

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

UNE INTRODUCTION À LA CONJECTURE DU VOLUME

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

FANNY DESJARDINS

MARS 2018

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

«Cornichon!... Pirate!... Espèce de logarithme!»

-Capitaine Haddock, Hergé, *Objectif Lune*



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier les personnes suivantes : Jo et Sarah pour l'aide, le support moral et les supers brownies de coloc ; Simon-Pierre pour sa joie de vivre et son ordinateur, sans lequel ce mémoire serait encore en train de compiler ; Maman, Michael et Julie pour l'aide, la relecture, leurs commentaires et les encouragements ; Aram, Émile, Florence, Mélodie, Nadia, Pauline, Stéph et Antoine, aussi connu sous le nom le «stagiaire», pour la guimauve en feu, les courses en patins, les batailles navales et tous les autres chouettes moments ; Mathieu pour son aide généreuse ; Zoé et Antoine pour les jam et l'hébergement ; Karine pour l'écoute et les sushis ; Papa pour ses encouragements et ses nombreuses visites ; Sarah pour son écoute et ses cupcakes ; Lolo pour m'avoir prêté ses jeux vidéos qui m'ont fait procrastiner un peu trop ; Frédéric Gourdeau pour m'avoir fait découvrir ce merveilleux sujet qu'est la théorie des nœuds ; Steven Boyer et Steven Lu pour la relecture et les commentaires ; enfin, Olivier Collin pour m'avoir acceptée comme étudiante à la maîtrise et m'avoir conseillée dans l'écriture de ce mémoire.



## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX . . . . .	vii
LISTE DES FIGURES . . . . .	viii
RÉSUMÉ . . . . .	x
ABSTRACT . . . . .	xi
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
NOTIONS PRÉALABLES DE THÉORIE DES NŒUDS . . . . .	3
1.1 Notions et invariants de base . . . . .	3
1.1.1 Définitions de base . . . . .	4
1.1.2 Équivalence de nœuds . . . . .	5
1.1.3 Diagrammes de nœuds . . . . .	6
1.1.4 Invariants de nœuds . . . . .	7
1.1.5 Mouvements de Reidemeister . . . . .	8
1.1.6 Les trois types de nœuds . . . . .	9
1.1.7 Enchevêtrements . . . . .	12
1.2 Polynômes d'Alexander et de Jones . . . . .	12
1.2.1 Polynôme d'Alexander . . . . .	12
1.2.2 Polynôme de Jones . . . . .	13
CHAPITRE II	
FORMALISME ALGÈBRE POUR LE POLYNÔME DE JONES CO- LORÉ . . . . .	17
2.1 Produit tensoriel . . . . .	18
2.1.1 Espace vectoriel . . . . .	18
2.1.2 Produit tensoriel d'applications linéaires . . . . .	20
2.1.3 Trace . . . . .	21

2.2	Algèbres et coalgèbres . . . . .	22
2.2.1	Algèbres . . . . .	22
2.2.2	Produit tensoriel d'algèbres et algèbre tensorielle . . . . .	24
2.2.3	Coalgèbres . . . . .	25
2.3	Bialgèbres et algèbres de Hopf . . . . .	28
2.3.1	Bialgèbres . . . . .	28
2.3.2	Algèbres de Hopf . . . . .	30
2.4	Algèbres enveloppantes . . . . .	31
2.4.1	Algèbres de Lie . . . . .	31
2.4.2	Algèbres enveloppantes . . . . .	33
2.4.3	Algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . . . . .	35
2.4.4	Algèbre enveloppante quantique de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . . . . .	36
2.4.5	Représentations . . . . .	38
2.5	R-matrices . . . . .	40
2.5.1	Équation de Yang-Baxter . . . . .	40
2.5.2	Bialgèbres tressées . . . . .	41
2.5.3	Construction d'une $R$ -matrice universelle pour $\overline{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ . . . . .	43
2.5.4	De $U_q$ à $U_h$ . . . . .	45
2.5.5	Preuve du théorème 2.38 . . . . .	47
CHAPITRE III		
UNE BRÈVE INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE		56
3.1	Concepts de base . . . . .	57
3.1.1	Modèle de la boule de Poincaré . . . . .	57
3.1.2	Modèle du demi-espace supérieur . . . . .	60
3.2	Tétraèdres idéaux . . . . .	61
3.2.1	Horosphère . . . . .	63
3.2.2	Volume simplicial . . . . .	64

3.3	Calcul du volume pour le nœud figure-huit . . . . .	67
CHAPITRE IV		
POLYNÔME DE JONES COLORÉ ET LA CONJECTURE DU VOLUME		70
4.1	Quelques notions préalables . . . . .	70
4.1.1	Introduction à la théorie des tresses . . . . .	70
4.1.2	Opérateurs de Yang-Baxter augmentés . . . . .	76
4.2	Construction d'un invariant . . . . .	78
4.3	Polynôme de Jones coloré . . . . .	79
4.4	Calcul du polynôme de Jones coloré pour le nœud figure-huit . . . . .	82
4.5	Conjecture du volume . . . . .	89
4.5.1	Conjecture du volume pour le nœud figure-huit . . . . .	90
4.5.2	Nœuds pour lesquels la conjecture du volume est démontrée . . . . .	93
CONCLUSION . . . . .		94
BIBLIOGRAPHIE . . . . .		96



LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
4.1 Tableau de variation de $f(N; k)$ et $g(N; j)$ . . . . .	91



## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Exemples de nœuds . . . . .	4
1.2 Un nœud sauvage . . . . .	4
1.3 Des nœuds équivalents au nœud trivial . . . . .	6
1.4 L'ombre du nœud de trèfle . . . . .	6
1.5 Les mouvements de Reidemeister . . . . .	8
1.6 Exemples de nœud toriques . . . . .	10
1.7 Construction d'un nœud satellite . . . . .	11
1.8 Courbes et disques méridionaux. . . . .	11
1.9 Le nœud (2,1)-câble du nœud figure-huit . . . . .	11
1.10 Un (3,1)-enchevêtrement . . . . .	12
1.11 Relations d'écheveau . . . . .	13
1.12 Calcul du polynôme de Jones du nœud de trèfle . . . . .	14
1.13 Les nœuds de trèfle . . . . .	16
3.1 Une géodésique (en pointillés gris) . . . . .	60
3.2 Les géodésiques du modèle du demi-espace supérieur . . . . .	61
3.3 Le 3-simplexe . . . . .	62
3.4 Un tétraèdre hyperbolique idéal dans $B^3$ . . . . .	62
3.5 Une horosphère centrée en $x$ dans $B^3$ . . . . .	63
3.6 Un tétraèdre idéal dans $U^3$ . . . . .	64
3.7 Nœud (2,1)-câble du nœud figure-huit . . . . .	66

3.8	Décomposition du nœud (2,1)-câble du nœud figure-huit . . . . .	67
3.9	La décomposition du complément du nœud figure-huit en deux tétraèdres hyperboliques idéaux réguliers . . . . .	68
3.10	Collage des deux tétraèdres hyperboliques idéaux . . . . .	69
4.1	Des tresses . . . . .	71
4.2	Le produit de deux tresses . . . . .	71
4.3	Le générateur $\sigma_i$ . . . . .	72
4.4	Les relations du groupe $B_n$ . . . . .	72
4.5	La fermeture d'une tresse . . . . .	73
4.6	Un entrelacs orienté et $O$ un point sur le plan . . . . .	73
4.7	«Redressement» d'un nœud en tresse . . . . .	74
4.8	Création des segments $AE$ , $BE$ , $CF$ et $DF$ . . . . .	74
4.9	Les trois cas possibles . . . . .	75
4.10	Conjugaison, stabilisation et déstabilisation d'une tresse . . . . .	76
4.11	Remplacement d'un générateur par la $R$ -matrice . . . . .	78
4.12	Une tresse et son homomorphisme $\Phi$ . . . . .	78
4.13	Une tresse et son invariant . . . . .	79
4.14	Représentation du nœud trivial par une tresse . . . . .	81
4.15	Fermeture d'une tresse sauf le premier brin . . . . .	83
4.16	Fermeture partielle de la tresse et identification du premier arc . . . . .	84
4.17	Identification des arcs suivants . . . . .	86
4.18	Suite de l'identification des arcs . . . . .	86
4.19	Identification des derniers arcs . . . . .	87
4.20	Nœud figure-huit vu comme la fermeture d'un (1,1)-enchevêtrement. . . . .	88
4.21	La fonction $f(N; k)$ . . . . .	91

## RÉSUMÉ

Le présent mémoire constitue une introduction à la conjecture du volume. D'abord énoncée par Kashaev pour les nœuds hyperboliques, cette conjecture a ensuite été étendue à tous les autres nœuds par Jun et Hitoshi Murakami qui ont utilisé le volume simplicial (ou norme de Gromov) plutôt que le volume hyperbolique.

La conjecture du volume établit qu'une certaine limite du polynôme de Jones coloré d'un nœud est égal au volume du complément du nœud.

Pour énoncer cette conjecture, nous avons eu besoin, entre autres, des notions de  $R$ -matrice et de l'algèbre enveloppante quantique du groupe de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  que nous introduisons en ne supposant connues que quelques notions élémentaires en algèbre linéaire et en algèbre abstraite. Nous présentons par la suite une brève introduction à la géométrie hyperbolique afin de définir les tétraèdres hyperboliques idéaux et le volume simplicial. L'algèbre enveloppante quantique de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , les  $R$ -matrices et des notions en théorie des tresses nous servent ensuite à définir le polynôme de Jones coloré. Ce dernier polynôme et le volume simplicial en main, nous pouvons énoncer la conjecture du volume et faire une démonstration pour le nœud figure-huit.

**Mots-clés :** nœuds, polynôme de Jones coloré, conjecture du volume, géométrie hyperbolique, invariant quantique, algèbre enveloppante quantique,  $R$ -matrices, opérateurs de Yang-Baxter, algèbre de Hopf



## ABSTRACT

**English title:** An Introduction to the Volume Conjecture

This thesis is an introduction to the volume conjecture. This conjecture was first stated by Kashaev for hyperbolic knots, then expanded to all knots by Jun and Hitoshi Murakami by using the simplicial volume (Gromov's norm) instead of the hyperbolic volume.

The volume conjecture states that a certain limit of the colored Jones polynomial of a knot is equal to the volume of the complement of this knot.

To state this conjecture, we need the concept of  $R$ -matrix and of the quantum enveloping algebra of the Lie algebra  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  which we will introduce by supposing that a few basic notions in abstract and linear algebra are known. We will present afterwards a brief introduction to hyperbolic geometry in order to define hyperbolic tetrahedras and the simplicial volume. The quantum enveloping algebra of the Lie algebra  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , the  $R$ -matrices and some concepts of braid theory will then help us to define the colored Jones polynomial. This polynomial and the simplicial volume finally allow us to state the volume conjecture and prove it for the figure-eight knot.

**Keywords:** knots, colored Jones polynomial, volume conjecture, hyperbolic geometry, quantum invariant, quantum enveloping algebras,  $R$ -matrices, Yang-Baxter operator, Hopf algebras.



## INTRODUCTION

En 1995, Kashaev a introduit un invariant d'entrelacs construit à partir du dilogarithme quantique pour un entier  $N > 2$  (Kashaev, 1995). Il a par la suite observé pour plusieurs nœuds hyperboliques que cet invariant semble grandir de façon exponentielle et proportionnelle au volume hyperbolique des compléments des nœuds (Kashaev, 1997). Il suppose que cela est vrai pour tous les nœuds hyperboliques : c'est ce qu'on appelle la conjecture du volume.

Jun et Hitoshi Murakami ont, en 2001, démontré que l'invariant de Kashaev est en fait un cas spécial du polynôme de Jones coloré : ces deux outils sont égaux lorsque  $J_N(K; q)$ , le polynôme de Jones coloré de dimension  $N$  du nœud  $K$  associé à une certaine représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , est évalué en la racine de l'unité  $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$ . Les deux auteurs ont également élargi la conjecture de Kashaev à tous les nœuds en utilisant le volume simplicial plutôt que le volume hyperbolique (Murakami et Murakami, 2001).

Cette conjecture est cruciale en théorie des nœuds. En effet, elle fait le pont entre deux domaines disjoints des mathématiques : les invariants quantiques, qui proviennent des équations de physique mathématique, et la géométrie hyperbolique, qui a une grande importance pour l'étude des espaces de dimension 3 depuis les travaux de Thurston, dans les années 1970. En particulier, si la conjecture est juste, alors tous les nœuds non triviaux et différents entre eux diffèrent au moins par un invariant de Vassiliev de type fini (Murakami et Murakami, 2001, section 5).

Nous présentons d'abord quelques notions de base en théorie des nœuds, puis

amenous des notions algébriques nécessaires à la définition du polynôme de Jones coloré, introduisons la géométrie hyperbolique, définissons le polynôme de Jones coloré et finalement énonçons la conjecture du volume. Nous démontrerons cette dernière pour le nœud figure-huit.

## CHAPITRE I

### NOTIONS PRÉALABLES DE THÉORIE DES NŒUDS

Lorsqu'on entend «théorie des nœuds», on pense immédiatement aux nœuds de marin ou encore aux nœuds d'escalade. Or, ce n'est pas tout à fait ce type de nœuds que l'on considère dans la théorie du même nom en mathématiques. Voyons comment construire le type de nœuds qui nous intéresse. Il faut tout d'abord prendre une corde et faire un nœud de marin quelconque. Il faut ensuite relier et coller de façon imperceptible les deux extrémités de la corde : on obtient ainsi ce que l'on appelle un nœud en mathématiques. Quelques exemples de nœuds sont illustrés à la figure 1.1.

Le présent chapitre est séparé en deux parties. Nous proposons d'abord une introduction à la théorie des nœuds et définissant quelques notions de base. Nous présenterons ensuite le polynôme d'Alexander et le polynôme de Jones.

#### 1.1 Notions et invariants de base

Nous présentons dans les premières sous-section les entrelacs, les équivalences de nœuds, les invariants de nœuds et les mouvements de Reidemeister. Nous présentons dans les autres sous-sections successivement les enchevêtrements, ainsi que les trois types de nœuds dans la sphère  $\mathbb{S}^3$  : les nœuds toriques, satellites et hyperboliques.

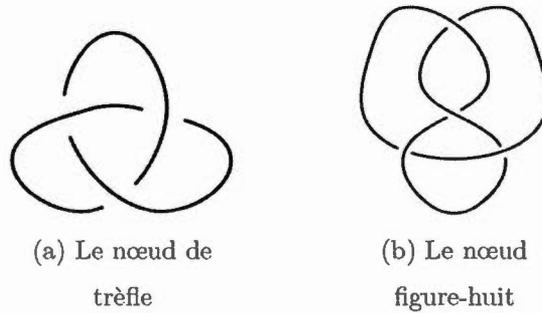


Figure 1.1: Exemples de nœuds

### 1.1.1 Définitions de base

Il existe plusieurs façons de définir ce qu'est un nœud, nous choisirons la suivante pour des raisons qui seront expliquées un peu plus loin.

**Définition 1.** Un *entrelacs* à  $m$  composantes est un sous-espace de  $\mathbb{S}^3$  qui consiste en  $m$  courbes simple fermées, disjointes et linéaires par morceaux. Un entrelacs à une composante est appelé un *nœud*.

La condition de linéarité par morceaux signifie que chaque courbe qui compose  $L$  peut comporter un nombre fini de segments de droites placés bout à bout. Cette condition permet d'exclure les entrelacs contenant une infinité de croisements, entrelacs que l'on appelle *entrelacs sauvages* (figure 1.2). Ces derniers sont un terrain d'étude encore très peu développé. Ce mémoire se concentrera donc uniquement sur l'étude des entrelacs inclus dans la définition 1.

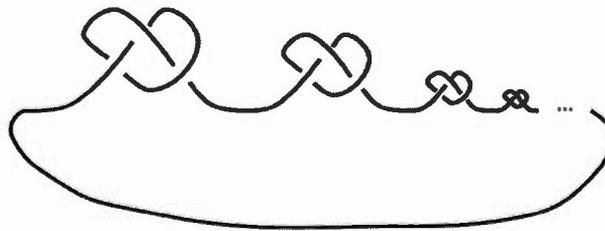


Figure 1.2: Un nœud sauvage

La définition de complément d'un nœud sert à définir beaucoup d'invariants, notion qui sera introduite à la section 1.1.4.

**Définition 2.** Le complément d'un nœud  $K$  est  $\mathbb{S}^3 \setminus K$ .

On peut imaginer le complément d'un nœud comme le complément d'un tube vide autour de ce nœud. Nous utiliserons cette notion au chapitre 3 pour définir le volume simplicial.

### 1.1.2 Équivalence de nœuds

Une des questions importantes en théorie des nœuds est de déterminer si deux nœuds sont topologiquement identiques entre eux. On cherche ainsi à différencier les nœuds de toutes les manières qui soient. Intuitivement, deux nœuds sont équivalents si on peut remuer, emmêler, démmêler, déformer et étirer un nœud en l'autre sans le couper.

**Définition 3.** Deux nœuds  $A$  et  $B$  sont équivalents s'il existe un homéomorphisme  $f$  de  $\mathbb{S}^3$  linéaire par morceaux tel que  $f(A) = B$ .

Dans le cas de nœuds orientés, on demande aussi que  $f$  préserve l'orientation des nœuds et de  $\mathbb{S}^3$ .

Il peut être difficile de reconnaître qu'un nœud est, en fait, équivalent à un autre bien connu. C'est là un des problèmes fondamentaux de la théorie des nœuds. Par exemple, les nœuds des figures 1.3a et 1.3c sont en fait équivalents au nœud trivial (figure 1.3b). Par nœud trivial, il est entendu le plus simple nœud pouvant être représenté comme la frontière d'un 2-disque plongé dans  $\mathbb{S}^3$ .

Ainsi, des classes d'équivalences de nœuds peuvent être définies.

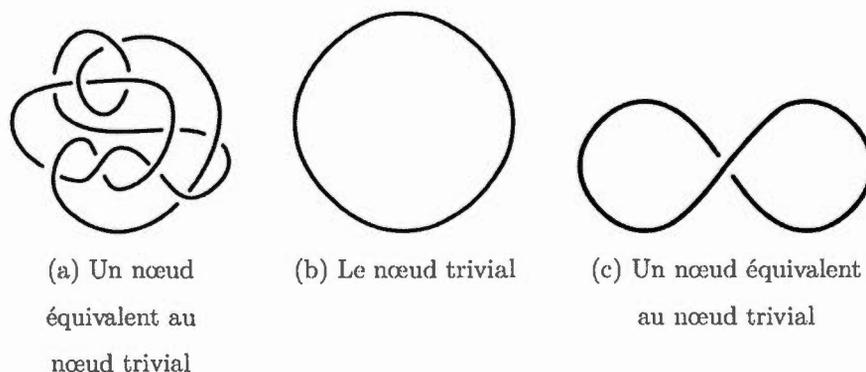


Figure 1.3: Des nœuds équivalents au nœud trivial

### 1.1.3 Diagrammes de nœuds

Un nœud peut être représenté de différentes façons. L'une de ces façons est le diagramme de nœuds, une représentation très pratique pour dessiner ces nœuds.

Afin de faciliter la représentation de nœuds, il est possible de projeter celui-ci sur un plan dans l'espace (figure 1.4). C'est ce qu'on appelle l'*ombre* d'un nœud. Or, une telle projection fait disparaître la notion de sous et de sur-croisement, c'est-à-dire le fait qu'un brin de corde passe par-dessus ou par-dessous un autre. Afin d'éviter toute ambiguïté dans la représentation des nœuds, il est essentiel d'utiliser la notion de projection régulière.

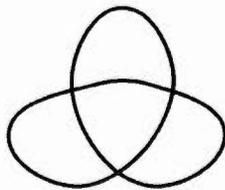


Figure 1.4: L'ombre du nœud de trèfle

**Définition 4.** Une projection  $\phi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  d'un nœud  $K$  est régulière si les deux conditions suivantes sont respectées :

1. au plus deux points sont envoyés au même endroit ;

2. lorsque deux points  $p$  et  $q$  sont tels que  $\phi(p) = \phi(q)$ , alors  $p$  et  $q$  sont des points lisses sur la courbe et les vecteurs tangents non-nuls aux points  $p$  et  $q$  sont envoyés sur des vecteurs linéairement indépendants.

**Définition 5.** On appelle diagramme (régulier) d'un nœud la projection régulière du dit nœud.

Comme il est possible de le constater sur la figure 1.3 à la page 6, un nœud peut donner lieu à plusieurs diagrammes, selon le plan sur lequel sa projection a été faite. Deux nœuds ayant des diagrammes complètement différents peuvent donc être en fait les mêmes, et c'est là où la notion d'invariant de nœuds devient utile : elle permet de distinguer les nœuds différents, sans tenir compte du choix de leurs diagrammes.

#### 1.1.4 Invariants de nœuds

Un invariant de nœuds est une quantité, soit un nombre, un groupe, un polynôme ou un quelconque objet mathématique qui ne change pas lorsqu'on fait subir des déformations continues, non déchirantes à un nœud, c'est-à-dire que cette propriété ne change pas selon les équivalences de nœuds. Afin de montrer que deux nœuds ne sont pas équivalents, il suffit habituellement de trouver un invariant qui a une valeur différente pour chacun de ces nœuds. Toutefois, cette opération ne permet pas de déterminer si deux nœuds visuellement différents sont en fait les mêmes. En d'autres termes, si deux nœuds ont des invariants identiques, cela ne signifie pas pour autant qu'ils sont équivalents. Montrer que deux nœuds sont les mêmes peut donc être une tâche ardue.

Parmi les exemples classiques d'invariants de nœuds figurent le nombre minimal de croisements, la tri-coloration, le genre d'une surface de Seifert, le groupe fondamental du complément d'un nœud et l'invariant de Arf. Pour en apprendre

davantage sur ces invariants, on peut se référer à (Adams, 1994) et (Lickorish, 1997).

### 1.1.5 Mouvements de Reidemeister

Le topologue allemand K. Reidemeister a publié, en 1932, son livre *Knothentheorie* ((Reidemeister, 1948), en anglais) et y a présenté une liste de mouvements que l'on peut effectuer sur des diagrammes de nœuds tout en gardant les nœuds correspondant aux diagrammes équivalents. L'on compte trois de ces mouvements aujourd'hui appelés mouvements de Reidemeister.

Un *mouvement de Reidemeister* est donc une des trois façons de modifier la projection d'un nœud en changeant les croisements du diagramme sans modifier le nœud lui-même (voir figure 1.5).

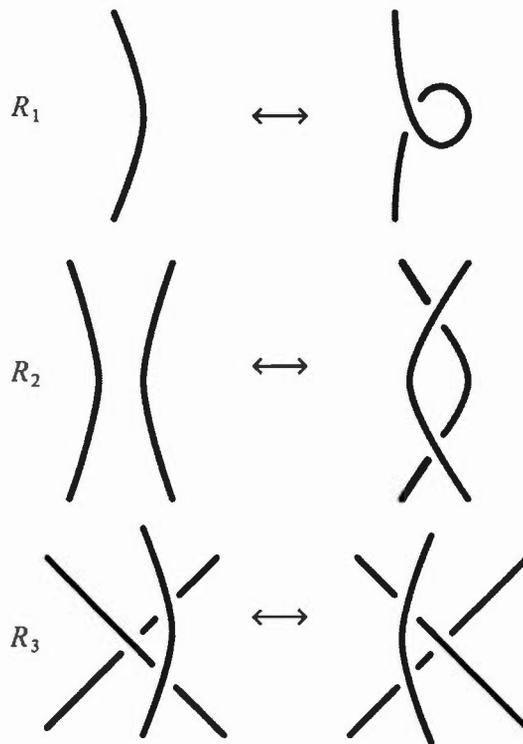


Figure 1.5: Les mouvements de Reidemeister

**Théorème 1.1** (Reidemeister). *Deux diagrammes de nœuds représentent le même nœud si et seulement si l'on peut passer de l'un à l'autre en utilisant un nombre fini de fois les mouvements de Reidemeister.*

*Démonstration.* On peut par exemple consulter (Livingston, 1993) à la page 31.

□

Ce théorème est particulièrement utile lors de démonstrations d'invariance d'objets associés aux nœuds. En effet, pour certains objets utilisant dans leur définition les diagrammes de nœuds, il suffit de montrer qu'ils gardent la même valeur quand ils subissent les mouvements de Reidemeister. Le problème du choix du diagramme pour un nœud est ainsi réglé.

#### 1.1.6 Les trois types de nœuds

Grâce aux travaux de William Thurston en 1978, on sait qu'il existe exactement trois types de nœuds dans  $S^3$  : toriques, satellites et hyperboliques. Chaque nœud appartient à une seule de ces trois catégories.

Un  $(p, q)$ -nœud torique est obtenu en enroulant une corde  $p$  fois autour d'un tore ( $S^1 \times S^1$ ) et  $q$  fois à travers son trou, pour  $p$  et  $q$  des entiers copremiers. Un  $(p, q)$ -nœud torique est équivalent à un  $(q, p)$ -nœud torique. De plus, tous les nœuds toriques avec  $\min\{|p|, |q|\} \geq 2$  sont chiraux, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas équivalents à leur image miroir. Un  $(p, -q)$ -nœud torique est l'image miroir d'un  $(p, q)$ -nœud torique. Quelques exemples de ces nœuds sont illustrés à la figure 1.6.

