

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

REVÊTEMENTS RAMIFIÉS DE NŒUDS QUASI POSITIFS ET 3-SPHÈRES
D'HOMOLOGIE ENTIÈRE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
FRANCIS BEAUCHEMIN-CÔTÉ

JANVIER 2019

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je débute en remerciant mon superviseur Steven Boyer, dont la générosité n'a d'égal que son savoir, qui m'a initié à l'univers de la topologie et de la théorie des nœuds. Sa disponibilité et sa patience ont été d'une aide inestimable pour la réalisation de ce mémoire et je lui en suis profondément reconnaissant.

Je souhaite également remercier Olivier Collin pour son soutien et ses encouragements tout au long de mon parcours universitaire, ainsi que Franco Saliola pour son amour contagieux des mathématiques. Votre enseignement a façonné l'étudiant que je suis aujourd'hui, si bien qu'il y a certainement un peu de vous dans ce projet de maîtrise.

Merci aussi à tous ceux et celles qui ont rendu mon expérience à l'UQÀM inoubliable : Daniel, Laura-Marie, Nancy, Jean-Christophe, Herman, Émile, Sébastien, Florence, Pauline, Alexandro et tous les autres. Un merci spécial à Stéphanie Schanck, qui sait rendre tout moment insignifiant en souvenir inénarrable.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à ma famille, mes sœurs et plus particulièrement mes parents. Leur soutien inconditionnel est à la base même de ce travail. Merci de continuer à croire en moi, je vous en suis éternellement reconnaissant.

Finalement, je remercie du fond du cœur la personne qui m'est la plus importante, mon épouse. Merci, Laurence, pour ton amour et ta patience. Merci de célébrer avec moi les petites victoires. Ce mémoire n'aurait pas eu la même saveur sans toi. Merci !

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vii
RÉSUMÉ	ix
ENGLISH ABSTRACT	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE	5
1.1 Théories d'homologie et de cohomologie	5
1.1.1 Théorie d'homologie	5
1.1.2 Théorie de cohomologie	7
1.2 Dualité	10
1.3 Produit d'intersection	16
CHAPITRE II	
FORMES BILINÉAIRES UNIMODULAIRES	19
2.1 Forme bilinéaire unimodulaire	21
2.2 Éléments caractéristiques et théorème de van der Blij	24
CHAPITRE III	
THÉORIE DES NŒUDS	31
3.1 Quelques définitions	31
3.2 Surfaces de Seifert	35
3.3 Nombre d'enlacements	39
3.4 Forme de Seifert	40
3.5 Signature d'un nœud	43
3.6 Polynôme d'Alexander	46
3.7 Revêtements cycliques	48
3.7.1 Revêtements cycliques de l'extérieur d'un nœud	48

3.7.2	Revêtement cyclique à n feuilles de S^3 , ramifié sur un nœud K .	57
3.7.3	Formule de Fox	61
CHAPITRE IV		
NŒUDS QUASI POSITIFS.		
4.1	Tresses	67
4.2	Positivité	71
4.3	Nœuds \mathbb{C} -transverses et 4-genre	77
CHAPITRE V		
THÉORÈME DE BOILEAU-BOYER-GORDON		
5.1	Sphère d'homologie	81
5.2	Propriétés des revêtements cycliques ramifiés	84
5.3	Construction de $\Sigma_n(F)$	86
5.4	Calcul de $H_2(\Sigma_n(F))$ et produit d'intersection.	99
5.5	Théorème de Boileau-Boyer-Gordon	104
5.6	Quelques applications	109
5.6.1	Nœuds de bretzel classiques	109
5.6.2	Double de Whitehead positif sans torsion d'un nœud	112
CONCLUSION		
RÉFÉRENCES		

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
3.1 Nœud polygonal en figure huit	35
3.2 Types de croisement dans un diagramme de nœud orienté	36
3.3 Algorithme de Seifert	37
3.4 Construction du revêtement cyclique à n feuilles	50
3.5 L'espace \tilde{X}_n est le revêtement cyclique à n feuilles de $X(K)$	51
3.6 Revêtement ramifié de l'exemple 3.7.10, qui est également une coupe méridionale du revêtement ramifié de l'exemple 3.7.11	58
4.1 Exemple de tresses	69
4.2 Fermeture de la tresse $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1} \in B_3$ qui est du même type que le nœud en huit	70
4.3 Types de croisement dans un diagramme de nœud orienté	72
4.4 Nœuds toriques comme fermeture de tresses	74
4.5 Surface tressée de $\sigma_{3,4}^{-1}\sigma_{1,2}\sigma_{1,3} = \sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_{1,3}$	76
5.1 Extérieur de F dans B^4	91
5.2 Construction par blocs de $\Sigma_n(F)$	100
5.3 Le nœud bretzel $P(5, 7, -3)$ a un polynôme d'Alexander trivial	110

RÉSUMÉ

La conjecture de Poincaré d'Ozsváth-Szabó stipule que S^3 et la sphère d'homologie de Poincaré sont les seules 3-sphères d'homologie entière irréductibles à être des L-espaces. Dans ce mémoire, nous étudions et généralisons un critère donné par Boileau, Boyer et Gordon concernant cette conjecture pour les revêtements cycliques à 2 feuilles de S^3 ramifiés sur des nœuds fortement quasi positifs. Pour ce faire, nous mentionnons quelques notions d'homologie et de cohomologie ainsi que quelques résultats sur les formes unimodulaires pour prouver le théorème de van der Blij. Nous continuons avec un rappel de la théorie des nœuds et de ses outils de bases et y présentons une démonstration de la formule de Fox qui permet d'identifier les revêtements ramifiés $\Sigma_n(K)$ qui sont des 3-sphères d'homologie. Nous énumérons ensuite les différents types de positivité d'un nœud. Le genre et le 4-genre des nœuds quasi positifs sont déduits à l'aide de la conjecture locale de Thom prouvée par Kronheimer et Mrowka. Nous retraçons également le travail de Kauffman pour montrer que le produit d'intersection sur $H_2(\Sigma_n(F))$ est pair lorsque F est isotope à une surface de Seifert et établissons que l'argument pour le critère trouvé par Boileau, Boyer et Gordon s'étend à tout $n \geq 2$ et aux nœuds quasi positifs. Finalement, nous investiguons dans quelle mesure ce critère peut être intéressant pour déterminer si $\Sigma_n(K)$ n'est pas un L-espace.

Mots-clés : Conjecture de Poincaré d'Ozsváth-Szabó, nœuds, L-espace, quasi positif, revêtement cyclique ramifié, sphère d'homologie

ENGLISH ABSTRACT

English title : Cyclic branched covers of quasipositive knots and integer homology 3-spheres

The Ozsváth-Szabó Poincaré conjecture states that the only irreducible integer homology 3-sphere L-spaces are S^3 and the Poincaré homology sphere. In this work, we generalized a criterion for this conjecture for double cyclic branched covers of strongly quasipositive knots found by Boileau, Boyer and Gordon. First, we introduce some homology and cohomology theory that we'll need throughout our study. We then present unimodular symmetric bilinear forms to prove the van der Blij theorem. Next, we turn our attention to knot theory and show a formula of Fox that enables us to detect when $\Sigma_n(K)$ is a homology 3-sphere. Notions of positivity are then introduced and we deduce the slice genus (genus) of quasipositive (strongly quasipositive) knots using the local Thom conjecture proved by Kronheimer and Mrowka. Following the work of Kauffman, we show that the intersection product on $H_2(\Sigma_n(F))$ is even when F is an embedded surface in B^4 isotopic to a Seifert surface relative to K . We prove that the argument for the criterion of Boileau, Boyer and Gordon generalizes to all $n \geq 2$ and all quasipositive knots. Finally, we investigate whether this theorem can detect cyclic covers that are not L-spaces.

Keywords : Ozsváth-Szabó Poincaré conjecture, knot, L-space, quasipositive, cyclic branched cover, homology sphere

INTRODUCTION

La topologie de basse dimension est un sujet très riche qui occupe encore aujourd'hui grandement les mathématiciens. Durant les dernières années, Ozsváth et Szabó ont introduit et développé l'homologie d'Heegard Floer, un nouvel outil permettant d'étudier autrement les variétés à trois dimensions. Un L-espace est une 3-sphère d'homologie rationnelle dont le rang du groupe d'homologie d'Heegard Floer correspond au nombre d'éléments de son premier groupe d'homologie (voir définition 5.5.1). Il est en fait conjecturé que seules S^3 et la sphère d'homologie de Poincaré sont des L-espaces qui sont également des 3-sphères d'homologie entière irréductibles (Szabó, 2009). Il s'agit de la conjecture de Poincaré d'Osváth-Szabó.

Dans leur article (Boileau *et al.*, 2017), Boileau, Boyer et Gordon étudient les revêtements cycliques à n feuilles de la sphère à trois dimensions, ramifiés le long d'un nœud (fortement) quasi positif, qui sont des L-espaces. Comme ils le remarquent, leurs travaux permettent d'établir un critère pour la conjecture présentée ci-haut pour les revêtements à deux feuilles ramifiés sur des nœuds fortement quasi positifs (problème 12.7 de (Boileau *et al.*, 2017)) :

Théorème 0.0.1. Soit K un nœud fortement quasi positif. Si $\Sigma_2(K)$ est un L-espace qui est également une 3-sphère d'homologie entière, alors $g(K) \equiv 0 \pmod{4}$.

Leur joli argument s'appuie essentiellement sur un résultat concernant les formes unimodulaires paires qui stipule que la signature de telles formes est toujours un multiple de huit. Grosso modo, les auteurs rappellent qu'en fait le produit

d'intersection sur $H_2(\Sigma_2(K))$ est une forme isomorphe à la forme de Seifert symétrisée définie sur $H_1(F)$, où F est une surface de Seifert pour K . Il est donc pair puisque cette dernière l'est clairement. En outre, l'hypothèse indiquant que $\Sigma_2(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière implique que ce produit est unimodulaire. Enfin, leurs travaux mettent en lumière la relation entre la signature d'un nœud fortement quasi positif et son genre lorsque $\Sigma_2(K)$ est un L-espace.

Le but du présent mémoire est d'introduire les notions apparaissant dans l'énoncé de ce théorème et sa preuve afin de l'expliquer. Cependant, nous en profitons pour montrer que leur argument permet de mener au théorème suivant, une forme plus générale du précédent.

Théorème 0.0.2 (Boileau-Boyer-Gordon). Soit K un nœud quasi positif. Si le revêtement ramifié $\Sigma_n(K)$ est un L-espace qui est également une 3-sphère d'homologie entière pour un certain entier $n \geq 2$, alors $g_4(K)(n-1) \equiv 0 \pmod{4}$.

Pour ce faire, nous rappelons au premier chapitre quelques résultats importants d'homologie qui seront utiles pour la suite et introduisons le produit d'intersection sur des variétés compactes de dimension n . Au second chapitre, nous présentons la notion de forme unimodulaire ainsi qu'une preuve du théorème de van der Blij en s'appuyant sur les arguments de Serre (Serre, 1973). Une conséquence directe est que les formes unimodulaires, paires et définies ne peuvent exister que dans les espaces à dimension un multiple de huit, fait essentiel dans la démonstration du théorème 0.0.2. Quant au chapitre suivant, nous y étudions la base de la théorie des nœuds et donnons en détail la construction des revêtements cycliques de S^3 , ramifié le long d'un nœud. Nous y fournissons aussi un argument menant à la formule de Fox. Celle-ci sera très utile pour notamment identifier les 3-sphère d'homologie. Les notions de tresses et de positivité des nœuds sont présentées au chapitre quatre. Nous terminons au dernier chapitre par la construction de

$\Sigma_n(F)$, un revêtement cyclique à n feuilles de la quatre-boule standard, ramifié sur une surface F , et le calcul du produit d'intersection sur $H_2(\Sigma_n(F))$. De là, nous établissons que cette forme bilinéaire est toujours paire et procédons à la preuve du théorème 0.0.2.

CHAPITRE I

HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE

1.1 Théories d'homologie et de cohomologie

Il est possible d'aborder l'homologie et la cohomologie de diverses manières. Par souci d'efficacité, nous avons choisi l'approche axiomatique décrite dans (May, 1999). Ceci nous permettra d'avoir accès rapidement aux résultats classiques sur l'homologie et la cohomologie, l'outil de base avec lequel nous travaillerons. Pour le lecteur qui préférerait une approche plus géométrique et intuitive, nous recommandons l'ouvrage de topologie algébrique de Hatcher (Hatcher, 2002), où plusieurs détails techniques sont traités.

1.1.1 Théorie d'homologie

Définition 1.1.1. Soit G un groupe abélien. Une théorie d'homologie est une famille de foncteurs covariants $H_q(-; G)$, qui envoient les paires d'espaces topologiques (X, A) sur des groupes abéliens, munie d'homomorphismes

$$\partial : H_q(X, A; G) \rightarrow H_{q-1}(A, \emptyset; G)$$

satisfaisant les axiomes suivants :

- (Dimension) $H_0(\{*\}, \emptyset; G) = G$ et $H_q(\{*\}, \emptyset; G) = 0$ pour $q > 0$;

— (Exactitude) À chaque paire (X, A) , la suite d'inclusions

$$(A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$$

induit une longue suite exacte

$$\dots \rightarrow H_q(A, \emptyset; G) \rightarrow H_q(X, \emptyset; G) \rightarrow H_q(X, A; G) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A, \emptyset; G) \rightarrow \dots;$$

— (Excision) Si A et U sont des sous-espaces de X tels que $\bar{U} \subseteq \text{int}(A)$, alors l'inclusion $(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme

$$H_q(X - U, A - U; G) \rightarrow H_q(X, A; G);$$

— (Additivité) Si $(X, A) = \bigsqcup_{i \in I} (X_i, A_i)$, alors

$$H_q(X, A; G) \cong \bigoplus_{i \in I} H_q(X_i, A_i; G);$$

— (Homotopie) Soit $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ des fonctions continues. S'il existe une homotopie de f à g , alors les morphismes induits en homologie seront égaux, c'est-à-dire

$$H_q(f; G) = H_q(g; G).$$

Bien que les notations ci-dessus soient précises, elles peuvent rapidement devenir gênantes et poser problème. Ainsi, afin de les alléger quelque peu, nous noterons $H_q(X; G)$ en lieu de $H_q(X, \emptyset; G)$ et f_* pour les morphismes induits en homologie $H_q(f; G)$. De plus, nous omettrons de préciser le groupe G lorsque celui-ci sera le groupe \mathbb{Z} .

L'axiome d'excision est équivalent à la suite de Mayer-Vietoris :

Théorème 1.1.2 (Suite de Mayer-Vietoris). Soit $A, B \subseteq X$ tels que $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Il existe une longue suite exacte

$$\dots \rightarrow H_q(A \cap B) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} H_q(A) \oplus H_q(B) \xrightarrow{k_* - l_*} H_q(X) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

où i, j, k et l sont les inclusions $A \cap B \hookrightarrow A$, $A \cap B \hookrightarrow B$, $A \hookrightarrow X$ et $B \hookrightarrow X$ respectivement.

La théorie d'homologie qui sera principalement utilisée dans ce qui suit est l'homologie singulière, car elle est très bien adaptée à l'étude des variétés compactes et des nœuds. En fait, il est bien connu que si X est une telle variété, alors $H_q(X)$ est engendré par un nombre fini de générateurs. Ainsi, le théorème de structure des groupes abéliens de type fini implique que

$$H_q(X) \cong \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_l\mathbb{Z}$$

pour certains entiers positifs k, n_1, \dots, n_l . On peut donc décomposer $H_q(X)$ en sa *partie libre* $L_q(X) := \mathbb{Z}^k$ et sa *partie de torsion* $\text{Tor}_q(X) := \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_l\mathbb{Z}$. Le q^{e} *nombre de Betti*, ou le *rang*, de $H_q(X)$ est l'entier k , noté $\beta_q(X)$.

Le prochain théorème, dû à Hurewicz, met en lumière la relation importante entre le groupe fondamental et le premier groupe d'homologie d'une variété.

Théorème 1.1.3. (Hurewicz) Si X est une variété connexe, il existe un homomorphisme surjectif

$$h : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$$

tel que $\ker h = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$. En particulier, $H_1(X)$ est isomorphe à l'abélianisation du groupe fondamental de X , c'est-à-dire

$$H_1(X) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

On dit que h est l'homomorphisme d'Hurewicz.

1.1.2 Théorie de cohomologie

Une théorie de cohomologie se veut une sorte de théorie duale à celle d'homologie. Elle est donc définie de manière tout à fait analogue, à quelques distinctions près.

Définition 1.1.4. Soit G un groupe abélien. Une théorie de cohomologie est une famille de foncteurs contravariants $H^q(-; G)$ qui envoient les paires d'espaces topologiques (X, A) sur des groupes abéliens munie d'homomorphismes

$$\delta : H^q(A; G) \rightarrow H^{q+1}(X, A; G)$$

où $H^q(A; G) := H^q(A, \emptyset; G)$, satisfaisant les axiomes suivants :

- (Dimension) $H^0(\{*\}; G) = G$ et $H^q(\{*\}; G) = 0$ pour $q > 0$;
- (Exactitude) À chaque paire (X, A) , la suite d'inclusions

$$(A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$$

induit une longue suite exacte

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(A; G) \xrightarrow{\delta} H^q(X, A; G) \rightarrow H^q(X; G) \rightarrow H^q(A; G) \rightarrow \dots$$

- (Excision) Si A et U sont des sous-espaces de X tels que $\bar{U} \subseteq \text{int}(A)$, alors l'inclusion $(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme

$$H^q(X, A; G) \rightarrow H^q(X - U, A - U; G);$$

- (Additivité) Si $(X, A) = \bigsqcup_{i \in I} (X_i, A_i)$, les inclusions (X_i, A_i) induisent un isomorphisme

$$H^q(X, A; G) \cong \bigoplus_{i \in I} H^q(X_i, A_i; G);$$

- (Homotopie) Soit $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$. S'il existe une homotopie de f à g , alors

$$f^* = g^*,$$

où $f^* = H^q(f)$.

Encore une fois, la cohomologie singulière est un exemple d'une telle théorie et tous les détails sont faits dans (May, 1999). Bien que ces axiomes soient importants pour caractériser les théories de cohomologie, les théorèmes suivants nous permettent de faire le pont entre homologie et cohomologie, rendant l'étude de la cohomologie plus simple.

Théorème 1.1.5 (Théorème des coefficients universels pour la cohomologie). Pour G un groupe abélien et (X, A) une paire d'espaces topologiques, il existe une courte suite exacte scindée

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{q-1}(X, A), G) \rightarrow H^q(X, A; G) \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_q(X, A), G) \rightarrow 0.,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est l'appariement de Kronecker.

Théorème 1.1.6 (Théorème des coefficients universels pour l'homologie). Pour G un groupe abélien et (X, A) une paire d'espaces topologiques, il existe une courte suite exacte scindée

$$0 \rightarrow H_q(X, A) \otimes G \rightarrow H_q(X, A; G) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{q-1}(X, A), G) \rightarrow 0.$$

Ces théorèmes impliquent les faits suivants.

Corollaire 1.1.7. Si \mathbb{K} est un corps, alors

$$H_q(X, A; \mathbb{K}) \cong H_q(X, A; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{K}.$$

Corollaire 1.1.8. Si $H_{q-1}(X, A)$ est libre, alors

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^q(X, A) \rightarrow \text{Hom}(H_q(X, A), \mathbb{Z}),$$

est un isomorphisme, car dans ce cas $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{q-1}(X, A), \mathbb{Z}) = 0$.

Corollaire 1.1.9. Si M est une variété compacte à bord ∂M potentiellement vide, alors

$$H^q(M, \partial M) \cong \mathbb{Z}^{\beta_q(M, \partial M)} \oplus \text{Tor}_{q-1}(M, \partial M).$$

Le dernier corollaire nous permet donc de calculer facilement les groupes de cohomologie d'une variété compacte, pourvu que l'on connaisse ses groupes d'homologie.

Finalement, la formule de Künneth permet de calculer les groupes d'homologie (relative) des produits de CW-complexes. Afin de faciliter la lecture, nous incluons l'énoncé tiré de (Hatcher, 2002) qui sera utilisé à la section 5.3.

Théorème 1.1.10 (Formule de Künneth pour l'homologie relative). Soit R un anneau intègre et principal. Si (X, A) et (Y, B) sont deux paires de CW-complexes, alors il existe une courte suite exacte scindée

$$0 \rightarrow \bigoplus_i \left(\tilde{H}_i(X, A; R) \otimes_R \tilde{H}_{n-i}(Y, B; R) \right) \rightarrow \tilde{H}_n(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R) \rightarrow \bigoplus_i \text{Tor}_1^R(\tilde{H}_i(X, A; R), \tilde{H}_{n-i-1}(Y, B; R)) \rightarrow 0.$$

où \tilde{H}_i est l'homologie réduite. Voir (Hatcher, 2002) pour plus de détails concernant l'homologie réduite.

1.2 Dualité

Dans cette section, nous énonçons la dualité de Poincaré et donnons une démonstration de la dualité d'Alexander. Nous suivons principalement ce qui est fait dans (Hatcher, 2002).

Définition 1.2.1. Soit (I, \leq) un ensemble ordonné filtrant, c'est-à-dire que pour toute paire d'éléments $i_0, i_1 \in I$, il existe $i \in I$ tel que $i_0 \leq i$ et $i_1 \leq i$. Un système inductif de groupes abéliens $(\{G_i\}, \{f_{ji}\})$ indexé par I consiste en une famille de groupes abéliens $\{G_i\}_{i \in I}$ et une famille d'homomorphismes de groupes, $f_{ji} : G_i \rightarrow G_j$ pour toute paire $i \leq j$, satisfaisants

1. $f_{ii} = \text{Id}_{G_i}$ pour tout $i \in I$;

2. Si $i \leq j \leq k$, alors $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$.

Considérons maintenant l'ensemble $\sqcup_{i \in I} G_i$. Pour deux éléments $g_j \in G_j$ et $g_k \in G_k$ vus dans cet ensemble, on pose $g_j \sim g_k$ s'il existe $i \in I$ pour lequel $f_{ij}(g_j) = f_{ik}(g_k)$. Il se trouve que \sim est une relation d'équivalence. Ici, seule la transitivité n'est pas évidente. Si $g_i \sim g_j$ et $g_j \sim g_k$, alors $f_{\alpha i}(g_i) = f_{\alpha j}(g_j)$ et $f_{\beta j}(g_j) = f_{\beta k}(g_k)$ pour certains α et $\beta \in I$. Puisque I est filtrant, il existe $\gamma \in I$ pour lequel $\alpha, \beta \leq \gamma$. En composant les dernières égalités par $f_{\gamma\alpha}$ et $f_{\gamma\beta}$ respectivement, on obtient

$$f_{\gamma i}(g_i) = f_{\gamma j}(g_j) \quad \text{et} \quad f_{\gamma j}(g_j) = f_{\gamma k}(g_k)$$

en vertu de la propriété 2 des homomorphismes du système inductif. Ceci implique bien que $g_i \sim g_k$, d'où la transitivité. On peut alors munir $\sqcup_{i \in I} G_i / \sim$ d'une structure de groupe abélien de la façon suivante. Pour $[g_i]$ et $[g_j] \in \sqcup_{i \in I} G_i / \sim$, il existe $k \in I$ tel que $i, j \leq k$. On pose donc $[g_i] + [g_j] := [f_{ki}(g_i) + f_{kj}(g_j)]$, où $g_i \sim f_{ki}(g_i) \in G_k$ et $g_j \sim f_{kj}(g_j) \in G_k$, et on vérifie aisément que cette opération est bien définie. La *limite inductive* du système, notée $\varinjlim G_i$, est définie comme étant le groupe abélien $\sqcup_{i \in I} G_i / \sim$.

Proposition 1.2.2. Si $J \subseteq I$ et pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel que $i \leq j$, alors

$$\varinjlim_I G_i = \varinjlim_J G_j.$$

On dit alors que J est *cofini*. En particulier, si I possède un élément maximal γ , en prenant $J = \{\gamma\}$, on obtient $\varinjlim G_i = G_\gamma$.

Démonstration. Supposons que J est un sous-ensemble cofini de I et fixons $i \in I$. Si $j \in J$ est tel que $i \leq j$, alors pour tout $g_i \in G_i$, on a $g_i \sim f_{ji}(g_i) \in G_j$, d'où ils sont égaux dans $\varinjlim G_i$. \square

Proposition 1.2.3. Soit $(\{X_i\}_{i \in I}, \subseteq)$ un ensemble ordonné filtrant. Si l'on note ι_{ji} les morphismes en homologie induits des inclusions $X_i \hookrightarrow X_j$, alors pour tout $q \geq 0$,

1. $(\{H_q(X_i)\}, \{\iota_{ij}\})$ forme un système inductif et
2. si $X = \bigcup_i X_i$, les homomorphismes $H_q(X_i) \rightarrow H_q(X)$ induisent un homomorphisme $\varphi : \varinjlim H_q(X_i) \rightarrow H_q(X)$.

Démonstration. Fixons $q \geq 0$.

1. Les groupes $H_q(X_i)$ sont bien abéliens. De plus, il est clair que $\iota_{ii} = \text{Id}_{H_q(X_i)}$ et que, par functorialité, l'on a $\iota_{ik} = \iota_{kj} \circ \iota_{ji}$ pour $X_i \subseteq X_j \subseteq X_k$.
2. Soit $[g_j]$ et $[g_k] \in \varinjlim H_q(X_i)$. Par définition, on a

$$[g_j] + [g_k] = [\iota_{ij}(g_j) + \iota_{ik}(g_k)]$$

où $X_j, X_k \subseteq X_i$. Ainsi

$$\begin{aligned} \varphi([g_j] + [g_k]) &= \varphi([\iota_{ij}(g_j) + \iota_{ik}(g_k)]) \\ &= [\iota_{ij}(g_j) + \iota_{ik}(g_k)]_{H_q(X)} \\ &= [\iota_{ij}(g_j)]_{H_q(X)} + [\iota_{ik}(g_k)]_{H_q(X)} \\ &= \varphi([\iota_{ik}(g_k)]) + \varphi([\iota_{ij}(g_j)]) \\ &= \varphi([g_j]) + \varphi([g_k]), \end{aligned}$$

d'où φ est bien un homomorphisme de groupes abéliens.

□

Définition 1.2.4. Soit X un espace topologique. Les sous-ensembles compacts K_i de X forme un ensemble ordonné filtrant pour l'inclusion puisque l'union de deux compacts est compacte. Ainsi, les groupes abéliens $H^q(X, X - K)$ munis des

morphismes évidents $H^q(X, X - K_i) \rightarrow H^q(X, X - K_j)$ pour $K_i \subseteq K_j$ forment un système inductif. Les *groupes de cohomologie à support compact* sont définis par

$$H_c^q(X) := \varinjlim H^q(X, X - K_j).$$

En ayant le concept de cohomologie à support compact, nous pouvons maintenant énoncer la dualité de Poincaré, dont une preuve peut être trouvée dans (Hatcher, 2002).

Théorème 1.2.5 (Dualité de Poincaré). Si M est une n -variété orientable et sans composante de bord, alors pour tout $q \geq 0$,

$$H_c^q(M) \cong H_{n-q}(M).$$

Pour éviter le concept de cohomologie à support compact, il suffit de travailler avec les variétés fermées.

Corollaire 1.2.6. Si M^n une n -variété orientable et fermée, alors pour tout $q \geq 0$,

$$H^q(M) \cong H_{n-q}(M).$$

Démonstration. Puisque M est compacte, $H_c^q(M) = H^q(M)$. En effet,

$$H_c^q(M) = \varinjlim H^q(M, M - K_i) = H^q(M, M - M) = H^q(M),$$

où la deuxième égalité est donnée par la proposition 1.2.2, M étant l'élément maximal de l'ensemble ordonné filtrant formé par les sous-ensembles compacts de M . Le reste découle du théorème précédent. \square

Grâce à la dualité de Poincaré, nous pouvons maintenant nous concentrer sur la dualité d'Alexander, qui est un outil à la base de plusieurs résultats importants de la théorie des nœuds. En ce sens, nous donnerons une preuve détaillée de ce théorème qui suit ce qui est fait dans (Hatcher, 2002).

Théorème 1.2.7 (Dualité d'Alexander). Si K est un sous-ensemble propre, non vide et compact de S^n qui est localement contractile, alors pour tout $q \geq 0$,

$$\tilde{H}_q(S^n - K) \cong \tilde{H}^{n-q-1}(K).$$

Démonstration. Pour simplifier, nous ne montrerons que le cas dont nous aurons besoin pour la suite, c'est-à-dire lorsque $q > 0$.

