

13

Calcul Infinitésimal en Géométrie Différentielle Synthétique

LUC BÉLAIR / Department of Mathematics, Yale University, New Haven,
Connecticut

GONZALO E. REYES / Departement de Mathematiques et de Statistique,
Université de Montreal, Montreal, Quebec, Canada

Nous présenterons ici quelques résultats reliés au calcul infinitésimal dans le contexte de la Géométrie différentielle synthétique (GDS). Le but de cette théorie est de donner une axiomatisation intrinsèque, directe ou naïve de la Géométrie différentielle afin de rendre explicite les raisonnements synthétiques employés par Darboux, Lie, Cartan et d'autres.

Kock (1981) décrit ce raisonnement comme étant celui qui "deals with space forms in terms of their structure, i.e., the basic geometric and conceptual constructions that can be performed on them".

Le tableau suivant essaie de présenter quelques traits caractéristiques des raisonnements synthétique et analytique:

Cette recherche a été subventionnée, en partie, par le Ministère de l'Éducation du Québec et le Conseil de recherches en sciences et en génie du Canada.

synthétique	analytique
manipulation directe ("algébrique") des objets géométriques	manipulation analytique des représentations des objets géométriques
logique naïve	logique classique
arithmétique infinitésimale	limite

Les sections §1, §2, §4 rappellent brièvement les notions de calcul infinitésimal utilisées. Dans les sections §5, §6, nous n'avons souvent qu'adapté les calculs classiques à notre contexte. Ces calculs se révèlent alors comme étant constructifs. On pourra trouver les détails de ces calculs ainsi que les preuves des théorèmes employés dans Bélaïr (1981).

En appendice on trouvera une preuve synthétique d'une version infinitésimale du théorème de Gauss-Bonnet et un dictionnaire définissant les notions de base du langage synthétique en termes des notions classiques des fonctions lisses et des idéaux de telles fonctions.

§.0

La droite réelle dont nous disposons est un anneau local ordonné $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1, > \rangle$ i.e. un anneau unitaire commutatif où: si $x + y \neq 0$ alors $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ ($x \neq 0 := x$ est inversible), $<$ est un ordre compatible avec la structure d'anneau, et $x \neq 0$ ssi $x < 0$ ou $x > 0$.

La définition $x \leq 0 := \neg(x > 0)$ donne un pré-ordre compatible avec $<$ et la structure d'anneau, tel que $[0, 0]$ contient tous les nilpotents.

Ces propriétés de R suffisent à englober la majeure partie des situations ci-dessous bien qu'une fraction de celles-ci sied souvent à un aspect donné. Par exemple, l'introduction du calcul différentiel ne requiert qu'un anneau unitaire commutatif, l'intégration que l'ajout d'un pré-order \leq tel que $[0,0]$ contient les nilpotents.

§1. LE CALCUL DIFFERENTIAL

On obtient une notion de dérivée en demandant que R soit un objet de type ligne. D désigne les éléments de carré nul i.e. $\{x \in R: x^2 = 0\}$, "les infiniments petits de 1^{er} order".

1.1 Axiome de Kock-Lawvere (Dans l'infiniment petit toute courbe est une droite).

$$\forall f: D \rightarrow R \quad \exists ! a, b \in R, \quad \forall d \in D \quad f(d) = a + bd.$$

Si $f: R \rightarrow R$, $x \in R$, alors $f(x+ -): D \rightarrow R$, donc par l'axiome il existe a, b uniques tels que $f(x+d) = a + bd$ pour $d \in D$.

On voit que $a = f(x)$; on définit $f'(x) := b$ ainsi

$$f(x+d) = f(x) + df'(x).$$

Les règles habituelles de calcul sont valides: $(f+g)' = f' + g'$ etc. De façon analogue les dérivées partielles et directionnelles d'une fonction $f: R^m \rightarrow R^m$ sont définies; toute fonction est C^∞ .

Si R est un anneau de Fermat au sens où pour $f: R \rightarrow R$

$$F(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{possède une unique extension } \partial f: R^2 \rightarrow R, \quad \text{on}$$

a tout une autre notion de dérivée: $f'(x) := \partial f(x,x)$. On peut alors

formuler une règle de l'Hospital comme suit. Soient $f, g: R \rightarrow R$ tels que

$f(0) = 0 = g(0)$, $\partial g(x,0) \neq 0$ pour tout x , alors il existe un

$$\text{unique } h: R \rightarrow R \quad \text{t.g. } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } h(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

on montre que la règle de l'Hospital est vérifiée si et seulement si pour tout $F: R \rightarrow R$, si $F(0) = 0$ et $F(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$, alors F est identiquement nulle. Dans notre contexte, cette condition et l'axiome d'intégration (c.f. §2) assurent que R est un anneau de Fermat.

§2. LE CALCUL INTEGRAL

Les primitives permettent d'intégrer.

2.1 Axiome d'intégration. (Toute fonction admet une primitive)

$$\forall f: [0,1] \rightarrow R, \exists! g: [0,1] \rightarrow R, g' = f \wedge g(0) = 0$$

On définit alors $\int_0^x f(t) dt := g(x)$ où g est donné par

l'axiome et les bonnes propriétés de \int_0^1 s'ensuivent immédiatement.

2.2 Proposition.

$$(1) \quad \int_0^1 a f(t) dt = a \int_0^1 f(t) dt, \quad a \in R$$

$$(2) \quad \int_0^1 (f + g)(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 g(t) dt$$

$$(3) \quad f(b) - f(a) = (b - a) \int_0^1 f'(a + (b - a)t) dt$$

i.e. le lemme d'Hadamard

$$(4) \quad \frac{d}{ds} \int_0^1 f(s, t) dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) dt$$

$$(5) \quad \int_0^1 f'(t)g(t) dt = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 f(t)g'(t) dt$$

démonstration: par l'unicité dans 2.1: on considère les deux membre

de l'égalité comme fonctions sur $[0,1]$ et on vérifie qu'elles ont même dérivée et coïncident en 0. \square

2.3 Proposition. (\mathbb{R} est connexe).

Soit $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f' = 0$ sûr $[a,b]$ alors f est constante.