Les nœuds satellites, quant à eux, sont construits de la façon suivante. Prenons un nœud  $K_1$  compris à l'intérieur d'un tore solide non noué (figure 1.7a). Nouons ce tore en un nœud  $K_2$ . Le nœud  $K_1$  qui se trouvait dans un tore non noué se trouve maintenant dans un tore noué, on appelle ce nouveau nœud  $K_3$  *nœud*

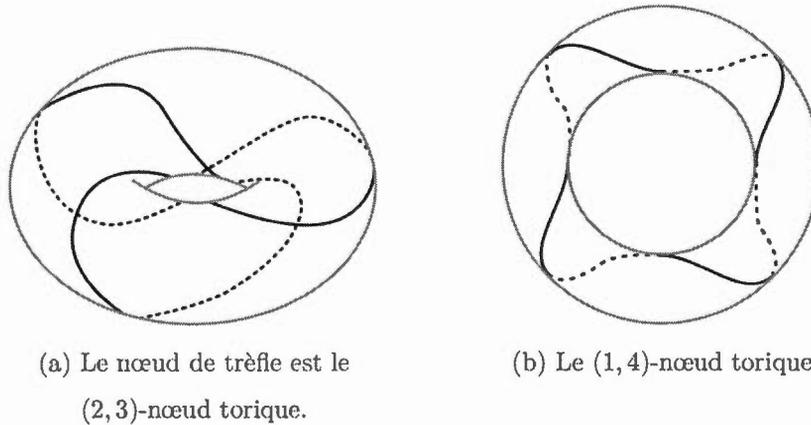


Figure 1.6: Exemples de nœud toriques

*satellite* (figure 1.7b). Le nœud  $K_2$  est appelé un *nœud compagnon* et est supposé non trivial, car autrement, le nœud  $K_3$  ne serait que le nœud  $K_1$ . Un *tore solide* est un tore incluant à la fois sa surface et son intérieur, c'est-à-dire n'importe quelle variété homéomorphe à  $S^1 \times D^2$ . De plus, le nœud  $K_1$  est tel qu'il est ni isotope au noyau du tore solide non noué ni contenu dans une 3-boule dans le tore solide. Le *noyau* du tore solide est une courbe simple fermée  $h(S^1 \times \{a\})$ , où  $h$  est un homéomorphisme de  $S^1 \times D^2$  dans le tore solide et  $a$  est un point dans l'intérieur du disque  $D^2$ . On impose également que  $K_1$  passe par chacun des disques méridionaux du tore solide. Un *disque méridional* est un disque dans le tore solide ayant une courbe méridionale comme frontière (figure 1.8b). On appelle les courbes simples du tore bordant un disque non contenu dans la frontière du tore solide les *courbes méridionales* (figure 1.8a).

Un *nœud  $(p, q)$ -câble* est un nœud satellite formé d'un  $(p, q)$ -nœud torique  $K_1$  et d'un nœud compagnon  $K_2$  (figure 1.9).

Un *nœud hyperbolique* est un nœud dont le complément a une structure hyperbolique. Une telle structure est expliquée au chapitre 3. Le nœud figure-huit, illustré à la figure 1.1b, est un exemple de nœud hyperbolique.

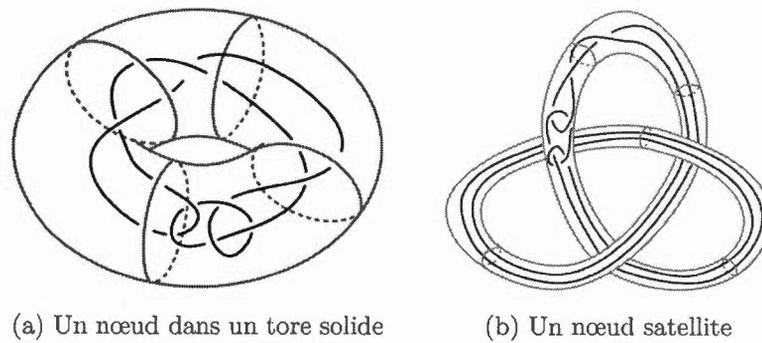


Figure 1.7: Construction d'un nœud satellite

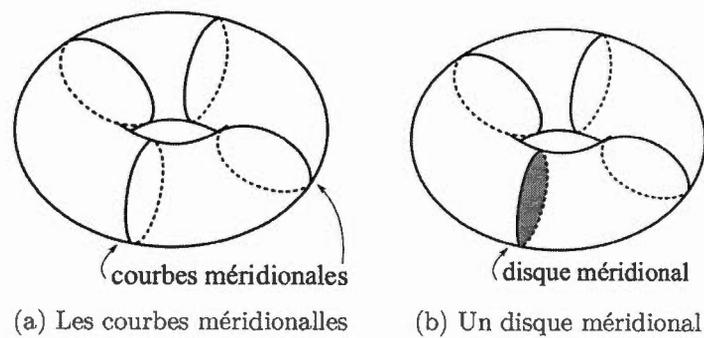
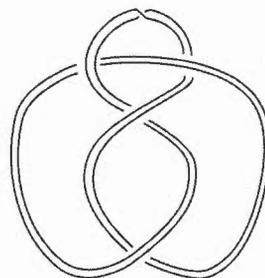


Figure 1.8: Courbes et disques méridionaux.

Figure 1.9: Le nœud  $(2, 1)$ -câble du nœud figure-huit

Pour plus de détails sur les trois catégories de nœud, voir (Adams, 1994).

### 1.1.7 Enchevêtrements

Les entrelacs font partie d'une famille plus générale d'objets : les enchevêtrements. Un *enchevêtrement* est une 1-variété  $T$  proprement plongée dans le cube unité  $I^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ , avec  $\partial T \subset \{\frac{1}{2}\} \times I \times \partial I$ . On définit  $\partial_- T = T \cap (I^2 \times \{0\})$  et  $\partial_+ T = T \cap (I^2 \times \{1\})$  (figure 1.10). On appelle  $T$  un  $(m, n)$ -*enchevêtrement* si  $m = |\partial_- T|$  et  $n = |\partial_+ T|$ . On peut voir les enchevêtrements comme une collection de brins allant d'un ensemble de  $n$  points à un ensemble de  $m$  points. Un entrelacs est donc un  $(0, 0)$ -enchevêtrement.

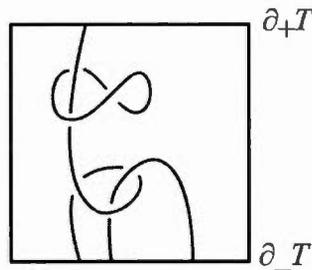


Figure 1.10: Un  $(3, 1)$ -enchevêtrement

## 1.2 Polynômes d'Alexander et de Jones

Les polynômes d'Alexander et de Jones sont tous deux des invariants de nœuds. Ils peuvent être définis de manière plutôt compliquée, mais, pour des raisons de recherche de simplicité, nous nous concentrerons sur leur définition combinatoire qui utilise les diagrammes de nœuds.

### 1.2.1 Polynôme d'Alexander

En 1928, Alexander introduisit le tout premier invariant polynomial de nœuds. Sa définition utilisait des outils mathématiques plutôt abstraits. Il a fallu attendre jusqu'en 1969 pour que John Conway trouve une façon particulièrement simple de le définir.

**Définition 6.** Le polynôme d'Alexander est une application

$$\Delta: \{\text{entrelacs orientés dans } \mathbb{S}^3\} \rightarrow \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}],$$

telle que

$$(a) \Delta(\bigcirc) = 1,$$

$$(b) \Delta(L_+) - \Delta(L_-) - (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) = 0,$$

où  $\bigcirc$  est n'importe quel diagramme du nœud trivial et  $L_+$ ,  $L_-$  et  $L_0$  sont les diagrammes d'écheveau d'entrelacs qui diffèrent en un seul voisinage d'un point (voir figure 1.11). Une démonstration du fait que cette application est bien définie se trouve dans (Livingston, 1993).

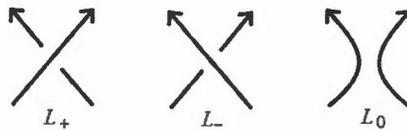


Figure 1.11: Relations d'écheveau

Il est facile de prouver que le polynôme d'Alexander est un invariant de nœuds : il suffit de vérifier qu'il est invariant lorsqu'il subit les trois mouvements de Reidemeister (figure 1.5), on conclut ensuite en utilisant le théorème 1.1.

Le polynôme d'Alexander a été le seul invariant polynomial connu pendant près de 50 ans, jusqu'à ce qu'en 1984 Vaughan Jones découvre, en étudiant les algèbres de von Neumann, le polynôme qui porte maintenant son nom (Jones, 1985). Ce polynôme lui a d'ailleurs mérité une médaille Fields en 1990 pour son énorme contribution à l'avancée de la théorie des nœuds.

### 1.2.2 Polynôme de Jones

Contrairement au polynôme d'Alexander, le polynôme de Jones permet de distinguer un nœud de son image miroir. Après avoir défini ce polynôme, nous présenterons un exemple de calcul avec le nœud de trèfle.

**Définition 7.** Le polynôme de Jones est une application

$$V: \{\text{entrelacs orientés dans } \mathbb{S}^3\} \rightarrow \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}],$$

telle que

(a)  $V(\bigcirc) = 1,$

(b)  $V(L_+) = t^2 V(L_-) + t(t^{1/2} - t^{-1/2}) V(L_0).$

**Exemple 1.** Nous voulons calculer le polynôme de Jones du nœud de trèfle. Afin d'alléger la notation, posons  $z := t^{1/2} - t^{-1/2}$ .

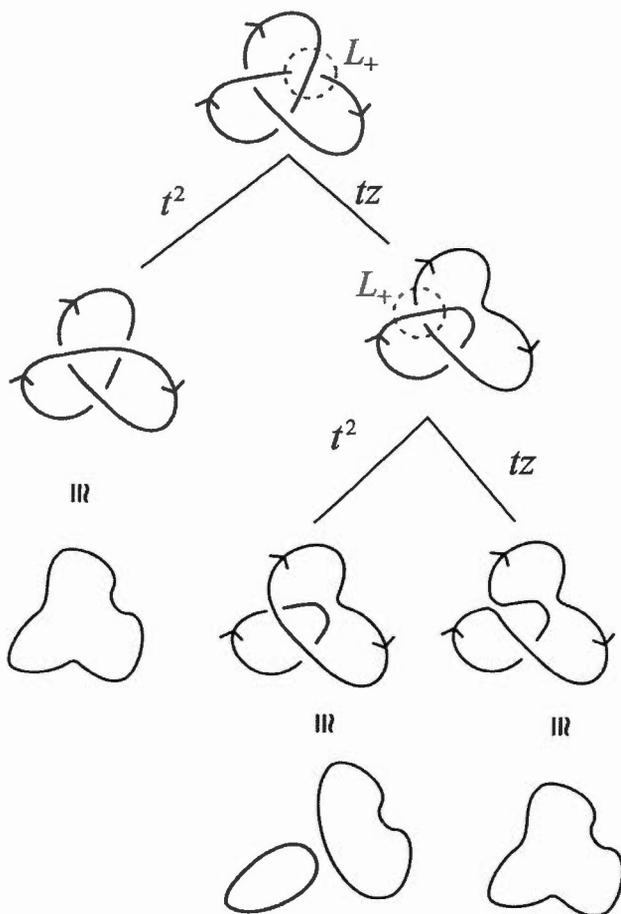


Figure 1.12: Calcul du polynôme de Jones du nœud de trèfle

Par la figure 1.12, on voit que

$$\begin{aligned} V(\text{figure 1.12a}) &= t^2 V(\bigcirc) + tz (t^2 V(\bigcirc \sqcup \bigcirc) + tz V(\bigcirc)) \\ &= t^2 + tz (t^2 V(\bigcirc \sqcup \bigcirc) + tz) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Calculons maintenant le polynôme de Jones de l'entrelacs trivial à deux composantes, c'est-à-dire deux nœuds triviaux disjoints. On a que

$$V(\text{figure 1.12b}) = t^2 V(\text{figure 1.12c}) + t(t^{1/2} - t^{-1/2}) V(\text{figure 1.12d}).$$

Puisque  $V(\bigcirc) = 1$ , on a  $V(\bigcirc \sqcup \bigcirc) = -t^{-1/2} - t^{1/2}$ , où  $\bigcirc \sqcup \bigcirc$  représente l'entrelacs trivial à deux composantes.

Ainsi, l'équation (1.1) devient

$$\begin{aligned} V(\text{figure 1.12a}) &= t^2 + tz (t^2 V(\bigcirc \sqcup \bigcirc) + tz) \\ &= t^2 + tz (t^2 (-t^{-1/2} - t^{1/2}) + tz) \\ &= t^2 + t(t^{1/2} - t^{-1/2}) (t^2 (-t^{-1/2} - t^{1/2}) + t(t^{1/2} - t^{-1/2})) \\ &= t^2 + (t^{3/2} - t^{1/2}) (-t^{3/2} - t^{5/2} + t^{3/2} - t^{1/2}) \\ &= t^2 - t^4 + t^3 + t - t^2 \\ &= -t^4 + t^3 + t. \end{aligned}$$

Le nœud de trèfle étant le  $(2, 3)$ -nœud torique, il est chiral. En effet, il existe deux nœuds de trèfle : celui de droite (figure 1.13b) et celui de gauche (figure 1.13a). Le nœud dont on vient de calculer le polynôme de Jones est le nœud de trèfle de droite. Le polynôme de Jones du nœud de trèfle de gauche est  $V(\text{figure 1.13a}) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$ , résultat facilement obtenu par un calcul similaire à celui fait pour le nœud de trèfle de droite.

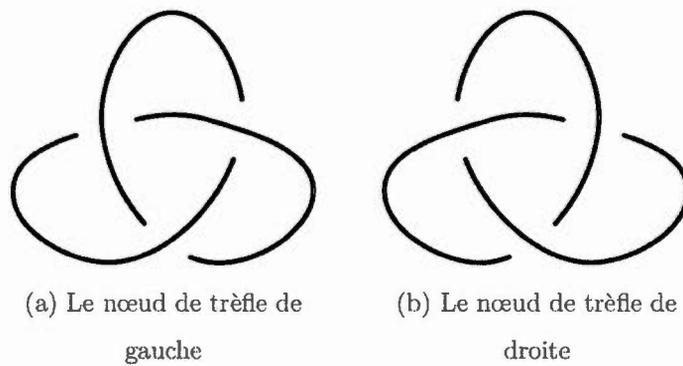


Figure 1.13: Les nœuds de trèfle

Voilà ce qui conclut ce chapitre sur les notions de théorie des nœuds nécessaires à la compréhension des prochains chapitres.

## CHAPITRE II

### FORMALISME ALGÈBRIQUE POUR LE POLYNÔME DE JONES COLORÉ

Les groupes quantiques ont été popularisés grâce aux travaux de Vladimir Drinfeld et de Michio Jimbo en 1985. Ces objets sont une certaine déformation d'une algèbre de Hopf, qui dépend d'un paramètre  $q$  ou  $h$  qu'on appelle une algèbre enveloppante quantique d'un groupe de Lie. Les groupes quantiques ont des liens avec certains domaines des mathématiques et de la physique.

Le but de ce chapitre est de démontrer que la  $R$ -matrice universelle de  $\overline{U}_h(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ , construite à l'aide de toutes ces notions, en est bien une. Ce résultat est ensuite utilisé au chapitre 4 afin de définir des invariants de nœuds.

Ce chapitre est séparé en cinq parties. Nous parlons tout d'abord de produits tensoriels, ensuite d'algèbres et de coalgèbres, de bialgèbres et d'algèbres de Hopf, d'algèbres enveloppantes et, finalement, de  $R$ -matrices. Les notions élémentaires en algèbre linéaire et en algèbre abstraite sont supposées connues.

Pour une lecture plus fluide et une compréhension plus rapide de la conjecture du volume sans se perdre dans ces algèbres compliquées, on peut d'abord lire le chapitre 4, puis revenir à celui-ci.

Toutes les démonstrations des résultats de ce chapitre se trouvent dans (Kassel, 1995), sauf mention contraire.

## 2.1 Produit tensoriel

Dans cette section, nous parlerons tout d'abord du produit tensoriel d'espaces vectoriels, puis du produit tensoriel d'applications linéaires et, finalement, de la trace d'un endomorphisme.

### 2.1.1 Espace vectoriel

Soit  $U$  et  $V$  deux espaces vectoriels sur un corps  $K$ . On note  $\text{Hom}(U, V)$  l'espace des applications linéaires de  $U$  à  $V$ . En particulier,  $\text{End}(V) = \text{Hom}(V, V)$  est l'espace des endomorphismes linéaires de  $V$ . Soit  $W$  un troisième espace vectoriel. On note  $\text{Hom}^{(2)}(U, V; W)$  l'espace des applications bilinéaires de  $U \times V$  à  $W$ .

Le théorème suivant nous permet de définir le produit tensoriel d'espaces vectoriels.

**Théorème 2.1.** *Soit  $U$  et  $V$  deux espaces vectoriels. Il existe un espace vectoriel  $U \otimes V$  et une application bilinéaire  $\varphi_0: U \times V \rightarrow U \otimes V$  telle que pour tout espace  $W$ , l'application linéaire  $f \mapsto f \circ \varphi_0$  qui va de  $\text{Hom}(U \otimes V, W)$  vers  $\text{Hom}^{(2)}(U, V; W)$  est un isomorphisme linéaire. On appelle l'espace vectoriel  $U \otimes V$  le produit tensoriel de  $U$  et  $V$ . Il est unique à isomorphisme près.*

Pour tout  $u, v \in U, V$ , on pose  $u \otimes v = \varphi_0(u, v)$ . Puisque  $\varphi_0$  est bilinéaire, on a les relations suivantes dans  $U \otimes V$  :

1.  $(u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v$
2.  $u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v'$
3.  $\lambda(u \otimes v) = (\lambda u) \otimes v = u \otimes (\lambda v)$

pour tout  $u, u' \in U, v, v' \in V$  et  $\lambda \in K$ .

De plus, tout élément de  $U \otimes V$  peut s'écrire comme une somme finie de la forme  $\sum_{i=1}^p u_i \otimes v_i$ , où  $u_1, \dots, u_p \in U$  et  $v_1, \dots, v_p \in V$ . Une démonstration de ce résultat

et du théorème précédent se trouve dans (Lang, 2002) au chapitre XVI, sections 1 et 2.

**Proposition 2.2.** *Soit  $U$ ,  $V$  et  $W$  des espaces vectoriels. Il existe, dans chacun des cas suivants, un unique isomorphisme tel que*

$$1. (U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$$

$$(u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w)$$

$$2. K \otimes V \cong V \cong V \otimes K$$

$$\lambda \otimes v \mapsto \lambda v \mapsto \lambda v \otimes 1$$

$$3. V \otimes W \cong W \otimes V$$

$$\tau_{V,W}(v \otimes w) \mapsto w \otimes v, \quad \tau_{V,W} \text{ est appelé le } \textit{flip}.$$

*Démonstration.* (Lang, 2002) chapitre XVI, section 1, proposition 1.2 et 1.1.  $\square$

La base du produit tensoriel d'espaces vectoriel est exprimée de la manière suivante :

**Corollaire 2.3.** *Soit  $\{u_i\}_{i \in I}$  une base de l'espace vectoriel  $U$  et  $\{v_j\}_{j \in J}$  une base de  $V$ . L'ensemble  $\{u_i \otimes v_j\}_{(i,j) \in I \times J}$  est une base du produit tensoriel  $U \otimes V$ . De plus,  $\dim(U \otimes V) = \dim(U) \cdot \dim(V)$ .*

*Démonstration.* On peut en trouver une démonstration dans par exemple (Lang, 2002), chapitre XVI, section 2, corollaire 2.4 ou bien (Kassel, 1995, p.25).  $\square$

Nous avons jusqu'à présent défini le produit tensoriel sur des espaces vectoriels. Voyons maintenant le produit tensoriel sur des applications linéaires.

### 2.1.2 Produit tensoriel d'applications linéaires

Soit  $f: U \rightarrow U'$  et  $g: V \rightarrow V'$  des applications linéaires. On définit le *produit tensoriel d'application linéaire*  $f \otimes g: U \otimes V \rightarrow U' \otimes V'$  par

$$(f \otimes g)(u \otimes v) \mapsto f(u) \otimes g(v),$$

pour tout  $u, v \in U, V$ . On obtient ainsi une application linéaire

$$\lambda: \text{Hom}(U, U') \otimes \text{Hom}(V, V') \rightarrow \text{Hom}(V \otimes U, U' \otimes V')$$

définie par

$$(\lambda(f \otimes g))(v \otimes u) \mapsto f(u) \otimes g(v).$$

**Théorème 2.4.** *L'application  $\lambda$  est un isomorphisme si au moins une des paires  $(U, U')$ ,  $(V, V')$  ou  $(U, V)$  est composée d'espaces vectoriels de dimension finie.*

L'espace dual d'un espace vectoriel  $V$ , noté  $V^*$ , est défini par  $V^* = \text{Hom}(V, K)$ .

**Corollaire 2.5.** *L'application  $\lambda: U^* \otimes V^* \rightarrow (V \otimes U)^*$  est un isomorphisme si  $U$  ou  $V$  sont de dimension finie.*

Le prochain corollaire est le cas  $U = V' = K$  du théorème 2.4.

**Corollaire 2.6.** *L'application  $\lambda_{U,V}: V \otimes U^* \rightarrow \text{Hom}(U, V)$  donnée par*

$$\lambda_{U,V}(v \otimes \alpha)(u) = \alpha(u)v,$$

*avec  $u \in U$ ,  $v \in V$  et  $\alpha \in U^*$ , est un isomorphisme si  $U$  ou  $V$  sont de dimension finie. En particulier, si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie, alors l'application  $\lambda_{V,V}$  est un isomorphisme  $V \otimes V^* \cong \text{End}(V)$ .*

Notons que l'application  $\lambda_{U,U'} \otimes \lambda_{V,V'}$  est inversible lorsque soit  $U$  ou  $U'$ , soit  $V$  ou  $V'$  sont de dimension finie. La *composition*  $(g, f) \mapsto g \circ f$  de deux applications linéaires est bilinéaire. Elle nous amène à définir, pour un triplet  $(U, V, W)$  quelconque d'espaces vectoriel, l'application

$$\text{Hom}(V, W) \otimes \text{Hom}(U, V) \xrightarrow{\circ} \text{Hom}(U, W).$$

On définit l'*application évaluation*  $\text{ev}_V: V^* \otimes V \rightarrow K$  par

$$\text{ev}_V(\alpha \otimes v) = \langle \alpha, v \rangle = \alpha(v),$$

pour toute forme linéaire  $\alpha$  et tout vecteur  $v$  de  $V$ . Cette application nous permet d'en définir une autre : la trace.

### 2.1.3 Trace

Tous les espaces vectoriels de cette sous-section sont supposés de dimension finie. Soit  $V$  un tel espace vectoriel. On note  $\{v_i\}_i$  une base de  $V$  et  $\{v^i\}_i$  une base de son espace dual  $V^*$ .

Il est possible de définir la *trace* d'un endomorphisme d'un espace vectoriel à partir de l'isomorphisme  $\lambda_{V,V}$  du corollaire 2.6 : on définit  $\text{tr}: \text{End}(V) \rightarrow K$  comme étant la composition  $\text{End}(V) \xrightarrow{\lambda_{V,V}^{-1}} V \otimes V^* \xrightarrow{\tau_{V,V^*}} V^* \otimes V \xrightarrow{\text{ev}_V} K$ .

Voici quelques propriétés de la trace :

**Proposition 2.7.** *Soit  $f$  et  $g$  des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie  $V$ .*

(a)  $\text{tr}(f \circ g) = \text{tr}(g \circ f)$

(b) Si  $(f_j^i)_{i,j}$  est la matrice de  $f$  dans une base de  $V$ , alors

$$\text{tr}(f) = \sum_i f_i^i.$$

$$(c) \operatorname{tr}(f^*) = \operatorname{tr}(f).$$

Nous nous servons d'une généralisation de la trace dans le chapitre 4 afin de définir des invariants de nœuds et des opérateurs de Yang-Baxter augmentés.

## 2.2 Algèbres et coalgèbres

Les algèbres, le produit tensoriel d'algèbres et les coalgèbres nous servent à définir les bialgèbres dans la prochaine section. L'algèbre tensorielle, quant à elle, nous sert à définir les algèbres enveloppantes à la section 2.4, elle reviendra donc souvent comme exemple tout au long du chapitre.

### 2.2.1 Algèbres

Une algèbre est une structure algébrique composée d'un espace vectoriel, d'une multiplication et d'une unité. On la définit comme suit :

**Définition 8.** Une *algèbre*  $A$  est un triplet  $(A, \mu, \eta)$ , où

- (a)  $A$  est un espace vectoriel sur  $K$
- (b)  $\mu$  est une application d'espaces vectoriel  $\mu: A \otimes A \rightarrow A$ . Elle est associative et satisfait donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes \operatorname{id}} & A \otimes A \\
 \operatorname{id} \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A
 \end{array} \tag{2.1}$$

On note  $m(a \otimes b) = ab$ . L'application  $\mu$  est appelée la *multiplication*.

- (c)  $\eta$  est une application entre espaces vectoriels  $\eta: K \rightarrow A$  telle que

$$a\eta(1) = a = \eta(1)a,$$

c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 K \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes \text{id}} & A \otimes A & \xleftarrow{\text{id} \otimes \eta} & A \otimes K \\
 & \searrow \mathbb{R} & \downarrow \mu & \swarrow \mathbb{R} & \\
 & & A & & 
 \end{array} \tag{2.2}$$

$\eta$  et  $\eta(1)$  sont appelés l'*unité* de  $A$ . Ici,  $1 \in A$ .

Un *morphisme d'algèbres*  $f: (A, \mu, \eta) \rightarrow (A', \mu', \eta')$  est une application linéaire de  $A$  à  $A'$  telle que  $\mu' \circ (f \otimes f) = f \circ \mu$  et  $f \circ \eta = \eta'$ .

**Exemple 2.**  $\mathbb{C}$  est une algèbre sur le corps  $\mathbb{R}$ .

Les deux exemples suivants seront utiles dans le reste du chapitre.

**Exemple 3.** On définit l'*algèbre opposée*  $A^{\text{op}}$  comme l'algèbre ayant le même espace vectoriel que  $A$ , mais avec la multiplication définie comme  $\mu_{A^{\text{op}}} = \mu_A \circ \tau_{A,A}$ , où  $\tau_{A,A}$  est l'application flip définie à la proposition 2.2. Une algèbre est commutative si et seulement si  $\mu_{A^{\text{op}}} = \mu_A$ . En d'autres mots,  $A$  est commutative si et seulement si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{\tau_{A,A}} & A \otimes A \\
 & \searrow \mu & \swarrow \mu \\
 & & A
 \end{array} \tag{2.3}$$

**Exemple 4.** L'espace  $\text{End}(V)$  des endomorphismes linéaires d'un espace vectoriel  $V$  est une algèbre dont la multiplication est la composition et l'unité est l'application identité de  $V$ . En choisissant une base de l'espace vectoriel  $V$ , on obtient  $\text{End}(V) \cong M_n(K)$ , l'algèbre des matrices  $n \times n$  avec entrées dans  $K$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout corps  $K$ .

