UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LA NOTION DE PROBLÈME DANS L'INTERVENTION ORTHOPÉDAGOGIQUE EN MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

PRESENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAITRISE EN ÉDUCATION

PAR

MARIE AUDET

MARS 2017

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.07-2011). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Au terme de la réalisation de ce mémoire de recherche en éducation, je tiens d'abord à remercier Jacinthe Giroux, qui a dirigé mon projet. Madame Giroux est professeure au Département d'éducation et de formation spécialisées à l'Université du Québec à Montréal (UQAM). Sa passion communicative pour la didactique des mathématiques ainsi que sa patience et sa générosité m'ont soutenue tout au long de ce processus. Cette recherche n'aurait pas atterri sans son aide et son accompagnement. Je tiens aussi à remercier Christophe Roiné, professeur au Département des sciences de l'éducation à l'Université Victor Segalen Bordeaux 2, et anciennement professeur à l'UQAM, avec qui j'ai suivi mes premiers cours à la maîtrise et qui m'a amenée à oser la maîtrise avec mémoire. Un merci tout spécial s'adresse également aux deux élèves qui ont participé en tant que sujet de la recherche.

Dans une optique plus personnelle, je tiens à remercier Julie Dubé, Langis Côté et Catherine Audet. Madame Dubé, précieuse amie et collègue de travail, a partagé mes joies et mes doutes pendant les cinq années de la maitrise. Son soutien moral a été indispensable. Monsieur Côté, grâce à son expérience en recherche, a alimenté mon raisonnement et ma progression dans la dernière année. Finalement, Catherine, ma mère, a, malgré elle, permis la réalisation de ce rêve d'enfant.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS ii

TABLE DES MATIÈRES iii

LISTE DES FIGURES x

LISTE DES TABLEAUX xi

LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES xii

RÉSUMÉ xiii

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I 4

PROBLÉMATIQUE 4

1.1 Historique et contexte de l'orthopédagogie 4

1.2 L'intérêt croissant pour l'intervention orthopédagogique en mathématiques. 6

1.3 L'impact d'une approche par compétences sur l'intervention orthopédagogique en mathématiques 7

1.4 La place et le rôle de la notion de situation problème dans le programme scolaire québécois (PFÉQ) 8

1.4.1 Les compétences en mathématiques du PFÉQ (MELS, 2006) au regard de la TSD 10

1.4.2 La compétence Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques au regard de la TCC 13

1.5 Objectifs de la recherche 14

CHAPITRE II 16

CADRE THÉORIQUE 16

2.1 La résolution de problèmes à énoncé dans la transmission des connaissances 16

2.1.1 Résolution de problèmes et psychologie cognitive 18

2.1.2 Résolution de problèmes et didactique des mathématiques 25

2.2 Spécificités didactiques dans l'enseignement aux élèves en difficulté 26

2.2.1 Les difficultés et les phénomènes relatifs à l'installation des mesures d'aide pour l'élève en difficulté 30

2.2.2 Une proposition didactique pour l'aide individualisée 35

2.3 Le champ conceptuel multiplicatif 37

2.3.1 Les opérations de multiplication et de division 39

2.3.2 La structure d'isomorphismes de mesures 40

2.3.3 Les cas d'un seul espace de mesure 49

2.3.4 Les produits de mesures 51

2.4 Objectifs spécifiques de l'étude 54

CHAPITRE III 56

MÉTHODOLOGIE 56

3.1 Participants....56

3.2 La séquence orthopédagogique....57

3.2.1 L'entretien orthopédagogique initial....57

3.2.2 Intervention orthopédagogique en sous-groupe....60

3.3 La collecte de données....76

3.4 L'analyse de données....76

3.4.1 Analyse des conduites mathématiques des élèves....76

3.4.2 Analyse didactique de l'intervention relative aux repères et balises....77

3.5 Considérations éthiques....77

CHAPITRE IV....79

ANALYSE DES CONDUITES MATHÉMATIQUES DES ÉLÈVES....79

4.1 Esquisse des connaissances des élèves sur la base de l'entretien orthopédagogique....80

4.1.1 Élève 1 (E1)....80

4.1.2 Élève 2 (E2)....82

4. 2 Conduites des élèves au jeu des étoiles....83

4.2.1 Élève 1 (E1)....84

4.2.2 Élève 2 (E2)....86

4. 3 Conduites des élèves aux problèmes à un seul espace de mesure (problèmes scalaires)....88