Considérons donc K un sous-ensemble propre, non vide et compact de S^n qui est localement contractile. Par la dualité de Poincaré et la définition des groupes de cohomologie à support compact, nous avons

$$H_q(S^n - K) \cong H_c^{n-q}(S^n - K) \cong \varinjlim H^{n-q}(S^n - K, (S^n - K) - K_i)$$

où K_i sont des sous-ensembles compacts de $S^n - K$. En particulier, $K \subseteq S^n - K_i$ pour tout K_i et donc $(S^n - K) - K_i = (S^n - K_i) - K$. En posant $U_i := S^n - K_i$, on peut considérer U_i comme un voisinage ouvert de K . La limite inductive est alors équivalente à celle prise sur l'ensemble filtrant $(\{U_i\}, \supseteq)$, d'où l'on obtient

$$H_q(S^n - K) \cong \varinjlim H^{n-q}(S^n - K, U_i - K) \cong \varinjlim H^{n-q}(S^n, U_i),$$

le dernier isomorphisme étant donné par excision. Or, les groupes $\tilde{H}^p(S^n)$ sont triviaux dès que $p \neq n$. On a donc par la longue suite exacte en cohomologie réduite de la paire (S^n, U_i) que

$$H^{n-q}(S^n, U_i) \cong \tilde{H}^{n-q-1}(U_i) \quad \text{pour tout } q > 0$$

et par surcroît

$$H_q(S^n - K) \cong \varinjlim \tilde{H}^{n-q-1}(U_i) \quad \text{pour tout } q > 0.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$\varinjlim \tilde{H}^{n-q-1}(U_i) \cong \tilde{H}^{n-q-1}(K).$$

Puisque K est localement contractile, il existe U_0 un voisinage ouvert de K dans $\mathbb{R}^n \subseteq S^n$ et une rétraction $r : U_0 \rightarrow K$ (pour plus de détails, voir le théorème A.7 de (Hatcher, 2002)). L'ensemble des ouverts $U \subseteq U_0$ contenant K est un ensemble cofini de $(\{U_i\}, \supseteq)$. On peut donc se restreindre à ces ouverts pour le calcul de $\varinjlim \tilde{H}^{n-q-1}(U_i)$ par la proposition 1.2.2. De là, considérons l'homomorphisme

$$\psi : \varinjlim \tilde{H}^{n-q-1}(U) \rightarrow \tilde{H}^{n-q-1}(K)$$

induit des inclusions $K \hookrightarrow U$ et montrons qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme.

La surjectivité de ψ découle directement du fait que les retractions $r|_U : U \rightarrow K$ induisent des morphismes

$$\tilde{H}^{n-q-1}(K) \rightarrow \tilde{H}^{n-q-1}(U) \rightarrow \varinjlim \tilde{H}^{n-q-1}(U).$$

Pour l'injectivité, fixons U et montrons qu'il existe un voisinage ouvert V de K , contenu dans U , tel que l'inclusion $V \hookrightarrow U$ est homotope à $V \xrightarrow{r|_V} K \hookrightarrow U$.

Pour ce faire, considérons $H : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, l'homotopie linéaire telle que $H_0 = \text{Id}_U$ et $H_1 = r|_U$. Par linéarité, on a également que $H(k, t) = k$ pour tout $(k, t) \in K \times I$. Il doit donc exister $\epsilon > 0$ tel que si $N_\epsilon(K) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists k \in K \text{ tel que } |x - k| \leq \epsilon\}$, alors $H(N_\epsilon(K) \times I) \subseteq U$. Autrement, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existerait $(x_m, t_m) \in N_{\frac{1}{m}}(K) \times I$ tel que $H(x_m, t_m) \in \mathbb{R}^n - U$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer sans perte de généralité que la suite $\{(x_m, t_m)\}$ converge, car $N_{\frac{1}{m}}(K) \times I$ est compact dans \mathbb{R}^n et donc borné. Par construction, elle devra converger vers un élément $(k_0, t_0) \in K \times I$. Mais

$$k_0 = H(k_0, t_0) = H\left(\lim_{m \rightarrow \infty} (x_m, t_m)\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} H(x_m, t_m) \in \mathbb{R}^n - U,$$

car $H(x_m, t_m) \in \mathbb{R}^n - U$ qui est fermé, contredisant le fait que $k_0 \in K \subseteq U$.

Soit donc $V = \text{int}(N_\epsilon(K))$, qui est un voisinage ouvert contenant K . L'homotopie

restreinte à ce voisinage $H|_V : V \times I \rightarrow U$ est telle que H_0 est l'inclusion $V \hookrightarrow U$ et H_1 est $V \xrightarrow{r|_V} K \hookrightarrow U$, tel que voulu.

Par contravariance du foncteur $H^*(-)$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{H}^{q-n-1}(U) & \\
 & \swarrow & \downarrow \\
 \tilde{H}^{q-n-1}(K) & & \tilde{H}^{q-n-1}(V) \\
 & \searrow & \\
 & &
 \end{array}$$

On en déduit donc l'injectivité, puisque si un élément de $\tilde{H}^{q-n-1}(U)$ est envoyé sur 0 dans $\tilde{H}^{q-n-1}(K)$, il sera également nul dans $\tilde{H}^{q-n-1}(V)$ et donc dans $\varinjlim \tilde{H}^{n-q-1}(U)$. \square

1.3 Produit d'intersection

Dans cette section, nous introduisons le produit d'intersection d'une variété M , qui est une forme bilinéaire sur ses groupes d'homologie, en suivant ce qui est fait dans l'excellente référence (Bredon, 1993).

Soit M une n -variété, fermée, connexe et orientable. Par la dualité de Poincaré, il existe deux isomorphismes

$$\begin{aligned}
 (-) \frown \mu_M &: H^q(M) \xrightarrow{\cong} H_{n-q}(M) \\
 D &: H_q(M) \xrightarrow{\cong} H^{n-q}(M),
 \end{aligned}$$

où D est l'inverse de $(-) \frown \mu_M$ et où μ_M est un générateur de $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$.

Le *produit d'intersection* est une forme bilinéaire : $H_q(M) \times H_p(M) \rightarrow H_{p+q-n}(M)$ définie par

$$[A] \cdot [B] := D^{-1}(D([A]) \frown D([B])).$$

Par les propriétés du produit cup, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 1.3.1. Si $[A] \in H_r(M)$ et $[B] \in H_s(M)$, alors

$$[B] \cdot [A] = (-1)^{(n-r)(n-s)} [A] \cdot [B].$$

En fait, le produit d'intersection $H_q(M) \times H_{n-q}(M) \rightarrow H_0(M) \cong \mathbb{Z}$ peut être défini de manière équivalente par

$$[A] \cdot [B] := \langle D([A]) \smile D([B]), \mu_M \rangle,$$

où \langle, \rangle est l'appariement de Kronecker du corollaire 1.1.8. De plus, il est possible, dans certains cas, de dégager une interprétation géométrique du produit d'intersection.

Théorème 1.3.2. Soit M une n -variété lisse, fermée, connexe et orientable. Si A et B sont deux sous-variétés, transverses l'une à l'autre, alors

$$[A]_{\dim(A)} \cdot [B]_{\dim(B)} = [A \cap B]_{\dim(A) + \dim(B) - n}.$$

Corollaire 1.3.3. Si en plus $\dim(A) + \dim(B) = n$, alors

$$[A] \cdot [B] = [A \cap B] \in H_0(M) \cong \mathbb{Z}.$$

Autrement dit, $[A] \cdot [B]$ est la somme finie et signée des points d'intersection de A et B (Hutchings, 2011). Le lecteur est invité à aller lire la section 11 du chapitre 4 de (Bredon, 1993) pour une discussion complète du théorème précédent.

La notion de produit d'intersection se généralise aux variétés compactes orientables dont le bord est non vide, simplement parce que la dualité de Poincaré se généralise à ce genre de variétés. Il s'agit de la dualité de Lefschetz ou de Poincaré-Lefschetz.

Théorème 1.3.4 (Dualité de Poincaré-Lefschetz). Soit M une n -variété orientable et compacte. Alors

$$H_k(M, \partial M) \cong H^{n-k}(M) \quad \text{et} \quad H_k(M) \cong H^{n-k}(M, \partial M).$$

Pour une démonstration de ce théorème, voir (Hatcher, 2002). On définit alors le produit d'intersection

$$H_q(M) \times H_p(M) \rightarrow H_{p+q-n}(M),$$

$$H_q(M) \times H_p(M, \partial M) \rightarrow H_{p+q-n}(M)$$

$$H_q(M, \partial M) \times H_p(M, \partial M) \rightarrow H_{p+q-n}(M, \partial M)$$

de la même façon que précédemment, mais en prenant les isomorphismes de la dualité de Poincaré-Lefschetz du théorème précédent. Notons que ces définitions du produit d'intersection coïncident. Autrement dit, si $l_* : H_*(M) \rightarrow H_*(M, \partial M)$ est l'homomorphisme induit par l'inclusion $l : (M, \emptyset) \hookrightarrow (M, \partial M)$, alors pour tout $\alpha, \beta \in H_p(M)$,

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot l_*(\beta) = l_*(\alpha) \cdot \beta = l_*(\alpha) \cdot l_*(\beta).$$

Lorsque nous parlerons du produit d'intersection sur $H_q(M)$, nous ferons référence à la première forme. Autrement, nous parlerons de l'appariement d'intersection sur $H_q(M)$.

CHAPITRE II

FORMES BILINÉAIRES UNIMODULAIRES

Le chapitre précédent s'est terminé sur le produit d'intersection de variétés compactes, une forme bilinéaire définie sur des groupes abéliens, c'est-à-dire des \mathbb{Z} -modules. Par la proposition 1.3.1, cette forme peut être symétrique ou antisymétrique selon la dimension de la variété et des degrés des groupes d'homologie. Au chapitre V, nous nous intéresserons plus particulièrement au produit d'intersection lorsque celui-ci est une forme bilinéaire symétrique et unimodulaire. En ce sens, nous présentons dans ce chapitre ce type de forme bilinéaire particulière, en suivant ce qui est fait dans (Serre, 1973).

Définition 2.0.1. Un groupe abélien libre L de rang $r(L) = n$ est un \mathbb{Z} -module isomorphe à \mathbb{Z}^n . On dit qu'un ensemble $E = \{e_i\}$ est une *base* de L si tout élément $x \in L$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire entière des éléments de E , c'est-à-dire s'il existe d'unique entiers x_1, \dots, x_n tels que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

On montre aisément la proposition suivante.

Proposition 2.0.2. Soit L un groupe abélien libre de rang n et $E = \{e_i\}$ et $\tilde{E} = \{\tilde{e}_i\}$ deux bases de L . Si $\tilde{e}_i = \sum_j a_{ij} e_j$ où $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, alors la *matrice de changement de base* $P = (a_{ij})$ satisfait

- (i) $P \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ et
(ii) $\det(P) = \pm 1$.

Démonstration.

- (i) Si $\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, avec $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, on peut écrire également chaque élément de la première base dans la seconde, c'est-à-dire $e_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} \tilde{e}_k$ avec $b_{jk} \in \mathbb{Z}$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^n b_{jk} \tilde{e}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) \tilde{e}_k \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik}.$$

Autrement dit, la matrice $(b_{jk}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ est la matrice inverse de (a_{ij}) .

- (ii) Nous savons que

$$\det(P^{-1}) \det(P) = \det(P^{-1}P) = \det(I_n) = 1, \quad (2.1)$$

où I_n est la matrice identité de dimension n . Puisque $P^{-1} = (b_{jk})$ et $P = (a_{ij})$ sont deux matrices entières, il en découle que leurs déterminants sont des nombres entiers. De l'équation 2.1, on conclut alors que

$$\det(P) = \det(P^{-1}) = \pm 1.$$

□

2.1 Forme bilinéaire unimodulaire

Définition 2.1.1. Soit R un anneau unitaire commutatif et L un R -module libre. Une fonction $B : L \times L \rightarrow R$ est une *forme bilinéaire* si pour tout $x, y, z \in L$ et $\alpha, \beta \in R$,

$$(i) \quad B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z)$$

$$(ii) \quad B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z).$$

Par ailleurs, B est *symétrique* si $B(x, y) = B(y, x)$ pour tout $x, y \in L$. La *forme quadratique* associée à B est la fonction $Q : L \rightarrow \mathbb{Z}$ donnée par $Q(x) := B(x, x)$.

Définition 2.1.2. Soit (L, B) un groupe abélien libre de rang n muni d'une forme bilinéaire symétrique $B : L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$. Si $E = \{e_i\}$ est une base pour L , le *discriminant* de (L, B) , noté $d(L, B)$, est l'entier

$$\det B^E,$$

où $B^E = (B(e_i, e_j))_{ij}$. On dit que B^E est la *matrice associée* à la forme bilinéaire B dans la base E . La proposition 2.1.4 ci-bas nous assure que le discriminant de (L, B) ne dépend pas du choix de la base.

Lemme 2.1.3. Si $E = \{e_i\}$ et $\tilde{E} = \{\tilde{e}_i\}$ sont deux bases de (L, B) , il existe $P \in \text{Gl}_n(\mathbb{Z})$ telle que

$$B^{\tilde{E}} = P^T B^E P.$$

Démonstration. La matrice de changement de base $P = (a_{ij})$, où $\tilde{e}_i = \sum_j a_{ij} e_j$, permet de conclure. En effet, pour $1 \leq i, k \leq n$,

$$B(\tilde{e}_i, \tilde{e}_k) = \sum_{j,l=1}^n a_{ij} B(e_j, e_l) a_{kl}$$

ce qui est équivalent en notation matricielle à $B^{\tilde{E}} = P^T B^E P$. □

Proposition 2.1.4. Le discriminant de (L, B) ne dépend pas du choix de la base de L et est donc bien défini.

Démonstration. En effet, si $E = \{e_i\}$ et $\tilde{E} = \{\tilde{e}_i\}$ sont deux bases de L , alors il existe une matrice $P \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ telle que $B^{\tilde{E}} = P^T B^E P$ par le lemme précédent.

On a donc

$$\begin{aligned} \det(B^{\tilde{E}}) &= \det(P^T B^E P) \\ &= \det(P^T) \det(B^E) \det(P) \\ &= \det(P)^2 \det(B^E) \\ &= \det(B^E), \end{aligned}$$

car $\det(P) = \pm 1$, comme il a été mentionné à la proposition 2.0.2 (ii). □

En général, une forme bilinéaire symétrique est dite *unimodulaire* si son discriminant vaut ± 1 . À moins de préciser le contraire, il sera entendu que (L, B) est supposé unimodulaire.

Pour définir le concept de signature d'une forme unimodulaire (L, B) , nous devons d'abord mentionner deux résultats importants d'algèbre linéaire.

Théorème 2.1.5. Toute matrice symétrique réelle A est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P$ est une matrice diagonale.

Théorème 2.1.6 (Sylvester). Pour deux matrices diagonales D_1 et D_2 dans \mathbb{R} , il existe $P \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ telle que $D_1 = P^T D_2 P$ si et seulement si D_1 et D_2 ont le même nombre d'entrées positives, négatives et nulles.

Il en découle directement le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.7. Pour $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ symétrique, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^T A P = \text{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_s, \underbrace{-1, \dots, -1}_t, \underbrace{0, \dots, 0}_z).$$

L'entier $\sigma(A) := s - t$ est la *signature* de A . Si A est inversible, alors $s + t = n$. \square

Puisque \mathbb{Z} n'est pas un corps, on ne peut appliquer directement ces résultats sur (L, B) . Il faut donc «prolonger» la forme (L, B) à un corps, \mathbb{R} par exemple. Pour ce faire, on considère $\mathbb{R}^{r(L)} \cong L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et on définit la forme bilinéaire symétrique $B_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{r(L)} \times \mathbb{R}^{r(L)} \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante : pour $e \otimes_{\mathbb{Z}} x$ et $e' \otimes_{\mathbb{Z}} y \in \mathbb{R}^{r(L)}$ on pose

$$B_{\mathbb{R}}(e \otimes_{\mathbb{Z}} x, e' \otimes_{\mathbb{Z}} y) := xyB(e, e')$$

et l'on étend bilinéairement à tout $\mathbb{R}^{r(L)}$. La forme symétrique $B_{\mathbb{R}}$ a une signature $s - t$ qui est bien définie sur $\mathbb{R}^{r(L)}$ par le corollaire précédent. Ainsi, la *signature* de (L, B) , que l'on notera $\sigma(L, B)$, est simplement $s - t$. Si en plus (L, B) est non dégénérée, alors $r(L) = s + t$. Pour la suite, il sera utile d'écrire $r(L)^+$ pour s et $r(L)^-$ pour t .

Proposition 2.1.8. Si (L, B) est non dégénérée, sa signature et le rang de L sont de même parité, c'est-à-dire

$$r(L) \equiv \sigma(L, B) \pmod{2}.$$

Démonstration. Puisque (L, B) est non dégénérée, $r(L) = r(L)^+ + r(L)^-$. Il s'en suit que $r(L) - \sigma(L, B) = r(L)^+ + r(L)^- - (r(L)^+ - r(L)^-) = 2r(L)^-$, d'où le résultat. \square

Définition 2.1.9. On dit que (L, B) est *définie* si $\sigma(L, B) = \pm r(L)$, *définie positive* si $r(L)^- = 0$ et *définie négative* si $r(L)^+ = 0$. Par ailleurs, (L, B) est *paire* si la forme quadratique associée est telle que $Q(x) \equiv 0 \pmod{2}$ pour tout $x \in L$. Autrement, on dit que (L, B) est *impaire*.

Proposition 2.1.10. La forme (L, B) est définie si et seulement si $(L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ est définie.

Démonstration. Soit $e \in L$ et $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Alors $e \otimes_{\mathbb{Z}} x \in L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et

$$B_{\mathbb{R}}(e \otimes_{\mathbb{Z}} x, e \otimes_{\mathbb{Z}} x) = \underbrace{x^2}_{>0} B(e, e).$$

Les deux formes ne peuvent donc être définies qu'en même temps. \square

Proposition 2.1.11. En toute généralité, une forme bilinéaire symétrique (L, B) est paire si et seulement si $Q(e_i) = B(e_i, e_i) \equiv 0 \pmod{2}$ pour tout e_i dans une base $E = \{e_i\}$ de L .

Démonstration. Soit $E = \{e_i\}$ une base de L . Alors pour $x = \sum_i x_i e_i \in L$, nous avons

$$\begin{aligned} Q(x) &= B\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j x_j e_j\right) \\ &= \sum_{i,j} x_i x_j B(e_i, e_j) \\ &= \sum_i x_i^2 B(e_i, e_i) + \sum_{i < j} x_i x_j B(e_i, e_j) + \sum_{j < i} x_i x_j B(e_i, e_j) \\ &= \sum_i x_i^2 B(e_i, e_i) + 2 \sum_{i < j} x_i x_j B(e_i, e_j), \end{aligned}$$

en ré-étiquetant dans la dernière égalité. Comme $B(e_i, e_i)$ est paire pour tout $1 \leq i \leq r(L)$ par hypothèse, $Q(x)$ doit être paire. La réciproque est triviale. \square

2.2 Éléments caractéristiques et théorème de van der Blij

Définition 2.2.1. Un *élément caractéristique* de (L, B) est un élément $u \in L$ tel que pour tout $x \in L$,

$$B(u, x) \equiv B(x, x) \pmod{2}.$$

Il n'est pas clair qu'un tel élément existe toujours, mais la proposition suivante nous assure l'existence d'un tel élément lorsque la forme bilinéaire est unimodulaire. Nous suivons l'argument de (de Souza, s d), mais une preuve peut également être trouvée dans (Serre, 1973).

Proposition 2.2.2. Un \mathbb{Z} -module L muni d'une forme unimodulaire B possède toujours un élément caractéristique. En fait, si u est un élément caractéristique, alors w l'est également si et seulement si $w = u + 2z'$, pour un certain $z' \in L$.

Démonstration. Fixons $E = \{e_i\}$ une base de L . Si $u = \sum_j u_j e_j$ est un élément caractéristique de (L, B) , alors pour $e_i \in E$,

$$B(u, e_i) \equiv B(e_i, e_i) \pmod{2} \iff \sum_j B(e_j, e_i) u_j \equiv B(e_i, e_i) \pmod{2}. \quad (2.2)$$

Ainsi, pour trouver un élément caractéristique de (L, B) , il suffit, par bilinéarité, de trouver un élément $u \in L$ satisfaisant

$$\sum_j B(e_i, e_j) u_j = B(e_i, e_i), \quad \forall 1 \leq i \leq r(L)$$

ou, de manière équivalente, tel que

$$B^E u = [B(e_1, e_1) \dots B(e_{r(L)}, e_{r(L)})]^T.$$

Or, comme (L, B) est unimodulaire, $(B^E)^{-1} \in \text{Gl}_{r(L)}(\mathbb{Z})$ et donc une telle équation possède une (unique) solution entière, prouvant de ce fait l'existence d'un élément caractéristique :

$$u := (B^E)^{-1} [B(e_1, e_1) \dots B(e_{r(L)}, e_{r(L)})]^T \in L.$$

Pour la seconde partie de la proposition, il est clair que $u + 2z'$ est un élément caractéristique pour tout $z' \in L$, puisque

$$B(u + 2z', x) = B(u, x) + 2B(z', x) \equiv B(u, x) \equiv B(x, x) \pmod{2}.$$

Par contre, si w est un autre élément caractéristique, alors forcément $w = u + 2z'$ pour un certain $z' \in L$. En effet, par l'équivalence (2.2), on doit avoir

$$\sum_j B(e_i, e_j)w_j \equiv B(e_i, e_i) \pmod{2}$$

pour chaque $1 \leq i \leq r(L)$. Ainsi, il existe $z = \sum_i z_i e_i \in L$ tel que

$$\sum_j B(e_i, e_j)w_j = B(e_i, e_i) + 2z_i, \quad \forall 1 \leq i \leq r(L)$$

ou encore tel que

$$B^E w = [B(e_1, e_1) \dots B(e_{r(L)}, e_{r(L)})]^T + 2z.$$

En multipliant à gauche par $(B^E)^{-1} \in \text{Gl}_{r(L)}(\mathbb{Z})$, on obtient

$$w = (B^E)^{-1} [B(e_1, e_1) \dots B(e_{r(L)}, e_{r(L)})]^T + 2 \underbrace{(B^E)^{-1} z}_{=: z' \in L} = u + 2z',$$

comme voulu. □

L'élément caractéristique d'une forme unimodulaire (L, B) permet de dégager un nouvel invariant de cette dernière.

Corollaire 2.2.3. Si u est un élément caractéristique de (L, B) unimodulaire, alors $\tau(L, B) := B(u, u) \pmod{8}$ est un invariant de (L, B) , c'est-à-dire que $\tau(L, B)$ ne dépend pas du choix de l'élément caractéristique.

Démonstration. Si u et w sont deux éléments caractéristiques, alors $w = u + 2y$ pour un certain $y \in L$ et $B(u, y) \equiv B(y, y) \pmod{2}$. En particulier, $B(u, y) +$

$B(y, y) = 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} B(w, w) &= B(u + 2y, u + 2y) \\ &= B(u, u) + 4(B(u, y) + B(y, y)) \\ &= B(u, u) + 8k \\ &\equiv B(u, u) \pmod{8}. \end{aligned}$$

□

Comme l'illustre le prochain lemme, le nouvel invariant est préservé sous la somme directe de formes unimodulaires.

Lemme 2.2.4. Si (L, B) et (L', B') sont des formes unimodulaires ayant respectivement u et u' comme éléments caractéristiques, alors $u \oplus u'$ en est aussi un pour $(L \oplus L', B \oplus B')$. De plus, $\tau(L \oplus L', B \oplus B') = \tau(L, B) + \tau(L', B') \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Démonstration. Si $L \cong \mathbb{Z}^n$ et $L' \cong \mathbb{Z}^{n'}$, alors $L \oplus L' \cong \mathbb{Z}^{n+n'}$ et

$$u \oplus u' = (u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_{n'}).$$

Ainsi, pour tout $x \oplus x' \in L \oplus L'$, nous avons

$$\begin{aligned} B \oplus B'(u \oplus u', x \oplus x') &= B(u, x) + B'(u', x') \\ &\equiv B(x, x) + B'(x', x') \pmod{2} \\ &\equiv B \oplus B'(x \oplus x', x \oplus x') \pmod{2}, \end{aligned}$$

d'où $u \oplus u'$ est un élément caractéristique de $(L \oplus L', B \oplus B')$. Un calcul tout à fait similaire montre que

$$\tau(L \oplus L', B \oplus B') \equiv \tau(L, B) + \tau(L', B') \pmod{8}.$$

□

Proposition 2.2.5. Soit p, q deux entiers positifs. Si on pose $L = \mathbb{Z}^{p+q}$ et $B = p\langle 1 \rangle \oplus q\langle -1 \rangle$, alors $u = (1, \dots, 1) \in L$ est un élément caractéristique de (L, B) et

$$\tau(L, B) \equiv p - q \pmod{8}.$$

Démonstration. Il est aisé de constater que $1 \in \mathbb{Z}$ est un élément caractéristique pour $\langle 1 \rangle$ ainsi que pour $\langle -1 \rangle$: pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$\langle \pm 1 \rangle(1, x) = \pm x \equiv \pm x^2 = \langle \pm 1 \rangle(x, x) \pmod{2}.$$

On conclut alors par le lemme précédent. □

Avec cette proposition, nous pouvons maintenant démontrer le théorème de van der Blij suivant.

Théorème 2.2.6. (Van der Blij, 1959) Si (L, B) est unimodulaire, alors

$$\sigma(L, B) \equiv \tau(L, B) \pmod{8}.$$

Démonstration. Par la proposition précédente, le théorème est vrai pour les formes unimodulaires $\tilde{B} = p\langle 1 \rangle \oplus q\langle -1 \rangle$ avec p, q des entiers positifs, car dans ce cas $\sigma(L, \tilde{B}) = p - q$.

Soit maintenant u l'élément caractéristique de (L, B) . Du lemme 2.2.4, on sait que $\tilde{u} := u \oplus 1 \oplus 1$ est un élément caractéristique de $(L \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, B \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle)$. Cette dernière est impaire, indéfinie et unimodulaire (car B l'est par hypothèse). Dès lors, en vertu du théorème de structure des formes unimodulaires impaires et indéfinies (Serre, 1973), il existe des entiers $p, q \geq 1$ tels que

$$(L \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, B \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle) \cong (\mathbb{Z}^{p+q}, p\langle 1 \rangle \oplus q\langle -1 \rangle).$$

Ainsi, toujours du lemme 2.2.4, nous avons

$$\begin{aligned}
\sigma(L, B) &= \sigma(L, B) + \underbrace{\sigma(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle)}_{=0} \\
&= \sigma(L \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, B \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle) \\
&= \sigma(L \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, p\langle 1 \rangle \oplus q\langle -1 \rangle) \\
&\equiv \tau(L \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, p\langle 1 \rangle \oplus q\langle -1 \rangle) \pmod{8} \\
&\equiv \tau(L \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, B \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle) \pmod{8} \\
&\equiv \tau(L, B) + \tau(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle) \pmod{8} \\
&\equiv \tau(L, B) \pmod{8},
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence provient de la proposition précédente :

$$\tau(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle) \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{8}.$$

□

Du théorème de van der Blij, on en déduit facilement les corollaires importants suivants concernant les formes unimodulaires.

Corollaire 2.2.7. Si (L, B) est paire, alors

$$\sigma(L, B) \equiv 0 \pmod{8}.$$

Démonstration. Si (L, B) est paire, alors pour $x \in L$, on a $B(x, x) = Q(x) \equiv 0 \pmod{2}$. Ainsi, 0 est un élément caractéristique de (L, B) :

$$B(0, x) = 0 \equiv B(x, x) \pmod{2}.$$

Il s'en suit que $\sigma(L, B) \equiv \tau(L, B) \equiv B(0, 0) = 0 \pmod{8}$.

□

Corollaire 2.2.8. Si (L, B) est définie et paire, alors $\tau(L) \equiv 0 \pmod{8}$.

Démonstration. Puisque (L, B) est définie, $\sigma(L, B) = \pm r(L)$, d'où

$$r(L) = \pm\sigma(L, B) \equiv 0 \pmod{8}.$$

□

C'est ce dernier corollaire qui se trouve au cœur de la preuve du théorème 0.0.2.