Les algèbres étant des espaces vectoriels dotés d'une multiplication et d'une unité, il est naturel de se demander s'il est possible de doter également leur produit tensoriel d'une structure d'algèbre.

### 2.2.2 Produit tensoriel d'algèbres et algèbre tensorielle

Soit  $A$  et  $B$  des algèbres. On dote le produit tensoriel  $A \otimes B$  d'une structure d'algèbre par  $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ , où  $a, a' \in A$  et  $b, b' \in B$ . Son unité est  $1 \otimes 1$ .

On définit les morphismes d'algèbres  $i_A: A \rightarrow A \otimes B$  et  $i_B: B \rightarrow A \otimes B$  tels que  $i_A(a) = a \otimes 1$  et  $i_B(b) = 1 \otimes b$ , respectivement. On a ainsi que

$$i_A(a)i_B(b) = (a \otimes 1)(1 \otimes b) = a \otimes b = (1 \otimes b)(a \otimes 1) = i_B(b)i_A(a).$$

L'algèbre  $A \otimes B$  satisfait ce qu'on appelle la *propriété universelle* :

**Proposition 2.8.** *Soit  $f: A \rightarrow C$  et  $g: B \rightarrow C$  des morphismes d'algèbres tels que pour toute paire  $(a, b) \in A \times B$ , l'égalité  $f(a)g(b) = g(b)f(a)$  est vraie dans  $C$ . Alors, il existe un unique morphisme d'algèbres  $f \otimes g: A \otimes B \rightarrow C$  tel que  $(f \otimes g) \circ i_A = f$  et  $(f \otimes g) \circ i_B = g$ .*

Soit  $V$  un espace vectoriel. On définit  $T^0(V) = K$ ,  $T^1(V) = V$  et  $T^m(V) = V^{\otimes m}$ , le produit tensoriel de  $m > 1$  copies de  $V$ . Les isomorphismes canoniques

$$T^n(V) \otimes T^m(V) \cong T^{n+m}(V)$$

induisent un produit associatif sur l'espace vectoriel  $T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V)$ . L'objet  $T(V)$  a donc une structure d'algèbre. On l'appelle l'*algèbre tensorielle* de  $V$ . Le produit est donné par

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(x_{n+1} \otimes \dots \otimes x_{n+m}) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n \otimes x_{n+1} \otimes \dots \otimes x_{n+m}, \quad (2.4)$$

où  $x_i \in V$  pour  $1 \leq i \leq n + m$ . L'unité de  $T(V)$  est l'image de l'unité de  $K = T^0(V)$ .

Il y a une inclusion naturelle de  $V = T^1(V)$  dans  $T(V)$ , en envoyant  $V$  sur le deuxième terme de la somme  $T(V) = K \oplus V \oplus V \otimes V \oplus \dots$ . Les éléments dans l'image de cette inclusion sont dit *primitifs* et génèrent  $T(V)$  en tant qu'algèbre. Nous reviendrons sur les éléments primitifs dans la section 2.3.1.

### 2.2.3 Coalgèbres

En inversant le sens de chacune des flèches de la définition d'une algèbre, on obtient la notion de coalgèbre.

**Définition 9.** Une *coalgèbre*  $C$  est un triplet  $(C, \Delta, \varepsilon)$ , où

- (a)  $C$  est un espace vectoriel sur  $K$
- (b)  $\Delta$  est une application d'espaces vectoriels  $\mu: C \rightarrow C \otimes C$ . Elle est *coassociative*, elle satisfait donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \Delta \\
 C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes \text{id}} & C \otimes C \otimes C
 \end{array} \tag{2.5}$$

$\Delta$  est appelé la *comultiplication*.

- (c)  $\varepsilon$  est une application d'espace vectoriel  $\varepsilon: C \rightarrow K$ . On l'appelle la *co-unité*.  $\varepsilon$  satisfait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 K \otimes C & \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & C \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & C \otimes K \\
 & \searrow \cong & \uparrow \Delta & \swarrow \cong & \\
 & & C & & 
 \end{array} \tag{2.6}$$

Un *morphisme de coalgèbres* est une application linéaire  $f: (C, \Delta, \varepsilon) \rightarrow (C', \Delta', \varepsilon')$  telle que  $(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f$  et  $\varepsilon = \varepsilon' \circ f$ . Voici quelques exemple de coalgèbres :

**Exemple 5.** Le corps  $K$  a une structure de coalgèbre avec  $\Delta(1) = 1 \otimes 1$  et  $\varepsilon(1) = 1$ . De plus, pour toute coalgèbre  $(C, \Delta, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon: C \rightarrow K$  est un morphisme de coalgèbres.

**Exemple 6.** Pour toute coalgèbre  $(C, \Delta, \varepsilon)$ , on pose  $\Delta^{\text{op}} = \tau_{C,C} \circ \Delta$ . La coalgèbre  $(C, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon)$  est appelée la *coalgèbre opposée*. On la note  $C^{\text{cop}}$ . Une coalgèbre est *cocommutative* si et seulement si le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes C & \xrightarrow{\tau_{C,C}} & C \otimes C \\
 & \swarrow \Delta \quad \searrow \Delta & \\
 & C &
 \end{array} \tag{2.7}$$

Les coalgèbres et les algèbres sont reliées, comme le montrent les deux propositions suivantes.

**Proposition 2.9.** *L'espace vectoriel dual d'une coalgèbre est une algèbre.*

**Proposition 2.10.** *Le dual d'un espace vectoriel d'une algèbre de dimension finie a une structure de coalgèbre.*

**Exemple 7.** *Coalgèbre de matrice* Soit  $A = M_n(K)$  l'algèbre des matrices  $n \times n$  avec entrées dans  $K$ . On note  $E_{ij}$  la matrice dont les entrées sont 0 sauf pour  $(i, j)$  qui est égale à 1. L'ensemble des matrices  $E_{ij}$  avec  $1 \leq i, j \leq n$  forme une base de  $M_n(K)$ . Soit  $\{x_{ij}\}$  la base duale. La coalgèbre  $A^*$  est définie par

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^n x_{ik} \otimes x_{kj} \quad \text{et} \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij},$$

où  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$  est le *delta de Kronecker*.

**Exemple 8.** *Produit tensoriel de coalgèbres* Soit  $(C, \Delta, \varepsilon)$  et  $(C', \Delta', \varepsilon')$  deux coalgèbres.  $C \otimes C'$  a une structure de coalgèbre avec multiplication

$$(\text{id} \otimes \tau_{C,C'} \otimes \text{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta')$$

et co-unité  $\varepsilon \otimes \varepsilon'$ .

**Définition 10.** Soit  $(C, \Delta, \varepsilon)$  une coalgèbre. Un sous-espace  $I$  de  $C$  est un *co-idéal* si  $\Delta(I) \subset I \otimes C + C \otimes I$  et  $\varepsilon(I) = 0$ .

Lorsque  $I$  est un co-idéal, les applications

$$\bar{\Delta}: C/I \rightarrow C \otimes C / (I \otimes C + C \otimes I) = C/I \otimes C/I$$

et  $\bar{\varepsilon}: C/I \rightarrow K$  forment une coalgèbre  $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$  appelée la *coalgèbre quotient*.

Introduisons maintenant une notation qui nous sert tout au long du reste du chapitre.

Notation de Sweedler

La notation de Sweedler simplifie grandement les formules et est très utilisée dans les ouvrages traitant d'algèbres de Hopf (nous traiterons de ce sujet à la section 2.3.2). C'est pourquoi nous utiliserons cette notation tout au long du chapitre. Soit  $x$  un élément d'une coalgèbre  $(C, \Delta, \varepsilon)$ . Puisque  $C \otimes C$  est engendré par l'ensemble  $\{x' \otimes x'' : x', x'' \in C\}$ , on peut écrire  $\Delta(x) = \sum_i x'_i \otimes x''_i$  de façon non unique. Afin de se débarrasser des indices, on peut réécrire cette somme comme

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x' \otimes x''. \quad (2.8)$$

En utilisant cette notation, il est possible d'exprimer la coassociativité de  $\Delta$ , c'est-à-dire la commutativité du diagramme (2.5), par

$$\begin{aligned} \sum_{(x)} \left( \sum_{(x')} (x')' \otimes (x')'' \right) \otimes x'' &= \sum_{(x)} x' \otimes \left( \sum_{(x'')} (x'')' \otimes (x'')'' \right) \\ &=: \sum_{(x)} x' \otimes x'' \otimes x'''. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La somme (2.9) peut également être écrite  $\sum_{(x)} x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes x^{(3)}$ . En appliquant la comultiplication  $\Delta$  à l'équation (2.9), on obtient

$$\sum_{(x)} \Delta(x') \otimes x'' \otimes x''' = \sum_{(x)} x' \otimes \Delta(x'') \otimes x''' = \sum_{(x)} x' \otimes x'' \otimes \Delta(x''').$$

Ce qu'on écrit

$$\sum_{(x)} x' \otimes x'' \otimes x''' \otimes x'''' \quad \text{ou} \quad \sum_{(x)} x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes x^{(3)} \otimes x^{(4)}.$$

En utilisant la notation (2.8) et le diagramme (2.6), on a que pour tout  $x \in C$ ,

$$\sum_{(x)} \varepsilon(x')x'' = x = \sum_{(x)} x'\varepsilon(x''). \quad (2.10)$$

Une coalgèbre est cocommutative si, pour tout  $x \in C$ ,

$$\sum_{(x)} x' \otimes x'' = \sum_{(x)} x'' \otimes x'.$$

### 2.3 Bialgèbres et algèbres de Hopf

Les bialgèbres sont des objets qui sont à la fois des algèbres et des coalgèbres. Elles nous servent à définir les algèbres de Hopf dans la deuxième partie de cette section.

#### 2.3.1 Bialgèbres

Soit  $H$  un espace vectoriel équipé à la fois d'une structure d'algèbre  $(H, \mu, \eta)$  et de coalgèbre  $(H, \Delta, \varepsilon)$ . Certaines conditions sont nécessaires afin que les structures d'algèbre et de coalgèbre soient compatibles :

**Théorème 2.11.** *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *Les applications  $\mu$  et  $\eta$  sont des morphismes de coalgèbres.*
2. *Les applications  $\Delta$  et  $\varepsilon$  sont des morphismes d'algèbres.*

Il est maintenant possible de définir une bialgèbre.

**Définition 11.** Une *bialgèbre* est un quintuplet  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ , où  $(H, \mu, \eta)$  est une algèbre et  $(H, \Delta, \varepsilon)$  une coalgèbre, vérifiant les conditions de compatibilité du théorème précédent. Un *morphisme de bialgèbres* est un morphisme pour les structures d'algèbre et de coalgèbre sous-jacentes.

En utilisant la notation de Sweedler, la condition  $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$  est exprimée, pour toute paire  $(x, y)$  d'éléments d'une bialgèbre, par

$$\sum_{(xy)} (xy)' \otimes (xy)'' = \sum_{(x)(y)} x'y' \otimes x''y''.$$

De plus,  $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ ,  $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$  et  $\varepsilon(1) = 1$ .

**Proposition 2.12.** *Si  $H = (H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  est une bialgèbre, alors*

$$H^{\text{op}} = (H, \mu^{\text{op}}, \eta, \Delta, \varepsilon), \quad H^{\text{cop}} = (H, \mu, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon) \quad \text{et} \quad H^{\text{op cop}} = (H, \mu^{\text{op}}, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon)$$

*sont aussi des bialgèbres.*

**Exemple 9.** Par les propositions 2.9 et 2.10, l'espace vectoriel dual  $H^*$  d'une bialgèbre  $H$  de dimension finie a également une structure de bialgèbre.

L'algèbre tensorielle  $T(V)$  définie à la section 2.2.2 possède également une structure de bialgèbre.

**Théorème 2.13.** *Soit  $V$  un espace vectoriel. Il existe une unique structure de bialgèbre sur l'algèbre tensorielle  $T(V)$  telle que pour tout  $v \in V$ ,  $\varepsilon(v) = 0$  et  $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$ . Cette structure de bialgèbre est cocommutative et pour tout  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $\varepsilon(v_1 \dots v_n) = 0$  et*

$$\Delta(v_1 \dots v_n) = 1 \otimes v_1 \dots v_n + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \dots v_{\sigma(n)} + v_1 \dots v_n \otimes 1,$$

*où  $v_1 \dots v_n$  désigne le produit dans  $T(V)$ , c'est-à-dire  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ , et  $\sigma$  parcourt toutes les permutations du groupe symétrique  $S_n$  tel que  $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p)$  et  $\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \dots < \sigma(n)$ . Une telle permutation  $\sigma$  est appelée un  $(p, n-p)$ -shuffle.*

Introduisons maintenant le concept d'élément primitif.

**Définition 12.** Soit  $(C, \Delta, \varepsilon)$  une coalgèbre. Un élément  $x \in C$  est *primitif* si  $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ . On note  $\text{Prim}(C)$  le sous-espace des tous les éléments primitifs de  $C$ .

**Proposition 2.14.** *Si  $x$  est un élément primitif d'une bialgèbre, alors  $\varepsilon(x) = 0$ . Si  $y \in \text{Prim}(C)$  et  $y \neq x$ , alors  $xy - yx$  est aussi primitif.*

Par le théorème 2.13, les générateurs  $v \in V$  de l'algèbre tensorielle  $T(V)$  sont primitifs. Soit  $H$  une bialgèbre et  $x_1, \dots, x_n$  les éléments primitifs de  $H$  et  $V$  un espace vectoriel avec base  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Il existe un unique morphisme d'algèbre  $f: T(V) \rightarrow H$  tel que  $f(v_i) = x_i$  pour tout  $i$ .

**Proposition 2.15.** *L'application  $f: T(V) \rightarrow H$  est un morphisme de bialgèbres.*

Maintenant que les bialgèbres sont définies, il nous est possible de parler d'algèbres de Hopf.

### 2.3.2 Algèbres de Hopf

Soit une algèbre  $(A, \mu, \eta)$ , une coalgèbre  $(C, \Delta, \varepsilon)$  et  $f, g \in \text{Hom}(C, A)$ . La *convolution* est une application bilinéaire  $\star: \text{Hom}(C, A) \rightarrow \text{Hom}(C, A)$  définie comme étant la composition  $C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$ . On la note  $f \star g$ .

En utilisant la notation de Sweedler, on obtient

$$(f \star g)(x) = \sum_{(x)} f(x')g(x''),$$

pour tout  $x \in C$ .

**Proposition 2.16.** (a) *Le triplet  $(\text{Hom}(C, A), \star, \eta \circ \varepsilon)$  est une algèbre.*

(b) *L'application  $\lambda_{C,A}: A \otimes C^* \rightarrow \text{Hom}(C, A)$  du corollaire 2.6 est un morphisme d'algèbre, où  $A \otimes C^*$  est le produit tensoriel de  $A$  et de l'algèbre duale  $C^*$  de  $C$ .*

Lorsque  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  est une bialgèbre, on peut considérer le cas où  $C = A = H$  et ainsi définir la convolution sur  $\text{End}(H)$ .

**Définition 13.** Soit  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  un bialgèbre. Un endomorphisme  $S$  de  $H$  est appelé un *antipode* pour la bialgèbre  $H$  si

$$S \star \text{id}_H = \text{id}_H \star S = \eta \circ \varepsilon.$$

Une *algèbre de Hopf* est une bialgèbre dotée d'un antipode. Un *morphisme d'algèbres de Hopf* est un morphisme de bialgèbres commutant avec les antipodes.

Lorsqu'un antipode  $S$  existe, il est unique. On note une algèbre de Hopf avec antipode par  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ .

**Exemple 10.** L'algèbre tensorielle  $T(V)$  est une algèbre de Hopf avec antipode tel que  $S(1) = 1$  et, pour tout  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ,

$$S(v_1 v_2 \dots v_n) = (-1)^n v_n \dots v_2 v_1.$$

## 2.4 Algèbres enveloppantes

Dans cette section, nous souhaitons étudier l'algèbre enveloppante quantique de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Nous commençons par définir les algèbres de Lie et en donner quelques exemples, puis nous introduisons les algèbres enveloppantes et plus particulièrement l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Pour finir, nous développons l'algèbre enveloppante quantique de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  et parlons de représentations.

### 2.4.1 Algèbres de Lie

Les algèbres de Lie ont été introduites dans les années 1870 par Sophus Lie. Elles apparaissent presque partout en mathématiques et sont utilisées dans certains domaines de la physique.

**Définition 14.** (a) Une *algèbre de Lie*  $L$  est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire  $[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L$  telle que

$$(i) \quad [x, y] = -[y, x] \text{ (antisymmétrie)}$$

$$(ii) \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \text{ (identité de Jacobi)}.$$

$[\cdot, \cdot]$  est appelé le *crochet de Lie*.

(b) Une *sous-algèbre de Lie*  $L'$  d'une algèbre de Lie  $L$  est un sous-espace  $L'$  de  $L$  tel que pour toute paire  $(x, y) \in L' \times L'$ ,  $[x, y] \in L'$ .

(c) Un *idéal*  $I$  d'une algèbre de Lie  $L$  est un sous-espace  $I$  de  $L$  tel que pour tout  $(x, y) \in L \times I$ ,  $[x, y] \in I$ .

(d) Un *morphisme d'algèbres de Lie*  $f: L \rightarrow L'$  est une application linéaire telle que  $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$  pour tout  $x, y \in L$ .

Une algèbre de Lie est abélienne si son crochet de Lie est nul.

Les exemples suivants permettront d'éclaircir ces définitions.

**Exemple 11.** L'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$  est de dimension 4 et les matrices suivantes en forment une base :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices du sous-espace  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  sont les matrices de trace nulle et sont engendrées par  $X, Y$  et  $H$ . Ainsi,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  est un idéal de  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$  grâce aux relations

$$[I, X] = [I, Y] = [I, H] = 0.$$

De plus,  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}I$ , on peut donc restreindre l'étude de  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$  à celle de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

**Exemple 12.** Soit  $L$  et  $L'$  des algèbres de Lie. On munit la somme directe  $L \oplus L'$  d'un crochet de Lie donné par  $[(x, x'), (y, y')] = ([x, y], [x', y'])$ , pour  $x, y \in L$  et

$x', y' \in L'$ . Les projections canoniques de  $L \oplus L'$  dans  $L$  et  $L'$  sont des morphismes d'algèbres de Lie.

**Exemple 13.** L'algèbre de Lie opposée  $L^{\text{op}}$  est l'espace vectoriel  $L$  doté du crochet de Lie  $[x, y]^{\text{op}} = [y, x]$ .

**Exemple 14.** Soit  $I$  un idéal d'une algèbre de Lie  $L$ . Il existe une unique structure d'algèbre de Lie sur le quotient  $L/I$  telle que la projection canonique de  $L$  dans  $L/I$  soit un morphisme d'algèbres de Lie.

**Exemple 15.** Soit  $A$  une algèbre. On pose  $[a, b] = ab - ba$  pour  $a, b \in A$ . Cette application est anti-symétrique, bilinéaire et satisfait l'identité de Jacobi. De plus,  $[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$  pour tout  $a, b, c \in A$ . On note cette algèbre de Lie  $L(A)$ .

**Exemple 16.** Pour tout espace vectoriel  $V$ , on note l'algèbre de Lie  $L(\text{End}(V))$  de tous les endomorphismes de  $V$  par  $\mathfrak{gl}(V)$ . Lorsque  $V$  est de dimension finie  $n$ ,  $\mathfrak{gl}(V)$  est isomorphe à  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = L(M_n(\mathbb{K}))$ , l'algèbre de Lie des matrices  $n \times n$  avec entrées dans  $\mathbb{K}$ . L'algèbre de Lie des matrices carrés  $n \times n$  de trace nulle est noté  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \text{tr}(A) = 0\}$ . Puisque  $\text{tr}([A, B]) = 0$  pour toutes matrices  $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ .

#### 2.4.2 Algèbres enveloppantes

À toute algèbre de Lie  $L$ , on assigne une algèbre de Lie (associative)  $U(L)$ , appelée l'algèbre enveloppante de  $L$ , et un morphisme d'algèbres de Lie  $i_L: L \rightarrow L(U(L))$ .

Soit  $I(L)$  un idéal bilatère de l'algèbre de tenseurs  $T(L)$  généré par tous les éléments de la forme  $xy - yx - [x, y]$ , où  $x, y \in L$ . On définit l'algèbre enveloppante de  $L$  comme  $U(L) = T(L) / I(L)$ . L'application  $i_L$  est la composition de l'inclusion canonique de  $I(L)$  dans  $T(L)$  et de la projection canonique de  $T(L)$  dans  $U(L)$ .

L'algèbre enveloppante  $U(L)$  possède aussi la propriété universelle suivante :

**Théorème 2.17.** *Soit  $L$  une algèbre de Lie. Soit  $A$  une algèbre associative et  $f: L \rightarrow L(A)$  un morphisme d'algèbre de Lie. Il existe un unique morphisme d'algèbre  $\varphi: U(L) \rightarrow A$  tel que  $\varphi \circ i_L = f$ .*

Il en découle les deux corollaires suivants.

**Corollaire 2.18.** (a) *Pour tout morphisme d'algèbres de Lie  $f: L \rightarrow L'$ , il existe un unique morphisme d'algèbres  $U(f): U(L) \rightarrow U(L')$  tel que*

$$U(f) \circ i_L = i_{L'} \circ f.$$

*De plus,  $U(\text{id}_L) = \text{id}_{U(L)}$ .*

(b) *Si  $f: L \rightarrow L'$  est un autre morphisme d'algèbre de Lie, alors*

$$U(f' \circ f) = U(f') \circ U(f).$$

**Corollaire 2.19.** *Soit  $L$  et  $L'$  des algèbres de Lie et  $L \oplus L'$  leur somme directe. Alors  $U(L \oplus L') \cong U(L) \otimes U(L')$ .*

Ces deux corollaires nous permettent de doter  $U(L)$  d'une structure d'algèbre de Hopf, comme le montre la prochaine proposition.

**Proposition 2.20.**  *$U(L)$  est une algèbre de Hopf cocommutative pour les applications  $\Delta$ ,  $\varepsilon$  et  $S$  définies plus bas. Pour  $x_1, \dots, x_n \in L$ ,*

$$\Delta(x_1 \dots x_n) = 1 \otimes x_1 \dots x_n + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)} \otimes x_{\sigma(p+1)} \dots x_{\sigma(n)} + x_1 \dots x_n \otimes 1,$$

*où  $\sigma$  parcourt tous les  $(p, q)$ -shuffles du groupe symétrique  $S_n$  et*

$$S(x_1, \dots, x_n) = (-1)^n x_n \dots x_1.$$

La comultiplication est définie par  $\Delta = \varphi \circ U(\delta)$ , où  $\delta: L \rightarrow L \oplus L$  envoie  $x$  sur  $(x, x)$  et  $\varphi: U(L \oplus L) \rightarrow U(L) \otimes U(L)$  est l'isomorphisme naturel. La co-unité est

donnée par  $\varepsilon = U(0)$ , où 0 est le morphisme allant de  $L$  à l'algèbre de Lie nulle  $\{0\}$ . L'antipode est défini par  $S = U(\text{op})$ , où  $\text{op}(x) = -x$  est un isomorphisme d'algèbres de Lie de  $L$  à  $L^{\text{op}}$ .

Appliquons maintenant ces notions à l'algèbre de Lie  $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

### 2.4.3 Algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Considérons pour le reste du chapitre que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . L'algèbre enveloppante  $U = U(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  est isomorphe à l'algèbre générée par les trois éléments  $X$ ,  $Y$  et  $H$  avec les relations

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad \text{et} \quad [H, Y] = -2Y.$$

Les relations suivantes en découlent facilement par récurrence.

**Lemme 2.21.** *Les relations suivantes sont vraies dans  $U$  pour tout  $p, q \geq 0$  :*

$$X^p H^q = (H - 2p)^q X^p, \quad Y^p H^q = (H + 2p)^q Y^p,$$

$$[X, Y^p] = pY^{p-1}(H - p + 1) = p(H + p - 1)Y^{p-1},$$

$$[X^p, Y] = pX^{p-1}(H + p - 1) = p(H - p + 1)X^{p-1}.$$

Les éléments  $X$ ,  $Y$  et  $H$  forment une base de  $U(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  de la manière suivante.

**Proposition 2.22.** *L'ensemble  $\{X^i, Y^j, H^k\}_{i,j,k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $U(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ .*

Cette dernière proposition est un cas particulier du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Il est possible de déformer les algèbres enveloppantes avec un paramètre  $q$  ou  $h$ , elles deviennent ainsi des algèbres enveloppantes quantiques.

2.4.4 Algèbre enveloppante quantique de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 

Soit  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $q \neq \pm 1$ , c'est-à-dire tel que  $\frac{1}{q-q^{-1}}$  est bien défini. De plus, on suppose que  $q$  est une racine de l'unité. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , posons

$$[n] := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = q^{n-1} + q^{n-3} + \dots + q^{-n+3} + q^{-n+1}.$$

Il est facile de vérifier que  $[-n] = -[n]$  et  $[m+n] = q^n[m] + q^{-m}[n]$ .

Si  $q$  n'était pas une racine de l'unité, on aurait que  $[n] \neq 0$ . Or,  $q$  étant une racine de l'unité, notons  $d$  l'ordre de  $q$ , c'est-à-dire le plus petit  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $q^d = 1$ .

Posons

$$e = \begin{cases} d & d \text{ impair} \\ d/2 & d \text{ pair} \end{cases}.$$

Ainsi,  $[n] = 0 \iff n \equiv 0 \pmod{e}$ . Soit  $0 \leq k \leq n$ . Posons

$$[0]! = 1,$$

$$[k]! = [1][2] \dots [k]$$

si  $k > 0$ , et

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$

**Définition 15.** Soit  $K = q^{H/4}$ . On définit  $U_q = U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  comme étant l'algèbre générée par les 4 variables  $E, F, K$  et  $K^{-1}$  avec les relations

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F$$

et  $[E, F] = \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}$ . On appelle  $U_q$  l'algèbre enveloppante quantique de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

Il est aussi possible de définir l'algèbre  $U_q$  lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité (voir (Kassel, 1995, chap. VI) pour plus de détails sur ce cas), mais nous nous ne servirons que du cas où  $q$  est une racine de l'unité dans cette section.

