de croitre et commence à diminuer », mais ce n'est pas clairement formulé par Annie, cela demeure implicite.

En fait, lorsqu'Annie et Karine tentent de verbaliser leur idée, les représentations verbales formulées sont confuses (incomplètes, voire erronées). Il s'agit donc bien sûr de représentations fonctionnelles. Elles peuvent formuler une représentation verbale qui décrit que la population de bactéries diminue, et même que les bactéries se multiplient de moins en moins (voir extrait 4.3).

> Annie : Bien le nombre de bactéries, il eh… moyen là, je ne sais pas trop quoi, la différence entre les deux, elle commence à diminuer!
> Sarah : Ok, ça fait que ça diminue. Ça veut dire que mon taux de croissance, il est négatif?! [pour reprendre la conversion qu'elle avait faite précédemment]
> Karine : Oui.
> Sarah : Est-ce que c'est la même chose que dire que mon taux de croissance diminue?
> Annie : Eh non, parce qu'il continue à croitre. **Les bactéries continuent à croitre, mais eh… dans le fond eh… ouin, c'est comme la moyenne qui diminue là**. Je ne sais pas trop comment le dire. C'est comme la différence.

Extrait 4.3 Tentatives de verbalisation du taux de croissance par Annie (Séance 4, p. 33)

Or, elles n'associent pas toujours ces représentations verbales au concept de taux de variation (dans ce contexte, le taux de croissance). En effet, elles parlent du nombre de bactéries (variable dépendante dans la situation étudiée) qui augmente et qui finit par diminuer, mais les représentations du taux de croissance sont plus incertaines. Parfois, elles en parlent comme s'il était de plus en plus petit, mais le désignent aussi comme étant négatif, deux représentations du même concept qui peuvent être en contradiction (voir Extrait 4.4).

Karine : Bien, je pense que ça… ça semble correct là parce que **c'est à partir de là que ça commence à diminuer**.
Sarah : Ok, et si ma pente de ma tangente est égale à 0, qu'est-ce que je dis de mon taux de croissance?
Annie : Bien que c'est **à partir de ce moment-là que les bactéries commencent à… moins se multiplier vite entre eux.**
Sarah : Ok, est-ce que mon taux de croissance, il est positif? Est-ce qu'il a une croissance là? Ou s'il…
Judith : **Il est nul**.
Annie : **Négatif**.
Sarah : … est négatif?
Karine : À 0? Ou à la tangente?
Sarah : Au sommet!
Annie : Bien, **il est égal à 0 et c'est à partir de là que ça va commencer à faire moins moins.**

Extrait 4.4 Tentative de verbalisation du taux de croissance lorsque la pente de la tangente est égale à 0 (Séance 4, p. 34)

Enfin, les représentations utilisées à ce moment de la séance laissent croire que le concept de dérivée est en construction. Les participantes, comme précédemment, peuvent formuler, traiter, voire convertir des représentations de différents registres, mais n'arrivent pas à les coordonner de façon cohérente. Plus particulièrement, dans les extraits précédents, le registre verbal semble être plus difficile à contrôler. Je pense que leur difficulté de coordination des représentations de la dérivée, dans cette partie, peut être attribuée en grande partie à leur difficulté à coordonner les représentations du concept de taux de variation (cela fait d'ailleurs l'objet d'une analyse plus détaillée dans la section 4.5.3 de ce document).

Bien que les participantes aient de la difficulté à justifier leur stratégie d'égaler la pente [de la tangente] à zéro, elles arrivent à bien convertir leur idée vers le registre algébrique. Les trois participantes produisent d'abord une représentation algébrique institutionnelle de la fonction dérivée, soit $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Elles arrivent également à traiter cette représentation pour ajouter le contexte en passant par la représentation algébrique $\lim\limits_{h\to 0}\frac{b(t+h)-b(t)}{h}$ pour ensuite obtenir $b'(t) = -1400t + 14000$ comme représentation algébrique de la fonction dérivée. Il faut noter que Judith produit également une nouvelle représentation institutionnelle de la dérivée, soit $b'(t)$. Aussi, Annie a quelques difficultés dans le traitement de la représentation algébrique. Cependant, avec l'aide de ses collègues, elle est en mesure de repérer et de corriger son erreur. Par contre, elle laisse le symbole de limite dans sa nouvelle représentation algébrique, ce qui est une erreur puisque la limite a déjà été évaluée. Comme on pouvait s'y attendre, la reconnaissance, la formulation et le traitement de la représentation algébrique institutionnelle de la fonction dérivée semblent bien se passer pour les trois participantes. En effet, étant donné que le registre algébrique occupe une place importante dans l'enseignement, il n'est pas surprenant que les étudiants soient plus à l'aise avec ce registre. Par contre, elles semblent avoir de la difficulté à interpréter ce que la représentation algébrique représente exactement (voir extrait 4.5), c'est-à-dire de convertir les RA produites vers des RV cohérentes.

Judith : Bien à la fin fin fin, il en restait toujours une [variable] et là, tu remplaces par 0 [la variable *t* ou le *h*, ce n'est pas très clair] et là, ça te donne **ta dérivée**. Ça te donne la **formule de ta dérivée**.
Annie : Ouais… mais pas la **formule de la dérivée**, mais la **formule de la pente**.
Judith : Non, de la dérivée. Ah ok, mettons, toi, tu as déjà mis le point dedans?
Annie : Le point? Non, je n'ai pas mis de point.
Judith : **Ouais, c'est ça! Ça fait que si tu n'as pas mis de point dedans, tu n'es pas censée avoir genre… une donnée en tant que telle… tu es sensé juste avoir une formule de la dérivée, mais si tu as mis un point dedans, tu es sensée avoir genre la pente à ce point-là!**
Annie : Ah oui c'est vrai! […]

Extrait 4.5 Distinction entre formule de la dérivée et pente en un point (Séance 4, p. 45)

La représentation algébrique qu'elles obtiennent correspond à la fonction dérivée. On peut lire dans l'extrait précédent (extrait 4.5) que Judith semble à l'aise avec différentes représentations verbales de la dérivée. Entre autres, elle distingue la fonction dérivée de la dérivée en un point et elle sait reconnaitre que la représentation algébrique qu'elles ont obtenue est la fonction dérivée. On peut dire qu'il y a une coordination entre différents registres. Or, ça ne semble pas être le cas pour Annie qui met en opposition « formule de la dérivée » et « formule de la pente ». Après que Judith lui ait expliqué, Annie acquiesce, mais il faudra voir comment elle utilise les différentes représentations par la suite pour savoir si elle peut les coordonner.

Par la suite, elles suivent leur stratégie et égalisent la représentation algébrique obtenue à zéro. Judith et Karine traitent très bien la représentation algébrique pour obtenir enfin une valeur numérique pour le temps auquel la population de bactéries cesse d'augmenter pour commencer à diminuer. Quant à Annie, elle bénéficie une fois de plus de l'aide des autres participantes pour repérer et régler ses erreurs lors du traitement algébrique. Les participantes font alors une validation à l'aide de la table de valeurs afin de voir si leur résultat a du sens. En agissant ainsi, on peut dire qu'elles coordonnent des représentations algébriques, numériques, verbales et tabulaires de la dérivée. Par contre, il faut mentionner qu'Annie montre un manque de cette coordination lorsqu'elle ne reconnait pas qu'elle a obtenu la réponse qu'elle cherchait et continue de suggérer des étapes à faire, comme calculer la limite à gauche et la limite à droite, étape qui n'est pas opportune ici.

Enfin, bien que les étudiantes ne coordonnent pas toujours les différentes représentations qu'elles produisent ou utilisent du concept de dérivée, je pense qu'elles ont bien entamé leur processus de compréhension du concept. Avant de pouvoir coordonner plusieurs représentations de différents registres, encore faut-il pouvoir reconnaitre, former et traiter plusieurs représentations, et ce, dans différents registres. Les étudiantes ont certainement montré, dans cette séance, qu'elles ont une *certaine compréhension* du concept en reconnaissant, formant, traitant, et même parfois en coordonnant plusieurs représentations de la dérivée, et ce, dans les registres verbal, graphique, algébrique, numérique et tabulaire.

4.3.2 La deuxième partie du modèle : réfléchir à la dérivée en contextes purement mathématiques

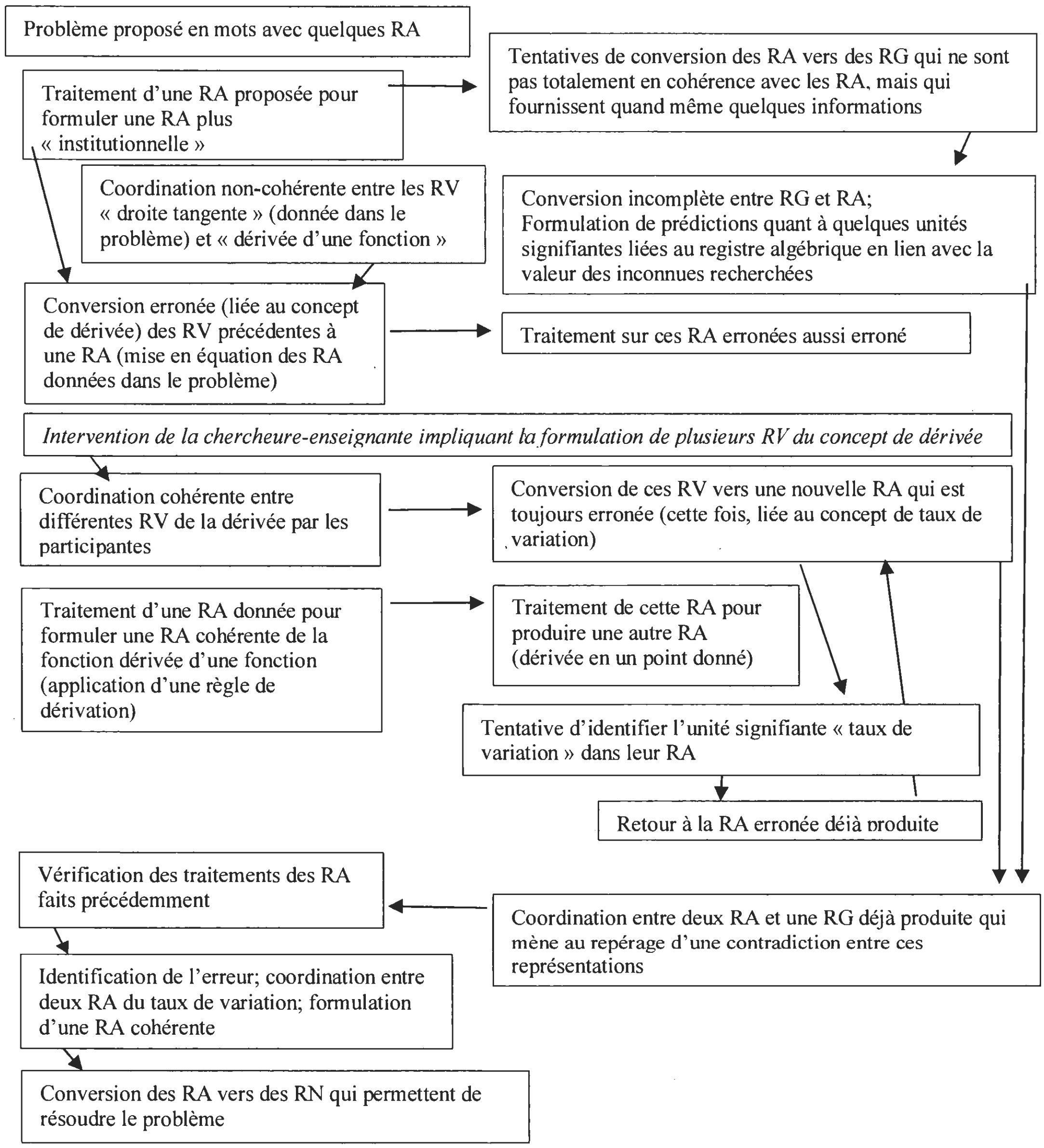
Deux problèmes ont été proposés pendant la cinquième séance. Le premier vise principalement à voir si les étudiants reconnaissent l'utilité du concept de dérivée. La dérivée nécessaire ici est celle de la fonction $f(x) = bx^2$. L'algorithme pour l'obtenir est parmi les premiers algorithmes de dérivation vus en classe. Les étudiants sont donc assez à l'aise pour trouver la fonction dérivée ou la dérivée en un point d'une telle fonction. La difficulté de ce problème réside principalement dans l'identification de la nécessité et la production de l'équation égalant $f'(3)$ au taux de variation de la fonction $2x + 3y = a$.

Voici un rappel de ce problème :

1- Trouve une valeur de a et b telle que la droite $2x + 3y = a$ est tangente au graphique de la fonction $f(x) = bx^2$ au point où $x=3$.

Voici également le schéma présentant les grandes lignes de la résolution de ce problème pour cette équipe:

Figure 4.5 Les grandes étapes de la résolution du premier problème de la séance 5



par l'équipe d'Annie, Judith et Karine.

4.3.2.1 Premier problème : reconnaitre la nécessité du concept de dérivée

Au début de la résolution de ce problème, les trois étudiantes manipulent correctement la RA de la fonction affine pour produire une RA plus générale de cette dernière soit $y = -\frac{2}{3}x + \frac{a}{3}$. Elles tentent également de modéliser la situation, individuellement, en convertissant les RA données. Pour ce faire, elles ne considèrent pas toutes les unités signifiantes des RA pour les convertir en RG. Ces conversions donnent donc lieu à la production de RG qui ne sont pas totalement en cohérence avec les RA données, mais qui peuvent quand même fournir quelques informations supplémentaires sur le problème. Par exemple, elles identifient en équipe que l'inconnue « b » sera surement négatif (voir de plus amples explications à la section nommée « Surpasser l'identification erronée du taux de variation grâce au registre graphique », p. 135).

Trois éléments importants, directement liés au concept de dérivée, ressortent de l'analyse du travail de l'équipe d'Annie, Judith et Karine pour ce problème. D'abord, comme prévu, le calcul de la fonction dérivée de la fonction $f(x) = bx^2$ n'a pas été une difficulté pour les étudiantes. Or, elles ont eu plus de difficultés avec la précision de ce que représente la dérivée dans différents registres. De plus, le concept de taux de variation a été une difficulté importante pour les étudiantes. Ces trois remarques sont décrites plus en détail dans les prochains paragraphes.

➤ Définition et reconnaissance de l'utilité du concept de dérivée

Afin de résoudre le problème soumis aux étudiants, il faut produire deux équations impliquant les deux inconnues, dont il faut identifier la valeur. La première équation provient du fait que la fonction $2x + 3y = a$ est la droite tangente à la fonction $f(x) =$

bx^2 lorsque $x = 3$. Les deux fonctions partagent donc la même image, ou la même valeur de y, quand $x = 3$. Il est donc possible de produire l'équation suivante :

Équation 4.1 $$f(3) = b(3^2) = 9b = -\frac{2}{3}(3) + \frac{a}{3} = -2 + \frac{a}{3}$$

L'autre équation provient du fait que, comme $2x + 3y = a$ est la droite tangente de la fonction f, quand $x = 3$, alors la dérivée $f'(3)$ est égale au taux de variation de la droite tangente, soit $\frac{-2}{3}$. Il est donc possible d'obtenir l'équation suivante :

Équation 4.2 $$f'(3) = 2b(3) = 6b = \frac{-2}{3}$$

Très tôt dans leur résolution du problème, l'équipe associe la représentation verbale « droite tangente » au concept de dérivée. En effet, Annie propose d'utiliser la dérivée. Elle commence donc à voir un lien qui unit les deux équations de la question, c'est-à-dire que la droite est la tangente (et donc est liée à la dérivée) de la fonction *f*. Or, Karine n'associe pas tout à fait correctement les deux éléments. Elle identifie « la droite » comme étant la dérivée, alors que c'est le « taux de variation » de cette droite qui est égal à la dérivée de la fonction, et ce, comme Annie l'ajoute par la suite, quand *x=3*. Ce glissement de sens dans la RV de Karine va d'ailleurs se transposer lors de la conversion vers une RA (Tableau 4.1) et mener à une RA erronée.

Tableau 4.1
Transcription des représentations et manipulations algébriques de Karine pour

exprimer l'égalité de la dérivée de la fonction *f* et de la droite (Équation 4.1) quand *x=3*

Étape	Représentation algébrique	Commentaires
(1)	$2bx = -\frac{2}{3}x + \frac{a}{3}$	Égalité erronée pour deux raisons : La fonction dérivée $f'(x)$ est égale au taux de variation de cette droite seulement quand $x = 3$, soit $f'(3)$. La dérivée de *f* quand $x = 3$, $f'(3)$, est égale au taux de variation (seulement) de cette droite soit, $-\frac{2}{3}$.
(2)	$2b(3) = -\frac{2}{3}(3) + \frac{a}{3}$	Égalité plus « plausible » étant donné que la fonction dérivée est évaluée pour *x*=3. Or, l'égalité serait bonne si la partie de droite était seulement $-\frac{2}{3}$ soit le taux de variation de la droite tangente à *f* en *x*=3.
(3)	$6b = -\frac{2}{3} + \frac{a}{3}$	Erreur de « calcul » on devrait retrouver à droite : $= -2 + \frac{a}{3}$
(4)	$b = -\frac{1}{3} + \frac{a}{18}$	Bonne manipulation. Résultat obtenu avec $= \frac{-2+\frac{a}{3}}{6} = -\frac{1}{3} + \frac{a}{18}$. Comme si elle n'avait pas tenu compte de l'étape (3).
(5)	$b = \frac{-6+a}{18}$	Bonne manipulation, mais réponse erronée due à l'erreur de sens en (1) et (2).

Tiré du cahier de l'étudiante Karine, séance 5, p. 1

Ensuite, dans une discussion que j'ai avec Annie, Judith et Karine, Karine coordonne correctement les RV « dérivée » et « pente de la tangente ». Elle semble donc comprendre que la dérivée est un taux de variation. Or, avant mon intervention, elle ne sait pas convertir cette information dans le registre algébrique. À la suite de mon passage, Karine modifie sa RA (traitement algébrique) pour enlever la partie de la RA de la droite qui est associée à l'ordonnée à l'origine. Cependant, la RA demeure erronée puisque Karine inclut la valeur *x=3* dans la RA du taux de variation de la droite (voir Tableau 4.2 qui est un prolongement du Tableau 4.1). Ici, la difficulté se déplace. En effet, le problème ne semble pas résider en une mauvaise RA du concept de dérivée, mais plutôt en une mauvaise RA du concept de taux de variation. Il s'agit là d'un bon exemple que la compréhension du concept de dérivée demande de pouvoir reconnaitre et traiter dans différents registres le concept de taux de variation.

Tableau 4.2
Prolongement du tableau 4.1 des manipulations algébriques par Karine

Étape	Représentations algébrique	Commentaires
(6)	$b = \frac{-1}{3}$	Elle laisse le « *a* » de côté, comme s'il était égal à 0. Cela revient finalement à l'équation qu'elle aurait obtenue si elle n'avait pas considéré l'ordonnée à l'origine. Or, il reste le problème du *x*=3 qu'elle a inclus aussi dans l'équation, et qui ne devrait pas y être étant donné qu'elle ne doit considérer que le taux de variation. Cette valeur de *b* ne permet pas de répondre aux contraintes données par le problème.

Tiré du cahier de l'étudiante Karine, séance 5, p. 1

Enfin, bien que Karine et Annie reconnaissent et produisent des RV cohérentes du concept de dérivée, elles ne les convertissent pas ou ne les coordonnent pas avec des RA adéquates, et ce, en partie en raison de leur difficulté avec la RA du concept de taux de variation.

➤ Production d'une RA de la dérivée d'une fonction polynomiale de degré 2

Même si l'équation produite par les étudiantes est erronée (voir Tableau 4.1 et Tableau 4.2), et ce, en raison d'une mauvaise reconnaissance du concept de dérivée dans le registre algébrique, les étudiantes n'ont pas de difficulté à produire une RA de la fonction dérivée de la fonction f dans ce problème. En effet, elles reconnaissent rapidement le type de fonctions, soit quadratique, et semblent connaitre le fait mathématique de « la dérivée de la fonction quadratique de base $g(x) = x^2$ est égale à $g'(x) = 2x$ ». Les étudiantes ne donnent pas d'indices comme quoi elles utiliseraient la définition de la dérivée impliquant une limite ou la règle de dérivation plus générale des fonctions polynomiales pour trouver la dérivée de $f(x)$. On peut voir dans le Tableau 4.1 qu'elles produisent correctement la première partie de l'équation soit $f'(3) = 2b(3) = 6b$.

➤ Reconnaitre le concept de taux de variation dans la RA d'une fonction affine

Précédemment, la difficulté des trois participantes à reconnaitre le concept de taux de variation dans la RA d'une fonction affine a été mise en lumière. D'une part, elles reconnaissent l'unité signifiante « ordonnée à l'origine » de la RA de la fonction affine. Cette unité signifiante peut être identifiée dans la RA générale institutionnelle de la fonction affine $y = ax + b$, comme la valeur associée au paramètre « b ». Dans le même ordre d'idée, l'unité signifiante associée au taux de variation dans cette RA est exprimée par le paramètre « a ». D'autre part, l'erreur des étudiantes décrite dans la section précédente est qu'elles associent, à tort, le taux de variation à « ax » soit « $\frac{-2}{3}x$ » dans la RA de la fonction affine donnée dans le problème. Le « x » ne devrait en aucun cas être inclus dans la RA pour identifier le taux de variation d'une fonction affine.

L'extrait suivant (Extrait 4.6) relate un moment de la séance qui aurait pu permettre aux étudiantes de repérer et de surpasser cette erreur.

Annie : Ok, mais sa pente c'est… ok, mais sa pente, ce n'est pas moins deux… [moment de réflexion].
Karine : Ouais, dans le fond, c'est que…
Annie : **Ce n'est pas moins deux tiers sa pente** $[-\frac{2}{3}]$**?**
Karine : Avec le x?!
Annie : Bien, habituellement, mettons là, ***y* est égale à *mx* plus *b*** $[y = mx + b]$…
Karine : Ouais.
Annie : Là, **on a le *x* ici et ton *m*, ce serait moins deux tiers** $[-\frac{2}{3}]$**!**
Karine : Hein? Ah ok… mais après ça, tu as ton point 3 alors tu peux le remplacer.
Annie : Ha, ok, ok! Ça fait que tu fais ça… [Elle remplace le x par 3 dans son équation et refait ses calculs en incluant le x.]

Extrait 4.6 Discussion sur l'identification de la pente dans la RA de la droite tangente (Séance 5, p. 32–33)

Dans cet extrait, Annie tente de confronter la représentation du taux de variation de Karine et Judith. Annie sait coordonner la RA générale et institutionnelle, $y = mx + b$ et la RA de la droite qu'elles ont produite $y = -\frac{2}{3}x + \frac{a}{3}$ afin de reconnaitre le taux de variation $\frac{-2}{3}$ qui se coordonne avec le « m » dans l'autre RA. Malheureusement, à court d'arguments, Annie se rallie à Karine qui propose, comme elles connaissent la valeur de x, soit $x=3$, de l'inclure dans la RA du taux de variation. Il faut également noter que les étudiantes utilisent le plus souvent la RV « pente » pour représenter le concept de taux de variation.

➤ Surpasser l'identification erronée du taux de variation grâce au registre graphique

Par la suite, c'est Judith qui, à l'aide du registre graphique, va permettre à l'équipe de surpasser l'identification erronée du taux de variation dans l'équation de la droite tangente. Au début de la séance, les trois participantes, en comparant les différentes RG et RA qu'elles avaient produites individuellement, formulent une prédiction intéressante quant aux signes des deux inconnues. En effet, au préalable, Karine avait identifié le signe devant le terme «$\frac{2}{3}x$ » dans la RA de la droite tangente comme une unité signifiante dans RA qui se convertit par une droite « décroissante » dans RG. À ce moment, Karine associe correctement l'unité signifiante « signe du premier terme dans la RA d'une droite affine » à l'unité signifiante « croissance de la pente » dans RG ce qui relève d'une conversion, bien qu'elle soit incomplète. Après une discussion entre elles et quelques esquisses graphiques, les étudiantes arrivent à prédire que l'inconnue « *b* » sera possiblement négative et que l'inconnue « *a* » sera possiblement positive (voir Extrait 4.7, Figure 4.6, Figure 4.7 et Figure 4.8).

Karine : Je dis ça parce que là, on peut voir que **la pente est négative** [elle pointe le « $\frac{-2}{3}x$ » sur sa feuille], ça fait que là...

[...]

Karine : Mais est-ce qu'une tangente ça peut... bien, il me semble que non là... ça ne peut pas traverser le graphique? Parce que moi, ce que j'ai trouvé c'est que **j'ai essayé de voir l'équation de la tangente et ça m'a donné moins deux tiers**. Alors, ça veut dire que **la pente est négative, ça va aller par exemple de ce côté-là** [elle dessine une droite imaginaire décroissante passant par $x=3$ avec son doigt sur son esquisse qui ressemblerait à la Figure 4.6].

[...]

Karine : Bien, je ne sais pas parce que dans ma tête, je me suis dit que ma fonction bx^2, ça reviendrait à une fonction quadratique?!

Sarah : Oui!

Karine : Ouais, c'est ça... donc... à $x=3$, au début, je l'avais dessiné vite vite et je me suis dit que la tangente allait être comme ça, linéaire [voir graphique à droite dans la Figure 4.8]. Mais ça, c'est si la pente est positive! **Mais vu qu'elle est négative... ça traverserait** [voir Figure 4.6]!

Sarah : Puis, est-ce que ta fonction quadratique, elle est toujours de cette façon-là [une courbe ouverte vers le haut graphiquement]?

[...]

[Annie montre avec sa main une courbe ouverte vers le bas.]

Annie : **Ça, c'est le « *a* » négatif!** Eh, bien la pente, bien je ne sais pas comment on appelle... bien, moi, j'appelle ça le « *a* » là! Tu sais, le sourire par en bas!

Karine : Ouais, bien... Ah, ok! Bien le « *b* », bien, ce serait donné là! Le « *b* », il est positif?!

Sarah : Bien, le « *b* », on le cherche!

Karine : Ah, bien oui!

[...]

Annie : Ok, ça fait que dans le fond, **la parabole, elle est par en bas et la tangente, elle est négative** [elle fait une représentation semblable à celle de la Figure 4.7, mais avec ses mains].

Extrait 4.7 Discussion autour des esquisses graphiques représentant le problème (Séance 5, p. 3–5)

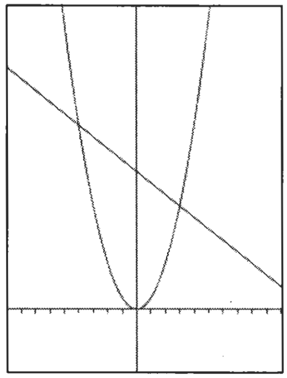


Figure 4.6 Esquisse du graphique que Karine représente avec ses mains

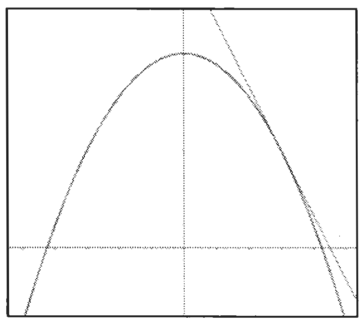


Figure 4.7 Image de ce qu'Annie représente avec ses mains

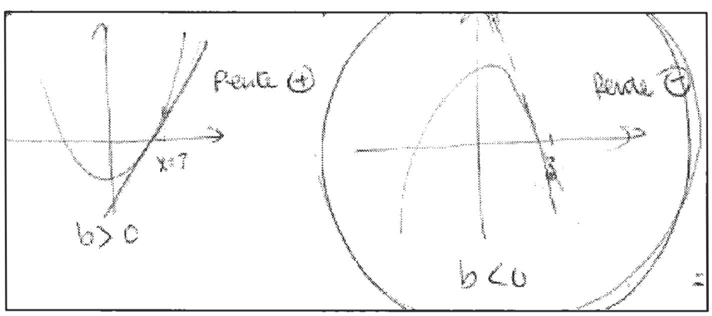


Figure 4.8 Nouvelles esquisses graphiques de Karine afin de prédire les signes des inconnues (Cahier de l'étudiante Karine, séance 5, p. 1)

Judith utilise donc cette prédiction pour valider les valeurs obtenues pour « *a* » et « *b* », et elle détecte une contradiction (voir Extrait 4.8).

Judith : Mais là, ça ne marche pas! Tu sais quand on disait que si **le *b* est négatif, le *a* est positif?!**... Là, on a un *b* genre...
Karine : Si le *b* est négatif, le *a* est positif, ah ouais! Ouais la pente... la pente de la fonction de la tangente est négative. Puis là, **on a trouvé un *a* négatif et le *b* est négatif!** Eh... ouais...
[...]
Karine : Ah oui! C'est parce qu'on sait que... eh... ouais... quand tu isolais, tu savais déjà que **ta pente c'était moins deux tiers [$-\frac{2}{3}$].** Ça fait que si ta pente c'est une droite... ouais, tu sais que ta tangente va être négative [elle représente une droite décroissante avec son bras]. **Si elle [la droite] est de ce bord-là [décroissante], nécessairement la fonction quadratique va être négative aussi.**
Judith : Puis, dès que tu as *a*?!
Karine : Bien, ça veut dire que... Bien, ça voudrait dire qu'ici, le *b* va être négatif.
Judith : Hmmm!
Karine : Et la pente...?!
Judith : **Ta pente, oui, elle est négative, mais le *a*, tu disais que c'était l'ordonnée à l'origine** et si [inaudible] genre l'ordonnée à l'origine...
Karine : Ah oui! Ah attends...
Judith : Donc, **le *a* est négatif?!**
Karine : Alors dans le fond, **il devrait être positif!**
Judith : Ouais!
Karine : Oh...!! Ah non, ça ne marche pas! Ouin, c'est vrai!

Extrait 4.8 Judith expose une contradiction entre les prédictions et les résultats (Séance 5, p. 37–38)

Grâce à Judith, les trois participantes reconnaissent la contradiction et sont amenées à revoir les manipulations algébriques produites. On peut également remarquer que dans cet extrait, Karine identifie correctement la pente (le taux de variation) dans la RA de la droite. Cela est réinvesti lorsqu'elle révise ses manipulations algébriques pour obtenir la valeur de *b* (voir Extrait 4.9). Elles trouvent finalement les valeurs de *a* et *b* qui permettent de respecter les conditions énoncées dans le problème.

Karine : Donc, on a posé l'égalité là [$-2bx = -\frac{2}{3}x$].

Sarah : Ah ha! Ok, la dérivée de ma fonction, AU point 3, ça fait que là, c'est pour ça que tu as mis le trois [dans la dérivée, c'est-à-dire $-2b(3)$], c'est bon! C'est égal à ma PENTE de ma droite tangente. Ma droite tangente, vous l'avez écrite quelque part [l'équation de la droite]. Ah, elle est là [$y = -\frac{2}{3}x + \frac{a}{3}$]! **C'est quoi sa pente?**

Karine et Annie : **Moins deux tiers** [$-\frac{2}{3}$]**!**

Sarah : Ok.

Karine : Ah, le **mettre avec le *x*, ça ne marche pas?!**

Sarah : Pourquoi ça ne marcherait pas?

Karine : Non, mais… Ah… ouin! Ça fait que c'est ça [elle pointe Annie]… le *x*, tu sais, tu disais « Ah moi, la pente ce serait moins deux tiers »!

Annie : Oui, puis je n'aurais pas multiplié par *x*!

Karine : Ouais, c'est ça! Ça fait que dans le fond, il n'y avait pas de *x*.

Annie : Ok, ça fait qu'il n'aurait juste pas fallu multiplier par ça [*x* qui devient 3]?!

Sarah : Est-ce que vous comprenez pourquoi?

Karine : Ouais…

Annie : Moi, c'est ce que j'avais fait au début là!

Extrait 4.9 Reconnaissance d'une erreur d'identification du taux de variation dans la RA (Séance 5, p. 43)

4.3.2.2 Deuxième problème : la fonction dérivée graphiquement

Le deuxième problème de la séance 5 a été proposé dans le registre graphique. En effet, il s'agissait pour les étudiants d'esquisser le graphique de la fonction dérivée d'une fonction d'origine donnée avec sa représentation graphique (RG) (voir Figure 4.9).