CHAPITRE III

THÉORIE DES NŒUDS

Il serait vain de se lancer dans la preuve du théorème 0.0.2 sans introduire la notion de nœuds. Ce chapitre se veut donc un survol de la théorie des nœuds, de ses outils de base et de certains résultats importants. Il existe plusieurs ouvrages de référence sur ce sujet, mais nous recommandons au lecteur (Rolfsen, 1976), (Kauffman, 1987) et (Cromwell, 2004). Pour davantage de discussions, les références (Adams, 1994), (Livingston, 1993) et (Lickorish, 1997) sont très appropriées. Finalement, plusieurs détails intéressants sont présentés dans (Burde et Zieschang, 2003).

3.1 Quelques définitions

Définition 3.1.1. Un *nœud* est un plongement topologique $K : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ou S^3 . Il sera utile de considérer un nœud simplement comme étant l'image $K(S^1)$, que nous dénoterons également par K .

Définition 3.1.2. Deux nœuds K_0 et K_1 sont *du même type* s'il existe une isotopie ambiante $H : S^3 \times I \rightarrow S^3$ telle que $H_0 = \text{Id}_{S^3}$ et $H_1(K_0) = K_1$. Ceci définit une relation d'équivalence et le *type* d'un nœud K est la classe d'équivalence de K .

Pour éviter certaines pathologies, comme des nœuds infiniment noués, nous introduirons la notion de nœud polygonal. Pour une discussion plus détaillée sur ce sujet, voir la section 1.11 de (Livingston, 1993).

Définition 3.1.3. Étant donnés deux points p et q de \mathbb{R}^3 , le *segment entre p et q* est l'enveloppe convexe de $\{p, q\}$, donné par $[p, q] = \{tp + (1 - t)q : t \in [0, 1]\}$. Pour un ensemble fini et ordonné de points $\{p_1, \dots, p_n\}$ de \mathbb{R}^3 , l'union des segments $[p_i, p_{i+1}]$, est une *courbe polygonale*. Si $p_i \notin [p_{i-1}, p_{i+1}]$, on dit que p_i est un *sommet* de la courbe polygonale. Les segments $[p_i, p_{i+1}]$ sont les *arêtes* de la courbe si p_i et p_{i+1} en sont des sommets.

Définition 3.1.4. Un *nœud polygonal* est un nœud $K^p : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ dont l'image est une courbe polygonale (forcément simple et fermée). Un *nœud apprivoisé* est un nœud du même type qu'un nœud polygonal.

Définition 3.1.5. Un point z d'un nœud K est *localement plat* s'il existe un voisinage V de z telle que la paire $(V, V \cap K)$ est topologiquement équivalente à la boule B^3 et un diamètre. Un nœud est *localement plat* si tous ses points le sont.

Proposition 3.1.6. Un nœud polygonal K^p est toujours localement plat.

Démonstration. Soit $z \in K$ et A_z l'ensemble des arêtes de K^p qui ne croisent pas z . On sait que la distance entre un point et un segment est bien définie dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Comme A_z est un ensemble fini de segments, considérons ϵ la distance minimale entre z et les segments de A_z . Comme chaque arête de A_z n'intersecte pas z , $\epsilon > 0$. La boule $B_{\frac{\epsilon}{2}}(z)$ n'intersecte aucun segment de A_z . Si z est dans l'intérieur d'une arête a_z , alors $B_{\frac{\epsilon}{2}}(z) \cap K \subseteq a_z$ et donc la paire $(B_{\frac{\epsilon}{2}}(z), B_{\frac{\epsilon}{2}}(z) \cap K)$ est, par homothétie et translation, homéomorphe à B^3 et un diamètre. Si, plutôt, z est un sommet de K^p , c'est-à-dire $\{z\} = a_1 \cap a_2$ pour les deux seules arêtes $a_1, a_2 \notin A_z$, alors $B_{\frac{\epsilon}{2}}(z) \cap K = B_{\frac{\epsilon}{2}}(z) \cap (a_1 \cup a_2)$. Si θ est l'angle entre a_1 et a_2 inférieur à π , une rotation qui envoie le secteur d'angle θ sur un secteur d'angle π permettra d'envoyer $(a_1 \cup a_2) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(z)$ sur un diamètre de la boule $B_{\frac{\epsilon}{2}}(z)$. De là, une translation et une homothétie produiront un homéomorphisme

$$(B_{\frac{\epsilon}{2}}(z), B_{\frac{\epsilon}{2}}(z) \cap K^p) \approx (B^3, \text{diamètre}).$$

□

Proposition 3.1.7. Tout nœud polygonal K^p est du même type qu'un nœud de classe C^∞ , c'est-à-dire un plongement lisse $K^\infty : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Démonstration. Donnons une esquisse de la preuve, inspirée de (Cromwell, 2004). D'abord, on remarque que le nœud est lisse sauf en ses sommets. Soit donc z un sommet de K^p et a_1 et a_2 les (seules) arêtes contenant z . Par la preuve de la proposition précédente, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_\epsilon(z) \cap K^p = B_\epsilon(z) \cap (a_1 \cup a_2)$. On peut donc déformer le nœud à l'intérieur de la boule $B_\epsilon(z)$ tout en s'assurant que l'extérieur demeure intact. Le type du nœud ne changera donc pas. Il suffit alors d'«adoucir» le coin de K^p par une fonction lisse comme $\exp(-1/x^2)$ sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$ et 0 sur $\{0\}$. □

Proposition 3.1.8. Tout nœud apprivoisé K possède un voisinage tubulaire, c'est-à-dire qu'il existe un plongement du tore solide dans \mathbb{R}^3 (ou S^3)

$$h : S^1 \times D^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

tel que $h|_{S^1 \times \{0\}} : (x, 0) \mapsto K(x)$.

Démonstration. Par la proposition 3.1.7, K est du même type qu'un nœud lisse que l'on notera K^∞ . Par le théorème du voisinage tubulaire (voir (Bredon, 1993) théorème 11.4), K^∞ possède un voisinage tubulaire. L'isotopie qui envoie K^∞ sur K préserve le voisinage tubulaire, d'où le résultat. □

Définition 3.1.9. Une *projection* d'un nœud polygonal K^p est l'image de ce dernier par une projection orthogonale $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Une projection de K^p est *régulière* si les énoncés suivants sont satisfaits :

1. Pour tout $x \in \pi(K^p)$, la préimage $\pi^{-1}(x)$ contient un ou deux éléments de K^p . S'il en contient deux, on dira que x est un *point double* ou un *croisement* ;

2. Aucun point double n'a de sommet de K^p comme préimage.

Proposition 3.1.10. Une projection régulière d'un nœud polygonal ne possède qu'un nombre fini de croisements.

Démonstration. Par l'élément 2, un point double doit être l'image d'un point intérieur de deux arêtes de K^p . Inversement, à deux arêtes distinctes a_1 et a_2 de K^p , il ne peut correspondre qu'au plus un point double. Autrement, on aurait que les deux segments $\pi(a_1)$ et $\pi(a_2)$ s'intersecteraient en plus d'un point du plan. Par convexité, l'intersection serait en fait un sous-segment des arêtes. Or, les extrémités de ce sous-segment, des points doubles, seraient en fait des extrémités des segments $\pi(a_1)$ et $\pi(a_2)$ qui, elles, ont évidemment des sommets de K^p comme préimage. Le point 2 ne serait donc pas satisfait.

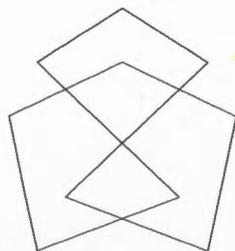
Comme il n'y a qu'un nombre fini d'arêtes, on conclut qu'il n'y a qu'un nombre fini de croisements. □

Le prochain théorème nous assure qu'il est toujours possible de considérer une projection régulière pour un type de nœud. Ce résultat est le théorème 1.4.1 de (Livingston, 1993) ou l'exercice 3.E.2 de (Rolfsen, 1976).

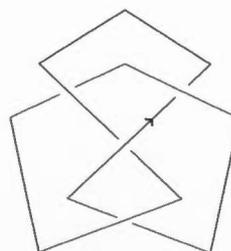
Théorème 3.1.11. Soit K^p un nœud polygonal dont les sommets sont (p_1, \dots, p_n) . Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nœud polygonal K^q dont les sommets sont (q_1, \dots, q_n) et tel que

- pour chaque $1 \leq i \leq n$, $|p_i - q_i| < \epsilon$,
- K^p et K^q sont du même type et
- K^q possède une projection régulière.

Démonstration. Une légère rotation par un axe passant par un sommet, non parallèle à l'axe de projection, devrait suffire. □



(a) Projection régulière



(b) Diagramme orienté

Figure 3.1: Nœud polygonal en figure huit

Définition 3.1.12. Un *diagramme* d'un nœud est une projection régulière munie d'information relative à la hauteur à chaque croisement, comme à la figure 3.1b.

Corollaire 3.1.13. Tout nœud apprivoisé possède un diagramme.

Puisque nous nous intéresserons qu'aux nœuds apprivoisés, nous omettrons à l'avenir de le préciser.

Définition 3.1.14. Il est possible d'orienter un nœud en y induisant une orientation de S^1 . Dans un diagramme de nœud, ceci correspond à choisir une direction. En fait, un diagramme sera *orienté* lorsqu'il sera augmenté d'une flèche pour indiquer l'orientation du nœud comme à la figure 3.1b. Tout croisement d'un diagramme orienté sera de type positif ou négatif, comme à la figure 3.2.

3.2 Surfaces de Seifert

Définition 3.2.1. Une *surface de Seifert* F pour un nœud K dans S^3 est une surface connexe, orientable et compacte dans S^3 telle que $\partial F = K$.

Théorème 3.2.2 (Algorithme de Seifert). Tout nœud possède une surface de Seifert dans S^3 .

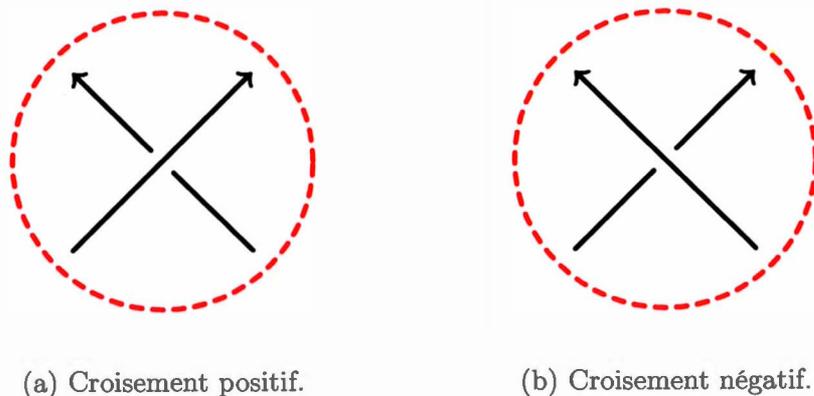


Figure 3.2: Types de croisement dans un diagramme de nœud orienté

Démonstration. L'argument suit principalement ce qui est fait dans (Cromwell, 2004). Notons que puisque l'on peut plonger \mathbb{R}^3 dans S^3 , il suffit de construire la surface dans l'espace euclidien à trois dimensions. Pour ce faire, utilisons l'algorithme de Seifert. La figure 3.3 illustre le processus avec le nœud en huit.

Soit K un nœud orienté et considérons un diagramme de celui-ci. Dans un petit voisinage de chaque croisement du diagramme, on efface le croisement et on reconecte les bouts de sorte que l'orientation soit compatible, comme aux figures 3.3a et 3.3b. On obtient ainsi un ensemble fini de courbes orientées, simples et fermées $\{\gamma_i\}$, nommées *cycles de Seifert*. Ceux-ci peuvent être intriqués les uns dans les autres. Considérons alors $n(\gamma)$ le nombre de cycles de Seifert qui bornent γ . On s'en sert comme fonction hauteur pour plonger le diagramme dans $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ en envoyant chaque courbe γ_i sur $(\gamma_i, n(\gamma_i))$.

Pour chaque cycle, il existe un disque Δ_i du plan $\{(x, y, z) : z = n(\gamma_i)\} \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\partial\Delta_i = \gamma_i$. L'orientation de γ_i induit une orientation pour Δ_i en suivant la règle de la main droite. Dans la figure 3.3c, la couleur orange correspond à une orientation positive et la couleur bleue à une orientation négative.

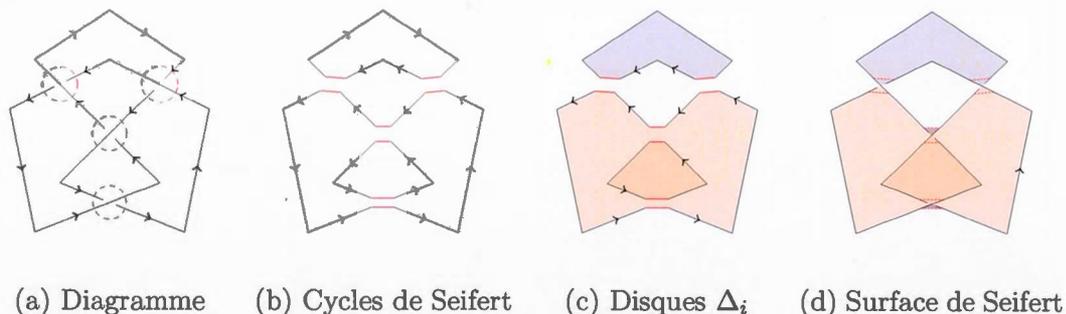


Figure 3.3: Algorithme de Seifert

Finalement, à chaque lieu où il y avait un croisement, on attache une bande homéomorphe à $[0, 1]^2$ ayant une demi-torsion de sorte que le type de croisement soit le même que l'original, comme à la figure 3.3d.

La surface F ainsi construite aura clairement le nœud K pour bord. Elle est également connexe (par arcs) et compacte. Il reste seulement à voir qu'elle est orientable. Pour ce faire, étudions ce qui se passe au site d'un croisement. Il y aura deux cas à considérer. Soit les disques correspondants sont sur le même plan, soit ils sont sur des plans différents.

Dans le premier cas, comme ils sont dans le même plan, ils ne sont pas intriqués. En particulier, ils sont d'orientation opposée. Puisque la bande a une demi-torsion, l'orientation de la bande est compatible avec celles des disques, comme le montre la figure 3.3d.

Si plutôt les disques ne sont pas sur le même plan, les cycles sont intriqués. Ainsi, les cycles, et par suite les disques, ont la même orientation. La demi-torsion de la bande permet donc de relier les côtés positifs des deux disques ensemble ainsi que les côtés négatifs ensemble, comme à la figure 3.3d. Encore une fois, l'orientation sera compatible. \square

Comme la surface de Seifert F du nœud K est orientable, compacte et connexe n'ayant qu'une seule composante de bord, elle est homéomorphe à une somme connexe de g tores privée d'un petit voisinage ouvert autour d'un point. Le *genre* de F est $g(F) := g$. Puisque chaque nœud possède une surface de Seifert, il est possible de définir le *genre d'un nœud* K par

$$g(K) := \min\{g(F) : F \text{ surface de Seifert pour } K\}.$$

Définition 3.2.3. Un *bicol* pour une surface F est un plongement

$$h : F \times [-1, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (ou } S^3)$$

tel que $h(x, 0) = x$ pour tout $x \in F$.

En fait, toute surface de Seifert F pour un nœud K possède un bicol. Effectivement, en prenant ν un vecteur unitaire normal à F , la fonction

$$h : F \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie par $(x, t) \mapsto x + \lambda t\nu$ pour $\lambda > 0$ assez petit sera bien un plongement, car F est orientable et compacte.

La prochaine proposition donne une idée des groupes d'homologie des surfaces de Seifert d'un nœud.

Proposition 3.2.4. Si F est une surface des Seifert, alors

$$H_1(F) \cong \mathbb{Z}^{2g} \cong H_1(S^3 - F),$$

où g est le genre de F .

Démonstration. Le premier isomorphisme provient du fait que si M est une surface orientable, connexe et compacte ayant $b > 0$ composantes de bord, alors

$$H_1(M) \cong \mathbb{Z}^{2g-b+1},$$

où g est le genre de M . Quant au second, nous savons que

$$H_1(S^3 - F) \cong H^1(F)$$

par la dualité d'Alexander vue au premier chapitre et que

$$H^1(F) \cong \text{Hom}(H_1(F), \mathbb{Z})$$

par le corollaire 1.1.8. Puisque $H_1(F) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, on conclut bien que $H_1(S^3 - F) \cong \text{Hom}(H_1(F), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. \square

3.3 Nombre d'enlacements

Définition 3.3.1. Soit K_0 et K_1 deux nœuds disjoints dans S^3 . Si F_{K_1} est une surface de Seifert pour K_1 , que l'on suppose sans perte de généralité transverse à K_0 , on définit le nombre d'enlacements entre K_0 et K_1 à l'aide du produit d'intersection par

$$\text{lk}(K_0, K_1) := [K_0] \cdot [F_{K_1}]$$

où $[K_0] \in H_1(S^3)$ et $[F_{K_1}] \in H_2(S^3)$. Notons que ce dernier est bien défini au signe près. En effet, le produit d'intersection est bien défini et ne dépend que de l'orientation choisie, affectant seulement le signe. De plus, il ne dépend pas du choix de la surface de Seifert choisie, comme le prouve le lemme 5.7.1 de (Cromwell, 2004).

Remarque 3.3.2. Comme il est mentionné dans (Kauffman, 1987) et (Rolfsen, 1976), en considérant S^3 comme le bord de D^4 , il est possible de voir autrement le nombre d'enlacements. En effet, en prenant F_{K_0} et F_{K_1} des surfaces plongées dans B^4 transverses au bord S^3 telles que $\partial F_{K_0} = K_0$ et $\partial F_{K_1} = K_1$. En les orientant adéquatement, on obtient $\text{lk}(K_0, K_1) = F_{K_0} \cdot F_{K_1}$, où le produit d'intersection est pris dans D^4 . Cette définition du nombre d'enlacements sera entre autre utilisée à la section 5.4.

En fait, plusieurs autres définitions du nombre d'enlacements sont données dans (Rolfsen, 1976). La proposition suivante présente une définition très utile qui utilise les diagrammes des nœuds. Il s'agit d'ailleurs d'une version légèrement modifiée de celle donnée dans (Cromwell, 2004).

Proposition 3.3.3. Soit K_0 et K_1 deux nœuds orientés et considérons D_{K_0} et D_{K_1} des diagrammes de ceux-ci. Si C_{K_1/K_0} est l'ensemble des croisements entre les diagrammes D_{K_1} et D_{K_0} pour lesquels le premier passe au-dessus du second, alors pour tout $c \in C_{K_1/K_0}$, on pose

$$\epsilon(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } c \text{ est positif} \\ -1 & \text{si } c \text{ est négatif,} \end{cases}$$

comme à la figure 3.2. Alors

$$\text{lk}(K_0, K_1) = \pm \sum_{c \in C_{K_1/K_0}} \epsilon(c).$$

Démonstration. Comme le nombre d'enlacements ne dépend pas de la surface de Seifert choisie, n'importe laquelle convient. Considérons alors la surface F_{K_1} produite par l'algorithme de Seifert à partir du diagramme D_{K_1} . On remarque que K_0 et F_{K_1} ne s'intersectent que dans un voisinage d'un croisement où D_{K_0} passe sous D_{K_1} . Le reste découle du corollaire 1.3.3. \square

Le nombre d'enlacements définit deux applications $H_1(S^3 - K_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ et $H_1(S^3 - K_1) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui sont linéaires. C'est donc une forme bilinéaire. En fait, comme il est montré au lemme 5.7.2 de (Cromwell, 2004), il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique.

3.4 Forme de Seifert

Soit K un nœud et (F, h) une surface de Seifert de K de genre g munie d'un bicol h . Si a est un cycle représentant une classe de $H_1(F)$, on pose $a^\pm := h(a, \pm 1)$. Il

est clair que a^\pm n'est pas inclus dans F , donc il est disjoint de tout cycle de F . On peut alors définir la *forme de Seifert* $S_F : H_1(F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ par

$$S_F(x, y) := \text{lk}(x, y^+).$$

Si $H_1(F)$ est vu comme un \mathbb{Z} -module ayant $\{a_1, \dots, a_{2g}\}$ comme base, la *matrice de Seifert* associée V est la matrice d'ordre $2g$ dont les entrées sont

$$v_{ij} = S_F(a_i, a_j) = \text{lk}(a_i, a_j^+).$$

Il est possible de trouver une relation entre la forme de Seifert S_F et le produit d'intersection $H_1(F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ que nous noterons ι dans cette section. Pour ce faire, nous aurons d'abord besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.4.1. Le nombre d'enlacements satisfait $\text{lk}(x^-, y) = \text{lk}(x, y^+)$.

Démonstration. (Esquisse) On s'en convainc facilement lorsqu'on considère la définition de la proposition 3.3.3 faisant appel aux diagrammes. En effet, étant donné une projection régulière de deux courbes simples et fermées (dans \mathbb{R}^3), si l'on pousse la première vers le bas, l'autre sera forcément au dessus, ce qui produit le même diagramme que de tirer la seconde vers le haut. Les nombres d'enlacements seront donc les mêmes. \square

Lemme 3.4.2. Soit F une surface de Seifert pour un nœud dans S^3 et $\{a_1, \dots, a_{2g}\}$ une base de $H_1(F)$. Il existe une base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ de $H_1(S^3 - F)$ telle que $\text{lk}(a_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$.

Démonstration. Au lemme 5.3.4 du chapitre V, nous donnerons une preuve qui peut être adaptée ici. Ceci étant dit, on encourage la lecture de la preuve dans (Rolfsen, 1976), où l'auteur présente un joli argument géométrique. \square

4. Il est clair que D_i satisfait ces identités. Si D est une autre matrice associée, alors il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}D_iP$. On vérifie alors aisément que D satisfait aussi ces égalités.
5. Soit x et $y \in H_1(F)$. Si Σ est la surface $h(x \times [-1, 1]) \subset S^3$ judicieusement orientée, alors $\iota(x, y) = y \cdot [\Sigma]$. Comme $[\partial\Sigma] = x^- - x^+$, on obtient

$$\begin{aligned}
 S_F(x, y) - S_F(y, x) &= \text{lk}(x, y^+) - \text{lk}(y, x^+) \\
 &= \text{lk}(x^-, y) - \text{lk}(y, x^+) \\
 &= \text{lk}(y, x^-) - \text{lk}(y, x^+) \\
 &= \text{lk}(y, x^- - x^+) \\
 &= y \cdot [\Sigma] \\
 &= \iota(x, y),
 \end{aligned}$$

où la seconde égalité découle du lemme 3.4.1. Pour plus de détails, voir le chapitre 7 de (Kauffman, 1987).

□

3.5 Signature d'un nœud

Au chapitre II, il a été rappelé comment définir la signature d'une forme bilinéaire symétrique entière et par surcroît d'une matrice symétrique entière. Le but de la présente section est donc de définir la signature d'un nœud grâce aux formes de Seifert. Or, ces formes dépendent évidemment de la surface de Seifert choisie. Elles ne sont donc pas des invariants du nœud. Nous devons donc parler de la S -équivalence de matrices pour montrer que la signature est bien un invariant des nœuds.

Définition 3.5.1. Deux matrices carrées de même ordre sont *congruentes*, notées $A \sim B$, s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^T A P$. Si les matrices A

et B sont entières, l'on dira qu'elles sont *entièrement congruentes*, notées $A \sim_{\mathbb{Z}} B$, s'il existe une matrice entière P telle que $\det(P) = \pm 1$ et $B = P^T A P$.

Définition 3.5.2. Soit A et B deux matrices carrées. La matrice A est obtenue par *stabilisation* de B si

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & * & 0 \\ & B & & \vdots & \vdots \\ & & & * & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Définition 3.5.3. Deux matrices sont *S-équivalentes* si l'une des matrices est obtenue de l'autre à la suite d'opérations de congruence entière et de stabilisation.

Théorème 3.5.4. Soit K un nœud. Si V et V' sont des matrices de Seifert, alors elles sont *S-équivalentes*.

Ce résultat très important, mais non trivial, nous permettra de bien définir la signature d'un nœud. Il s'agit en fait du théorème 8.4 de (Lickorish, 1997), où la preuve est bien détaillée.

Si V est une matrice de Seifert pour un nœud K , la matrice symétrique entière $V + V^T$ est une matrice associée à la forme de Seifert S_F symétrisée. Cette matrice est inversible, comme il sera démontré au corollaire 3.6.5 ci-dessous. Il existe donc une certaine matrice réelle inversible P telle que

$$P^T(V + V^T)P = \text{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_s, \underbrace{-1, \dots, -1}_t)$$

par le corollaire 2.1.7.

Définition 3.5.5. La *signature* d'un nœud K , notée $\sigma(K)$, est l'entier donné par la formule

$$\sigma(K) = s - t.$$

Proposition 3.5.6. La signature d'un nœud est un invariant de celui-ci, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de la matrice de Seifert.

Démonstration. Ceci découle directement du fait que deux matrices de Seifert V et V' sont S -équivalentes énoncé au théorème 3.5.4. En effet, si $V \sim_{\mathbf{Z}} V'$, alors $V' = P^T V P$ pour une certaine matrice P de déterminant égal à ± 1 . Du théorème de Sylvester (théorème 2.1.6) il s'en suit que V' et V ont la même signature.

Si plutôt V' est obtenue de V par stabilisation, alors

$$V' + (V')^T = \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & * & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & * & 0 \\ \hline & & & 0 & 1 \\ * & \dots & * & 0 & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim_{\mathbf{Z}} \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Ainsi,

$$V' + (V')^T \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right],$$

d'où $V' + (V')^T$ et $V + V^T$ ont également la même signature. \square

Proposition 3.5.7. La signature d'un nœud est toujours paire.

Démonstration. Une matrice de Seifert est toujours d'ordre égal à $2g$. On conclut donc par la proposition 2.1.8. \square

3.6 Polynôme d'Alexander

Le polynôme d'Alexander d'un nœud est un des premiers invariants importants de la théorie qui a permis de différencier différents types de nœuds de manière relativement simple. Apparaissant dans la formule de Fox (théorème 3.7.16), il sera d'une grande utilité au chapitre V pour identifier les 3-sphères d'homologie rationnelle.

Définition 3.6.1. Si V est une matrice de Seifert pour un nœud K , alors le *polynôme d'Alexander* de K est $\Delta_K(t) := \det(V^T - tV)$.

Proposition 3.6.2. Le polynôme d'Alexander d'un nœud est bien défini modulo la multiplication par $\pm t^m$, $m \in \mathbb{Z}$. On notera ceci par $\Delta_K(t) \doteq \det(V^T - tV)$, pour V une matrice de Seifert.

Démonstration. On se souvient que deux matrices de Seifert sont toujours S -équivalentes par le théorème 3.5.4. Il suffit ainsi de voir que la congruence entière et l'opération de stabilisation n'affectent le polynôme d'Alexander d'un nœud que par un facteur t .

Soit donc V et V' deux matrices de Seifert pour un nœud K . Si $V' \sim_{\mathbb{Z}} V$, alors il existe une certaine matrice entière P telle que

$$\begin{aligned} \det(V'^T - tV') &= \det((P^T V P)^T - t(P^T V P)) \\ &= \det(P^T (V^T - tV) P) \\ &= \det(P)^2 \det(V^T - tV) \\ &= \det(V^T - tV), \end{aligned}$$

car $\det(P) = \pm 1$. Si plutôt V' est obtenue de V par stabilisation, c'est-à-dire

$$V' = \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & * & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & * & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

alors

$$V'^T - tV' = \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & -t* & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & -t* & 0 \\ \hline * & \dots & * & 0 & -t \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]} \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & -t \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

d'où $\det(V'^T - tV') = t \det(V^T - tV)$. \square

Remarque 3.6.3. La notation $\sim_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]}$ de la preuve précédente correspond à des équivalences par opérations lignes et colonnes avec des facteurs de $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$, au même titre que la notation $\sim_{\mathbb{Z}}$ précédemment mentionnée l'était avec des facteurs entiers.

Proposition 3.6.4. Pour tout nœud K , on a $\Delta_K(1) = 1$.

Démonstration. Soit V une matrice de Seifert. On a $\Delta_K(1) = \det(V^T - V)$. Par le point 5 de la proposition 3.4.3, $V^T - V$ est une matrice associée au produit d'intersection ι , d'où $\det(V^T - V) = 1$ par le point 4 de la même proposition. \square

Corollaire 3.6.5. Si V est une matrice de Seifert pour un nœud K , alors la matrice symétrique $V + V^T$ est inversible.