L'intégration est bien définie sur tous les intervalles de \mathbb{R} : l'axiome d'intégration sur $[0,1]$ donne une propriété analogue sûr tous les intervalles (bien sûr les propriétés de $<$ et \leq jouent ici beaucoup). Ces extensions de \int_0^1 , toutes compatibles entre elles, héritent de ses propriétés.

Par exemple,
$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(a+(b-a)t) dt$$

2.4 Proposition.

(1) Soit $a \leq b \leq c$
$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$$

(2) Soit $a_1 \leq b_1$,
$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y) dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y) dx \right) dy$$

(3) Soit $g: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$, $f: [a,b] \cong \mathbb{R}$ t.g. $f(a) = c$

$$\int_a^{f(t)} g(x) dx = \int_0^t g \circ f(x) f'(x) dx$$

(4)
$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

(5)
$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^{n+1} \int_0^1 \dots \int_0^1 f^{(n+1)}(xu_1 \dots u_{n+1}) u_n \dots u_1^n du_1 \dots du_n$$

Le comportement numérique de l'intégrale prend un sens grâce à l'axiome suivant.

2.5 Axiome de positivité de l'intégrale.

$$\forall f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad ((\forall x \in [0,1] \quad f(x) > 0) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt > 0)$$

Ce dernier s'étend bien à tout intervalle $[a,b]$ par le lemme d'Hadamard. La positivité de \int sur les intervalles ouverts n'est pas immédiate. En effet on a recours à $(f(a)f(b) < 0) \rightarrow \exists (\forall t \in [a,b] \quad f(t) \neq 0)$ qui est valide en supposant \mathbb{R} pythagoricien, ou encore par l'axiome dit de la valeur intermédiaire transversale (cf. §.3)

2.6 Axiome. (\mathbb{R} est pythagoricien)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x > 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{R} \quad y > 0 \wedge y^2 = x).$$

2.7 Proposition.

Soit $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f(a)f(b) \leq 0$ alors $\exists (\forall t \in [a,b] \quad f(t) \neq 0)$.

démonstration: On considère $F(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{(f^2(x))}}$ et on utilise la connexité au sens de 2.3 \square

2.8 Corollaire.

$$\text{Si } f > 0 \text{ sur } (a,b) \text{ alors } \int_a^b f(t) dt > 0.$$

§.3 LES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

L'existence d'une solution au système d'équations différentielles classique suffit à donner l'unicité et les propriétés élémentaires des solutions.

3.1 Axiome d'existence des fonctions trigonométriques.

$$\exists u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u' = v \wedge v' = -u \wedge u(0) = 0 \wedge v(0) = 1.$$

3.2 Proposition.

- (1) Pour u, v comme dans l'axiome, $u^2 + v^2 = 1$
- (2) Le couple (u, v) de l'axiome est unique. On note
 $\sin := u, \quad \cos := v.$
- (3) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$
- (4) \cos est une fonction paire, \sin impaire.

démonstration: les preuves habituelles. \square

Pour introduire $\pi/2$, le premier zéro positif de \cos , on a recours à une propriété analogue au théorème de la valeur intermédiaire. Celle-ci en diffère toutefois un peu car il n'est pas vérifié dans plusieurs modèles.

3.3 Axiome de la valeur intermédiaire transversale.

$$\forall f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ((f(0)f(1) < 0 \wedge \forall x \in (0, 1) (f(x) = 0 \rightarrow f'(x) \neq 0)) \\ \rightarrow \exists c \in (0, 1) (f(c) = 0 \wedge \forall x \in (0, c) f(0)f(x) > 0))$$

L'axiome dit que si une fonction change de signe sur un intervalle et ne peut couper l'axe que transversalement, alors elle le coupe une première fois.

3.4 Proposition.

- (1) Unicité de la valeur intermédiaire transversale.
- (2) $\cos 2 < 0.$

De (3.4) découle l'existence de $\pi/2$ comme premier zéro positif de \cos au sens de l'axiome (3.3).

3.5 Proposition.

- (1) $\sin \pi/2 = 1$
- (2) 2π est une période de \sin et \cos
- (3) $\cos x > 0$ pour $-\pi/2 < x < \pi/2$
- (4) $1 < \pi/2 < 2$.

Pour illustrer certain type d'argument utilisé ici voyons qu'étant donné $\cos x > 0$ pour tout $0 < x < 1$, alors $1 \leq \pi/2$ i.e. $\neg(1 > \pi/2)$. Supposons $1 > \frac{\pi}{2}$, on pose $f(t) = -t + \frac{\pi}{2}$, alors $f(0)f(1) < 0$ et $f'(t) = -1 \neq 0$. Il existe donc $0 < t_0 < 1$ t.g. $t_0 = \frac{\pi}{2}$ par l'axiome de la valeur intermédiaire transversale, ce qui contredit notre première hypothèse $\cos t_0 > 0$.

3.6 Proposition.

- (1) $\sin: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-1, 1)$ est un isomorphisme, l'inverse étant

$$\arcsin t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

- (2) $\text{cis}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\text{cis}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, est surjectif. En fait $\text{cis}: \left(-\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow S^1$ l'est.
- (3) 2π est la plus petite période de \cos au sens où si T est une période de \cos et $-\frac{5\pi}{2} < T < \frac{5\pi}{2}$ alors $T = 0$ ou $T = 2\pi$ ou $T = -2$.
- (4) $f: \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ se factorise par $\text{cis}: \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow S^1$ si et seulement si $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

§.4 FORMES ET INTEGRATION

On ne rappellera ici que les définitions et les résultats clés. Le lecteur est invité à consulter Kock-Reyes-Veit (1980) ou Kock (1981).

Les formes sont des fonctions de poids sur les voisinages infinitésimaux des points d'un objet. De tels voisinages sont donnés par des applications $\gamma: D^n \rightarrow M$. On définit une intégration sur les cubes infinitésimaux $c \in M^{D^n} \times D^n$ qu'on prolonge ensuite à des cubes finis $c \in M^{I^n}$, $I = [0,1]$, par "sommation" de toutes les intégrations infinitésimales.