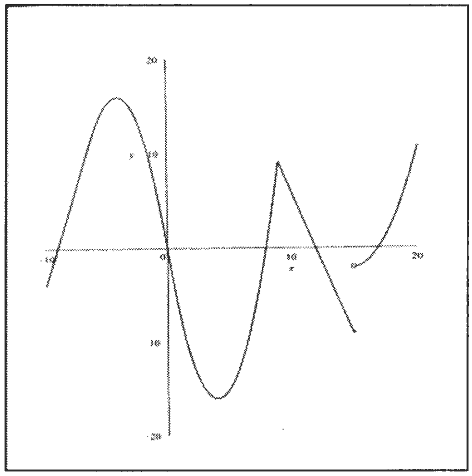


Figure 4.9 RG d'une fonction proposée aux étudiants comme fonction d'origine d'une fonction dérivée dont ils doivent produire la RG

Voici le schéma résumant les grandes étapes de la résolution de ce problème pour cette équipe :

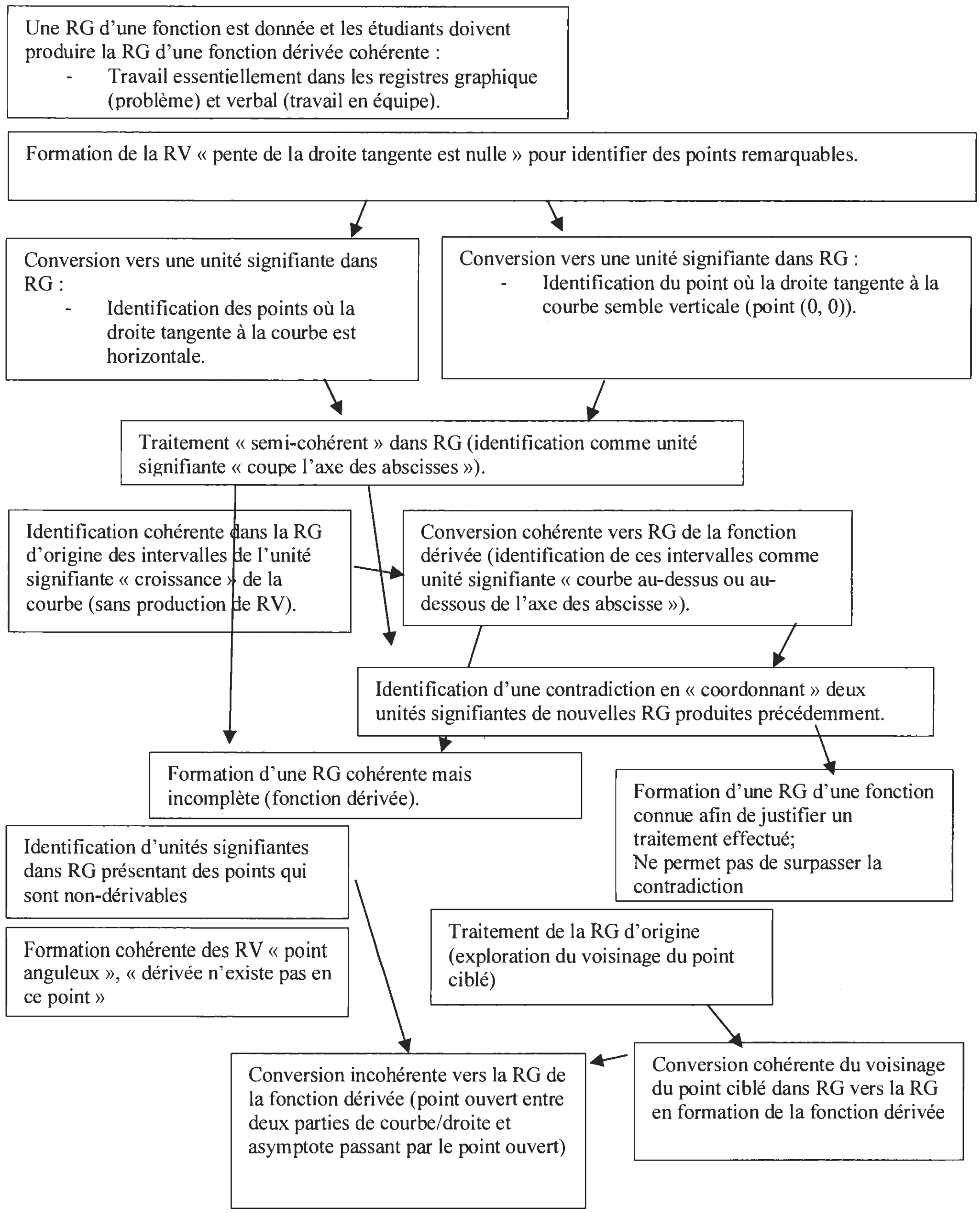


Figure 4.10 Les grandes étapes de la résolution du deuxième problème de la séance 5 par l'équipe d'Annie, Judith et Karine.

Afin de la résoudre, Karine, Annie et Judith sont restées pratiquement exclusivement dans le registre graphique, en plus, bien sûr, du registre verbal. Elles ont su repérer différentes unités signifiantes de la RG de la fonction d'origine qu'elles pouvaient, parfois, convertir en unité signifiante leur permettant de tirer des conclusions ou de conjecturer sur l'allure de la RG de la fonction dérivée. Elles ont également soulevé des questionnements autour des concepts de tangente, de discontinuité et d'asymptote.

➤ Pente de la tangente nulle : un zéro dans la RG de la fonction dérivée

Les étudiantes repèrent assez rapidement les points où la pente de la droite tangente à la courbe f est nulle comme des points « remarquables ». Elles se lancent donc à la recherche des points sur le graphique où la pente de la droite tangente à la courbe sera nulle. Elles reconnaissent cette unité signifiante graphiquement, d'abord en repérant les points où la droite tangente à la courbe f est horizontale, ce qui se traduit également par les points où la courbe présente un sommet (maximum ou minimum). Elles repèrent également un point où la droite tangente à la courbe f semble verticale. Par contre, elles doutent un peu que cela représente une pente de la droite tangente qui serait nulle. Il faut préciser que s'il existe un point où la droite tangente à la courbe f serait verticale, cela ne se traduit pas par un point où la pente de la droite tangente est nulle, mais plutôt un point où la pente est non définie. Cela se traduirait par un point de non-dérivabilité. Un point de non-dérivabilité peut prendre différentes formes dans la RG de la fonction dérivée, soit un point ouvert (ou vide), une asymptote ou un point anguleux.

De plus, les étudiantes savent traiter cette information, provenant de la RG de la fonction d'origine, comme étant signifiante pour produire la RG de la fonction dérivée. En effet, Annie dit : « Quand ta pente [de la droite tangente] est nulle, ça [la fonction dérivée] va toucher à la… l'axe des x à 0. Eh bien $y=0$, je ne sais pas trop [comment le dire] ! » (Séance 5, p. 46) Elles identifient les points où la pente de la droite tangente est nulle, dans la RG proposée, comme des points où la fonction dérivée coupera l'axe des abscisses, c'est-à-dire des zéros de la fonction dérivée. Elles repèrent donc les points (-5, 0), (5, 0) et (0, 0) comme étant des zéros de la fonction dérivée. En réalité, le point (0, 0) n'appartient pas à la fonction dérivée (de plus amples informations à ce sujet sont fournies plus loin dans cette section ainsi que dans le Tableau 3.1 du chapitre III).

➤ Signe de la fonction dérivée

Une autre unité signifiante de la RG de la fonction d'origine est la croissance de la fonction d'origine qui se traduit par le signe de la fonction dérivée. Dans le registre graphique, cette unité signifiante se traduit par une fonction représentée au-dessus de l'axe des abscisses (fonction positive) si la fonction d'origine est croissante et au-dessous de l'axe des abscisses (fonction négative) si la fonction d'origine est décroissante. Les trois participantes identifient correctement les intervalles où la fonction dérivée sera au-dessus de l'axe des abscisses, soit (-10, -5) et (5, 9), ou au-dessous de l'axe des abscisses, soit (-5, 5). Par contre, elles ne justifient pas les raisons qui les ont menées à repérer ces intervalles. On ne peut pas affirmer qu'elles savent coordonner ces deux unités signifiantes correctement.

➤ Que se passe-t-il au point (0, 0)?

Les étudiantes soulignent que le point (0, 0) est un point « remarquable » et elles semblent avoir l'intuition que la fonction dérivée passera également par le point (0, 0) (ce qui n'est en fait pas le cas). Elles émettent une première conjecture pour expliquer cette intuition : la fonction dérivée passera par le point (0, 0) parce que la fonction d'origine passe par le point (0, 0). Leur deuxième conjecture pour expliquer que la fonction dérivée passera par le point (0, 0), telle qu'expliquée précédemment, repose sur l'idée que la droite tangente à la courbe au point (0, 0) serait verticale. Ceci se traduit, pour elles, par une pente de droite tangente qui serait nulle et implique que la fonction dérivée passerait également par le point (0, 0). Or, il faut préciser, comme dans la partie 3.4.5 du chapitre III (p. 101), que la courbe de la fonction au point (0, 0) ne présente pas une tangente verticale, mais bien un point d'inflexion sans que la droite tangente devienne verticale.

C'est au moment de tracer une première esquisse du graphique de la fonction dérivée que les étudiantes se trouvent face à une contradiction. Elles n'arrivent pas à coordonner leur conjecture par rapport au signe de la fonction dérivée (au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses) et leur conjecture que la fonction dérivée passe par le point (0, 0). Elles sont donc amenées à revoir leurs conjectures. Pour ce faire, Annie tente de trouver un exemple de fonction qui passerait par le point (0, 0), mais dont la fonction dérivée ne passerait pas par ce même point. Le fait qu'elle recherche ce type d'exemple laisse croire que la première conjecture formulée par les participantes pour expliquer le fait que la fonction dérivée passerait par le point (0, 0) semble l'explication retenue par l'étudiante. Annie trouve finalement un exemple avec la fonction sinus. Si une fonction sinus passe par le point (0, 0), sa dérivée sera une fonction cosinus qui ne passe pas par le point (0, 0). Annie semble satisfaite de cet exemple et convainc également Karine. Elles ne reviennent pas sur leur deuxième conjecture impliquant la droite tangente à la fonction d'origine au point (0, 0). Elles considèrent donc que la fonction dérivée ne passera pas par le point (0, 0), ce qui est juste compte tenu de la RG de la fonction d'origine proposée.

Elles esquissent alors une autre RG de la fonction dérivée dans laquelle on trouve un minimum (ou un sommet) qui est au-dessous de l'axe des abscisses (Figure 4.11). Un nouveau questionnement apparait à la suite de la production de cette esquisse : le sommet sera-t-il pointu (la fonction formerait un V) ou courbé (la fonction formerait quelque chose qui ressemblerait à un U)? Sans vraiment d'explication, elles semblent s'entendre sur la deuxième option. De plus, elles ne déterminent pas non plus précisément l'emplacement du sommet.

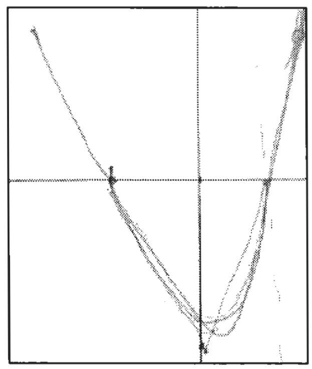


Figure 4.11 Deuxième esquisse d'Annie marquée en rose (Cahier de l'étudiante Annie, séance 5, p. 3)

➤ L'unité signifiante : point anguleux

Au point (9, 10), la fonction présente un point anguleux. La présence d'un point anguleux dans la RG d'une fonction est une unité signifiante qui permet de savoir que la fonction est non dérivable en ce point. Cela peut se convertir dans le registre graphique par la présence d'un point ouvert ou d'une asymptote dans la RG de *f'*. Dans ce cas, le point ouvert est l'option à retenir.

Les étudiantes reconnaissent que ce point est un point « remarquable ». Elles l'identifient même avec la RV « point anguleux ». Elle confirme également qu'il s'agit d'un point où la dérivée n'existe pas. Annie associe cette unité signifiante à une asymptote dans la RG de la fonction dérivée. Comme Karine doutait de cette conversion, un petit débat a eu lieu.

Pour s'aider à prendre une décision, les étudiantes regardent la fonction sur l'intervalle (7, 15) (approximativement). Dans la RG de la fonction d'origine, on peut remarquer que la portion de fonction sur l'intervalle (7, 9) appartient à la courbe que l'on retrouve approximativement sur l'intervalle (0, 9). La portion (9, 15) serait plutôt associée à une fonction affine (une droite). Les étudiantes ont finalement une assez bonne intuition pour ce qui est de reconnaitre qu'il y a probablement deux fonctions différentes dans cet intervalle. Elles semblent comprendre que la partie avant $x=9$ de l'intervalle est déjà représentée dans leur esquisse de la RG de la fonction dérivée (la continuation de la courbe entamée dans l'analyse de l'intervalle [-5, 5]). Pour ce qui est de la deuxième partie de l'intervalle, elles reconnaissent que c'est une droite et identifient assez rapidement que la dérivée d'une fonction représentée par une droite est représentée par une droite horizontale dans le registre graphique. Afin de faire cette conversion, Annie se réfère à une tâche du manuel (Figure 4.12). Annie produit en effet, une RG (fonctionnelle) qui rappelle la tâche dont elle parle (Figure 4.13).

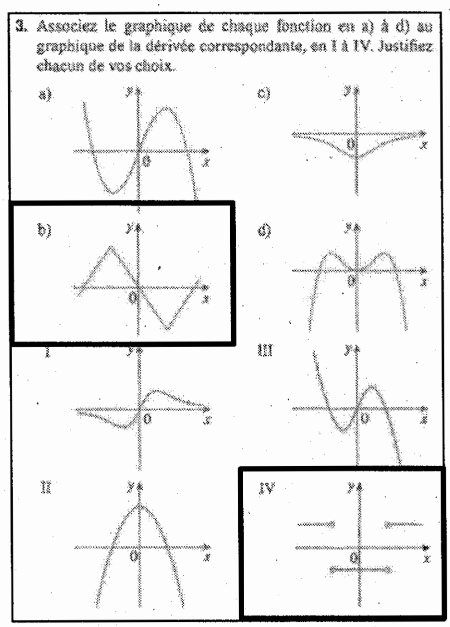


Figure 4.12 Exercice proposé dans le manuel [les encadrés ont été ajoutés] (Stewart, 2012, p. 196)

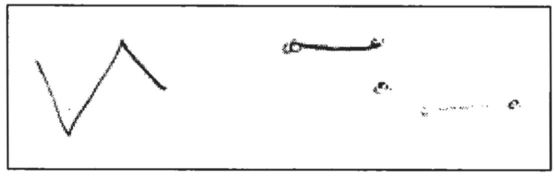


Figure 4.13 Esquisse graphique d'un exemple d'une fonction et de sa dérivée par Karine (Cahier de l'étudiante Karine, séance 5, p. 3)

➤ Reconnaissance des points de non-dérivabilité

À la lumière de ce qui précède, Karine et Annie semblent bien connaitre les unités signifiantes d'un graphique qui permettent de repérer des points de non-dérivabilité. Annie évoque même à deux reprises les trois cas de non-dérivabilité : « Ouais, tu as un point anguleux, un point vide et un comme ça aussi [elle pointe le point (0, 0) qui est un point d'inflexion sur la RG de *f*]. » (Séance 5, p. 51), « Bien, les graphiques là! Tu sais, il y en avait comme trois à faire. » (Séance 5, p. 53). Dans le dernier extrait, Annie évoque probablement la figure du manuel qui illustre les trois cas de non-dérivabilité (Figure 4.14).

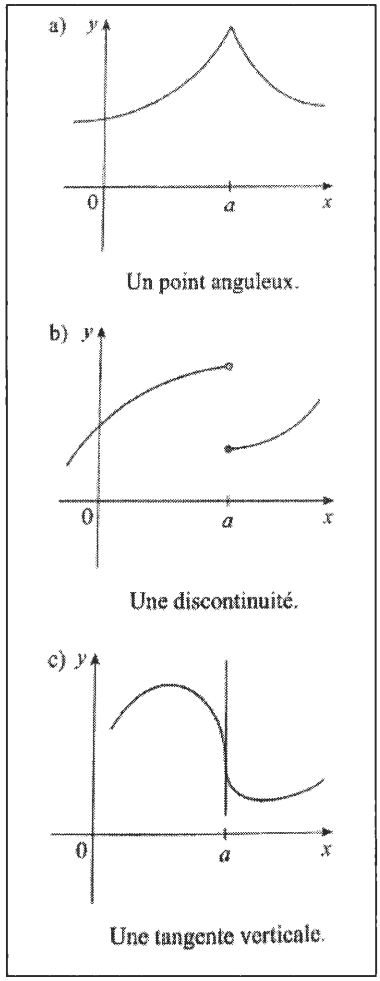


Figure 4.14 Trois cas de non-dérivabilité (Stewart, 2012, p. 194)

Or, les participantes montrent qu'elles savent repérer ces unités signifiantes, mais elles ne savent pas toujours comment les traiter afin de produire une RG de la fonction dérivée. La plupart du temps, elles ressortent deux options possibles pour tracer le graphique de la fonction dérivée dans ces trois cas, soit une asymptote ou un point vide. Cependant, la deuxième RG de la fonction dérivée produite après leur discussion sur le point anguleux et ce qui l'entoure (Figure 4.15) laisse croire qu'elles ne comprennent pas bien le concept d'asymptote.

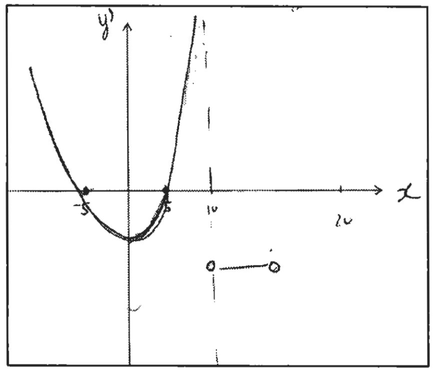


Figure 4.15 Nouvelle esquisse graphique de la fonction dérivée de f par Karine (Cahier de l'étudiante Karine, séance 5, p. 3)

Elles connaissent sa RV, reconnaissent des unités signifiantes dans la RG qui peuvent mener à une asymptote, elles peuvent la représenter graphiquement par une ligne pointillée, mais elles ne produisent pas une RG cohérente incluant une asymptote. En effet, la dernière RG de la fonction dérivée produite montre une asymptote qui est suivie par une droite horizontale. Ceci est une contradiction puisque graphiquement, l'asymptote devrait montrer une valeur vers laquelle une fonction doit tendre. Ainsi, en plus d'une droite pointillée, l'asymptote vient avec des RG de fonctions « courbes » qui montrent un « rapprochement » vers une valeur identifiée par la droite pointillée, comme on peut le voir dans la Figure 4.16, par exemple.

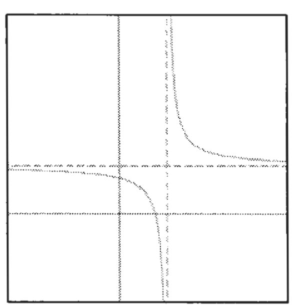


Figure 4.16 Représentation graphique d'une fonction avec deux asymptotes

➤ Reconnaitre une famille de fonctions et voir au-delà de la représentation

Les participantes éprouvent un peu de difficulté à identifier des unités signifiantes dans la RG de la fonction d'origine sur l'intervalle (15, 20). Pour ce faire, elles s'y prennent de trois façons : reconnaitre une famille de fonctions, sortir de la zone représentée dans la RG et identifier le signe de la fonction dérivée.

En premier lieu, elles tentent de reconnaitre une famille de fonctions qui serait représentée par la même courbe que la fonction qui est proposée sur l'intervalle (15, 20). Elles émettent deux conjectures : cela représente soit une fonction exponentielle, soit une fonction racine carrée. Or, elles n'arrivent pas à trouver assez d'indices pour leur permettre de statuer.

En deuxième lieu, elles se questionnent sur la façon dont la fonction se comporterait si elle était représentée graphiquement sur un plus grand domaine. Encore une fois, elles émettent deux conjectures : « Bien, parce que c'est comme ça, on s'est dit que soit il y a une asymptote [en-dehors du domaine représenté dans la RG], ou soit ça continue à l'infini... genre, autant pour les x que pour les y. » (Séance 5, p. 57) Le fait que les étudiantes réfléchissent au-delà de la portion du domaine représentée dans la RG est révélateur quant à leur compréhension du concept de fonction et du registre graphique. En effet, elles semblent à l'aise avec l'idée qu'une RG ne montre pas une fonction nécessairement sur l'entièreté de son domaine (celui-ci étant souvent infini). Cet élément est important à souligner puisque notre vision de la compréhension d'un concept (décrite au chapitre II) s'appuie sur l'idée qu'afin de bien comprendre un concept, plusieurs représentations dans différents registres fournissent des informations complémentaires sur un concept donné. Ainsi, on peut penser que les participantes ont une intuition liée au fait qu'une représentation d'un concept, dans ce cas-ci d'une fonction, ne fournit pas nécessairement toutes les informations liées à ce même concept.

En troisième lieu, elles reconnaissent encore une fois l'unité signifiante de la croissance de la fonction dans la RG qui se traduit par le signe de la fonction dérivée, soit au-dessus ou au-dessous de l'axe des abscisses dans la RG. Elles concluent que la fonction d'origine est croissante sur cet intervalle et que la fonction dérivée sera donc au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle donné.

Finalement, cette dernière information semble la seule sur laquelle les étudiantes se permettent de statuer. D'ailleurs, elles ne produisent pas de nouvelle esquisse pour représenter la fonction dérivée.

4.3.2.3 Conclusion de la deuxième partie du modèle pour l'équipe d'Annie, Judith et Karine

Enfin, ces deux problèmes ont été très riches pour décrire le processus de compréhension du concept de dérivée des étudiantes observées. Trois éléments importants ressortent de cette analyse : les difficultés avec le concept de taux de variation, la reconnaissance d'unités signifiantes et leur traitement/conversion dans le registre graphique, et le traitement algébrique de la dérivée d'une fonction quadratique.

Un élément important qui ressort est que le concept de taux de variation semble difficile à traiter/convertir pour les étudiantes. Cela crée bien sûr une « barrière » à leur compréhension du concept de dérivée. En effet, bien que les étudiantes puissent identifier le concept de dérivée comme un taux de variation dans le registre verbal, il semble qu'elles ne puissent pas réinvestir cette RV du concept de dérivée dans le registre algébrique. Une telle conversion ou coordination est bien sûr nécessaire pour pouvoir utiliser le concept de dérivée comme outil de résolution de problème. Le premier problème proposé dans cette séance est d'ailleurs un bon exemple.

De plus, les étudiantes sont plutôt à l'aise d'identifier, traiter et convertir des unités signifiantes liées à la dérivée dans le registre graphique. À cet égard, elles ont rapidement reconnu les points « remarquables » porteurs d'information importante sur le concept de dérivée afin d'en produire une RG. Ainsi, elles ont reconnu, traité et converti la croissance de la fonction d'origine, qui se traduit par le signe de la fonction dérivée ; les points de non-dérivabilité, tel le point anguleux, qui se traduisent par la non-définition de la fonction dérivée ; et les sommets de la fonction d'origine, qui se traduisent par la présence d'un zéro dans le graphique de la fonction dérivée. Il faut tout de même souligner que la conversion ne se fait pas toujours de façon cohérente (par exemple, l'utilisation de l'asymptote et des points ouverts).

Également, elles connaissaient assez bien les dérivées de différentes familles de fonctions, et ce, dans le registre verbal et même graphique. Entre autres, elles ont identifié correctement et ont pu représenter correctement (également dans la RV et la RG) la dérivée de la famille de fonctions sinus qui était la fonction cosinus, la dérivée d'une droite (fonction affine) qui était une droite horizontale (fonction constante). Elles ont également produit rapidement la RA de la dérivée d'une fonction quadratique (représentée algébriquement) et l'ont aussi évaluée en un point donné.

4.4 Le modèle du processus de compréhension pour l'équipe d'Antoine, Guillaume et Jérémie

4.4.1 La première partie du modèle : la dérivée en un point

Voici encore une fois, un rappel du problème proposé dans la séance 4 :

Page 1
On entend parfois que des gens attrapent la « maladie du hamburger ». Il s'agit en fait d'une infection à la bactérie *Escherichia coli*, mieux connue sous le nom E. Coli. Afin de traiter l'infection, la prise d'un antibiotique est nécessaire. **Plusieurs antibiotiques peuvent traiter cette maladie. Afin de mieux connaître l'efficacité d'un de ces antibiotiques, des médecins observent le comportement d'une population de bactéries E. Coli présente chez un patient à partir du moment où ils administrent une dose de cet antibiotique.**

Page 2

Voici les données que les médecins ont recueillies pendant les 4 premières heures du traitement :

Temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique (t)	0	2	4
Nombre de bactéries dans la population (b(t))	1 000 000	1 025 200	1 044 800

1- Crois-tu que l'antibiotique a un effet sur la population de bactéries présente chez le patient? Pourquoi? Explique ta réponse.

Page 3

Les médecins effectuent d'autres analyses quelques heures plus tard.

Temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique (t)	0	2	4	12	14
Nombre de bactéries dans la population (b(t))	1 000 000	1 025 200	1 044 800	1 067 200	1 058 800

2- Fais un bilan du comportement de la population de bactéries pendant les quatorze premières heures du traitement.

Page 4

3- Afin de bien voir le bilan de la situation, trace une esquisse d'un graphique qui pourrait représenter cette situation.

Page 5

Pour mieux comprendre ce qui se passe avec la population de bactéries présente chez leur patient, les médecins ont trouvé une formule qui modéliserait bien leur situation :

$$b(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2,$$

où t est le temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique et $b(t)$ le nombre de bactéries dans la population.

4- Connaissant cette formule, que peux-tu dire de ton esquisse graphique tracé précédemment?

Page 6

5- Une donnée importante pour leur recherche est le temps nécessaire pour que la population de bactéries cesse d'augmenter et commence à diminuer. Que se passe-t-il avec le taux de croissance de la population à ce moment?

Page 7

6- Trouve une façon de calculer à quel moment exactement la population de bactéries a cessé d'augmenter pour commencer à diminuer dans cette situation.

Figure 4.17 Rappel du problème proposé dans la séance 4 (Cahier de l'étudiant, séance 4)

Il faut également rappeler que la situation proposée sera traitée par un modèle mathématique continu même si une des variables de la situation est discrète. Dans ce cas, il est donc possible de parler de dérivée[30].

Voici le schéma présentant les grandes étapes de cette séance pour cette équipe :

[30] Une condition à la dérivabilité étant la continuité d'une fonction.

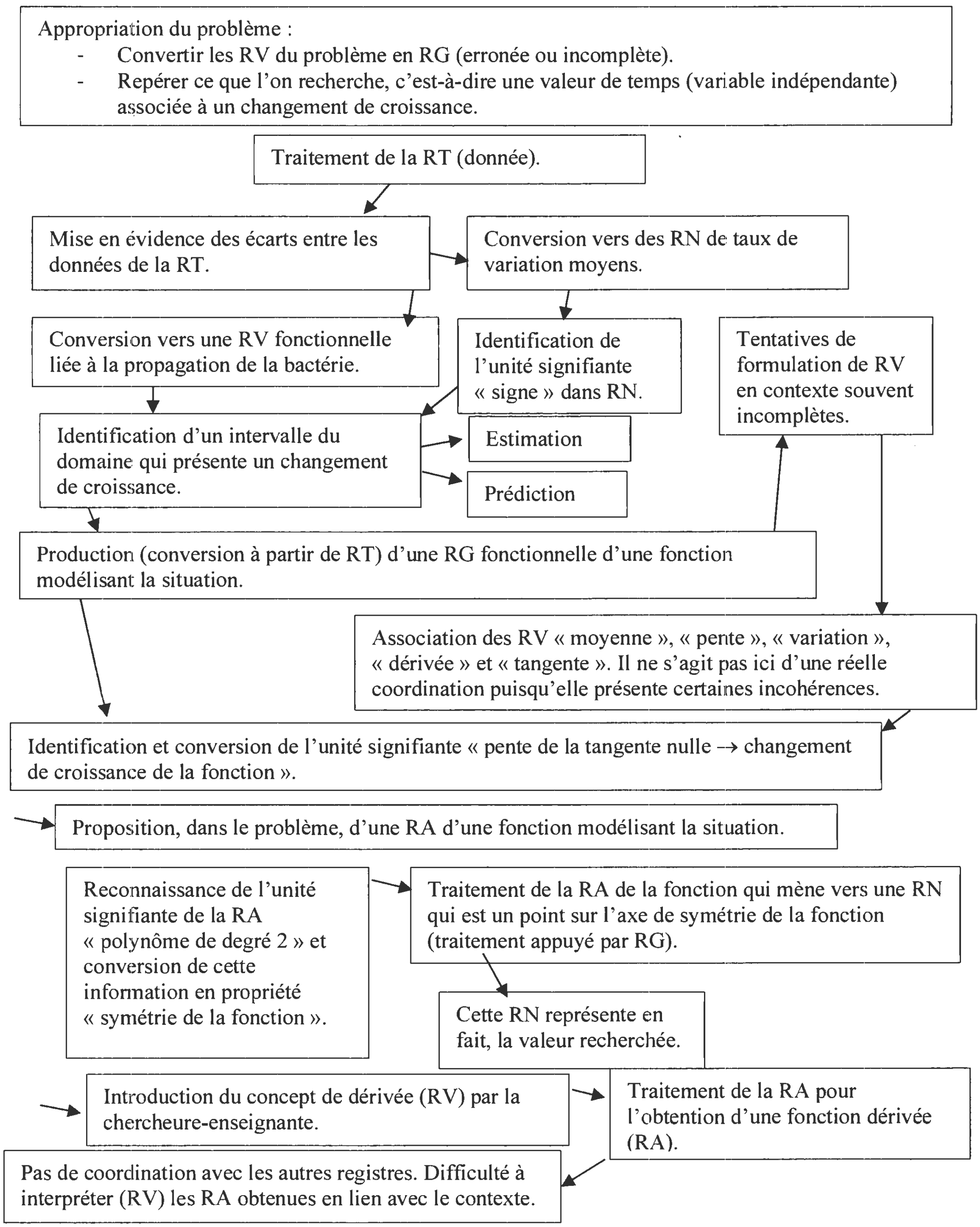


Figure 4.18 Les grandes étapes de la résolution du problème de bactéries par l'équipe d'Antoine, Guillaume et Jérôme.

Au début de la séance 4, Antoine, Guillaume et Jérémie commencent par un moment de travail individuel pendant lequel ils cherchent à modéliser la situation de différentes manières. Ils travaillent individuellement sur les trois premières questions du problème. Ainsi, ils produisent des représentations verbales et graphiques en plus d'effectuer quelques traitements sur la table de valeurs.

Dans cette section, je vais analyser le travail principalement lié au concept de dérivée de l'équipe d'Antoine, Guillaume et Jérémie. Ce qui ressort de cette séance d'enseignement se partage en quatre parties. D'abord, les participants effectuent des traitements et conversions intéressants vers les registres verbal et numérique à partir de la table de valeurs. Ensuite, ils analysent la situation avec une intuition qui se rapproche grandement du concept de dérivée. De plus, ils trouvent une autre approche pour résoudre le problème ce qui fait qu'ils évitent l'utilisation du concept de dérivée. Enfin, ils traitent des représentations algébriques du concept de dérivée et tentent de coordonner, sans succès, différentes représentations de la fonction dérivée et de la dérivée en un point.

➤ Traitement de la table de valeurs : ressortir les écarts et calculer des taux de variation moyens

Lors du moment de travail individuel, Guillaume et Jérémie effectuent des traitements de la table de valeurs et des conversions vers les registres numérique et verbal. En effet, les deux participants s'intéressent à une unité signifiante qui peut être ressortie d'une représentation tabulaire (RT) en y effectuant un traitement. Ce sont les écarts entre les données présentent dans la RT qui peuvent fournir des informations importantes sur la fonction/situation représentée par cette table de valeurs. Il faut ajouter que ce traitement de la RT tend vers une conversion vers le registre numérique. En effet, lorsque les étudiants calculent les écarts entre les données du tableau, ils sont par la suite en mesure de calculer différents taux de variation, c'est-à-dire des taux de variation sur différents intervalles de la situation auxquels on peut associer la RV « taux de variation moyen ».

Guillaume fait un traitement de la RT, mais seulement pour la variable dépendante, soit le nombre de bactéries dans la population observée. Il ressort les écarts entre les données consécutives présentes dans la table de valeurs (Figure 4.19). Par contre, il n'y associe pas l'écart entre les données consécutives de la variable indépendante (le temps écoulé depuis le début de l'observation) de la table de valeurs, ce qui leur permettrait d'obtenir des taux de variation moyens (représentation numérique [RN]). Or, il fait une conversion vers le registre verbal à partir de ces traitements sur la RT. Cette RV souligne que « le niveau de propagation a diminué » (Cahier de l'étudiant Guillaume, séance 4, p. 3).