Démonstration. On a

$$\det(V + V^T) \equiv \det(V - V^T) \equiv 1 \pmod{2}.$$

En particulier, $\det(V + V^T) \neq 0$. □

3.7 Revêtements cycliques

Les variétés qui font l'objet du théorème de Boileau-Boyer-Gordon sont les revêtements cycliques de S^3 ramifiés le long d'un nœud. Dans cette section, nous étudierons en détail ces variétés, en présentant leur construction, en calculant leur premier groupe d'homologie et en démontrant la formule de Fox.

Ce qui suit s'appuie principalement sur ce qui est fait dans (Kauffman, 1987), (Lickorish, 1997) et (Rolfsen, 1976).

3.7.1 Revêtements cycliques de l'extérieur d'un nœud

Définition 3.7.1. Soit K un nœud. Si $T(K)$ est un voisinage tubulaire de K dans S^3 , c'est-à-dire l'image d'un plongement $T : K \times D^2 \hookrightarrow S^3$ tel que $T(x, 0) = 0$ pour tout $x \in K$, l'extérieur de K est la 3-variété compacte $X(K) := S^3 - \text{int}(T(K))$. De plus, on appelle *méridien* de K la courbe simple et fermée $T(\{1\} \times \partial D^2)$. On le note μ_K .

Puisque le méridien est unique à isotopie près (Cromwell, 2004), on parle souvent du méridien d'un nœud comme étant sa classe d'homologie dans $H_1(\partial T(K))$, que l'on note également μ_K par abus. Il est à noter que le méridien d'un nœud est le bord d'un disque, à savoir $T(\{1\} \times D^2)$. Ainsi, il est homotopiquement et homologiquement nul dans $T(K)$ (Rolfsen, 1976).

Proposition 3.7.2. Pour tout nœud K , $H_1(X(K)) \cong \mathbb{Z}$ est engendré par un méridien μ_K du nœud.

Démonstration. Puisque $X(K) = S^3 - \text{int}(T(K)) \simeq S^3 - K$, nous avons par la dualité d'Alexander que

$$H_1(X(K)) \cong H_1(S^3 - K) \cong H^1(K) \cong H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

□

Remarque 3.7.3. Il est possible de prouver la dernière proposition en utilisant la présentation de Wirtinger des groupes de nœuds $\pi_1(S^3 - K)$. Brièvement, tous les «méridiens», c'est-à-dire les générateurs de cette présentation sont conjugués deux à deux. Autrement dit, si x_k et x_1 sont des méridiens, il existe $x_i \in \pi_1(S^3 - K)$ tel que $x_k = x_i x_1 x_i^{-1}$. Or, par l'homomorphisme d'Hurewicz, $H_1(S^3 - K)$ est isomorphe à la présentation de Wirtinger de $\pi_1(S^3 - K)$ munie en plus des éléments de $[\pi_1(S^3 - K), \pi_1(S^3 - K)]$ comme relations. En particulier, $x_i x_1 x_i^{-1} x_1^{-1} = 1$, d'où

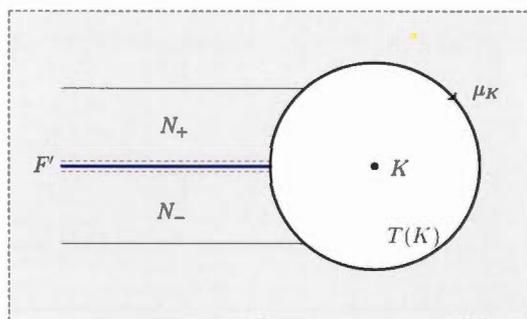
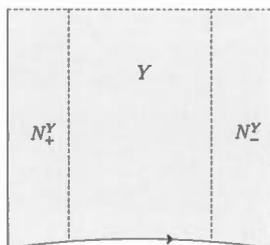
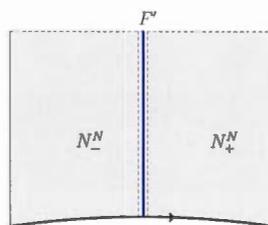
$$x_k = x_i x_1 x_i^{-1} = x_1,$$

ce qui montre bien que $H_1(S^3 - K) \cong \mathbb{Z}$ est engendré par le méridien de K . Cette preuve est un problème de (Clay et Rolfsen, 2016).

On peut construire une 3-variété compacte appelée revêtement cyclique de $X(K)$. Pour ce faire, fixons $n \in \mathbb{N}$ et considérons F une surface de Seifert pour K dans S^3 munie d'un bicol h . Posons

$$\begin{aligned} F' &:= F \cap X(K) & N &:= h(F \times [-1, 1]) \cap X(K) \\ Y &:= X(K) - F' & N_+ &:= h(F \times (0, 1]) \cap X(K) \\ & & N_- &:= h(F \times [-1, 0)) \cap X(K), \end{aligned}$$

où les notations sont choisies de sorte qu'un méridien orienté μ_K de K dans $\partial X(K)$ entre dans N via N_- pour en ressortir par N_+ , tel qu'illustré à la figure 3.4a. Par définition, $X(K) = Y \cup N$ et N_+ et N_- sont inclus dans N et Y . Nous noterons

(a) Extérieur de nœud $X(K)$ (b) Copie de Y (c) Copie de N Figure 3.4: Construction du revêtement cyclique à n feuilles

alors N_{\pm}^Y la copie de N_{\pm} dans Y et N_{\pm}^N la copie de N_{\pm} incluses dans N afin de les distinguer, comme aux figures 3.4b et 3.4c.

Soit maintenant $\Gamma_n := \langle t : t^n \rangle$. Prenons n copies de Y et N que l'on notera

$$t^i Y \text{ et } t^i N,$$

où $t^i \in \Gamma_n$, donc $t^n Y = t^0 Y = Y$. Ainsi, tout élément de $t^i \in \Gamma_n$ envoie $x \in Y$ (ou N) sur l'élément $t^i x$ correspondant dans la copie $t^i Y$ (ou $t^i N$). À l'union disjointe

$$\bigsqcup_{t^i \in \Gamma_n} (t^i Y \sqcup t^i N),$$

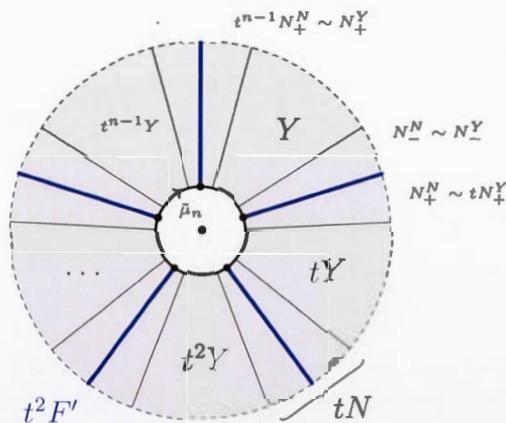


Figure 3.5: L'espace \tilde{X}_n est le revêtement cyclique à n feuilles de $X(K)$

on identifie $t^i N_-^N \sim t^i N_-^Y$ et $t^i N_+^N \sim t^{i+1} N_+^Y$ via l'identité. L'espace quotient

$$\tilde{X}_n := \bigsqcup_{t^i \in \Gamma_n} (t^i Y \sqcup t^i N) / \sim$$

est un revêtement cyclique à n feuilles de l'extérieur du nœud K . La figure 3.5 donne l'intuition derrière la construction de \tilde{X}_n .

Pour se convaincre que \tilde{X}_n est bien un revêtement au sens topologique, on remarque que le générateur de Γ_n , vu comme une fonction $t : \tilde{X}_n \rightarrow \tilde{X}_n$, est un homéomorphisme d'ordre n sans point fixe et que par construction $\tilde{X}_n / \Gamma_n \approx (Y \cup N) / (N_{\pm}^N \sim N_{\pm}^Y) \approx X(K)$. Autrement dit, tout élément de \tilde{X}_n s'écrit de manière unique de la forme $t^i z$, où $t^i \in \Gamma_n$ et $z \in X(K)$. Ceci nous motive à définir la fonction continue $p : \tilde{X}_n \rightarrow X(K)$ par $t^i z \mapsto z$. Il est aisé de voir qu'il s'agit en fait d'un revêtement à n feuilles dont le groupe d'automorphismes $\text{Aut}(p)$ est isomorphe à Γ_n . Puisque ce dernier agit transitivement sur \tilde{X}_n , il s'en suit que $p : \tilde{X}_n \rightarrow X(K)$ est un revêtement régulier.

Proposition 3.7.4. Le revêtement $p : \tilde{X}_n \rightarrow X(K)$ ne dépend pas de la surface de Seifert utilisée ni de tout autre choix fait dans la construction. C'est en ce sens que l'on parle *du* revêtement cyclique à n feuilles \tilde{X}_n de l'extérieur du nœud K .

Démonstration. Il est suffisant de vérifier que le revêtement $p : \tilde{X}_n \rightarrow X(K)$ correspond au noyau de l'homomorphisme surjectif

$$h_n : \pi_1(X(K)) \rightarrow H_1(X(K)) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n,$$

où l'homomorphisme de gauche est l'homomorphisme d'Hurewicz et celui de droite la projection canonique. En effet, celui-ci est unique à isomorphisme de revêtements près (théorème 1.38 de (Hatcher, 2002)). On veut donc montrer que

$$p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}_n)) = \ker h_n.$$

Par la théorie des revêtements réguliers (corollaire 7.4 de (Massey, 1967), proposition 1.39 de (Hatcher, 2002)) il existe une courte suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_1(\tilde{X}_n) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_1(X(K)) \xrightarrow{\varphi} \text{Aut}(p) \cong \Gamma_n \rightarrow 1. \quad (3.1)$$

Par exactitude, $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}_n)) = \ker(\varphi)$. Considérons maintenant le morphisme induit $\hat{\varphi} : H_1(X(K)) \rightarrow \Gamma_n$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X(K)) & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma_n \\ h \downarrow & \nearrow \hat{\varphi} & \\ H_1(X(K)) & & \end{array}$$

commute. Il en découle que $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}_n)) = \ker(\hat{\varphi} \circ h)$. Puisque le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H_1(X(K)) & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \Gamma_n \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_n \end{array}$$

est aussi commutatif, $h_n = \hat{\varphi} \circ h$, on conclut effectivement que

$$p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}_n)) = \ker(\hat{\varphi} \circ h) = \ker h_n.$$

□

Remarque 3.7.5. Comme $p : \tilde{X}_n \rightarrow X(K)$ est un revêtement fini et $X(K)$ est compact, \tilde{X}_n est également compact. Plus encore, $\partial X(K)$ est homéomorphe à un tore, étant le bord du voisinage tubulaire $T(K)$. Puisque $\pi_1(\partial X(K)) \rightarrow \mathbb{Z}_n$ est surjectif et comme tout revêtement compact d'un tore est forcément un tore, on conclut que $\partial \tilde{X}_n = p^{-1}(\partial X(K))$ est un tore. En fait, $\tilde{\mu}_n := p^{-1}(\mu_K)$ est un méridien pour $\partial \tilde{X}_n$ qui revêt n fois μ_K . En particulier, $p_*([\tilde{\mu}_n]) = n[\mu_K] \neq 0 \in H_1(X(K))$.

Intéressons-nous maintenant au premier groupe d'homologie $H_1(\tilde{X}_n)$. Remarquons que dans la construction du revêtement \tilde{X}_n , on a les équivalences d'homotopie $Y \simeq S^3 - F$ et $N \simeq F$. Ainsi, pour chaque $t^i \in \Gamma_n$, il existe des bases $\{t^i a_1, \dots, t^i a_{2g}\}$ et $\{t^i \alpha_1, \dots, t^i \alpha_{2g}\}$ pour $H_1(t^i N)$ et $H_1(t^i Y)$ respectivement par la proposition 3.2.4. En adoptant les notations introduites à la section 3.4, les cycles $t^i a_j^\pm$, pour $1 \leq j \leq 2g$, représentent des classes de $H_1(t^i Y)$. Autrement dit, on peut voir ces représentants de classes d'homologie comme des mots de l'alphabet $\{t^i \alpha_1, \dots, t^i \alpha_{2g}\}$.

Proposition 3.7.6. Avec les hypothèses ci-dessus, on a la présentation

$$H_1(\tilde{X}_n) \cong \langle t^i \alpha_k, \tilde{\mu}_n : t^i a_j^- = t^{i+1} a_j^+ \rangle,$$

où $t^i \in \Gamma_n$, $1 \leq j, k \leq 2g$ et $\tilde{\mu}_n$ est la préimage du méridien μ_K dans $X(K)$.

Démonstration. Nous suivons ici ce qui est fait dans (Rolfsen, 1976). Comme il a été mentionné à la remarque 3.7.5, la préimage $\tilde{\mu}_n \in \partial \tilde{X}_n$ de $\mu_K \in \partial X(K)$ est un cycle qui revêt n fois μ_K . Pour alléger les notations, la classe d'homologie que représente ce cycle sera également notée $\tilde{\mu}_n$. Posons

$$Y' := \left(\bigsqcup_{t^i \in \Gamma_n} t^i Y \right) \cup \tilde{\mu}_n \quad \text{et} \quad N' := \left(\bigsqcup_{t^i \in \Gamma_n} t^i N \right) \cup \tilde{\mu}_n,$$

où les $t^i Y$ et $t^i N$ sont vus dans \tilde{X}_n . Alors

$$Y' \cup N' = \tilde{X}_n \quad \text{et} \quad Y' \cap N' = \left(\bigsqcup_{t^i \in \Gamma_n} (t^i N_+ \sqcup t^i N_-) \right) \cup \tilde{\mu}_n.$$

De plus, $Y' \cap N' \neq \emptyset$ est connexe par arcs (les $t^i N_{\pm}$ étant connexes par arcs et reliés par $\tilde{\mu}_n$), donc la suite exacte de Mayer-Vietoris pour l'homologie réduite

$$\dots \rightarrow H_1(Y' \cap N') \xrightarrow{u_* \oplus v_*} H_1(Y') \oplus H_1(N') \rightarrow H_1(\tilde{X}_n) \rightarrow \tilde{H}_0(Y' \cap N') = 0$$

implique que

$$H_1(\tilde{X}_n) \cong H_1(Y') \oplus H_1(N') / \text{Im}(u_* \oplus v_*), \quad (3.2)$$

où u et v sont les inclusions $N' \cap Y' \hookrightarrow Y'$ et $N' \cap Y' \hookrightarrow N'$ respectivement.

En premier lieu, étudions $H_1(Y')$. Si $A = \bigsqcup_{t^i \in \Gamma_n} t^i Y$ et $B = \tilde{\mu}_n$, alors $A \cup B = Y'$ et $A \cap B = \bigsqcup_{t^i \in \Gamma_n} (t^i Y \cap \tilde{\mu}_n) \simeq \bigsqcup_{t^i \in \Gamma_n} t^i *$. Encore une fois, la suite de Mayer-Vietoris

$$H_1(A \cap B) \rightarrow H_1(A) \oplus H_1(B) \rightarrow H_1(Y') \xrightarrow{0} H_0(A \cap B) \rightarrow H_0(A) \oplus H_0(B)$$

donne $H_1(Y') \cong H_1(A) \oplus H_1(B)$, car $H_1(A \cap B) = 0$. Par l'axiome d'additivité de l'homologie, on obtient que $H_1(Y') \cong \left(\bigoplus_{t^i \in \Gamma_n} H_1(t^i Y) \right) \oplus H_1(\tilde{\mu}_n)$. Autrement dit,

$$H_1(Y') \cong \langle t^i \alpha_k, \tilde{\mu}_n \rangle$$

où $t^i \in \Gamma_n$ et $1 \leq k \leq 2g$.

De manière tout à fait analogue, on vérifie que

$$H_1(N') = \langle t^i a_j, \tilde{\mu}_n \rangle \quad \text{et} \quad H_1(N' \cap Y') = \langle t^i a_j^-, t^i a_j^+, \tilde{\mu}_n \rangle$$

où $t^i \in \Gamma_n$ et $1 \leq j \leq 2g$.

Étudions maintenant $\text{Im}(u_* \oplus v_*)$. Rappelons que dans la construction de \tilde{X}_n , nous avons identifié $t^i N_-^N \sim t^i N_-^Y$ et $t^i N_+^N \sim t^{i+1} N_+^Y$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_* \oplus v_*(t^i a_j^-) &= (t^i a_j^-, t^i a_j) \\ u_* \oplus v_*(t^i a_j^+) &= (t^{i+1} a_j^+, t^i a_j) \\ u_* \oplus v_*(\tilde{\mu}_n) &= (\tilde{\mu}_n, \tilde{\mu}_n). \end{aligned}$$

De l'isomorphisme (3.2), on obtient alors la présentation

$$H_1(\tilde{X}_n) \cong \langle t^i \alpha_k, t^i a_j, \tilde{\mu}_n : t^i a_j^- = t^i a_j, t^{i+1} a_j^+ = t^i a_j, \tilde{\mu}_n = \tilde{\mu}_n \rangle$$

qui se simplifie à la présentation voulue

$$H_1(\tilde{X}_n) \cong \langle t^i \alpha_k, \tilde{\mu}_n : t^i a_j^- = t^{i+1} a_j^+ \rangle.$$

□

Remarque 3.7.7. Il est possible de construire le *revêtement cyclique infini* $\tilde{X} \rightarrow X(K)$ de la même façon que \tilde{X}_n , mais en considérant plutôt le groupe $\Gamma = \langle t \rangle$. La preuve de la proposition précédente s'adapte alors pour montrer que

$$H_1(\tilde{X}) \cong \langle t^i \alpha_k : t^i a_j^- = t^{i+1} a_j^+ \rangle,$$

où $1 \leq j, k \leq 2g$. En voyant plutôt $H_1(\tilde{X})$ comme un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module, on obtient la présentation

$$H_1(\tilde{X}) \cong \langle \alpha_k : a_j^- = t a_j^+ \rangle,$$

où $1 \leq j, k \leq 2g$. Il s'agit du *module d'Alexander* du nœud.

Corollaire 3.7.8. Soit F une surface de Seifert pour un nœud K . Si V est une matrice de Seifert d'ordre $2g$ associée, alors $V^T - tV$ est une matrice de présentation pour le $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $H_1(\tilde{X})$.

Démonstration. La preuve suit l'argument présenté dans (Rolfsen, 1976). Soit $\{a_1, \dots, a_{2g}\}$ une base de $H_1(F)$ de laquelle V est obtenue. Par le lemme 3.4.2, il existe une base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ de $H_1(S^3 - F)$ telle que $\text{lk}(a_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$. Ainsi,

$$a_j^+ = \sum_{k=1}^{2g} \text{lk}(a_j^+, a_k) \alpha_k \quad \text{et} \quad a_j^- = \sum_{k=1}^{2g} \text{lk}(a_j^-, a_k) \alpha_k.$$

En effet, comme $a_j^\pm \in H_1(S^3 - F)$, il existe des entiers c_k^\pm tels que

$$a_j^\pm = \sum_{k=1}^{2g} c_k^\pm \alpha_k.$$

Par linéarité et dualité, on obtient pour tout $1 \leq l \leq 2g$ que

$$\begin{aligned} \text{lk}(a_j^\pm, a_l) &= \text{lk}\left(\sum_{k=1}^{2g} c_k^\pm \alpha_k, a_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2g} c_k^\pm \text{lk}(\alpha_k, a_l) \\ &= \sum_{k=1}^{2g} c_k^\pm \delta_{kl} \\ &= c_l^\pm. \end{aligned}$$

En fait, du lemme 3.4.1, on a

$$a_j^- = \sum_{k=1}^{2g} \text{lk}(a_j^-, a_k^+) \alpha_k.$$

Considérons maintenant la présentation du module d'Alexander de la remarque précédente,

$$H_1(\tilde{X}) \cong \langle \alpha_k : a_j^- = t a_j^+ \rangle.$$

Puisque V est la matrice de Seifert pour la base $\{a_1, \dots, a_{2g}\}$, c'est-à-dire $v_{ij} =$

$\text{lk}(a_i, a_j^+)$, on obtient

$$\begin{aligned} a_j^- = ta_j^+ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2g} \text{lk}(a_j, a_k^+) \alpha_k = t \sum_{k=1}^{2g} \text{lk}(a_j^+, a_k) \alpha_k \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2g} v_{jk} \alpha_k - t \sum_{k=1}^{2g} v_{kj} \alpha_k = 0. \\ &\Leftrightarrow (V^T - tV) \alpha = 0 \end{aligned}$$

où $\alpha^T = [\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}]$, ce qui montre bien que $V^T - tV$ est une matrice de présentation pour $H_1(\tilde{X})$ vu comme un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module. \square

3.7.2 Revêtement cyclique à n feuilles de S^3 , ramifié sur un nœud K .

À la sous-section précédente, nous avons construit une 3-variété compacte \tilde{X}_n qui ne dépendait que de K et $n \geq 2$. Dans cette section, nous produirons une 3-variété compacte, mais sans bord, appelée le revêtement cyclique à n feuilles de S^3 , ramifié le long d'un nœud.

Définition 3.7.9. Soit $f : (\tilde{X}, \tilde{A}) \rightarrow (X, A)$ une surjection continue telle que $f(\tilde{A}) = A$. On dit que $f : \tilde{X} \rightarrow X$ est un *revêtement à n feuilles de X , ramifié sur A* si

1. $f|_{\tilde{X}-\tilde{A}} : \tilde{X} - \tilde{A} \rightarrow X - A$ est un revêtement à n feuilles de $X - A$ et
2. $f|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \rightarrow A$ est une bijection (continue).

Donnons quelques exemples utiles de tels objets.

Exemple 3.7.10. Si l'on considère le disque $D^2 = \{(r, \theta) : r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, alors $f : D^2 \rightarrow D^2$ définie par $(r, \theta) \mapsto (r, n\theta)$ est un revêtement à n feuilles, ramifié sur $\{0\}$. En effet, f restreint au disque sans l'origine est bien un revêtement à n feuilles de $D^2 - \{0\}$ et l'origine est un point fixe de f . Voir la figure 3.6.

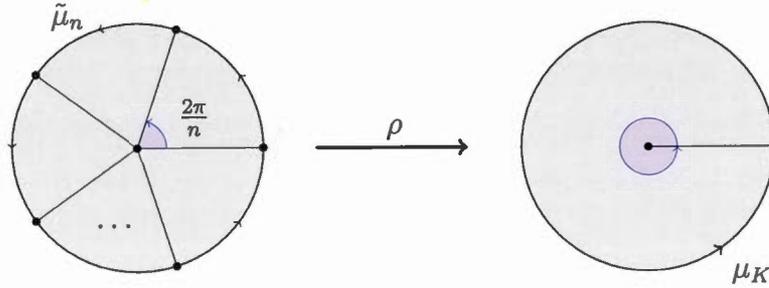


Figure 3.6: Revêtement ramifié de l'exemple 3.7.10, qui est également une coupe méridionale du revêtement ramifié de l'exemple 3.7.11

Exemple 3.7.11. Il est également possible de trouver un revêtement d'un tore solide sur lui-même, ramifié le long de sa courbe centrale $S^1 \times \{0\}$. Pour cela, on définit simplement $\rho : S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$ par $(z, (r, \theta)) \mapsto (z, f(r, \theta))$, où f est le revêtement ramifié de l'exemple précédent. En effet, le seul point fixe de f est l'origine de D^2 . Il en découle alors clairement que ρ fixe tout point de la courbe $S^1 \times \{0\}$. De plus, tout autre point est couvert n fois par ρ .

Soit maintenant $T(K)$ un voisinage tubulaire d'un nœud K et μ_K un méridien vu dans $\partial T(K)$. L'exemple précédent produit $\rho : \tilde{T} \approx S^1 \times D^2 \rightarrow T(K)$, un revêtement à n feuilles de $T(K)$ ramifié le long de K , car K correspond à la courbe $S^1 \times \{0\}$ sous l'homéomorphisme $T(K) \approx S^1 \times D^2$. Ainsi, $\rho^{-1}(\mu_K)$ est un méridien de $\partial \tilde{T}$ qui recouvre n fois μ_K , comme il a été mentionné à la remarque 3.7.5. En fait, si $p : \tilde{X}_n \rightarrow X(K)$ est le revêtement cyclique de l'extérieur de K , on peut identifier $p|_{\partial \tilde{X}_n}$ avec $\rho|_{\partial \tilde{T}}$, ce qui nous permet donc d'attacher \tilde{T} à \tilde{X}_n par leur bord respectif de sorte que $\rho^{-1}(\mu_K)$ corresponde à $\tilde{\mu}_n$. La nouvelle variété est notée $\Sigma_n(K)$.

Il est possible de prolonger continûment p à \tilde{T} via ρ . On aura ainsi une surjection continue $p : \Sigma_n(K) \rightarrow X(K) \cup T(K) = S^3$ qui, par construction, est un revêtement à n feuilles, ramifié le long du nœud K .

Définition 3.7.12. Pour un nœud K , $p : \Sigma_n(K) \rightarrow S^3$ est le *revêtement cyclique à n feuilles de S^3 , ramifié la long de K* .

On remarquera que $\Sigma_n(K)$ est une 3-variété qui est bien compacte et qui, par construction, est sans bord. Ainsi, $\Sigma_n(K)$ est une 3-variété fermée qui ne dépend que de K et de $n \geq 2$.

Proposition 3.7.13. Pour tout nœud K et entier positif $n \geq 2$,

$$H_1(\tilde{X}_n) \cong H_1(\Sigma_n(K)) \oplus \mathbb{Z}.$$

Démonstration. De la longue suite exacte en homologie de la paire $(\Sigma_n(K), \tilde{X}_n)$ on extrait la suite exacte

$$H_2(\Sigma_n(K), \tilde{X}_n) \xrightarrow{\partial_*} H_1(\tilde{X}_n) \xrightarrow{i_*} H_1(\Sigma_n(K)),$$

où la seconde flèche est induite par l'inclusion $i : \tilde{X}_n \rightarrow \Sigma_n(K)$. Il se trouve que cette dernière est surjective. En effet, si $[\sigma] \in H_1(\Sigma_n(K))$, alors $\sigma : S^1 \rightarrow \Sigma_n(K)$. Quitte à perturber légèrement σ par une isotopie ambiante, nous supposons sans perte de généralité que σ est un plongement lisse (voir corollaire 2.15.4 de (Bredon, 1993)). On peut alors trouver $\sigma' : S^1 \hookrightarrow \Sigma_n(K)$ satisfaisant $\sigma'(S^1) \subseteq \tilde{X}_n$ et $\sigma' \sim \sigma$. Ainsi, $i_*(\sigma') = \sigma$, d'où la surjectivité.

Soit maintenant le tore solide \tilde{T} attaché à \tilde{X}_n pour construire $\Sigma_n(K)$. Si $E(\tilde{T})$ est un «épaississement» de \tilde{T} dans $\Sigma_n(K)$, alors par l'axiome d'excision pris avec $U = \Sigma_n(K) - E(\tilde{T})$, on obtient l'isomorphisme

$$H_2(\Sigma_n(K), \tilde{X}_n) \cong H_2(E(\tilde{T}), E(\tilde{T}) - \tilde{T}) \cong H_2(\tilde{T}, \partial\tilde{T}) \cong \mathbb{Z}.$$

En effet, $(\Sigma_n(K) - U, \tilde{X}_n - U) = (E(\tilde{T}), E(\tilde{T}) - \tilde{T}) \simeq (\tilde{T}, \partial\tilde{T})$ et $H_2(S^1 \times D^2, S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$. Aussi, $H_2(\tilde{T}, \partial\tilde{T})$ est engendré par un disque méridional \tilde{D}_n de \tilde{T} (par la preuve du dernier isomorphisme qui ne sera pas présentée). On peut alors en déduire que ∂_* est injectif. Pour cela, on constate que

$$H_2(\tilde{T}, \partial\tilde{T}) \xrightarrow{\partial_*} H_1(\tilde{X}_n) \xrightarrow{p_*} H_1(X(K)) \cong \langle \mu_K \rangle$$

est donné par $p_* \circ \partial_*([\tilde{D}_n]) = p_*([\partial\tilde{D}_n]) = p_*(\tilde{\mu}_n) = n\mu_K \neq 0$ (voir la remarque 3.7.5). Donc $p_* \circ \partial_* : \mathbb{Z} \cong H_2(\tilde{T}, \partial\tilde{T}) \rightarrow H_1(X(K)) \cong \mathbb{Z}$ est injectif. En particulier, ∂_* doit être injectif.

En résumé, on a la courte suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*} H_1(\tilde{X}_n) \rightarrow H_1(\Sigma_n(K)) \rightarrow 0$$

Pour conclure, il suffit de voir que la suite se scinde. On cherche alors $\alpha : H_1(\tilde{X}_n) \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $\alpha \circ \partial_* = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$.