4.1 Définition.

- (1) Les n-cubes infinitésimaux sur $M := M^{D^n} \times D^n$
- (2) Les n-chaînes infinitésimales sur $M := C_n(M)$, la notion habituelle de R-combinaison linéaire formelle de n-cubes infinitésimaux.
- (3) Les n-cochaînes sur $M := C^n(M)$, les $\omega: M^{D^n} \rightarrow R$ avec $(a\omega)(c) = a.\omega(c)$, $a \in R$.
- (4) $\int: C_n(M) \times C^n(M) \rightarrow R$, définie par linéarité sur les n-cubes infinitésimaux $\langle c, \underline{d} \rangle$, $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n): \int_{\langle c, \underline{d} \rangle} \omega := d_1 \dots d_n \omega(c)$
- (5) Un n-cube infinitésimal $\langle c, \underline{d} \rangle$ est dégénéré si $d_i = 0$ pour un i , $1 \leq i \leq n$.

4.2 Proposition.

Il y a correspondance biunivoque entre les applications $\Omega: C_n(M) \rightarrow R$ qui s'annulent sur les n-cubes infinitésimaux dégénérés et les n-cochaînes $\omega: M^{D^n} \rightarrow R$.

4.3 Definition. $\partial: C_{n+1}(M) \rightarrow C_n(M)$ est définie par linéarité.

Pour $\gamma = \langle c, \underline{d} \rangle$,

$$\partial\gamma = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} F_{i\alpha}(\gamma)$$

où $F_{i\alpha}(\gamma) = \langle c_i(\alpha d_i), \underline{d}(f) \rangle$ et $\underline{d}(f)$ est le n -tuplet obtenu de \underline{d} en enlevant la i -ème composante, e.g. pour $n = 1$, $i = 1$, $c_1(\delta): D \rightarrow M$, $c_1(\delta)(d) = c_1(\delta, d)$, $\underline{d}(f) = d_2$.

Pour une n -cochaîne fixé ω , on a une fonction

$\int_{\partial\gamma} \omega: M^{D^{n+1}} \times D^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ qui s'annule sur les $n+1$ -cubes infinitésimaux dégénérés d'où l'existence d'une $n+1$ -cochaîne Ω_ω entièrement déterminée par ω et telle que $\int_{\partial\gamma} \omega = \int_\gamma \Omega_\omega$.

4.4 Définition. Dans la discussion précédente on définit $d\omega := \Omega_\omega$. Il s'ensuit qu'on a un théorème de Stokes infinitésimal par définition même de $d\omega$, la dérivée extérieure de ω .

4.5 Proposition.

- (1) \int est "fonctoriel" i.e. $\int_\gamma f^* \omega = \int_{f^* \gamma} \omega$.
- (2) $\partial \circ \partial = 0$, $d \circ d = 0$
- (3) ∂, d sont linéaires et fonctoriels.

4.6 Definition. Une forme différentielle sur M est une cochaîne que possède les propriétés

- (1) alternance: $\omega(c \circ D^\pi) = \text{sign}(\pi)\omega(c)$ où π est une permutation, $c \circ D^\pi(d_1, \dots, d_n) = c(d_{\pi(1)}, \dots, d_{\pi(n)})$.
- (2) homogénéité: $\omega(a_k \cdot c) = a\omega(c)$ où $1 \leq k \leq n$, $a_k \cdot c(d_1, \dots, d_n) = c(d_1, \dots, ad_k, \dots, d_n)$.

La dérivée extérieure est fermée sur les formes. Toute n -forme sur \mathbb{R}^m peut s'écrire de la façon canonique habituelle. Par exemple

pour les 2-formes sur \mathbb{R}^2 , $\omega = f(x,y) dx \wedge dy$ ou $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et
pour $c: D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c(d_1, d_2) = p + x_1 d_1 + x_2 d_2 + x_{12} d_1 d_2$$

$$p = (p_1, p_2), \quad x_i = (x_{i1}, x_{i2})$$

$$e: D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad e(d) = (x+ud, y+vd)$$

on a $dx, dy: \mathbb{R}^{2D} \rightarrow \mathbb{R}$, $dx(c) = u$, $dy(e) = v$

$$dx \wedge dy: \mathbb{R}^{2D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad dx \wedge dy(c) = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = \det(x_1, x_2)$$

Intégration des formes sur les chaînes finies

On a les notions analogues de n-cube M , $c \in M^I$, $I = [0,1]$
de n-chaîne, $CI_n(M)$; et de bord ∂ . Si c 'est un l -cube et c_2
un m -cube alors $c_1 \times c_2$ est un $l+m$ -cube et on étend ce produit à
 $CI_n(M)$. On a les 1-cubes $[[a,b]]: I \rightarrow \mathbb{R}$, $[[a,b]](t) = a + (b-a)t$,
 $a \leq b \in \mathbb{R}$, et donc les n-cubes $[[a_1, b_1]] \times \dots \times [[a_n, b_n]]$ appelés
n-rectangles. On définit une relation \sim sur les chaînes telle que
 $[[a,b]] + [[b,c]] \sim [[a,c]]$, $a \leq b \leq c$ de façon à pouvoir ensuite
définir une intégrale des formes sur les chaînes finies, compatible
avec cette relation.

4.7 Proposition. Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ alors $\partial\gamma_1 \sim \partial\gamma_2$.

4.8 Définition. Un n-rectangle $[[a_1, b_1]] \times \dots \times [[a_n, b_n]]$ est
D-petit si $b_i - a_i \in D$ pour tout $1 \leq i \leq n$; dégénéré si
 $b_i - a_i = 0$ pour un $1 \leq i \leq n$.