On obtient ainsi la version  $U_q$  du lemme 2.21.

**Lemme 2.23.** Soit  $m \geq 0$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Les relations suivantes sont vraies dans  $U_q$  :

$$E^m K^n = q^{-2mn} K^n E^m, \quad F^m K^n = q^{2mn} K^n F^m,$$

$$[E, F^m] = [m] F^{m-1} \frac{q^{-(m-1)} K - q^{m-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (2.11)$$

$$= [m] \frac{q^{m-1} K - q^{-(m-1)} K^{-1}}{q - q^{-1}} F^{m-1}, \quad (2.12)$$

$$[E^m, F] = [m] \frac{q^{-(m-1)} K - q^{m-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} E^{m-1} \quad (2.13)$$

$$= [m] E^{m-1} \frac{q^{m-1} K - q^{-(m-1)} K^{-1}}{q - q^{-1}}. \quad (2.14)$$

Tout comme la base de  $U$ , on peut décrire la base de  $U_q$  à l'aide de ses générateurs.

**Proposition 2.24.** L'ensemble  $\{E^i F^j K^l\}_{i,j \in \mathbb{N}; l \in \mathbb{Z}}$  est une base de  $U_q$ .

L'algèbre  $U_q$  est également une algèbre de Hopf.

**Proposition 2.25.** Les relations ci-dessous dotent  $U_q$  d'une structure d'algèbre de Hopf :

$$\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K, \quad \Delta(F) = K^{-1} \otimes F + F \otimes 1,$$

$$\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, \quad \Delta(K) = K \otimes K, \quad \Delta(K^{-1}) = K^{-1} \otimes K^{-1}$$

$$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = \varepsilon(H) = 0, \quad \varepsilon(K) = \varepsilon(K^{-1}) = 1,$$

$$S(E) = -EK^{-1}, \quad S(F) = -KF, \quad S(H) = -H,$$

$$S(K) = K^{-1} \quad \text{et} \quad S(K^{-1}) = K.$$

Lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité, le centre de  $U_q$  est de dimension 1 (voir (Kassel, 1995), théorème VI.4.8). Or, dans le cas où  $q$  est une racine de l'unité, le centre de  $U_q$  est beaucoup plus grand.

**Lemme 2.26.** *Les éléments  $E^e$ ,  $F^e$  et  $K^e$  sont dans le centre de  $U_q$ .*

On obtient ainsi une algèbre quotient de  $U_q$  de dimension finie.

**Définition 16.** L'algèbre  $\overline{U}_q$  est le quotient de l'algèbre  $U_q$  par l'idéal bilatère généré par  $E^e$ ,  $F^e$  et  $K^e - 1$ .

On a la base suivante pour  $\overline{U}_q$ .

**Proposition 2.27.** *L'ensemble  $\{E^i F^j K^l\}_{0 \leq i, j, l \leq e-1}$  est une base de  $\overline{U}_q$ .*

Puisque l'algèbre  $\overline{U}_q$  est de dimension finie, c'est pour elle que nous construisons une  $R$ -matrice universelle à la section 2.5.3. Pour y arriver, nous devons d'abord introduire la notion de représentation.

#### 2.4.5 Représentations

Nous décrivons d'abord les représentations de l'algèbre  $U$ , puis de  $U_q$ .

**Définition 17.** Soit  $A$  une algèbre. Un  $A$ -module à gauche est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire  $(a, v) \mapsto av$  de  $A \times V$  dans  $V$  telle que  $a(a'v) = (aa')v$  et  $1v = v$ , pour tout  $a, a' \in A$  et  $v \in V$ .

L'on peut également définir les  $A$ -modules à droite de façon similaire avec l'application  $V \times A \rightarrow V$ . Puisque un  $A$ -module à droite est un  $A^{\text{op}}$ -module à gauche, nous n'allons considérer que les modules à gauche que nous appellerons des *modules*.

Soit  $V$  et  $V'$  sont des  $A$ -modules. L'application  $f: V \rightarrow V'$  est un *morphisme de  $A$ -modules* si  $f(av) = af(v)$  pour tout  $a \in A$  et  $v \in V$ .

Un  *$A$ -sous-module*  $V'$  d'un  $A$ -module  $V$  est un sous-espace de  $V$  avec une structure de  $A$ -module tel que l'inclusion de  $V'$  dans  $V$  est un morphisme de  $A$ -modules.

L'action de  $A$  sur un  $A$ -module  $V$  définit un morphisme d'algèbres  $\rho: A \rightarrow \text{End}(V)$  par  $\rho(a)(v) = av$ . L'application  $\rho$  est appelée une *représentation* de  $A$  sur  $V$ .

Soit  $V_1, \dots, V_n$  des  $A$ -modules. La somme directe  $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  a une structure de  $A$ -module donnée par  $a(v_1, \dots, v_n) = (av_1, \dots, av_n)$ , avec  $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$  et  $a \in A$ .

**Définition 18.** Un  $A$ -module est *simple* s'il ne possède aucun autre sous-module que lui même et  $\{0\}$ .

Décrivons d'abord les représentations de dimension finie des  $U$ -modules.

**Définition 19.** Soit  $V$  un  $U$ -module et  $\lambda$  un scalaire. Un vecteur  $v \neq 0$  de  $V$  est dit de *poids*  $\lambda \in \mathbb{K}$  si  $Hv = \lambda v$ . Si, de plus,  $Xv = 0$ , alors  $v$  est un *vecteur de plus haut poids de poids*  $\lambda$ .

**Proposition 2.28.** *Tout  $U$ -module  $V$  non nul de dimension finie possède un vecteur de plus haut poids.*

**Lemme 2.29.** *Soit  $v$  un vecteur de plus haut poids de poids  $\lambda$ . Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_p = \frac{1}{p!} Y^p v$ . On a que*

$$Hv_p = (\lambda - 2p)v_p, \quad Xv_p = (\lambda - p + 1)v_{p-1} \quad \text{et} \quad Yv_p = (p + 1)v_{p+1}.$$

Décrivons maintenant les représentations des  $U_q$ -modules.

**Définition 20.** Soit  $V$  un  $U_q$ -module et  $\lambda$  un scalaire. Un élément  $v \neq 0$  de  $V$  est un *vecteur de plus haut poids, de poids*  $\lambda$ , si  $Ev = 0$  et si  $Kv = \lambda v$ . Un  $U_q$ -module

est un *module de plus haut poids*  $\lambda$  s'il est généré par un vecteur de plus haut poids de poids  $\lambda$ .

**Proposition 2.30.** *Tout  $U_q$ -module simple non nul de dimension  $< e$  est isomorphe à un module généré par un vecteur de plus haut poids de poids  $\varepsilon q^n$ , où  $\varepsilon \neq \pm 1$  et  $0 \leq n < e - 1$ . On note ce module  $V_{\varepsilon, n}$ .*

**Lemme 2.31.** *Soit  $v$  un vecteur de plus haut poids de poids  $\lambda$ . On pose  $v_0 = v$  et  $v_p = \frac{1}{[p]!} F^p v$  pour  $p > 0$ . Alors,*

$$Kv_p = \varepsilon q^{n-2p} v_p, \quad Ev_p = \varepsilon [n - p + 1] v_{p-1} \quad \text{et} \quad Fv_{p-1} = [p] v_p. \quad (2.15)$$

## 2.5 R-matrices

Cette section se concentre sur les solutions de l'équation de Yang-Baxter, qu'on appelle les *R-matrices*. Nous introduisons la notion de bialgèbre tressée puis construisons une *R-matrice universelle* pour l'algèbre  $\overline{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ . Pour finir, nous établissons un passage entre  $U_q$  et  $U_h$ , une algèbre dotée de la topologie *h*-adique dont la *R-matrice* nous servira à construire un invariant de nœuds au chapitre 4. Afin d'alléger le texte, la preuve du théorème 2.38, central à cette section, a sa propre sous-section à la toute fin du chapitre.

### 2.5.1  quation de Yang-Baxter

**Définition 21.** Soit  $V$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{C}$ . Un automorphisme linéaire  $c$  de  $V \otimes V$  est une *R-matrice* s'il est solution de l'* quation de Yang-Baxter* :

$$(c \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes c)(c \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes c)(c \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes c). \quad (2.16)$$

Soit  $\{v_i\}_i$  une base de  $V$ . L'automorphisme  $c$  est défini par une famille  $(c_{ij}^{kl})_{i,j,k,l}$  de scalaire déterminés par  $c(v_i \otimes v_j) = \sum_{k,l} c_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l$ .

**Exemple 17.** Pour tout espace vectoriel  $V$  et pour  $\tau_{V,V} \in \text{Aut}(V \otimes V)$  le flip,  $\tau_{v_1, v_2} = v_2 \otimes v_1$ , pour tout  $v_1, v_2 \in V$ . Le flip est donc une *R-matrice*.

### 2.5.2 Bialgèbres tressées

Les bialgèbres tressées nous intéressent, car elles génèrent des solutions à l'équation de Yang-Baxter.

**Définition 22.** Soit  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  une bialgèbre. On dit qu'elle est *quasi-cocommutative* s'il existe un élément inversible  $R$  de l'algèbre  $H \otimes H$  tel que pour tout  $x \in H$ ,

$$\Delta^{\text{op}}(x) = R\Delta(x)R^{-1}. \quad (2.17)$$

Un tel  $R$  est appelé une *R-matrice universelle*.

Toute algèbre cocommutative est quasi-cocommutative avec  $R = 1 \otimes 1$ .

**Définition 23.** Une *algèbre de Hopf quasi-cocommutative* est une algèbre de Hopf dont la bialgèbre possède une *R-matrice universelle*.

**Notation 1.** Soit  $H$  une algèbre et  $X = \sum_i x_i^{(1)} \otimes \dots \otimes x_i^{(p)} \in H^{\otimes p}$ , avec  $p > 1$ . Pour tout  $p$ -tuple  $(k_1, \dots, k_p)$  d'éléments distincts de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $n \geq p$ , on note  $X_{k_1, \dots, k_p}$  l'élément de  $H^{\otimes n}$  donné par

$$X_{k_1, \dots, k_p} = \sum_i y_i^{(1)} \otimes \dots \otimes y_i^{(n)},$$

où  $y_i^{k_j} = x_i^{(j)}$  pour tout  $j \leq p$  et  $y_i^k = 1$  sinon. Dans le cas  $R = \sum_i s_i \otimes t_i$ , on a  $R_{31} = \sum_i t_i \otimes 1 \otimes s_i$ ,  $R_{13} = \sum_i s_i \otimes 1 \otimes t_i$ ,  $R_{12} = \sum_i s_i \otimes t_i$  et  $R_{23} = \sum_i 1 \otimes s_i \otimes t_i$ .

**Définition 24.** Une bialgèbre  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, R)$  quasi-cocommutative ou une algèbre de Hopf quasi-cocommutative  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S^{-1}, S, R)$  est *tressée* si la *R-matrice universelle* satisfait

$$(\Delta \otimes \text{id}_H)(R) = R_{13}R_{23} \quad (2.18)$$

et

$$(\text{id}_H \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}. \quad (2.19)$$

Ces bialgèbres sont aussi parfois appelées *quasi-triangulaires*.

Si  $R = \sum_i s_i \otimes t_i$ , alors les relations (2.18) et (2.19) peuvent être exprimées comme

$$\sum_{i, (s_i)} (s_i)' \otimes (s_i)'' \otimes t_i = \sum_{i, j} s_i \otimes s_j \otimes t_i t_j \quad (2.20)$$

et

$$\sum_{i, (t_i)} s_i \otimes (t_i)' \otimes (t_i)'' = \sum_{i, j} s_i s_j \otimes t_j \otimes t_i. \quad (2.21)$$

**Exemple 18.** Les bialgèbres cocommutatives sont tressées avec  $R = 1 \otimes 1$ .

Les bialgèbres quasi-cocommutatives tressées génèrent des  $R$ -matrices universelles.

**Lemme 2.32.** *Soit  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R)$  une algèbre de Hopf quasi-cocommutative avec antipode bijectif  $S$ .*

- (a) *Alors  $(H, \mu^{\text{op}}, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R^{-1})$ ,  $(H, \mu, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon, S, S^{-1}, R^{-1})$  et  $(H, \mu, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon, S, S^{-1}, \tau_{H,H}(R))$  le sont aussi.*
- (b) *Si de plus  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R)$  est tressée, alors  $(H, \mu, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon, S, S^{-1}, \tau_{H,H}(R))$  l'est aussi.*

**Théorème 2.33.** *Soit  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, R)$  une bialgèbre quasi-cocommutative tressée.*

- (a) *La  $R$ -matrice universelle  $R$  satisfait l'équation  $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$  et  $(\varepsilon \otimes \text{id}_H)(R) = (\text{id}_H \otimes \varepsilon)(R)$ .*
- (b) *Si de plus  $H$  a un antipode bijectif, alors*

$$(S \otimes \text{id}_H)(R) = R^{-1} = (\text{id}_H \otimes S^{-1})(R) \quad \text{et} \quad (S \otimes S)(R) = R.$$

Il existe une solution de l'équation de Yang-Baxter pour tous les modules sur une bialgèbre tressée  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, R)$ . En effet, soit  $V$  et  $W$  deux  $H$ -modules. La  $R$ -matrice universelle  $R$  dans  $H \otimes H$  nous permet de construire un isomorphisme naturel  $C_{V,W}^R$  de  $H$ -modules entre  $V \otimes W$  et  $W \otimes V$ . Cet isomorphisme généralise

le flip  $\tau_{V,W}$  entre les facteurs de  $V$  et  $W$  et est défini pour tout  $v \in V$  et  $w \in W$  par

$$c_{V,W}^R(v \otimes w) = \tau_{V,W}(R(v \otimes w)). \quad (2.22)$$

**Proposition 2.34.** *Avec les hypothèses précédentes,*

(a) *l'application  $c_{V,W}^R$  est un isomorphisme de  $H$ -modules*

(b) *pour tout triplet  $(U, V, W)$  de  $H$ -modules, on a*

$$c_{U \otimes V, W}^R = (c_{U,W}^R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_U \otimes c_{V,W}^R), \quad c_{U, V \otimes W}^R = (\text{id}_V \otimes c_{U,W}^R)(c_{U,V}^R \otimes \text{id}_W)$$

et

$$\begin{aligned} & (c_{V,W}^R \otimes \text{id}_U)(\text{id}_V \otimes c_{U,W}^R)(c_{U,V}^R \otimes \text{id}_W) \\ &= (\text{id}_W \otimes c_{U,V}^R)(c_{U,W}^R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_U \otimes c_{V,W}^R). \end{aligned}$$

En posant  $U = V = W$  dans la partie b) de la proposition, on obtient que  $c_{V,V}^R$  est une solution de l'équation de Yang-Baxter pour tout  $H$ -module  $V$ .

### 2.5.3 Construction d'une $R$ -matrice universelle pour $\overline{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$

Rappelons l'algèbre  $\overline{U}_q = \overline{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  de la définition 16. Le but de cette section est de construire une  $R$ -matrice universelle pour  $\overline{U}_q$ . Dans tout le reste du chapitre, nous supposons que  $q$  est une racine de l'unité d'ordre  $d > 1$  impair dans le corps  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 2.35.**  *$\overline{U}_q$  a une unique structure d'algèbre de Hopf telle que la projection canonique de  $U_q$  à  $\overline{U}_q$  est un morphisme d'algèbres de Hopf.*

Cela veut dire que la comultiplication, la co-unité et l'antipode de  $\overline{U}_q$  sont donnés par les relations de la proposition 2.25.

**Corollaire 2.36.** *L'algèbre de Hopf  $\overline{U}_q$  est tressée.*

On peut ainsi calculer la  $R$ -matrice universelle de  $U_q$ .

**Lemme 2.37.** *La  $R$ -matrice universelle de  $\bar{U}_q$  est de la forme*

$$\bar{R} = \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^k K^j,$$

avec  $c_{i, j, k}$  un scalaire.

Ce dernier lemme nous permet de démontrer le théorème suivant en calculant le scalaire  $c_{i, j, k}$ .

**Théorème 2.38.** *La  $R$ -matrice universelle de  $\bar{U}_q$  est*

$$\bar{R} = \frac{1}{d} \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} \frac{(q - q^{-1})^k}{[k]!} q^{k(k-1)/2 + 2k(i-j) - 2ij} E^k K^i \otimes F^k K^j. \quad (2.23)$$

*Démonstration.* La preuve de ce théorème étant longue et très calculatoire, elle forme en elle-même sa propre sous-section (section 2.5.5).  $\square$

Considérons le  $\bar{U}_q$ -module simple  $V_n = V_{1, n}$ . Il est généré par le vecteur de plus haut poids  $v_0^{(n)}$  de poids  $q^n$ . Rappelons-nous que l'action de  $\bar{U}_q$  sur la base canonique  $\{v_0^{(n)}, \dots, v_n^{(n)}\}$  est donnée par

$$K v_p^{(n)} = q^{n-2p} v_p^{(n)}, \quad E v_p^{(n)} = [n - p + 1] v_{p-1}^{(n)} \quad \text{et} \quad F v_p^{(n)} = [p] v_{p+1}^{(n)} \quad (2.24)$$

et que l'isomorphisme  $c_{V_n, V_m}^{\bar{R}} : V_n \otimes V_m \rightarrow V_m \otimes V_n$  défini en (2.22) est une solution de l'équation de Yang-Baxter.

**Corollaire 2.39.** *L'isomorphisme  $c_{V_n, V_m}^{\bar{R}} : V_n \otimes V_m \rightarrow V_m \otimes V_n$  est l'application  $\bar{U}_q$ -linéaire déterminée par*

$$c_{V_n, V_m}^{\bar{R}}(v_p^{(n)}, v_r^{(m)}) = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \frac{(q - q^{-1})^k}{[k]!} \frac{[n - p + k]! [r + k]!}{[n - p]! [r]!} q_{pr}^{nm}(k, \alpha) v_{r+k}^{(m)} \otimes v_{p-k}^{(n)},$$

où  $\alpha$  est n'importe quel entier tel que  $m + \alpha d$  est pair et

$$q_{pr}^{nm}(k, \alpha) = q^{k(k-1)/2 + k(m-n) - pm - rn - 2(k-p)(k+r) + (m+\alpha d)n/2}.$$

*Démonstration.* En se servant du théorème 2.38 et des relations (2.24), on obtient

$$\bar{c}_{V_n, V_m}^{\bar{R}} = \frac{1}{d} \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} \frac{(q - q^{-1})^k [n - p + k]! [r + k]!}{[k]! [n - p]! [r]!} q^{k(k-1)/2} Q_{pr}^{nm}(k) v_{r+k}^{(m)} \otimes v_{p-k}^{(n)},$$

où

$$Q_{pr}^{nm}(k) = \sum_{0 \leq i, j < d} q^{2k(i-j) - 2ij + i(n-2p) + j(m-2r)}.$$

On peut réécrire  $Q_{pr}^{nm}(k)$  comme

$$Q_{pr}^{nm}(k) = \sum_{0 \leq i < d} q^{2ik + i(n-2p)} \left( \sum_{0 \leq j < d} q^{j(m-2r-2k-2i)} \right).$$

Or, puisque  $q$  est une racine de l'unité d'ordre  $d$ , la somme

$$\sum_{0 \leq j < d} q^{jN}$$

est nulle excepté lorsque  $N$  est un multiple de  $d$ . C'est aussi le cas pour la somme

$$\sum_{0 \leq j < d} q^{j(m-2r-2k-2i)}.$$

Donc

$$Q_{pr}^{nm}(k) = d \sum_{0 \leq i < d} q^{2ik + i(n-2p)},$$

où  $i$  est tel que  $2i = m - 2r - 2k + \alpha d$ , avec  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $d$  est impair, 2 est inversible module  $d$ . Donc, l'entier  $i$  est unique. Par conséquent,

$$Q_{pr}^{nm}(k) = dq^{2ik + i(n-2p)} = dq^{k(m-n) - pm - rn - 2(k-p)(k+r) + (m+\alpha d)n/2}.$$

La dernière égalité est obtenue en remplaçant les  $2i$  par  $m - 2r - 2k + \alpha d$ .  $\square$

#### 2.5.4 De $U_q$ à $U_h$

Il est possible de définir  $U_q$  dans le contexte des algèbres de Drinfeld-Jimbo et de la topologie  $h$ -adique (voir (Kassel, 1995), section XVII.2 à .4 ou (Klimyk et Schmüdgen, 1997)). Soit  $K = \mathbb{C}[[h]]$  l'algèbre complexe des séries formelles complexes en

une variable  $h$ . L'algèbre  $U_h = U_h(\mathfrak{sl}(2, K))$  est la  $K$ -algèbre (topologiquement) générée par les trois variables  $X, Y$  et  $H$  munie des relations  $[H, X] = 2X$ ,  $[H, Y] = 2Y$  et

$$[X, Y] = \frac{\sinh(hH/2)}{\sinh(h/2)} = \frac{e^{hH/2} - e^{-hH/2}}{e^{h/2} - e^{-h/2}}.$$

Ce qui suit fait le lien entre l'algèbre de Hopf  $U_q(\mathfrak{sl}(2, K))$ , définie dans les sections précédentes sur le corps  $\mathbb{C}$ , et  $U_h$ . On suppose que  $q$  n'est pas nécessairement une racine de l'unité. On définit une application d'algèbres de Hopf  $i: U_q \rightarrow U_h$  par  $i(E) = Xe^{hH/4}$ ,  $i(F) = e^{-hH/4}Y$ ,  $i(K) = e^{hH/2}$ ,  $i(K^{-1}) = e^{-hH/2}$  et  $i(q) = e^{h/2}$ , qui est ensuite étendue par linéarité. Comme l'application  $i$  est injective, on peut identifier  $U_q$  avec la sous-algèbre de  $U_h$  générée par  $q = e^{h/2}$ ,  $E = Xe^{hH/4}$ ,  $F = e^{-hH/4}Y$ ,  $K = e^{hH/2}$  et  $K^{-1} = e^{-hH/2}$ .

On veut spécialiser  $U_h$  à  $h = \frac{2\pi i}{r}$ , où  $r > 1$  est un entier fixé. L'algèbre  $U_h$  possédant des séries divergentes, nous nous restreignons à la sous-algèbre sur l'anneau des séries de puissances convergentes de  $U_h$  générée par  $X, Y, K$  et  $K^{-1}$ . De la même façon qu'on a défini  $\overline{U}_q$ , on définit  $\overline{U}_h$  comme le quotient de cette sous-algèbre par la sous-algèbre obtenue en posant  $h = \frac{2\pi i}{r}$ ,  $X^r = 0$ ,  $Y^r = 0$  et  $K^{4r} = 1$ . On a également les relations suivantes dans  $\overline{U}_h$  :

$$KX = sXK, \quad KY = s^{-1}YK \quad \text{et} \quad [X, Y] = \frac{K^2 - K^{-2}}{s - s^{-1}}, \quad (2.25)$$

où  $s = e^{h/2}$ .

La structure d'algèbre de Hopf de  $\overline{U}_h$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= X \otimes K + K^{-1} \otimes X, & \Delta(Y) &= Y \otimes K + K^{-1} \otimes Y, \\ \Delta(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, & \Delta(K) &= K \otimes K, & \Delta(K^{-1}) &= K^{-1} \otimes K^{-1} \\ \varepsilon(E) &= \varepsilon(F) = \varepsilon(H) = 0, & \varepsilon(K) &= \varepsilon(K^{-1}) = 1, \\ S(X) &= -sX, & S(Y) &= -s^{-1}Y, & S(H) &= -H, \end{aligned}$$

$$S(K) = K^{-1} \quad \text{et} \quad S(K^{-1}) = K.$$

**Théorème 2.40.** *L'élément suivant est une R-matrice universelle de  $\bar{U}_h$  :*

$$\bar{R} = \frac{1}{4r} \sum_{i,j,k} \frac{(s-s^{-1})^k}{[k]!} s^{(-ij+(i-j)k-k)/2} X^k K^i \otimes Y^k K^j.$$

La somme parcourt tous les  $0 \leq n < r$  et  $0 \leq a, b < 4r$ .

*Démonstration.* Une preuve très similaire à celle du théorème 2.38 se trouve dans (Kirby et Melvin, 1991, p. 488) au théorème 2.18.  $\square$

**Corollaire 2.41.**  *$\bar{R}$  agit sur le module  $V_n \otimes V_m$  par*

$$R(e_i \otimes e_j) = \sum_k \frac{(s-s^{-1})^k}{[k]!} \frac{[n'+i+k]!}{[n'+i]!} \frac{[m'-j+k]!}{[m'-j]!} s^{2ij-k(i-j)-k(k+1)/2} e_{i+n} \otimes e_{j-n},$$

où  $n = 2n' + 1$  et  $m = 2m' + 1$ . La somme est sur tous les  $k \geq 0$  avec  $i+k \leq n'$  et  $j-k \geq -m'$ .

*Démonstration.* (Kirby et Melvin, 1991, p.491) au corollaire 2.32.  $\square$

### 2.5.5 Preuve du théorème 2.38

Par le lemme 2.37,  $\bar{R}$  est de la forme

$$\bar{R} = \sum_{0 \leq i,j,k \leq d-1} c_{i,j,k} E^k K^i \otimes F^k K^j.$$

Il suffit donc de montrer que

$$c_{i,j,k} = \frac{1}{d} \frac{(q-q^{-1})^k}{[k]!} q^{k(k-1)/2+2k(i-j)-2ij}.$$

Utilisons la relation  $\Delta^{\text{op}}(x)R = R\Delta(x)$ , découlant de l'équation (2.17), avec  $x = E$ , puis  $x = F$ .

Partie a) :

La première étape est de calculer  $\Delta^{\text{op}}(E)R = R\Delta(E)$ . Calculons tout d'abord la partie gauche de l'égalité :

$$\begin{aligned}
\Delta^{\text{op}}(E)R &= (E \otimes 1 + K \otimes E)R && \text{(proposition 2.25)} \\
&= (E \otimes 1 + K \otimes E) \left( \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^k K^j \right) && \text{(lemme 2.37)} \\
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^{k+1} K^i \otimes F^k K^j \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} K E^k K^i \otimes E F^k K^j \\
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^{k+1} K^i \otimes F^k K^j \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2k} c_{i, j, k} E^k K^{i+1} \otimes E F^k K^j. && (2.26)
\end{aligned}$$

L'équation (2.26) découle du lemme 2.23.