Fixons $\tilde{F}' = t^0 F'$ une copie de F' dans \tilde{X}_n , tel qu'illustré en bleu à la figure 3.5. On définit α sur $H_1(\tilde{X}_n)$ comme étant $\gamma \mapsto \gamma \cdot [\tilde{F}']$, c'est-à-dire le produit d'intersection avec $[\tilde{F}']$. Il est clair que $\alpha(\tilde{\mu}_n) = 1$ puisque toute copie $t^i F'$ n'intersecte qu'une seule fois $\tilde{\mu}_n$ (voir figure 3.5). Ainsi, $\alpha \circ \partial_*(1) = \alpha \circ \partial_*([\tilde{D}_n]) = \alpha([\partial\tilde{D}_n]) = \alpha(\tilde{\mu}_n) = 1$, ce qui complète la preuve. \square

Corollaire 3.7.14. En adoptant les notations de la proposition 3.7.6, pour tout entier positif $n \geq 2$, on a

$$H_1(\Sigma_n(K)) \cong \langle t^i \alpha_k : t^i a_j^- = t^{i+1} a_j^+ \rangle,$$

où $t^i \in \Gamma_n$ et $1 \leq j, k \leq 2g$.

Démonstration. La copie \mathbb{Z} de la proposition précédente est engendrée par $\tilde{\mu}_n$. On conclut alors directement par la proposition 3.7.6. \square

De manière tout à fait analogue à ce qui a été fait au corollaire 3.7.8, on montre la proposition suivante.

Proposition 3.7.15. Si V est une matrice de Seifert pour un nœud K , alors $H_1(\Sigma_n(K))$, vu comme \mathbb{Z} -module, a pour présentation

$$\langle t^i \alpha : (V^T - tV)t^i \alpha = 0 \rangle,$$

où $\alpha^T = [\alpha_1 \dots \alpha_{2g}]$, $0 \leq i \leq n-1$ et $t^n = t^0 = 1 \in \Gamma_n$. Autrement dit, la matrice carrée d'ordre $2gn \times 2gn$

$$\begin{bmatrix} V^T & -V & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & V^T & -V & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V^T & -V & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & V^T & -V \\ -V & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V^T \end{bmatrix}$$

est une matrice de présentation de $H_1(\Sigma_n(K))$ vu comme \mathbb{Z} -module. □

3.7.3 Formule de Fox

Nous concluons ce chapitre avec la présentation de la formule de Fox. Ce résultat est d'une grande importance en théorie des nœuds puisqu'il permet de calculer facilement l'ordre du \mathbb{Z} -module $H_1(\Sigma_n(K))$ à l'aide du polynôme d'Alexander du nœud K . Comme nous l'avons déjà mentionné, nous l'utiliserons entre autres pour identifier les revêtements cycliques $\Sigma_n(K)$ qui sont des 3-sphères d'homologie.

Théorème 3.7.16 (Fox). Soit K un nœud et $\Sigma_n(K)$ le revêtement cyclique à n feuilles de S^3 , ramifié le long de K . L'ordre du groupe abélien (\mathbb{Z} -module) $H_1(\Sigma_n(K))$ est donné par la formule

$$|H_1(\Sigma_n(K))| = \prod_{i=1}^n |\Delta_K(\zeta_n^i)|,$$

où $\zeta_n = \exp(2\pi i/n)$.

Avant d'aborder directement la preuve, donnons quelques résultats préliminaires concernant les matrices de présentations de $H_1(\Sigma_n(K))$. Comme à l'habitude, F dénotera dans ce qui suit une surface de Seifert pour un nœud fixé K de genre g , $\{a_1, \dots, a_{2g}\}$ une certaine base de $H_1(F)$, V la matrice de Seifert associée à F dans la base précédente, $D = V^T - V$ la matrice de la forme d'intersection dans la même base et I la matrice identité. Rappelons par ailleurs que $D^2 = -I$ par la proposition 3.4.3.

Lemme 3.7.17. Si $G := DV$, alors $(G - I)^n - G^n$ est une matrice de présentation pour le \mathbb{Z} -module $H_1(\Sigma_n(K))$.

Démonstration. Nous suivrons ici la preuve faite dans (Gilmer, 1993). Considérons la présentation de $H_1(\Sigma_n(K))$ de la proposition 3.7.15. Si l'on multiplie les relations par D à gauche, on obtient la présentation

$$\begin{aligned} H_1(\Sigma_n(K)) &= \langle t^i \alpha : ((G - I) - tG)t^i \alpha = 0 \rangle \\ &= \langle t^i \alpha : (G - I)t^i - Gt^{i+1} \alpha = 0 \rangle. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} D(V^T - tV) &= D(V + V^T - V - tV) \\ &= D(V + D - tV) \\ &= DV - I - tDV \\ &= (G - I) - tG. \end{aligned}$$

Autrement dit, une matrice de présentation pour $H_1(\Sigma_n(K))$ est

$$M = \begin{bmatrix} G-I & -G & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & G-I & -G & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G-I & -G & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & G-I & -G \\ -G & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & G-I \end{bmatrix}_{(2gn) \times (2gn)}$$

Pour simplifier l'argument, voyons M comme une matrice $n \times n$ dont les entrées sont des matrices carrées d'ordre $2g$. L'idée est de trouver une combinaison d'opérations sur M qui préservera le \mathbb{Z} -module présenté.

Pour $1 \leq l \leq n-1$, posons d'une part

$$q_l(G) := I + G + \dots + G^{l-1} = \frac{G^l - I}{G - I}$$

et d'autre part

$$M_l := \begin{bmatrix} (G-I)^l & -G^l & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & G-I & -G & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G-I & -G & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & G-I & -G \\ -G & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & G-I \end{bmatrix}_{(n-l+1) \times (n-l+1)}$$

Il est à noter qu'en particulier $M_1 = M$. Fixons maintenant $1 \leq l \leq n-2$ et considérons la matrice M_l . Sur celle-ci, appliquons les opérations suivantes :

- 1- additionner à la première ligne $q_l(G)$ fois la deuxième ligne ;
- 2- additionner à la seconde ligne $(G-I)$ fois la nouvelle première ligne ;
- 3- interchanger la nouvelle première colonne et la nouvelle deuxième colonne.

Comme le montre la proposition 8.B.1 de (Rolfsen, 1976), ces trois opérations préservent le module présenté par la matrice M_l à isomorphisme près.

Après la première opération, la matrice M_l devient

$$\begin{bmatrix} (G-I)^l & -I & -Gq_l(G) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & G-I & -G & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G-I & -G & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & G-I & -G \\ -G & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & G-I \end{bmatrix}.$$

Après la seconde, on obtient

$$\begin{bmatrix} (G-I)^l & -I & -Gq_l(G) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (G-I)^{l+1} & 0 & -G^{l+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G-I & -G & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & G-I & -G \\ -G & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & G-I \end{bmatrix},$$

et finalement, la dernière étape produit la matrice

$$\begin{bmatrix} -I & (G-I)^l & -Gq_l(G) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (G-I)^{l+1} & -G^{l+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G-I & -G & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & G-I & -G \\ 0 & -G & 0 & 0 & \dots & 0 & G-I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccccc} -I & * & * & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{array} \right] M_{l+1}.$$

En commençant donc avec $M = M_1$ et en procédant ainsi jusqu'à $l = n - 2$, on

obtient la matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} -I & * & \dots & * & * & * \\ 0 & -I & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I & * & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & (G - I)^{n-1} & -G^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -G & G - I \end{array} \right].$$

Or, il se trouve que ces mêmes étapes sur M_{n-1} produisent la matrice

$$\begin{bmatrix} -I & (G - I)^{n-1} - Gq_{n-1}(G) \\ 0 & (G - I)^n - G^n \end{bmatrix}.$$

Ainsi, en combinant le tout, la matrice

$$\begin{bmatrix} -I & * & \dots & * & * & * \\ 0 & -I & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -I & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (G - I)^n - G^n \end{bmatrix}$$

est une matrice de présentation pour $H_1(\Sigma_n(K))$. Puisque retirer les $2g(n-1)$ premières lignes et colonnes correspond à éliminer les générateurs redondants, on obtient donc bien au final que $(G - I)^n - G^n$ est une matrice de présentation de $H_1(\Sigma_n(K))$. \square

Démonstration du Théorème 3.7.16. La démonstration de la formule de Fox qui sera présentée repose sur les arguments de (Burde et Zieschang, 2003). Rappelons que dans $\mathbb{C}[z, w]$, si l'on permet aux variables z et w de permuter, c'est-à-dire $zw = wz$, alors

$$z^n - w^n = \prod_{i=1}^n (z - \zeta_n^i w).$$

De manière analogue, comme les matrices G et $G - I$ commutent, on a l'identité

$$(G - I)^n - G^n = \prod_{i=1}^n [(G - I) - \zeta_n^i G]. \quad (3.3)$$

Par ailleurs, on sait par ce qui a été fait dans la preuve du lemme 3.7.17 précédent que

$$D(V^T - tV) = (G - I) - tG.$$

Comme $\det(D) = 1$, on en déduit par la proposition 3.6.2 que

$$\Delta_K(t) \doteq \det(V^T - tV) = \det(D(V^T - tV)) = \det((G - I) - tG).$$

En dernier lieu, puisque $(G - I)^n - G^n$ est une matrice de présentation de $H_1(\Sigma_n(K))$ et qu'elle est carrée, l'ordre de ce \mathbb{Z} -module est donné par $|\det((G - I)^n - G^n)|$, tel que discuté à la section 8.B de (Rolfsen, 1976). Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} |H_1(\Sigma_n(K))| &= |\det((G - I)^n - G^n)| \\ &= \left| \det \left(\prod_{i=1}^n [(G - I) - \zeta_n^i G] \right) \right| \\ &= \prod_{i=1}^n |\det[(G - I) - \zeta_n^i G]| \\ &= \prod_{i=1}^n |\pm (\zeta_n^i)^q \Delta_K(\zeta_n^i)| \\ &= \prod_{i=1}^n |\Delta_K(\zeta_n^i)|, \end{aligned}$$

où q est un entier et $|\pm \zeta_n^i|^q = 1$ étant une racine de l'unité. \square

CHAPITRE IV

NŒUDS QUASI POSITIFS.

Dans leur article (Boileau *et al.*, 2017), les auteurs travaillent avec des entrelacs et des nœuds quasi positifs et fortement quasi positifs. Dans ce chapitre, nous nous employons à définir ce qu'est la quasi-positivité d'un nœud. Nous y présentons également plusieurs résultats relatifs à ces types de nœuds introduits par Rudolph (Rudolph, 1983b).

4.1 Tresses

Pour définir le concept de positivité d'un nœud, il convient de parler d'abord de tresses. Une tresse de cheveux, par exemple, est faite de trois mèches que l'on entrecroise pour former de jolis motifs. C'est exactement l'image que l'on doit avoir en tête lorsqu'on parle d'une tresse mathématique. Ces objets sont en fait directement liés à la théorie des nœuds par le théorème d'Alexander que nous énoncerons au théorème 4.1.8. Dans la présente section, nous suivrons essentiellement le travail de Clay et Rolfsen (Clay et Rolfsen, 2016) où ils y introduisent la théorie des tresses de manière très élégante.

Afin de définir la notion de tresses, considérons dans le disque unité D^2 des points p_1, \dots, p_n sur l'axe des abscisses que l'on supposera espacés également pour simplifier.

Définition 4.1.1. Un *brin* est un plongement $\beta_i : [0, 1] \rightarrow D^2 \times [0, 1]$ (ou l'image d'un tel plongement) tel que

- la projection sur la deuxième coordonnée est l'identité et
- $\beta_i(0) = (p_i, 0)$ et $\beta_i(1) = (p_j, 1)$ pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$.

En particulier, β_i intersecte $D^2 \times \{t_0\}$ pour chaque $t_0 \in [0, 1]$ exactement une fois, c'est-à-dire $|\beta_i([0, 1]) \cap D^2 \times \{t_0\}| = 1$ pour tout $t_0 \in [0, 1]$.

Une *tresse à n brins* est donc un n -uplet de brins disjoints

$$\beta = \beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)),$$

c'est-à-dire que $\beta_i(t) \neq \beta_j(t)$ si $i \neq j$. On parlera parfois de *n-tresse* pour alléger le texte.

Définition 4.1.2. S'il existe une isotopie de $D^2 \times [0, 1]$ fixant $D^2 \times \{0, 1\}$ qui envoie une n -tresse sur une autre, on dit alors que ces tresses sont équivalentes. Le *groupe de tresses à n brins*, noté B_n , correspond à l'ensemble des classes d'équivalence des tresses à n brins muni de l'opération évidente de concaténation puis de remise à l'échelle. L'identité correspond à la classe de la tresse ayant n brins parallèles. L'image miroir d'une tresse est l'inverse de cette même tresse, à savoir $\beta(1 - t)$. Le terme *tresse* désignera à la fois l'objet et sa classe d'équivalence.

Soit maintenant σ_i , la classe d'équivalence d'une n -tresse dont β_i passe «au-dessus» de β_{i+1} exactement une fois et dont les autres brins sont «droits» et parallèles comme à la figure 4.1b. Par un résultat de Artin (Artin, 1925; Artin, 1947), il se trouve que chaque tresse peut s'exprimer comme un produit des σ_i . Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 4.1.3 (Artin 1947). Le groupe de n -tresses B_n a pour présentation

$$B_n \cong \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{sinon} \end{array} \right. \right\rangle.$$

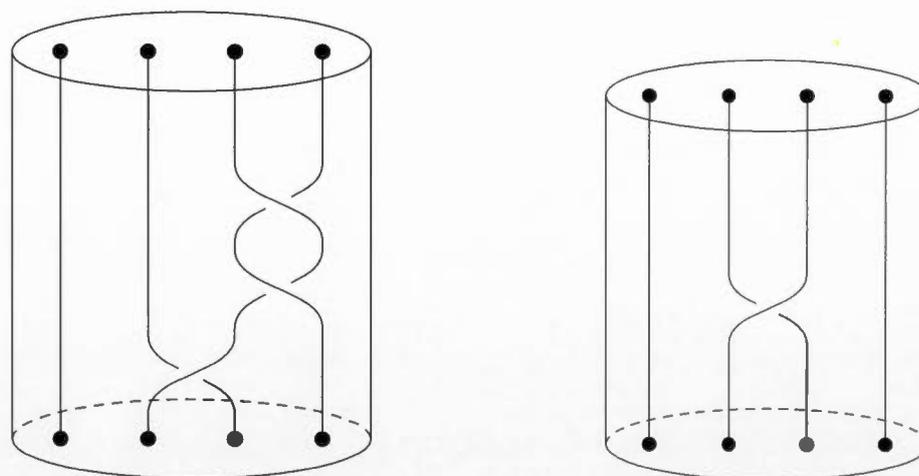
(a) Tresse à 4 brins donnée par $\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_3^{-1}$.(b) Générateur σ_2 de B_4 .

Figure 4.1: Exemple de tresses

Par exemple, la figure 4.1a illustre une 4-tresse écrite dans la présentation du théorème précédent.

Définition 4.1.4. Soit β une tresse à n brins plongée naturellement dans \mathbb{R}^3 . En connectant les bouts des brins de β par n chemins disjoints dans le plan $y = 0$, on forme sa *fermeture*, que l'on note $\hat{\beta}$. La fermeture d'une tresse est toujours un entrelacs. La figure 4.2 illustre un exemple.

Puisque la fermeture de toutes tresses forme un entrelacs, il serait intéressant de déterminer exactement quand la fermeture d'une tresse est un nœud. Pour ce faire, considérons S_n comme le groupe de permutations de $\{p_1, \dots, p_n\}$ dont la composition se lit de gauche à droite. Il est alors possible de définir un homomorphisme de groupe $\varphi : B_n \rightarrow S_n$ en «suivant les brins» de la tresse. Par exemple, la tresse de la figure 4.1a est envoyée par φ sur la permutation $(2, 3)$ de S_4 , car en suivant les brins de $\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_3^{-1}$, p_1 est envoyé sur p_1 , p_2 sur p_3 , p_3 sur p_2 et finalement p_4 sur p_4 .

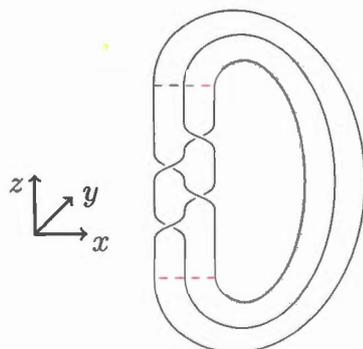


Figure 4.2: Fermeture de la tresse $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1} \in B_3$ qui est du même type que le nœud en huit

Définition 4.1.5. Un k -cycle est une permutation $\tau \in S_n$ agissant sur $\{p_1, \dots, p_n\}$ pour laquelle il existe p_{i_1}, \dots, p_{i_k} tels que τ envoie p_{i_j} sur $p_{i_{j+1}}$ pour $1 \leq j \leq k-1$ et p_{i_k} sur p_{i_1} . On dit, qu'une tresse β contient un k -cycle si $\varphi(\beta)$ contient un k -cycle.

La proposition suivante permet de caractériser les tresses dont la fermeture est un nœud.

Proposition 4.1.6. Pour β une tresse à n brins, sa fermeture est un nœud si et seulement si $\varphi(\beta)$ est un n -cycle.

Démonstration. On remarque que chaque cycle d'une tresse produit une composante connexe dans sa fermeture. Puisqu'un nœud est un entrelacs n'ayant qu'une seule composante, il ne doit y avoir qu'un seul cycle dans la tresse, d'où le résultat. \square

Définition 4.1.7. Un nœud de tresse ou nœud tressé est un nœud qui est la fermeture d'une tresse.

Une question naturelle qui vient en tête à ce stade est de savoir si tous les nœuds ou

entrelacs peuvent s'écrire comme la fermeture d'une tresse. Bien que le langage des tresses n'était pas encore développé par l'Autrichien Artin en 1925 (Artin, 1925), un résultat d'Alexander datant de 1923 répond à cette question par l'affirmative.

Théorème 4.1.8. (Alexander, 1923) Pour K un nœud, il existe $n \geq 2$ et $\beta \in B_n$ tels que $K = \hat{\beta}$.

Une esquisse de preuve est présentée dans (Clay et Rolfsen, 2016).

Exemple 4.1.9. Le nœud de trèfle peut être réalisé comme la fermeture de la tresse $\sigma_1^3 \in B_2$ et le nœud en huit peut être vu comme la fermeture de la tresse $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1} \in B_3$, comme il est illustré à la figure 4.2.

La notion de nœud de tresse devient donc quelque peu désuète, mais nous continuerons de l'utiliser pour insister sur le fait que l'on considère le nœud en question comme la fermeture d'un mot de la présentation de B_n du théorème 4.1.3.

4.2 Positivité

Pour cette section, nous nous sommes grandement appuyés sur l'efficace résumé fait dans (Hedden, 2010).

Définition 4.2.1. Un nœud *positif* est un nœud possédant un diagramme n'ayant que des croisements positifs, comme à la figure 3.2a.

Définition 4.2.2. Un nœud de *tresse positive* est la fermeture d'un mot de B_n n'ayant que des exposants positifs, c'est-à-dire $\hat{\beta}$ où $\beta = \prod_{k=1}^m \sigma_{i_k}$.

Proposition 4.2.3. Tout nœud de tresse positive est un nœud positif.

Démonstration. Chaque générateur σ_i représente un croisement positif du diagramme d'une tresse. Ainsi, le diagramme usuel d'un mot de la forme $\prod_{k=1}^m \sigma_{i_k}$

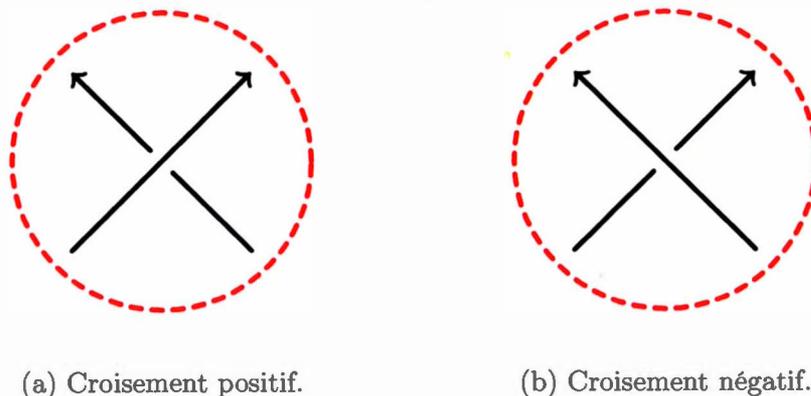


Figure 4.3: Types de croisement dans un diagramme de nœud orienté

n'a que des croisements positifs. Puisque le diagramme de la fermeture d'une tresse ne produit pas de croisement additionnel, un nœud de tresse positive possède bien un diagramme n'ayant que des croisements positifs. \square

Définition 4.2.4. Un nœud *quasi positif* est un nœud pouvant être réalisé comme la fermeture d'une tresse de la forme

$$\prod_{k=1}^m \omega_k \sigma_{i_k} \omega_k^{-1},$$

où $\omega_k \in B_n$.

Définition 4.2.5. Une *bande positive* de B_n est toute tresse de la forme

$$\sigma_{i,j} := (\sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{j-2}) \sigma_{j-1} (\sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{j-2})^{-1}$$

pour $1 \leq i < j \leq n$. Une bande *négative* est l'inverse d'une bande positive. De la définition, nous avons directement que $\sigma_{i,i+1} = \sigma_i$. Ainsi, chaque générateur σ_i est une bande positive.

Définition 4.2.6. Un nœud est *fortement quasi positif* s'il est la fermeture d'une tresse qui est le produit de bandes positives, c'est-à-dire s'il est la fermeture d'une

tresse de la forme

$$\prod_{k=1}^m \sigma_{i_k, j_k}.$$

Proposition 4.2.7. Tout nœud de tresse positive est fortement quasi positif et tout nœud fortement quasi positif est quasi positif.

Démonstration. La première assertion découle directement du fait que $\sigma_{i, i+1} = \sigma_i$. La seconde quant à elle est évidente puisque les bandes positives $\sigma_{i, j}$ sont, par définition, des conjugués des générateurs du groupe de tresse. \square

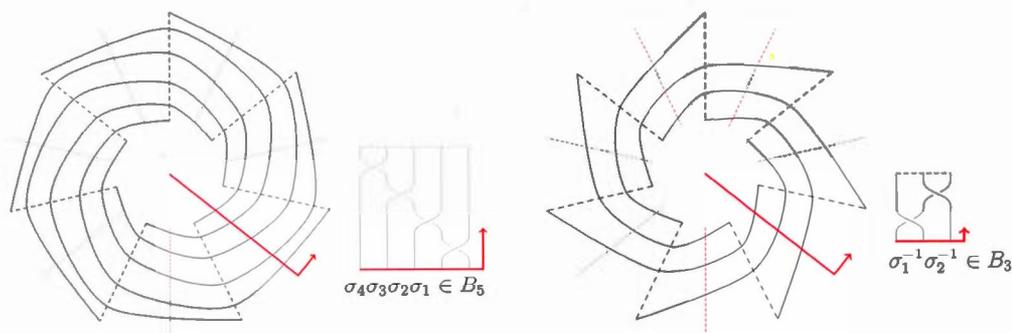
Finalement, un théorème de Rudolph mentionne que tout nœud positif est fortement quasi positif (Rudolph, 1999). Ainsi, nous avons la suite d'inclusions

$$\begin{aligned} \{\text{nœuds de tresse positifs}\} &\subseteq \{\text{nœuds positifs}\} \\ &\subseteq \{\text{nœuds fortement quasi positifs}\} \\ &\subseteq \{\text{nœuds quasi positifs}\}. \end{aligned}$$

La proposition suivante donne un exemple de nœud fortement quasi positif.

Proposition 4.2.8. Soit $K = T_{p, q}$ un nœud torique. Supposons sans perte de généralité que $|p| > |q|$. Si $q/p > 0$, alors K est un nœud de tresse positif et si $q/p < 0$, K est un nœud de tresse négatif.

Démonstration. Considérons un diagramme de $T_{p, q}$ comme il est décrit dans (Adams, 1994) : sur deux cercles concentriques de rayons différents, on trace en pointillé $|p|$ rayons partant du petit cercle sur le plus grand de sorte que l'angle entre chacun des rayons soit de $2\pi/|p|$. L'intersection entre les cercles et un rayon produit deux points, donc $|p|$ paires de points en tout. On relie chaque point du grand cercle à un des points du petit cercle qui correspond à q/p tour dans le sens horaire si



(a) $T_{7,5} = \hat{\beta}$ où $\beta = (\sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1)^7 \in B_5$. (b) $T_{-7,3} = \hat{\beta}$ où $\beta = (\sigma_2 \sigma_1)^{-7} \in B_3$.

Figure 4.4: Nœuds toriques comme fermeture de tresses

$q/p > 0$ ou dans le sens antihoraire si $q/p < 0$. En effaçant les deux cercles de départ, nous obtenons un diagramme du nœud torique, comme à la figure 4.4.

Traçons maintenant un rayon (rouge) du grand cercle imaginaire qui ne coïncide pas avec ceux précédemment tracés en pointillé. Comme ce rayon peut être vu comme une coupe méridionale du tore sur lequel $T_{p,q}$ figure, il y aura $|q|$ brins qui le croiseront. Il est alors possible de trouver l'expression d'une tresse dans $B_{|q|}$ dont la fermeture est le nœud torique en question. Pour ce faire, il suffit de tourner le rayon (rouge) dans le sens antihoraire et de «lire» les croisements à la manière d'un radar. Notons que par la construction de la projection, il est suffisant de comprendre ce qui se passe dans un secteur d'angle $2\pi/|p|$: les croisements se répètent dans chacun de ceux-ci.

On remarque que si $q/p > 0$, alors le brin le plus excentré passe sous les $|q| - 1$ autres brins et ceux-ci ne se croisent pas deux à deux. Si plutôt $p/q < 0$, alors c'est le brin le plus au centre qui passe sous les autres et ces derniers, encore une fois, ne se croisent pas deux à deux. Dans le premier cas on obtient la tresse $\sigma_{|q|-1} \sigma_{|q|-2} \dots \sigma_2 \sigma_1$, alors que dans le second cas on obtient plutôt $\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \dots \sigma_{|q|-1}^{-1}$.

Au final, après un tour complet, on obtient $T_{p,q} = \hat{\beta}$ avec

$$\beta = \begin{cases} (\sigma_{|q|-1}\sigma_{|q|-2}\dots\sigma_2\sigma_1)^{|p|} & \text{si } q/p > 0 \\ (\sigma_{|q|-1}\sigma_{|q|-2}\dots\sigma_2\sigma_1)^{-|p|} & \text{si } q/p < 0 \end{cases}$$

□

Corollaire 4.2.9. À image miroir près, tout nœud torique est fortement quasi positif. □

Il est possible de caractériser les nœuds fortement quasi positifs à l'aide de surfaces particulières. Pour simplifier leur construction, nous dirons qu'un m -uplet ordonné $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ est une *représentation par bandes* de longueur m de la n -tresse $\beta(\vec{b}) = b_1 \dots b_m$ si chaque b_k est une bande de B_n , c'est-à-dire $b_k = \sigma_{i_k, j_k}^{\epsilon_k}$ où $1 \leq i_k < j_k \leq n$ et $\epsilon_k = \pm 1$. Un nœud est donc fortement quasi positif s'il est la fermeture d'une tresse qui possède une représentation par bandes positives.

Pour toute représentation par bandes \vec{b} , on construit une *surface tressée* de \vec{b} dans \mathbb{R}^3 , notée $S(\vec{b})$, de la façon suivante (Rudolph, 1992). Considérons l'union de n copies de D^2 , notées D_t , chacune dans le demi-plan vertical

$$\{(t, y, z) : y \geq 0, z \in \mathbb{R}\}.$$

On les relie par m copies de $[0, 1]^2$, notées Δ_k , de sorte que

(i) la copie Δ_k est contenue dans la région

$$\{(x, y, z) : i_k \leq x \leq j_k, y \geq 0, k-1 \leq z \leq k\}$$

(ii) Δ_k relie D_{i_k} et D_{j_k} en faisant une demi-torsion positive vers le bas si $\epsilon_k = +1$ ou une demi-torsion négative vers le haut si $\epsilon_k = -1$.

La figure 4.5 illustre un exemple de $S(\vec{b})$ pour la représentation par bandes $\vec{b} = (\sigma_{3,4}^{-1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{1,3})$.