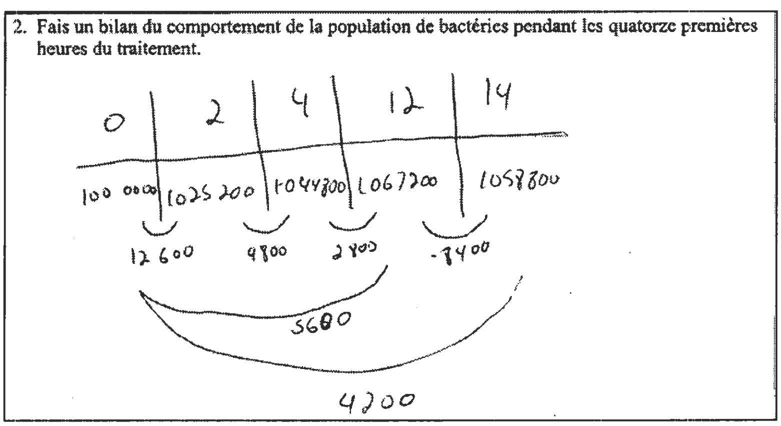
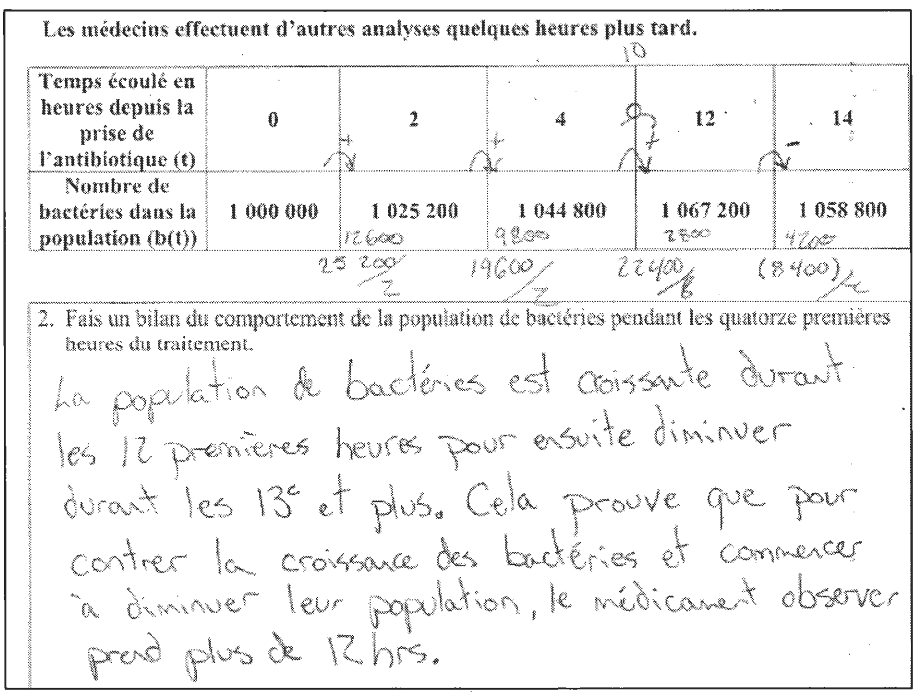


Figure 4.19 Traitement de la table de valeurs et production de RN et RV (Cahier de l'étudiant Jérémie, séance 4, p. 3)

Pour sa part, Jérémie fait le même travail que Guillaume sur les données de la variable dépendante (le nombre de bactéries), mais il s'intéresse également aux écarts entre les données de la variable indépendante (le temps écoulé depuis le début de l'observation). Il met d'ailleurs ces deux nouvelles représentations numériques (RN) en lien pour obtenir des RN du « taux de variation moyen » entre chacune des données consécutives de la table de valeurs. Jérémie effectue donc une conversion d'une RT vers des RN (Figure 4.20). De ces RN, il peut identifier l'unité signifiante du « signe » (taux de variation moyen positif ou négatif) pour faire une interprétation (RV) du comportement du nombre de bactéries dans la population observée. Comme il l'a indiqué directement dans la table de valeurs, Jérémie remarque que le taux de variation (ou l'écart entre les valeurs de la variable dépendante, ce n'est pas clairement indiqué) passe de positif à négatif entre la 12^e et la 14^e heure. Il émet donc la conjecture que ce changement aurait lieu plus précisément autour de la 13^e heure (la valeur entière entre 12 et 14). Par ce travail sur différentes représentations dans un même ou dans différents registres, Jérémie peut faire avancer sa résolution du problème.



Les médecins effectuent d'autres analyses quelques heures plus tard.

Temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique (t)	0	2	4	12 (10)	14
Nombre de bactéries dans la population (b(t))	1 000 000	1 025 200 (12600)	1 044 800 (9800)	1 067 200 (2800)	1 058 800 (4200)
	+ 25 200/2	+ 19600/2	+ 22400/8	− (8400)/2	

2. Fais un bilan du comportement de la population de bactéries pendant les quatorze premières heures du traitement.

La population de bactéries est croissante durant les 12 premières heures pour ensuite diminuer durant les 13e et plus. Cela prouve que pour contrer la croissance des bactéries et commencer à diminuer leur population, le médicament observer prend plus de 12 hrs.

Figure 4.20 Traitement de la table de valeurs et production de RN et RV (Cahier de l'étudiant Jérémie, séance 4, p. 3)

En plus de l'avancement de la résolution du problème, ce travail sur les écarts et les calculs des taux de variation moyens offrent un bon appui pour la construction du concept de dérivée. Du fait que les étudiants semblent avoir l'intuition d'aller observer ces écarts et taux de variation afin de mieux comprendre la situation et ce qui se passe à différents moments de la situation, ils seront possiblement plus « ouverts » à s'intéresser aux taux de variation en un moment en particulier (dérivée en un point) plutôt que sur un intervalle. Ainsi, je pense que cette réflexion fait partie intégrante du processus de compréhension du concept de dérivée.

➤ De taux de variation moyen à dérivée : un passage flou, une coordination bloquée

Lors de la mise en commun de leur travail accompli individuellement, les trois participants ont l'occasion de pousser plus loin différents concepts. Ils cherchent également ensemble à répondre à la question : « quand est-ce que le nombre de bactéries dans la population va commencer à diminuer ? » Pour ce faire, ils font encore un travail sur la table de valeurs et les taux de variation moyens qu'ils ont ressortis. Ils vont aussi utiliser des RG de la situation pour approfondir leur réflexion.

Tous s'entendent assez rapidement pour dire que l'intervalle (12, 14) est d'intérêt pour identifier le moment où le nombre de bactéries dans la population commence à diminuer. Ils expliquent ce choix par le fait qu'il y a moins de bactéries à 14h qu'à 12h. Ils parlent donc, sans le nommer directement, du changement de croissance de la population (ou de la fonction qui modélise cette situation). Ce serait dans cet intervalle que la fonction passerait de croissante à décroissante.

Ils vont plus loin dans leur réflexion en s'intéressant également au changement de croissance du taux de variation moyen. En effet, Guillaume souligne qu'avant de voir le changement de croissance de la population, on peut identifier que le taux de variation moyen entre les données de la table de valeurs était de plus en plus petit. Dans ses mots : « Elle (la population) continue de croitre, mais elle croît lentement. » (Séance 4, p. 14) Les participants ont donc l'intuition d'aller observer les écarts entre les données du tableau.

Un travail sur les taux de variation moyens et leur interprétation s'entame dans l'équipe des garçons. Avec le travail déjà fait par Jérémie pour l'obtention de taux de variation moyens, les étudiants peuvent produire d'autres RN en « calculant » les taux de variation moyens. Leurs calculs sont rassemblés dans le Tableau 4.3.

Tableau 4.3
RN des taux de variation moyens pour des intervalles donnés

Intervalle	Taux de variation moyen (L'unité de mesure est ajoutée. Elle n'est pas mentionnée par les étudiants)
[0, 2]	12600 bactéries par heure
[2, 4]	9800 bactéries par heure
[4, 12]	3800 bactéries par heure
[12, 14]	-4200 bactéries par heure

Les étudiants cherchent à coordonner différentes représentations du taux de variation moyen et à retirer de l'information utile pour faire avancer la résolution du problème. Pour ce faire, ils font un certain nombre de conversions et de coordinations entre des RV et des représentations d'autres registres. L'extrait suivant (Extrait 4.10), qui a lieu pendant que les étudiants tentent de répondre aux questions des pages 3 et 4 du cahier de l'étudiant de la séance 4, met en lumière les différentes RV produites par les trois participants. Ils semblent associer les termes « moyenne », « pente », « variation », « dérivée » et « tangente ».

Jérémie : Ben là, c'est parce que lui [le bond entre deux valeurs de temps] c'est deux unités, deux unités, lui représente [8] unités, **ça fait que tu le divises**, tu peux savoir de combien… [Il fait référence à ses calculs pour trouver le taux de croissance moyen entre chaque donnée de la table de valeurs, voir Figure 4.20.]

[…]

Sarah : Donc là, qu'est-ce que tu es en train de calculer quand tu fais ça?

Jérémie : **Une moyenne**.

Sarah : La moyenne… une moyenne, mais de quoi? Comment tu l'appellerais cette moyenne-là?

Jérémie : Je ne me rappelle plus. Je suis fatigué!

[…]

Guillaume : **Il cherche une pente**.

Sarah : Il cherche une pente?!

Guillaume : Bien **il cherche la variation** eh… [moment de réflexion]

[…]

Sarah : Toi, Antoine, es-tu d'accord avec cette démarche-là? À quoi ça sert de faire ça?

Antoine : Bien, **ça revient à faire la dérivée**.

Sarah : La dérivée où?

Antoine : Bien…entre 12 et 14 pour trouver genre à peu près à quel moment ça commence à réduire.

Sarah : La dérivée entre 12 et 14?! [sur un ton sceptique]

Antoine : Bien c'est… **trouver une tangente entre 12 et 14** pour savoir quand est-ce que ta variation est plus nulle et commence à descendre… ou **quand c'est nul et à partir de ce moment-là, on sait quand est-ce qu'elle descend.**

Extrait 4.10 Différentes représentations du taux de variation moyen (Séance 4, p. 13–14)

Le tableau suivant (Tableau 4.4) montre une analyse des liens faits par les étudiants observés lors de cette discussion.

Tableau 4.4
Conversions vers différentes représentations pour parler du concept de taux de variation moyen dans une discussion entre les trois coéquipiers (Séance 4, p. 13-14)

Type de représentations et actions posées	Étudiant qui pose l'action	Analyse
Formation RN Calcul des taux de variation moyens	Jérémie	Jérémie utilise bien les données de la table de valeurs pour calculer les taux de variation moyens sur les différents intervalles. Or, il ne va pas beaucoup plus loin dans l'interprétation de l'utilité de ces calculs.
Conversion RN→RV À ma demande, il identifie ses taux de variation moyens (RN) comme étant des **« moyennes »** (RV).	Jérémie	Bien que cette RV soit incomplète, Jérémie n'a pas tort. En effet, ses différents calculs peuvent être associés au concept de moyenne dans le sens qu'il obtient un nombre de bactéries produites/mortes pour chaque heure dans cet intervalle, c'est-à-dire, un nombre de bactéries produites chaque heure si le même nombre de bactéries était produit chaque heure sur cet intervalle. On parle d'une RV incomplète dans le sens qu'il n'identifie pas les RN comme des « taux de variation » (RV), ce qui est une conversion importante pour la suite du problème et surtout pour le processus de compréhension de la dérivée.
Conversion RN + RV → RV + RV Conversion à partir des calculs des taux de variation moyens (RN) et de la représentation verbale « moyenne » (RV) vers les représentations verbales **« pente » (RV)** et **« variation » (RV)**.	Guillaume	Guillaume utilise la représentation « pente » pour parler de ce que Jérémie a calculé (taux de variation moyen). Ces deux RV désignent en effet le même concept. On peut souligner que le terme « pente » est plus souvent utilisé en référence au registre graphique ce qui n'est pas nécessairement le cas ici, bien que certains liens avec le registre graphique se forment par la suite.
Conversion RN + RV → RV Conversion à partir des calculs des taux de variation moyens (RN) et des représentations verbales « moyenne » (RV), « pente » (RV) et « variation » (RV) vers la représentation verbale **« dérivée » (RV)**	Antoine	Antoine poursuit la discussion en introduisant le terme « dérivée ». Il est vrai que ce que Jérémie calcule (taux de variation moyen) n'est pas très loin du concept de dérivée (taux de variation instantané). Rappelons que ce qui distingue ces deux concepts est que le taux de variation moyen est lié à un intervalle donné ou à une droite sécante à la fonction en jeu. Tandis que le taux de variation instantané (dérivée en un point) est lié au taux de variation pour une valeur de la variable indépendante en particulier ou au taux de variation d'une droite tangente en un point d'une fonction en jeu. De sorte que l'utilisation de la RV « dérivée » est erronée dans ce cas.

Type de représentations et actions posées	Étudiant qui pose l'action	Analyse
Conversion RN +RV → RV + RV Conversion des calculs des taux de variation moyens et des représentations verbales de dérivée vers deux représentations verbales : « La dérivée entre 12 et 14. » (RV du concept de dérivée) « tangente entre 12 et 14 » (RV du concept de droite tangente et de dérivée)	Antoine	Antoine pousse plus loin sa description en formulant la RV « la dérivée entre 12 et 14 » et la RV « tangente entre 12 et 14 ». Pour les mêmes raisons que celles soulevées précédemment, ces deux RV sont erronées. En effet, une dérivée ou une droite tangente ne peuvent être associées à un intervalle de cette sorte. Dans ce cas, Antoine aurait dû utiliser les représentations « taux de variation moyen » ou « droite sécante entre 12 et 14 », par exemple, pour que les différentes représentations en jeu dans cette discussion se coordonnent avec cohérence.

Même si ses conversions/coordinations sont parfois boiteuses, Antoine peut tout de même utiliser une propriété d'une droite tangente ou du concept de dérivée. En effet, il repère le fait que si la « tangente » (on devrait plutôt lire la **pente** de la tangente) est nulle, cela marquera un changement de croissance de la fonction (voir Extrait 4.10). Cette propriété est vraiment utile afin de repérer les changements de croissance d'une fonction. Or, les étudiants ne la réinvestissent pas pour résoudre leur problème.

Dans cet extrait, on remarque que les représentations produites et utilisées sont fonctionnelles dans le sens qu'elles sont parfois intuitives (probablement incomplètes), voire erronées d'un point de vue institutionnel. Par contre, cela n'empêche pas les étudiants de pouvoir en retirer des informations intéressantes qui pourraient leur permettre d'aller plus loin dans la résolution de leur problème. Par exemple, le fait que si une pente de tangente (dérivée) est nulle cela marque un changement de croissance. Cependant, ce manque de précision et de coordination semble empêcher les étudiants de réinvestir ce travail. On remarque d'ailleurs que les étudiants éprouvent de la difficulté à les coordonner et à les convertir dans d'autres registres (en RA, par exemple). Ces représentations fonctionnelles font donc partie de leur processus de compréhension de la dérivée qui est, à ce moment, vraisemblablement aussi incomplet que les représentations utilisées pour décrire le concept.

➤ Éviter l'utilisation de la dérivée

Bien que les étudiants sachent faire ressortir quelques éléments des taux de variation moyens en plus d'avoir l'intuition de rechercher un taux de variation qui serait nul, ils ne réinvestissent pas cette réflexion pour résoudre le problème posé. En effet, ils utilisent plutôt une propriété de la fonction quadratique, la symétrie. Par contre, on peut douter du plein contrôle de cette stratégie par Jérémie en particulier, et ce, parce que sa première utilisation mène à une réponse et une coordination avec le registre verbal erronées. Il se reprend cependant par la suite avec la nouvelle RA proposée.

Au début, en voyant la RA proposée (voir Figure 4.17) et en laissant de côté la réflexion qui a été faite autour du taux de variation, Jérémie entame un traitement algébrique. Il explique sa démarche de cette façon (voir Extrait 4.11 et Figure 4.21).

Jérémie : J'essaie de voir comment est-ce que 10 quatre *t* est égal à 10 trois *t* à la deux [$10^4t = 10^3t^2$]. Pour savoir quand est-ce qu'on annule l'autre et tu vas savoir exactement ton moment où est-ce que ta pente va commencer à descendre. [...] Ce que je veux dire, c'est que si je mets mettons *b* de 10 [$b(10)$], ici, ces deux-là [$10^4t = 10^3t^2$] vont s'annuler et je vais avoir juste ma population de départ et je vais commencer à... Bien dans le fond, ma population de départ, ce n'est pas vrai là. Je veux dire je n'aurais juste pas d'augmentation, pas de diminution. J'ai mon sommet dans le fond!

Extrait 4.11 Explication du traitement de RA par Jérémie (Séance 4, p. 17–21)

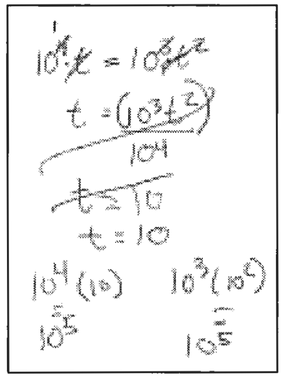
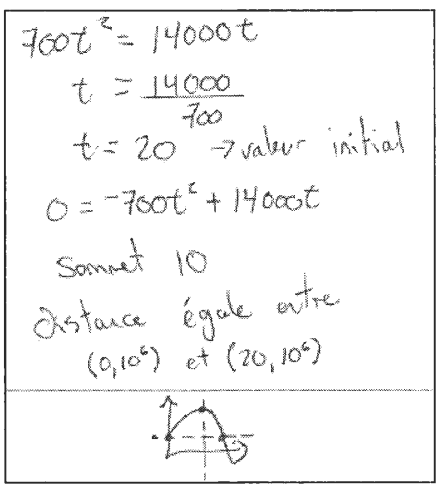


Figure 4.21 Manipulations algébriques de Jérémie (Cahier de l'étudiant Jérémie, séance 4, p. 5)

Dans sa démarche, il cherche le moment où l'image associée à une certaine valeur de temps ne sera plus positive et deviendra négative. Pour ce faire, il produit une équation qui lui permet d'identifier la valeur de *t* pour laquelle le deuxième terme de la RA proposée (10^4t) est égal au dernier terme (10^3t^2). Il laisse donc de côté le 1[er] terme de la RA proposée (10^6). L'idée de base de la démarche n'est pas complètement erronée. Par contre, le fait qu'il laisse un terme de la RA de côté (10^6) change totalement ce que représente la valeur de *t* obtenue après les traitements algébriques. En effet, si $10^4t = 10^3t^2$, cela veut dire que l'image associée à cette valeur de *t* est la valeur initiale (10^6). Ainsi, il ne trouve pas le sommet, comme il le prétend, mais bien le couple (10, 10^6) qui est un point, selon les propriétés d'une fonction quadratique, symétrique au point (0, 10^6). Ainsi, il pourrait en effet utiliser cette valeur pour trouver le sommet, soit le point dont la valeur de *t* est exactement entre 0 et 10. Cette interprétation échappe aux étudiants à ce moment de la séance. Ils restent donc avec une valeur erronée pour identifier le sommet (ou le moment où la population de bactéries cesse d'augmenter pour commencer à diminuer).

Il est très important de souligner que l'idée de rechercher le sommet, bien qu'elle soit mal coordonnée algébriquement ici, est tout à fait correcte. En effet, la bonne intuition des étudiants se poursuit. Leur intérêt pour les taux de variation moyens et pour le sommet montre leur coordination entre cette unité signifiante d'une RG et leur intuition de rechercher un taux de variation nul (RV).

Plus tard, lorsqu'une nouvelle RA pour la situation est proposée, Jérémie reprend une démarche semblable (voir Figure 4.22). Cette fois-ci, il semble en parfait contrôle de ce qu'il cherche et surtout sur l'interprétation qu'il en fait. En effet, il identifie correctement (RV) que la valeur de *t* obtenue est associée à une image égale à la valeur initiale. Il utilise également la propriété de symétrie explicitement à l'aide de RV et de RG de la fonction quadratique. Enfin, il identifie la bonne valeur de *t* pour déterminer la position du sommet.



$700t^2 = 14000t$

$t = \frac{14000}{700}$

$t = 20 \rightarrow$ valeur initial

$0 = -700t^2 + 14000t$

Sommet 10

distance égale entre $(0, 10^5)$ et $(20, 10^5)$

Figure 4.22 Réponse à la question 5 par Jérémie (Cahier de l'étudiant Jérémie, séance 4, p. 5)

Ainsi, Jérémie coordonne correctement les RA, RG, RV, RN afin de répondre à sa question, à savoir le moment où la population de bactéries cesse d'augmenter et commence à diminuer. Bien que ces représentations soient plus explicitement liées au concept de fonction que celui de dérivée, ce travail de coordination mérite d'être observé avec attention.

Malgré les réflexions des étudiants précédentes autour des taux de variation moyens et du fait d'égaler ce taux de variation à zéro, les étudiants n'ont pas fait appel au concept de dérivée, qui aurait pourtant pu être une façon d'identifier la valeur du temps pour laquelle le taux de variation (instantané) est nul. Cela n'est pas si surprenant à ce stade de l'introduction du concept de dérivée. En effet, l'utilité d'un concept demande une très grande aisance avec ses représentations pour être identifiée. Il faut reconnaitre les évocations du concept de dérivée, de tangente, de taux de variation ou de pente. Le processus de compréhension du concept de dérivée des étudiants est entamé, mais probablement pas très avancé. En effet, le fait de pouvoir produire des représentations liées au concept dans différents registres, mais d'être incapable de les coordonner pour en retirer de l'information nécessaire à avancer dans la résolution d'un problème est un indice. C'est certainement la raison pour laquelle ils ont utilisé une autre démarche pour résoudre ce problème, démarche qui est beaucoup plus près des concepts qu'ils connaissent bien et avec lesquels ils semblent plus à l'aise.

➤ Coordination de différentes représentations du concept de fonction : quelques éléments à souligner

Pendant les séances, les représentations produites et les actions posées sur celles-ci ne sont bien sûr pas toujours directement en lien avec le concept de dérivée. Par contre, certains éléments sont parfois intéressants à souligner et peuvent aider à comprendre la façon dont les étudiants travaillent avec différentes représentations. Par exemple, les trois participants démontrent une bonne coordination de la RT et de la RA proposée, et une vision très ouverte des données et informations fournies par certaines représentations.

Dans le cahier de l'étudiant, une RA est proposée à la question 5 (voir Figure 4.23). Par contre, si l'on s'y attarde et que l'on compare les couples de la table de valeurs avec les couples obtenus si l'on évalue la fonction $b(t)$ proposée, on trouve une incohérence. En effet, la RA $b(t)$ ne permet pas de retrouver les mêmes couples que ceux de la table de valeurs. Les étudiants ont d'ailleurs eux-mêmes relevé cette erreur en coordonnant les deux représentations. Finalement, cette « erreur » dans le cahier de l'étudiant a permis de voir que les étudiants pouvaient coordonner la table de valeurs et la RA d'une fonction, et d'en ressortir des informations[31].

Page 5
Pour mieux comprendre ce qui se passe avec la population de bactéries présente chez leur patient, les médecins ont trouvé une formule qui modéliserait bien leur situation : $\boldsymbol{b(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2}$**,** **où *t* est le temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique et *b(t)* le nombre de bactéries dans la population.**
Connaissant cette formule, que peux-tu dire de ton esquisse graphique tracée précédemment ?

Figure 4.23 Sous-question 4 de la situation « la maladie du hamburger » de la séance 4 (Cahier de l'étudiant, séance 4, p. 5)

Un autre élément à mettre en lumière est la vision plutôt globale que peuvent avoir les étudiants en interprétant diverses représentations. Par exemple, ils amènent l'idée qu'il y a un grand intervalle dans la table de valeurs, soit l'intervalle [4, 12], et qu'il est donc impossible de prédire le « comportement » de la fonction sur cet intervalle. Bien sûr, on ne peut prédire parfaitement le comportement de la fonction à l'intérieur de n'importe quel intervalle donné dans la table de valeurs. Or, il est tout de même révélateur que les étudiants reconnaissent cette « limite » de la RT.

[31] Une autre RA de la fonction modélisant la situation a finalement été donnée aux deux équipes : $b(t) = -700t^2 + 14000t + 10^6$. Cette RA est en cohérence avec les données de la table de valeurs.

Ils donnent un autre indice de cette vision plus globale de la situation en parlant de la RG. Cette fois, ils interprètent la valeur de l'ordonnée à l'origine, différente de zéro, dans la RG parce que le début de l'observation (désigné par le temps 0) s'est fait une fois que la personne a été contaminée depuis un certain temps, soit une fois que la population de bactéries ait déjà commencé à grandir. Ils ajoutent aussi que la RG aurait pu admettre un point (0, 0) si l'observation avait débuté (temps 0) au moment de la contamination du patient par le virus (c'est-à-dire un nombre de bactéries qui commence aussi à 0). Cette flexibilité à coordonner des unités signifiantes de la RG et des interprétations (RV) est très intéressante. Elle permet de voir que les étudiants sont plutôt à l'aise avec le registre graphique et sa coordination avec le registre verbal, du moins pour le concept de fonction et dans ce contexte en particulier.

Enfin, les étudiants peuvent coordonner les registres tabulaire, graphique et verbal lorsque ceux-ci sont utilisés pour représenter une fonction dans le contexte particulier d'une croissance de population. Cette aisance à voir plus « large » que ce qui est directement représenté dans un registre et à pouvoir adapter la représentation à une situation en particulier pourra certainement leur servir afin de coordonner des représentations liées au concept de dérivée.

- Traitement d'une représentation algébrique de la dérivée et tentative de conversion vers d'autres registres

À partir de cette nouvelle RA, je propose aux étudiants d'utiliser le concept de dérivée pour identifier le moment où la population de bactéries cesse de croitre et commence à diminuer. Ils peuvent alors produire une RA de la dérivée incluant une limite et la traiter pour obtenir la fonction dérivée. Par contre, le concept de dérivée reste très confus dans cette équipe, particulièrement pour Antoine. Il y a un manque important au niveau de la capacité à coordonner les représentations de la dérivée (fonction dérivée ou dérivée en un point), et ce, principalement dans la coordination du registre algébrique au registre verbal (interprétation).

Une fois que la possibilité d'utiliser le concept de dérivée pour résoudre le problème leur est suggérée, les trois participants produisent une RA de la fonction dérivée en contexte incluant la limite (Équation 4.3).

Équation 4.3	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{b(t+h)-b(t)}{h}$

Ils peuvent également traiter cette représentation (voir, par exemple, les traitements effectués par Guillaume, Figure 4.24). En effet, les trois la manipulent afin d'obtenir une nouvelle RA de la fonction dérivée soit $b'(t) = -1400t + 14000$. Seul Guillaume utilise la RA $F'(t)$ et il faut admettre qu'il ne nomme pas de façon cohérente sa fonction (*F*) sachant que la fonction proposée était représentée par $b(t)$. Guillaume ajoute également un élément important à ses traitements algébriques. Il produit une nouvelle RA qui est directement liée au but du problème et au concept de dérivée, soit identifier le moment où la population de bactéries cesse d'augmenter pour commencer à diminuer, c'est-à-dire la RA $-1400t + 14000 = 0$ (Figure 4.24)

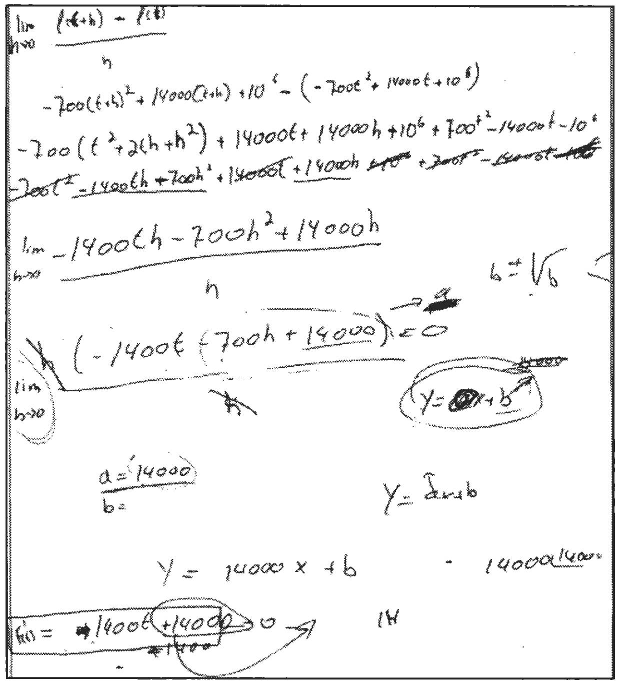


Figure 4.24 Production et traitement de RA par Guillaume (Cahier de l'étudiant Guillaume, séance 4, p. 7)

Bien que tous ces traitements algébriques soient menés à bien par les trois participants, la coordination de ces nouvelles RA est très difficile. Malgré mes nombreuses interventions visant à aider les trois participants à distinguer les RA d'une fonction dérivée et d'une dérivée en un point, la confusion demeure. À un certain moment, les interventions sont très dirigées et l'échange devient davantage un jeu de devinettes qu'une réelle discussion approfondie faisant intervenir la coordination de différentes représentations du concept de dérivée[32]. De plus, les étudiants ne peuvent produire de nouvelles représentations à partir de la RA de la fonction dérivée obtenue.

---

[32] Cet échange fera d'ailleurs l'objet d'une analyse avec un regard particulier sur mes intentions comme chercheure-enseignante (voir section 5.2.1).

Enfin, dans le processus de compréhension des étudiants, on peut voir que les étudiants peuvent produire une RA d'une fonction dérivée et même traiter cette RA. Par contre, ils ne peuvent reconnaitre son utilité par eux-mêmes. Ils ont également beaucoup de difficulté à interpréter (coordonner avec des représentations de différents registres) et à réinvestir les concepts de fonction dérivée et de dérivée en un point pour avancer dans la résolution du problème. Cependant, on peut penser qu'une certaine intuition à propos du concept de dérivée est présente. La production de représentations liées au taux de variation moyen et au taux de variation instantané peut être un indice de cette intuition.

4.4.2 La deuxième partie du modèle : réfléchir à la dérivée en contexte purement mathématique

Étant donné qu'à la quatrième séance, Antoine, Guillaume et Jérémie avaient trouvé une façon de résoudre le problème posé sans utiliser le concept de dérivée, j'ai voulu faire en sorte que ce concept soit incontournable pour la cinquième et dernière séance. Aussi, la discussion entre les trois garçons (Antoine en particulier) et moi autour du concept de dérivée (fonction dérivée et dérivée en un point) à la fin de la quatrième séance me laissait croire que les étudiants arrivaient à produire et traiter des représentations de la dérivée (algébriquement par exemple), mais qu'ils avaient beaucoup de difficulté à coordonner ces différentes représentations, en particulier à produire une RV qui interprèterait bien les RA produites.

Pendant la séance, on assiste à des moments de travail individuel et en équipe, mais on assiste surtout à de nombreux longs moments de discussion en équipe auxquels je prends part. Il convient de mentionner que plusieurs interventions sont nécessaires pour que l'équipe des garçons puisse avancer dans la résolution du problème. Bien que mes interventions soient parfois nécessaires pour soulever des éléments primordiaux pour résoudre le problème, elles sont, le plus souvent, une courroie qui aide les participants à coordonner les représentations déjà produites individuellement.

4.4.2.1 Premier problème : reconnaitre la nécessité du concept de dérivée

Voici un rappel du premier problème proposé dans la séance 5 :

1- Trouve une valeur de a et b telle que la droite $2x + 3y = a$ est tangente au graphique de la fonction $f(x) = bx^2$ au point où $x = 3$.