Et maintenant, calculons la partie droite :

$$\begin{aligned}
R\Delta(E) &= R(1 \otimes E + E \otimes K) && \text{(proposition 2.25)} \\
&= \left( \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^k K^j \right) (1 \otimes E + E \otimes K) && \text{(lemme 2.37)} \\
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^k K^j E \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i E \otimes F^k K^{j+1} \\
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2j} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^k E K^j \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2i} c_{i, j, k} E^{k+1} K^i \otimes F^k K^{j+1}. && (2.27)
\end{aligned}$$

L'équation (2.27) découle du lemme 2.23.

Posons

$$\mathcal{A} = \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2j} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^k E K^j.$$

Par définition de  $[\cdot, \cdot]$ , on a  $[E, F^k] = EF^k - F^k E$  et donc  $F^k E = EF^k - [E, F^k]$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2j} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes (EF^k - [E, F^k]) K^j \\ &= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2j} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes EF^k K^j \\ &\quad - \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2j} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes [E, F^k] K^j. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Posons

$$\mathcal{B} = \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2j} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes [E, F^k] K^j.$$

Par la relation (2.11), on sait que

$$\begin{aligned} [E, F^k] &= [k] F^{k-1} \frac{q^{-(k-1)} K - q^{k-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} \\ &= [k] F^{k-1} \frac{q^{-(k-1)} K}{q - q^{-1}} - [k] F^{k-1} \frac{q^{k-1} K^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2j} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes \left( [k] F^{k-1} \frac{q^{-(k-1)} K}{q - q^{-1}} - [k] F^{k-1} \frac{q^{k-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} \right) K^j \\ &= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2j} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes \left( [k] F^{k-1} \frac{q^{-(k-1)} K}{q - q^{-1}} \right) K^j \\ &\quad - \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2j} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes \left( [k] F^{k-1} \frac{q^{k-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} \right) K^j \\ &= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} [k] \frac{q^{2j-(k-1)} K}{q - q^{-1}} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^{k-1} K^{j+1} \\ &\quad - \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} [k] \frac{q^{2j+k-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^{k-1} K^{j-1}. \end{aligned}$$

En remplaçant le  $\mathcal{B}$  de la dernière égalité dans l'équation (2.28), on voit que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2j} c_{i,j,k} E^k K^i \otimes EF^k K^j \\ &\quad - \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} [k] \frac{q^{2j-(k-1)} K}{q - q^{-1}} c_{i,j,k} E^k K^i \otimes F^{k-1} K^{j+1} \\ &\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} [k] \frac{q^{2j+k-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} c_{i,j,k} E^k K^i \otimes F^{k-1} K^{j-1}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Finalement, en remplaçant ce  $\mathcal{A}$  dans l'équation (2.27), on obtient

$$\begin{aligned} R\Delta(E) &= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2j} c_{i,j,k} E^k K^i \otimes EF^k K^j \\ &\quad - \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} [k] \frac{q^{2j-(k-1)} K}{q - q^{-1}} c_{i,j,k} E^k K^i \otimes F^{k-1} K^{j+1} \\ &\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} [k] \frac{q^{2j+k-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} c_{i,j,k} E^k K^i \otimes F^{k-1} K^{j-1} \\ &\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2i} c_{i,j,k} E^{k+1} K^i \otimes F^k K^{j+1}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Les coefficients de  $E^k K^i \otimes EF^k K^j$  sont  $q^{2k} c_{i-1,j,k}$  et  $q^{2j} c_{i,j,k}$  dans les équations (2.26) et (2.30), respectivement. En les combinant, on conclut que

$$c_{i,j,k} = q^{2(k-j)} c_{i-1,j,k}. \quad (2.31)$$

Partie b) :

Recommençons les calculs de la partie précédente avec  $F$  plutôt que  $E$ . Nous devons ainsi calculer  $\Delta^{\text{op}}(F)R$  et  $R\Delta(F)$ . Les calculs sont similaires à ceux pour  $E$  :

$$\begin{aligned} \Delta^{\text{op}}(F)R &= (F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F)R && \text{(proposition 2.25)} \\ &= (F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F) \left( \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i,j,k} E^k K^i \otimes F^k K^j \right) && \text{(lemme 2.37)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} F E^k K^i \otimes K^{-1} F^k K^j \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^{k+1} K^j \\
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2k} c_{i, j, k} F E^k K^i \otimes F^k K^{j-1} \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^{k+1} K^j \quad (\text{lemme 2.23}) \\
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2k} c_{i, j, k} (E^k F - [E^k, F]) K^i \otimes F^k K^{j-1} \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^{k+1} K^j \\
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2k} c_{i, j, k} E^k F K^i \otimes F^k K^{j-1} \\
&\quad - \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2k} c_{i, j, k} [E^k, F] K^i \otimes F^k K^{j-1} \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^{k+1} K^j \\
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2k} c_{i, j, k} E^k F K^i \otimes F^k K^{j-1} \\
&\quad - \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2k} c_{i, j, k} \left( [k] E^{k-1} \frac{q^{k-1} K - q^{-(k-1)} K^{-1}}{q - q^{-1}} \right) K^i \otimes F^k K^{j-1} \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^{k+1} K^j \\
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{2k} c_{i, j, k} E^k F K^i \otimes F^k K^{j-1} \\
&\quad - \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} [k] \frac{q^{2k+k-1}}{q - q^{-1}} c_{i, j, k} E^{k-1} K^{i+1} \otimes F^k K^{j-1} \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} [k] \frac{q^{2k-(k-1)}}{q - q^{-1}} c_{i, j, k} E^{k-1} K^{i-1} \otimes F^k K^{j-1} \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^{k+1} K^j \quad (2.32)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R\Delta(F) &= R(K^{-1} \otimes F + F \otimes 1) \\
&= \left( \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i \otimes F^k K^j \right) (K^{-1} \otimes F + F \otimes 1) \\
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^{i-1} \otimes F^k K^j F \\
&\quad + \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} c_{i, j, k} E^k K^i F \otimes F^k K^j \\
&= \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} q^{-2j} c_{i, j, k} E^k K^{i-1} \otimes F^{k+1} K^j \\
&\quad + \sum q^{-2i} c_{i, j, k} E^k F K^i \otimes F^k K^j. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Les coefficients de  $E^k F K^i \otimes F^k K^{j-1}$  sont  $q^{2k} c_{i, j, k}$  et  $q^{-2i} c_{i, j-1, k}$  dans les équations (2.32) et (2.33), respectivement. En les combinant, on obtient

$$c_{i, j, k} = q^{-2(k+i)} c_{i, j-1, k}. \tag{2.34}$$

Partie c) :

Dans cette partie, nous voulons exprimer  $c_{i, j, k}$  en fonction de  $c_{0, 0, 0}$ .

Tout d'abord, en combinant les équations (2.31) et (2.34), on a

$$\begin{aligned}
c_{i, j, 0} &= q^{-2j} c_{i-1, j, 0} = q^{-2i} c_{i, j-1, 0} \\
&= q^{-2ji} c_{0, 0, 0}. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Le coefficient de  $E^k K^i \otimes F^{k+1} K^j$  dans l'équation (2.32) est

$$c_{i, j, k} + [k+1] \frac{q^{2(k+1)-k}}{q-q^{-1}} c_{i+1, j+1, k+1} - [k+1] \frac{q^{2(k+1)+k}}{q-q^{-1}} c_{i-1, j+1, k+1}.$$

En l'identifiant avec celui de l'équation (2.33), on obtient l'égalité suivante :

$$q^{-2j}c_{i+1,j,k} = c_{i,j,k} + [k+1] \frac{q^{2(k+1)-k}}{q-q^{-1}} c_{i+1,j+1,k+1} - [k+1] \frac{q^{2(k+1)+k}}{q-q^{-1}} c_{i-1,j+1,k+1}. \quad (2.36)$$

D'après l'équation (2.31), on a

$$c_{i+1,j+1,k+1} = q^{4(k-j)} c_{i-1,j+1,k+1}.$$

Ainsi, en combinant cette dernière équation avec l'équation (2.36), on obtient

$$q^{-2j+2(k-j)}c_{i,j,k} = c_{i,j,k} + [k+1] \frac{q^{k+2}}{q-q^{-1}} c_{i+1,j+1,k+1} - [k+1] \frac{q^{4j-k+2}}{q-q^{-1}} c_{i+1,j+1,k+1}.$$

Donc

$$(q^{-2j+2(k-j)} - 1)c_{i,j,k} = \frac{[k+1]}{q-q^{-1}} (q^{k+2} - q^{4j-k+2}) c_{i+1,j+1,k+1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} c_{i+1,j+1,k+1} &= \frac{q-q^{-1}}{[k+1]} \left( \frac{q^{-4j+2k}-1}{q^{k+2}-q^{4j-k+2}} \right) c_{i,j,k} \\ &= \frac{q-q^{-1}}{[k+1]} \left( \frac{q^{-4j+2k}-1}{q^{k+2}(1-q^{4j-2k})} \right) c_{i,j,k} \\ &= \frac{q-q^{-1}}{[k+1]} \left( \frac{q^{-4j+2k}-1}{q^{k+2}q^{4j-2k}(q^{-4j+2k}-1)} \right) c_{i,j,k} \\ &= \frac{q-q^{-1}}{[k+1]} q^{-4j+k-2} c_{i,j,k}. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$c_{i,j,k} = \frac{q-q^{-1}}{[k]} q^{-4j+k+1} c_{i-1,j-1,k-1}.$$

Ainsi,

$$c_{i,j,k} = \frac{(q-q^{-1})^k}{[k]!} q^{k(k+1)/2-4kj+2k(k-1)+k} c_{i-k,j-k,0}.$$

Finalement, en combinant cette dernière égalité avec l'équation (2.35), on obtient

$$c_{i,j,k} = \frac{(q-q^{-1})^k}{[k]!} q^{k(k-1)/2+2k(i-j)-2ij} c_{0,0,0}. \quad (2.37)$$

Partie d) :

Il reste maintenant à montrer que  $c_{0,0,0} = 1/d$ . Par la partie c), on sait que  $\bar{R}$  est de la forme

$$\bar{R} = c_{0,0,0} \sum_{0 \leq i,j < d} q^{-2ij} K^i \otimes K^j + \dots,$$

où  $+$  est une somme de monômes contenant seulement des puissances positives de  $E$  et  $F$ . Utilisons maintenant la relation (2.18) qui est  $(\Delta \otimes \text{id}_H)(\bar{R}) = \bar{R}_{13}\bar{R}_{23}$ . Par la proposition 2.25, on a que  $\Delta(K) = K \otimes K$ . Donc

$$(\Delta \otimes \text{id})(\bar{R}) = c_{0,0,0} \sum_{0 \leq i,j < d} q^{-2ij} K^i \otimes K^i \otimes K^j + \dots \quad (2.38)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \bar{R}_{13}\bar{R}_{23} &= c_{0,0,0}^2 \left( \sum_{0 \leq i,l < d} q^{-2il} K^i \otimes 1 \otimes K^l + \dots \right) \left( \sum_{0 \leq m,j < d} q^{-2mj} 1 \otimes K^m \otimes K^j + \dots \right) \\ &= c_{0,0,0}^2 \sum_{0 \leq i,j,l,m < d} q^{-2il-2mj} K^i \otimes K^m \otimes K^{l+j} + \dots \\ &= c_{0,0,0}^2 \sum_{0 \leq i,j,l,m < d} q^{-2il-2m(j-l)} K^i \otimes K^m \otimes K^j + \dots \\ &= c_{0,0,0}^2 \sum_{0 \leq i,j,m < d} q^{-2mj} \left( \sum_{0 \leq l < d} q^{(2m-2i)l} \right) K^i \otimes K^m \otimes K^j + \dots \quad (2.39) \end{aligned}$$

Or, puisque  $q$  est une racine de l'unité d'ordre  $d$ , la somme

$$\sum_{0 \leq j < d} q^{Nj}$$

est nulle exepyé lorsque  $N$  est un multiple de  $d$ . C'est donc aussi le cas pour la somme

$$\sum_{0 \leq l < d} q^{(2m-2i)l}.$$

L'équation (2.39) devient

$$\bar{R}_{13}\bar{R}_{23} = dc_{0,0,0}^2 \sum_{0 \leq i,j,m < d} q^{-2mj} K^i \otimes K^m \otimes K^j + \dots$$

De plus, puisque  $2m - 2i$  est un multiple de  $d$  compris entre 0 et  $2d - 2$ , il s'en suit que soit  $2m - 2i$  est égal à 0, soit il est égal à  $d$ . Or,  $d$  est impair, donc  $2m - 2i = 0$  et ainsi  $m = i$ . Donc

$$\overline{R}_{13}\overline{R}_{23} = dc_{0,0,0}^2 \sum_{0 \leq i, j < d} q^{-2ij} K^i \otimes K^i \otimes K^j + \dots \quad (2.40)$$

En comparant les équations (2.38) et (2.40), on voit que  $c_{0,0,0} = 1/d$ , ce qui conclut la démonstration.



## CHAPITRE III

### UNE BRÈVE INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Durant plus de 2000 ans, les enseignements de la géométrie en Europe ont été basés sur le livre *Les éléments* d'Euclide. Euclide y énonce les cinq postulats constituant la base de la géométrie dite euclidienne. Le cinquième de ces postulats peut être formulé de la manière suivante : étant donné une ligne  $l$  et un point  $P$  qui n'est pas sur  $l$ , il y a une unique ligne  $m$  dans le même plan que  $P$  et  $l$  qui passe par  $P$ , mais ne croise pas  $l$ . C'est ce qu'on appelle le postulat des lignes parallèles.

Ce postulat apparaissant superflu à bien des géomètres qui supposaient qu'il découlait des quatre premiers, nombre d'entre eux ont essayé de le transformer en théorème, mais sans succès. En fait, le postulat des lignes parallèles ne peut être un théorème, puisque plusieurs modèles différents de la géométrie euclidienne ne respectent que les quatre premiers postulats d'Euclide, mais pas celui-ci. C'est le cas notamment de la géométrie elliptique et de la géométrie hyperbolique. C'est cette dernière que nous étudierons plus en détail dans ce chapitre. En géométrie hyperbolique, le postulat des lignes parallèles d'Euclide devient : étant donné une ligne  $l$  et un point  $P$  qui n'est pas sur  $l$ , il existe au moins deux lignes  $m$  passant par  $P$ , mais ne croisant pas  $l$ , c'est-à-dire qu'il existe au moins deux lignes passant par  $P$  qui sont parallèles à  $l$ .

Il existe plusieurs modèles de l'espace hyperbolique. Avant d'aborder la conjecture

du volume au chapitre suivant, nous traiterons des concepts de base en géométrie hyperbolique en introduisant deux modèles classiques : le modèle de la boule de Poincaré et celui du demi-espace supérieur. Nous définirons ensuite les tétraèdres idéaux et donnerons une façon de calculer le volume simplicial, puis un exemple de calcul de ce volume avec le nœud figure-huit.

La conjecture du volume originellement énoncée par Kashaev dans (Kashaev, 1997), utilisait le volume hyperbolique. Dans (Murakami et Murakami, 2001), les auteurs généralisent la conjecture du volume de Kashaev en utilisant le volume simplicial, un volume plus général que le volume hyperbolique et qui permet de ne pas se limiter aux nœuds hyperboliques.

### 3.1 Concepts de base

Dans cette section, nous introduirons deux modèles classiques de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ . Nous commencerons par un modèle de géométrie hyperbolique plutôt intuitif, dû au mathématicien français Henri Poincaré et portant le nom de modèle de la boule de Poincaré. Puis, nous ferons la transition vers un modèle plus adéquat pour calculer le volume hyperbolique : le modèle du demi-espace supérieur.

#### 3.1.1 Modèle de la boule de Poincaré

##### Construction du modèle

On considère la boule unité  $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$  dotée de la métrique  $ds^2 = \frac{4|dx|^2}{(1-|x|^2)^2}$ . On appelle ce couple  $(B^3, ds^2)$  le *modèle de la boule unité de l'espace hyperbolique de dimension 3* ou simplement *modèle de la boule unité*. La métrique  $ds^2$  est appelée *métrique hyperbolique*.

La notion d'angle dans l'espace hyperbolique et dans l'espace euclidien est la même. En effet, la métrique  $ds^2$  n'est que la métrique euclidienne multipliée par

une fonction positive.

**Définition 25.** Une *isométrie* est une application qui préserve les distances entre les points de deux espaces.

On note  $\mathbb{H}^3$  l'espace hyperbolique de dimension 3, qui sera considéré à isométrie près.

Considérons la 3-sphère  $\mathbb{S}^3$  comme la compactification de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ .

**Définition 26.** Une *similarité euclidienne*  $S$  dans  $\mathbb{S}^3$  est une application donnée par  $S(p) = \lambda A(p) + b$ ,  $S(\infty) = \infty$ , où  $\lambda > 0$ ,  $p, b \in \mathbb{R}^3$  et  $A \in O(3)$ , groupe des transformations orthogonales de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 27.** La *réflexion fondamentale*  $J : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  est l'application définie par  $J(p) = \frac{p}{|p|^2}$ ,  $J(0) = \infty$  et  $J(\infty) = 0$ , où  $p \in \mathbb{R}^3$ .

**Définition 28.** Une *transformation de Möbius* de  $\mathbb{S}^3$  est un automorphisme de  $\mathbb{S}^3$  qui préserve les orientations et qui est obtenu à l'aide de la composition d'un nombre fini de similarités euclidiennes et de réflexions fondamentales.

$S$  et  $J$  sont toutes deux des transformations de Möbius. On note  $Möb(E)$  le groupe des transformations de Möbius envoyant  $E \subset \mathbb{S}^3$  sur lui-même. Ces transformations envoient des cercles et des lignes sur des cercles et des lignes.

**Définition 29.** Une *transformation conforme en un point* est une fonction qui conserve les angles au voisinage d'un point. Une *transformation conforme* est une fonction qui conserve localement les angles.

Les transformations de Möbius de  $\mathbb{S}^3$  sont conformes aux points qui ne sont pas envoyés à l'infini.

**Définition 30.** On note  $Isom^+(B^3)$  le groupe des automorphismes de  $B^3$  qui préservent les orientations et sont des isométries par rapport à la métrique hyperbolique.

Le lien entre les deux dernières notions est donné par le théorème suivant :

**Théorème 3.1.**  $Möb(B^3) = Isom^+(B^3)$ .

On en trouve une démonstration dans, par exemple, (Matsuzaki et Taniguchi, 1998).

### Géodésiques

Une géodésique est intuitivement le chemin le plus court reliant un point à un autre selon la métrique utilisée dans l'espace. En géométrie euclidienne, les géodésiques sont des droites, mais ce n'est pas tout à fait le cas en géométrie hyperbolique, puisque la métrique n'est pas la même.

Le chemin le plus court allant de l'origine à n'importe quel point  $q \in B^3$  est donné par une droite euclidienne. En effet, on a

$$\int_C \frac{|dp|}{1 - |p|^2} \geq \int_0^{|q|} \frac{dx}{1 - x^2},$$

où  $C$  est n'importe quel chemin allant de 0 à  $q$ . Il y a égalité quand  $C$  est le segment euclidien joignant 0 et  $q$ . Les diamètres euclidiens de  $B^3$  sont donc des segments géodésiques et jouent le rôle de droite en géométrie hyperbolique. Puisque les éléments de  $Möb(B^3)$  sont conformes, l'orbite sous  $Isom^+(B^3)$  des diamètres euclidiens est précisément les intersections  $B^3 \cap \mathbb{S}$ , où  $\mathbb{S}$  est un cercle dans  $\mathbb{R}^3$  qui est perpendiculaire à  $\partial B^3 = \mathbb{S}^2$ . Ainsi, les intersections  $B^3 \cap \mathbb{S}$  sont également des géodésiques (voir figure 3.1).

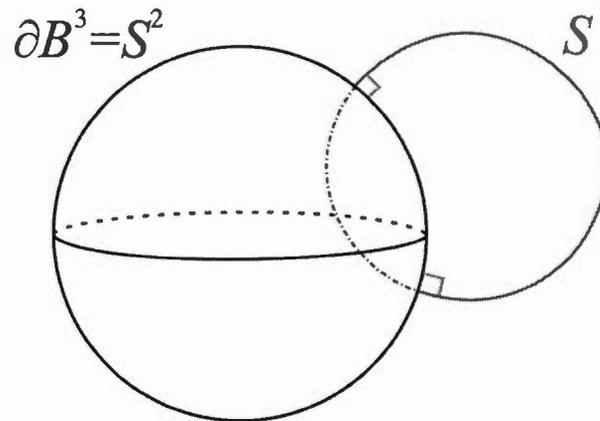


Figure 3.1: Une géodésique (en pointillés gris)

**Définition 31.** Un arc hyperbolique est un sous-ensemble fermé et connexe d'une géodésique hyperbolique (segment).

**Définition 32.** Un plan hyperbolique est un sous-espace propre fermé  $H \subset \mathbb{H}^3$  tel que les géodésiques entre deux points de  $H$  sont dans  $H$ . De plus,  $H$  n'est ni un point, ni une géodésique.

Les plans hyperboliques sont donc soit les intersections  $\mathbb{B} \cap B^3$ , où  $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$  sont des sphères orthogonales à  $\partial B^3 = S^2$ , soit les plans passant par l'origine (sphères passant par l'infini). Dans le modèle de la boule unité  $B^3$ ,  $\partial B^3 = S^2$ . On appelle  $\partial B^3$  la *sphère à l'infini*, car elle est infiniment loin de chaque point de  $B^3$  selon la métrique hyperbolique.

*Remarque.* L'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  a une courbure négative constante (voir (Ratcliffe, 2006) pour plus de détails).

### 3.1.2 Modèle du demi-espace supérieur

Nous introduisons ici un autre modèle de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ . Ce modèle, bien qu'équivalent à celui de la boule unité, est plus adéquat pour le calcul du volume hyperbolique à l'aide de polyèdres idéaux.

**Définition 33.** Le modèle du demi-espace supérieur  $U^3$  est

$$U^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$$

avec la métrique  $ds^2 = \frac{|dx|^2}{|x_3|^2}$  à chaque point  $x \in U^3$ .

Dans ce modèle, la frontière de  $\mathbb{H}^3$  consiste en le plan  $\partial U^3$  uni à un point qu'on appelle *le point à l'infini*. Topologiquement, ce point représente le point à l'infini de la compactification de  $\mathbb{R}^3 \supset U^3$  à  $\mathbb{S}^3$ .

Tout comme dans  $B^3$ , il existe deux sortes de géodésiques dans  $U^3$  : les demi-cercles perpendiculaires à  $\partial U^3$  ayant leurs deux extrémités sur  $\partial U^3$  et les droites euclidiennes perpendiculaires à  $\partial U^3$ , dont l'une des extrémités est à l'infini (voir figure 3.2).

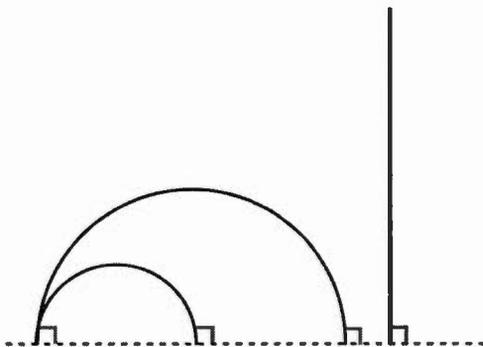


Figure 3.2: Les géodésiques du modèle du demi-espace supérieur

### 3.2 Tétraèdres idéaux

**Définition 34.** On appelle un *simplexe* l'enveloppe convexe de  $n$  points. Si les  $n + 1$  points définis par les  $n$  vecteurs de base standard de  $\mathbb{R}^n$ , alors l'enveloppe convexe est le simplexe

$$\Delta^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 + \dots + t_n \leq 1 \text{ et } t_i \geq 0\}$$

et celui-ci est de dimension  $n - 1$ .

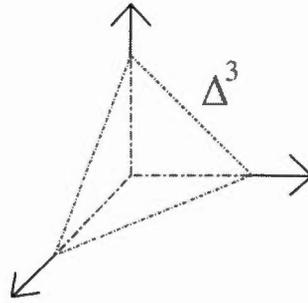


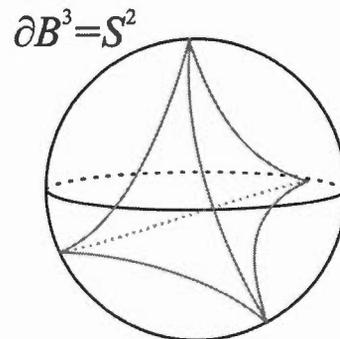
Figure 3.3: Le 3-simplexe

**Définition 35.** Soit  $\Delta$  le 3-simplexe orienté. Supposons qu'on ait un plongement  $i: \Delta \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Alors on dit que  $i(\Delta)$  est un *tétraèdre hyperbolique* si l'image de chaque face de  $\Delta$  est un sous-ensemble d'un plan hyperbolique.

*Remarque.* Les arêtes de  $\Delta$  sont donc envoyées sur des arcs hyperboliques.

Supposons maintenant que l'image de  $i$  est  $\overline{\mathbb{H}^3}$  : la fermeture de  $\mathbb{H}^3$ , mais que seulement les sommets de  $\Delta$  sont autorisés sur  $\partial\mathbb{H}^3$ . Pour une construction intrinsèque de  $\partial\mathbb{H}^3$ , c'est-à-dire une construction qui ne dépend pas du modèle choisi, voir (Benedetti et Petronio, 2012, p. 29).

**Définition 36.** On appelle *sommet idéal*, un sommet de  $\Delta$  qui se trouve sur  $\partial\mathbb{H}^3$ . Si les quatre sommets sont idéaux, on dit que  $\Delta$  est un *tétraèdre hyperbolique idéal*, ou *tétraèdre idéal* pour simplifier (voir figure 3.4).

Figure 3.4: Un tétraèdre hyperbolique idéal dans  $B^3$

### 3.2.1 Horosphère

Afin d'étudier les propriétés des tétraèdres idéaux, nous avons besoin de la notion d'*horosphère*.