4.9 Théorème. Soit ϕ une fonction à valeurs dans \mathbb{R} définie sur
les n-rectangles D-petits, qui s'annule sur les n-rectangles dégénérés.
Il existe une extension additive unique $\bar{\phi}$ de ϕ aux n-rectangles,
additive au sens où si $\rho \sim \rho_1 + \rho_2$ alors $\bar{\phi}(\rho) = \bar{\phi}(\rho_1) + \bar{\phi}(\rho_2)$.

C'est ce théorème qui permet d'intégrer les formes sur les chaînes finies. En effet si c est un n -cube, ω une n -forme, alors $c^*\omega$ est une n -forme sur I^n ; on peut donc, par image réciproque, se ramener au cas des n -rectangles. Or nous possédons déjà une intégration sur les n -rectangles D -petits puisqu'on peut les assimiler à des n -cubes infinitésimaux. Pour c et ω donnés cette intégration est une fonction sur les rectangles D -petits satisfaisant les hypothèses du théorème: $\int_c \omega$ sera l'image du rectangle unité $([[0,1]] \times \dots \times [[0,1]])$ par $\bar{\phi}$, en fait

$$\int_c \omega = \int_0^1 \dots \int_0^1 \omega(\langle \delta_1, \dots, \delta_m \rangle \mapsto c(x_1 + \delta_1, \dots, x_m + \delta_m)) dx_1 \dots dx_m$$

4.10 Proposition. Soit c_1, c, ∂ des chaînes.

$$(1) \quad \text{Si } c_1 \sim c_1 + c_2 \text{ alors } \int_c \omega = \int_{c_1} \omega + \int_{c_2} \omega.$$

$$(2) \quad \int_{f_* Y} \omega = \int_Y f^* \omega \quad ;$$

$$(3) \quad \int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

démonstration: (3) il s'agit de vérifier que l'intégration sur les chaînes est compatible avec l'intégration sur les chaînes infinitésimales, le résultat découle du théorème de Stokes infinitésimal. \square

4.11 Proposition.

$$(1) \quad \text{cis}^D: (-\pi, \frac{3\pi}{2})^D \rightarrow (S^1)^D \quad \text{cis}^D(c) = \text{cis} \circ c, \text{ est surjectif.}$$

$$(2) \quad \text{Soit } g: R \rightarrow M \text{ un isomorphisme, } f: M \rightarrow R \text{ une } 0\text{-forme.}$$

Si $df = 0$ alors f est constante.

On dira que e.g. $c: [a,b] \rightarrow M$ est un 1-cube puisqu'on peut considérer $I \xrightarrow{A} [a,b] \xrightarrow{C} M$, A l'application affine évidente.

§.5 LES GROUPE DE COHOMOLOGIE DE DE RHAM

La cohomologie de de Rham est définie de la façon habituelle: soit $\mathcal{K}^n(M) :=$ les n -formes sur M , $F^n(M) = \{\omega \in \mathcal{K}^n(M) : d\omega = 0\}$, les n -formes fermées, $E^n(M) = \{\omega \in \mathcal{K}^n(M) : \exists \alpha \in \mathcal{K}^{n-1}(M) \quad d\alpha = \omega\}$, les n -formes exactes. Ce sont tous des R -modules, et $E^n(M) \subseteq F^n(M)$. Le n -ième groupe de cohomologie de de Rham de M est le R -module quotient $H^n(M) := F^n(M)/E^n(M)$. H^M est fonctoriel de façon contravariante. ..

5.1 Proposition.

- (1) $H^n(\mathbb{R}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$
- (2) $H^2(\mathbb{R}^2) = 0.$

démonstration: la remarque qu'on puisse écrire les formes sur \mathbb{R}^n de la façon cononique habituelle permet d'utiliser les arguments standards.

La calculs subséquents sont adaptés de ceux de Flanders dans "Studies in global geometry and analysis"; le premier cas donnera une idée de l'adaptation des preuves.

5.2 Proposition. $H^1(S^1) = \mathbb{R}, \quad S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$

démonstration: Soit le 1-cube $cis: [0, 2\pi] \rightarrow S^1, \quad cis(t) = (\cos t, \sin t),$
 $\partial cis = cis(2\pi) - cis(0) = 0.$ Considérant $\int_{cis} -: F^1(S^1) \rightarrow \mathbb{R},$ on a $E^1(S^1) \subseteq \ker \int_{cis}$ donc $\exists! f: H^1(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ t.g. $f \circ v = \int_{cis} -$
 où v est la projection canonique. On montre que f est un isomorphisme.

- (i) f est surjectif: soit $\delta\theta$ la forme d'angle sur $S^1,$
 i.e. $\delta\theta = -y dx + x dy.$ Alors $\int_{cis} \delta\theta = 2\pi \neq 0,$ et 2π engendre $\mathbb{R}.$

(ii) f est injectif: si $\int_{\text{cis}} \omega = 0$, pour ω fermée, alors est exacte. Soit $\omega \in F^1(S^1)$ tel que $\int_{\text{cis}} \omega = 0$

$$U^+ = \{(x,y) \in S^1: y > -\frac{1}{2}\}, \quad U^- = \{(x,y) \in S^1: y < \frac{1}{2}\}.$$

Alors $S^1 = U^+ \cup U^-$, $U^+ \cap U^-$ isomorphes à \mathbb{R} . Puisque

$$H^1(\mathbb{R}) = E^1(\mathbb{R}) \quad \text{on a}$$

$$\omega = d\alpha \quad \text{sur } U^+, \quad \text{pour quelque } \alpha: U^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega = d\beta \quad \text{sur } U^-, \quad \text{pour quelque } \beta: U^- \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit $H^+ = \text{cis} \upharpoonright_{[0, \pi]}$, $H^- = \text{cis} \upharpoonright_{[\pi, 2\pi]}$, alors on a

$$\int_{H^+} \omega = \int_{H^+} d\alpha = \int_{H^+} \alpha = \alpha(-1,0) - \alpha(1,0)$$

de même, $\int_{H^-} \omega = \beta(1,0) - \beta(-1,0)$

aussi $0 = \int_{\text{cis}} \omega = \int_{H^+} \omega + \int_{H^-} \omega$ car $[0, 2\pi] \sim [0, \pi] + [\pi, 2\pi]$ donc

$$\alpha(-1,0) - \beta(-1,0) = \alpha(1,0) - \beta(1,0) = k \in \mathbb{R}.$$

Sur $U^+ \cap U^-$, $d(\alpha - \beta) = d\alpha - d\beta = 0$ et $U^+ \cap U^- = A \cup B$,

A, B disjoints isomorphes à \mathbb{R} .

$$\Rightarrow \alpha = \beta + k.$$

Posons $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(z) = \begin{cases} \alpha(z) & \text{si } z \in U^+ \\ \beta(z) + k & \text{si } z \in U^- \end{cases}$.