Voici un schéma proposant les grandes étapes rencontrées par cette équipe lors de la résolution de ce problème :

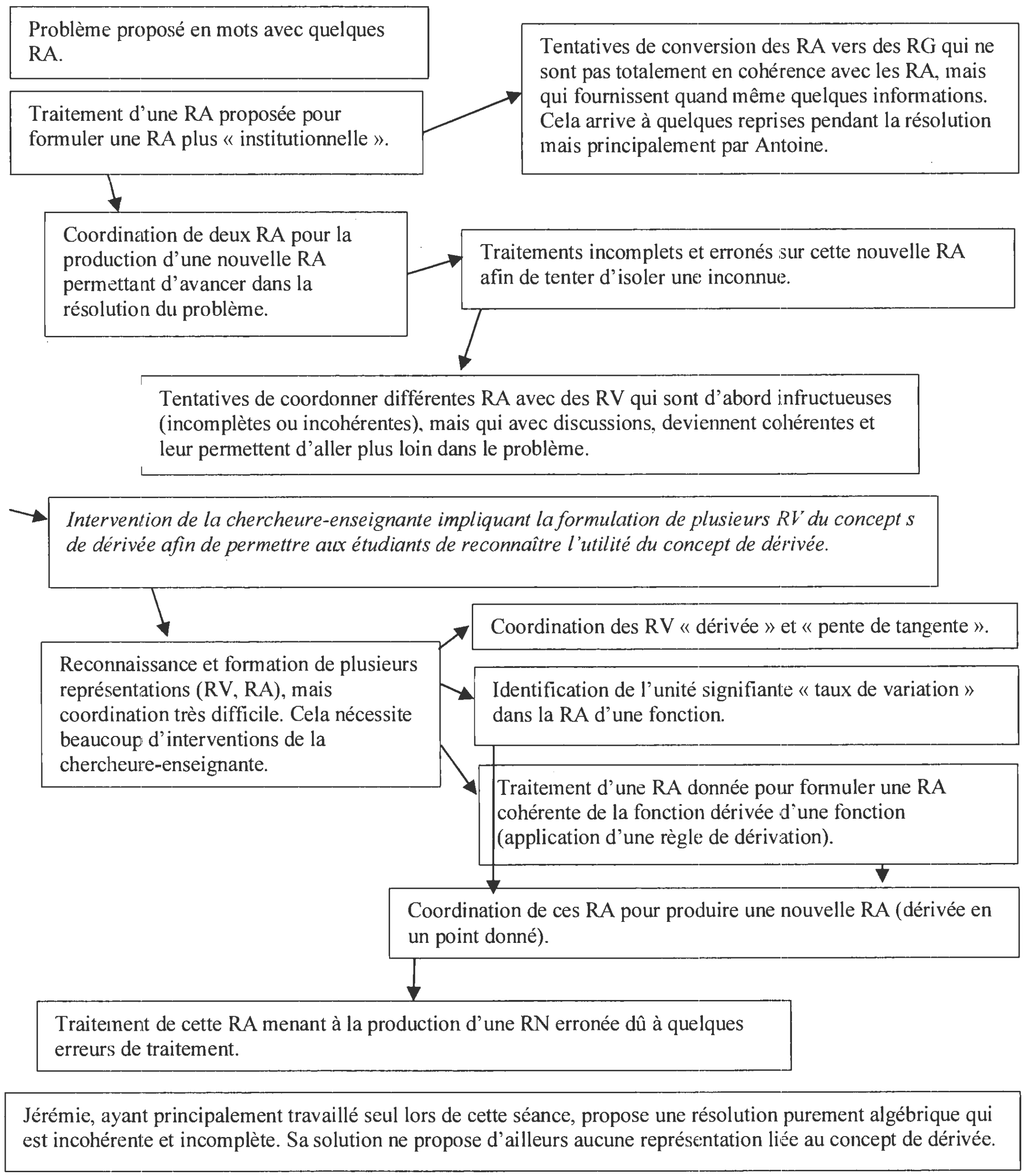


Figure 4.25 Les grandes étapes de la résolution du premier problème de la séance 5 par l'équipe d'Antoine, Guillaume et Jérôme.

Les trois participants passent beaucoup de temps à travailler sur le premier problème. Ils entrecoupent leur travail entre moments individuels et en équipe. Je passe beaucoup de temps avec l'équipe. Parfois pour avoir une discussion avec un des participants, parfois avec deux d'entre eux ou avec les trois. Il faut souligner que Jérémie travaille principalement seul pendant cette séance. Les représentations produites par Antoine et Guillaume sont particulièrement intéressantes. Guillaume semble plus à l'aise avec la production de nouvelles représentations en faisant des liens (coordinations) avec d'autres représentations, alors qu'Antoine est plus centré sur le traitement des différentes représentations. Les deux participants semblent bien se compléter.

➤ Production et traitement de différentes représentations pour démarrer la résolution du problème (représentations pas directement liées au concept de dérivée)

Pour entamer la résolution du problème, les participants produisent, traitent et parfois coordonnent différentes représentations qui ne sont pas nécessairement directement liées au concept de dérivée. Je ne ferai donc pas une analyse très précise de cette partie, mais certains éléments valent la peine d'être soulignés, comme la production d'une première équation pour résoudre le problème et l'esquisse d'une RG.

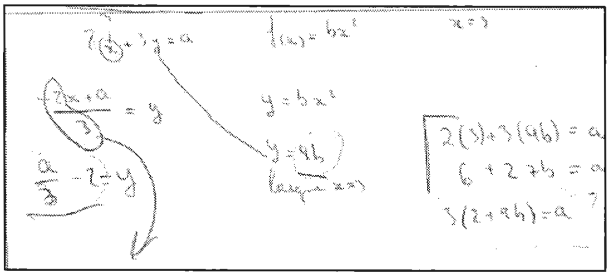
D'abord, les étudiants peuvent produire une RA qui leur permet d'avancer dans la résolution du problème, mais non sans petites difficultés au niveau du traitement algébrique. Rappelons que comme ils ont deux inconnues dont ils doivent identifier la valeur, ils auront besoin de produire et traiter deux équations pour résoudre le problème. Ils produisent la RA (Équation 4.4) qui peut aussi être représentée par une RV « comme la fonction $f(x)$ et la droite sont tangentes en $x=3$, alors les deux partagent également la valeur de y quand $x=3$ » (représentation institutionnelle possible pour ce problème).

Équation 4.4 $$9b = \frac{-2}{3}x + \frac{a}{3}$$

Il faut souligner qu'afin de pouvoir produire cette équation, les étudiants effectuent des traitements sur la RA proposée dans la question, soit $2x + 3y = a$. Ils obtiennent alors une RA dans une forme plus familière (institutionnelle pour ce type de fonction) soit $y = \frac{-2}{3}x + \frac{a}{3}$. C'est à partir de cette RA qu'ils pourront produire l'Équation 4.4. Le Tableau 4.5 montre les différents traitements algébriques effectués par Antoine pour obtenir l'équation 4.4 et d'autres traitements sur cette RA, probablement pour isoler une des deux inconnues.

Tableau 4.5
Représentations et traitements algébriques produits par Antoine

Représentations algébriques et traitements algébriques produits par Antoine	Interprétations
$2x+3y=a$ $3y=\frac{-2x+a}{3}$ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{a}{3}$	En traitant la RA de la droite donnée dans la question, il obtient une RA plus familière du type $y=ax+b$.
$\cancel{b}3^2=\frac{-2(3)+a}{3}$	Antoine crée l'égalité entre l'équation de $f(x)$ et celle de la droite. De plus, il remplace x par trois. Or, il ne sait comment justifier cette démarche. Il dit simplement qu'il a égalé les deux fonctions et qu'il avait une valeur pour x alors qu'il l'a remplacé. (Séance 5, p. 7–9)
$b=\cancel{-6/3}+a/3-6$ $b=a/3-8$	Erreurs de traitement algébrique : 3^2 devient 6 au lieu de 9 Au lieu de diviser, il soustrait. Le « divisé par 9 » est donc devenu « moins 6 ».
$a=3(b+8)$ $a=3b+24$	Il isole le a correctement (considérant les erreurs précédentes).
$b=\cancel{\frac{3(2+y)}{3}-8}$ $b=y-6$	Il revient en arrière et remplace plutôt a par $(2+y)$ au lieu de l'isoler. Je ne sais pas d'où vient le $a=2+y$. Il y a aussi un facteur de 3 de trop qui multiplie le $(2+y)$.
$f(x)=y$? $(y-6)3^2=y$?	Enfin, ayant obtenu une « valeur » pour b qui est en fonction de y, il remplace dans f le b par cette nouvelle valeur. Ce qui n'est pas correct.

Représentations algébriques et traitements algébriques produits par Antoine	Interprétations
	Après avoir vu les RA produites par Jérémie et avoir discuté avec moi et ses deux collègues, Antoine reprend ses traitements algébriques. Cette fois, il ne fait pas d'erreur dans ses traitements et obtient une RA équivalente à l'Équation 4.1, soit $3(2+9b)=a$.

Tiré du cahier de l'étudiant Antoine, séance 5, p. 6–9

Dans le tableau 4.5, on remarque qu'Antoine finit par se perdre dans ses traitements des différentes RA obtenues. Cela donne un indice comme quoi Antoine ne peut probablement pas coordonner les différentes représentations obtenues, et ce, principalement avec le registre verbal. En effet, il ne semble pas en mesure d'interpréter ou d'expliquer avec une RV ce que les différentes RA représentent. Or, on peut voir aussi que suite à une discussion avec moi et ses collègues, et après avoir vu les RA produites par Jérémie, Antoine produit de nouvelles RA qui sont équivalentes à l'Équation 4.4.

Par ailleurs, lors de cette discussion avec ses collègues et moi (Extrait 4.12), on peut voir qu'Antoine peut produire des RV qui sont en cohérence avec des RA produites. Ainsi, en analysant cette discussion avec les productions et traitements effectués par Jérémie (Tableau 4.6) et les nouvelles RA d'Antoine (Tableau 4.5, dernière ligne), on peut dire que les étudiants arrivent à coordonner des RA et des RV qui font avancer la résolution du problème.

Sarah : Ok, ça fait que là, dans le fond, on veut que notre droite soit tangente [à f] au point [x égale] 3. [...]
Antoine : Quand c'est tangente à 3... Oui, donc ça veut dire que ça se coupe à 3? [moment de réflexion] C'est ça que ça veut dire?
Sarah : Quand on cherche la droite tangente en un point d'un graphique, qu'est-ce qu'on fait?
Antoine : On trouve la tangente quand une droite touche... donc ça veut dire que ça où ça touche, ça serait 3?!
Sarah : Oui c'est ça. Ça fait que ça veut dire...
[...]
Sarah : Ça fait que là, comment on pourrait partir notre problème? Qu'est-ce qu'on sait?
Jérémie : Bien, que x est égal à 3.
Sarah : Que x est égal à 3. Ok! C'est à ce moment-là... c'est cette valeur-là de x qui va nous intéresser! Et qu'est-ce qui se passe à x égale 3?
Jérémie : Bien, les deux points se rencontrent donc les deux for...mules... sont là... en tout cas, je ne sais pas comment t'expliquer ça...
Sarah : Les deux formules sont là...?!
Antoine : Elles sont égales.
Sarah : Elles sont égales!
Jérémie : Les deux droites sont... c'est ça!
Antoine : Bien elles...
Sarah : Ça fait que leur image, en x égale 3, est égale. Ça veut dire que... si je prends...
Jérémie : bx^2 est égal à l'autre.
Sarah : Exact! Mais où?
Antoine : En x égale 3.
Sarah : À x égale 3.

Extrait 4.12 Sarah essaie de provoquer la production d'une RA de départ pour résoudre le problème (Séance 5, p. 19–20)

Tableau 4.6
Représentations et traitements algébriques produits par Jérémie

Représentations et traitements algébriques produits par Jérémie	Verbalisation par Jérémie	Interprétations
① $\overset{y}{f(x)} = bx^2$ $\overset{y}{f(x)} = b(3)^2$ $\overset{y}{f(x)} = 9b$ $\frac{y}{b} = 9$ $y = 9b$	« […] je me suis dit que mon *f(x)* c'était mon *y* dans le fond. Ça fait que j'ai fait *y* est égal à mon bx^2. J'ai substitué mon *x* par mon 3 et ça me donnait dans le fond, *y* égale à *9b*. […] C'était ma valeur dans le fond de *y* quand *x* valait 3, ça me donnait *9b*. » (Séance #5, p.52)	Il évalue d'abord la valeur de *f(3)*. On remarque qu'il ne l'écrit jamais de cette façon. Il préfère remplacer le *f(x)* par *y*. Il fait une bonne interprétation verbale de son résultat.
① $2x + 3y = a$ $2(3) + 3y = a$ $6 + 3y = a$ $-a + 6 = -3y$ $\frac{-a+6}{-3} = y$ $\frac{a}{3} + 2 = y$		En plus d'isoler le *y* dans la RA de la droite, il l'évalue quand *x=3*.
$9b = \frac{-a+6}{-3}$ $-21b = -a + 6$ $b = \frac{-a+6}{-21}$ $b = \frac{a}{21} + \frac{6}{-21}$ $b = \frac{a}{21} - \frac{2}{7}$	« bx^2 est égal à l'autre » (extrait 4.12) C'est Antoine qui ajoute l'importante information « en x égale 3 » (extrait 4.12)	Enfin, il pose l'égalité entre les deux fonctions lorsque *x=3*. C'est ce que Jérémie et Antoine avaient pu formuler à l'oral (voir extrait 4.12). Ils ont donc effectué une bonne conversion du RV vers RA. Il faut souligner que sans l'ajout de « en x égale 3 » par Antoine, la RV de Jérémie serait erronée. On peut remarquer également une erreur dans le traitement algébrique de Jérémie lorsqu'il multiplie -*3X9=21*. On devrait obtenir *27*. Il remarquera et corrigera l'erreur plus tard (voir Tableau 4.7) pour obtenir $b = \frac{a}{27} - \frac{2}{9}$.

Tiré du cahier de l'étudiant Jérémie, séance 5, p. 1

À ce point dans leur résolution du problème, les étudiants ne semblent pas voir qu'ils n'ont pas terminé ou ils sont trop bloqués pour poursuivre plus loin. Ils ont besoin de mon intervention pour continuer d'avancer dans le problème. Remarquons qu'aller plus loin dans le problème implique la nécessité de faire appel au concept de dérivée. Le fait qu'ils s'arrêtent à ce moment est un indice que les étudiants ne semblent pas reconnaitre l'utilité de ce concept pour résoudre le problème, du moins par eux-mêmes.

- Reconnaissance et formation de plusieurs représentations liées au concept de dérivée, mais difficulté à les coordonner

Au cours de cette séance, on trouve un moment assez explicite du processus de compréhension lorsque les étudiants commencent une discussion en produisant différentes représentations du concept de dérivée, mais n'arrivent pas à les coordonner. En effet, ils en parlent en parallèle, sans faire de lien entre les différentes représentations. Par la suite seulement une certaine coordination s'opère, mais non sans difficulté.

Après une discussion plus générale sur le concept de dérivée (voir section 4.5, p. 209), j'essaie de ramener le problème au cœur de la discussion. Je veux essayer de les amener à voir l'utilité du concept de dérivée dans ce problème. Avec un peu de difficulté, les étudiants arrivent d'abord à coordonner les RV « dérivée » et « pente de tangente ». Par la suite, ils peuvent également coordonner ces RV avec une RA de la situation, soit « $\frac{-2}{3}$ », qui est en effet le « taux de variation » de la droite tangente à la fonction f quand $x = 3$. Ils effectuent donc une coordination entre le registre verbal et le registre algébrique (Extrait 4.13). Il faut souligner que je fais plusieurs interventions afin que les représentations produites soient complètes et cohérentes. Mes interventions sont le plus souvent des questions auxquelles les étudiants savent répondre, ce qui leur permet de compléter leurs représentations. À cet égard, on peut conclure que les étudiants arrivent à produire, identifier et coordonner ces représentations, mais avec un support, soit mes interventions.

Sarah : Ok, ça fait que là, on sait que notre dérivée, la dérivée de cette fonction-là [*f*] en *x=3*, est supposée me donner quoi?
Guillaume : La pente...
Sarah : La pente de quoi?
Guillaume : De ça [il pointe la RA $y = \frac{-2x}{3} + \frac{a}{3}$ sur sa feuille]... de la tangente eh...
Sarah : Et c'est quoi la pente de ça [$y = \frac{-2x}{3} + \frac{a}{3}$]?
Guillaume : C'est la dérivée de ça [*f*]!
Sarah : Où?
Antoine : Quand *x* est égal à *3*.
Sarah : Ok. Et la pente de ça [$y = \frac{-2x}{3} + \frac{a}{3}$]?
Antoine : C'est $\frac{-2}{3}$!
Sarah : Exact!
Antoine : Donc, la pente de ça [il pointe la RA de la droite] c'est la dérivée?!
Sarah : La pente de ça [$y = \frac{-2x}{3} + \frac{a}{3}$], c'est la dérivée de ça [*f*] au point *x=3*. Tu [Antoine] ne le vois pas hein?!
Antoine : Donc, c'est $\frac{-2}{3}$ qu'il faudrait que je trouve... mais dans le fond, je sais parce que s'ils se croisent à 3... non, je ne sais pas où est-ce qu'on pourrait le mettre. Ils se croisent à 3, mais je ne sais pas où est-ce que...

Extrait 4.13 Déterminer comment utiliser la dérivée dans notre problème (Séance 5, p. 34–36)

De plus, pour pouvoir aller plus loin dans le problème, en plus de pouvoir identifier l'équivalence entre la RV « dérivée » et la RA « $\frac{-2}{3}$ », les étudiants doivent effectuer une autre coordination importante entre deux RA, soit la RA identifiée « $\frac{-2}{3}$ » et la RA de la fonction dérivée en $x = 3$, $f'(3) = 2b(3)$. Avant d'effectuer cette coordination primordiale pour résoudre le problème, Guillaume produit — parallèlement aux représentations que les étudiants viennent de produire —, identifie et coordonne une nouvelle RA. Je souligne que cela se fait parallèlement puisque Guillaume n'explicite pas pour le moment la relation entre sa nouvelle RA, et les RV et RA produites ou identifiées précédemment. Guillaume semble avoir recours à la règle de dérivation pour les fonctions polynomiales pour trouver la fonction dérivée de f (Figure 4.26).

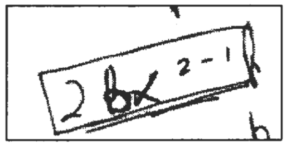


Figure 4.26 RA de la fonction dérivée de *f(x)* par Guillaume (Cahier de l'étudiant Guillaume, séance 5, p. 1)

La présence de l'exposant « 2-1 » (voir Figure 4.26) permet de penser qu'il utilise la règle de dérivation pour les fonctions polynomiales soit : $Si\ f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$. Il n'y a aucun traitement algébrique sur sa feuille pour arriver à ce résultat. On peut donc penser que c'est une règle qu'il connait par cœur.

Enfin, Guillaume arrive à mettre en relation (coordonner) la RA « $f'(3) = 2b(3)$ » et la RA « $\frac{-2}{3}$ ». De plus, à l'aide de traitements sur cette nouvelle RA, il obtient une valeur pour l'inconnue « *b* » (RN). Une fois une valeur de « *b* » trouvée, il reconnait qu'il peut effectuer un traitement sur une RA obtenue précédemment en remplaçant « *b* » dans la RA par la RN de « *b* » obtenue. Il produit donc une RN de l'inconnue « *a* ». Or, quelques erreurs de traitement se glissent dans la RA, ce qui fait que les RN obtenues pour « *a* » et « *b* » sont erronées. Le Tableau 4.7 présente mes interprétations des différentes actions de Guillaume et d'Antoine.

Tableau 4.7
Production et traitement de RA et production d'une RN par Guillaume et Antoine

Production et traitement de RA et production de RN par Guillaume	Production et traitement de RA et production de RN par Antoine	Interprétations
$\boxed{2bx^{2-1}}$ h		Fonction dérivée de f probablement obtenue avec la règle de dérivation : $Si\ f(x) = x^n,$ $f'(x) = nx^{n-1}.$
$f(x)\ 2\cdot b\cdot 3 =$		Coordination vers le registre numérique en évaluant la fonction dérivée pour *x=3*.
$6b = \frac{-2}{3}$	Antoine ne produit pas par lui-même cette équation. Il utilise celle produite par Guillaume pour effectuer les traitements qui suivent.	Guillaume produit cette RA qui coordonne de la bonne façon les deux RA produites séparément au préalable. Il la coordonne également avec la RV « pente de la droite tangente ».
$\frac{6b}{6} = -\frac{2}{3}/6$ $6b = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{-2}{18} = \frac{-1}{9}$	$-\frac{2}{3} = 6b$ $-1/9 = b$	Remarquons que la deuxième égalité dans la production de Guillaume est erronée. En effet, on devrait voir $b = \frac{-1}{9}$ plutôt que $6b = \frac{-1}{9}$. Or, par les autres RA qu'il produit, on peut voir qu'il considère vraiment $b = \frac{-1}{9}$. Il s'agit donc d'une erreur de transcription. Il a probablement oublié de simplifier le $\frac{6}{6}$ apparaissant dans la première ligne de sa production. On ne voit pas les manipulations d'Antoine, mais il obtient la bonne valeur de « *b* ».
$\frac{a}{3} - 2 = \left(\frac{x}{9}\right)^2$. $a = 1/3$	$\frac{a}{3} - 2 = y$ $\frac{a}{3} - 2 = -\frac{3^2}{9}$ $\frac{a}{3} = 1$ $a = 1/3$	Antoine coordonne correctement la RN obtenue pour représenter « *b* » et l'équation 4.4, soit $9b = \frac{-2}{3}x + \frac{a}{3}$. En effet, il remplace correctement b par $\frac{-1}{9}$. Par contre, il fait une erreur de traitement à la fin de ses manipulations et obtient $a = \frac{1}{3}$ plutôt que *a=3*. De son côté, Guillaume n'arrive pas à coordonner correctement la RN et la RA comme Antoine. Il élève le « *b* » et le « *x* » au carré ce qui mène à une RN de « *a* » erronée.

Lors d'une discussion entre Antoine, Guillaume et moi, les deux participants repèrent leurs erreurs et reprennent leurs traitements algébriques. Ils obtiennent finalement les RN de « *a* » et « *b* » qui sont cohérentes avec les contraintes exposées dans le problème.
C'est le fait que je leur ai demandé de vérifier leur réponse qui les a menés à repérer leur erreur.

Production et traitement de RA et production de RN par Guillaume	Production et traitement de RA et production de RN par Antoine	Interprétations
Guillaume ne semble pas reprendre ses calculs, mais il suit la démarche d'Antoine.	$f(x) = \frac{x^2}{9}$ « Bien, si je fais, x^2, c'est 9, divisé par 9, ça fait 1 donc, -1. » [Sachant $y = bx^2$ pour x=3 et $b = -\frac{1}{9}$ donc $y = -\frac{1}{9}(3)^2 = -1$] et $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ $-\frac{2x}{3} + \frac{1}{9} = y$ « Ça, ça va me donner, $2x3$, 6, divisé par 3, ça fait $-2 + \frac{1}{9}$, ça ne me donne pas -1! [...] J'ai peut-être fait une erreur [...] » (Séance 5, p. 45)	En effet, afin de vérifier les valeurs qu'ils avaient obtenues pour « a » et « b », Antoine les remplace dans des RA qui équivalent à l'équation 4.4. Il a donc pu voir que les RN de « a » et « b » obtenues ne fonctionnent pas. Cela explique d'ailleurs le fait que les différentes représentations soient barrées dans la production d'Antoine à la ligne précédente de ce tableau.
	$2(3)+3(9b) = a$ $6 + 27b = a$ $3(2+9b) = a$? $3(2-1) = 1$ $a=3$	Il est difficile d'expliquer la ligne « $3(2-1) = 1$ » autrement que par le calcul qu'il a fait à l'oral (dans les cases précédentes). Il se sert inévitablement de cette ligne pour calculer $3(2-1) = 3 = a$ qui est la RN de « a » attendue pour résoudre ce problème.

Tiré de la séance 5, p. 17-22

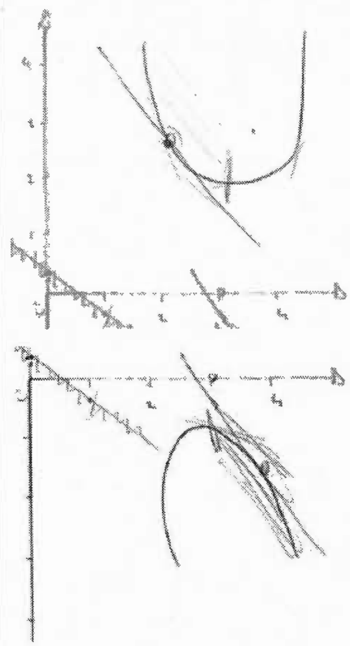
En résumé, Antoine est assez habile pour effectuer des traitements dans le registre algébrique, mais il est rarement à l'origine de la production de RA qui demande une coordination entre les différentes représentations « disponibles ». Or, c'est lui qui remarque et surmonte l'erreur de traitement qu'ils ont commise. Guillaume sait coordonner correctement la plupart des représentations « disponibles » à cette étape. Cependant, il semble avoir plus de difficulté à effectuer des traitements algébriques correctement.

➤ Le registre graphique non utilisé : qu'arrive-t-il lorsque son utilisation est imposée ?

Pendant tout le début de leur résolution de problème, les étudiants n'ont jamais, par eux-mêmes, utilisé le registre graphique. Certes, ils y font référence lorsqu'ils utilisent la RV « pente », cependant, bien que cette RV évoque le registre graphique, cela ne veut pas dire que les étudiants *veulent* y référer lorsqu'ils utilisent cette RV. Bien que depuis le début de la collecte de données, Antoine semble avoir une préférence pour le registre algébrique, c'est lui qui travaille le plus dans le registre graphique, une fois que je lui ai suggéré. Guillaume fait quelques esquisses très rapides et Jérémie ne produit aucune RG. Je décrirai donc la façon dont Antoine, plus particulièrement, a recours au registre graphique pendant la résolution de ce problème.

D'abord, Antoine produit une RG de la situation proposée qui n'est pas directement liée au concept de dérivée. Il sait repérer plusieurs unités signifiantes qui lui permettent d'entamer une conversion des RA du problème vers une RG. Par contre, il y a aussi plusieurs incohérences entre les RA et sa RG. Le Tableau 4.8 relève les différentes unités signifiantes repérées ou non par Antoine lors de sa conversion.

Tableau 4.8
Conversion des RA données dans le problème vers une RG par Antoine

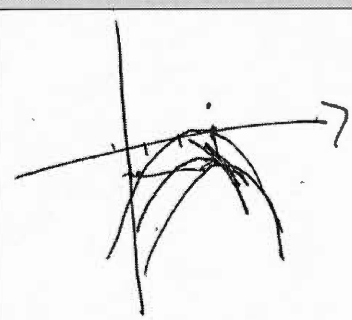
Représentations algébriques données dans le problème (ou traitées et produites par les étudiants)	Représentation graphique produite par Antoine	
$f(x) = bx^2$ $y = \frac{-2}{3}x + \frac{a}{3}$		

Unités signifiantes dans le registre algébrique	Conversion en unités signifiantes dans le registre graphique	Interprétations de la cohérence
Dans (1), la fonction est une fonction de second degré.	La fonction est représentée par une parabole.	Antoine produit en effet des courbes ayant l'allure de paraboles.
Dans (1), le paramètre devant le terme x^2 est l'inconnue b. il y a donc deux possibilités par rapport à son signe : Positif Négatif	 La courbe sera ouverte vers le haut. La courbe sera ouverte vers le bas.	Antoine fait bien cette conversion en produisant les deux possibilités de RG. Or, un élément intéressant peut être souligné. Antoine produit une courbe dans le premier quadrant lorsqu'elle est ouverte vers le haut et dans le quatrième quadrant lorsqu'elle est ouverte vers le bas. Cette production peut laisser croire qu'Antoine pense aussi que ce paramètre a une influence sur l'emplacement de la courbe dans le plan cartésien alors que ce n'est pas le cas.
Dans (1), il n'y a pas de constante.	Le sommet de la parabole passera par (0, 0).	Antoine positionne plutôt le sommet pour qu'il ait une valeur de $x=3$ et ne semble pas se préoccuper de la valeur y qui est associée à ce $x=3$. Ainsi, le sommet n'est pas au bon endroit. Le $x=3$ est bel et bien une valeur remarquable, mais plutôt pour positionner le point de tangence.
Dans la situation, il est dit que (2) est tangente à (1) quand $x=3$.	Les deux fonctions devraient se « toucher » quand x=3. Il s'agit du point de tangence des deux fonctions.	Antoine ne positionne pas le point de tangence à $x=3$. Il ne semble pas vraiment se préoccuper de cette unité signifiante. Cela découle probablement du fait qu'il a déjà interprété cette unité, à tort, comme étant associée au sommet. Rappelons tout de même qu'Antoine avait bien fait cette conversion à l'intérieur du registre graphique. C'est ce qui lui a permis de produire l'Équation 4.4.
Dans (2), la fonction est une fonction du premier degré (ou affine).	La fonction sera représentée par une droite.	Antoine représente en effet des droites dans les deux RG.
Dans (2), le taux de variation est négatif.	La droite tangente sera décroissante.	Les droites tracées sont en effet décroissantes.

À ce moment de la séance, Antoine et Guillaume ne voient pas les prédictions qu'ils pourraient faire par rapport à la valeur des inconnues « *a* » et « *b* ».

C'est seulement plus tard qu'Antoine tente d'utiliser, à ma demande encore une fois, sa RG afin de faire quelques prédictions sur les valeurs des inconnues recherchées. Il identifie quelques unités signifiantes importantes dans sa RG et les RN obtenues pour les inconnues « *a* » et « *b* ». Il produit donc une nouvelle RG en utilisant ces informations (voir Tableau 4.9 pour une interprétation de cette tentative de coordination). Cependant, la discussion autour de sa RG ne s'est pas poursuivie puisque Jérémie a demandé de l'aide avec sa démarche algébrique. L'équipe s'est concentrée sur cette production et n'est pas revenue au registre graphique. Antoine n'a donc pas complété sa coordination afin de vérifier si les RN trouvées sont cohérentes avec la situation.

Tableau 4.9
Tentative de coordination des RN des inconnues et d'une RG par Antoine

Représentations algébriques données dans le problème (ou traitées et produites par les étudiants)	Représentation graphique produite par Antoine	
$f(x) = \frac{-1}{9}x^2$ $y = \frac{-2}{3}x + 1$ *RA non produites comme telles par Antoine.		

Unités signifiantes dans le registre algébrique	Conversion en unités signifiantes dans le registre graphique	Interprétations de la cohérence
Dans (1), la fonction est une fonction de second degré.	La fonction est représentée par une parabole.	Antoine trace effectivement quelques courbes s'apparentant à des paraboles.
Dans (1), le paramètre devant le terme x^2 est négatif.	La courbe sera ouverte vers le bas.	La courbe tracée par Antoine est effectivement ouverte vers le bas.
Dans (1), le paramètre devant le terme x^2 est entre 0 et -1.	La courbe subira une dilatation verticale par rapport à la courbe $y = x^2$ de base.	Antoine repère l'unité signifiante dans la RA, mais il avoue explicitement ne plus se souvenir de sa conversion dans le RG. « [...] Attends, si c'est entre 0 et 1... je ne me souviens plus de tout ça [...] » Il faut noter que dans cette « analyse » Antoine ne considère pas le signe négatif.
Dans (1), il n'y a pas de constante.	Le sommet de la parabole passera par (0, 0).	Antoine positionne le sommet plutôt en (3, 0). La valeur *x=3* est certainement une valeur remarquable dans le problème. Or, elle représente le point de tangence qui n'est pas nécessairement (dans ce cas, n'est pas) le sommet.
Dans (2), la fonction est une fonction du premier degré (ou affine).	La fonction sera représentée par une droite.	Ce n'est pas très clair, mais Antoine semble avoir tracé un segment de droite dans sa RG.
Dans (2), le taux de variation est négatif.	La droite tangente sera décroissante.	Le segment de droite tracé est en effet décroissant.
Dans (2), l'ordonnée à l'origine est 1.	La droite tangente passera par le point (0,1).	Le point d'intersection entre l'axe des ordonnées et la droite tangente n'est pas représenté dans la RG.

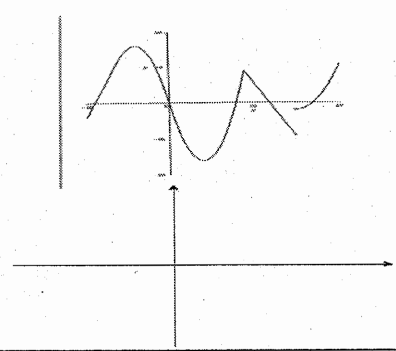
➤ Une solution dans le registre algébrique par Jérémie

On peut remarquer, par les extraits donnés précédemment, que Jérémie n'intervient pas beaucoup dans les discussions en équipe. C'est que, pendant une longue partie de la séance, Jérémie s'applique à produire une longue démarche strictement dans le registre algébrique. Malheureusement, la démarche qu'il produit, qui implique plusieurs RA et traitements sur ces dernières, est erronée. En effet, Jérémie arrive à produire l'Équation 4.4 (RA), nécessaire à la résolution du problème, mais n'arrive pas à identifier l'utilité du concept de dérivée pour produire une autre équation (RA) importante. Ainsi, sa démarche tourne en rond et rend impossible la production d'une RN pour les inconnues « *a* » et « *b* ». Jérémie n'est pas en mesure de reconnaitre que sa démarche est incomplète. Une fois bloqué, il présente sa démarche aux deux autres participants afin qu'ils l'aident. En présentant sa démarche, il repère quelques erreurs de traitement algébrique et attribue alors son blocage à ces erreurs et non au manque d'information essentielle. Il s'agit ici d'un bon exemple dans lequel l'utilisation de représentations dans d'autres registres aurait pu aider l'étudiant à identifier et surmonter ses « erreurs » dans le registre algébrique. La démarche complète de Jérémie est présentée dans l'Annexe B.