**Définition 37.** Soit  $x \in \partial\mathbb{H}^3$ , on appelle *horosphère* autour de  $x$  une surface connexe orientable qui est orthogonale à toutes les géodésiques ayant  $x$  pour extrémité.

Dans le modèle de la boule unité  $B^3$ , une horosphère centrée en  $x \in \partial B^3$  est une sphère contenue dans  $B^3$  sauf au point  $x$ , où elle est tangente (voir figure 3.5).

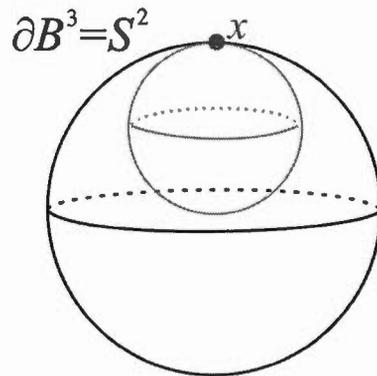


Figure 3.5: Une horosphère centrée en  $x$  dans  $B^3$

**Définition 38.** L'intérieur convexe d'une horosphère centrée est appelé une *horoboule* centrée en  $x$ .

Il est encore plus facile de visualiser une horosphère dans le modèle du demi-espace supérieur  $U^3$ . Soit  $x \in \partial U^3$ , il est possible d'appliquer une isométrie du bord de  $U^3$ ,  $\partial U^3$ , envoyant  $x$  sur  $\infty$ . Ainsi, chaque tétraèdre hyperbolique idéal de  $U^3$  est en fait isométrique à un tétraèdre hyperbolique idéal dont l'un des 4 sommets est le point à l'infini. Donc une horosphère en  $x$  est un plan parallèle à  $\partial U^3$ . Il y a ainsi une structure euclidienne sur chaque horosphère de  $U^3$ .

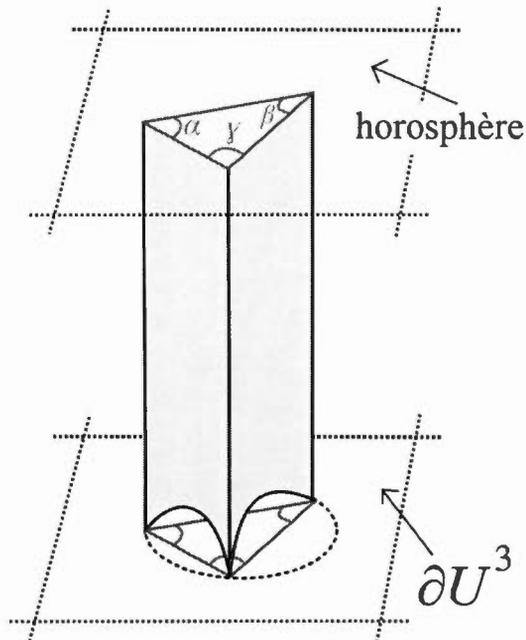


Figure 3.6: Un tétraèdre idéal dans  $U^3$

La figure 3.6 représente un tétraèdre hyperbolique dans  $U^3$  intersectant une horosphère à l'infini, formant ainsi un triangle avec des angles intérieurs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

Un tétraèdre idéal est défini, à isométrie près, par les classes de similitude de ce triangle (voir (Thurston, 2002, chap. 4) pour une discussion). On peut ainsi paramétrer un tétraèdre hyperbolique idéal par un triplet de nombres positifs  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . On note ce triangle  $\Delta$ . De plus, puisque l'horosphère a une structure euclidienne, on sait que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

### 3.2.2 Volume simplicial

Bien que les tétraèdres hyperboliques idéaux ne soient pas compacts, ils ont un volume fini. La fonction de Lobachevsky permet de calculer leur volume.

**Définition 39.** La fonction de Lobachevsky  $\Lambda(\theta)$ , avec  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , est définie

par

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin u| du.$$

Les propriétés suivantes de la fonction de Lobachevsky sont utiles à la démonstration du théorème qui suit.

**Lemme 3.2.**

(a) La fonction Lobachevsky est impaire et de période  $\pi$  ;

(b)  $\Lambda(n\theta) = n \sum_{k=1}^{n-1} \Lambda(\theta + k\pi/n)$ .

*Démonstration.* La propriété (a) est évidente. Pour (b), voir (Murakami, 2010), page 20. □

**Théorème 3.3.** *Pour un tétraèdre hyperbolique idéal  $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ , on a*

$$\text{vol}(\Delta(\alpha, \beta, \gamma)) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$$

.

*Démonstration.* (Thurston, 2002), chapitre 7. □

Afin de définir le volume simplicial (ou norme de Gromov), nous avons besoin de la décomposition de Jaco-Shalen-Johannson (JSJ) du complément d'un nœud. Les fibrés de Seifert n'étant pas utiles pour calculer le volume simplicial, nous n'en donnerons aucune explication dans ce mémoire. Pour un développement systématique de la théorie des 3-variétés, on peut se référer à (Hempel, 2004).

**Théorème 3.4.** *Soit  $K$  un nœud. Son complément  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  peut être décomposé de manière unique en morceaux hyperboliques et en fibrés de Seifert :*

$$\mathbb{S}^3 \setminus K = \left( \bigsqcup H_i \right) \sqcup \left( \bigsqcup E_j \right)$$

avec  $H_i$  hyperbolique et  $E_j$  fibrés de Seifert.

Ce théorème découle de deux résultats importants : la décomposition de JSJ (voir les livres (Jaco et Shalen, 1979) et (Johannson, 2006)) et la démonstration de la conjecture de la géométrisation pour les variétés Haken par Thurston.

Il est maintenant possible de définir le volume simplicial :

**Définition 40.** Si un complément de nœud  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  est exprimé selon la décomposition de JSJ, alors son volume simplicial  $\text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K)$  est défini comme

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K) = \sum_{H_i} \text{Volume hyperbolique de } H_i.$$

Cette définition nous permettra d'énoncer au chapitre suivant la conjecture du volume à l'aide du volume simplicial plutôt que du volume hyperbolique, comme l'avait fait originellement Kashaev (voir (Kashaev, 1997)), et ainsi de ne pas nous limiter aux nœuds hyperboliques.

**Exemple 19.** Considérons le nœud (2,1)-câble du nœud figure-huit illustré à la figure 3.7.

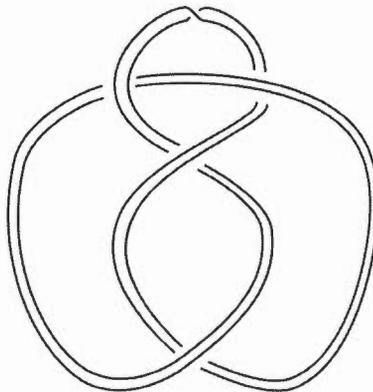


Figure 3.7: Nœud (2,1)-câble du nœud figure-huit

Son complément peut être décomposé, selon le théorème 3.4, en deux morceaux : l'un hyperbolique et l'autre fibré de Seifert. Cette décomposition est illustrée à la figure 3.8 .

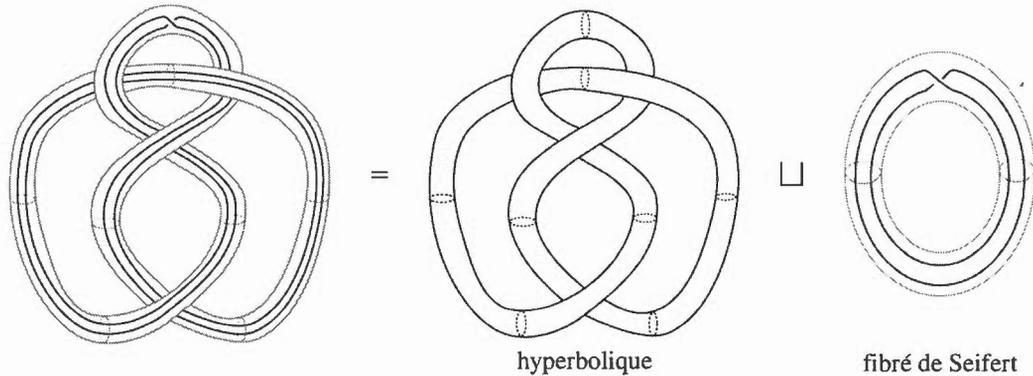
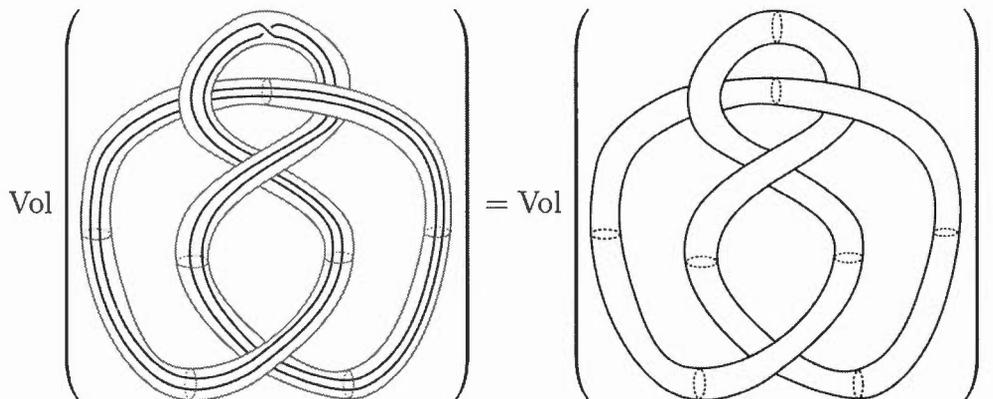


Figure 3.8: Décomposition du nœud (2,1)-câble du nœud figure-huit

Par la définition du volume simplicial, on sait que



Ainsi, le nœud (2,1)-câble du nœud figure-huit a le même volume simplicial que le nœud figure-huit.

### 3.3 Calcul du volume pour le nœud figure-huit

Bien des variétés hyperboliques peuvent être construites en assemblant des polyèdres. Les résultats généraux sont connus sous le nom de Théorème des Polyèdres

de Poincaré (Epstein et Petronio, 1994). Dans cette section, nous nous concentrons sur l'obtention du complément du nœud figure-huit à l'aide de polyèdres. Le théorème suivant est tiré de (Thurston, 2002), une démonstration en est présentée au chapitre 7 de (Lackenby, 2000).

**Théorème 3.5.** *Le complément du nœud figure-huit peut être obtenu en collant deux tétraèdres idéaux réguliers.*

Topologiquement, le théorème énonce que le complément du nœud figure-huit peut être obtenu en collant deux tétraèdres tronqués comme l'illustre la figure 3.9. Les sommets tronqués  $y$  sont représentés en gris. Dans cette figure, on identifie la face  $A$  avec  $A'$ ,  $B$  avec  $B'$ ,  $C$  avec  $C'$  et  $D$  avec  $D'$  tout en suivant l'orientation des flèches des arêtes et en identifiant les flèches pleines et les flèches vides avec elles-mêmes.

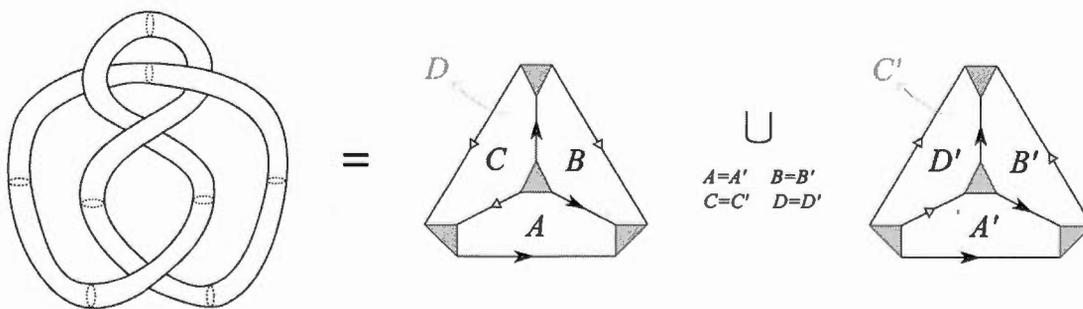


Figure 3.9: La décomposition du complément du nœud figure-huit en deux tétraèdres hyperboliques idéaux réguliers

La figure 3.10 illustre les étapes du collage des deux tétraèdres formant le complément du nœud figure-huit.

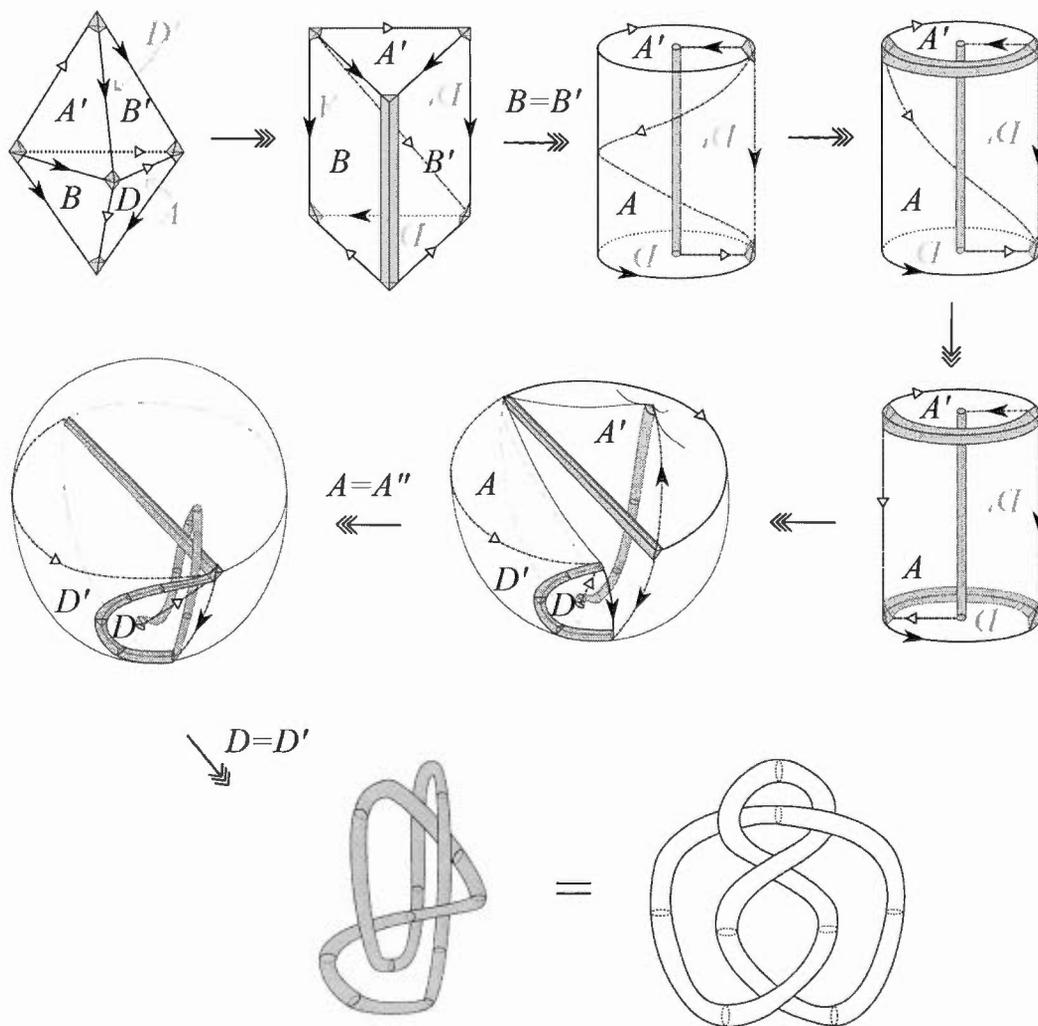


Figure 3.10: Collage des deux tétraèdres hyperboliques idéaux

Ainsi, si les deux tétraèdres hyperboliques idéaux sont réguliers, c'est-à-dire isométriques à  $\Delta(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$ , alors on obtient pour le volume du complément du nœud figure-huit que

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K) &= 2\text{vol}(\Delta(\pi/3, \pi/3, \pi/3)) \\
 &= 2(\Lambda(\pi/3) + \Lambda(\pi/3) + \Lambda(\pi/3)) \\
 &= 6\Lambda(\pi/3) \approx 2.029883.
 \end{aligned}$$

## CHAPITRE IV

### POLYNÔME DE JONES COLORÉ ET LA CONJECTURE DU VOLUME

Le polynôme de Jones défini au chapitre 1 est un cas particulier du polynôme de Jones coloré. Pour définir ce dernier, nous avons d'abord besoin de quelques notions préalables. Ces dernières nous permettent ensuite de construire un invariant de nœuds. Cet invariant sert à définir le polynôme de Jones coloré dont nous ferons un exemple de calcul à l'aide du nœud figure-huit. Nous finirons par l'énoncé de la conjecture du volume et sa démonstration pour le nœud figure-huit. Cette section suit (Murakami, 2010) et (Turaev, 1988).

#### 4.1 Quelques notions préalables

Afin de définir le polynôme de Jones coloré, nous avons besoin de quelques notions en théorie des tresses et de la notion d'opérateurs de Yang-Baxter augmentés, un outil un peu plus spécialisé que sa version au chapitre 2.

##### 4.1.1 Introduction à la théorie des tresses

**Définition 41.** Une  $n$ -tresse est une collection de  $n$  brins sans intersection descendant de façon monotone allant d'un ensemble de  $n$  points fixés à un autre. Deux tresses sont équivalentes si l'on peut passer de l'une à l'autre à l'aide de déformations continues fixant leurs extrémités.

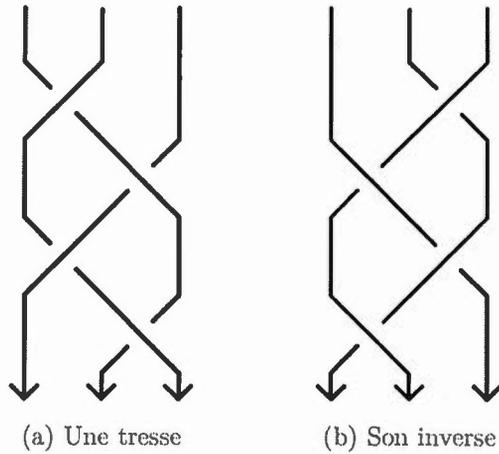


Figure 4.1: Des tresses

L'ensemble des classes d'équivalences des  $n$ -tresses forme un groupe que l'on note  $B_n$ . Le produit de tresses  $\beta_1$  et  $\beta_2$  est donné par concaténation, c'est-à-dire par l'ajout de  $\beta_2$  au diagramme de  $\beta_1$  comme l'illustre la figure 4.2. L'élément neutre est la  $n$ -tresse triviale, c'est-à-dire la tresse ayant  $n$  brins parallèles, et l'inverse d'une tresse est son image miroir (figure 4.1b).

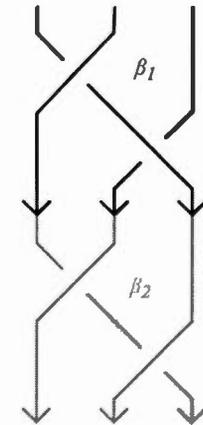


Figure 4.2: Le produit de deux tresses

$B_n$  est généré par  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  avec les relations  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  pour  $|i - j| > 1$ ,

c'est-à-dire  $\sigma_1\sigma_j\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1} = \text{id}$  (voir figure 4.4a), et  $\sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_k = \sigma_{k+1}\sigma_k\sigma_{k+1}$ , c'est-à-dire  $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} = \text{id}$  (voir figure 4.4b). Une démonstration de ce résultat se trouve à la page 95 de (Manturov, 2004). Ici,  $\sigma_i$  représente une tresse dont les brins  $i$  et  $i + 1$  ont été échangés (voir figure 4.3).

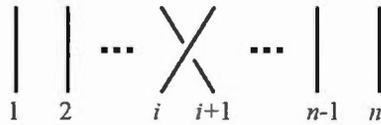


Figure 4.3: Le générateur  $\sigma_i$

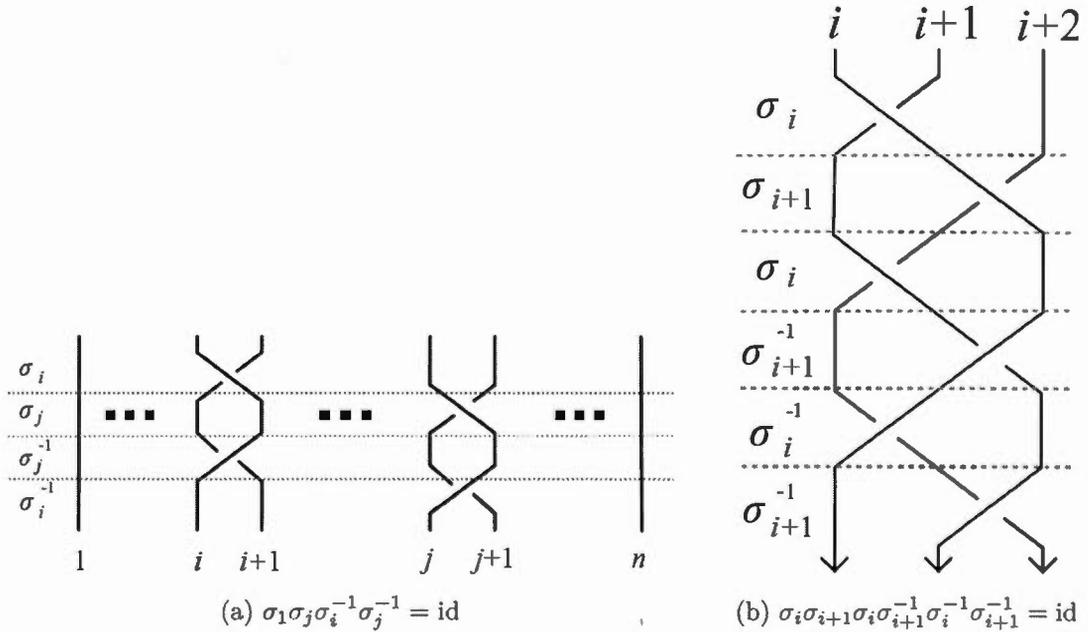


Figure 4.4: Les relations du groupe  $B_n$

*Remarque.*  $B_n$  a donc pour présentation

$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ quand } |i - j| > 1, \sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_k = \sigma_{k+1}\sigma_k\sigma_{k+1} \rangle.$$

Les tresses et les nœuds sont reliés de la manière suivante. La fermeture d'une  $n$ -tresse est obtenue en connectant les  $n$  points du haut à ceux du bas sans faire de nouveaux croisements, comme l'illustre la figure 4.5. On obtient ainsi un nœud.

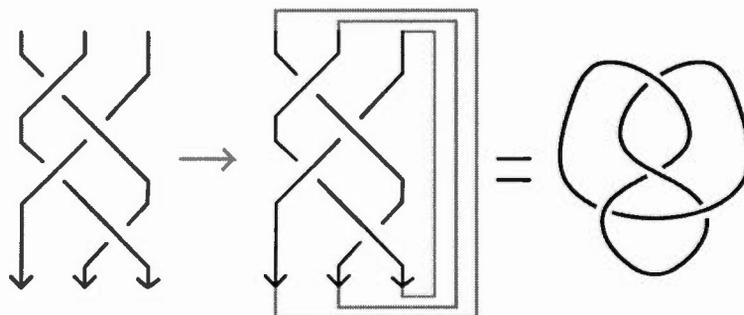
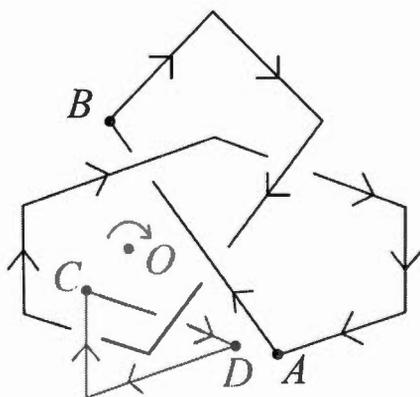


Figure 4.5: La fermeture d'une tresse

**Théorème 4.1.** (Alexander, 1923) *Tout nœud ou entrelacs peut être présenté comme la fermeture d'une tresse.*

*Démonstration.* Cette démonstration est tirée de (Manturov, 2004, p. 121). Soit  $L$  un diagramme d'entrelacs polygonal orienté et  $O$  un point sur le plan de diagramme tel que  $O$  n'appartient pas aux côtés ou sommets de l'entrelacs (voir la figure 4.6). Choisissons une orientation autour du point  $O$ . Sans perte de généralité, nous prendrons le sens anti-horaire. On dit que  $L$  est tressé autour de  $O$  si chaque côté de  $L$  est orienté de la même manière que  $O$  à partir du point  $O$ . Ce dernier peut être vu comme un axe sortant du plan. Sur la figure, les segments  $AB$  et  $CD$  sont d'orientation contraire : on dit qu'ils sont négatifs.

Figure 4.6: Un entrelacs orienté et  $O$  un point sur le plan

S'il existe un point  $O$  tel que le diagramme  $L$  est tressé autour de  $O$ , c'est-à-dire qu'il n'y ait aucun segment négatif, alors le théorème est démontré puisqu'il suffit de couper le diagramme en une droite provenant de  $O$ , mais ne passant pas par un croisement, puis de le «redresser» comme l'illustre la figure 4.7.

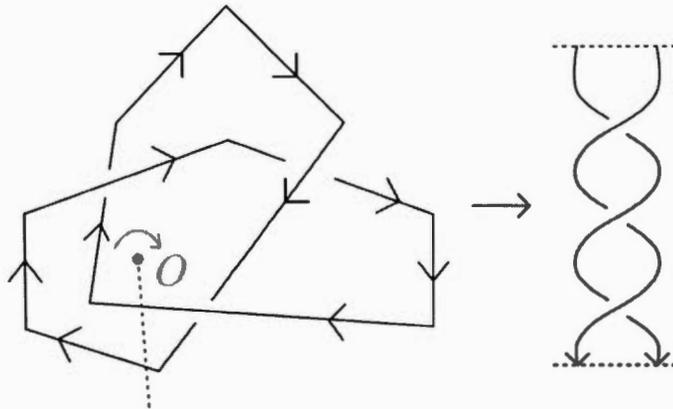


Figure 4.7: «Redressement» d'un nœud en tresse

S'il n'existe pas un tel point, procédons comme suit : tout d'abord, séparons les segments négatifs de façon à ce que chaque sous-segment contienne au plus un croisement. Sur la figure 4.8, le segment  $AB$  est devenu les croisements  $AE$  et  $BE$ . Le segment  $CD$  est quant à lui devenu  $CF$  et  $DF$ .