Comme $(S^1)^D = U^+ \cup U^-$, $d\gamma = \omega$ puisqu'ils coïncident sur un recouvrement de $(S^1)^D$. \square

5.3 Proposition.

(1) $H^1(B^2) = 0$, $B^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(2) $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$.

Ces calculs donnent le théorème de point fixe de Brouwer.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0 := x \cdot x \neq 0$, le produit scalaire habituel.

5.4 Corollaire. Si $f: B^2 \rightarrow B^2$, alors $\exists x \in B^2 \in f(x) \neq x$.

démonstration: l'argument habituel; on utilise le fait suivant:

$a, b \in \mathbb{R}^2$, $b \cdot b \neq 0$, $a \cdot a \leq 1$, $(a - b) \cdot b \leq 1$ alors

$$(a \cdot b)^2 + b \cdot b(1 - a \cdot a) > 0. \quad \square$$

5.5 Proposition.

(1) $H^1(C) = \mathbb{R}$, $C = S^1 \times (-1, 1)$ le cylindre

(2) $H^2(S^2) = \mathbb{R}$, $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,

(3) $H^1(S^2) = 0$

(4) $H^1(\mathbb{P}^2) = 0$ \mathbb{P}^2 le plan projectif.

démonstration: (2) On doit postuler l'existence d'une fonction plate

AXIOME: $\exists F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R} (x < 0 \rightarrow F(x) = 0 \wedge x > 0 \rightarrow F(x) > 0)$.

(4) \mathbb{P}^2 est le coégalisateur de 1_{S^2} et de l'application antipode. \square

§.6 LE DEGRE DE BROUWER D'UNE FONCTION

Pour $f: S^1 \rightarrow S^1$, le calcul $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ permet de définir

le degré de $f: H^1(f)(\delta\theta) = H^1(f)(\delta\theta + E^1(S^1)) = \lambda\delta\theta + E^1(S^1)$ pour un

unique $\lambda \in \mathbb{R}$, par définition $\deg f := \lambda$. En fait $\deg f = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{cis}} f^* \delta\theta$.

6.1 Proposition. Soit $a, b, \theta_0 \in \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow S^1$ tel que

$\text{cis } \theta_0 = f(a)$. Il existe une unique fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\text{cis} \circ F = f$

et $F(a) = \theta_0$.

démonstration: $F(t) = \int_0^t (y'(s)x(s) - x'(s)y(s))ds + \theta_0$, où

$f(s) = (y(s), x(s))$. \square

6.2 Corollaire. ($\deg f$ est entier) Pour $f: S^1 \rightarrow S^1$, $2\pi \deg f$ est une période de cis cad $\text{cis}(2\pi \deg f) = (1, 0)$.

démonstration: soit F tel que $\text{cis} \circ F = f \circ c$ où $c = \text{cis}|_{[0, 2\pi]}$.

$$\begin{aligned} 2\pi \deg f &= \int_c f^* \delta \theta = \int_{c_* [[0, 2\pi]]} f^* \delta \theta \\ &= \int_{[[0, 2\pi]]} c^* f^* \delta \theta = \int_{[[0, 2\pi]]} F^* \text{cis}^* \delta \theta \\ &= \int_{[[0, 2\pi]]} F^* dt = \int_{[[0, 2\pi]]} dF \\ &= F(2\pi) - F(0) \end{aligned}$$

et $\text{cis}(F(2\pi)) = f(c(2\pi)) = f(c(0)) = \text{cis}(F(0))$. \square

6.3 Corollaire. (Invariance homotopique du degré)

Soit $F: [0, 1] \times S^1 \rightarrow S^1$, $\deg(F(0, -)) = \deg(F(1, -))$.

démonstration: Posons $g(t) = \deg(F(t, -)): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$g(t + d) = g(t) + dg'(t)$ pour $d \in D$.

$\Rightarrow \deg(F(t+d, -)) - \deg(F(t, -)) = dg(t)$ est une période de cis .

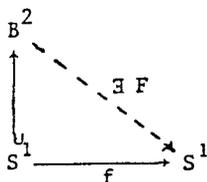
$\Rightarrow \sin(dg'(t)) = dg'(t) = 0$, pour tout $d \in D$

$\Rightarrow g'(t) = 0$

$\Rightarrow g$ est constant. \square

6.4 Proposition.

(1) Si $\begin{array}{ccc} & B^2 & \\ \uparrow & \text{---} & \searrow \exists F \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$ commute alors $\deg f = 0$.



- (2) Si $h: S^1 \rightarrow S^1$ préserve les antipodes alors
 $\text{cis}(\pi \deg h) = (-1, 0)$ i.e. "deg h est impair".

De 6.4 on tire les théorèmes de Gauss-D'Alembert et de Borsuk-Ulam. Soit $C = \mathbb{R}[i]$, $i^2 + 1 = 0$, on écrit $z \neq 0$ pour dire que z est inversible.

6.5 Proposition.

- (1) Soit $p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0$, $n > 1$ un polynôme complexe. Alors $\exists z \in \mathbb{C}$ $p(z) \neq 0$.
- (2) Si $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ alors $\exists x \in S^2$ $f(x) \neq f(-x)$.

§.7 LES COURBES PLANES ET LE THEOREME D'EULER

On développe ici une théorie des courbes planes et on considère ensuite le théorème d'Euler sur la courbure normale des courbes sur une surface.