4.4.2.2 Deuxième problème : la fonction dérivée graphiquement

Voici un rappel du deuxième problème proposé dans la séance 5 :

2. En laissant les traces de ta démarche, trace le graphique de la fonction dérivée de la fonction représentée par le graphique suivant :



Voici un schéma proposant les grandes étapes de la résolution de ce problème par cette équipe :

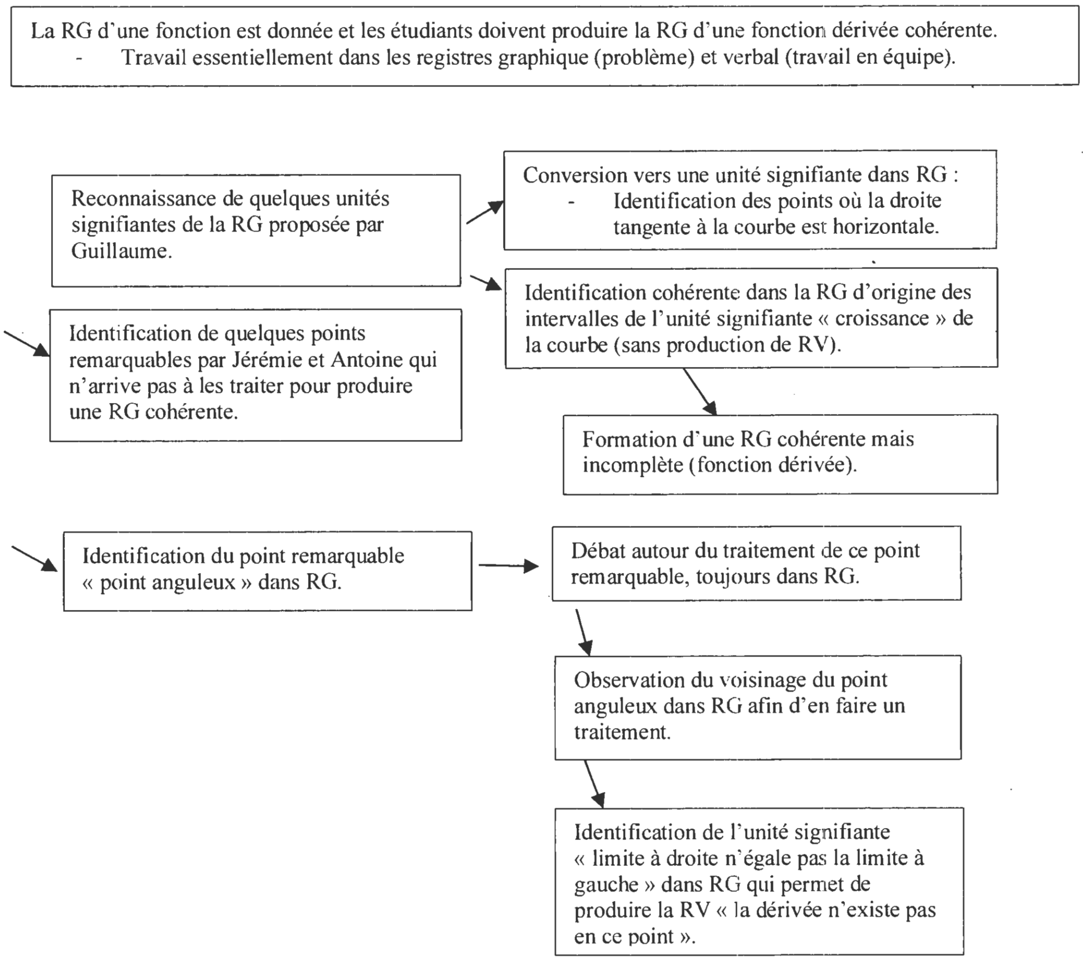


Figure 4.27 Les grandes étapes de la résolution du deuxième problème de la séance 5 par l'équipe d'Antoine, Guillaume et Jérôme.

En abordant le deuxième problème, les étudiants ont différentes réactions. En effet, Guillaume réussit à entrer dans le problème et identifie plusieurs unités signifiantes liées au concept de dérivée qui lui permettent d'effectuer une conversion vers une nouvelle RG. De plus, sa vision plutôt « processuelle » de la dérivée l'amène à compléter un peu plus sa RG. Antoine et Jérémie, eux, sont plus fermés face au problème. En effet, Antoine soutient qu'il n'a pas vu comment tracer des graphiques de fonction dérivée en classe. Jérémie, lui, ne s'y attarde pas beaucoup prétextant qu'il n'a pas assez d'information et qu'il se sent bloqué. Il se montre réticent à s'approprier le problème. Antoine et Jérémie produisent d'ailleurs chacun une RG qui est non seulement incomplète, mais erronée. Antoine réussit quand même à mettre en place une réflexion intéressante, entre autres autour du point anguleux et des concepts de continuité et de dérivabilité, en discutant avec Guillaume et moi.

➤ Coordination entre différentes représentations graphiques par Guillaume

Pendant la résolution du deuxième problème, Guillaume arrive à identifier différentes unités signifiantes qui lui permettent de convertir la RG d'une fonction d'origine en RG possible d'une fonction dérivée de cette fonction d'origine (Figure 4.28). Le tableau suivant montre les différentes unités signifiantes identifiées par Guillaume ainsi que leur conversion vers la RG d'une fonction dérivée. Il convient de rappeler qu'un tableau présentant les différentes unités signifiantes « accessibles » pour les étudiants avait été présenté dans le chapitre III (Tableau 3.1).

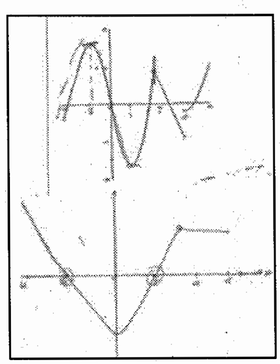


Figure 4.28 Conversion d'une RG d'une fonction vers une autre RG d'une fonction dérivée (Cahier de l'étudiant Guillaume, séance 5, p. 3)

Tableau 4.10
Conversion de la RG d'une fonction en RG d'une fonction dérivée de la fonction proposée

Unités signifiantes identifiées dans la RG proposée d'une fonction	Conversion vers des unités signifiantes d'une RG d'une fonction dérivée	Interprétation
Pente de la tangente nulle (sommets)	La courbe de la fonction croise l'axe des abscisses (présence de zéros)	La Figure 4.28 montre la reconnaissance de ces points remarquables. En effet, un segment de droite est tracé aux sommets dans la première RG et les points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses (zéros de la fonction) sont encerclés.
Croissance de la fonction	Signe de la fonction dérivée, c'est-à-dire que la courbe sera au-dessus (positif) de l'axe des abscisses quand la courbe de la fonction est croissante ou au-dessous (négatif) de l'axe des abscisses quand la courbe de la fonction est décroissante.	Guillaume déplace son crayon (qu'il utilise pour représenter une droite tangente à la courbe) le long de la courbe dans la RG proposée. Il interprète une pente croissante par une courbe qui sera au-dessus de l'axe des abscisses dans la RG de la fonction dérivée et une pente décroissante par une courbe qui sera au-dessous de l'axe des abscisses dans la RG de la fonction dérivée.
Reconnaissance de différents points de non-dérivabilité : Point anguleux Point ouvert (point de discontinuité)	Le point anguleux semble converti en point ouvert (voir Figure 4.28). Le point ouvert ne semble pas converti.	La conversion du point anguleux en point ouvert est correcte. Ce travail est d'ailleurs décrit plus en détail dans les prochaines pages de ce document (p. 200). Bien que Guillaume semble reconnaitre les « points de non-dérivabilités », il ne semble pas être en mesure de toujours convertir cette information en unité signifiante d'une RG d'une fonction dérivée.

En observant la Figure 4.28 et le Tableau 4.10, on peut conclure que la conversion de la RG de la fonction proposée vers la RG d'une possible fonction dérivée pour cette fonction est incomplète. Il était possible de prévoir que les étudiants ne produisent pas une « parfaite » RG pour une possible fonction dérivée de la fonction proposée (voir section 3.4.5, p. 101).

Guillaume donne aussi un indice important sur sa vision qui serait plutôt processuelle sur le concept de dérivée. En effet, il a souvent recours à une droite imaginaire qui se déplace le long de la courbe dans la RG proposée afin d'émettre des conjectures sur la RG d'une possible fonction dérivée. Droite imaginaire qui représentait les droites tangentes à la courbe aux différentes valeurs de x.

➤ Représentations incomplètes et erronées d'Antoine et de Jérémie

De leur côté, Antoine et Jérémie produisent également une RG d'une possible fonction dérivée. Or, ils ne montrent pas la même habileté que Guillaume pour l'identification et la conversion d'unités signifiantes de la RG proposée. En effet, les productions d'Antoine et de Jérémie (voir Figure 4.29 et Figure 4.30) laissent croire qu'ils ne se soucient pas des unités signifiantes suivantes : croissance de la courbe, sommets de la courbe, entre autres. Notons tout de même que, même si Jérémie semble avoir identifié quelques points remarquables de la RG proposée, il ne les utilise pas comme unités signifiantes pouvant lui servir à convertir la RG vers une nouvelle RG.

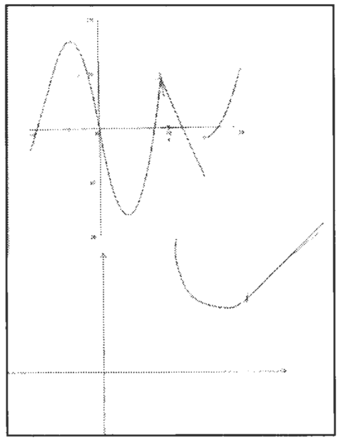


Figure 4.29 RG produite par Antoine (Cahier de l'étudiant Antoine, séance 5, p. 3)

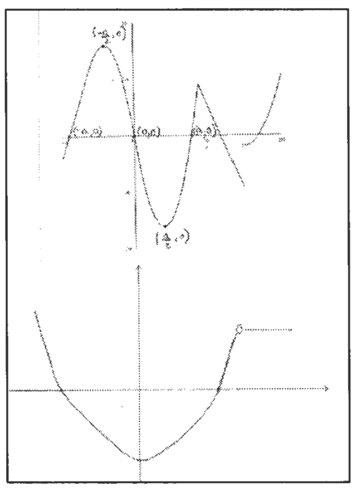


Figure 4.30 RG produite par Jérémie (Cahier de l'étudiant Jérémie, séance 5, p. 3)

➤ Discussion autour du point anguleux

Antoine et Guillaume identifient le « point anguleux », sans le nommer ainsi, comme un point remarquable de la RG. Or, ils n'ont pas la même façon de traiter et de convertir cette unité signifiante dans la nouvelle RG. Ils débattent donc de la présence et de la nature d'une possible droite tangente en ce point. Ils évoquent le concept de limite en utilisant l'idée de limite à droite et à gauche du point.

Le débat commence par Antoine et Guillaume qui émettent une conjecture différente quant à la nature de la droite tangente au point anguleux. Antoine croit que la droite tangente sera verticale. Guillaume croit plutôt qu'elle sera horizontale. À un certain moment, Antoine émet même la conjecture que les deux droites pourraient exister. Or, cela entre en contradiction avec sa conception qu'il n'y a qu'une seule tangente possible en un point. Il est intéressant de voir comment la discussion des deux participants se situe pour l'instant encore dans le registre graphique. Ils utilisent également un crayon ou une règle pour représenter les différentes possibilités de tangente sur le graphique.

Afin d'essayer de dénouer l'impasse, Guillaume propose d'observer le « comportement » des droites sécantes. Il utilise ses mains pour représenter le processus des droites sécantes qui « se rapprocheraient » du point pour « devenir » une droite tangente (voir Figure 4.31). Cette vision plutôt processuelle du concept de dérivée provient surement de la façon dont elle a été vue en classe. Cette vision est d'ailleurs décrite dans la section 2.5.3 du cadre théorique. Il est souligné que le travail en classe propose parfois des représentations graphiques institutionnelles impliquant le déplacement d'une sécante ou la présence d'une suite de sécantes dont l'écart entre les deux points d'intersection de la droite avec la courbe serait de plus en plus petit.

Figure 4.31 Gestes de Guillaume pour décrire ce qui se passe autour du point anguleux (Séance 5, p. 76–77)

Guillaume évoque même dans son enquête l'utilisation du concept de limite. C'est d'ailleurs à l'aide de ce concept que les garçons se rendent compte que la limite à gauche et la limite à droite de la fonction au point anguleux seront différentes. Cela leur permet de conclure que la dérivée n'existera pas en ce point. Le déroulement de cette réflexion montre une certaine coordination de différentes représentations graphiques qui permet aux participants d'émettre une conjecture assez clairement appuyée sur la dérivabilité de la fonction au point anguleux. Par contre, il reste encore une autre coordination primordiale à effectuer, c'est-à-dire la traduction de cette unité signifiante pour la formation de la RG de la fonction dérivée. Pour ce faire, les étudiants de l'équipe semblent d'accord pour représenter ce point particulier par un point ouvert dans la RG de la fonction dérivée. On le voit d'ailleurs sur la RG produite par Guillaume (voir Figure 4.30).

Enfin, la façon dont les trois garçons, en particulier Antoine et Guillaume, traitent cette information retirée du graphique montre une certaine compréhension des concepts de dérivabilité, de limite et de continuité.

Finalement, l'équipe des garçons ne va pas très loin dans la résolution de ce problème. Ils ne discutent pas, par exemple, de la « forme » de la première partie de la fonction dérivée (sur l'intervalle [-10, 10] environ) ni de la forme de la courbe après le point anguleux, contrairement à ce que fait l'équipe des filles.

4.4.2.3 Conclusion sur le modèle du processus de compréhension pour l'équipe d'Antoine, Guillaume et Jérémie

Le modèle du processus de compréhension d'Antoine, Guillaume et Jérémie montre bien l'aspect processuel de leur compréhension. En effet, le concept de dérivée est sollicité de différentes manières lors de la résolution du problème en contexte d'une population de bactéries, de celui de Selden *et al.* (1989) et du dernier problème dans le registre graphique. Au départ, il y a une identification de certaines représentations de la dérivée, mais ils sont incapables de reconnaitre son utilité ou de coordonner les différentes représentations qu'ils arrivent à produire de façon à faire avancer la résolution de leur problème. Le traitement de la table de valeurs par la recherche des écarts relève un aspect important du processus vers le concept de dérivée. Je parle ici du passage du taux de variation moyen (qu'ils arrivent à calculer dans la table de valeurs pour ce problème) vers le taux de variation instantané (qu'ils ne complètent pas dans ce problème). Ce travail sur la table de valeurs est un élément très intéressant qui ressort du modèle de ces trois participants. En effet, on peut remarquer que le registre tabulaire a été très « aidant » pour que les étudiants entament une réflexion sur le taux de croissance (moyen, dans ce cas).

Ce modèle est également très riche pour mettre en lumière l'importance du travail d'équipe. En effet, il a été mentionné qu'Antoine et Guillaume faisaient un travail assez complémentaire sur les représentations. Antoine s'illustrant notamment pour faire de bons traitements sur des représentations données, et ce, dans différents registres, bien qu'il semble plus à l'aise dans le registre algébrique. Guillaume, quant à lui, a pu produire des représentations dans différents registres à partir des informations trouvées dans les questions ou d'autres représentations disponibles. Ils formaient donc une bonne équipe pour faire avancer une résolution de problème. Par contre, de part et d'autre, ils avaient parfois de la difficulté à interpréter correctement les RG ou RA vers des RV. Encore une fois, en équipe, ils arrivaient aussi parfois à coordonner correctement tous ces registres.

4.4.2.4 Modèle du processus de compréhension d'Antoine pendant la séance 5

Le processus de compréhension d'Antoine pendant cette séance s'avère particulièrement intéressant. On peut y voir une réelle évolution de sa compréhension du concept de dérivée. Au début, il arrive à produire plusieurs représentations liées au concept de dérivée, certaines étant erronées ou incomplètes, mais d'autres étant tout à fait correctes. Or, Antoine ne peut coordonner ces représentations dès le départ. Il s'agit là d'un très bon exemple d'un étudiant qui peut produire des représentations liées à un certain concept, mais qui ne peut pas encore les coordonner, et on peut clairement voir que cela a un impact important sur la possibilité qu'il a d'utiliser ce concept afin de résoudre des problèmes. Je vais relever deux exemples de ce comportement : sa propre perception de sa compréhension du concept et les différentes RV qu'il produit. Par contre, pendant cette séance, une évolution de sa compréhension a lieu, dans le sens où il arrive finalement à coordonner des représentations de la dérivée, et ce, dans différents registres (verbal, algébrique et graphique).

D'abord, par lui-même, à un certain moment, Antoine s'exprime sur sa compréhension du concept de dérivée (voir Extrait 4.14). Il soulève qu'il a le sentiment de bien pouvoir « calculer » une dérivée, mais qu'il ne voit pas en quoi ce concept peut lui être utile ou de quelle façon il peut intervenir avec d'autres concepts. C'est d'ailleurs exactement ce qu'on a pu observer dans l'analyse de la résolution du problème proposé faite précédemment dans cette section. Antoine était assez habile pour traiter algébriquement des RA de la dérivée ou qui faisaient intervenir la dérivée, mais il avait de la difficulté à produire ces RA de départ qui demandaient d'utiliser le concept de dérivée en coordonnant différentes représentations de ce dernier. Notamment, la RA où la dérivée était représentée par le taux de variation de la droite tangente à la fonction f quand $x=3$ et la RA où la fonction f était dérivée et évaluée pour $x=3$ devaient être coordonnées.

Antoine : La dérivée, j'étais comme, en m'en venant ici, j'étais comme, je me disais genre, on va travailler ça probablement sauf que **je sais faire des calculs, mais pour moi, ce n'est pas concret**. Genre, **je ne sais pas comment je l'appliquerais**!
Sarah : Bien c'est… Est-ce que tu as remarqué que… au… dans les premiers ateliers… que depuis le début en fait, ce sont des dérivées qu'on fait?
Antoine : **C'est le nom d'une équation que je suis en train de résoudre. C'est juste ça pour moi en ce moment.**
Sarah : OK!
Antoine : **Je ne sais pas comment elle fonctionne avec autre chose**.

Extrait 4.14 Difficulté d'Antoine à comprendre le concept de dérivée (Séance 5, p. 33)

Antoine confirme ce sentiment à au moins deux autres occasions. Lors d'une discussion en équipe à laquelle je participe, Guillaume produit la RA nécessaire pour résoudre le problème qui implique le concept de dérivée. Antoine dit alors : « Tu vois, comme je te disais [en se référant à la discussion présentée dans l'extrait 4.14] ! Genre là, je comprends pourquoi il fait ça, mais je n'aurais jamais pensé à le faire parce que… je ne sais pas pourquoi… » (Séance 5, p. 36). Puis, lors de la discussion autour de la résolution du deuxième problème, nous discutons de la dérivabilité en un point en particulier du graphique. Il dit : « Je ne comprends pas, mais je sais [que c'est non dérivable] » (Séance 5, p. 82).

De plus, Antoine semble confus par rapport à différentes représentations verbales du concept de dérivée. Plus précisément, il confond les termes associés aux concepts « pente », « dérivée », « tangente », « fonction dérivée ». On peut par exemple l'entendre produire des RV comme « La pente de la dérivée, c'est la tangente », « La droite dérivée c'est la pente de la tangente », « La fonction dérivée, c'est la pente d'une tangente, non, de toutes les tangentes » pour parler du concept de dérivée. Antoine reconnait différentes RV associées au concept de dérivée. Or, il n'arrive pas à coordonner ces représentations à l'intérieur d'un même registre afin de produire une RV cohérente du concept de dérivée. En effet, des RV comme « pente de la dérivée » ou « droite dérivée » ne sont aucunement cohérentes. Ces RV sont un indice qu'Antoine est en plein processus de construction du concept de dérivée, il reconnait certaines représentations qui y sont liées, mais ne les coordonnent pas. Les représentations d'Antoine sont des représentations fonctionnelles qui sont produites dans l'action, face à la résolution d'un problème. Leur évolution est intéressante et est possiblement liée à la communication entre pairs et avec moi[33].

Toutefois, à la fin de la séance, Antoine commence déjà à mieux utiliser et coordonner différentes RV et RA de la dérivée. En effet, à la fin, comme Jérémie avait travaillé plutôt seul sur sa démarche algébrique, Antoine tente de lui expliquer ce que Guillaume et lui ont fait (Extrait 4.15).

Antoine : C'était que la tangente en fait… c'est de trouver **la pente de la tangente, ça donnait la dérivée**.
Jérémie : Ouais.
Antoine : Eh… avec **la dérivée**, tu pouvais trouver eh… avec la **droite quadratique**, bien **la pente, la fonction quadratique**, tu utilisais ta dérivée pour trouver eh… Bien tu faisais **la dérivée de la quadratique**. Ça donnait x^{2-1} et ton exposant, tu le ramenais en avant [$2x^{2-1}$].
Jérémie : Ok ouais.
Antoine : Bien, je ne sais pas si tu te rappelles de la dérivée pour cette fonction-là?
Jérémie : Ouais.
Antoine : Bien dans le fond, tu avais $b2x^{2-1}$ ce qui te donnait au final $\boldsymbol{2bx}$.
Jérémie : Ouais.
Antoine : Donc, **ça, c'est ta dérivée**. Ta dérivée pour toutes les droites.

Extrait 4.15 Explication de l'utilisation de la dérivée par Antoine à Jérémie (Séance 5, p. 57)

Dans cet extrait, Antoine reprend quelques RV qui sont un peu plus claires cette fois. Il semble maintenant pouvoir coordonner les RV « dérivée », « pente », « dérivée de la fonction quadratique ». En plus, il coordonne ces RV avec la RA de la fonction dérivée de la fonction *f(x)*. Il y a tout de même encore quelques erreurs, par exemple la RV « ta dérivée pour toutes les droites », à la fin de l'extrait. Cette RV n'est pas cohérente.

---

[33] Cet aspect de l'évolution des représentations liée au contexte de travail d'équipe est abordé dans la section 5.2.1 de ce document.

De plus, il faut souligner qu'Antoine reconnait deux RA d'une fonction dérivée. Lorsque Guillaume produit la fonction dérivée $f'(x) = 2bx$, Antoine souligne qu'il est possible de calculer la dérivée avec une RA impliquant une limite ou plus simplement avec une « formule » (Extrait 4.16). Il s'agit là d'un autre indice qui suggère qu'Antoine semble plus à l'aise avec le registre algébrique.

> Antoine : Je sais que la limite de tend vers 0 de *f(x+h)* moins *f(x)* sur *h* [$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$], ça, ça va être la dérivée...?!
> Sarah : Ok.
> Antoine : Mais **la façon plus simple c'est cette fonction-là** [il pointe la RA « $2bx^{2-1}$ »]!

Extrait 4.16 Reconnaissance par Antoine de deux RA de la dérivée (Séance 5, p. 36)

À une autre occasion, Antoine montre qu'il a de la difficulté à produire et interpréter la dérivée dans le registre graphique. En effet, lors de la tentative des étudiants à résoudre le deuxième problème de la séance, Antoine dit : « Bien genre, on a commencé les dérivées, mais je ne pense pas qu'on a appris à les tracer encore ! » (Séance 5, p. 66). Pourtant, lors de l'introduction de la dérivée en classe, l'enseignante d'Antoine a bel et bien donné quelques RG dans différents exemples liés au concept de dérivée. Or, il a raison sur le fait que l'enseignante n'a pas donné « de marche à suivre » ou de « méthodes » afin de produire ou faire l'analyse d'un graphique (cela sera plus explicitement abordé en classe, mais plus tard dans la session). Ainsi, Antoine ne se sent pas à l'aise d'aborder ce genre de problème. Il ne peut pas se fier à ses connaissances liées au traitement d'une RG qu'il aurait pu voir ailleurs que pendant nos séances.

Finalement, malgré sa réticence de départ à travailler et à réfléchir à partir d'une RG pour en produire une autre, le processus de compréhension d'Antoine semble être bonifié par ce travail dans le registre graphique. En effet, la réflexion autour du point anguleux, par exemple, lui permet de faire le lien entre les concepts de limite, de continuité et de dérivabilité, coordination qui est essentielle à la compréhension du concept de dérivée.

4.5 Des éléments plus généraux du processus de compréhension de la dérivée

Suite à la construction des modèles collectifs de processus de compréhension de la dérivée, quelques éléments plus généraux, communs à ces deux modèles, ressortent. En particulier, trois éléments seront étayés dans les prochaines sections : le statut particulier du registre algébrique ; l'apport important du registre verbal pour aider à la recherche de sens des concepts en jeu ; et l'importance des concepts collatéraux à celui de la dérivée, le taux de variation et la tangente.

4.5.1 Le statut particulier du registre algébrique

Le statut particulier accordé par les étudiants au registre algébrique est un élément qui ressort des modèles construits. Deux aspects permettent de lui donner ce statut : un déclencheur à la reconnaissance du concept de dérivée et un apport de rigueur ou de validité à une démarche du point de vue des étudiants.

À plusieurs reprises, lors des séances d'enseignement, des représentations algébriques ont semblé être un déclencheur pour les étudiants à la reconnaissance du concept de dérivée. Par exemple, pendant la résolution du problème de la séance 4 par l'équipe d'Annie, Karine et Judith, elles évoquent le concept de dérivée pour la première fois lorsqu'une représentation algébrique d'une fonction leur est proposée dans les questions. Or, il a été identifié que la question posée, à ce moment dans la résolution du problème, n'est pas en lien direct avec le concept de dérivée. En effet, la question en lien avec le concept de dérivée est plutôt la suivante, celle qui est proposée par une représentation verbale. Ainsi, dans le modèle construit, les étudiants semblent faire une association entre l'identification d'une représentation algébrique d'une fonction et la possibilité d'utiliser le concept de dérivée. Il a déjà été mentionné, dans le chapitre I, que le registre algébrique a un statut important dans l'enseignement du calcul différentiel (Dufour, 2011). Ainsi, on peut penser que le travail fait en classe sur le concept de dérivée l'est principalement dans le registre algébrique. Cela pourrait expliquer pourquoi les étudiantes font une association entre RA et utilisation de la dérivée dans la résolution de ce problème.

Un autre aspect qui permet de donner un statut particulier au registre algébrique est le point de vue de certains étudiants par rapport à ce dernier, comme étant garant d'une information précise et véritable. On voit bien ressortir ce regard sur le registre algébrique chez Antoine en particulier. Par exemple, à un moment de la séance 5, Antoine compare sa démarche de résolution, faisant intervenir des RA et des RG, à celle de Jérémie qui présente une « impressionnante », mais erronée, démarche dans le registre algébrique (voir section 4.4.2.2, p. 195 et Annexe B). « Wow! À comparer à mon torchon… c'est vraiment… good! » (Séance 5, p. 55) Avant même de comprendre la démarche de Jérémie, Antoine met de côté la sienne et semble accepter d'emblée celle de Jérémie. À un autre moment, lors de la séance 2, Annie a produit une RG qui représente une « esquisse » de la situation en jeu. Or, elle refuse d'utiliser son graphique pour trouver la valeur correspondante à une valeur de x donnée dans la situation. Je lui propose alors de faire au moins une estimation à partir de son graphique. Elle répond : « Dans le fond, il faut juste que je trouve une fonction [elle parle de la formule d'une fonction, RA] pour pouvoir analyser » (Séance 2, p. 9). Cet extrait laisse croire que, pour Annie, la seule façon de trouver deux valeurs correspondantes est d'effectuer le traitement d'une RA.

En bref, ce point de vue sur le registre algébrique par les étudiants observés peut s'ajouter aux conclusions d'autres études qui mettent de l'avant le statut particulier donné au registre algébrique dans l'enseignement ou dans les manuels utilisés en calcul différentiel.

4.5.2 Le registre verbal : déclencheur d'une recherche de sens et de cohérence

Les séances mises en place et observées dans ce TE permettent de reconnaitre le grand apport du registre verbal dans les processus de compréhension des étudiants. En effet, à plusieurs reprises, la nécessité — venant du contexte de travail d'équipe, entre autres — des étudiants de produire une représentation verbale de leurs idées associées à différents concepts (verbaliser ou mettre en mots) les amène à devoir réfléchir sur les représentations en jeu et à dégager une cohérence entre les représentations. Cette réflexion peut les mener à une certaine coordination des représentations ou à ressortir des éléments parfois contradictoires.

L'épisode de la séance 4, pendant laquelle j'interviens assez directement pour aider les garçons à donner du sens aux traitements algébriques qu'ils ont menés à bien par la formulation d'une RV, est un bon exemple (voir section 4.4.1). En effet, observés de façon strictement « algébrique », les traitements des RA par Antoine et Guillaume semblent tout à fait en cohérence avec la situation. Or, quand vient le temps d'interpréter ces nouvelles RA, c'est-à-dire de les convertir dans le registre verbal, les étudiants ont peine à produire des RV. Celles produites expriment une confusion réelle entre le concept de fonction dérivée et de dérivée en un point. Cette confusion n'aurait pas pu être identifiée s'ils en étaient restés aux représentations algébriques, du moins, dans cette partie du problème.

On peut observer le même genre de difficulté lorsqu'Annie tente de verbaliser (convertir en RV) les calculs effectués dans la table de valeurs proposée au début de la séance 4 (voir section 4.3.1, p. 116). Elle a beaucoup de difficultés à nommer ou interpréter en contexte les valeurs qu'elle a calculées à partir de la table de valeurs. L'extrait 4.3 montre bien la difficulté d'Annie à parler de ses résultats : « nombre de bactéries... eh moyen là, je ne sais pas trop quoi, la différence entre les deux [nombres de bactéries], elle commence à diminuer » (Extrait 4.3).

Plusieurs exemples de ce type mettent en lumière l'importance du registre verbal pour dégager une cohérence ou très souvent un manque de cohérence entre différentes représentations. C'est que le registre algébrique, par exemple, qui amène un certain confort aux étudiants (voir section précédente, 4.5.1) ne peut pas à lui seul établir une compréhension profonde des éléments en jeu. En effet, selon la position sur la compréhension adoptée dans cette thèse, pour comprendre, on doit coordonner différentes représentations de registres divers. Or, au-delà de cette nécessité, les modèles construits permettent d'identifier le registre verbal comme étant un élément central de cette coordination. En effet, c'est lorsque les étudiants sont amenés à produire tel type de représentations que l'on peut observer si la coordination entre les représentations est cohérente ou non.

Enfin, la place particulière du registre verbal, repéré dans cette thèse pour le processus de compréhension de la dérivée, pourrait certainement être élargie à d'autres processus de compréhension liés à d'autres concepts. En effet, ce registre est, le plus souvent, déclencheur d'une coordination entre des représentations. Ce rôle de premier plan a ainsi une importance dans le choix de l'approche utilisée pour l'enseignement ; soit, la nécessité de donner l'opportunité aux étudiants de produire des représentations verbales, qu'elles proviennent de conversion à partir d'autres représentations ou qu'elles provoquent une coordination entre différentes représentations en jeu dans la situation. Il y a là un prolongement possible à étudier plus en profondeur.

4.5.3 Les concepts collatéraux : les cas du taux de variation et de la tangente

Il a déjà été souligné (voir chapitre II section 2.5.3) qu'un intérêt pour le processus de compréhension du concept de dérivée concerne évidemment toute une constellation de concepts qui y sont liés. Les concepts de taux de variation et de tangente ont particulièrement capté mon attention lors de la construction des modèles présentés préalablement.

➤ Le taux de variation : un obstacle dans les processus de compréhension observés

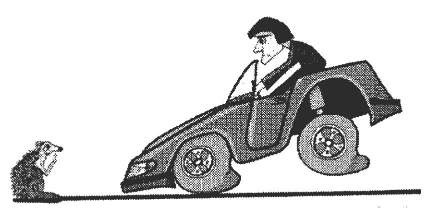
Le concept de fonction est le concept lié à la dérivée le plus évident, s'il n'y a pas de fonction, on ne peut réfléchir à sa dérivée. Or, au-delà du concept de fonction, celui de taux de variation semble être particulièrement important dans le processus de compréhension des étudiants. Malgré le fait que les étudiants travaillent ce concept depuis plusieurs années[34], ils semblent avoir beaucoup de difficulté à reconnaitre, produire et coordonner différentes représentations de ce concept. L'idée n'est pas ici de produire un modèle de processus de compréhension centré sur le concept de taux de variation. L'objectif de cette section est de mettre de l'avant la confusion autour du concept de taux de variation observée lors des séances du TE. Cette confusion m'amène à identifier ce concept comme un obstacle dans les processus de compréhension observés. Pour illustrer cette confusion et les obstacles qu'elle a pu provoquer, trois

[34] Au Québec, le concept de taux de variation est vu à la première année du deuxième cycle du secondaire, bien qu'il ait déjà été touché plus intuitivement préalablement.

exemples sont présentés : des extraits du travail effectué lors des première et deuxième séances sur un problème visant à provoquer un passage du taux de variation moyen au taux de variation instantané, des extraits de résolution du problème dans le contexte de croissance d'une population de bactéries (séance 4) et des extraits de résolution du premier problème de la séance 5 dans un contexte purement mathématique. Il faut souligner que l'analyse qui suit se concentre sur le concept de taux de variation sans s'attarder particulièrement aux contextes dans lesquels les problèmes à résoudre sont proposés. Ces contextes font l'objet d'une analyse présentée à la section 5.1 de ce document. Or, il est tout de même difficile d'en faire complètement fi.