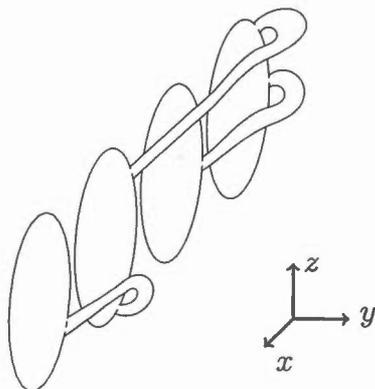


Figure 4.5: Surface tressée de $\sigma_{3,4}^{-1}\sigma_{1,2}\sigma_{1,3} = \sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_{1,3}$

Par construction, les surfaces tressées $S(\vec{b})$ sont des surfaces de Seifert pour $\hat{\beta}(\vec{b})$ qui est potentiellement un entrelacs. En fait, il n'est pas difficile de se convaincre que lorsque les bandes de la représentation \vec{b} ne sont que des générateurs σ_i et leurs inverses, la surface tressée ainsi construite correspond à celle produite par l'algorithme de Seifert pour le diagramme orienté de $\hat{\beta}(\vec{b})$ (Rudolph, 1983b). Par ailleurs, pour F une surface de Seifert d'un nœud K , il existe toujours une représentation par bandes \vec{b} et une isotopie ambiante qui envoie F sur $S(\vec{b})$ (Rudolph, 1992; Rudolph, 1983b). Ce résultat justifie la prochaine définition.

Définition 4.2.10. Une surface de Seifert F est *quasi positive* s'il existe une représentation par bandes positives \vec{b} et une isotopie ambiante qui envoie F sur $S(\vec{b})$.

Il en découle directement que les nœuds fortement quasi positifs sont exactement les nœuds possédant une surface de Seifert quasi positive.

4.3 Nœuds \mathbb{C} -transverses et 4-genre

Dans cette section, nous introduisons la notion de nœuds \mathbb{C} -transverses qui permet en fait de caractériser les nœuds quasi positifs. Puisque la définition exacte présentée dans (Rudolph, 2005) nécessite des notions de géométrie de contact et de variété de Stein que nous n'avons pas couvertes, nous utilisons plutôt une définition simplifiée qui sera plus utile pour la suite et qui permettra d'alléger notre étude (Rudolph, 1993). Ceci étant dit, (Geiges, 2008) peut être une excellente référence pour s'initier à la géométrie de contact.

Si $f \in \mathbb{C}[z, w]$ est un polynôme complexe en deux variables, alors la courbe affine complexe associée est notée $V_f := f^{-1}(\{0\})$ et l'ensemble de ses points singuliers est

$$\text{Sing}(V_f) := \left\{ (a, b) \in \mathbb{C}^2 : \frac{\partial f}{\partial z}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial w}(a, b) = 0 \right\}.$$

Considérons maintenant la 3-sphère S^3 comme étant la variété

$$\{(z, w) \in \mathbb{C} : |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

Lorsque le polynôme complexe f est tel que $\text{Sing}(V_f) = \emptyset$ et tel que V_f soit transverse à S^3 , alors $V_f \cap S^3 \neq \emptyset$ est en fait d'une 1-sous-variété fermée et lisse de S^3 . Autrement dit, $V_f \cap S^3$ est un entrelacs. Un nœud (ou un entrelacs) est \mathbb{C} -transverse s'il est du même type que $V_f \cap S^3$.

Il a été montré par Rudolph (Rudolph, 1983a) que tout entrelacs quasi positif est \mathbb{C} -transverse et il se trouve que la réciproque est également vraie. Elle est due à Boileau et Orevkov (Boileau et Orevkov, 2001).

Théorème 4.3.1. Les entrelacs quasi positifs sont exactement les entrelacs \mathbb{C} -transverses.

Cette caractérisation des nœuds quasi positifs est essentielle pour déterminer leur 4-genre. Elle permet également de le mettre en relation avec le genre des nœuds fortement quasi positifs. Avant de procéder, rappelons d'abord que si F est une surface de Seifert pour un nœud K , alors F est une surface de S^3 qui est connexe, compacte, orientable et qui possède une unique composante de bord. Ainsi, le genre de F et sa caractéristique d'Euler sont reliés par la formule

$$\chi(F) = 2 - 2g(F) - 1 = 1 - 2g(F), \quad (4.1)$$

ou encore par

$$g(F) = \frac{1}{2}(1 - \chi(F)). \quad (4.2)$$

On définit le 4-genre d'un nœud de la même manière que $g(K)$, mais au lieu de se restreindre aux surfaces de Seifert contenues dans S^3 , on considère toutes les surfaces lisses $F \subseteq B^4$ telles que $\partial F = K \in S^3 = \partial B^4$. C'est donc dire que le 4-genre de K est donnée par $g_4(K) := \min\{g(F)\}$. Puisque les surfaces considérées pour $g(K)$ sont également prises en compte pour la définition du 4-genre, nous avons l'inégalité

$$g_4(K) \leq g(K). \quad (4.3)$$

Finalement, il est possible de définir la 4-caractéristique d'Euler d'un nœud à l'aide de l'équation 4.1 par

$$\chi_4(K) := 1 - 2g_4(K).$$

Le prochain théorème de Kronheimer et Mrowka, correspondant à la conjecture locale de Thom, indique qu'il est suffisant de travailler avec le 4-genre pour les nœuds fortement quasi positifs, car il coïncide avec le genre classique.

Théorème 4.3.2. (Kronheimer et Mrowka, 1993) Soit K un nœud quasi positif. Puisqu'il s'agit également d'un nœud \mathbb{C} -transverse, il existe un polynôme $f \in \mathbb{C}[z, w]$ pour lequel $K = V_f \cap S^3$. Si l'on note $F_K = V_f \cap B^4$ la surface (lisse, compacte, orientable et connexe) dans B^4 telle que $\partial F_K = K$, alors

$$g_4(K) = g(F_K).$$

En particulier, si K est fortement quasi positif, alors $g(K) = g_4(K) = g(F_K)$.

Démonstration. Présentons l'argument donné dans (Boileau *et al.*, 2017). Il a été prouvé par Rudolph à la section 3 de (Rudolph, 1993) que la plus grande caractéristique d'Euler d'une surface (lisse, orientable, compacte et connexe) dans B^4 dont le bord est $K \subset S^3$ est réalisée par F_K , c'est-à-dire que $\chi_4(K) = \chi(F_K)$. Ainsi,

$$g_4(K) = \frac{1 - \chi_4(K)}{2} = \frac{1 - \chi(F_K)}{2} = g(F_K).$$

Comme il est mentionné à la section 2 de (Rudolph, 1993), si K est fortement quasi positif, alors on peut supposer que F_K est isotope à une surface de Seifert F' de K relativement à son bord, à savoir $\partial F_K = K$. Ainsi, par la définition de $g(K)$ et l'inégalité 4.3, on obtient

$$g(K) \leq g(F') = g(F_K) = g_4(K) \leq g(K),$$

ce qui conclut la preuve. □

Une conséquence intéressante mentionnée par Rudolph est le corollaire suivant qui est utile pour calculer facilement le 4-genre d'un nœud de tresse quasi positif.

Corollaire 4.3.3. (Rudolph, 1993) Si $\beta = \prod_{k=1}^m \omega \sigma_{i_k} \omega^{-1} \in B_n$, alors $\chi_4(\hat{\beta}) = n - m$.

CHAPITRE V

THÉORÈME DE BOILEAU-BOYER-GORDON

Dans ce chapitre, nous expliquons d'abord comment la formule de Fox permet d'identifier les 3-sphères d'homologie parmi les revêtements ramifiés $\Sigma_n(K)$ et montrons qu'il en existe plusieurs. Ensuite, nous construisons le revêtement $\Sigma_n(F)$ ramifié sur une surface de Seifert F , démontrons les propriétés du produit d'intersection sur ces variétés nécessaires à l'application du corollaire 2.2.8 et présentons enfin la preuve du théorème 0.0.2. Nous poursuivons en prouvant la conjecture de Poincaré d'Ozsváth-Szabó dans le cas des revêtements cycliques ramifiés sur des nœuds toriques. Pour finir, nous étudions la possibilité d'utiliser le théorème de Boileau-Boyer-Gordon pour déterminer si certains revêtements ramifiés sont des L-espaces.

5.1 Sphère d'homologie

Une n -sphère d'homologie entière (rationnelle) est une n -variété M telle que pour tout $q \in \mathbb{Z}$,

$$H_q(M) \cong H_q(S^n) \quad (H_q(M; \mathbb{Q}) \cong H_q(S^n; \mathbb{Q})).$$

De cette définition, toute sphère d'homologie M est connexe, fermée et orientable. En effet, M est connexe puisque $H_0(M; \mathbb{K}) \cong H_0(S^n; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{Q} . Elle n'a pas de bord, car le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homologie d'une n -variété à bord est

toujours trivial. Elle est compacte, car autrement nous aurions

$$\mathbb{K} \cong H_n(S^n; \mathbb{K}) \cong H_n(M; \mathbb{K}) = 0,$$

ce qui est absurde. Finalement, une n -variété fermée, rappelons-le, est orientable si $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. Si M est une sphère d'homologie entière, on a directement que $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. Si M est plutôt une sphère d'homologie rationnelle, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \cong H_n(M; \mathbb{Q}) &\cong H_n(M) \otimes \mathbb{Q} \\ &\cong (\mathbb{Z}^{\beta_n(M)} \oplus \text{Tor}_{n-1}(M)) \otimes \mathbb{Q} \\ &\cong \mathbb{Q}^{\beta_n(M)}, \end{aligned}$$

d'où $\beta_n(M) = 1$. De plus, par le corollaire 1.1.9 et le fait que M soit de dimension n , on sait que

$$0 \cong H^{n+1}(M) \cong \mathbb{Z}^{\beta_{n+1}(M)} \oplus \text{Tor}_n(M)$$

et donc que $\text{Tor}_n(M) = 0$, d'où $H_n(M) \cong \mathbb{Z}^{\beta_n(M)} \oplus \text{Tor}_n(M) \cong \mathbb{Z}$. Autrement dit, M est bien orientable.

Pour les sphères d'homologie à trois dimensions, il est possible de les identifier à l'aide de leur premier groupe d'homologie.

Proposition 5.1.1. Une 3-variété M connexe, fermée et orientable est une 3-sphère d'homologie entière (rationnelle) si et seulement si

$$H_1(M) = 0 \quad (H_1(M; \mathbb{Q}) = 0).$$

Démonstration. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{Q} . Puisque M est connexe, fermée et orientable, $H_3(M; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K} \cong H_0(M; \mathbb{K})$. De plus, par la dualité de Poincaré et le théorème des coefficients universels,

$$H_2(M; \mathbb{K}) \cong H^1(M; \mathbb{K}) \cong \text{Hom}(\underbrace{H_1(M; \mathbb{K})}_{=0}, \mathbb{K}) \cong 0,$$

d'où M est bien une 3-sphère d'homologie sur \mathbb{K} . La réciproque est triviale. \square

Corollaire 5.1.2. Une 3-variété connexe, fermée et orientable M est une 3-sphère d'homologie rationnelle si et seulement si $H_1(M)$ est un groupe fini, c'est-à-dire s'il est d'ordre $|H_1(M)| \neq 0$.

Démonstration. En général, $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$ et donc

$$H_1(M; \mathbb{Q}) \cong H_1(M) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^m.$$

De là, $H_1(M; \mathbb{Q}) = 0$ si et seulement si $m = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $H_1(M) = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$. \square

Ce corollaire, combiné à la formule de Fox, permet d'identifier rapidement si les revêtements cycliques à n feuilles de S^3 ramifiés sur un nœud K sont des 3-sphères d'homologie.

Proposition 5.1.3. Le revêtement ramifié $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie rationnelle si et seulement si aucune racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité n'est une racine du polynôme d'Alexander de K . \square

Exemple 5.1.4. Si $\Delta_K(t) = \phi_{15}(t) = t^8 - t^7 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1$, alors $\Sigma_4(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière. Pour s'en convaincre, il suffit, par la proposition 5.1.1, de vérifier que $|H_1(\Sigma_4(K))| = 1$. Or, on remarque que pour $\zeta_4 = \exp(2\pi i/4) = i$, on a

$$\Delta_K(\zeta_4) = \phi_{15}(i) = i^8 - i^7 + i^5 - i^4 + i^3 - i + 1 = 1 + i + i - 1 - i - i + 1 = 1.$$

De même,

$$\Delta_K(\zeta_4^2) = \phi_{15}(-1) = 1 \quad \text{et} \quad \Delta_K(\zeta_4^3) = \phi_{15}(-i) = 1.$$

Ainsi, la formule de Fox donne

$$|H_1(\Sigma_4(K))| = |\Delta_K(\zeta_4)| |\Delta_K(\zeta_4^2)| |\Delta_K(\zeta_4^3)| = 1,$$

tel que prédit.

Exemple 5.1.5. Le même argument que l'exemple précédent montre que si K est un nœud tel que $\Delta_K(t) = 1$, alors $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière pour tout $n \geq 2$. Nous verrons à la section 5.6 plusieurs nœuds non triviaux qui satisfont cette condition.

5.2 Propriétés des revêtements cycliques ramifiés

Maintenant que nous savons quand $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie rationnelle, montrons qu'en fait c'est très souvent le cas. Pour ce faire, nous avons besoin de la suite exacte de Milnor.

Lemme 5.2.1. (Milnor, 1968) Soit $X(K)$ l'extérieur du nœud K dans S^3 et $p : \tilde{X} \rightarrow X(K)$ son revêtement infini. Si $\text{Aut}(p) \cong \langle t \rangle$, alors

$$1 - t_* : H_1(\tilde{X}; \mathbb{K}) \rightarrow H_1(\tilde{X}; \mathbb{K})$$

est un isomorphisme, où \mathbb{K} est un corps ou \mathbb{Z} .

Démonstration. Si $C_*(Y; \mathbb{K})$ dénote le \mathbb{K} -module engendré par les simplexes singuliers de l'espace Y , on a alors une courte suite exacte (Milnor, 1968)

$$0 \rightarrow C_*(\tilde{X}; \mathbb{K}) \xrightarrow{1-t_*} C_*(\tilde{X}; \mathbb{K}) \xrightarrow{p_*} C_*(X(K); \mathbb{K}) \rightarrow 0,$$

qui induit une longue suite exacte en homologie

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_2(X(K); \mathbb{K}) \rightarrow H_1(\tilde{X}; \mathbb{K}) \xrightarrow{1-t_*} H_1(\tilde{X}; \mathbb{K}) \xrightarrow{p_*} H_1(X(K); \mathbb{K}) \\ \rightarrow H_0(\tilde{X}; \mathbb{K}) \xrightarrow{1-t_*} H_0(\tilde{X}; \mathbb{K}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Cette suite est ce qu'on appelle la *suite exacte de Milnor* du revêtement cyclique infini $p : \tilde{X} \rightarrow X(K)$. Par la dualité d'Alexander, $H_2(X(K); \mathbb{K}) = 0$ et $H_1(X(K); \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$ et par connexité de \tilde{X} ,

$$1 - t_* : H_0(\tilde{X}; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K} \rightarrow H_0(\tilde{X}; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$$

est trivial. On obtient donc la suite exacte

$$0 \rightarrow H_1(\tilde{X}; \mathbb{K}) \xrightarrow{1-t_*} H_1(\tilde{X}; \mathbb{K}) \xrightarrow{p_*} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{0} \mathbb{K}.$$

Il est possible de montrer qu'en fait p_* est trivial.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, alors $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ est un isomorphisme, car les seuls homomorphismes surjectifs de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} sont plus ou moins l'identité.
- Si \mathbb{K} est un corps, nous travaillons avec des applications linéaires sur des espaces vectoriels. Par le théorème du rang, l'homomorphisme $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ surjectif est un isomorphisme.

L'exactitude de la suite permet de conclure dans les deux cas que $p_* = 0$, d'où en fin de compte on obtient

$$0 \rightarrow H_1(\tilde{X}; \mathbb{K}) \xrightarrow{1-t_*} H_1(\tilde{X}; \mathbb{K}) \rightarrow 0,$$

tel que voulu.

□

Proposition 5.2.2. Si p est un nombre premier, alors $\Sigma_{p^n}(K)$ est une 3-sphère d'homologie rationnelle pour tout nœud K et tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $q : \tilde{X} \rightarrow X(K)$ le revêtement cyclique infini dont le groupe d'automorphisme est $\langle t \rangle$. Si $\tilde{X}_{p^n} \rightarrow X(K)$ est le revêtement cyclique à p^n feuilles, il est alors aisé de voir que par la construction des revêtements cycliques,

$$\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_{p^n}$$

est un revêtement cyclique infini dont le groupe d'automorphismes est $\langle t^{p^n} \rangle$. Considérons maintenant la section de sa suite de Milnor suivante

$$H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{1-t_*^{p^n}} H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{q_*} H_1(\tilde{X}_{p^n}; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_0(\tilde{X}; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{1-t_*^{p^n}} H_0(\tilde{X}; \mathbb{Z}_p).$$

Comme le dernier morphisme $1 - t_*^{p^n}$ est trivial, on a la suite exacte

$$H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{1-t_*^{p^n}} H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{q_*} H_1(\tilde{X}_{p^n}; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0. \quad (5.1)$$

Plus encore, on sait du lemme précédent que

$$1 - t_* : H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}_p)$$

est un isomorphisme et, par conséquent, $(1 - t_*)^{p^n} : H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}_p)$ aussi. Or, en travaillant avec les entiers modulo p , on a $(1 - t_*)^{p^n} = 1 - t_*^{p^n}$, d'où l'homomorphisme q_* de la suite exacte (5.1) est nul. Ceci implique donc que

$$H_1(\tilde{X}_{p^n}; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p.$$

Par la proposition 3.7.13,

$$\mathbb{Z}_p \cong H_1(\tilde{X}_{p^n}; \mathbb{Z}_p) \cong H_1(\Sigma_{p^n}(K); \mathbb{Z}_p) \oplus \mathbb{Z}_p,$$

d'où $H_1(\Sigma_{p^n}(K); \mathbb{Z}_p) = 0$. Autrement dit, le \mathbb{Z} -module $H_1(\Sigma_{p^n}(K))$ est fini par le théorème des coefficients universels. Du corollaire 5.1.2, ceci est équivalent à dire que $\Sigma_{p^n}(K)$ est une 3-sphère d'homologie rationnelle. \square

En ce sens, il y a «beaucoup» de revêtements cycliques ramifiés de S^3 qui sont des 3-sphères d'homologie.

5.3 Construction de $\Sigma_n(F)$

Soit $K \subseteq S^3$ un nœud et F une surface (lisse, connexe, compacte et orientable) dans B^4 telle que $\partial F = K$. Il est possible de construire un revêtement cyclique à n feuilles de B^4 ramifié sur F , un peu à la manière de $\Sigma_n(K)$. Pour ce faire, nous suivons ce qui est fait dans (Boileau *et al.*, 2017).

Considérons d'abord $X := B^4 - \text{int}(T(F))$, où $T(F)$ est un voisinage tubulaire de F , c'est-à-dire l'*extérieur* de F dans B^4 . Il est à noter que

$$T(F) \approx F \times D^2.$$

Effectivement, puisque F et B^4 sont orientables, le fibré en 2-disques $T(F)$ est un fibré orientable. Par ailleurs, comme $\partial F \neq \emptyset$, il en résulte que F est homotopiquement équivalent à un wedge de cercles contenu dans F . Or, comme un fibré en 2-disque orientable avec base un wedge de cercles est un fibré trivial, on conclut bel et bien que $T(F)$ est un fibré trivial.

On munit X de l'orientation induite par celle du plan complexe. De la longue suite exacte de la paire (B^4, X) , on obtient

$$\tilde{H}_r(X) \cong H_{r+1}(B^4, X).$$

Si $E(T(F))$ est un «épaississement» de $T(F)$ dans B^4 et $U := B^4 - E(T(F))$, alors on remarque que

$$\begin{aligned} (B^4 - U, X - U) &= (E(T(F)), E(T(F)) - T(F)) \\ &\simeq (T(F), T(F) - F) \\ &\simeq (F \times D^2, F \times S^1) \end{aligned}$$

et donc par excision

$$\tilde{H}_r(X) \cong H_{r+1}(B^4, X) \cong H_{r+1}(F \times D^2, F \times S^1).$$

Plus encore, (F, \emptyset) et (D^2, S^1) sont des paires de CW -complexes, donc la formule de Künneth énoncée au théorème 1.1.10 implique que

$$\begin{aligned} H_{r+1}(F \times D^2, F \times S^1) &\cong \bigoplus_i (H_i(F) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{r+1-i}(D^2, S^1)) \oplus \\ &\quad \bigoplus_i \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_i(F), H_{r+1-i-1}(D^2, S^1)) \\ &\cong (H_{r-1}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(D^2, S^1)) \\ &\quad \oplus \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{r-2}(F), H_2(D^2, S^1)) \\ &\cong (H_{r-1}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) \oplus \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{r-2}(F), \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Comme \mathbb{Z} est libre, il est en particulier un module plat, donc $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{r-2}(F), \mathbb{Z}) = 0$. Ainsi

$$H_{r+1}(F \times D^2, F \times S^1) \cong H_{r-1}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong H_{r-1}(F)$$

et on en conclut que

$$\tilde{H}_r(X) \cong H_{r-1}(F) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } r=1 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } r=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ,$$

où g est le genre de F . En fait, il sera montré à la proposition 5.3.2 que $H_1(X)$ est engendré par le méridien de $T(F)$.

Bref, il existe un homomorphisme surjectif

$$\pi_1(X) \rightarrow H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

auquel est associé un revêtement régulier infini cyclique $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Si l'on considère plutôt l'homomorphisme

$$\pi_1(X) \rightarrow H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n,$$

on obtient un revêtement régulier cyclique à n feuilles $p_n : \tilde{X}_n \rightarrow X$ tel que

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{X}_n \\ & \searrow p & \downarrow p_n \\ & & X \end{array}$$

est un diagramme commutatif de revêtements. De manière analogue à la construction de $\Sigma_n(K)$, si $T(F)$ est un voisinage tubulaire de F , on considère $\rho : T_n(F) \rightarrow T(F)$ le revêtement à n feuilles ramifié sur F défini essentiellement comme à l'exemple 3.7.11. Puisque $\partial T_n(F) \approx \partial(F \times D^2) \approx p^{-1}(\partial \tilde{X}) \approx \partial \tilde{X}_n$, il est possible d'attacher $T_n(F)$ à \tilde{X}_n par le bord de sorte que les méridiens coïncident. On note

la nouvelle 4-variété connexe, compacte et orientable créée $\Sigma_n(F)$. De cette identification, on est en mesure de prolonger $p : \tilde{X}_n \rightarrow X$ à $\Sigma_n(F)$ via ρ , produisant ainsi

$$p : \Sigma_n(F) \rightarrow X \cup T(F) = B^4$$

le revêtement à n feuilles de B^4 , ramifié sur F . En restreignant cette construction sur les composantes de bords de F , on obtient exactement la construction de $\Sigma_n(K)$, d'où en fait $\partial\Sigma_n(F) = \Sigma_n(K)$.

Qu'en est-il maintenant des groupes d'homologie de $\Sigma_n(F)$? Afin de simplifier notre étude, supposons que F est isotope à une surface de Seifert relativement à $\partial F = K$. Montrons que dans ce cas, $\Sigma_n(F)$ est simplement connexe pour tout $n \geq 2$.

On rappelle le résultat d'algèbre suivant.

Lemme 5.3.1. Si le diagramme commutatif d'homomorphismes de groupes

$$\begin{array}{ccc} & G_1 & \\ \varphi_1 \nearrow & & \searrow \psi \\ H & & G \\ \varphi_0 \searrow & & \nearrow \\ & G_0 & \end{array}$$

est une somme amalgamée et φ_0 est surjectif, alors ψ induit un isomorphisme

$$G_1/N \rightarrow G$$

où $N = \ll \varphi_1(\ker \varphi_0) \gg$ est le sous-groupe normal de G_1 engendré par les éléments de $\varphi_1(\ker \varphi_0)$.

Démonstration. Puisqu'il s'agit d'une somme amalgamée de groupes, G est isomorphe au produit libre $G_1 * G_0$ muni des relations

$$\varphi_1(h)\varphi_0(h)^{-1} = 1 \quad \text{pour tout } h \in H.$$

Lorsque $h \in \ker(\varphi_0)$, ces relations deviennent simplement $\varphi_1(h) = 1$. Aussi, puisque φ_0 est surjectif, tout élément de G_0 est de la forme $\varphi_0(h)$ pour un certain h . Les relations impliquent donc que tout élément de G_0 peut être vu comme un élément de G_1 . Dès lors, le facteur G_0 est redondant, d'où

$$G \cong G_1 * G_0 / \langle\langle \varphi_1(h)\varphi_0(h)^{-1} \rangle\rangle \cong G_1 / \langle\langle \varphi_1(\ker \varphi_0) \rangle\rangle .$$

□

Proposition 5.3.2. Soit F une surface (lisse) dans B^4 qui est isotope à une surface de Seifert F' d'un nœud K relativement au bord $\partial F' = K$. Si X est l'extérieur de F dans B^4 , alors $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ est engendré par le méridien de F . En particulier, $\Sigma_n(F)$ est simplement connexe pour tout $n \geq 2$.

Démonstration. On pourrait voir F , par exemple, comme étant

$$F := h(F' \times \{1\}) / (x \sim h(x, 1)) \text{ pour tout } x \in \partial F' = K,$$

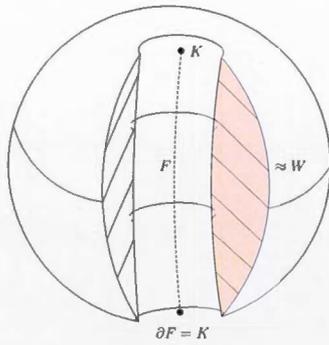
où $h : S^3 \times [0, 1] \hookrightarrow B^4$ est le col engendré par un vecteur normal à S^3 pointant vers l'intérieur de B^4 . On peut supposer que F est lisse et que $F \approx F'$ (Kauffman, 1974). Si I_0 dénote l'intervalle $[0, 1]$, posons

$$W := h(F' \times I) / (x \sim h(x, 1)) \text{ pour tout } x \in \partial F' = K$$

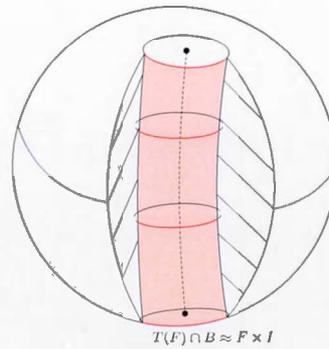
ainsi que

$$C' := B^4 - \text{int}(W).$$

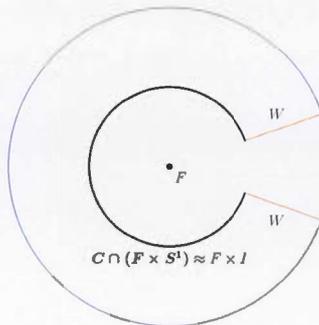
En particulier, nous avons que $W \simeq F' \times I_0$, $\partial W = F \cup F'$ et C' est la boule B^4 coupée le long de W , dont la figure 5.2 plus loin permet de se faire une idée. Ces deux ensembles sont connexes par arcs, tout comme leur intersection $C' \cap W$ qui



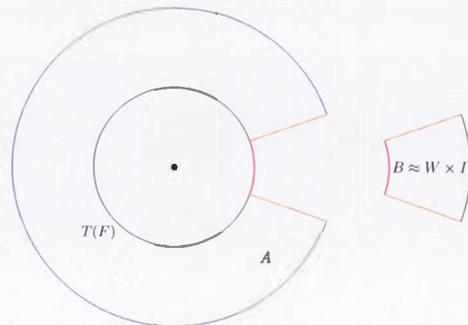
(a) Visualisation de l'ensemble $C = B^4 - \text{int}(W \cup T(F))$.



(b) L'ensemble $A = C \cup (T(F) \cap B)$.



(c) Coupe méridionale de C .