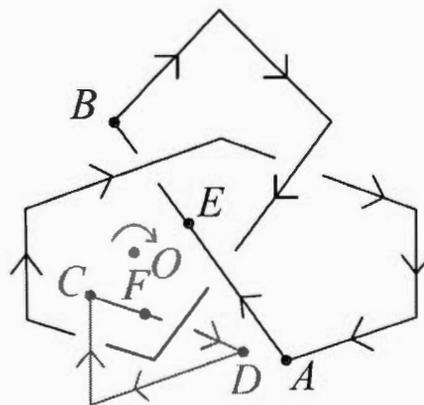


Figure 4.8: Création des segments  $AE$ ,  $BE$ ,  $CF$  et  $DF$

Soit  $XY$  un segment négatif qui contient au plus un croisement. On choisit un point  $P$  sur le plan tel que le triangle  $XYP$  contienne le point  $O$ .

Cas 1 : Si  $XY$  ne contient aucun croisement, on le remplace par  $XP$  et  $YP$  (voir figure 4.9a).

Cas 2 : Si  $XY$  contient un surcroisement, c'est-à-dire que  $XY$  passe au-dessus d'un autre segment de l'entrelacs, alors on procède comme dans le cas précédent. On obtient deux segments,  $XP$  et  $YP$ , passant tous les deux par-dessus tous les autres segments du diagramme (voir figure 4.9b).

Cas 3 : Si  $XY$  contient un sous-croisement, c'est-à-dire que  $XY$  passe au-dessous d'un autre segment de l'entrelacs, alors on remplace  $XY$  par des segments  $XP$  et  $YP$  passant tous les deux sous tous les autres segments (voir figure 4.9c).

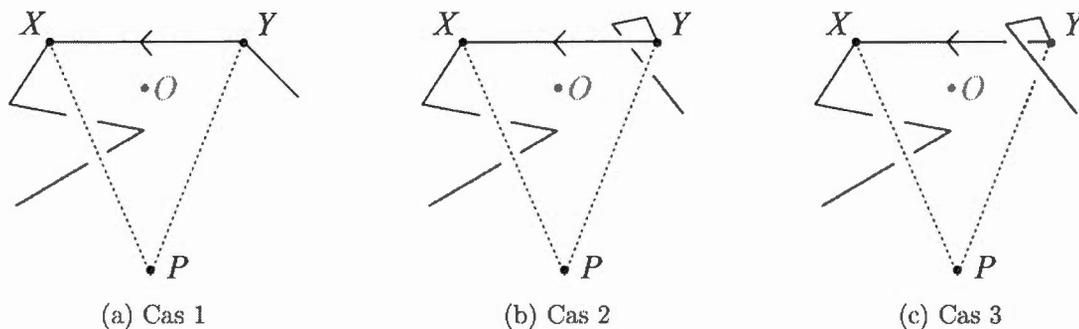


Figure 4.9: Les trois cas possibles

En procédant ainsi pour tous les segments négatifs, on obtient un diagramme d'entrelac tressé autour de  $O$ . □

Si plusieurs tresses présentent un même entrelacs, alors elles sont reliés par un nombre fini de *mouvements de Markoff* :

**Théorème 4.2.** (Markoff, 1936). *Si la fermeture de deux tresses  $\beta$  et  $\beta'$  donne des entrelacs équivalents, alors  $\beta$  et  $\beta'$  sont reliés par une suite finie de conjugaisons, stabilisations et déstabilisations. Une conjugaison remplace  $\alpha\beta$  par  $\beta\alpha$ , c'est-à-dire  $\beta$  par  $\alpha^{-1}\beta\alpha$ . Une stabilisation remplace  $\beta \in B_n$  par  $\beta\sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$ . Une déstabilisation remplace  $\beta\sigma_{n+1}^{\pm 1}$  par  $\beta \in B_n$ . Le tout est illustré à la figure 4.10.*

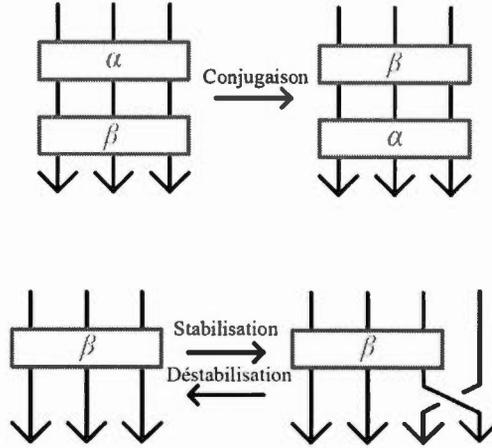


Figure 4.10: Conjugaison, stabilisation et déstabilisation d'une tresse

#### 4.1.2 Opérateurs de Yang-Baxter augmentés

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $N$  sur  $\mathbb{C}$ ,  $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  et  $\mu: V \rightarrow V$  des isomorphismes et  $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Définition 4.2.** Un quadruplet  $(R, \mu, a, b)$  est appelé un *opérateur de Yang-Baxter augmenté* s'il satisfait :

- (a)  $(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)$ ,
- (b)  $R(\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu)R$ ,
- (c)  $\text{Tr}_2(R^{\pm 1}(\text{id}_V \otimes \mu)) = a^{\pm 1}b \text{id}_V$ ,

où  $\text{Tr}_k: \text{End}(V^{\otimes k}) \rightarrow \text{End}(V^{\otimes(k-1)})$  est défini par

$$\text{Tr}_k(f)(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_{k-1}}) = \sum_{j_1, \dots, j_{k-1}, j=0}^{N-1} f_{i_1, \dots, i_{k-1}, j}^{j_1, \dots, j_{k-1}, j} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_{k-1}},$$

où  $f \in \text{End}(V^{\otimes k})$  est donné par

$$f(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k}) = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{N-1} f_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_k},$$

$\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$  est une base de  $V$  et  $f_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} \in \mathbb{C}$ .

La première condition de la définition précédente est en fait la définition 21.

L'isomorphisme  $R$  est donc une  $R$ -matrice.

**Exemple 20.** Afin d'éclaircir un peu ces formules, prenons l'exemple de  $k = 2$  :

On a  $\text{Tr}_2(f): \text{End}(V \otimes V) \longrightarrow \text{End}(V)$  et

$$f(e_{i_1} \otimes e_{i_2}) = \sum_{j_1, j_2=0}^{N-1} f_{i_1, i_2}^{j_1, j_2} e_{j_1} \otimes e_{j_2},$$

donc

$$\text{Tr}_2(f)(e_{i_1}) = \sum_{j_1, j=0}^{N-1} f_{i_1, j}^{j_1, j} e_{j_1}.$$

Maintenant avec  $k = 1$  : On a  $\text{Tr}_1(f): \text{End}(V) \longrightarrow \text{End}(V^{\otimes 0}) \cong \mathbb{C}$  et

$$f(e_{i_1}) = \sum_{j_1=0}^{N-1} f_{i_1}^{j_1} e_{j_1},$$

donc

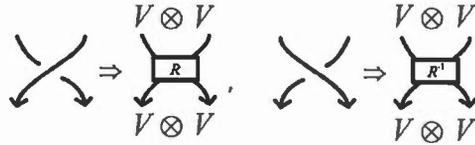
$$\text{Tr}_1(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f_j^j,$$

ce qui est la trace usuelle d'un endomorphisme. Ici,  $\text{End}(V^{\otimes 0}) \cong \mathbb{C}$ , car  $V^{\otimes 0} \cong \mathbb{C}$ .

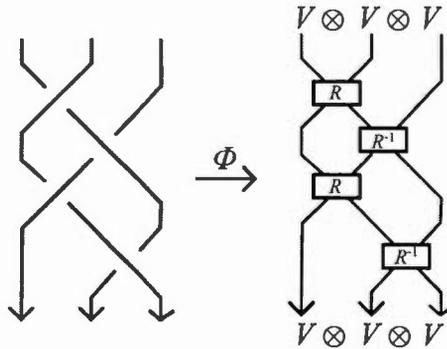
Soit  $\beta$  une  $n$ -tresse. On peut construire un homomorphisme  $\Phi(\beta): V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}$  en remplaçant un générateur  $\sigma_i$  par  $\text{id}_V^{\otimes(i-1)} \otimes R \otimes \text{id}_V^{\otimes(n-i-1)}$  et son inverse  $\sigma_i^{-1}$  par  $\text{id}_V^{\otimes(i-1)} \otimes R^{-1} \otimes \text{id}_V^{\otimes(n-i-1)}$ . Voir la figure 4.11.

**Exemple 21.** Soit une tresse  $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$ . On a

$$\Phi(\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}) = (R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R^{-1})(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R^{-1}),$$

Figure 4.11: Remplacement d'un générateur par la  $R$ -matrice

comme l'illustre la figure 4.12.

Figure 4.12: Une tresse et son homomorphisme  $\Phi$ 

## 4.2 Construction d'un invariant

Dans cette section, nous souhaitons définir un invariant à l'aide des notions vues dans la section précédente. Celui-ci nous servira dans la section suivante à définir le polynôme de Jones coloré. Soit  $(R, \mu, a, b)$  un opérateur de Yang-Baxter augmenté sur un espace vectoriel  $V$  de dimension  $N$ .

**Définition 43.** Soit  $\beta$  une  $n$ -tresse. On définit  $T_{(R, \mu, a, b)}(\beta) \in \mathbb{C}$  par la formule suivante :

$$T_{(R, \mu, a, b)}(\beta) := a^{-\omega(\beta)} b^{-n} \text{Tr}_1(\text{Tr}_2(\dots(\text{Tr}_n(\Phi(\beta)\mu^{\otimes n}))\dots)),$$

où  $\omega(\beta)$  est la somme des exposants des générateurs de  $\beta$ .

**Exemple 22.** Reprenons la tresse de l'exemple précédent :  $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$ . On

a que  $\omega(\beta) = 0$  et donc

$$T_{(R,\mu,a,b)}(\beta) := b^{-2} \text{Tr}_1(\text{Tr}_2(\text{Tr}_3((R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R^{-1})(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R^{-1})\mu^{\otimes 3}))).$$

Voir la figure 4.13.

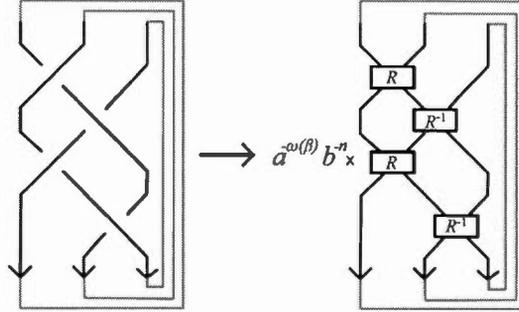


Figure 4.13: Une tresse et son invariant

**Théorème 4.3.** (Turaev, 1988). *Si  $\beta$  et  $\beta'$  présentent le même entrelacs, alors  $T_{(R,\mu,a,b)}(\beta) = T_{(R,\mu,a,b)}(\beta')$ , en d'autres mots,  $T_{(R,\mu,a,b)}$  est un invariant.*

*Démonstration.* Une esquisse de démonstration se trouve dans (Murakami, 2010), théorème 2.8. □

### 4.3 Polynôme de Jones coloré

Après avoir construit un opérateur de Yang-Baxter augmenté, nous définissons le polynôme de Jones coloré et faisons le lien entre ce dernier et sa version non colorée du chapitre 1.

Construisons un opérateur de Yang-Baxter augmenté : Soit  $V = \mathbb{C}^N$  et définissons la  $R$ -matrice  $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  par

$$R(e_k \otimes e_l) := \sum_{i,j=0}^{N-1} R_{kl}^{ij} e_i \otimes e_j,$$

où

$$R_{kl}^{ij} := \sum_{m=0}^{\min(N-1-i,j)} \delta_{l,i+m} \delta_{k,j-m} \frac{\{l\}! \{N-1-k\}!}{\{i\}! \{m\}! \{N-1-j\}!} \\ \times q^{(i-(N-1)/2)(j-(N-1)/2)-m(i-j)/2-m(m+1)/4}, \quad (4.1)$$

avec  $\{m\} := q^{m/2} - q^{-m/2}$ ,  $\{m\}! := \{1\}\{2\}\dots\{m\}$ ,  $q$  un paramètre complexe et  $\{e_0, e_1, \dots, e_{N-1}\}$  une base standard de  $V$ . L'homomorphisme  $\mu: V \rightarrow V$  est donné par

$$\mu(e_j) := \sum_{i=0}^{N-1} \mu_j^i e_i,$$

avec  $\mu_j^i := \delta_{i,j} q^{(2i-N+1)/2}$ . Ici,  $\delta_{i,j}$  représente le delta de Kronecker, c'est-à-dire  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon. L'inverse de cette  $R$ -matrice est donné par

$$(R^{-1})_{kl}^{ij} := \sum_{m=0}^{\min(N-1-i,j)} \delta_{l,i-m} \delta_{k,j+m} \frac{\{k\}! \{N-1-l\}!}{\{j\}! \{m\}! \{N-1-i\}!} \\ \times (-1)^m q^{-(i-(N-1)/2)(j-(N-1)/2)-m(i-j)/2+m(m+1)/4} \quad (4.2)$$

**Proposition 4.4.**  $(R, \mu, q^{(N^2-1)/4}, 1)$  est un opérateur de Yang-Baxter augmenté.

*Démonstration.* Remarquons que  $R$  est en fait le flip de la  $R$ -matrice du corollaire 2.41 en posant  $[x]! = \frac{\{x\}!}{(s-s^{-1})^x}$  et  $s = q^{1/2}$ . Par conséquent, le point (a) de la définition 42 est satisfait.

Les point (b) et (c) sont démontrés au lemme 4.5 de (Murakami et Murakami, 2001).  $\square$

**Définition 44.** Soit un entier  $N \geq 1$ ,  $V := \mathbb{C}^N$  et  $R$  et  $\mu$  tels que définis plus haut. Le *polynôme de Jones coloré de dimension  $N$* , noté  $J_N(L; q)$  pour  $L$  un entrelacs, est défini comme

$$J_N(L; q) := T_{(R, \mu, q^{(N^2-1)/4}, 1)}(\beta) \times \frac{\{1\}}{\{N\}},$$

où  $\beta$  est une présentation de tresse de  $L$ .

**Exemple 23.** Calculons le polynôme de Jones coloré de dimension  $N$  pour le nœud trivial. Le nœud trivial, que nous noterons  $\beta_o$ , peut être représenté par la tresse suivante :



Figure 4.14: Représentation du nœud trivial par une tresse

On a donc  $\omega(\beta_o) = 0$  et  $n = 1$ , car la tresse n'a qu'un seul brin. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 J_N(\beta_o, q) &= T_{(R, \mu, q^{(N^2-1)/4}, 1)}(\beta_o) \times \frac{\{1\}}{\{N\}} \\
 &= q^{((N^2-1)/4)(-\omega(\beta_o))} 1^{-n} \text{Tr}_1(\text{Tr}_2(\dots(\text{Tr}_n(\Phi(\beta_o)\mu^{\otimes n}))\dots)) \times \frac{\{1\}}{\{N\}} \\
 &= \text{Tr}_1(\Phi(\beta_o)\mu) \times \frac{\{1\}}{\{N\}} \\
 &= \text{Tr}_1(\mu) \times \frac{\{1\}}{\{N\}} \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} q^{(2i-N+1)/2} \times \frac{\{1\}}{\{N\}}. \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

On a que  $a_n = q^n a_0$  avec  $a_0 = q^{(-N+1)/2}$  est une suite géométrique de raison  $q$ . Ainsi, la série géométrique  $\sum_{i=0}^{N-1} a_0 q^i = a_0 \frac{1-q^N}{1-q}$ . Donc,

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_1(\mu) &= \sum_{i=0}^{N-1} q^{(2i-N+1)/2} \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} a_0 q^i \\
 &= a_0 \frac{1-q^N}{1-q} \\
 &= q^{(-N+1)/2} \frac{1-q^N}{1-q} \\
 &= \frac{q^{(-N+1)/2} - q^{N+(-N+1)/2}}{1-q}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q^{-N/2}q^{1/2} - q^{N/2}q^{1/2}}{1 - q} \\
&= \frac{q^{-N/2} - q^{N/2}}{q^{-1/2} - q^{1/2}} \\
&= \frac{-\{N\}}{-\{1\}} = \frac{\{N\}}{\{1\}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

En remplaçant dans l'équation (4.3), on obtient

$$\begin{aligned}
J_N(\beta_o, q) &= \sum_{i=0}^{N-1} q^{(2i-N+1)/2} \times \frac{\{1\}}{\{N\}} \\
&= \frac{\{N\}}{\{1\}} \times \frac{\{1\}}{\{N\}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

**Lemme 4.5.** *Soit  $L_+$ ,  $L_-$  et  $L_0$  les diagrammes d'écheveau d'entrelacs qui diffèrent en un seul voisinage d'un point (voir figure 1.11). On a la relation suivante :*

$$qJ_2(L_+; q) - q^{-1}J_2(L_-; q) = (q^{1/2} - q^{-1/2})J_2(L_0; q).$$

*Démonstration.* (Murakami, 2010, p. 9). □

*Remarque.* Le polynôme de Jones original,  $V(L; q)$ , satisfait

$$q^{-1}V(L_+; q) - qV(L_-; q) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(L_0; q)$$

comme il a été défini dans la section 1.2.2 du chapitre 1 ((Jones, 1985, p. 107), théorème 12). On a donc  $J_2(L; q) = (-1)^{\#(L)-1}V(L; q^{-1})$ , où  $\#(L)$  dénote le nombre de composante de  $L$ .

#### 4.4 Calcul du polynôme de Jones coloré pour le nœud figure-huit

Dans cette section, nous calculons le polynôme de Jones coloré pour le nœud figure-huit. Les calculs sont tirés de (Murakami, 2010).

Reprenons notre tresse habituelle  $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$ . La fermeture de  $\beta$ ,  $E$ , est le nœud figure-huit. On veut calculer  $J_N(E; q)$ . Or, d'après le lemme 3.9 de (Kirby et Melvin, 1991),  $\text{Tr}_2(\text{Tr}_3(\Phi(\beta)(\text{id} \otimes \mu \otimes \mu))) \in \text{End}(V)$  est un multiple scalaire. Nous allons donc calculer ce dernier plutôt que  $\text{Tr}_1(\text{Tr}_2(\text{Tr}_3(\Phi(\beta)\mu^{\otimes 3}))) \in \mathbb{C}$  (voir la figure 4.15). Par conséquent,  $\text{Tr}_1(\text{Tr}_2(\text{Tr}_3(\Phi(\beta)\mu^{\otimes 3})))$  est la trace de  $\mu$  multiplié

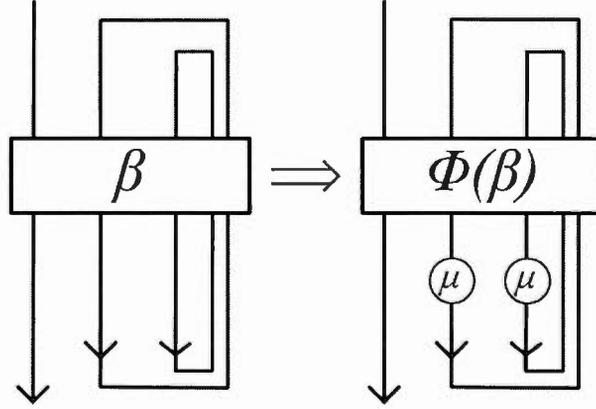


Figure 4.15: Fermeture d'une tresse sauf le premier brin

par ce scalaire  $S$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
 T_{(R, \mu, q^{(N^2-1)/4}, 1)}(\beta) &= q^{-\omega(\beta)(N^2-1)/4} \text{Tr}_1(\text{Tr}_2(\text{Tr}_3(\Phi(\beta)\mu^{\otimes 3}))) \\
 &= q^{-\omega(\beta)(N^2-1)/4} \text{Tr}_1(S\mu) \\
 &= q^{-\omega(\beta)(N^2-1)/4} \sum_{i=0}^{N-1} S q^{(2i-N+1)/2} \\
 &= q^{-\omega(\beta)(N^2-1)/4} \frac{\{N\}}{\{1\}} S.
 \end{aligned}$$

La dernière ligne est due à l'égalité (4.4). Or, comme le montre le calcul de l'exemple 22, on obtient  $\omega(\beta) = 0$ , donc  $J_N(E; q) = S$ .

Pour calculer le scalaire  $S$ , nous devons tracer le diagramme de la fermeture de la tresse  $\beta$ , mais en laissant ouvert le premier brin (figure 4.16a). Fixons une base  $\{e_0, e_1, \dots, e_{N-1}\}$  de  $\mathbb{C}^N$ .

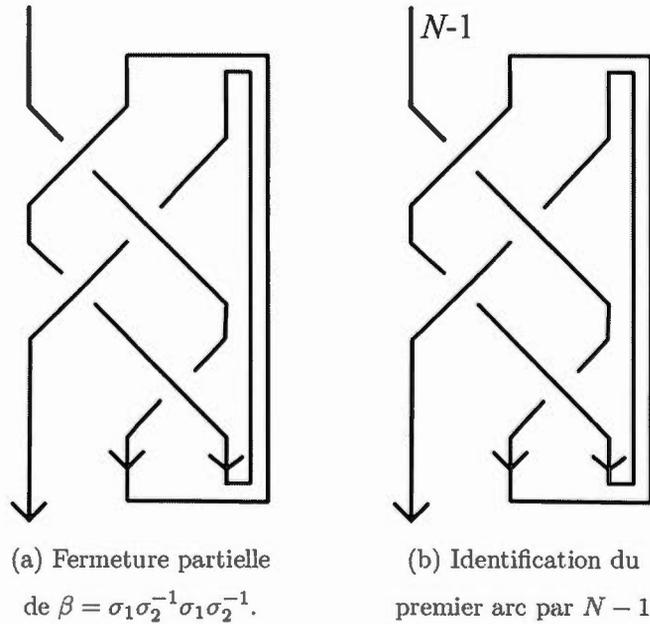


Figure 4.16: Fermeture partielle de la tresse et identification du premier arc

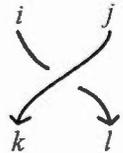
Identifions chaque arc à l'aide d'un entier positif  $i$  plus petit que  $N$  en correspondance avec un élément de la base  $e_i$ . Les arcs sont délimités par les croisements de la tresse de façon à ce que quatre arcs se rencontrent à chaque croisement. Puisque  $\text{Tr}_2(\text{Tr}_3(\Phi(\beta)(\text{id} \otimes \mu \otimes \mu)))$  est un multiple scalaire, on choisit n'importe quelle base pour le premier arc (en haut à gauche) de la figure 4.16a. Par souci de simplicité, nous choisissons  $e_{N-1}$  et identifions donc le premier arc par  $N - 1$  (figure 4.16b).

Rappelons qu'une  $R$ -matrice et son inverse sont associés aux croisements de la façon suivante :

$$\begin{array}{c} i \\ \swarrow \\ \downarrow k \end{array} \begin{array}{c} j \\ \searrow \\ \downarrow l \end{array} \Rightarrow R_{kl}^{ij}, \quad \begin{array}{c} i \\ \swarrow \\ \downarrow k \end{array} \begin{array}{c} j \\ \searrow \\ \downarrow l \end{array} \Rightarrow (R^{-1})_{kl}^{ij}.$$

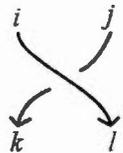
Nous identifierons donc les autres arcs suivants les deux règles ci-dessous.

- (i) À un croisement positif, l'identifiant de l'arc en haut à gauche est plus petit ou égal à celui de l'arc en bas à droite et l'identifiant de l'arc en haut à droite est plus grand ou égal à celui de l'arc en bas à gauche. De plus, leur différence coincide (voir (4.1)). Autrement dit, on a



$$: i + j = k + l, l \geq i, k \leq j.$$

- (ii) À un croisement négatif, l'identifiant de l'arc en haut à gauche est plus grand ou égal à celui de l'arc en bas à droite et l'identifiant de l'arc en haut à droite est plus petit ou égal à celui de l'arc en bas à gauche. De plus, leur différence coincide (voir (4.2)). Autrement dit, on a



$$: i + j = k + l, l \leq i, k \geq j.$$

Par la règle (i), l'arc qui suit celui identifié par  $N - 1$  devrait également être identifié par  $N - 1$ . Ainsi, la différence entre les deux arcs est de 0 (figure 4.17a). C'est pour cette raison que nous avons choisi  $N - 1$  comme étiquette pour le tout premier arc.

Toujours dans le même croisement, on identifie l'arc en haut à droite par  $i$  avec  $0 \leq i \leq N - 1$ . Par conséquent, la différence calculée plus tôt étant de 0, l'arc en bas à gauche de ce croisement doit aussi être identifié par  $i$  (figure 4.17b).

Passons maintenant au croisement suivant. Les deux arcs illustrés à la figure 4.18a sont identifiés par  $j$  et  $k$  avec  $0 \leq j \leq N - 1$  et  $0 \leq k \leq N - 1$ . Ainsi, la différence de ce second croisement est  $N - k - 1$  (c'est l'arc d'en haut à gauche moins celui d'en bas à droite). Par la règle (ii), l'arc restant du croisement doit donc être identifié par  $N - k + j - 1$  (figure 4.18b). De plus, puisque les étiquettes doivent être plus petites que  $N$ , on a que  $j - k \leq 0$ .