Voici un rappel de la question posée lors des séances 1 et 2 :

Distance de freinage



Une voiture roule sur l'autoroute. Le conducteur aperçoit un animal à environ 70 mètres devant lui et appuie tout de suite sur les freins. Il s'est arrêté après 4 secondes et n'a pas frappé l'animal de justesse.

Si l'animal avait été plus près, disons à 35 mètres, et que le conducteur n'avait pas pu l'éviter, à quelle vitesse l'aurait-il frappé?

Figure 4.32 Situation proposée pour les première et deuxième séances du TE

Les extraits de discussions (dans lesquels il y a production de différents types de représentations) qui illustrent la difficulté des étudiants à travailler avec le concept de taux de variation sont nombreux. J'ai décidé d'en retenir un, assez complet, qui met en lumière une discussion de l'équipe des garçons lorsqu'ils tentent de produire une RG cohérente avec la situation, et surtout lorsqu'ils tentent d'interpréter les différentes unités signifiantes de la situation. Pour se remettre en contexte, les étudiants avaient finalement, non sans difficulté, choisi d'étudier la distance entre la voiture et l'animal (qui diminue) en fonction du temps. Ainsi, ils ont pu produire des RA et RN pour obtenir le taux de variation moyen entre le moment du début du freinage et 4 secondes après. Ils obtenaient une valeur de -17,5 m/s. Toutefois, l'interprétation de cette RN s'avère très difficile, comme on peut le lire dans l'extrait 4.17.

> Guillaume : Ça [$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$], c'est la formule de la pente?
> Jérémie : Ouin
> Guillaume : C'est une pente.
> Jérémie : Mais si tu as la pente, tu as la vitesse.
> [...]
> Jérémie : Si tu as ton inclinaison, tu as ta vitesse.
> Guillaume : Ouais, mais d'abord, on prendra deux points, n'importe lesquels...
> Jérémie : Ben, on prend le premier pis le dernier. On va savoir combien ça a pris de temps. Mettons qu'on l'essaie pour le fun!
> Guillaume : Ok ouais!
> Jérémie : Tu m'as dit que c'était quoi? C'est *y* deux...
> Guillaume :... moins *y* un sur *x* deux...
> Jérémie :... moins *y* un sur *x* deux moins *x* un.
> Guillaume : Ben divisé là!
> Jérémie : Ça fait que mettons, *y* deux, ce serait 0 moins...
> Guillaume :... 70...
> Jérémie : C'est 70...
> Guillaume : ... sur...
> Jérémie : *x* deux, ça va être 0 moins *x* un... eh, pas 0, 4 excuse!
> Guillaume : Ouais, 4 moins 0.
> Jérémie : Ça fait que ça me donne moins 70 divisé par 4... attends un seconde...
> Antoine : 17,5
> [...]
> Jérémie : 17,5. 17,5 sur... une seconde. Ça, ça veut dire qu'on fait 17,5 mètres par seconde.
> Antoine : Moins 17,5 mètres.
> [...]
> Guillaume : Attends! On PERD 17,5 mètres par...
> Jérémie :... par seconde ouais! Ouais c'est ça. Ça fait que là, on veut savoir à quelle vitesse on allait plus avant... non?!? Attends minute...
> Antoine : C'est ça, c'est que c'est une perte de vitesse.
> Guillaume : Ouais. On freine. Parce qu'on freine.

Extrait 4.17 Production de différentes représentations d'un taux de variation moyen (Séance 1, p. 17–20)

D'abord, au début de l'extrait 4.17, il y a coordination entre la formule et ce qu'elle représente dans un graphique, c'est-à-dire une pente. De plus, Jérémie coordonne même les termes « pente » et « inclinaison » de la droite dans le graphique. Il utilise en effet, les deux termes comme synonymes. Il y a aussi une conversion à partir de la représentation graphique (RG) vers la représentation algébrique (RA) de la « formule de la vitesse » pour pouvoir faire le calcul de cette « pente ».

Les étudiants montrent donc une bonne utilisation et coordination de quelques représentations du concept de taux de variation. Il y a aussi, dans cet extrait, l'interprétation du résultat du calcul d'un taux de variation moyen dans le contexte de la situation, soit l'interprétation de la RN -17,5 m/s. Les étudiants tentent donc une conversion de la RA/N à une RV en contexte. Au début, la pente est associée à une vitesse : « tu as la pente, tu as la vitesse. » Jérémie reconnait le taux unitaire, « 17,5 sur une seconde… ça veut dire qu'on fait 17,5 par seconde ». Ensuite, Antoine ajoute le « moins » devant le résultat ce qui amène Guillaume à l'interpréter comme une perte de distance, « on perd 17,5 mètres par seconde ». Par contre, Antoine nomme cette perte plutôt comme une perte de vitesse. Ainsi, la pente devient une décélération plutôt qu'une vitesse. Ce qui semble logique pour tout le monde puisque la voiture est en train de freiner. Il est vrai que l'unité de mesure et le taux unitaire rendent l'interprétation difficile. Par exemple, -17,5 m/s peut amener l'idée que c'est la vitesse qui diminue à chaque seconde. Or, si c'était le cas, ce serait -17,5 m/s par seconde (-17,5 m/s /s) que l'on perdrait et non 17,5 m par seconde. Il est vrai qu'il est facile de se mélanger entre les deux interprétations étant donné qu'on parle de mètres par seconde et que cette représentation est fortement liée au concept de vitesse. C'est facile d'être tenté de l'interpréter en une seule « entité » (m/s) reliée à un seul concept (la vitesse).

Bien qu'ils n'interprètent pas le taux de variation correctement, j'ai l'impression que Jérémie voit bien que les variables représentées par les axes sont la distance et le temps.

Il en donne quelques indices dans l'extrait suivant (Extrait 4.18). En effet, dès le début de l'extrait, Jérémie reprend Guillaume lorsqu'il dit que l'animal se ferait frapper à une vitesse « 2 fois moins vite » ce qui laisserait croire que la variable dépendante de la situation, dans ce cas, serait la vitesse, et donc que de passer de 70 à 35 voudrait dire que la voiture passerait de 70 m/s à 35 m/s. Cette idée est fausse puisqu'on cherche justement une vitesse à une distance de 35 mètres et que, pour ce faire, on observe la relation entre le temps et la distance, et non entre le temps et la vitesse. Ainsi, Jérémie reprend Guillaume en parlant plutôt de « deux fois moins loin », ce qui s'applique en effet dans le cas de la situation où l'on passe d'un animal frappé à une distance de 70 mètres à celle d'un animal frappé à une distance de 35 mètres. Les trois participants poursuivent leur discussion dans l'extrait 4.18.

Guillaume : Mais... ok, on n'a pas la vitesse?! Mais qu'est-ce qu'on peut faire? On peut mettre **x comme variable pour la vitesse**. [Il croise ses mains, comme pour faire les axes d'un plan cartésien] Parce qu'on ne l'a pas... Ça fait que là admettons qu'il l'aurait frappé genre **2 fois moins vite**, ça serait eeehhh...

Jérémie : **Pas deux fois moins vite, deux fois moins loin.**

Guillaume : On va dire deux fois moins loin, ça serait... **moins deux x**, on va dire! Quelque chose du genre.

Jérémie: Ben non, parce que **moins deux x, ça va faire ta vitesse qui est altérée. Ce n'est pas ta vitesse qui est altérée, c'est ton... ton point de... départ si on veut parce que dans le fond ta vitesse, ce serait moins x...** eh pas ta vitesse, ta décélération serait **moins x plus admettons ta distance qui est 70**, je sais pas, quelque chose comme ça! Là on veut savoir **l'autre, ce serait plus 35**. En tout cas, je ne sais pas... mais c'est sûr que c'est une décélération. Il faut que ce soit une **pente négative parce que ta vitesse, elle varie en négatif**. Pis la seule chose qui te sert c'est ta distance avec... c'est ton plus 70.

Guillaume : Ça fait que c'est distance plus le temps. Ça fait que ça [il pointe le nom qu'il a donné à l'axe des ordonnées sur son graphique], on ne peut pas en faire juste une variable et la mettre sur l'axe?! Comme ça...

Antoine : Ça c'est la vitesse [il pointe l'axe des ordonnées].

Jérémie: C'est ta vitesse. Ça va être en mètres/seconde comme on avait tantôt. [inaudible]

Antoine : [Inaudible] ça serait 17,5 mètres/seconde en fait mais... ça nous... ça nous apporte pas grand-chose.

Jérémie : Attends là! Si tu fais moins mettons ton *x* qui serait ton 17,5... ok mettons 17,5 plus 70... si je fais...parce que ça dans le fond ça revient à... [Il écrit en même temps qu'il réfléchit tout haut.]... Ah ce n'est pas ça... Parce que ta décélération, c'est 17,5, ça a pris 4 avant de tomber...ça fait que quand tu égales... ah c'est pas ça... c'est pas ça... eille j'ai un blanc...

Guillaume : Mmmmm.... J'ai une idée les gars!

Jérémie: Quoi?

> Guillaume : Je pense que je sais. [Il réfléchit.] Ça c'est la vitesse ok? [Il pointe l'axe des ordonnées sur son graphique.] On a dit qu'il partait à 70 mais non… il part peut-être déjà…
>
> Jérémie : Non, la distance est à 70, ce n'est pas sa vitesse qui est à 70.
>
> Guillaume : Ok.
>
> Jérémie : Ce serait la distance parce que la vitesse on la conn…nait pas, techniquement là!
>
> Guillaume : Ben [inaudible] ce n'est pas la distance…
>
> Jérémie : Ben si tu mets 70 [Guillaume met 70 sur l'axe verticale de son graphique], ce serait la distance qu'il faudrait que tu mettes.
>
> Guillaume : oui oui oui…
>
> Jérémie : Mais toi, tu veux dire l'axe du… diagramme qu'on devrait avoir devrait être différent.
>
> Guillaume : Ouais. Parce que mettons la vitesse, mettons que tu roules à… on va dire mettons que c'est fini là, on ne sait pas combien il roule… là, à un certain moment, arrivé à 70 mètres, l'axe serait à 70 mètres… mais non, ça ne marchera pas… chaque fois qu'il avance, ça ralentit… du genre jusqu'à 0 c'est indéterminé… merde…
>
> Jérémie [en regardant son cahier] : Ah, **je ne peux pas faire plus 70 parce que la vitesse, je ne peux pas additionner** […]

Extrait 4.18 Discussion entre Guillaume, Jérémie et Antoine (Séance 1, p. 21–24)

Dans cet extrait, on peut penser que les trois garçons tentent d'effectuer une conversion vers une RA de la situation, c'est-à-dire vers une équation qui la représenterait. Comme les étudiants pensent encore que la situation serait représentée par une droite, leur discussion implique le concept de taux de variation. De plus, en faisant cet exercice de conversion, ils travaillent aussi l'interprétation (le passage à la RV) de la RA et la reconnaissance de certaines unités significatives de cette représentation. Guillaume commence en produisant une RV dans laquelle si x est la vitesse, alors on s'intéresse au moment où la voiture aurait frappé l'animal « 2 fois moins vite » (passant de 70 à 35). Or, Jérémie voit dans cette interprétation un problème. En effet, le 70 et le 35 sont des données de distance et non de vitesse. Jérémie préfère donc parler de « 2 fois moins loin » ce qui est une RV correcte de la situation.

Guillaume accepte cette interprétation et la convertit en RA, soit « -2x ». Ici, la conversion de la RV « une distance qui serait deux fois moins loin » à la RA « -2x » n'est pas cohérente avec la situation. D'abord, il veut appliquer la « règle » du « deux fois moins loin » à toutes les valeurs possibles de la variable en utilisant le x (une valeur quelconque dans le domaine de la variable indépendante) dans son énoncé. Or, cette situation (deux fois moins loin) n'est applicable qu'au changement entre 70 mètres et 35 mètres, soit les deux données précises auxquelles on s'intéresse. De plus, Guillaume fait également l'erreur dans la transformation d'un énoncé en mots en RA qui est celle de prendre le « deux fois moins » comme étant un multiplicateur et non un diviseur comme il serait correct. En effet, si l'on parle de deux fois MOINS loin, on doit « diminuer/diviser » la variable en jeu. Cette conversion aurait donc dû se traduire par *x/2* ou même mieux directement *70/2* puisque cette « règle » ne s'applique pas à l'ensemble de la fonction, mais bien au lien entre deux données précises qui nous intéressent. Jérémie intervient après que Guillaume ait produit sa RA. Il reconnait que le *2x* n'est pas cohérent dans la situation puisque Guillaume avait défini le x comme étant la vitesse. Cependant, si Jérémie veut être cohérent avec sa réflexion précédente, le 2 ne doit pas « affecter » la vitesse, mais plutôt la distance. Or, une grande confusion règne entre les représentations produites dans leur discussion. Bien que Jérémie réussisse à voir que le *2x* n'a pas vraiment de sens, il n'arrive pas à produire une RA adaptée à la situation. Jérémie en arrive à proposer cette RA : $-x + 70$. Jérémie semble conserver la définition que Guillaume a donnée à x, soit la vitesse. Il se réfère probablement à la RA institutionnelle d'une fonction affine, soit $y=ax+b$. Il ajoute le signe négatif et interprète le tout comme étant la décélération. Il ajoute ensuite 70 à son équation. Il semble interpréter ce 70 comme étant la distance initiale, ce qui est bien le cas dans la situation où la distance est la variable dépendante. En effet, dans l'équation d'une droite, la constante ajoutée représente l'ordonnée à l'origine, soit la valeur de la variable dépendante quand la valeur de la variable indépendante est 0. Dans le contexte de la situation, le 70 est bel et bien la distance associée au temps 0, si la situation représentée est la distance selon le temps et si la distance est définie comme étant la distance entre la voiture et l'animal qui diminue par rapport au temps.

Enfin, ils s'embrouillent à travers les trois variables en jeu dans le problème (voire quatre, si l'on ajoute la décélération). Ils jonglent avec les données, qui ne sont pas associées aux mêmes variables (70 à la distance, -17,5 à la vitesse, par exemple), sans vraiment démêler leur rôle et les relations entre chacune des variables. Bien sûr, la situation en tant que telle et le contexte dans lequel le problème est posé font partie des éléments qui expliquent leur difficulté. Or, on peut tout de même identifier une difficulté liée au concept de taux de variation.

Le deuxième exemple a déjà été discuté dans les sections 4.3.1 et 4.4.1 de ce document. En effet, le contexte particulier d'une décroissance de population de bactéries amène les étudiants à penser au taux de variation en termes de taux de croissance. De plus, une table de valeurs a été proposée dans l'énoncé du problème. Les deux équipes ont alors traité cette table de valeurs afin de ressortir les écarts entre les valeurs de la table et même, pour certaines valeurs, le taux entre l'écart des valeurs correspondantes. Ce traitement consiste en fait à calculer différents taux de variation moyens. Les étudiants ont même pu identifier que le taux de variation moyen (sans le nommer directement de cette façon) était de plus en plus petit, et ce, même si la population de bactéries (variable dépendante de la situation observée) augmentait. Ce travail avait été extrêmement difficile lors des séances 1 et 2 dans le contexte de temps, déplacement et vitesse. Les étudiants y sont pourtant arrivés. Je crois que le contexte du problème, mais également, et surtout, le registre tabulaire y sont pour quelque chose dans cette évolution de leur processus de compréhension. En effet, les étudiants sont familiers avec ce genre de traitement dans la table de valeurs. C'est de cette façon qu'ils ont travaillé dans ce registre au secondaire (Corriveau, 2013). Cela serait possiblement un élément à exploiter pour faciliter le passage du taux de variation moyen au taux de variation instantané qui semble être un obstacle pour les étudiants.

Le troisième exemple est extrait du travail fait par l'équipe d'Antoine, Guillaume et Jérémie pendant la résolution du premier problème proposé lors de la cinquième séance. Une difficulté des étudiants à reconnaitre le concept de taux de variation dans une RA d'une droite avait été identifiée dans cette résolution de problème (voir section 4.4.2.1, p. 175). En effet, les étudiants devaient construire une équation qui égalait, d'une part, le taux de variation de la droite dite tangente en un point donné d'une fonction f et la dérivée de cette fonction en ce point. Dans cet exemple, au moins pour la première partie de l'équation à construire, les étudiants sont censés être en terrain connu : identifier la valeur du taux de variation dans la représentation algébrique d'une fonction affine ; ce concept fait partie du programme de secondaire, dès la première année du deuxième cycle. Or, les Tableau 4.5 et Tableau 4.6 montrent bien la difficulté qu'ont Antoine, Guillaume et Jérémie à faire cette identification. Cette difficulté à reconnaitre le concept de taux de variation dans une représentation algébrique d'une fonction affine provoque un obstacle à la résolution de ce problème, et ce, même s'ils ont pu calculer (à partir d'une RA) la dérivée de la fonction f au point donné. On retrouve d'ailleurs le même type de questionnement dans l'équipe d'Annie, Josée et Karine (voir section 4.3.2.1, p. 128).

Enfin, ce TE m'a permis d'observer que le passage du taux de variation moyen à un taux de variation instantané, abordé dans l'enseignement du calcul différentiel, semble provoquer plus de difficulté qu'on pourrait le penser chez les étudiants. Des difficultés de ce passage ont déjà été identifiées par rapport aux concepts de droites sécantes et de droites tangentes ou de taux de variation moyen vers un taux de variation instantané (voir chapitre II, section 2.5.3, p. 63). En effet, il a été mentionné, dans la section 2.5.3, que les études de Biza et Zachariades (2010), par exemple, identifient un changement de point de vue important quant au concept de tangente tel que vu au secondaire par rapport à la façon de le travailler au cégep. Dans le TE mis en place pour cette thèse, j'ai pu observer des difficultés par rapport au concept de taux de variation. Or, au-delà de la difficulté déjà identifiée de passer d'un taux de variation moyen à un taux de variation instantané, ou d'une droite sécante à une droite tangente, le passage de l'étude du taux de variation dans un contexte où l'on travaille des fonctions représentées graphiquement par une droite — qui possèdent donc un taux de variation constant — à l'étude du ou des taux de variation — pouvant être associés à différents points appartenant à une fonction représentée par une courbe — doit être pris au sérieux. En effet, les étudiants voient, préalablement, le concept de taux de variation dans un contexte où ils doivent étudier une fonction affine ; ils ne l'utilisent pas comme un outil qui peut procurer de l'information sur la croissance d'une fonction représentée par une courbe, par exemple. Ainsi, lors de l'introduction de la dérivée, un changement de point de vue important leur est demandé par rapport au taux de variation, oui, mais également par rapport à toute la famille des fonctions affines. Je ne parle pas ici du changement de point de vue d'un taux de variation moyen à un taux de variation instantané, et ce, dans différents registres de représentation, mais plutôt de celui qui demande à l'étudiant de voir le potentiel du concept de taux de variation, et donc la droite qu'il peut représenter, comme un outil d'analyse d'une fonction pour informer sur le comportement de variables représentées, par exemple, graphiquement par une courbe. Cela demande aux étudiants d'avoir une très grande compréhension du concept de taux de variation comme détenteur d'information privilégiée sur la façon dont deux variables varient ensemble pour différents points d'une fonction, que cette fonction soit associée graphiquement à une droite ou une courbe. Il s'agit donc de réfléchir à la « droite » comme étant un outil d'analyse de fonction et non seulement comme une famille de fonctions au même titre que les fonctions trigonométriques, par exemple.

Le passage mentionné ci-haut apparait comme un aspect important du processus de compréhension du concept de dérivée et il devrait faire l'objet d'études plus approfondies. Des recherches sur le concept de taux de variation menées par Thompson et Thompson (1996), et Thompson et Carlson (2017), par exemple, pourraient déjà représenter un modèle de départ intéressant pour l'étude du processus de compréhension de ce concept en particulier. En effet, Thompson et Thompson (1996) mettent en place une vision très intéressante du concept de taux de variation en l'abordant du point de vue du raisonnement quantitatif. Une observation de développement du raisonnement covariationnel, fait par Passaro (2015), pourrait également être porteuse. Un point de vue sur la transition interordre pourrait aussi être riche pour observer et faciliter ce passage qui se situe en effet à la fois au secondaire et au collégial. Le travail fait sur la table de valeurs discuté précédemment en est un bon exemple. J'y vois là un prolongement certain de cette thèse qui contribuerait à bonifier les modèles de compréhension du concept de dérivée proposés.

➤ Le concept de tangente dans le registre graphique

Le concept de tangente a déjà été identifié comme possible obstacle dans le processus de compréhension des étudiants. En effet, la définition de ce qu'est une droite tangente, mais surtout les conséquences de son existence ou non sur la fonction dérivée ont fait l'objet de certains questionnements de la part des étudiants. Dans la section 2.5.3, le changement de point de vue sur la tangente a été identifié comme une difficulté. Dans ce TE, c'est principalement — pour ne pas dire presque exclusivement — pendant le travail sur le deuxième problème de la séance 5 (celui qui est présenté strictement dans le registre graphique) que les questionnements sont apparus chez les étudiants. Ces questionnements n'étaient pas tellement centrés sur le point de vue sur la tangente plus que sur son existence ou non en un point donné. Un exemple de ce type de difficulté est présenté à la section 4.3.2.2 (p. 139). En effet, dans cette partie, les étudiantes se demandent si un point d'inflexion admet une tangente. De plus, elles cherchent également à savoir, une fois cette unité signifiante identifiée dans la RG de la fonction d'origine, la façon de la convertir en unité signifiante dans la RG de la fonction dérivée, à savoir par un point ouvert ou une asymptote. Bref, ce concept a en effet représenté une certaine difficulté dans le processus de compréhension des étudiants observés, mais pas nécessairement de la façon dont on s'y attendait. Il semble que ce soit dans le registre graphique que le travail avec ce concept soit le plus difficile.

CHAPITRE V

ANALYSE DU DÉROULEMENT DES SÉANCES D'ENSEIGNEMENT

Le deuxième objectif de la thèse était formulé comme suit : examiner de quelle manière le contexte mis en place (tâches, approche, interactions, etc.) a pu contribuer à faire ressortir, évoluer et articuler ou non différentes représentations produites ou manipulées par les étudiants. Afin de l'atteindre, une analyse a été faite de manière parallèle à l'analyse des données en vue de construire un modèle du processus de compréhension. En effet, tout au long de cette analyse des vidéos, transcriptions et productions des étudiants, des éléments liés au deuxième objectif étaient relevés, notés et commentés. Ainsi, pour produire le compte rendu de cette analyse, je fais un retour sur tous les éléments relevés en lien avec le deuxième objectif. Ces notes et commentaires sont rassemblés en deux catégories : l'influence de l'approche ACODESA et l'influence des interventions de la chercheure-enseignante. De plus, le choix des tâches proposées dans les cinq séances, basé sur une certaine analyse des séances précédentes, est présenté dans le chapitre sur la méthodologie (voir section 3.4, p. 87). Dans ce chapitre, un regard à postériori est tout de même posé sur les tâches proposées aux étudiants lors des séances d'enseignement.

5.1 L'influence de l'approche ACODESA

Il convient de rappeler que l'approche ACODESA est basée sur l'apprentissage collaboratif, le débat scientifique et des moments de réflexion individuels, et ce, dans un contexte de résolution de problème. L'influence de cette approche sur les représentations utilisées et produites par les étudiants est donc analysée en deux parties : l'apport du travail collaboratif et individuel, et l'influence du contexte de résolution de problème.

5.1.1 L'influence du travail collaboratif et individuel

Le travail d'équipe semble avoir eu, pour la majorité du TE, un apport bénéfique sur le processus de compréhension des étudiants. En effet, la plupart du temps, les participants s'entraident afin de traiter ou coordonner différentes représentations produites, parfois pendant le travail individuel, parfois dans le travail d'équipe. Deux types d'interactions en équipe permettent d'identifier ce travail comme bénéfique. D'abord, la complémentarité des compétences entre les membres de l'équipe leur permet d'avancer dans la résolution du problème. Ensuite, le fait de devoir parfois expliquer leur démarche aux autres membres de l'équipe amène les étudiants à non seulement produire de nouvelles représentations, mais également à justifier leur provenance et leur présence. Pour ce faire, les étudiants sont souvent appelés à coordonner différentes représentations.

Le travail qu'Antoine et Guillaume font ensemble afin de résoudre le premier problème de la séance 5 est un bon exemple d'une belle coopération et complémentarité. En effet, il a déjà été soulevé et appuyé, dans la section 4.4.2 (p. 174), que les deux collègues se complétaient bien. Antoine est plutôt à l'aise à effectuer des traitements sur des représentations dans différents registres, mais principalement dans le registre algébrique. Quant à Guillaume, il arrive à produire des représentations dans différents registres, mais principalement les registres algébriques et graphiques. Ces représentations permettent aux deux garçons, moyennant quelques traitements sur celles-ci, de résoudre le problème. Ainsi, en travaillant ensemble, les deux garçons peuvent profiter de la compétence de l'autre tout en développant leur compréhension du concept.

Le deuxième exemple illustre le fait que le travail d'équipe amène les étudiants à produire davantage de représentations, particulièrement verbales, et à les coordonner. En effet, le fait de travailler en équipe oblige en quelque sorte les participants à expliciter leur démarche, leurs idées. En partageant leur réflexion, celle-ci se précise parfois ou fait ressortir un manque dans leurs représentations/explications. Par exemple, pendant la séance 5, j'ai de longues discussions avec Antoine et Guillaume autour du premier problème proposé. Nous construisons une démarche de résolution ensemble pendant que Jérémie construit sa propre démarche dans le registre algébrique. Or, quand Jérémie veut savoir ce que les autres ont fait et vice versa, les participants doivent prendre du recul face à leur démarche et en expliciter les différentes étapes, voire les justifier. Dans cet exemple, cette verbalisation (RV) met d'ailleurs en lumière qu'Antoine et Guillaume ne peuvent pas expliquer d'où vient une certaine RA produite. Ils doivent revoir les différentes représentations produites pour pouvoir compléter leurs explications. Ce type de situation, dans laquelle les étudiants doivent arriver non seulement à produire des représentations, mais aussi à justifier leur nécessité pour résoudre le problème ou les représentations à partir desquelles elles sont converties/produites, est assez fréquent tout au long du TE. Cela permet de croire que le travail d'équipe a une influence bénéfique sur les représentations utilisées, produites ou coordonnées par les étudiants.

5.1.2 L'influence d'une approche basée sur la résolution de problème

L'approche privilégiée pour la mise en place du TE est basée sur la résolution de problème ou de situations problèmes. Il est assez clair que ce genre d'approche contribue à faire expliciter les différentes représentations sollicitées par les étudiants. Or, bien que les problèmes proposés aient été réfléchis et justifiés (voir section 3.4, p. 87), il semble que les contextes, en particulier, dans lesquels ils sont formulés, ont une influence sur les représentations produites et travaillées par les étudiants. Trois contextes sont utilisés. D'abord, le contexte physique de déplacement et de vitesse. Ensuite, le contexte de croissance d'une population de bactéries, et enfin, des contextes purement mathématiques.

➤ Le contexte physique de temps, déplacement et vitesse

Comme il est souligné à quelques reprises dans les chapitres précédents, le contexte physique de temps, déplacement et vitesse est un contexte très souvent privilégié pour l'introduction du cours de calcul différentiel. Les enseignants utilisent même parfois des représentations verbales (RV) directement liées à ce contexte (par exemple « vitesse instantanée ») comme synonyme de la RV « dérivée » (Dufour, 2011). L'utilisation de ce contexte est souvent justifiée par le fait qu'il s'agit d'un contexte connu des étudiants. Or, dans ce TE, ce contexte est très difficile à traiter pour les étudiants, ce qui amène une grande confusion des représentations utilisées et produites. En effet, non seulement ils sont en train d'essayer de coordonner des représentations d'un concept nouveau, la dérivée, mais ils semblent en plus avoir déjà de la difficulté à coordonner les représentations liées à ce contexte. René De Cotret (1988) a également soulevé cette problématique :

> Cependant, il nous est apparu que les conceptions du mouvement (relations distance-vitesse-temps) qu'ont plusieurs enfants sont si controversées qu'elles ne permettent pas de voir les conceptions relatives à la fonction, le problème se situant avant, au niveau de la compréhension du mouvement lui-même (p. 10).

Voici quelques exemples qui montrent l'obstacle créé par le contexte au développement du concept de dérivée.

D'abord, la production de représentations cohérentes dans ce contexte semble très difficile pour les participants. En effet, dès le départ, ils éprouvent de la difficulté à établir le rôle des grandeurs en jeu (dans leurs RV), à modéliser la situation graphiquement (RG) et même à établir la nature de ce qu'ils cherchent.

Dans la situation proposée, trois grandeurs sont principalement en jeu : le temps, le déplacement du véhicule (ou distance entre le véhicule et l'animal) et la vitesse. Les informations fournies par le problème sont donc données directement ou indirectement. Par exemple, « le véhicule s'arrête après 4 secondes de freinage » est une information directe liée au temps et à la vitesse. « Au début, le véhicule roule sur l'autoroute » est une information indirecte qui permet d'envisager que la vitesse du véhicule au moment de commencer à freiner devrait être autour de 100 km/h. Du fait que les différentes informations sont toutes liées à ces trois grandeurs, il semble difficile pour les étudiants d'établir la relation à observer. Par exemple, ils ont beaucoup de difficulté à décider s'ils observent la relation entre le temps et le déplacement ou entre le temps et la vitesse. Ils font d'ailleurs des va-et-vient entre ces deux possibilités dans plusieurs représentations utilisées ou produites. Une autre manifestation de cette confusion est le fait que les différentes représentations qu'ils produisent sont souvent contradictoires ou ne représentent pas la même relation, même si l'étudiant en parle tout comme si. Par exemple, Annie et une autre participante produisent une RV de la situation (Extrait 5.1).

Annie: Oui, mais une courbe de décélération, c'est comme ça [elle fait référence à la courbe représentée graphiquement).
Participante : Tu as la vitesse et le nombre de secondes.
Annie : On a la vitesse. On a le temps, mais c'est juste que je ne connais pas la formule, ça fait que je ne sais pas où mettre les données.

Extrait 5.1 Production d'une RV qui établit la relation en jeu par Annie et une autre participante (Séance 1, p. 8)

Pendant leur discussion, les deux étudiantes semblent établir la relation entre le temps et la vitesse. Il est même établi par la RV « décélération » que la vitesse serait décroissante. Or, la RG à laquelle Annie fait référence (Figure 5.1) représente plutôt la relation entre la distance et le temps. Annie semble pourtant croire que ces deux représentations (RV et RG) sont liées à la même relation observée. De plus, on peut noter que le choix du temps comme variable dépendante d'une situation n'est pas un choix très habituel. La variable temps étant la plupart du temps, du moins dans les représentations institutionnelles, la variable indépendante (Janvier, 1983).

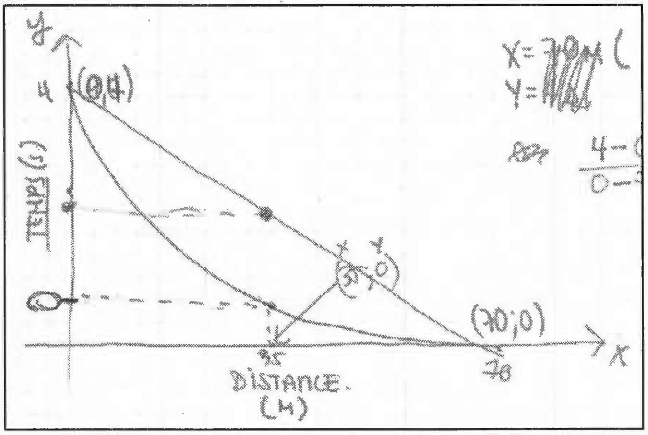


Figure 5.1 RG produites par Annie lors de la séance 1 (Cahier de l'étudiante Annie, séance 1, p. 7)

Ceci n'est qu'un exemple de plusieurs contradictions du même genre qui ont lieu tout au long des deux premières séances. Les participants ne savent donc pas comment coordonner ces représentations (RV ou RN), qu'elles proviennent directement du problème ou qu'elles soient produites pendant la résolution, avec des représentations verbales, graphiques, algébriques ou numériques qui leur permettraient d'aller plus loin dans le problème. Cette confusion qui, selon moi, est due en partie au contexte rend très difficile « l'accès » aux concepts de tangente et de limite qui pourraient quant à eux mener au concept de dérivée.

D'autres exemples de la confusion que ce contexte peut provoquer chez les étudiants sont les représentations verbales formulées par les étudiants afin de décrire les différents taux de variation observés dans la séance. En effet, ils ont beaucoup de difficultés à produire une RV qui arrive à cerner la relation observée sans faire une utilisation abusive de l'idée de « vitesse ». Il s'agit là d'un autre indice du registre verbal comme porteur de sens ou révélateur d'incohérence abordé dans la section 4.5.2 (p. 211). Un exemple est décrit dans les prochains paragraphes.