7.1 Définition. Une courbe γ est une application $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 t.g. $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

Pour une courbe γ , on a l'application "vecteur tangent normalisé"
 $\tau_\gamma: [0,1] \rightarrow S^1$, $\tau_\gamma(s) = \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}$. La courbure est donnée par le
 d'enroulement des vecteurs tangents sur le cercle.

7.2 Définition. Soit γ une courbe, il existe $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que
 $\text{cis} \circ F = \tau_\gamma$, on définit la courbure $K_\gamma(s) = \frac{F'(s)}{\|\gamma'(s)\|}$

7.3 Proposition.

- (1) Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ une courbe $K = \frac{\gamma_1' \gamma_2'' - \gamma_1'' \gamma_2'}{(\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2)^{3/2}}$

- (2) Soit $K: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une courbe γ t.g. $K = K_\gamma$
- (3) Soit γ_1, γ_2 deux courbes t.g. $K_{\gamma_1} = K_{\gamma_2}$, $\|\gamma_1'\| = 1 = \|\gamma_2'\|$,
il existe un unique mouvement euclidien qui envoie γ_1 sur γ_2 .

Ce qui suit est relié au théorème d'Euler. Comme les infinitésimaux de 1^{er} ordre, D_1 , avaient décrit la tangence, les infinitésimaux de 2^{er} ordre, $D_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^3 = 0\}$, décriront la courbure.

7.4 Axiome. (Toute fonction sur D_2 est analytique)

$$\forall f: D_2 \rightarrow \mathbb{R}, \exists! a, b, c \in \mathbb{R}, \forall u \in D_2 \quad f(u) = a + bu + u^2c.$$

Cet axiome nous permet de définir $f'(u) = b + 2uc$, $f''(u) = 2c$.

7.5 Corollaire

$$(1) \quad \text{Pour } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \in D_2, \quad f(x+u) = f(x) + uf'(x) + u^2 \frac{f''(x)}{2}$$

$$(2) \quad \text{Pour } F, G: D_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (FG)'(0) = F'(0)G(0) + F(0)G'(0)$$

$$(F \circ G)'(0) = F'(G(0))G'(0).$$

7.6 Définition. Un arc infinitesimal lié au point $p \in \mathbb{R}^2$ est une application $c: D_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $c(0) = p$, $c'(u) \neq 0$ pour $u \in D_2$.

On a une notion analogue de courbure pour les arcs infinitésimaux, qui est compatible avec la première notion.

7.7 Définition. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ tel que $c+d \in E \quad \forall c, d \in E$
 $\forall d \in D$. $f(x)$ est un maximum (resp. minimum) de f si $f'(x) = 0$ et si pour tout $y \in E$ $f(y) \leq f(x)$ (resp. $f(y) \geq f(x)$).

7.8 Proposition.

- (1) Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$, donné par $f(x, y, z) = 0$, $p \in S$ tel que $f_x(p) \neq 0$ ou $f_y(p) \neq 0$ ou $f_z(p) \neq 0$. Il existe un changement de coordonnées qui envoie S sur $F(X, Y, Z) = 0$ et p à l'origine, de façon à ce que $F_X(0) = 0$, $F_Y(0) = 0$, $F_Z(0) \neq 0$.

- (2) (Théorème des fonctions implicites infinitésimal). Soit $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ comme en (1), alors $\forall \epsilon, \delta \in \mathbb{R} (\epsilon^3 = \delta^3 = \epsilon^2 \delta = \epsilon \delta^2 = 0$
 $\rightarrow \exists ! \eta \in D \quad F(\epsilon, \delta, \eta) = 0$).
- (3) Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ associé à $F(X, Y, Z) = 0$, comme en (1). Si il existent exactement deux valeurs extrêmes $\lambda_1 \neq \lambda_2$ de la courbure des courbes obtenues par l'intersection de S avec des plans parallèles à la normale à la surface en 0 et de direction cis θ alors ces extrema sont atteints dans exactement deux directions perpendiculaire cis θ_1 , cis θ_2 au sens où $\text{cis } \theta_1 \cdot \text{cis } \theta_2 = 0$.
- (4) Soit S et $F(X, Y, Z)$ comme en (3), alors λ_1, λ_2 existent si et seulement si $F_{XX}(0) \neq F_{YY}(0)$ ou $F_{XY}(0) \neq 0$.

Soit $S, F(X, Y, Z)$ comme précédemment, K désigne la courbure normale sur S en 0 i.e. la courbure des courbes obtenues par l'intersection de S avec des plans contenant la normale en 0 .

7.9 Théorème d' Euler. Supposons que R soit un corps au sens de Kock i.e. $\neg (x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \wedge \dots \wedge x_n = 0) \rightarrow (x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \vee \dots \vee x_n \neq 0)$. Si K n'est pas constante ($\neg K = \text{constante}$) alors il existe exactement deux extrema pour K dans exactement deux directions perpendiculaires.

démonstration: $K(\theta) = A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta + 2C \sin \theta \cos \theta$

$$A = \frac{-F_{XX}(0)}{F_Z(0)}, \quad B = \frac{-F_{YY}(0)}{F_Z(0)}, \quad C = \frac{-F_{XY}(0)}{F_Z(0)}$$

et on utilise 7.8. \square

APPENDICE 1

Version infinitésimale de Gauss-Bonnet

On supposera que M a une *structure infinitésimale conforme 2-dimensionnelle* au sens où chaque fibre $\pi^{-1}(x) \subset M^D$ est un \mathbb{R} -module

libre de rang 2 et qu'on dispose d'une mesure pour les angles infiniment petits entre deux vecteurs non nuls de $\pi^{-1}(x)$ telle que $\angle(\gamma, \gamma) = 0$ et $\angle(\gamma_1, \gamma_2) + \angle(\gamma_2, \gamma_3) = \angle(\gamma_1, \gamma_3)$. On notera que $\angle(\gamma_2, \gamma_1) = -\angle(\gamma_1, \gamma_2)$.