(d) Décomposition de $X = A \cup B$

Figure 5.1: Extérieur de F dans B^4

est en fait homotopiquement équivalente à une copie de F' . Par le théorème de Seifert-van Kampen, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(C') & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 \pi_1(C' \cap W) \cong \pi_1(F) & & \pi_1(B^4) = 1 \\
 \searrow & \cong & \nearrow \\
 & \pi_1(W) \cong \pi_1(F) &
 \end{array}$$

*i*_{*}

est une somme amalgamée, où i_* est induit par l'inclusion évidente. En particulier, comme i_* est un isomorphisme, on conclut par le lemme 5.3.1 que

$$\pi_1(C') \cong \pi_1(C') / \langle\langle 1 \rangle\rangle \cong \pi_1(B^4) = 1,$$

c'est-à-dire que C' est simplement connexe.

Pour la suite, il peut être une bonne idée de garder en tête la figure 5.1. Posons

$$C := C' \cap X \quad \text{et} \quad B := X - \text{int}(C),$$

où, rappelons-le, $X = B^4 - \text{int}(T(F))$ et $T(F)$ est un voisinage tubulaire de F . Les ensembles B et C sont connexes par arcs et $X = B \cup C$. En fait, C est simplement connexe, puisque $C \simeq C'$. De plus, comme le suggère la figure 5.1d, $B \approx W \times I \simeq F$. On ne peut utiliser Seifert-van Kampen directement sur C et B pour calculer $\pi_1(X)$ car $C \cap B$ n'est pas connexe par arcs. Pour remédier à ce problème, attachons à C une partie du bord de $T(F)$ homéomorphe à $F \times S^1$, comme aux figures 5.1b et 5.1d, et notons ce nouvel ensemble A . En particulier, $A = C \cup (F \times S^1)$. Seifert-van Kampen produit encore une fois une

somme amalgamée

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(F \times S^1) \cong \pi_1(F) \times \pi_1(S^1) & & \\
 & \nearrow^{\sigma \mapsto (\sigma, 0)} & & \searrow & \\
 \pi_1(C \cap (F \times S^1)) \cong \pi_1(F \times I) = \pi_1(F) & & & & \pi_1(A) \\
 & \searrow_{i_*} & & \nearrow & \\
 & & \pi_1(C) = 1 & &
 \end{array}$$

de laquelle on déduit que

$$\pi_1(A) \cong \pi_1(F) \times \pi_1(S^1) / \ll \pi_1(F) \times \{0\} \gg \cong \pi_1(F) \times \mathbb{Z} / \pi_1(F) \times \{0\} \cong \mathbb{Z}.$$

Ici, on voit bien qu'un générateur de $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$ correspond à un méridien de F . Finalement, on remarque que $A \cap B \simeq B \simeq F$ et donc que $\pi_1(A \cap B) \cong \pi_1(B) \cong \pi_1(F)$. On obtient alors la somme amalgamée

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(A) \cong \mathbb{Z} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \pi_1(A \cap B) \cong \pi_1(B) \cong \pi_1(F) & & & & \pi_1(X) \\
 & \searrow_{i_*} & & \nearrow & \\
 & & \pi_1(B) \cong \pi_1(F) & &
 \end{array}$$

qui nous assure, toujours par le lemme 5.3.1, que $\pi_1(X) \cong \pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$.

Pour la seconde partie de la proposition, comme le générateur de $\pi_1(X)$ est le méridien de F , la courte suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_1(\tilde{X}_n) \xrightarrow{p\#} \pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow 1$$

implique que $\pi_1(\tilde{X}_n) \cong \mathbb{Z}$ et qu'il est engendré par le méridien de $\partial\tilde{X}_n$, de manière analogue à la remarque 3.7.5 faite au chapitre III. Or, lorsqu'on vient attacher $T_n(F)$ à \tilde{X}_n pour former $\Sigma_n(F)$, le méridien de $\partial\tilde{X}_n$ coïncide avec celui de $T_n(F) \approx F \times D^2$ qui lui est évidemment homotopiquement nul. Il en résulte donc que $\pi_1(\Sigma_n(F)) = 1$, tel que voulu. \square

Sachant la simple connexité de $\Sigma_n(F)$, il devient aisé de calculer la plupart de ses groupes d'homologie.

Lemme 5.3.3. Les groupes d'homologie pour $\Sigma_n(K) = \partial\Sigma_n(F)$ sont

$$H_k(\Sigma_n(K)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \\ H_1(\Sigma_n(K)) & \text{si } k = 1, \\ \mathbb{Z}^{\beta_1(\Sigma_n(K))} & \text{si } k = 2, \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 3 \\ 0 & \text{si } k \geq 4. \end{cases}$$

Pour ceux de $\Sigma_n(F)$, nous avons

$$H_k(\Sigma_n(F)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k = 1, \\ \mathbb{Z}^{2g(n-1)} & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{si } k \geq 3. \end{cases}$$

et

$$H_k(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k = 1, \\ \mathbb{Z}^{2g(n-1)} & \text{si } k = 2, \\ 0 & \text{si } k = 3, \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 4, \\ 0 & \text{si } k \geq 5. \end{cases}$$

Démonstration. Comme $\Sigma_n(K)$ est une 3-variété fermée et orientable, nous n'avons qu'à vérifier que $H_2(\Sigma_n(K))$ correspond à la partie libre de $H_1(\Sigma_n(K))$. Or, ceci découle directement de la dualité de Poincaré et du corollaire 1.1.9 :

$$H_2(\Sigma_n(K)) \cong H^1(\Sigma_n(K)) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(\Sigma_n(K))} \oplus \underbrace{\text{Tor}_0(\Sigma_n(K))}_{=0} \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(\Sigma_n(K))}.$$

Pour $\Sigma_n(F)$, comme il s'agit d'une 4-variété orientable, $H_4(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \cong \mathbb{Z}$. Aussi, par connexité, $H_0(\Sigma_n(F)) \cong \mathbb{Z}$. De plus, puisque $\Sigma_n(F)$ est simplement connexe, l'homomorphisme surjectif d'Hurewicz implique que $H_1(\Sigma_n(F)) = 0$. La longue suite exacte en homologie de la paire $(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))$ donne donc

$$H_1(\Sigma_n(K)) \rightarrow 0 \rightarrow H_1(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}.$$

En particulier, $H_1(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))$ est trivial. De là, puisque $\Sigma_n(F)$ est compacte, la dualité de Lefschetz et le corollaire 1.1.8 affirment que

$$H_3(\Sigma_n(F)) \cong H^1(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \cong \text{Hom}(\underbrace{H_1(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))}_{=0}, \mathbb{Z}) = 0$$

et

$$H_3(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \cong H^1(\Sigma_n(F)) = \text{Hom}(\underbrace{H_1(\Sigma_n(F))}_{=0}, \mathbb{Z}) = 0.$$

En analysant la longue suite en homologie de la paire $(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))$, on obtient aisément que $H_0(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \cong 0$. En effet, nous avons

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \rightarrow H_0(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \rightarrow 0.$$

En invoquant toujours la dualité de Lefschetz, mais cette fois-ci le corollaire 1.1.9, on obtient

$$H_4(\Sigma_n(F)) \cong H^0(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \cong 0.$$

Pour $H_2(\Sigma_n(F))$, la preuve sera faite plus loin au lemme 5.4.1. Par contre, on peut montrer facilement que $H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))$ et $H_2(\Sigma_n(F))$ sont isomorphes et libres. L'argument est similaire :

$$\begin{aligned} H_2(\Sigma_n(F)) &\cong H^2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \cong \mathbb{Z}^{\beta_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))} \oplus \underbrace{\text{Tor}_1(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))}_{=0} \\ &\cong \mathbb{Z}^{\beta_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))} \end{aligned}$$

donc ce groupe est libre, c'est-à-dire $H_2(\Sigma_n(F)) \cong \mathbb{Z}^{\beta_2(\Sigma_n(F))}$. De même,

$$\begin{aligned} H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) &\cong H^2(\Sigma_n(F)) \cong \mathbb{Z}^{\beta_2(\Sigma_n(F))} \oplus \underbrace{\text{Tor}_1(\Sigma_n(F))}_{=0} \\ &\cong \mathbb{Z}^{\beta_2(\Sigma_n(F))} \\ &\cong H_2(\Sigma_n(F)). \end{aligned}$$

□

En particulier, les bases des groupes libres $H_2(\Sigma_n(F))$ et $H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))$ ont le même nombre d'éléments. On peut ainsi s'attendre à ce que l'appariement d'intersection sur $H_2(\Sigma_n(F))$ soit dual.

Lemme 5.3.4. L'appariement d'intersection $H_2(\Sigma_n(F)) \times H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un appariement dual, c'est-à-dire que l'application $\varphi : H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \rightarrow \text{Hom}(H_2(\Sigma_n(F)), \mathbb{Z})$ définie par

$$\varphi : \beta \mapsto \varphi(\beta) := (\alpha \mapsto \alpha \cdot \beta)$$

est un isomorphisme. En particulier, pour toute base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ de $H_2(\Sigma_n(F))$, il existe une base $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ de $H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))$ qui lui est duale pour le produit d'intersection, donc telle que $\alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$.

Démonstration. Pour voir que φ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}(H_2(\Sigma_n(F)), \mathbb{Z}) & \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \cong (\cdot) \\ H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) & & H^2(\Sigma_n(F)) \\ & \searrow \cong D & \end{array}$$

car \langle , \rangle est un isomorphisme par le corollaire 1.1.8 et $D = (\cdot \frown \mu_{\Sigma_n(F)})^{-1}$ est l'inverse de l'homomorphisme de la dualité de Lefschetz, qui est donc aussi un isomorphisme. La commutativité découle en fait de la formule mettant en relation les produits cap et cup : pour $(\alpha, \beta) \in H_2(\Sigma_n(F)) \times H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))$, nous avons

$$\begin{aligned}
 (\langle , \rangle \circ D)(\beta)(\alpha) &= \langle D(\beta), \alpha \rangle \\
 &= \langle D(\beta), D(\alpha) \frown \mu_{\Sigma_n(F)} \rangle \\
 &= \langle D(\beta) \smile D(\alpha), \mu_{\Sigma_n(F)} \rangle \\
 &= \beta \cdot \alpha \\
 &= \alpha \cdot \beta \\
 &= \varphi(\beta)(\alpha).
 \end{aligned}$$

Le second énoncé du lemme est une conséquence classique. Si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ est une base de $H_2(\Sigma_n(F))$, alors tout élément s'écrit de manière unique de la forme $\sum_{i=1}^m x_i \alpha_i$, où $x_i \in \mathbb{Z}$. On définit alors $f_j \in \text{Hom}(H_2(\Sigma_n(F)), \mathbb{Z})$ par

$$f_j \left(\sum_{i=1}^m x_i \alpha_i \right) = x_j,$$

ce qui implique qu'en particulier, $f_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$. En posant $\beta_j := \varphi^{-1}(f_j)$, on remarque que

$$\alpha_i \cdot \beta_j = \varphi(\beta_j)(\alpha_i) = f_j(\alpha_i) = \delta_{ij}.$$

De plus, $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ est une base de $H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))$ car $\{f_1, \dots, f_m\}$ en est une pour $\text{Hom}(H_2(\Sigma_n(F)), \mathbb{Z})$. \square

Proposition 5.3.5. Le produit d'intersection sur $H_2(\Sigma_n(F))$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée si et seulement si $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie rationnelle. En particulier, elle est unimodulaire si et seulement si $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière.

Démonstration. Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ une base de $H_2(\Sigma_n(F))$ et $A = (\alpha_i \cdot \alpha_j)$ la matrice associée au produit d'intersection par rapport à cette base. Cette forme bilinéaire est non dégénérée si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Notons par l_* l'homomorphisme en homologie induit par l'inclusion $l : (\Sigma_n(F), \emptyset) \hookrightarrow (\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))$ et considérons $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ la base pour $H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))$ duale à la première donnée par le lemme précédent. Pour tout $\xi \in H_2(\Sigma_n(F))$, on a $l_*(\xi) = \sum_{k=1}^m x_k \beta_k$ avec $x_k \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\alpha_i \cdot \xi = \alpha_i \cdot l_*(\xi) = \sum_{k=1}^m x_k (\alpha_i \cdot \beta_k) = \sum_{k=1}^m x_k \delta_{ik} = x_i.$$

On en déduit donc que

$$l_*(\alpha_j) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i \cdot \alpha_j) \beta_i,$$

c'est-à-dire que la matrice associée à l_* dans la base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ est $A = (\alpha_i \cdot \alpha_j)$. De là, on voit que A est une matrice de présentation de $H_1(\Sigma_n(K))$. En effet, le segment de la longue suite exacte

$$\dots \rightarrow H_2(\Sigma_n(F)) \xrightarrow{l_*} H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K)) \rightarrow H_1(\Sigma_n(K)) \rightarrow \underbrace{H_1(\Sigma_n(F))}_{=0} \rightarrow \dots$$

nous donne la suite exacte

$$\mathbb{Z}^m \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^m \rightarrow H_1(\Sigma_n(K)) \rightarrow 0.$$

Il s'en suit que le produit d'intersection est non dégénéré si et seulement si

$$|H_1(\Sigma_n(K))| = |\det(A)| \neq 0, \quad (5.2)$$

ce qui, par le corollaire 5.1.2, est équivalent à ce que $\Sigma_n(K)$ soit une 3-sphère d'homologie rationnelle.

Par l'équation (5.2), le produit d'intersection est unimodulaire si et seulement si $|H_1(\Sigma_n(K))| = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $H_1(\Sigma_n(K)) = 0$. On conclut par la

proposition 5.1.1 qui affirme que c'est équivalent à ce que $\Sigma_n(K)$ soit une 3-sphère d'homologie entière. \square

Remarque 5.3.6. Dans la preuve précédente, il est supposé que F est isotope à une surface de Seifert. En effet, nous utilisons le fait que $\Sigma_n(F)$ est simplement connexe.

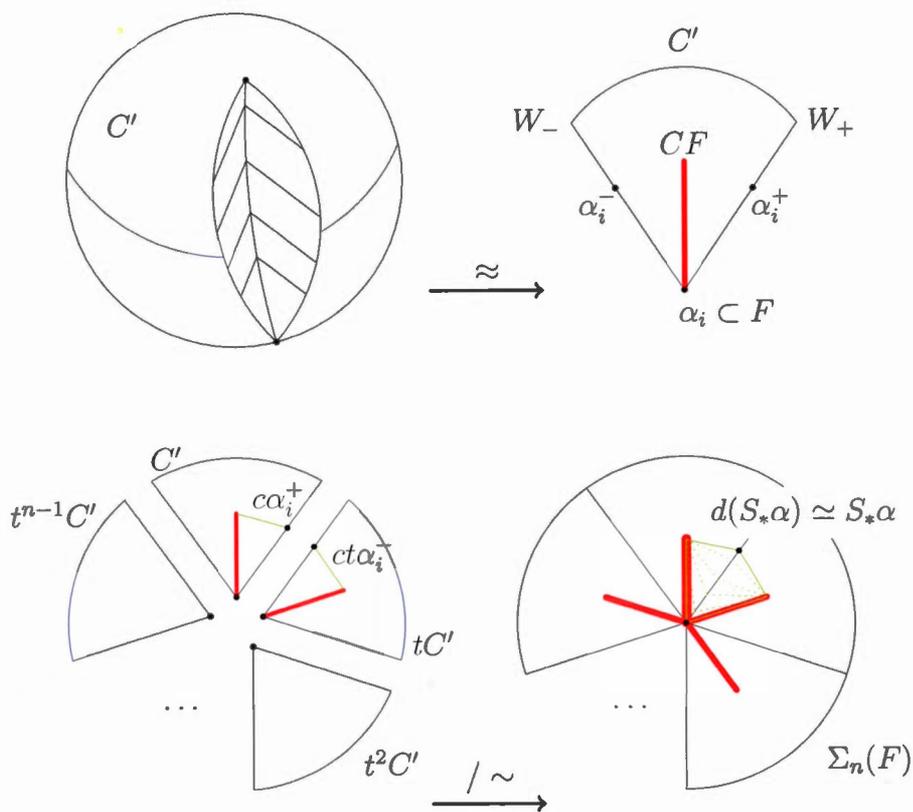
5.4 Calcul de $H_2(\Sigma_n(F))$ et produit d'intersection.

Bien que nous sachions quand le produit d'intersection sur le second groupe d'homologie de $\Sigma_n(F)$ est unimodulaire, il serait avantageux d'avoir une meilleure idée de cette forme afin de déterminer, par exemple, si elle est paire ou non. Le lemme 5.3.3 offre un bon aperçu de ce que sont les groupes d'homologie de $\Sigma_n(F)$, sauf peut-être pour $H_2(\Sigma_n(F))$, que l'on sait seulement être libre et isomorphe à $H_2(\Sigma_n(F), \Sigma_n(K))$. Dans (Kauffman, 1974) et dans son livre (Kauffman, 1987), l'auteur présente une construction par blocs du revêtement de B^4 ramifié sur F à la manière de la section 3.7.1 qui permet une meilleure compréhension de cet espace.

Soit C' comme dans la preuve de la proposition 5.3.2. Le bord de C' contient deux copies de W , notée W_+ et W_- , telles que $W_+ \cap W_- = F$. Considérons $\Gamma_n = \langle t : t^n = 1 \rangle$ et prenons n copies de C' que l'on notera $t^i C'$, avec $0 \leq i \leq n-1$. Le revêtement ramifié $\Sigma_n(F)$ est alors l'union des $t^i C'$ à laquelle $t^i W_+$ est identifié avec $t^{i+1} W_-$ pour $t^i \in \Gamma_n$. Encore une fois, $t : \Sigma_n(F) \rightarrow \Sigma_n(F)$ est un homéomorphisme qui fixe F et

$$\Sigma_n(F)/t = \Sigma_n(F)/\Gamma_n \approx C' \approx B^4.$$

Notons maintenant par $t^i C F$ le cône sur F dans $t^i C'$ dont le sommet est le centre de $t^i C' \approx B^4$. Puisque $t^i C F \simeq C'$, on obtient que $\Sigma'_n(F) := C F \cup_F t C F \cup_F \dots \cup_F$

Figure 5.2: Construction par blocs de $\Sigma_n(F)$

$t^{n-1}CF$ est du même type d'homotopie que $\Sigma_n(F)$. Finalement, si σ est une 1-chaîne du complexe $C_1(F)$, on note $c\sigma \in C_2(\Sigma_n(F))$ le cône sur σ de sommet le centre de C' . Cette construction par blocs est illustrée à la figure 5.2.

Lemme 5.4.1. Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ une base pour $H_1(F)$ et $S : C_1(F) \rightarrow C_2(\Sigma_n(F))$ l'opérateur de suspension donné par

$$S : \sigma \mapsto c\sigma - ct\sigma.$$

L'ensemble $\{S_*t^i a_j : 0 \leq i \leq n-2, 1 \leq j \leq 2g\}$ forme une base de $H_2(\Sigma_n(F))$ qui est donc isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g(n-1)}$, où $g = g(F)$.

Démonstration. Il suffit de montrer le lemme pour $\Sigma'_n(F)$. Nous procéderons par récurrence sur $n \geq 2$. Pour ce faire, remarquons que la suite de Mayer-Vietoris pour la décomposition $\Sigma'_{n+1}(F) = \Sigma'_n(F) \cup_F t^n CF$ nous donne la suite exacte

$$\begin{aligned} \underbrace{H_2(F)}_{=0} \rightarrow H_2(\Sigma'_n(F)) \oplus H_2(t^n CF) \rightarrow H_2(\Sigma'_{n+1}(F)) \xrightarrow{\partial_*} H_1(F) \\ \rightarrow H_1(\Sigma'_n(F)) \oplus H_1(t^n CF) \end{aligned}$$

qui est équivalente à la courte suite exacte

$$0 \rightarrow H_2(\Sigma'_n(F)) \xrightarrow{\iota_*} H_2(\Sigma'_{n+1}(F)) \xrightarrow{\partial_*} H_1(F) \rightarrow 0.$$

En effet, CF est contractile et $\Sigma'_n(F) \simeq \Sigma_n(F)$ est simplement connexe par la proposition 5.3.2. De plus, cette courte suite exacte se scinde puisque $\partial_* \circ S_* = \text{Id}_{H_1(F)}$ par définition de ∂_* . Ainsi, par l'hypothèse de récurrence, S_* induit un isomorphisme

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1} H_1(t^i F) \cong H_2(\Sigma'_n(F)) \oplus H_1(F) \xrightarrow{\cong} H_2(\Sigma'_{n+1}(F)). \quad (5.3)$$

En étudiant la preuve du lemme de scission (splitting lemma), on conclut bien que l'isomorphisme 5.3 est induit de S_* . Le cas de base se traite de manière tout à fait analogue. \square

Nous pouvons dès lors rapprocher le produit d'intersection sur $H_2(\Sigma_n(F))$ à la forme de Seifert symétrisée sur $H_1(F)$ grâce au théorème suivant.

Théorème 5.4.2. Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ une base pour $H_1(F)$ et $\{S_* t^i \alpha_j : 0 \leq i \leq n-2, 1 \leq j \leq 2g\}$ la base pour $H_2(\Sigma_n(F))$ du lemme précédent. Alors

$$S_* t^i \alpha_j \cdot S_* t^{i'} \alpha_{j'} = \begin{cases} S_F(\alpha_j, \alpha_{j'}) + S_F(\alpha_{j'}, \alpha_j) & \text{si } t^i = t^{i'}, \\ -S_F(\alpha_j, \alpha_{j'}) & \text{si } t^i = t^{i+1}, \\ -S_F(\alpha_{j'}, \alpha_j) & \text{si } t^i = t^{i-1} \text{ et} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où S_F est la forme de Seifert sur $H_1(F)$.

Démonstration. La preuve est un brillant argument présenté dans (Kauffman, 1974). L'idée est de trouver une surface homotopiquement équivalente à un représentant de $S_*t^i\alpha_j$ en termes des classes $\alpha_j^\pm \in H_1(S^3 - F)$ pour faire apparaître la forme de Seifert S_F lors du calcul du produit d'intersection.

Soit $\alpha_j \in H_1(F)$ et α_j^\pm les poussés de α_j dans W_\pm tels que définis à la section 3.4. On note $ct^i\alpha_j^\pm$ le cône sur α_j^\pm dont le sommet est le centre de t^iC' , comme illustré en vert à la figure 5.2. On pose alors

$$d(S_*t^i\alpha_j) := ct^i\alpha_j^+ - ct^{i+1}\alpha_j^-$$

que l'on regarde comme le représentant d'une classe de $H_2(\Sigma_n(F))$. On remarque que l'homotopie de la figure 5.2 induite du bicol de F dans S^3 envoie bien $t^iS_*\alpha_j$ sur $d(S_*t^i\alpha_j)$. Puisque le produit d'intersection est bien défini sur les types d'homotopie, on obtient les calculs suivants. D'abord,

$$\begin{aligned} S_*t^i\alpha_j \cdot S_*t^i\alpha_{j'} &= S_*t^i\alpha_j \cdot d(S_*t^i\alpha_{j'}) \\ &= (ct^i\alpha_j - ct^{i+1}\alpha_j) \cdot (ct^i\alpha_{j'}^+ - ct^{i+1}\alpha_{j'}^-) \\ &= (ct^i\alpha_j \cdot ct^i\alpha_{j'}^+) - \underbrace{(ct^i\alpha_j \cdot ct^{i+1}\alpha_{j'}^-)}_{=0} \\ &\quad - \underbrace{(ct^{i+1}\alpha_j \cdot ct^i\alpha_{j'}^+)}_{=0} + (ct^{i+1}\alpha_j \cdot ct^{i+1}\alpha_{j'}^-) \\ &= (c\alpha_j \cdot c\alpha_{j'}^+) + (c\alpha_j \cdot c\alpha_{j'}^-) \\ &= \text{lk}(\alpha_j, \alpha_{j'}^+) + \text{lk}(\alpha_j, \alpha_{j'}^-) \quad \text{par la remarque 3.3.2} \\ &= \text{lk}(\alpha_j, \alpha_{j'}^+) + \text{lk}(\alpha_{j'}, \alpha_j^+) \\ &= S_F(\alpha_j, \alpha_{j'}) + S_F(\alpha_{j'}, \alpha_j), \end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité provient du fait que le nombre d'enlacements est symé-

trique et du 3.4.1. Ensuite,

$$\begin{aligned}
S_* t^i \alpha_j \cdot S_* t^{i+1} \alpha_{j'} &= d(S_* t^i \alpha_j) \cdot S_* t^{i+1} \alpha_{j'} \\
&= (ct^i \alpha_j^+ - ct^{i+1} \alpha_j^-) \cdot (ct^{i+1} \alpha_{j'} - ct^{i+2} \alpha_{j'}) \\
&= \underbrace{(ct^i \alpha_j^+ \cdot ct^{i+1} \alpha_{j'})}_{=0} - \underbrace{(ct^i \alpha_j^+ \cdot ct^{i+2} \alpha_{j'})}_{=0} \\
&\quad - (ct^{i+1} \alpha_j^- \cdot ct^{i+1} \alpha_{j'}) + \underbrace{(ct^{i+1} \alpha_j^- \cdot ct^{i+2} \alpha_{j'})}_{=0} \\
&= -(c\alpha_j^- \cdot c\alpha_{j'}) \\
&= -\text{lk}(\alpha_j^-, \alpha_{j'}) \\
&= -S_F(\alpha_j, \alpha_{j'}).
\end{aligned}$$

Le calcul pour montrer que $S_* t^i \alpha_j \cdot S_* t^{i-1} \alpha_{j'} = -S_F(\alpha_{j'}, \alpha_j)$ est tout à fait analogue et sera omis. Finalement, dans tous les autres cas, il n'y a aucun risque d'intersection et donc le produit ne peut être que nul. \square

En particulier, on a le corollaire immédiat qui suit.

Corollaire 5.4.3. Sous l'isomorphisme induit par l'opérateur de suspension S_* , le produit d'intersection sur $H_2(\Sigma_2(F))$ et la forme de Seifert symétrisée sur $H_1(F)$ coïncident. \square

Plus généralement, on peut déduire le théorème suivant.

Théorème 5.4.4. Soit K un nœud dans S^3 . Si $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière pour un certain $n \geq 2$, alors la signature du produit d'intersection sur $H_2(\Sigma_n(F))$ est un multiple de huit.

Démonstration. Comme $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière, la proposition 5.3.5 implique que le produit d'intersection sur $H_2(\Sigma_n(F))$ est une forme

symétrique bilinéaire unimodulaire. De plus, par le théorème 5.4.2, on a

$$S_* t^i \alpha_j \cdot S_* t^i \alpha_j = S_F(\alpha_j, \alpha_j) + S_F(\alpha_j, \alpha_j) \equiv 0 \pmod{2}$$

Combiné à la proposition 2.1.11, il en découle que le produit d'intersection est également une forme paire. La conclusion provient du corollaire 2.2.7. \square

5.5 Théorème de Boileau-Boyer-Gordon

Nous savons que le produit d'intersection sur $H_2(\Sigma_n(F))$ est une forme symétrique bilinéaire qui est paire lorsque F est isotopé à une surface de Seifert. De plus, lorsque $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière, il est assuré que cette forme est en fait unimodulaire. Dans cette section, nous donnons la définition d'un L -espace présentée dans (Boyer *et al.*, 2013) et démontrons le théorème 0.0.2 pour le cas des nœuds fortement quasi positifs.

Définition 5.5.1. Une 3-variété fermée Y est un L -espace si c'est une 3-sphère d'homologie rationnelle pour laquelle

$$\text{rg} \left(\widehat{HF}(Y) \right) = |H_1(Y; \mathbb{Z})|,$$

où $\widehat{HF}(Y)$ est le groupe d'homologie d'Heegard Floer de Y .

Pour obtenir plus de détails concernant l'homologie d'Heegard Floer, nous recommandons (Ozsváth et Szabó, 2006).

Théorème (Boileau-Boyer-Gordon). Soit K un nœud quasi positif. Si $\Sigma_n(K)$ est un L -espace et une 3-sphère d'homologie entière, alors

$$g_4(K)(n-1) \equiv 0 \pmod{4}.$$

En particulier, si K est fortement quasi positif, alors

$$g(K)(n-1) \equiv 0 \pmod{4}.$$

Démonstration du théorème 0.0.2. Nous démontrons le théorème pour le cas des nœuds fortement quasi positifs et donnons une indication pour le cas plus général des nœuds quasi positifs.

Soit K un nœud quasi positif. Il s'agit en particulier d'un nœud \mathbb{C} -transverse par le théorème 4.3.1. En somme, il existe un polynôme non constant $f \in \mathbb{C}[z, w]$ pour lequel la courbe affine complexe $V_f = f^{-1}(\{0\})$ est sans point singulier, c'est-à-dire $\text{Sing}(V_f) = \emptyset$, et $K = V_f \cap S^3$. Par le théorème 4.3.2, $g_4(K)$ est réalisé par la surface $F_K = V_f \cap B^4$. Considérons alors la variété $\Sigma_n(F_K)$ et le produit d'intersection sur son deuxième groupe d'homologie que l'on sait être une forme bilinéaire symétrique.