Au départ, les étudiants ne s'entendent pas sur la façon de représenter la situation graphiquement. Une fois que nous avons décidé ensemble d'observer d'abord la distance par rapport au temps, certains croient que la RG devrait être une droite, d'autres croient que la RG devrait être une courbe. Annie arrive finalement à produire une RV de la relation entre la distance et le temps (Extrait 5.2). Cette RV met aussi de l'avant la présence presque impossible à éviter de la variable « vitesse » dans cette relation.

Annie : Plus tu freines… plus tu freines… eeehh. Plus tu vas vite, plus ton freinage va être …

Jérémie : Long.

Annie : Ben va être … eeh…

Sarah : va être long… ok…

Jérémie: Ben, il va prendre plus de distance aussi.

Sarah : Ok. Pis toi [Annie], continues…

Annie : Ben, c'est comme… j'arrive pas à l'exprimer en mots là… **Plus tu vas vite, plus ta distance de freinage va être grande**. Ça se dis-tu ça?

Sarah : Oui ok. Donc, plus ta distance va être longue… Ça fait que là, on a un lien avec notre distance. Ça fait que plus je vais vite… Normalement, … pour une seconde, au début?

[…]

Sarah : Bon, ça fait que là, on recommence. On est en auto. On va à 100 kilomètres/heure et on s'arrête. **Ça fait que la première seconde, est-ce que je vais parcourir autant de distance que la deuxième seconde?**

Annie : **Non.**

Sarah : Pourquoi?

Annie: **Ben parce que tu vas plus vite donc, il y a une plus grande distance pour un plus petit nombre de temps. Ben la distance, ça va plus loin.**

Jérémie: Ah oui.

Sarah : Ça fait que là, qu'est-ce qui se passe avec ma distance, parce que là, si je fais mon graphique de la distance en fonction du temps, il faut que je regarde qu'est-ce qui se passe avec ma distance! Ça fait que, qu'est-ce qu'il se passe avec ma distance ma première seconde?

Annie: **Elle va être vraiment élevée et elle diminue exponentielle**…

Sarah : Donc, **elle diminue de plus en plus**?

Annie et Jérémie : Ouais.

Sarah : Et là, à ma deuxième seconde, est-ce que ça reste pareil?

Annie et Jérémie: Non.

Annie : C'est une courbe là!

Extrait 5.2 Coordination entre une RG et une RV pour expliquer la situation (Séance 1, p. 58–59)

En fait, c'est ce lien si fort entre les trois variables du contexte qui devient très difficile à gérer. Les idées de « vitesse » et de « temps » sont souvent présentes dans le discours des étudiants lorsque vient le moment de produire une RV pour une variation. En effet, cette habitude est relevée dans quelques travaux en didactique des mathématiques. Janvier (1983) lui donne d'ailleurs le nom de « chronique ». Il s'agit de considérer les variables temps ou vitesse pour décrire n'importe quelle relation que le temps ou la vitesse soient réellement des variables en jeu ou non. On verra donc des étudiants parler de la variation d'une situation en utilisant, par exemple, la RV « diminue de plus en plus vite » même si la variable temps n'est pas en jeu dans la relation étudiée. Cette conception est aussi reliée à la persistance des étudiants à considérer le temps non seulement comme une variable dans toutes situations, mais le temps en tant que variable indépendante. Les paroles d'Antoine, au début de la séance 1, illustrent bien ce phénomène : « Bien, la vitesse selon le temps, il n'y a pas grand-chose qui... le temps dépend de rien, ça fait que c'est vraiment la seule façon que tu peux le faire. » (Séance 1, p. 9-10).

Un autre exemple qui montre que le contexte de temps, distance et vitesse provoque une confusion chez les étudiants est un moment où j'y réfère comme une analogie. Pendant la résolution du problème dans le contexte de croissance d'une population de bactéries dans la séance 4, pour aider les étudiantes à comprendre, j'essaie de référer au travail fait dans les premières séances qui étaient sur un problème dans un contexte de temps, distance et vitesse. Or, l'utilisation de cette analogie ne fait que confondre encore plus les étudiantes (Extrait 5.3).

Sarah: Le taux de croissance… Est-ce qu'il y a une différence, si oui laquelle, entre le taux de croissance de bactéries et le nombre de bactéries?
Annie : Hmmm!
[moment de réflexion]
Annie : Parce que là, le nombre de bactéries peut être plus haut, mais il peut être décroissant… son taux de croissance peut être négatif.
Sarah : Si on fait l'analogie avec notre situation avec la voiture et la vitesse et la distance et le temps… Mon taux de croissance, c'est quoi là-dedans?
Annie : La décélération.
Sarah : ou l'accélération ou la décélération?!
Annie : Ouais, la distance, c'est ça qui n'est pas affectée là!
Sarah : Ça fait que j'avais ma distance par rapport à mon temps et là, en faisant mon taux de variation, je pouvais trouver la vitesse.
Annie : Hmmm.
Sarah: Là ici, j'ai un nombre de bactéries par rapport au temps. Et là, vous avez trouvé ici là, là tu disais il faut que je divise par 8.
Annie : Oui mais ça, ce n'était pas très [inaudible]…
Sarah : Mais qu'est-ce que tu faisais… qu'est-ce qu'on faisait là quand on… on s'est dit bon, ça augmente, entre 4 et 12 de 22 400 bactéries.
Annie : Ouais.

Extrait 5.3 Utilisation d'une analogie dans le contexte de déplacement, temps et vitesse (Séance 4, p. 31)

Avec le contexte de la situation proposée, il est très difficile de distinguer ce qui est à l'origine de la difficulté ou de la confusion des étudiants. Le contexte, le niveau d'ouverture de la situation problème, la difficulté des étudiants à produire des représentations pour le concept de taux de variation, l'obstacle de « la chronique », tous ces facteurs ont probablement une influence sur la construction d'un nouveau concept, soit celui de dérivée, voire sur celle des concepts associés de tangente et de limite. Enfin, au regard de ce qui précède, le contexte impliquant le temps, le déplacement et la vitesse ne semble pas être à privilégier pour introduire le nouveau concept de dérivée.

➤ Le contexte de croissance d'une population : un contexte fertile

En revanche, le contexte de croissance de population a semblé offrir aux étudiants un terrain fertile pour produire et coordonner des représentations liées au concept de dérivée. En effet, dans ce contexte, les étudiants ont pu produire des représentations verbales intéressantes de concept de taux de variation qui les ont même amenés à entamer le travail sur des représentations liées au concept de dérivée. Les sections 4.3.1 (p. 116) et 4.4.1 (p. 153) rendent compte du processus de compréhension observé lors du travail des deux équipes dans ce contexte.

La citation suivante de Guillaume est un exemple plus précis (d'ailleurs relevé dans la section 4.4.1) :« Elle (la population) continue de croitre, mais elle croît lentement. » (Séance 4, p. 14). Dans cet extrait, bien que les propos de Guillaume illustrent la tendance des étudiants à rencontrer l'obstacle « chronique » décrite précédemment, il formule une RV intéressante de la caractéristique de variation de la relation fonctionnelle en jeu.

➤ Les problèmes purement mathématiques

Les problèmes présentés dans des contextes purement mathématiques semblent eux aussi provoquer une bonne utilisation et coordination de différentes représentations. Par exemple, le fait de proposer un problème purement mathématique dans le registre graphique a permis de faire avancer la compréhension des étudiants. Par contre, il faut souligner que les RA proposées dans un des problèmes semblent amener une confusion dans l'équipe d'Antoine, Guillaume et Jérémie.

Le contexte non seulement purement mathématique, mais également purement « graphique » du deuxième problème proposé dans la séance 5, est un bon exemple de l'utilité de ce type de problème. Si le recours au registre graphique crée une grande confusion lors des séances 1 et 2, celle-ci semble liée au contexte du problème plutôt qu'au registre graphique lui-même. En effet, les étudiants semblent se débrouiller davantage avec le registre graphique dans un contexte de croissance d'une population, comme il a été dit précédemment. Or, lorsque le problème n'est plus dans un contexte de « la vie courante », mais plutôt dans un contexte purement mathématique, les étudiants sont amenés à traiter les RG différemment et avec des questions qui font évoluer leur compréhension du concept de dérivée. Des questionnements nouveaux se présentent lors de la résolution de ce problème, comme la dérivabilité d'une fonction et la façon de convertir celle-ci dans une RG d'une fonction dérivée, par exemple. Ces questionnements semblent mener les étudiants à avoir recours à d'autres représentations peut-être moins utilisées jusqu'à maintenant. En plus, les étudiants semblent également les amener à faire des liens entre ces représentations « nouvelles » et d'autres plus « fréquentes ».

Il faut cependant reconnaitre que la formulation du premier problème en contexte purement mathématique provoque une confusion. Il s'agit en fait d'une confusion entre des représentations institutionnelles que les étudiants ont peine à reconnaitre si certains éléments diffèrent des représentations institutionnelles « de référence ». Certains éléments de la résolution du premier problème de la séance 5 par l'équipe d'Antoine, Guillaume et Jérémie en donnent un exemple.

La situation, telle qu'elle est proposée, utilise les lettres « a » et « b » pour représenter des inconnues dont les étudiants doivent identifier la valeur afin de respecter les contraintes du problème. Or, ce choix de lettre peut créer une confusion chez les étudiants. En effet, le sens des lettres « a », « b » et « c » semble très ancré chez les étudiants comme étant des paramètres des représentations générales institutionnelles des fonctions affines et quadratiques (entre autres) soit, $y = ax + b$ et $y = ax^2 + bx + c$, respectivement. De cela découle une association entre la lettre « a » et le taux de variation (dans la fonction affine) ou le paramètre affectant le x^2 (dans la fonction quadratique). Dans la situation, la lettre « a » est plutôt associée à l'unité signifiante « ordonnée à l'origine » dans la RA de la fonction affine. La lettre « b », quant à elle, est associée au paramètre affectant le x^2 dans la fonction $f(x)$.

D'emblée, cette confusion chez les étudiants aurait pu être prévue. Celle-ci se manifeste par exemple lors d'une discussion entre Antoine, Guillaume et moi par rapport à la prédiction des valeurs de « *a* » et « *b* », prédiction qui s'appuie par des RG fonctionnelles (Extrait 5.4).

Antoine : Eh, *b* serait positif si elle serait concave vers le haut.
Sarah : Ok. Et là [je pointe la parabole concave vers le bas (voir Figure 5.2)], *b* est négatif?
Antoine : Oui.
Sarah : Ça, est-ce que ça te dit quelque chose [Guillaume]?
Guillaume : Ouais, mais moi, j'ai plus… moi, j'ai appris que si *a* est négatif, elle est comme ça [il trace une parabole concave vers le bas] et si *a* est positif… [il trace une parabole concave vers le haut]… [voir Figure 5.2].
Sarah : Quel « *a* »? Ah ok, bon je comprends! […] C'est mêlant parce que j'ai mêlé les lettres, tu as raison! D'habitude, autant qu'on écrit ça [j'écris la RA générale d'une fonction affine], autant qu'on va écrire ça pour la quadratique [j'écris la RA générale d'une fonction quadratique (voir Figure 5.3)].
Guillaume : Oui.
Sarah : Mais, on s'entend que dans ce cas ici [l'expression $f(x) = bx^2$], c'est ça que j'ai [j'entoure ax^2 (voir Figure 5.3)]!
Guillaume : Oui.
Sarah : Ça fait que mon *b*, c'est comme ton *a*! Tu comprends? Ça fait que là, est-ce que ça a du sens ce qu'Antoine dit?
Guillaume : Oui oui!

Extrait 5.4 Confusion entre les paramètres des RA générales de fonctions et les inconnues du problème (Séance 5, p. 16–17)

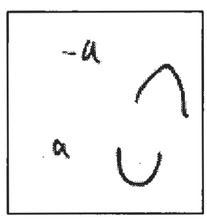


Figure 5.2 Esquisse de l'influence du paramètre « *a* » sur la RG d'une fonction quadratique (Cahier de l'étudiant Guillaume, séance 5, p. 1)

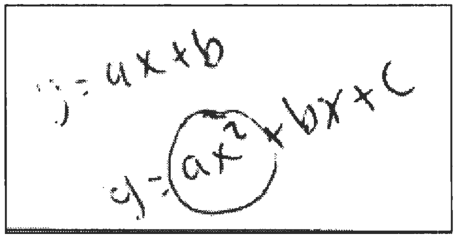


Figure 5.3 Production des RA générales des fonctions affine et quadratique par Sarah (Cahier de l'étudiant Guillaume, séance 5, p. 1)

Bien qu'elle aurait pu être évitée, cette confusion informe tout de même sur le niveau de compréhension des étudiants. Ils sont tellement attachés à une représentation algébrique institutionnelle qu'il devient très difficile pour eux de s'en détacher et de pouvoir coordonner ou traiter des représentations algébriques impliquant les mêmes « symboles », mais auxquels un tout autre rôle/sens pourrait être donné.

En bref, les contextes dans lesquels les problèmes (situations problèmes) prennent place ne sont certainement pas à négliger. En effet, il semble que ces différents contextes aient eu une réelle influence sur le processus de compréhension des étudiants. Si les contextes de temps, déplacement et vitesse ont semblé difficiles à gérer pour les étudiants, ceux purement mathématiques ont semblé, quant à eux, nécessaires à l'évolution du processus de compréhension de la dérivée en provoquant des questions nouvelles et approfondies sur ce concept.

5.2 L'influence des interventions de la chercheure-enseignante

5.2.1 Une double intention de la chercheure-enseignante : trouver un équilibre pour les interventions avec les étudiants

➤ Interventions parfois ciblées, parfois floues

Le but de la thèse n'étant pas de faire une analyse approfondie de mes interventions, il est tout de même intéressant de relever que le double statut de chercheure et d'enseignante rendait parfois les interventions difficiles à gérer. En effet, le souci de chercheure, de provoquer des représentations ou des clarifications associées à des représentations, était très présent. Par contre, ce rôle est assumé dans une méthodologie comme le TE. Cela ne représentait donc pas un problème en tant que tel, la plupart du temps. Or, ce double statut m'a parfois amenée à avoir des interventions très ciblées, empreintes soit d'une intention de provoquer l'utilisation ou la modification d'une représentation, soit d'une intention d'introduire un nouveau concept assez explicitement.

Cela a provoqué des discussions qui étaient très ciblées ou qui pouvaient s'apparenter plus à un jeu de devinettes qu'à une intervention d'enseignement ou d'explicitation (plutôt liée à la recherche). Par exemple, dans la séance 4, l'équipe d'Antoine, Guillaume et Jérémie a réussi à résoudre le problème sans utiliser le concept de dérivée (voir section 4.4.1, p. 153). J'aborde alors la possibilité de faire intervenir le concept de dérivée dans la résolution du problème. Or, Antoine, en particulier, ne comprend pas du tout l'intérêt de refaire une autre démarche étant donné qu'ils avaient déjà obtenu une réponse à la question posée. Ainsi, comme je veux amener Antoine à voir l'utilité du concept de dérivée, je me lance dans une série de questions très dirigées qui provoque une discussion à « devinettes » (Extrait 5.5)

Sarah : Ça fait que… Est-ce qu'il y a un autre moyen de le calculer, ce moment-là?
Antoine : **La dérivée?!**
Sarah : La dérivée?! Juste la dérivée… où? Comment?
Antoine : Bien la **dérivée de la fonction, je ne sais pas**.
Sarah : Ok. Parce que là, ce qui arrive c'est que…
Jérémie : C'est basé sur d'autres facteurs.
Sarah : Bien c'est correct là, c'est une autre façon de le faire. Maintenant, on va essayer d'explorer avec le taux de croissance instantané. **Donc là, vous l'avez le sommet il est où, mais mettons que vous ne l'avez pas, quelle expression algébrique il va falloir que vous posiez pour être capables de le trouver?**

Extrait 5.5 Interventions ciblées et floues (Séance 4, p. 37)

Cet extrait montre trois aspects liés à une intervention peu efficace. D'abord, il y a la formulation de questions plus ou moins claires qui amène Antoine à tenter de cerner les réponses attendues. Aussi, il y a ma tentative d'inhiber la première démarche produite par les étudiants et de faire un retour en arrière pour retravailler le problème différemment. Dans cet extrait, les représentations fonctionnelles et la démarche utilisées au préalable ne sont pas réinvesties, mais plutôt contournées. Enfin, il y a aussi l'imposition d'un registre en particulier, le registre algébrique. En effet, je leur demande directement de produire une RA.

Les trois éléments soulevés ne sont pas des problèmes en soi. Ils représentent plutôt des petites dérives possibles et tout à fait naturelles d'une intervention qui doit porter deux intentions importantes, celle d'amener les étudiants à faire évoluer leur compréhension d'un concept (plutôt liée à l'enseignement) et celle d'expliciter des représentations claires (plutôt liée à la recherche).

5.2.2 Les représentations fonctionnelles des étudiants à privilégier

Comme le modèle du processus de compréhension des étudiants est construit avec un regard particulier sur les représentations sollicitées par ces derniers, il convient de mettre en place un contexte d'enseignement où les représentations fonctionnelles des étudiants sont privilégiées et réinvesties. Cette façon de faire entraine cependant quelques difficultés.

D'abord, la considération pour les représentations fonctionnelles des étudiants mène à l'utilisation de représentations qui peuvent être plus difficiles à coordonner que si elles — les représentations sur lesquelles se baser pour résoudre le problème — étaient choisies au préalable. Le meilleur exemple de cette limitation est dans les deux premières séances. Le problème proposé est très ouvert, justement avec l'intention de laisser la place aux représentations fonctionnelles des étudiants. Ainsi, les variables en jeu ne sont pas toutes définies dans la situation proposée. Les étudiants choisissent de définir la variable associée à la distance ou au déplacement comme « la distance entre la voiture et l'animal » qui diminue de plus en plus. Il faut mentionner que la représentation plus institutionnelle dans ce type de situation serait « la distance parcourue par la voiture ». Avec cette représentation institutionnelle, on se trouve à observer une situation dans laquelle les deux variables vont dans le même sens, c'est-à-dire que plus le temps augmente, plus la distance parcourue augmente. On peut même aller plus loin et expliciter le fait qu'une définition de la situation provoquerait l'étude d'une vitesse « positive » qui est de moins en moins grande. Or, la représentation suggérée par les étudiants provoque une relation qui ne va pas dans le même sens. En effet, plus le temps augmente, plus la distance entre la voiture et l'animal diminue, ce qui provoque donc l'étude d'une vitesse qui est négative, non pas parce que la voiture freine ou décélère, mais bien parce que la variable dépendante (distance entre la voiture et l'animal) diminue. Cette « vitesse négative » provoque donc à son tour un lot d'interprétations erronées (RV) de la situation. Du moins, cela provoque l'étude d'une situation certainement plus complexe ou moins intuitive qu'elle ne l'aurait été avec une définition plus institutionnelle des variables en jeu.

Un autre effet de la grande place laissée aux représentations fonctionnelles des étudiants et à l'ouverture des situations proposées est la possibilité de voir des démarches non attendues de la part des étudiants. Cette idée peut être illustrée par la démarche construite par l'équipe d'Antoine, Guillaume et Jérémie pour résoudre le problème de la séance 4. En effet, le but poursuivi en proposant cette situation est d'amener les étudiants à utiliser le concept de dérivée afin de trouver la valeur d'un extrémum de la fonction. Or, les étudiants utilisent plutôt la propriété de symétrie des fonctions quadratiques. Probablement trop centrée sur l'intention de provoquer l'utilisation du concept de dérivée, cette démarche, tout à fait acceptable pour répondre à la question posée, m'a échappée dans l'analyse *a priori* de la situation.

CHAPITRE VI

CONCLUSION

6.1 La synthèse

Cette thèse a d'abord présenté une problématique qui mène à un objectif de recherche général. En effet, en ayant revu plusieurs apports des écrits scientifiques quant à la compréhension et aux difficultés des étudiants principalement liées aux concepts du calcul différentiel, j'ai pu relever une nécessité de mieux comprendre le processus de construction de la compréhension des étudiants avec une perspective centrée sur le concept de dérivée.

Pour pouvoir observer et mieux comprendre des processus de compréhension du concept de dérivée, une position a été prise sur la vision de la compréhension d'un concept. Un cadre théorique inspiré de la théorie des registres de représentations sémiotiques de Duval (1993) et des recherches de Hitt (2003b) sur les représentations fonctionnelles a été proposé. Ce cadre m'a permis de construire des processus de compréhension en m'appuyant sur les différents types de représentations (algébrique, graphique, verbal, numérique, tabulaire), la nature de ces représentations (fonctionnelle ou institutionnelle), et enfin, sur les actions posées sur les représentations (reconnaissance, production, traitement, conversion et coordination).

Afin d'atteindre les deux objectifs de recherche spécifiques suivants, un *Teaching Experiment* (TE) a été mis en place :

- Construire un ou des modèles du processus de compréhension de la dérivée des étudiants dans un contexte particulier.
    - Identifier les principales représentations sollicitées ou produites par les étudiants, qu'elles soient fonctionnelles ou institutionnelles.
    - Décrire et analyser la façon dont les étudiants ont recours à ces représentations en termes de reconnaissance, production, traitement, conversion ou coordination.
- Examiner de quelle manière le contexte mis en place (tâches, approche, interactions, etc.) a pu contribuer à faire ressortir, évoluer et articuler ou non différentes représentations produites ou manipulées par les étudiants.

L'opérationnalisation d'une telle méthodologie, basée sur la mise en place de séances d'enseignement avec des étudiants où une intention d'enseigner, de prendre part — autant en tant qu'observateur qu'en tant qu'acteur direct — au processus de compréhension des étudiants par rapport à un concept donné, semblait tout indiquée. Cinq séances d'une heure et demie avec six étudiants ont été mises en place.

L'analyse en profondeur des deux dernières séances a permis la construction de deux modèles de processus de compréhension collectif d'étudiants autour du concept de dérivée. En plus des deux modèles proposés, quelques éléments communs ont été ressortis. En effet, le statut particulier du registre algébrique, l'importance du registre verbal dans la recherche de sens et le dévoilement de contradictions et les difficultés particulières des étudiants associées au concept de taux de variation et de tangente ont été décrits. Aussi, l'atteinte du deuxième objectif a permis de poser un regard critique sur l'approche d'enseignement préconisée dans les séances du TE. J'ai pu souligner notamment l'apport du travail d'équipe et du contexte de résolution de problème. De plus, les contextes dans lesquels les problèmes ont été formulés ont également fait l'objet d'une analyse qui mène à douter de l'utilisation du contexte de temps, déplacement et vitesse pour l'introduction d'un nouveau concept. Enfin, quelques interventions de ma part, en tant que chercheure-enseignante pendant les séances, ont été soulignées.

6.2 Les contributions et retombées de cette recherche

Cette thèse est une contribution au champ de la didactique des mathématiques considérant la nature de son cadre théorique et la façon dont il a été utilisé comme cadre d'analyse. En effet, la façon dont les actions sur les représentations ont permis de décrire des processus de compréhension est, selon moi, une nouvelle manière d'exploiter ce cadre théorique. Ce cadre s'est avéré très utile et révélateur pour analyser et construire des modèles de processus de compréhension.

L'apport de cette thèse réside également à l'approfondissement de la connaissance sur l'apprentissage du concept de dérivée. Comme la problématique le suggère, plusieurs éléments liés à l'apprentissage du concept de dérivée avaient déjà été proposés à la communauté de la didactique des mathématiques. Or, cette thèse se démarque par l'ajout d'éléments clés sur l'apprentissage et la compréhension du concept de dérivée dans une perspective processuelle. En effet, l'apport de la thèse par rapport aux modèles de compréhension du concept de dérivée existants (Zandieh, 2000 ; Hähkiöniemi, 2006a) réside dans une description fine des moments de « passage » entre deux étapes importantes, étapes qui avaient déjà, dans certains cas, été identifiées.

Or, le fait de mieux comprendre la façon dont les étudiants passent d'une étape à l'autre, et plus particulièrement ici, d'une représentation à l'autre, est un élément nouveau dans notre connaissance sur la compréhension de ce concept.

L'intérêt pour un concept mathématique du collégial contribue également au champ de la didactique en participant au développement d'une didactique des mathématiques au collégial. Une meilleure compréhension du chemin qu'empruntent les étudiants pendant leur étude du concept de dérivée permet, déjà dans cette thèse, d'envisager des avenues possibles à explorer en enseignement des mathématiques au collégial, voire éventuellement à la formation des enseignants de mathématiques au collégial ou à une vision nouvelle de la transition secondaire-collégial.

6.3 Les limites et difficultés

Ce travail a permis de rendre compte de la façon dont les étudiants, collectivement, ont pu faire évoluer les représentations utilisées et produites. En effet, une certaine forme d'interaction a été considérée dans la décision de construire des modèles de processus de compréhension collectif dans la mesure où le cadre mis en place l'a permis. Ce regard sur un travail collectif autour de représentations partagées a permis d'atteindre l'objectif établi. Or, la nature « collective » qui donne une autre dimension aux modèles construits pourrait faire l'objet d'une analyse plus fine. Il serait intéressant dans l'avenir d'étudier ces interactions de plus près en convoquant un cadre théorique qui le permettrait et qui pourrait compléter l'observation déjà faite du travail collectif sur les représentations.

Une autre limite de la thèse est liée aux productions des étudiants en dehors des séances de TE. Comme il a été mentionné, les étudiants participants au TE assistaient, en parallèle des séances d'enseignement mises en place, à un cours de calcul différentiel. J'ai d'ailleurs assisté aux cours dans lesquels les participants étaient inscrits afin de mieux comprendre la nature (approche d'enseignement, contenu visé, etc.) de ces cours. Or, il aurait également été intéressant d'avoir accès aux productions que les participants au TE ont pu faire pour ce cours. En particulier, l'observation des travaux ou devoirs à remettre à leur enseignante ou à leurs copies d'examen aurait pu enrichir mes observations de leur processus de compréhension. Il aurait cependant fallu tenir compte du fait que ces productions n'auraient pas été collectives. Elles auraient tout de même pu enrichir mon regard sur les représentations produites et utilisées par les étudiants lors du TE.

6.4 Les prolongements possibles

Plusieurs idées ressortent de ce travail de recherche. D'abord, à la lumière de l'analyse des séances de ce TE, il serait intéressant d'utiliser un contexte différent de celui de déplacement, temps et vitesse pour introduire le concept de dérivée. Il serait intéressant d'observer les processus de compréhension des étudiants pendant leur travail sur des problèmes qui seraient, disons, plus accessibles pour les étudiants. Encore faut-il trouver un contexte qui les rende à l'aise ! Il s'agit de trouver un contexte de problème dans lequel les étudiants se sentiront à la base à l'aise de produire différentes représentations. Ce niveau d'aise avec le contexte leur permettrait alors de produire des représentations fonctionnelles d'un concept nouveau.

Cette recherche a aussi permis de remettre de l'avant que le concept de taux de variation est un élément clé de la compréhension du concept de dérivée et qu'il semble difficile à saisir pour les étudiants. Le passage du taux de variation moyen au taux de variation instantané avait déjà été identifié comme une étape clé pour la compréhension du concept de dérivée. Or, je pense que le passage de l'étude de la « droite » (fonction affine) comme un type de fonctions ou une famille de fonctions parmi d'autres, comme cela est fait au secondaire, à l'utilisation de la « droite » comme un outil d'analyse de fonctions (plus générales) mérite d'être explicité et travaillé plus directement.

Je pense que l'utilisation de la table de valeurs, comme cela est fait au secondaire, serait une entrée à explorer pour faciliter la reconnaissance de « la droite » et, par le fait même, son « taux de variation » pour l'analyse de fonctions en général.

Enfin, sur un plan plus théorique, le cadre d'analyse mis en place pour cette recherche s'est avéré très riche et a permis la construction de modèles de processus de compréhension. Il serait intéressant d'extrapoler son utilisation pour l'observation du processus de compréhension d'objets mathématiques différents de la dérivée, voire dans un domaine différent de celui de l'analyse ou dans un niveau différent de celui du collégial. En particulier, il serait intéressant de voir quels registres devraient être définis si on ne se concentre pas sur le domaine de l'analyse mathématique, mais plutôt sur celui de l'algèbre linéaire, par exemple. Dans un autre contexte, les registres (graphique, numérique, verbal, etc.) pourraient être définis pour décrire le processus de compréhension du concept de fraction au primaire, par exemple. Il y aurait là une occasion d'élargir les possibilités d'opérationnalisation du cadre théorique mis en place dans cette thèse et d'en raffiner son utilisation.

ANNEXE A

EXEMPLE DE DEUX COUCHES D'ANALYSE

(Section 4.4.1 La première partie du modèle : la dérivée en un point, p. 153)

Annotation du verbatim

Voici un extrait du verbatim de la séance 4 (p. 11 à 15). Les verbatims ont tous été faits de façon à ce que le travail en équipe apparaisse simultanément. Ce choix a été fait pour pouvoir suivre où en étaient les équipes parallèlement et ainsi pouvoir identifier certains éléments entendus du travail d'une équipe par l'autre équipe. Dans cet exemple, je me concentre sur le travail de l'équipe des garçons qui se trouve dans la colonne de gauche.

J : Ça irait comme ça [il fait des points décroissants sur son graphique].

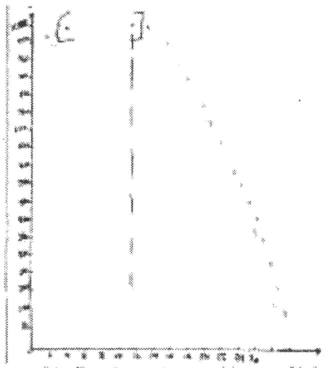


Figure G3 : Représentation graphique de Jérémie

S : Après, tu as une idée! Après, il a une idée de ce qui se passe. Est-ce que vous [A et G] êtes d'accord avec lui?
J : Normalement, il finirait par crasher après, bien, par descendre le niveau de la population.
S : Après, à partir de…
J : À partir de 12 à peu près là!
S : Ok.

* Essai de trouver quand ça commence à décroître.

00:24:00

J : Même, ça peut être un petit peu après, on ne sait pas. Ça peut être 13.

S : Est-ce que ça peut être entre… Est-ce que vous êtes sûr que c'est entre 12 et 14 ou c'est entre 11…
A : C'est entre 12 et 14, c'est ce qui est certain.

A : Non mais comme ici, si tu compares mettons après 2 heures, ton nombre, comment il a augmenté, si tu le compares toujours au temps 0…
K : Ah ok!
A : … tu vois que… oui, ça augmente toujours jusqu'à là, ça descend. Comme ça, ce serait plus peut-être une parabole…!?

[moment de réflexion]

A : Mais encore une fois, j'essaye de trouver une fonction et ça… [inaudible]… donner quelque chose…

[moment de réflexion]

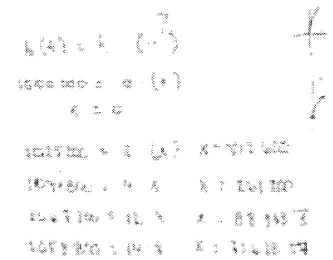
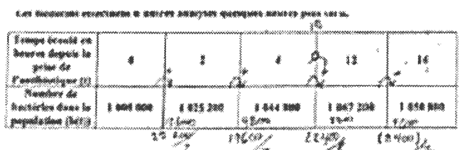


Figure F10 : Manipulations algébriques de A pour trouver une représentation algébrique de la situation.

K : Ouais, ça pourrait donner une fonction comme… peut-être pas du deuxième degré mais.
A : Non, c'est ça! Ça, je sais que ce n'est pas bon.
00:24:00
K : Ah non, je faisais juste dire…
A : Non, mais je sais là. Ça n'a pas de sens là! Mais… [moment de réflexion] Vous autres, vous n'avez pas trouvé de fonction ou quoi que ce soit?!

J : Parce qu'on n'a pas la donnée de 13. Si on avait la donnée de 13, on pourrait le savoir mais on n'a pas la donnée de 13.
G : Parce qu'on n'a pas toutes les données. Avec les données qu'on a, c'est…
J : Ah oui oui, c'est entre 12 et 14.
S : Ok, pourquoi?
J : Parce que ce sont les valeurs qu'on a.
S : Bien, qu'est-ce qui vous a fait croire que…
J : Parce qu'il y a une diminution entre 12 et 14.
S : Ok, mais peut-être que à 11… peut-être qu'entre 11 et 12.
J : Non parce qu'il y a une augmentation.
S : Pourquoi?
J : Bien parce que je l'ai calculé.
S : Comment?
J : Bien tu soustrais 12 du 14…
G : Parce que de là à là ça augmente! [de 12 secondes à 14 secondes]
S : Ok, de 4 à12 [c'est ce qu'il pointait sur la table de valeurs], ça augmente.
G : Oui.
S : C'est vrai.
G : Et de 11 à 12, ça diminue…
J : Ouais, parce qu'il manque la valeur 10 là!
00:25:00
G : De 10 à 11 aussi ça diminue, mais…
S : On n'est pas sûr.
J.: Tu peux faire… ça c'est un bond de deux et ça c'est un bond de deux.