Une donnée de *transport parallèle* sur M est une fonction qui associe à chaque $h \in D$ et chaque courbe $\gamma \in M^D$ une bijection

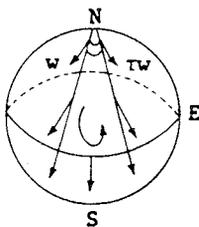
$$\tau_h(\gamma, -) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\gamma(h))$$

telle que

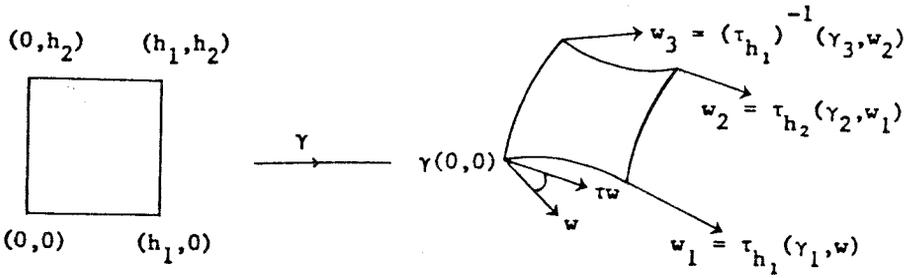
$$\begin{cases} \tau_0(\gamma, \delta) = \delta \\ \tau_h(a\gamma, \delta) = \tau_{ah}(\gamma, \delta), \tau_h(\gamma, a\delta) = a\tau_h(\gamma, \delta) \\ \tau_h \text{ preserve les angles.} \end{cases}$$

Un exemple d'une telle structure est "un espace de Riemann ordonné de dimension 2 avec le transport parallèle canonique".

On peut donner une explication heuristique de la *courbure* d'une surface en termes de l'angle que fait un vecteur* tangent non nul avec le vecteur obtenu par transport parallèle le long d'un cycle "très petit":



Dans notre contexte tout en suivant E. Cartan (Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann), cette explication permet de définir la *forme de courbure* du transport parallèle en identifiant un tel cycle avec un parallélogramme infinitésimal $(\gamma, (h_1, h_2))$



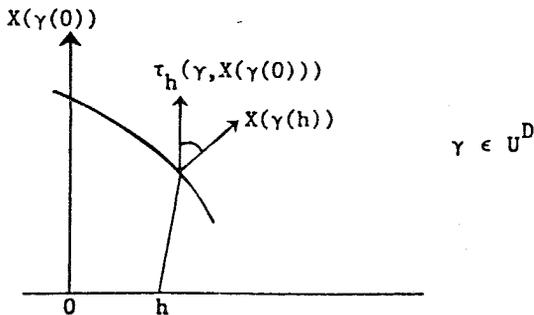
Ici, $\tau w = (\tau_{h_2})^{-1}(\gamma_4, w_3)$, $\gamma_1(h) = \gamma(h,0)$, $\gamma_2(h) = \gamma(h_1, h)$, etc...

On remarque que $\jmath(\tau w, w)$ s'annule quand $h_1 = 0$ et aussi quand $h_2 = 0$. D'autre part, l'axiome de Kock-Lawvere montre que $\jmath(\tau w, w)$ est de la forme $A_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + A_{12} h_1 h_2$. Ces deux remarques impliquent que $A_0 = A_1 = A_2 = 0$. Le nombre A_{12} dépend seulement de γ et on le note $K(\gamma)$, la *forme de courbure*. On notera que $K(\gamma)$ ne dépend pas de w , car le transport parallèle préserve les angles:

$$\jmath(\tau w', w') = \jmath(\tau w', \tau w) + \jmath(\tau w, w) + \jmath(w, w') = \jmath(\tau w, w).$$

En regardant la figure précédente on ne peut pas s'empêcher de voir une intégration le long du bord et la question se pose: existe-t-il une 1-forme ϕ telle que $d\phi = K$? Le théorème de Gauss-Bonnet répond à cette question.

Dans une région ouverte $U \subset M$ pour laquelle il existe un champ de vecteurs non-nuls $X: U \rightarrow U^D$, on considère



et on définit la *forme de connexion* ϕ_X par la formule

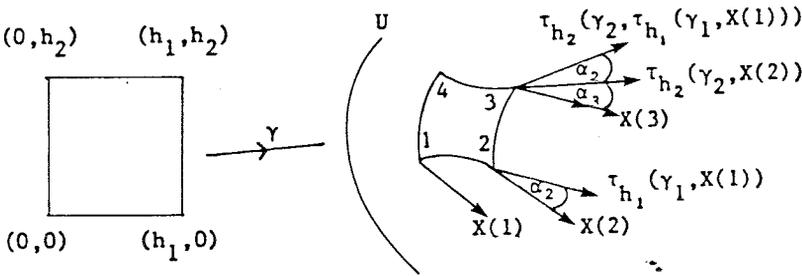
$$\int (\tau_h(\gamma, X(\gamma(0))), X(\gamma(h))) = -h\phi_X(\gamma) = -\int_{(\gamma, h)} \phi_X.$$

Theoreme (Gauss-Bonnet Infinitésimal)

$$d\phi_X = -K$$

En particulier, $d\phi_X$ ne dépend pas du choix du champ de vecteurs non-nuls X .

Preuve. Par observation de la figure suivante



Comme tout à l'heure $\gamma_1(h) = \gamma(h, 0)$, $\gamma_2(h) = \gamma(h_1, h)$,
 $\alpha_4 = \int ((\tau_h)^{-1}(\gamma_3, X(3)), X(4))$, etc... On a

$$\begin{aligned} -\int_{\partial(\gamma, (h_1, h_2))} \phi_X &= -\int_{(\gamma_1, h_1)} \phi_X - \int_{(\gamma_2, h_2)} \phi_X + \int_{(\gamma_3, h_1)} \phi_X + \int_{(\gamma_4, h_2)} \phi_X \\ &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1. \end{aligned}$$

D'autre part, en transportant $X(1)$ le long du cycle 1 2 3 4 1 on "gagne" les degrés suivants par rapport au champ X : α_2 au point 2, $\alpha_2 + \alpha_3$ au point 3, $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ au point 4 et $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1$ au point 1. Autrement dit

$$\int (\tau X(1), X(1)) = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1 = h_1 \cdot h_2 \cdot K(\gamma) = \int_{(\gamma, (h_1, h_2))} K.$$

APPENDICE 2

Dictionnaire d'interprétation

On donne ici une interprétation des notions de base de la théorie synthétique GDS en termes des notions classiques des fonctions lisses et des idéaux de telles fonctions.