Ozsváth et Szabó ont démontré qu'en général, si Y est un L-espace, alors pour tout remplissage symplectique W de Y , l'appariement du produit cup sur $H^2(W)$ donné par

$$(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi \smile \eta, \mu_{[W]} \rangle$$

est défini négatif (Ozsváth et Szabó, 2004). En particulier, l'appariement d'intersection sur $H_2(W, Y)$ et le produit d'intersection sur $H_2(W)$ sont définis négatifs. Or, il découle des théorèmes 1.3 de (Harvey *et al.*, 2009; Rudolph, 2015) que $\Sigma_n(F_K)$ est un remplissage de Stein de $\Sigma_n(K)$ et donc en particulier un remplissage symplectique. Voir (Geiges, 2008) pour les notions de remplissages symplectiques et de Stein. De là, le produit d'intersection sur $H_2(\Sigma_n(F_K))$ est défini négativement.

Si K est fortement quasi positif, alors F_K est isotope à une surface de Seifert (Rudolph, 1993). Ainsi, $g(F_K) = g_4(K) = g(K)$ par le théorème 4.3.2. De plus, l'hypothèse que $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière implique que le produit d'intersection est unimodulaire. Il est également pair par la preuve du théorème 5.4.4. Du fait que le rang de $H_2(\Sigma_n(F_k))$ est $2g(K)(n - 1)$, on conclut bien que

$g(K)(n - 1) \equiv 0 \pmod{4}$ en vertu du corollaire 2.2.8.

Si K est seulement quasi positif, les arguments du paragraphe précédent ne tiennent plus car rien n'indique que F_K sera isotope à une surface de Seifert. Néanmoins, il est possible de montrer que le rang de $H_2(\Sigma_n(F_K))$ est bien $2g(F_K)(n - 1)$ et que le produit d'intersection sur ce dernier groupe d'homologie est pair par un argument utilisant la théorie des classes caractéristiques que nous ne développerons pas dans ce mémoire. \square

Sous les hypothèses du théorème précédent, on ne peut rien conclure concernant le 4-genre du nœud lorsque $\text{pgcd}(n - 1, 4) = 4$, mais dans le cas contraire, $g_4(K)$ est toujours pair et même un multiple de quatre si $n - 1$ et 4 sont premiers entre eux.

Dans un autre ordre d'idée, rappelons qu'il est possible d'identifier quand un revêtement $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière grâce à la formule de Fox. Si l'on sait en plus qu'il s'agit d'un L-espace, on peut facilement tester la conjecture de Poincaré d'Ozsváth-Szabó. Ceci étant dit, le théorème 0.0.2 peut s'avérer fort utile pour ce genre de vérification puisqu'il permet d'éliminer rapidement plusieurs cas et donc d'alléger les calculs. Pour donner un exemple concernant les nœuds toriques, nous avons besoin du résultat suivant qui découle entre autres du corollaire 1.2 de (Boileau *et al.*, 2017).

Théorème 5.5.2. Si K un nœud torique non trivial, alors $\Sigma_n(K)$ est un L-espace si et seulement si

- $n = 2$ et $K = T_{2,q}$, $T_{3,4}$ ou $T_{3,5}$;
- $n = 3$ et $K = T_{2,3}$ ou $T_{2,5}$
- $n = 5$ et $K = T_{2,3}$.

Proposition 5.5.3. Si K un nœud torique non trivial, alors $\Sigma_n(K)$ est un L-espace et une 3-sphère d'homologie entière si et seulement si $\Sigma_n(K)$ est la 3-sphère d'homologie de Poincaré. Autrement dit, la conjecture de Poincaré d'Ozsváth-Szabó est vraie pour les espaces de la forme $\Sigma_n(K)$, avec K un nœud torique.

Démonstration. D'abord, tout nœud torique, à image miroir près, est fortement quasi positif par le corollaire 4.2.9. On peut donc appliquer le théorème 0.0.2.

- Le cas où $n \geq 4$ est traité par le théorème précédent.
- Si $n = 3$, le même théorème implique que $\Sigma_3(K)$ est un L-espace différent de la 3-sphère d'homologie de Poincaré seulement lorsque $K = T_{2,3}$. Par contre, $g(T_{2,3}) = \frac{2}{2} = 1 \not\equiv 0 \pmod{2}$. Le théorème 0.0.2 implique alors que $\Sigma_3(T_{2,3})$ ne peut être une 3-sphère d'homologie entière.
- Si $n = 2$, alors $\Sigma_n(K)$ est un L-espace différent de $\Sigma_2(T_{3,5})$ seulement lorsque $K = T_{2,q}$ ou $T_{3,4}$. Ceci étant dit, $g(T_{3,4}) = \frac{2(3)}{2} = 3 \not\equiv 0 \pmod{4}$, donc en particulier, $\Sigma_2(T_{3,4})$ n'est pas une 3-sphère d'homologie entière. Quant à $K = T_{2,q}$, pour $q = 2l + 1$ impair, on a

$$g(T_{2,q}) = \frac{2l}{2} = l \equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow q - 1 = 2l \equiv 0 \pmod{8}.$$

Du théorème de Boileau-Boyer-Gordon, on a que $\Sigma_2(T_{2,q})$ n'est jamais une 3-sphère d'homologie entière lorsque $q \not\equiv 1 \pmod{8}$.

Ainsi, il ne reste qu'à vérifier la conjecture pour les espaces de la forme $\Sigma_2(T_{2,8l+1})$ avec $l \in \mathbb{N} - \{0\}$. D'abord, puisque $T_{2,8l+1}$ et $T_{8l+1,2}$ sont du même type, il est suffisant de constater que $\Sigma_2(T_{8l+1,2})$ n'est jamais une 3-sphère d'homologie entière. Or, on sait que $\Delta_{T_{8l+1,2}}(t) = \frac{f(t^2)}{f(t)}$ avec $f(t) = \sum_{i=0}^{8l} t^i$, (Agle, 2012). Pour $\zeta_2 = -1$, nous avons alors

$$f(\zeta_2) = \sum_{i=0}^{8l} (-1)^i = 1$$

et

$$f(\zeta_2^2) = \sum_{i=0}^{8l} 1^i = 8l + 1.$$

De là, on obtient que

$$|H_1(\Sigma_2(T_{8l+1,2}))| = |\Delta_{T_{8l+1,2}}(\zeta_2)| = \left| \frac{f(1)}{f(-1)} \right| = \left| \frac{8l+1}{1} \right| = 8l+1 \neq 1, \forall l \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Autrement dit, $\Sigma_2(T_{8l+1,2})$ n'est pas une 3-sphère d'homologie entière pour tout $l \geq 1$.

□

Remarque 5.5.4. On ne peut espérer mieux du théorème 0.0.2 au sens où la réciproque est fautive : il existe des nœuds fortement quasi positifs pour lesquels

$$g(K)(n-1) \equiv 0 \pmod{4}$$

et $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière pour un certain $n \geq 2$ sans être un L-espace. Par exemple, si K est le nœud fortement quasi positif 10_{124} , alors $g(K) = 4$ et $\Delta_K(t) = \phi_{15}(t)$ (voir KnotInfo). Comme nous l'avons vu à l'exemple 5.1.4, le revêtement cyclique ramifié $\Sigma_4(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière. Par contre, le corollaire 1.2 de (Boileau *et al.*, 2017) assure qu'il ne s'agit pas d'un L-espace.

Remarque 5.5.5. Il est possible de remplacer $g_4(K)$ dans l'énoncé du théorème 0.0.2 par $|\tau(K)|$, l'invariant de concordance introduit par Ozsváth, Szabó et indépendamment par Rasmussen. En effet, comme le remarque Hedden dans (Hedden, 2010), les travaux de Plamenevskaya (Plamenevskaya, 2004) impliquent que ces deux invariants coïncident lorsque K est quasi positif.

Remarque 5.5.6. Si K est quasi positif, il existe une tresse $\beta = \prod_{k=1}^m w\sigma_{i_k}w^{-1} \in B_q$ telle que $K = \hat{\beta}$. Par le corollaire 4.3.3, le théorème 0.0.2 est équivalent à la condition

$$(1 - q + m)(n - 1) \equiv 0 \pmod{8}.$$

5.6 Quelques applications

Bien que le théorème 0.0.2 donne un critère pour répondre partiellement à la conjecture de Poincaré d'Ozsváth-Szabó, il pourrait être intéressant de l'utiliser pour montrer que certains revêtements cycliques de S^3 ramifiés sur des nœuds fortement quasi positifs ne sont pas des L-espaces. Évidemment, pour ce faire, il est essentiel que le revêtement en question soit une 3-sphère d'homologie entière. La façon la plus simple de détecter ces espaces est lorsque le polynôme d'Alexander du nœud est trivial. Effectivement, nous avons vu à l'exemple 5.1.5 que dans ce cas, $\Sigma_n(K)$ est une 3-sphère d'homologie entière pour tout $n \geq 2$. Il existe plusieurs types de nœuds non triviaux qui ont un polynôme d'Alexander trivial comme certains nœuds bretzel ainsi que tous les doubles positifs sans torsion de Whitehead.

5.6.1 Nœuds de bretzel classiques

Dans cette section, nous nous inspirons de ce qui est présenté dans (Tanaka, 1998).

Les entrelacs de bretzel classiques, notés $P(p_1, p_2, p_3)$, peuvent être décrits comme étant le bord d'une surface de bretzel $F(p_1, p_2, p_3)$, c'est-à-dire deux disques horizontaux parallèles reliés par trois bandes, chacune ayant p_i demi-tours, le signe de p_i indiquant le sens de la rotation.

Lorsque $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 1 \pmod{2}$, $K = P(p_1, p_2, p_3)$ est un nœud et il est facile de remarquer que la surface de bretzel $F(p_1, p_2, p_3)$ est orientable. En fait, la preuve que l'algorithme de Seifert produit une surface orientable peut être facilement adaptée ici pour le démontrer. Ainsi, $F(p_1, p_2, p_3)$ est une surface de Seifert pour le nœud de bretzel K . Par ailleurs, de par sa construction, cette surface est de caractéristique d'Euler $\chi(F(p_1, p_2, p_3)) = 2 - 3 = -1$. Son genre est donc $g(F(p_1, p_2, p_3)) = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$, qui est minimal si K n'est pas trivial. On en

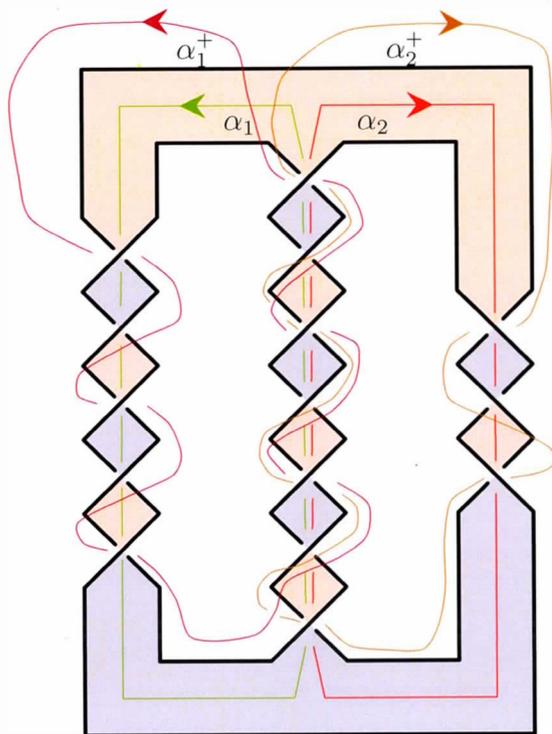


Figure 5.3: Le nœud bretzel $P(5, 7, -3)$ a un polynôme d'Alexander trivial

conclut donc que $g(K) = 1$.

Il s'en suit que $H_1(F(p_1, p_2, p_3)) \cong \mathbb{Z}^2$: les générateurs α_1 et α_2 ont comme représentants les cycles illustrés à la figure 5.3. De plus,

$$\begin{aligned} \text{lk}(\alpha_1, \alpha_1^+) &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \\ \text{lk}(\alpha_1, \alpha_2^+) &= \frac{1}{2}(p_2 + 1) \\ \text{lk}(\alpha_2, \alpha_1^+) &= \frac{1}{2}(p_2 - 1) \text{ et} \\ \text{lk}(\alpha_2, \alpha_2^+) &= \frac{1}{2}(p_2 + p_3), \end{aligned}$$

et donc

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_1 + p_2 & p_2 + 1 \\ p_2 - 1 & p_2 + p_3 \end{bmatrix}$$

est une matrice de Seifert pour $K = P(p_1, p_2, p_3)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Delta_K(t) = \det(V^T - tV) &= \frac{1}{4} \det \left(\begin{bmatrix} (p_1 + p_2)(1-t) & p_2(1-t) - t - 1 \\ p_2(1-t) + t + 1 & (p_2 + p_3)(1-t) \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} ((p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)(t^2 - 2t + 1) + t^2 + 2t + 1). \end{aligned}$$

En particulier, tout nœud de bretzel $K = P(p_1, p_2, p_3)$ dont les entrées sont impaires et satisfont $p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = -1$ a un polynôme d'Alexander trivial (Bade, 2016).

Qu'en est-il de leur forte quasi-positivité? Rudolph a montré qu'une surface de bretzel est quasi positive si et seulement si

$$\min\{p_1 + p_2, p_1 + p_3, p_2 + p_3\} > 0$$

(Rudolph, 1993; Rudolph, 2001). Si le nœud $K = P(p_1, p_2, p_3)$ satisfait cette condition, il est donc en particulier fortement quasi positif (voir la discussion à la fin de la section 4.2).

Endo exhibe plusieurs familles d'entrées $\{p_1, p_2, p_3\}$ qui satisfont toutes les exigences ci-dessus (Endo, 1995). Par exemple, si (p_1, p_2, p_3) est de la forme

$$\begin{aligned} &(4m + 3, 4m + 1, -(2m + 1)); \\ &(2m^2 + 4m + 1, 2m + 3, -(2m + 1)); \\ &(m^2 + 3m + 1, 2m + 5, -(2m + 1)); \\ &(12m + 5, 6m + 1, -(4m + 1)) \text{ ou} \\ &(12m + 7, 6m + 5, -(4m + 3)) \end{aligned}$$

pour un entier $m \geq 1$, alors $K = P(p_1, p_2, p_3)$ est un nœud fortement quasi positif de genre 1 dont le polynôme d'Alexander est trivial. Le théorème 0.0.2 implique alors que $\Sigma_n(K)$ n'est pas un L-espace dès que $n \not\equiv 1 \pmod{4}$.

Si plutôt l'on demande seulement que K soit quasi positif, cette méthode devient tout à fait inefficace. En effet, Jabuka a montré que si les p_i sont impairs, $p_1, p_2 \geq 0$ et $p_3 < 0$, alors

$$\tau(P(p_1, p_2, p_3)) = \begin{cases} 0 & \text{si } |p_3| \geq \min\{p_1, p_2\}, \\ -1 & \text{si } |p_3| < \min\{p_1, p_2\} \end{cases}$$

où τ est l'invariant de concordance (Jabuka, s d). Comme $|p_3| < \min\{p_1, p_2\}$ implique que $\min\{p_1 + p_2, p_1 + p_3, p_2 + p_3\} > 0$, si l'on demande que $K = P(p_1, p_2, p_3)$ soit quasi positif sans être fortement quasi positif, forcément $\tau(K) = 0$ et donc $g_4(K) = 0$ par la remarque 5.5.5.

5.6.2 Double de Whitehead positif sans torsion d'un nœud

Pour un nœud K quelconque, on note par $W_+(K)$ le double de Whitehead positif sans torsion de K . Il est bien connu que $\Delta_{W_+(K)}(t) = 1$ pour tout nœud K . Par ailleurs, comme il est mentionné au lemme 2.2 de (Rudolph, 1993), si K est fortement quasi positif, $W_+(K)$ l'est également et $g(W_+(K)) = 1$. On conclut encore une fois que $\Sigma_n(W_+(K))$ n'est pas un L-espace quand $n \not\equiv 1 \pmod{4}$. Comme à la section précédente, cette méthode ne donne aucun indice concernant $\Sigma_{4m+1}(W_+(K))$ pour tout entier $m \geq 1$.

En fait, pour les nœuds fortement quasi positifs ayant un polynôme d'Alexander trivial, la méthode utilisant le théorème 0.0.2 n'est pas à privilégier puisqu'on peut montrer la proposition suivante. Il s'agit du corollaire 11.3 de (Boileau *et al.*, 2017).

Proposition 5.6.1. Soit K un nœud fortement quasi positif tel que $\Delta_K(t) = 1$.

Si $\Sigma_n(K)$ est un L-espace, alors K est le nœud trivial.

Démonstration. Freedman a montré que si $\Delta_K(t) = 1$, alors $g_4^{top}(K) = 0$ (Freedman, 1982). Or, si K est fortement quasi positif, alors $g(K) = g_4^{top}(K) = 0$ par le théorème 1.1.2 de (Boileau *et al.*, 2017). Il s'en suit alors que K est le nœud trivial. \square

De cette manière, on sait que $\Sigma_n(P(p_1, p_2, p_3))$ comme à la section 5.6.1 et $\Sigma_n(W_+(K))$ pour K fortement quasi positif et non trivial ne sont pas des L-espaces pour tout $n \geq 2$.

Une question naturelle qui vient à l'esprit est de se demander s'il en est de même pour les nœuds qui sont seulement quasi positifs.

Question 5.6.2. Si K est quasi positif, est-ce que $W_+(K)$ est quasi positif?

Si la réponse était affirmative et $g_4(W_+(K)) \not\equiv 0 \pmod{4}$, on pourrait en tirer quelques conclusions intéressantes sur le statut de L-espace de $\Sigma_n(W_+(K))$. Malheureusement, la dernière condition n'est jamais satisfaite. Effectivement, si $W_+(K)$ est quasi positif, $g_4(W_+(K)) = g_4^{top}(W_+(K)) = 0$ par le théorème 1.12 de (Boileau *et al.*, 2017). On ne peut donc rien conclure avec le théorème 0.0.2. Néanmoins, pour le cas général, nous avons tout de même la proposition suivante, qui correspond au corollaire 11.3 de (Boileau *et al.*, 2017).

Proposition 5.6.3. Soit K un nœud quasi positif pour lequel $\Delta_K(t) = 1$. Si $g_4(K) > 0$, alors $\Sigma_n(K)$ n'est jamais un L-espace.

Démonstration. Encore une fois, le théorème de Freedman implique que $g_4^{top}(K) = 0$. Si $g_4(K) > 0 = g_4^{top}(K)$, alors le théorème 1.12 de (Boileau *et al.*, 2017) implique que $\Sigma_n(K)$ ne peut être un L-espace. \square

Bref, le théorème 0.0.2 ne pourrait être intéressant pour détecter les 3-sphères d'homologie entière qui ne sont pas des L-espaces que lorsque le polynôme d'Alexander n'est pas trivial.

CONCLUSION

Très peu de résultats concernant la conjecture de Poincaré d'Ozsváth-Szabó sont connus. En ce sens, ce mémoire se voulait une présentation du critère trouvé par Boileau, Boyer et Gordon pour cette conjecture. En développant les outils de base de la théorie des nœuds, nous avons pu reprendre leur argument afin de généraliser leur théorème à tout $n \geq 2$. Plus encore, une étude de la théorie des classes caractéristiques mène à une généralisation pour tous les nœuds quasi positifs.

Par ailleurs, l'article (Boileau *et al.*, 2017) s'inscrit dans le cadre beaucoup plus large qu'est la conjecture des L-espaces.

Conjecture. Si M est une 3-variété connexe, fermée, orientable et irréductible, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- M n'est pas un L-espace ;
- le groupe fondamental de M est ordonnable à gauche ;
- M admet un feuilletage tendu coorienté.

Bien qu'elle soit prouvée lorsque $\beta_1(M) > 0$, elle est toujours ouverte quand $\beta_1(M) = 0$, c'est-à-dire si M est une 3-sphère d'homologie. Dans le cas où la conjecture des L-espaces s'avérerait être vraie, on pourrait remplacer dans le théorème 0.0.2 la condition que $\Sigma_n(K)$ soit un L-espace par la condition que $\pi_1(\Sigma_n(K))$ ne soit pas ordonnable à gauche. Il serait donc intéressant pour la suite d'étudier comment cette condition affecte le produit d'intersection sur $H_2(\Sigma_n(F))$ et de voir si elle permet de conclure qu'il est défini négativement.

RÉFÉRENCES

- Adams, C. C. (1994). *The knot book : an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. New York, NY. : W. H. Freeman and Company.
- Agle, K. E. L. (2012). *Alexander and Conway polynomials of torus knots*. [Mémoire de maîtrise]. University of Tennessee. Récupéré de http://trace.tennessee.edu/utk_gradthes/1127/
- Alexander, J. W. (1923). A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 9(3), 93–95. <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.9.3.93>
- Artin, E. (1925). Theorie der Zöpfe. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 4(1), 47–72. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02950718>
- Artin, E. (1947). Theory of braids. *Annals of Mathematics. Second Series*, 48(1), 101–126. <http://dx.doi.org/10.2307/1969218>
- Bade, N. (2016). *Properties of the Alexander polynomial*. [Notes de cours]. Récupéré de <https://web.northeastern.edu/beasley/MATH7375/Lecture18.pdf>
- Boileau, M., Boyer, S. et Gordon, C. M. (2017). Branched covers of quasipositive links and l-spaces. *ArXiv Mathematics e-prints 1710.07658v1*.
- Boileau, M. et Orevkov, S. (2001). Quasi-positivité d'une courbe analytique dans une boule pseudo-convexe. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences—Series I—Mathematics*, 332(9), 825–830. [http://dx.doi.org/10.1016/S0764-4442\(01\)01945-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0764-4442(01)01945-0)
- Boyer, S., Gordon, C. M. et Watson, L. (2013). On L-spaces and left-orderable fundamental groups. *Mathematische Annalen*, 356(4), 1213–1245. <http://dx.doi.org/10.1007/s00208-012-0852-7>
- Bredon, G. E. (1993). *Topology and geometry*. New York, NY. : Springer-Verlag.
- Burde, G. et Zieschang, H. (2003). *Knots* (2^e éd.). Berlin : Walter de Gruyter.

- Clay, A. et Rolfsen, D. (2016). *Ordered groups and topology*. Providence, RI. : American Mathematical Society.
- Cromwell, P. R. (2004). *Knots and links*. Cambridge : Cambridge University Press.
- de Souza, P. N. (s. d.). *Integral unimodular symmetric bilinear forms*. Récupéré de <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.35.1486>
- Endo, H. (1995). Linear independence of topologically slice knots in the smooth cobordism group. *Topology and its Applications*, 63(3), 257–262. [http://dx.doi.org/10.1016/0166-8641\(94\)00062-8](http://dx.doi.org/10.1016/0166-8641(94)00062-8)
- Freedman, M. H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 17(3), 357–453. <http://dx.doi.org/10.4310/jdg/1214437136>
- Geiges, H. (2008). *An introduction to contact topology*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Gilmer, P. (1993). Classical knot and link concordance. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 68(1), 1–19. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02565807>
- Harvey, S., Kawamuro, K. et Plamenevskaya, O. (2009). On transverse knots and branched covers. *International Mathematics Research Notices (IMRN)*, 2009(3), 512–546. <http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnn138>
- Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Hedden, M. (2010). Notions of positivity and the Ozsváth-Szabó concordance invariant. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 19(5), 617–629. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216510008017>
- Hutchings, M. (2011). *Cup product and intersection*. [Notes de cours]. Récupéré de <https://math.berkeley.edu/~hutching/teach/215b-2011/cup.pdf>
- Jabuka, S. (s. d.). *Pretzel knots, concordance and Heegard Floer homology*.
- Kauffman, L. H. (1974). Branched coverings, open books and knot periodicity. *Topology*, 13(2), 143–160. [http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383\(74\)90005-6](http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(74)90005-6)
- Kauffman, L. H. (1987). *On knots*. Princeton, NJ. : Princeton University Press.
- Kronheimer, P. B. et Mrowka, T. S. (1993). Gauge theory for embedded surfaces, I. *Topology*, 32(4), 773–826. [http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383\(93\)90005-6](http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(93)90005-6)

90051-V

- Lickorish, W. B. R. (1997). *An introduction to knot theory*. New York, NY. : Springer-Verlag.
- Livingston, C. (1993). *Knot Theory*. Washington, DC. : Mathematical Association of America.
- Massey, W. S. (1967). *Algebraic topology : an introduction*. New York, NY. : Springer.
- May, J. P. (1999). *A concise course in algebraic topology*. Chicago, IL. : University of Chicago Press.
- Milnor, J. (1968). Infinite cyclic coverings. Dans J. G. Hocking (dir.). *Conference on the Topology of Manifolds*, volume 13, 115–133. Boston, MA. : Prindle, Weber & Schmidt.
- Ozsváth, P. et Szabó, Z. (2004). Holomorphic disks and genus bounds. *Geometry & Topology*, 8(1), 311–334. <http://dx.doi.org/10.2140/gt.2004.8.311>
- Ozsváth, P. et Szabó, Z. (2006). An introduction to Heegaard Floer homology. Dans D. A. Ellwood, P. S. Ozsváth, A. I. Stipsicz, et Z. Szabó (dir.). *Floer homology, gauge theory, and low-dimensional topology : Proceedings of the Clay Institute 2004 Summer School, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary, June 5-26, 2004*, volume 5, 3–27. Providence, RI. : American Mathematical Society.
- Plamenevskaya, O. (2004). Bounds for the Thurston–Bennequin number from Floer homology. *Algebraic & Geometric Topology*, 4(1), 399–406. <http://dx.doi.org/10.2140/agt.2004.4.399>
- Rolfsen, D. (1976). *Knots and links*. Berkeley, CA. : Publish or Perish, Inc.
- Rudolph, L. (1983a). Algebraic functions and closed braids. *Topology*, 22(2), 191–202. [http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383\(83\)90031-9](http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(83)90031-9)
- Rudolph, L. (1983b). Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 58(1), 1–37. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02564622>
- Rudolph, L. (1992). A characterization of quasipositive Seifert surfaces (constructions of quasipositive knots and links, III). *Topology*, 31(2), 231–237. [http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383\(92\)90017-C](http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(92)90017-C)
- Rudolph, L. (1993). Quasipositivity as an obstruction to sliceness. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 29(1), 51–59. <http://dx.doi.org/10.1090/>

S0273-0979-1993-00397-5

- Rudolph, L. (1999). Positive links are strongly quasipositive. *Geometry and Topology Monographs*, 2, 555–562. <http://dx.doi.org/10.2140/gtm.1999.2.555>
- Rudolph, L. (2001). Quasipositive pretzels. *Topology and its Applications*, 115(1), 115–123. [http://dx.doi.org/10.1016/S0166-8641\(00\)00051-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0166-8641(00)00051-1)
- Rudolph, L. (2005). Knot theory of complex plane curves. Dans W. Menasco et M. Thistlethwaite (dir.). *Handbook of knot theory*, 349–427. <http://dx.doi.org/10.1016/B978-044451452-3/50009-5>
- Rudolph, L. (2015). Some 3-dimensional transverse \mathbb{C} -links (constructions of higher-dimensional \mathbb{C} -links, I). *Geometry & Topology Monographs*, 19, 367–413. <http://dx.doi.org/10.2140/gtm.2015.19.367>
- Serre, J.-P. (1973). *A Course in Arithmetic*. New-York, NY. : Springer-Verlag.
- Szabó, Z. (2009). Lecture notes on Heegard Floer homology. Dans T. S. Mrowka et P. S. Ozsváth (dir.). *Low Dimensional Topology : Proceedings of the Graduate Summer School program of the IAS/Park City Mathematics Institutes, Park City, UT., June 25–July 15*, volume 15, 199–228. Providence, RI. : American Mathematical Society.
- Tanaka, T. (1998). Four-genera of quasipositive knots. *Topology and its Applications*, 83(3), 187–192. [http://dx.doi.org/10.1016/S0166-8641\(97\)00110-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0166-8641(97)00110-7)
- Van der Blij, F. (1959). An invariant of quadratic forms mod 8. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 62, 291–293. [http://dx.doi.org/10.1016/S1385-7258\(59\)50032-3](http://dx.doi.org/10.1016/S1385-7258(59)50032-3)