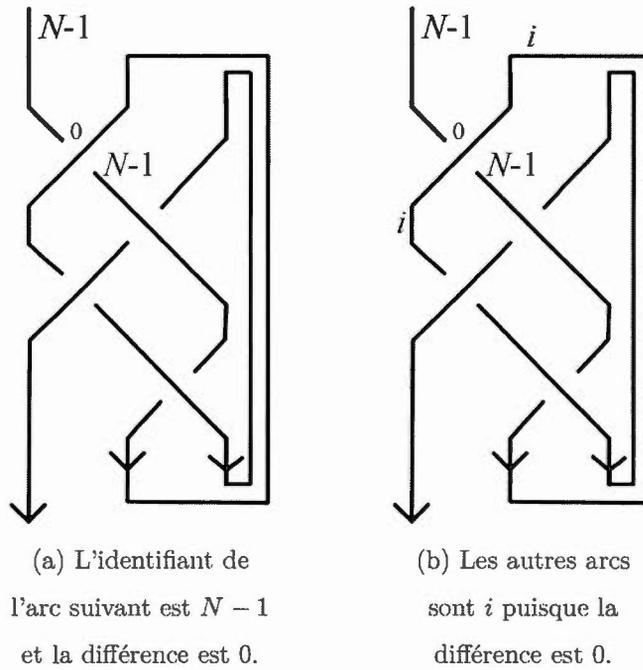


Figure 4.17: Identification des arcs suivants

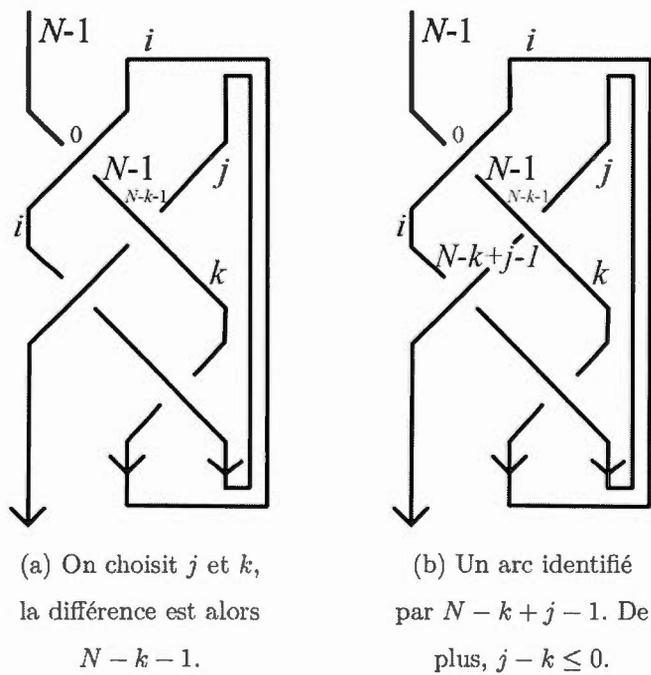


Figure 4.18: Suite de l'identification des arcs

Appliquons la règle (ii) sur le troisième croisement, celui d'en bas à droite. On voit que  $i \geq k$  et que la différence entre l'arc d'en bas à gauche et celui d'en haut à droite est  $i - k$ . L'arc en haut à gauche de ce croisement devrait donc être identifié par  $i + j - k$  (figure 4.19a).

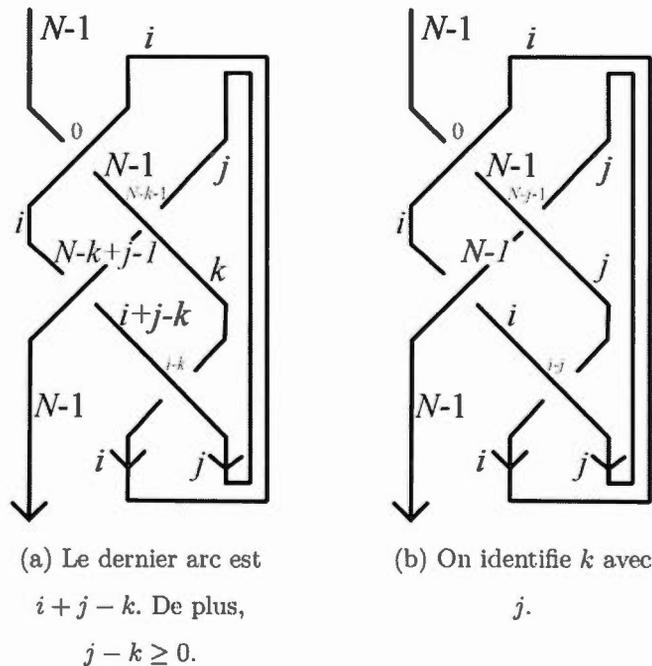


Figure 4.19: Identification des derniers arcs

Ainsi, le dernier arc non identifié doit être  $N - 1$ , comme prévu. Or, par la règle (i), on a que  $i + j - k \geq i$  et donc  $j - k \geq 0$ . En combinant cette dernière égalité avec  $j - k \leq 0$  trouvé plus haut, on obtient  $k = j$ . La figure 4.19b illustre cette nouvelle identification.

Il est maintenant possible de calculer le polynôme de Jones :

$$\begin{aligned}
 J_N(E; q) &= \sum_{i \geq j} R_{i, N-1}^{N-1, i} (R^{-1})_{N-1, j}^{N-1, j} R_{N-1, i}^{i, N-1} (R^{-1})_{i, j}^{i, j} \mu_j^j \mu_i^i \\
 &= \sum_{i \geq j} (-1)^{N-1+i} \frac{\{N-1\}! \{i\}! \{N-1-j\}!}{(\{j\}!)^2 \{i-j\}! \{N-1-i\}!} \\
 &\quad \times q^{(-i-i^2-2ij-2j^2+3N+6Ni+2Nj-3N^2)/4}.
 \end{aligned}$$

Cette dernière équation requiert l'utilisation de deux sommations. Pour n'en utiliser qu'une seule, nous devons considérer le nœud figure-huit  $E$  comme la fermeture d'un  $(1, 1)$ -enchevêtrement (comme l'illustre la figure 4.20). L'identification des arcs est obtenue par la même méthode que précédemment, mais en commençant avec 0 plutôt que  $N-1$ . Dans le cas de cet enchevêtrement, on doit placer  $\mu$  à chaque minimum local où l'arc va de gauche à droite et  $\mu^{-1}$  à chaque minimum local où l'arc va de droite à gauche (voir (Kirby et Melvin, 1991), théorème 3.6).

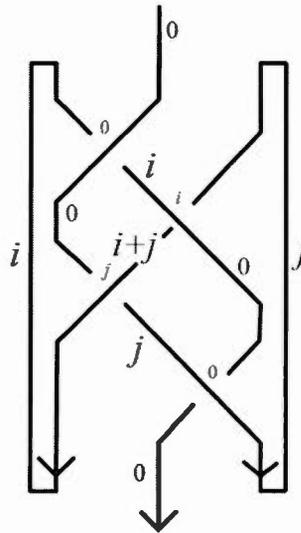


Figure 4.20: Nœud figure-huit vu comme la fermeture d'un  $(1, 1)$ -enchevêtrement.

De la figure 4.20, on obtient cette nouvelle équation :

$$\begin{aligned}
J_N(E; q) &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq N-1 \\ 0 \leq i+j \leq N-1}} R_{0,i}^{i,0} (R^{-1})_{i+j,0}^{i,j} R_{i,j}^{0,i+j} (R^{-1})_{0,j}^{j,0} (\mu^{-1})_i^i \mu_j^j \\
&= \sum_{\substack{0 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq N-1 \\ 0 \leq i+j \leq N-1}} (-1)^i \frac{\{i+j\}! \{N-1\}!}{\{i\}! \{j\}! \{N-1-i-j\}!} \\
&\quad \times q^{-(N-1)i/2 + (N-1)j/2 - i^2/4 + j^2/4 - 3i/4 + 3j/4}.
\end{aligned}$$

En posant  $k := i + j$ , on obtient

$$J_N(E; q) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\{N-1\}!}{\{N-1-k\}!} q^{k^2/4 + Nk/2 + k/4} \left( \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{\{k\}!}{\{i\}! \{k-i\}!} q^{-Ni - ik/2 - i/2} \right).$$

En utilisant la formule suivante (démontrée dans (Murakami et Murakami, 2001), lemme 3.2)

$$\sum_{g=1}^k (-1)^g q^{gi/2} \frac{\{k\}!}{\{i\}! \{k-i\}!} = \prod_{g=1}^k (1 - q^{(l-k+1)/2-g}),$$

on obtient l'équation ci-dessous n'utilisant qu'une seule sommation :

$$J_N(E; q) = \frac{1}{\{N\}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\{N+k\}!}{\{N-1-k\}!}. \tag{4.5}$$

Nous devons cette dernière formule à (Habiro, 2000) et (Lê, 2003).

#### 4.5 Conjecture du volume

Dans (Kashaev, 1995), l'auteur construit un invariant d'entrelacs  $\langle L \rangle_N \in \mathbb{C}$ , pour  $N > 1$  un entier et  $L$  un entrelacs. Puis, dans (Kashaev, 1997), il avance que la limite  $2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \log |\langle K \rangle_N|/N$  est égale au volume hyperbolique du complément d'un nœud  $K$  lorsque ce dernier est hyperbolique.

Dans (Murakami et Murakami, 2001), les auteurs ont démontré que l'invariant de Kashaev est égal au polynôme de Jones coloré de dimension  $N$  évalué à la  $N$ -ième racine de l'unité, c'est-à-dire  $\langle L \rangle_N = J_N(L; \exp(2\pi\sqrt{-1}/N))$ . Ils ont ainsi fait l'hypothèse que la conjecture de Kashaev est vraie non seulement pour les nœuds

hyperboliques, mais aussi pour n'importe quel autre nœud de  $\mathbb{S}^3$  en utilisant le volume simplicial.

Dans cette section, nous énoncerons la conjecture du volume et en ferons la démonstration pour le nœud figure-huit. Nous finirons par une liste des nœuds ou entrelacs pour laquelle la conjecture a été démontrée jusqu'à maintenant.

**Conjecture** (Conjecture du volume (Murakami et Murakami, 2001) et (Kashaev, 1997)). *L'égalité suivante est vraie pour tout nœud  $K$ .*

$$2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |J_N(K; \exp(2\pi\sqrt{-1}/N))|}{N} = \text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K).$$

#### 4.5.1 Conjecture du volume pour le nœud figure-huit

L'équation (4.5) permet de calculer la limite ci-dessus pour le nœud figure-huit.

Par un calcul simple, on obtient

$$J_N(E; q) = \sum_{j=0}^{N-1} \prod_{k=1}^j (q^{(N-k)/2} - q^{-(N-k)/2}) (q^{(N+k)/2} - q^{-(N+k)/2}). \quad (4.6)$$

En posant  $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$ , on a

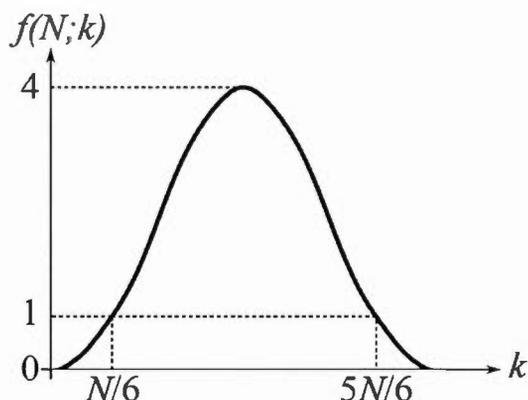
$$J_N(K; \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)) = \sum_{j=0}^{N-1} \prod_{k=1}^j f(N; k),$$

où  $f(N; k) = 4 \sin^2(k\pi/N)$ . La fonction  $f(N; k)$  est représentée à la figure 4.21.

Posons  $g(N; j) = \prod_{k=1}^j f(N; k)$ . Elle est décroissante lorsque  $0 < j < N/6$  et  $5N/6 < j$  et croissante lorsque  $N/6 < j < 5N/6$ . Son maximum est donc en  $j = 5N/6$ . Plus précisément, nous devons prendre la partie entière de  $5N/6$ , car  $j$  est un entier. Le tableau de variation de  $f(N; k)$  et  $g(N; j)$  est représenté au tableau 4.1.

Il y a  $N$  termes positifs dans  $J_N(E; \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)) = \sum_{j=0}^{N-1} g(N; j)$  et  $g(N; 5N/6)$  est le terme maximal, donc

$$g(N; 5N/6) \leq J_N(E; \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)) \leq N \times g(N; 5N/6).$$

Figure 4.21: La fonction  $f(N; k)$ Tableau 4.1: Tableau de variation de  $f(N; k)$  et  $g(N; j)$ 

$j$	0	...	$N/6$	...	$5N/6$	...	1
$f(N; k)$		$< 1$	1	$> 1$	1		$< 1$
$g(N; j)$	1	$\searrow$		$\nearrow$	maximum		$\searrow$

Puisque chaque côté de l'inégalité est positif, on peut prendre leur logarithme et les diviser par  $N$ , on obtient

$$\frac{\log g(N; 5N/6)}{N} \leq \frac{\log J_N(E; \exp(2\pi\sqrt{-1}/N))}{N} \leq \frac{\log N}{N} + \frac{\log g(N; 5N/6)}{N}.$$

Or,  $\lim(\log N)/N = 0$  lorsque  $N$  tend vers l'infini. Par conséquent,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log g(N; 5N/6)}{N} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log J_N(E; \exp(2\pi\sqrt{-1}/N))}{N} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log g(N; 5N/6)}{N}.$$

Il s'en suit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log J_N(E; \exp(2\pi\sqrt{-1}/N))}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log g(N; 5N/6)}{N}.$$

Rappelons-nous que  $g(N; j) = \prod_{k=1}^j f(N; k)$ . Nous calculerons la limite par inté-

gration. Ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log g(N; 5N/6)}{N} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{5N/6} \log f(N; k) \\
&= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{5N/6} \log(2 \sin(k\pi/N)) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{5\pi/6} \log(2 \sin x) dx.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Rappelons-nous la fonction de Lobachevsky de la définition 39 :

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^{\theta} \log |2 \sin u| du,$$

avec  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . En transformant l'équation (4.7), on obtient l'égalité suivante

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log J_N(E; \exp(2\pi\sqrt{-1}/N))}{N} = -\frac{2}{\pi} \Lambda(5\pi/6). \tag{4.8}$$

Par le lemme 3.2 (a), on a

$$\Lambda(5\pi/6) = \Lambda(-\pi/6) = -\Lambda(\pi/6).$$

En utilisant en plus le lemme 3.2 (b), on obtient

$$\Lambda(\pi/3) = 2\Lambda(\pi/6) + 2\Lambda(2\pi/3) = 2\Lambda(\pi/6) - 2\Lambda(\pi/3).$$

Il s'en suit que

$$\Lambda(5\pi/6) = -\frac{3}{2} \Lambda(\pi/3).$$

Par conséquent, l'équation (4.8) devient

$$2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log J_N(E; \exp(2\pi\sqrt{-1}/N))}{N} = 6\Lambda(\pi/3),$$

ce qui est égal au volume hyperbolique du nœud figure-huit calculé à la section 3.3, au chapitre 3. La conjecture du volume est donc vérifiée pour le nœud figure-huit.

#### 4.5.2 Nœuds pour lesquels la conjecture du volume est démontrée

La démonstration de la conjecture du volume pour le nœud figure-huit ayant constitué une tâche ardue, il est facile d'imaginer la complexité et la diversité des arguments dans les démonstrations pour les autres entrelacs et nœuds. Chaque cas doit être traité individuellement et demande de nombreux calculs géométriques et numériques. La conjecture du volume a été démontrée pour les nœuds et entrelacs suivants :

1. nœud figure-huit par Ekholm ;
2. nœud  $5_2$  par Kashaev et Yokota ;
3. doubles de Whitehead des nœuds toriques (Zheng, 2007) ;
4. nœuds toriques (Kashaev et Tirkkonen, 2003) ;
5. entrelacs toriques de type  $(2, 2m)$  (Hikami, 2004) ;
6. nœuds et entrelacs ayant un volume nul (Van der Veen, 2008a) ;
7. anneaux Borroméens (Garoufalidis et Lê, 2005) ;
8. entrelacs de Whitehead tordus (Zheng, 2007) ;
9. chaînes de Whitehead (Van der Veen, 2008b) ;
10. un entrelacs satellite qui est l'entrelacs de Whitehead noué comme le nœud figure-huit (Yamakazi et Yokota, 2010).

## CONCLUSION

L'énoncé de la conjecture du volume requiert un très vaste éventail d'outils provenant de différentes branches des mathématiques : la géométrie hyperbolique, la théorie des groupes quantiques et, bien entendu, la théorie des nœuds. Pour mieux comprendre cette conjecture, nous en avons fait la démonstration pour le nœud figure-huit à titre d'exemple.

Dans un premier temps, les tétraèdres idéaux et la décomposition du complément d'un nœud en composantes hyperboliques et en fibrés de Seifert nous ont servi à calculer le volume simplicial pour le nœud figure-huit.

Les algèbres de Hopf nous ont amenées à définir les algèbres enveloppantes qui à leur tour nous ont permis de définir les algèbres enveloppantes quantiques. Après l'étude de ces algèbres pour l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , nous avons construit une  $R$ -matrice universelle pour  $\overline{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  à l'aide de l'équation de Yang-Baxter et des bialgèbres tressées. Tous ces outils nous ont permis de définir le polynôme de Jones coloré et d'en faire le calcul pour le nœud figure-huit.

Une fois le polynôme de Jones coloré et le volume simplicial définis, nous avons pu énoncer la conjecture du volume et en donner une démonstration pour le nœud figure-huit.

Considérant la diversité et la complexité des arguments utilisés pour uniquement le nœud figure-huit, une démonstration globale de la conjecture semble difficile. Il pourrait être intéressant de trouver une démonstration qui regroupe une des deux catégories de nœuds pour lesquels la conjecture n'a pas encore été démontrée : les

nœuds satellites et hyperboliques. Il est cependant possible qu'une approche plus numérique permette de trouver la solution. Cette question pourrait être l'objet d'un autre travail.

## BIBLIOGRAPHIE

- Adams, C. C. (1994). *The Knot Book*. W.H. Freeman and Company, New York.
- Alexander, J. W. (1923). A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 9(3), 93–95. Récupéré de [www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/alexlem.pdf](http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/alexlem.pdf)
- Benedetti, R. et Petronio, C. (2012). *Lectures on hyperbolic geometry*. Springer Science and Business Media.
- Birman, J. S. (1975). *Braids, Links, and Mapping Class Groups*. AM-82. Princeton University Press.
- Brannan, D., Esplen, M. et Gray, J. (1999). *Geometry*. Cambridge University Press.
- Chmutov, S., Duzhin, S. et Mostovoy, J. (2011). Introduction to Vassiliev Knot Invariants. *Cambridge University Press*. Récupéré de [arxiv.org/abs/1103.5628](http://arxiv.org/abs/1103.5628)
- Epstein, D. B. et Petronio, C. (1994). An Exposition of Poincaré's Polyhedron Theorem. *L'Enseignement Mathématique*, 40, 113–170. Récupéré de [www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=ens-001:1994:40#266](http://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=ens-001:1994:40#266)
- Friedl, S. (sous presse). An introduction to 3-manifolds and their fundamental groups. *Universität Regensburg*.
- Garoufalidis, S. et Lê, T. T. (2005). On the volume conjecture for small angles. Récupéré de [arxiv.org/abs/math/0502163](http://arxiv.org/abs/math/0502163)
- Habiro, K. (2000). On the colored Jones polynomials of some simple links. *Sūri kaiseki kenkyūjo kōkyūroku*, 1172, 34–43. Récupéré de [hdl.handle.net/2433/64431](http://hdl.handle.net/2433/64431)
- Hatcher, A. (2001). Algebraic Topology. Récupéré de [math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf](http://math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf)

- Hempel, J. (2004). *3-manifolds*. AMS Chelsea Publishing Series. AMS Chelsea Pub., American Mathematical Society. Récupéré de [books.google.ca/books?id=eqcJBAAAQBAJ](https://books.google.ca/books?id=eqcJBAAAQBAJ)
- Hikami, K. (2004). Quantum Invariant for Torus Link and Modular Forms. *Communications in Mathematical Physics*, 246(2), 403–426. Récupéré de [arxiv.org/abs/math-ph/0305039](https://arxiv.org/abs/math-ph/0305039)
- Jaco, W. et Shalen, P. (1979). *Seifert Fibered Spaces in 3-Manifolds*. Numéro 220 de American Mathematical Society : Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society. Récupéré de [books.google.fr/books?id=SRjUCQAAQBAJ](https://books.google.fr/books?id=SRjUCQAAQBAJ)
- Johannson, K. (2006). *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, volume 761. Springer.
- Jones, V. F. (1985). A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 12, 103–111. Récupéré de [www.ams.org/journals/bull/1985-12-01/S0273-0979-1985-15304-2/](https://www.ams.org/journals/bull/1985-12-01/S0273-0979-1985-15304-2/)
- Kashaev, R. (1995). A Link Invariant from Quantum Dilogarithm. Récupéré de [arxiv.org/abs/q-alg/9504020](https://arxiv.org/abs/q-alg/9504020)
- Kashaev, R. (1997). The Hyperbolic Volume of Knots from the Quantum Dilogarithm. *Lettes in Mathematical Physics*, 39(3), 269–275. Récupéré de [arxiv.org/abs/q-alg/9601025](https://arxiv.org/abs/q-alg/9601025)
- Kashaev, R. M. et Tirkkonen, O. (2003). Proof of the volume conjecture for torus knots. *Journal of Mathematical Sciences*, 115(1), 2033–2036. Récupéré de [arxiv.org/abs/math/9912210](https://arxiv.org/abs/math/9912210)
- Kassel, C. (1995). *Quantum Groups*. Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag.
- Kirby, R. et Melvin, P. (1991). The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for  $sl(2, \mathbb{C})$ . *Inventiones mathematicae*, 105(1), 473–545. Récupéré de [mathlab.snu.ac.kr/~top/quantum/article/Kirby01.pdf](https://mathlab.snu.ac.kr/~top/quantum/article/Kirby01.pdf)
- Klimyk, A. U. et Schmüdgen, K. (1997). *Quantum Groups and Their Representations*. Graduate texts in Mathematics. Springer.
- Lê, T. T. Q. (2003). Quantum invariants of 3-manifolds : integrality, splitting, and perturbative expansion. *Topology and its Applications*, 127(1-2), 125–152. Récupéré de [arxiv.org/abs/math/0004099](https://arxiv.org/abs/math/0004099)
- Lackenby, M. (2000). *Notes for graduate hyperbolic manifolds course*. University

- of Oxford, St. Catherine's College. Récupéré de [people.maths.ox.ac.uk/lackenby/](http://people.maths.ox.ac.uk/lackenby/)
- Lang, S. (2002). *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New-York.
- Lewallen, S. (2008). *The Volume Conjecture*. (Senior thesis). Harvard University. Récupéré de [www.math.ucsd.edu/~k3walsh/standalonech1.pdf](http://www.math.ucsd.edu/~k3walsh/standalonech1.pdf)
- Lickorish, W. B. R. (1997). *An Introduction to Knot Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York.
- Livingston, C. (1993). *Knot Theory*. Numéro 24 de Carus Monographs. Mathematical Association of America. Récupéré de [books.google.ca/books?id=KXAS3KRZGRMC](http://books.google.ca/books?id=KXAS3KRZGRMC)
- Manturov, V. (2004). *Knot Theory*. CRC Press. Récupéré de [varf.ru/rudn/manturov/book.pdf](http://varf.ru/rudn/manturov/book.pdf)
- Markoff, A. (1936). Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe. *Recueil mathématique*, 43(1), 73–78. Récupéré de [mi.mathnet.ru/eng/msb5359](http://mi.mathnet.ru/eng/msb5359)
- Matsuzaki, K. et Taniguchi, M. (1998). *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*. Clarendon Press.
- Murakami, H. (2000). Kashaev's invariant and the volume of a hyperbolic knot after Y. Yokota. Récupéré de [arxiv.org/pdf/math/0008027.pdf](http://arxiv.org/pdf/math/0008027.pdf)
- Murakami, H. (2010). An Introduction to the Volume Conjecture. Récupéré de [arxiv.org/abs/1002.0126](http://arxiv.org/abs/1002.0126)
- Murakami, H. et Murakami, J. (2001). The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot. *Acta Mathematica*, 186(1), 85–104. Récupéré de [projecteuclid.org/download/pdf\\_1/euclid.acta/1485891370](http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.acta/1485891370)
- Ocampo, H., Paycha, S. et Vargas, A. (2005). *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory*, volume 668 de *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Purcell, J. S. (2010). *Hyperbolic Knot Theory*. Récupéré de [users.monash.edu/~jpurcell/papers/hyp-knot-theory.pdf](http://users.monash.edu/~jpurcell/papers/hyp-knot-theory.pdf)
- Ratcliffe, J. (2006). *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149. Springer Science and Business Media.
- Reidemeister, K. (1948). *Knot Theory*. New York : Chelsea Publ. and Co.

- Thurston, W. P. (2002). The Geometry and Topology of Three-Manifolds. Récupéré de [library.msri.org/books/gt3m/](http://library.msri.org/books/gt3m/)
- Turaev, V. (1988). The Yang-Baxter equation and invariants of links. *Inventiones mathematicae*, 92, 527–554. Récupéré de [mathlab.snu.ac.kr/~top/quantum/article/Turaev01.pdf](http://mathlab.snu.ac.kr/~top/quantum/article/Turaev01.pdf)
- Van der Veen, R. (2008a). A cabling formula for the coloured Jones polynomial. Récupéré de [arxiv.org/abs/0807.2679](http://arxiv.org/abs/0807.2679)
- Van der Veen, R. (2008b). Proof of the volume conjecture for Whitehead chains. *Acta Mathematica Vietnamica*, 33(3), 421–431. Récupéré de [journals.math.ac.vn/acta/pdf/0803421.pdf](http://journals.math.ac.vn/acta/pdf/0803421.pdf)
- Yamakazi, M. et Yokota, Y. (2010). On the limit of the coloured Jones polynomial of a Non-simple link. *Tokyo Journal of Mathematics*, 33(2), 537–551. Récupéré de [projecteuclid.org/euclid.tjm/1296483487](http://projecteuclid.org/euclid.tjm/1296483487)
- Zheng, H. (2007). Proof of the volume conjecture for Whitehead doubles of a family of torus knots. *Chinese Annals of Mathematics Series B*, 28(4), 375–388. Récupéré de [arxiv.org/abs/math/0508138](http://arxiv.org/abs/math/0508138)