Soit $I \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ un idéal (au sens algébrique) de la \mathbb{R} -algèbre des fonctions lisses (cad, possédant des dérivés partielles continues) de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

(1) *Un réel au stade* (n, I) est une classe d'équivalence $f \bmod I$, où $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Les réels sont donc des "réels variables" dépendant lisseusement d'un paramètre.

(2) $0, 1, +, \cdot, -$ *au stade* (n, I) :

$$(f \bmod I) + (g \bmod I) = (f + g) \bmod I$$

$$(f \bmod I) \cdot (g \bmod I) = (f \cdot g) \bmod I$$

$$-(f \bmod I) = -f \bmod I$$

$$1 = 1 \bmod I$$

$$0 = 0 \bmod I$$

(3) *Un réel dans* D *au stade* (n, I) est une classe $f \bmod I$, où $f^2 \in I$.

(4) *Un réel* > 0 *au stade* (n, I) est une classe $f \bmod I$ telle que $\exists g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \chi(f(x)) \cdot g(x) = 1 \bmod I$ où $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction telle que $\chi(x) \neq 0$ ssi $x > 0$.

(5) *Un réel dans* $[0, 1]$ *au stade* (n, I) est une classe $f \bmod I$ telle que $\forall \phi \quad (\phi|_{[0,1]} \equiv 0 \rightarrow \phi(f(x)) \in I)$

(6) *Une fonction dans* \mathbb{R}^R *au stade* (n, I) est donnée par $F \bmod I$, où $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ et I^* est l'idéal dans

$C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ engendré par $\{f \circ \pi \mid f \in I\}$, $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Les fonctions sont, elles aussi, des "fonctions variables de t "
 $F(x,t)$ dépendant lissement du paramètre x .

- (7) Une fonction dans R^D au stade (n,I) est une classe
 $F \text{ mod}(I, t^2)$ où $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.
- (8) Une fonction dans $R^{[0,1]}$ au stade (n,I) est une classe
 $F \text{ mod}(I, \{\phi \mid \phi|_{[0,1]} \equiv 0\})$.
- (9) L'évaluation d'une fonction à un point au stade (n,I) est
donnée par $F(x, f(x)) \text{ mod } I$, où $F(x,t) \text{ mod } I$ est la fonction
et $f(x) \text{ mod } I$ le réel en question.

On remarquera que ce dictionnaire est fonctoriel au sens suivant:
on organise les stades dans une *catégorie*, en définissant une flèche
 $(n,I) \xrightarrow{\phi} (m,J)$ comme étant une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ telle
que $f \circ \phi \circ J$ pour tout $f \in I$. Une fonction dans R^R au stade
 (n,I) définit alors, par composition avec $\phi^* \times \text{Id}$, une fonction
dans R^R au stade (m,J) . La même chose est valide pour les autres
notions.

Pour compléter notre dictionnaire, il faudrait interpréter
aussi les *connecteurs logiques* de la logique naive en termes des
connecteurs de la logique classique. En effet, la logique classique
est incompatible avec l'axiome de Kock-Lawvere (voir e.g. Kock (1981)).
On y arrive en employant le "forcing de faisceaux" (voir e.g. Bélaïr
(1981) ou Kock (1981) pour les détails).

On se contentera ici de vérifier l'axiome de Kock-Lawvere:
une fonction $f \in R^D$ au stade (n,I) est, selon 7), donnée par
 $F(x,t) \text{ mod}(I, t^2)$. En employant le lemme d'Hadamard deux fois, on
obtient $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ telle que

$$F(x, \tau) = F(x, 0) + \tau \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau}(x, 0) + \tau^2 G(x, \tau), \text{ i.e.}$$

$$F(x, \tau) = F(x, 0) + \tau \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau}(x, 0) \text{ mod } (I, \tau^2)$$

Cad, $f(d) = a + bd \quad \forall d \in D.$

L'axiome d'intégration présente des difficultés "analytiques", mais on y arrive en employant le résultat suivant: soit M_X^∞ l'idéal de fonctions plates sur X (cad s'annulant, ainsi que leur dérivées, sur X).

Théorème. Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ sont des fermés, alors

$$M_{X \times Y}^\infty = (M_X^\infty, M_Y^\infty).$$

(Voir Qué-Reyes (1982) pour la preuve et Reyes (1982) pour l'approche "toposopique" qui explique et étend ce dictionnaire).

REFERENCES

- [1] L. Bélair, Calcul Infinitésimal en Géométrie différentielle synthétique, Thèse de maîtrise, Université de Montréal, 1981.
- [2] E. Cartan, Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, 1951.
- [3] S.S. Chern (Ed.), Studies in Global Geometry and Analysis, *MAA Studies in Mathematics*, Vol.4, 1967.
- [4] M.P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, 1976.
- [5] E. Dubuc, C^∞ -schemes, *American Journal of Mathematics*, Vol.103, No.4, 1981.

- [6] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, *London Math. Soc. Lecture Notes Series 51*, Cambridge University Press, 1981.
- [7] A. Kock, G.E. Reyes, B. Veit, *Forms and integration in Synthetic Differential Geometry*, *Aarhus Preprint Series*, 1979/1980, No.31, 1980.
- [8] Ngo van Quê, G.E. Reyes, *Smooth functors and synthetic calculus*, à paraître dans *Brouwer's Centenary Proceedings*.
- [9] G.E. Reyes, *Modèles de la Géométrie différentielle synthétique*, à paraître.