Temps écoulé en heures depuis la prise de l'antibiotique (t)	0	2	4	12	14
Nombre de bactéries dans la population (b(t))	1 000 000	1 025 200	1 044 800	1 067 200	1 058 800

Figure G4 : Manipulation de la table de valeurs par Jérémie

K : Non, mais c'est ça, c'est ça qui me « buggait ». J'étais comme… bien, tu sais, ça ne va pas être une fonction qu'on connaît. Comme tu sais genre, qu'on est capable d'illustrer.
A : Ouais.
K : Genre une fonction quadratique ou quelque chose du genre. Bien, en fait, il ne dit pas genre au début comme tu sais, à vu d'œil, quand tu regardes de même eh… ça a l'air exponentiel, bien pas à partir de là, mais tu sais quand tu regardes entre les bonds bien là, tu vois que comme… mais j'y ai pensé aussi que comme, ça n'allait pas être constant constant… en tout cas…
A : Bien, c'est sûr que le gros gap entre le 4 et le 12… on ne peut pas trop…

[moment de réflexion]

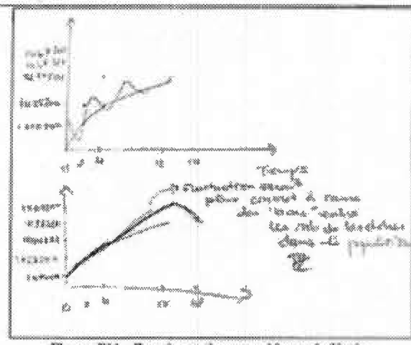
00:25:00

A : Bien, vous le graphique, vous faites quoi?

[Karine construit un graphique individuellement, même si elle dit ce qu'elle fait parfois tout haut!]

x observation des bds de la var. rel.

00:26:00

S : Qu'est-ce que tu es en train de faire? J : Et l'autre c'est un bond de 6. 22400 divisé par 6. S : C'est quoi le bond de 6? J : Ben là c'est parce que lui c'est deux unités, deux unités, lui représente 6 unités, ça fait que si tu le divises, tu peux savoir de combien… S : Ok, de 4 à 12, il y a 6 unités? J : Eh… scuse 8! S : Ok, on se comprend! J : Ouais ouais, non! S : Donc là, qu'est-ce que tu es en train de calculer quand tu fais ça? J : Une moyenne… S : La moyenne… une moyenne 00:26:00 mais de quoi? Comment tu l'appelerais cette moyenne-là? J : Je ne me rappelle plus là. Je suis fatigué! S : Bien, peut-être que tes collègues peuvent t'aider. Tu sais quand on était dans… mettons qu'on se ramène à la situation qu'on connait, qu'on a travaillé beaucoup… quand on calculait… G : Il cherche une pente. S : Qu'est-ce que tu dis? G : Il cherche une pente. S : Il cherche une pente?! G : Bien, il cherche la variation eh… [moment de réflexion]	 Figure F11 : Représentations graphiques de Karine
S : Il fait une variation de… [moment de réflexion]… de ma variable indépendante… Eh, une variation de ma variable dépendante, sur une variation de ma variable indépendante [je pointe un des calculs de Jérémie soit 25200 /2]	[moment de réflexion] 00:26:28
G : Hmm. Attends, le temps [il pointe la première ligne de la table de valeurs], ce serait la variable dépendante? S : Indépendante. A : Indépendante. S : C'est mêlant hein?! Parce que je ne parle pas de x et de y ?! G : C'est correct! [moment de réflexion] S : Ça fait que là tu [Jérémie] es en train de calculer plein de pentes? J : Ouais.	

S : Des pentes de quoi? Est-ce que, sur ton graphique, tu serais capable de me montrer sont où ces pentes-là?
00:27:00
S : Toi, Antoine, es-tu d'accord avec cette démarche-là? À quoi ça sert de faire ça?
A : Bien, ça revient à faire la dérivée.
S : La dérivée où?
A: Bien... [moment de réflexion]... entre 12 et 14 pour trouver genre à peu près à quel moment ça commence à réduire.
* S : La dérivée entre 12 et 14?!
A : Bien c'est... Trouver une tangente entre 12 et 14 pour savoir quand est-ce que ta variation est plus nulle et commence à descendre... ou quand c'est nul et à partir de ce moment-là, on sait quand est-ce qu'elle descend.
[moment de réflexion]
S : Ça fait que là, si je reprends ma question... sur ton graphique, il est où celui-là [je pointe un de ses calculs de taux de variation] par exemple...?
J : Il serait dans le fond, on avait dit de 4 à 12. Il serait de là à là [il pointe 00:28:00 deux points sur son graphique].
S : Ok. Ça fait que là, ce serait ton taux de variation moyen...
J : ... entre ces deux points-là.
S : Et dans ta situation, qu'est-ce qu'il représente le taux de variation?
G : La pente.
S : La pente, mais qu'est-ce qu'il veut dire? Qu'est-ce qui arrive avec ma population?
J : Bien là en ce moment, elle continue de croître mais elle croît lentement.
G : C'est l'intensité à laquelle elle croît.
S : Qu'est-ce que tu as dit?
G : C'est l'intensité à laquelle elle croît.
S : C'est l'intensité avec laquelle elle va croître...
G : ... ou décroître.
S : ... ou décroître. C'est sa façon de croître. [moment de réflexion] Ça fait que c'est son taux de croissance?!
G : Oui. Hahaha!

* associe pente à dérivée puis pente/dérivée à tangente !

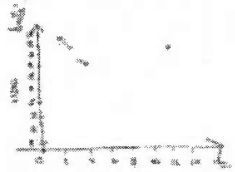


Figure F12 : Représentation graphique d'Annie

00:27:00

RV + RTV → RG ≈

Interprétation du TVM en contexte !

00:27:35

RV + RG → RV + formelle.
RV en contexte

J : Encore là, on dit qu'il y a une croissance mais peut-être qu'à 8 on dit qu'elle commence à descendre. Je veux dire, on passe de 2800 à 9800 ça fait que c'est sûr qu'à quelque part c'était plus faible que ça et qu'après ça, ça a peut-être redescendu.
S : C'est ça, ça veut dire que ce n'est pas nécessairement là...
J : Bien non, c'est ça! Parce que tu vois que ça a passé de 12100 à 9800...
* A : Ça aurait pu comme redescendre et comme...
J : ... Ouais...
A : ... recommencer à monter.
S : Aussi oui.
J : Non, 00:29:00 mais ce que je veux dire, c'est que ça aurait pu dans le fond arrêter de monter et commencer à descendre avant le 12.
A : Ouais c'est ça, mais...
* J : ... et donner quand même une moyenne positive. Parce que dans le fond là, on a une moyenne de 2800 mais ça reste une moyenne... je veux dire... n'empêche qu'il y en a qui sont peut-être négatifs dans le tas!
S : C'est comme une vitesse moyenne. Si je dis que je suis allée à une vitesse moyenne de 100 km/h pour aller à Qc...
J : Et que tu as été arrêtée une demi-heure de temps...
S : Bien là, ça veut qu'il y a peut-être des bouts que je suis allée à plus de 100 km/h. Ça fait que c'est la même chose là!
J : Ouais.
S : Ok. Ça fait que ça veut dire que là, on ne sait pas trop, il est où le...
J : Le point exact.
S : Ok, bien je vais vous laisser continuer ensemble. → lisent la question #4 et voient la formule

[Je quitte cette équipe pour aller dans l'équipe des filles.]

[moment de réflexion] [Ils reprennent un travail plutôt individuel. Jérémie semble vouloir faire du travail d'équipe. Il pense un peu tout haut.]

00:30:00

00:28:00

comprends que la TV est menée à (?) modélisation graphique

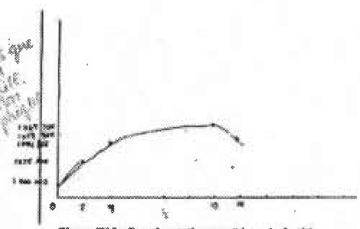


Figure F13 : Représentation graphique de Judith

Vision de la moyenne.

00:29:00

00:29:29

Voici maintenant un extrait, en lien avec la partie du verbatim présentée ci-haut, d'une première analyse :

- Tentatives de repérer le sommet, ce qui mène à des discussions autour du taux de variation moyen (dans différents registres), de la conversion de la table de valeurs vers le graphique (Séance 4, p. 15), de la vision de la moyenne (Séance 4, p. 15).
  - Travaille sur la table de valeurs pour repérer le moment où le nombre de bactéries commence à diminuer.
    - Les propositions pour répondre à la question « quand est-ce que le nombre de bactéries va commencer à diminuer ? » sont d'abord des valeurs précises du nombre d'heures (douzième heure ou treizième heure (Séance 4, p. 11)
    - C'est moi qui amène l'idée d'observer plutôt un intervalle (12, 14).
    - Antoine et Jérémie croient que ce sera dans l'intervalle (12, 14). À ma demande, ils justifient cela par le fait que le nombre de bactéries à la quatorzième heure est plus petit que celui à la douzième heure. On ne parle pas encore de taux de variation, mais bien de la variation entre deux valeurs de la variable dépendante (Séance 4, p. 12).
    - Guillaume, lui, accepte de sortir de l'intervalle (12, 14). Il propose qu'entre 11 et 12, ça diminue aussi, puis entre 10 et 11. Or, il ne justifie pas vraiment la raison qui l'amène à considérer

ces intervalles, étant donné que la table de valeurs ne contient pas les données pour 10 ni pour 11.

- Travaille sur la table de valeurs pour repérer l'intervalle pendant lequel le nombre de bactéries commence à diminuer (voir Extrait A.1).

  - Passage du travail sur les valeurs données dans la table de valeurs aux taux de variation entre ces valeurs. Pour ce faire, il faut manipuler (traiter) la table de valeurs. C'est en effet ce que Jérémie a fait (Figure 4.19)

  - Jérémie associe ses calculs (du taux de variation moyen sur les intervalles donnés dans la table de valeurs) à une moyenne. Or, il ne peut préciser plus que ça (manipulation de la table des valeurs (TV) vers production de représentation verbale).

  - Guillaume associe les termes « moyenne » et « pente ». Peut-être reconnait-il aussi le calcul associé à l'idée de pente (RV vers RV ou RT/V vers RV). Il semble également faire une certaine association entre les termes « pente » et « variation ».

  - Je produis une représentation verbale du concept de taux de variation « variation de ma variable dépendante sur une variation de ma variable indépendante ». Or, les trois garçons ne réutilisent pas vraiment cette représentation.

  - Pour sa part, Antoine associe les termes « pente » et « moyenne » au concept de dérivée.

- Or, lorsque je lui demande « la dérivée où? », Antoine identifie un intervalle (entre 12 et 14) alors qu'une dérivée devrait être associée à un point en particulier.

- Antoine associe également le terme « dérivée » au terme « tangente ». Encore une fois, il y a un problème avec le lien entre tangente et un intervalle. La tangente (comme la dérivée) est associée à un point en particulier. On peut donc penser qu'Antoine sait faire le rapprochement entre différents termes (représentations verbales), mais qu'il a de la difficulté à leur attacher un sens…à les coordonner?!?

- En résumé :

    - Manipulation de la TV vers RV (moyenne)
    - RV (moyenne) vers RV (pente)
    - RV (pente) vers RV (variation)
    - RV (moyenne + pente) vers RV (dérivée)
    - RV (dérivée) vers RV (tangente)
    - RV (dérivée) + RV (tangente) SANS RV (interprétation/verbalisation/sens…?!?)

- Antoine reconnait par contre qu'une pente nulle impliquerait un changement de croissance de la fonction « quand c'est nul et à partir de ce moment-là [moment précis et non un intervalle], on sait quand est-ce qu'elle descend. » (Extrait A.1)

Jérémie : Ben là, c'est parce que lui [le bond entre deux valeurs de temps] c'est deux unités, deux unités, lui représente [8] unités, **ça fait que tu le divises**, tu peux savoir de combien... [Il fait référence à ses calculs pour trouver le taux de croissance moyen entre chaque donnée de la table de valeurs voir Figure 4.19.]

[...]

Sarah : Donc là, qu'est-ce que tu es en train de calculer quand tu fais ça?

Jérémie : **Une moyenne**.

Sarah : La moyenne... une moyenne mais de quoi? Comment tu l'appellerais cette moyenne-là?

Jérémie : Je ne me rappelle plus. Je suis fatigué!

[...]

Guillaume : **Il cherche une pente**.

Sarah : Il cherche une pente?!

Guillaume : Bien **il cherche la variation** eh... [moment de réflexion]

Sarah : Il fait **une variation de**... [moment de réflexion]... de ma variable indépendante... Eh... **de ma variable dépendante sur une variation de ma variable indépendante** [je pointe les calculs sur la table de valeurs de Jérémie (voir Figure 4.19)].

[...]

Sarah : Des pentes de quoi? Est-ce que, sur ton graphique, tu serais capable de me montrer sont où ces pentes-là? [moment de réflexion] Toi, Antoine, es-tu d'accord avec cette démarche-là? À quoi ça sert de faire ça?

Antoine : Bien, **ça revient à faire la dérivée**.

Sarah : La dérivée où?

Antoine : Bien...entre 12 et 14 pour trouver genre à peu près à quel moment ça commence à réduire.

Sarah : La dérivée entre 12 et 14?! [sur un ton sceptique]

Antoine : Bien c'est... **trouver une tangente entre 12 et 14** pour savoir quand est-ce que ta variation est plus nulle et commence à descendre... ou **quand c'est nul et à partir de ce moment-là, on sait quand est-ce qu'elle descend.**

Extrait A.1 Discussion autour du taux de variation moyen de la table de valeurs au graphique (Séance 4, p. 13-14)

- Tentative de conversion de la table de valeurs/calculs numériques de TVM vers le registre graphique.

- Tentative de conversion des différentes représentations (TV, RN, RG) vers une représentation verbale collée au contexte et plus formelle, le « taux de croissance ». (voir Extrait A.2)

- Guillaume interprète bien les représentations liées au taux de variation moyen (RV) ou à la pente (RV+RG). « C'est l'intensité à laquelle elle [la population] croît… ou décroit. » (Séance 4, p. 14)

- Guillaume reconnait également qu'un taux de variation moyen de plus en plus petit affecte la « vitesse » de croissance de la population. « Elle continue de croitre, mais elle croît lentement. » (Séance 4, p. 14)

o Reconnaissance du « flou » que le long intervalle (4, 12) amène (voir Extrait A.2).

- Les participants commencent à voir que la table de valeurs donne des informations « incomplètes » et à avoir des réflexions qui sont liées au concept de moyenne. Ils reconnaissent qu'entre les données proposées dans la table de valeurs, il peut y avoir plusieurs scénarios possibles par rapport au comportement de la fonction.

- Jérémie et Antoine commencent donc à considérer des valeurs qui ne sont pas données dans la table de valeurs comme « moment où la population cesse d'augmenter pour commencer à diminuer » à t=8 par exemple proposé par Jérémie.

Jérémie : Encore là, on dit qu'il y a une croissance **mais peut-être qu'à 8**, on dit qu'elle commence à descendre. Je veux dire, on passe de 2800 (taux de croissance moyen de l'intervalle [4, 12]) à 9800 (taux de croissance moyen de l'intervalle [2, 4]), ça fait que **c'est sûr qu'à quelque part c'était plus faible que ça** et qu'après ça, ça a peut-être redescendu.

Sarah : C'est ça, ça veut dire que ce n'est pas nécessairement là…

Jérémie : Bien non, c'est ça! Parce que tu vois que ça a passé de 12 100 (taux de croissance moyen de l'intervalle [0, 2]) à 9 800 (taux de croissance moyen de l'intervalle [2, 4]).

Antoine : **Ça aurait pu redescendre** et comme…

Jérémie : … ouais…

Antoine : … **recommencer à monter**.

Sarah : Aussi oui!

Jérémie : Non, mais ce que je veux dire, c'est que **ça aurait pu dans le fond arrêter de monter et commencer à descendre avant le 12**.

Antoine : Ouais c'est ça, mais…

Jérémie : … et **donner quand même une moyenne positive**. Parce que dans le fond là, on a une moyenne de 2 800 mais ça reste une moyenne… je veux dire… n'empêche qu'il y en a qui sont peut-être négatifs dans le tas!

Extrait A.2 Reconnaissance du « manque » d'information dans la table de valeurs (Séance 4, p. 15)

ANNEXE B

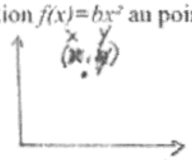
LA DÉMARCHE DANS LE REGISTRE ALGÉBRIQUE DE JÉRÉMIE POUR RÉSOUDRE LE PREMIER PROBLÈME DE LA SÉANCE 5

Annexe citée à la section 4.4.2.1 (p. 175)

La démarche dans le registre algébrique de Jérémie pour résoudre le premier problème de la séance 5 (Cahier de l'étudiant Jérémie, séance 5, p. 1–2).

S'il te plaît, utilise un crayon à encre pour écrire. $\frac{a}{3} - 2 = bx^2$

1. Trouve une valeur de a et b telle que la droite $2x+3y=a$ est tangente au graphique de la fonction $f(x)=bx^2$ au point où $x=3$.



①
$f(x) = bx^2$ $\quad f(x) = 9b \quad y = 9b$

$f(x) = b(3)^2 \quad \frac{y}{b} = 9$

voir verso

$\frac{a}{27} - \frac{2}{9}$

$f(x) = \left[\frac{a - 6}{21}\right](3)^2$

$y = \left[\frac{a-6}{21}\right](9)$

$y = \frac{9a - 54}{189}$

$\frac{1}{3}a - 2$

$2x + 3\left[\frac{9a - 54}{189}\right] = a$

$2(3) + \left[\frac{27a - 135}{567}\right] = a$

$9 + \frac{27a}{567} - \frac{135}{567} = a$

$\frac{5103 - 135 + 27a}{567} = a$

$4968 + 27a = 567a$

$4968 = 567a - 27a$

$4968 = 540a$

$\boxed{9{,}2 = a}$

$\boxed{\cancel{\frac{46}{5} = a}}$

① $2x + 3y = a$

$2(3) + 3y = a$

$6 + 3y = a$

$-a + 6 = -3y$

$\frac{-a + 6}{-3} = y$

$\frac{a}{3} - 2 = y$

$9b = \frac{-a + 6}{-3}$

$9b = \frac{a}{3} - 2$

②

erreur calcule voir verso

$9b = \frac{-a + 6}{-3}$

$-21b = -a + 6$

$b = \frac{-a + 6}{-21}$

$b = \frac{a}{21} + \frac{6}{-21}$

$b = \frac{a}{21} - \frac{2}{7}$

$9b = \frac{(9{,}2)}{3} - 2$

$b = \frac{\left[\frac{9{,}2}{3} - 2\right]}{9}$

$\boxed{\cancel{b = 0{,}1185}}$

$b = \frac{\frac{9{,}2}{3}}{9} - \frac{2}{9}$

$b = \frac{\frac{9{,}2}{3} - \frac{6}{3}}{9}$

$b = \frac{\left[\frac{3{,}20}{3}\right]}{9}$

$b = \frac{9{,}2}{27} - \frac{18}{27}$

$b = \frac{\left(\frac{\left[\frac{16}{5}\right]}{3}\right)}{9}$

$b = \frac{\left[\frac{16}{15}\right]}{9}$

$\boxed{\cancel{b = \frac{16}{135}}}$

2

$x=3 \quad a=\frac{46}{5} \quad b=\frac{16}{135}$

$f(x)=bx^2$

$y=bx^2$

$y=\left(\frac{16}{135}\right)(3)^2$

$y=\left(\frac{16}{135}\right)(9)$

$y=\frac{144}{135}$

$2x+3y=a$

$2(3)+3y=\left(\frac{46}{5}\right)$

$(6)+3y=\left(\frac{46}{5}\right)$

$3y=\left(\frac{46}{5}\right)-6$

$3y=\frac{46}{5}-\frac{30}{5}$

$3y=\frac{16}{5}$

$y=\frac{\left[\frac{16}{5}\right]}{3}$

$y=\frac{16}{15}$

$\frac{a}{3}-2=bx^2$

$\frac{a}{3}-2=b(3)^2$

$\frac{a}{3}-2=9b$

$\frac{\left(\frac{a}{3}-2\right)}{9}=b$

$\frac{a}{27}-\frac{2}{9}=b$

$\frac{a}{27}-b=\frac{2}{9}$

$\frac{a-27b}{27}=\frac{2}{9}$

$a-27b=6$

$a=6+27b$

3

$9b=\frac{-a+6}{-3}$

$b=\frac{-a+6}{-27}$

$b=\frac{a}{27}-\frac{2}{9}$

4

$y=\left[\frac{a}{27}-\frac{2}{9}\right](3)^2$

$y=\left[\frac{a}{27}-\frac{2}{9}\right]9$

$y=\frac{9a}{27}-\frac{18}{9}$

$y=\frac{1}{3}a-2$

$\cancel{2x+3\left[\frac{1}{3}a-2\right]=a}$

$\cancel{2(3)+\frac{3}{3}a-6=a}$

$\cancel{6+a-6=a}$

$y=bx^2$

4

$\left[\frac{1}{3}a-2\right]=\cancel{\left[\frac{a}{27}-\frac{2}{9}\right]}(3)^2$

$\frac{144}{135}=\frac{16}{15}\begin{matrix}\times 9\\ \times 9\end{matrix}$

$\cancel{\boxed{\frac{144}{135}=\frac{144}{135}}}$

$2x+3y=a$

$\cancel{2(3)+3\left[\frac{1}{3}a-2\right]=6+27b}$

$\cancel{\cancel{2x}+a-\cancel{6}=6+27b}$

$\cancel{6+27b=6+27b}$

RÉFÉRENCES

Baker, B., Cooley, L. et Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for the research in Mathematics Education, 31*(5), 557–578.

Biza, I. (2007). Is the tangent line tangible? Students' intuitive ideas about tangent lines. Dans D. Küchemann (dir.), *Actes de British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3).

Biza, I. (2010). *Making tangent lines... tangible! Using latent class analysis and confirmatory factor analysis to identify and classify students' perceptions of key concepts in calculus*. Université de Montréal, Montréal.

Biza, I., Christou, C. et Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education, 10*(1), 53–70.

Biza, I. et Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(4), 218–229.

Boucher, C., Marotte, L. et Coupal, M. (2007). *Intersection mathématique, Manuel A, 2e cycle du secondaire 1re année*. Graficor Chenelière Éducation.

Boyer, C. B. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. Mineola, NY : Dover Publications, Inc.

Brunelle, É. et Désautels, M.-A. (2011). *Calcul différentiel*. Les Éditions CEC.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France : La pensée sauvage.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. Dans A. H. Schoenfeld, J. Kaput et E. Dubinsky (dir.), *Reasearch in collegiate mathematics education, III* (CBMS Issues in Mathematics Education, vol. 7, p. 114–162). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Carlson, M., Oehrtman, M. et Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment: A Tool for Assessing Students' Reasoning Abilities and Understandings. *Cognition and Instruction, 28*(2), 113–145.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures: Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en didactique des mathématiques, 15*(1), 7–47.

Chappell, K. K. et Kilpatrick, K. (2003). Effects of concept-based instruction on students' conceptual understanding and procedural knowledge of calculus. *Primus, 13*(1), 17–37.

Charron, G. et Parent, P. (2007). *Calcul différentiel* (6e éd.). Canada : Beauchemin Chenelière Éducation.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. Dans R. A. Lesh et A. E. Kelly (dir.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (p. 307–333). Hillsdale, NJ : Erlbaum.

Cobb, P. et Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83–94.

Corriveau, C. (2013). *Des manières de faire des mathématiques comme enseignants abordées dans une perspective ethnométhodologique pour explorer la transition secondaire collégial* (thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal, Canada). Récupéré de l'archive de publications électroniques de l'UQAM: https://archipel.uqam.ca/6224/

diSessa, A. A, Hammer D., Sherin, B. et Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing : Meta-representational expertise in children. *Journal of mathematical behavior, 10*, 117–160.

Dufour, S. (2009). *Analyse de la résolution de problèmes non routiniers basée sur les représentations*. 61e rencontre de la Commission internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM). Montréal.

Dufour, S. (2011). *L'utilisation des représentations par deux enseignants du collégial pour l'introduction de la dérivée* (mémoire de maitrise, Université du Québec à Montréal, Canada). Récupéré de l'archive de publications électroniques de l'UQAM: https://archipel.uqam.ca/4059/.

Dufour, S. et Jeannotte, D. (2013). La tâche non routinière sous l'angle du contrôle : un exemple en calcul différentiel. *Bulletin AMQ*, 53 (4), 29–43.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations : L'Articulation de deux registres. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 1*, 235–253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotique et apprentissages intellectuels*. Bern, Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103–131.

Duval, R. (2007). La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée. Dans J. Baillé (dir.), *Du mot au concept Conversion* (p. 9–45). Grenoble, France: Presses universitaires de Grenoble.

Eisenberg, T. et Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. Dans W. Zimmermann et S. Cunningham (dir.), *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA Series.

Engelbrecht, J., Harding, A. et Potgieter, M. (2005). Undergraduate students' performance and confidence in procedural and conceptual mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36(7), 701–712.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Kluwer Academic Publishers.

González-Martín, A. S., Hitt, F. et Morasse, C. (2008). *Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: the concept of co-variation as a prelude to the concept of function.* Actes du 11e International Congress on Mathematics Education (ICME-11) (Vol. 20). Monterrey, N.L., Mexico.

González-Martín, A. S., Seffah, R. et Nardi, E. (2009). *The concept of series in the textbooks: a meaningful introduction?* Actes de la 33ième Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1). Thessaloniki, Grèce.

Güçler, B. (2012). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 439–453.

Habre, S. et Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(1), 57–72.

Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L. et Presmeg, N. C. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 12*(2), 152–176.

Hähkiöniemi, M. (2006a). *Hypothetical learning path to the derivative*. Université de Jyväskylä, Finlande.

Hähkiöniemi, M. (2006b). *The role of representations in learning the derivative*. Université de Jyväskylä, Finlande.

Hamel, J. et Amyotte, L. (2007). *Calcul différentiel.* Canada: Édition du Renouveau Pédagogique Inc.

Hardy, N. (2009). *Students' models of the knowledge to be learned about limits in college level calculus courses. The influence of routine tasks and the role played by institutional norms* (Thèse de doctorat). Université Concordia, Montréal.

Hiebert, J. et Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 65–97). New York, NY: Macmillan publishing company.

Hitt, F. (2003a). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. Dans E. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, F. Rivera, et U. S. (dir.), *Matematica Educativa: Aspectos de la Investigacion Actual 2* (p. 91–111). Mexico : Fondo de Cultura Econominca.

Hitt, F. (2003b). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 8,* 255–271.

Hitt, F. (2006). Student's functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An exemple: the concept of limit. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 11*, 251–267.

Hitt, F. et Morasse, C. (2009). *Développement du concept de covariation et de fonction en 3e secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes.* Actes de la 61e rencontre de la Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM). Montréal.

Janvier, C. (1983). Représentation et compréhension. Un exemple: le concept de fonction. *Bulletin de l'AMQ*, (3), 22–28.

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: an example from algebra. Dans K. R. Leatham (dir.), *Vital directions for mathematics education research* (p. 153–171). New York, NY: Springer.

Komorek, M. et Duit, R. (2004). The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of non-linear systems. *International Journal of Science Education, 26*(5), 619–633.

Ministère de l'Éducation d'Ontario (MEO). (2017). *Le curriculum de l'Ontario, 11e et 12e année, Mathématiques* (révisé). Gouvernement d'Ontario: Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Lesh, R., Behr, M. et Post, M. (1987). Rational number relations and proportions. Dans C. Janvier (dir.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p. 41–58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. The *Journal of Mathematical Behavior, 23*(4), 405–427.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS). (2004). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire*. Gouvernement du Québec.

Odierna, M. (2004). *Étude de l'enseignement et de l'apprentissage des formes indéterminées* (thèse de doctorat, Université de Montréal, Canada). Récupéré de l'archive de publications électroniques de l'Université de Montréal: https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/bitstream/handle/1866/14453/Odierna_Melanie_2004_memoire.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans* (thèse de doctorat, Université de Montréal, Canada). Repéré à https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/bitstream/handle/1866/13509/Passaro_Valeriane_2015_these.pdf?sequence=6

Powell, A. B., Francisco, J. M. et Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 405–435.

Ministère de l'Éducation nationale (MEN). (2010, 30 septembre). Programme d'enseignement spécifique de mathématiques en classe de première de la série économique et sociale et d'enseignement obligatoire au choix en classe de première de la série littéraire. *Bulletin officiel spécial*, (9). Repéré à http://www.education.gouv.fr/cid53322/mene1019662a.html

René De cotret, S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x,* (17), 5–27

Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique coconstruite entre chercher et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire* (thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal, Canada). Repéré à https://archipel.uqam.ca/3107/.

Schwarz, B., Dreyfus, T. et Bruckheimer, M. (1990). A model of the function concept in a three-fold representation. *Computers Education, 14*(3), 249–262.

Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES). (2010). *Sciences de la nature. Programme d'études préuniversitaires 200.B0.* Gouvernement du Québec.

Selden, A., Selden, J., Hauk, S. et Mason, A. (1999). *Do calculus students eventually learn to solve non-routine problems.* Cookeville, Tennessee.

Selden, J., Mason, A. et Selden, A. (1989). Can average calculus students solve non-routine problems? *Journal of Mathematical Behavior, 8,* 45–50.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques, 6*(1), 5–67.

Steffe, L. P. (2002). The constructivist teaching experiment : illustrations and implications. Dans E.von Glaserfeld (dir.), *Radical constructivism in mathematics education* (p. 177–194). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Steffe, L. P. (1983). The teaching experiment methodology in a constructivist research program. Dans *The Fourth International Congress on Mathematical Education* (ICME) (p. 469–471). Berkeley, Californie.

Steffe, L. P. et Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. Dans R. Lesh et A. E. Kelly (dir.), *Research design in mathematics and science education* (p. 267–307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stewart, J. (2012). *Calcul différentiel* (adaptation de S. Beauregard et C. Trudel). Canada : Modulo.

Straus, K. N., Austin, J. C., Curtin, C. L., Mcguire, M. Y., Danhof, N., Bauer, E. W., Turner, R. M., et al. (s.d.). *Michigan Merit Curriculum. Course /Credit requirements. Pre-Calculus.* Michigan Department of Education.

Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. Dans J. Bergeron, N. Herscovics, et C. Kieran (dir.), *Actes de la 11e rencontre du groupe international Psychology of Mathematics Education (PME)*, (volume 3, p. 69–75). Montréal, Canada : Université de Montréal.

Tall, D. (1992). *Students' difficulties in calculus*. Actes du groupe de travail 3 sur les Students' Difficulties in Calculus, International Conference on Mathematics Education 7 (ICME 7) (p. 13–28). Québec, Canada.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. Dans A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, et C. Laborde (dir.), *International handbook of mathematics education* (p. 289–325). Dordrecht, Pays-bas: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2004). *Thinking through three worlds of mathematics*. Actes de la 28e rencontre du groupe international Psychology of Mathematics Education (PME) (p. 281–288). Bergen, Norvège.

Tall, D. et Katz, M. (s.d.). *A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. Educational Studies in Mathematics*. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010x-katz-cauchy-continuity.pdf

Thomas, G. B, Finney, R. L, Weir, M. D., Hass, J. et Giordano, F. R. (2008). *Calcul différentiel* (Adaptation V. Godbout et H. Boulanger). Canada: Chenelière Éducation.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. Dans G. Harel et J. Confrey (dir.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (p. 181–234). Albany, NY : SUNY Press.

Thompson, A. G., Thompson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, part II: mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 2–24.

Thompson, P.W. et Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: foundational ways of thinking mathematically. Dans J. Cai (dir.), *Compendium for research in mathematics education* (p. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 22*(3), 219–236.

Vivier, L. (2010). La notion de tangente dans l'enseignement secondaire. Annales de *Didactique et de Sciences Cognitives, 15*, 173–199.

Weber, E. D. (2012).Students' ways of thinking about two-variable functions and rate of change in space. Thèse de doctorat. Arizona State University: États-Unis.

Williams, S. R. (2001). Predications of the Limit Concept : An Application of Repertory Grids. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(4), 341–367.

Zandieh, M. J. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivative*. Oregon State University.

Zandieh, M. J. (2000). A theoritical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBSM Issues in Mathematics Education, 8*, 103–127.

Zerr, R. J. (2010). Promoting students' ability to think conceptually in calculus. *Primus, 20*(1), 1–20.

Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. Dans W. Zimmermann et S. Cunningham (dir.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (p. 127–138). États-Unis: MAA Series.

Zimmermann, W. et Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization? Dans W. Zimmermann et S. Cunningham (dir.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (p. 1–8). États-Unis: MAA Series.