4. 3.1 Élève 1 (E1)....89

4. 3.2 Élève 2 (E2) 92

4.4 Conduites des élèves aux tâches connexes au jeu des étoiles et aux situations des poissons et des poires 96

4.4.1 Élève 1 (E1) 97

4.4.2 Élève 2 (E2) 110

4.5 Conclusion sur les analyses des conduites des élèves 117

4.5.1 Élève 1 (E1) 117

4.5.2 Élève 2 (E2) 118

4.6 Conclusion sur les situations expérimentées 119

4.6.1 Sur le rapport au jeu effectif et au jeu simulé sur la feuille de route ..119

4.6.2 Sur les situations des poissons et des poires et les énoncés de problèmes scalaires 121

4.6.3 Sur les énoncés de problèmes de type isomorphismes de mesures et la propriété de la distributivité 123

CHAPITRE V 125

ANALYSE DIDACTIQUE DE L'INTERVENTION RELATIVE AUX REPÈRES ET BALISES 125

5.1 Nécessité d'élargir le caractère d'utilité des connaissances 125

5.1.1 Favoriser la dévolution 126

5.1.2 Proposer différents supports et différentes situations autour des mêmes connaissances visées 129

5.1.3 Favoriser une institutionnalisation mesurée....131
5.2 Maintenir un enjeu mathématique, soit l'interaction élève/milieu....132
5.2.1 Sensibilité aux savoirs mobilisés autres que ceux visés à priori....133
5.2.2 Allègement du milieu....134
5.2.3 Adidacticité calibrée....135
CHAPITRE VI....140
CONCLUSION....140
6.1 Le rapport entre la transformation des connaissances des élèves et les situations de référence....144
6.2 La recherche de la dévolution et du maintien de l'activité de l'élève par la prise en compte de repères dans la planification et le pilotage de la séquence146
6.3 Limites et perspectives....149
ANNEXE A....150
ENTRETIEN ORTHOPÉDAGOGIQUE - ANALYSE A PRIORI....150
ANNEXE B....163
ENTRETIEN ORTHOPÉDAGOGIQUE....163
ANNEXE C....179
JEU DES ÉTOILES....179

ANNEXE D 186

PROBLÈMES DES POISSONS 186

ANNEXE E 197

PROBLÈMES DES POIRES 197

ANNEXE F 205

FEUILLES DE ROUTE À COMPLÉTER 205

F.1 Feuille de route à compléter : quatrième période 206

F.2 Feuille de route à compléter : cinquième période 207

F.3 Feuille de route à compléter : sixième période 208

ANNEXE G 209

ÉNONCÉS DE PROBLÈMES 209

ANNEXE H 211

SÉQUENCES DE PROBLÈMES 211

H.1 Deux séquences de trois problèmes d'isomorphismes de mesures 212

H.2 Séquence de trois problèmes à un seul espace de mesure 214

H.3 Séquence de trois problèmes mettant en lien la structure d'isomorphismes de mesures et les problèmes à un seul espace de mesure 215

H.4 Deux séquences de trois problèmes mettant en œuvre la distributivité de la multiplication sur l'addition 216

ANNEXE I.....218

QUI JOUE AVEC QUI?.....218

I.1 Premier problème 219

I.2 Deuxième problème.....220

RÉFÉRENCES 221

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
5.1	Favoriser la dévolution	137

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
3.1	Distribution des problèmes par structure.....	58
3.2	Premier repère.....	59
3.3	Deuxième repère.....	60
4.1	Stratégies de E1 au Jeu des étoiles.....	84
4.2	Stratégies de E2 au Jeu des étoiles.....	86
4.3	Stratégies de E1 aux problèmes des poissons.....	88
4.4	Stratégies de E1 aux problèmes des poires.....	89
4.5	Stratégies de E2 aux problèmes des poissons.....	91
4.6	Stratégies de E2 aux problèmes des poires.....	93
4.7	Enchaînement des tâches connexes au Jeu des étoiles et à la situation des poires.....	96
4.8	Première feuille de route à compléter – E1.....	97
4.9	Stratégies de E1 aux énoncés de problèmes scalaires de facture classique.....	106
4.10	Première feuille de route à compléter – E2.....	110
4.11	Stratégies de E2 aux énoncés de problèmes scalaires de facture classique.....	114
6.1	Structure du contenu de l'intervention.....	141

LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES

ADOQ	Association des orthopédagogues du Québec
CENOP	Centre d'évaluation neuropsychologique et d'orientation pédagogique
MELS	Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport
OCDE	Organisation de coopération et de développement économiques
PDA	Progression des apprentissages
PFÉQ	Programme de formation de l'école québécoise
SEGPA	Sections d'enseignement général et professionnel adapté
TCC	Théorie des champs conceptuels
TSD	Théorie des situations didactiques
UQAM	Université du Québec à Montréal

RÉSUMÉ

Le peu de connaissances scientifiques sur l'intervention en orthopédagogie des mathématiques conjugué aux exigences du Programme de formation de l'école québécoise (PFÉQ) relatives à l'usage de situations-problèmes met en évidence le besoin de trouver des pistes d'enseignement/apprentissage en contexte orthopédagogique. Les différents sens de la notion de *situation-problème* dans, d'une part, le PFÉQ, et d'autre part, dans la Théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et la Théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990), sont dans cette recherche confrontés et exploités pour structurer une séquence d'intervention orthopédagogique. Prenant également en compte, les phénomènes didactiques répertoriés par les chercheurs spécifiques au contexte d'adaptation scolaire, notre intervention prend aussi appui sur les repères et balises proposées par Giroux (2013a) pour éprouver une approche didactique en orthopédagogie des mathématiques. Cette recherche exploratoire, avec devis qualitatif, vise donc à élaborer et expérimenter une intervention orthopédagogique sur l'apprentissage des structures multiplicatives favorisant l'avancement des connaissances d'élèves du troisième cycle primaire en prenant comme assises théoriques le concept de situation adidactique (Brousseau, 1998), la notion d'énoncés de problèmes (Vergnaud, 1990) et la proposition de repères et balises (Giroux, 2013a). L'analyse des huit séances d'intervention, d'une heure chacune, et précédées d'un entretien orthodidactique individuel auprès des deux élèves fréquentant une classe ordinaire de cinquième année, a permis d'apprécier les effets de cette intervention sur la transformation des connaissances des élèves. L'analyse au regard des repères et balises tend à montrer que la situation adidactique est viable, voire nécessaire, en contexte orthopédagogique si le choix de la situation et de ses valeurs de variables s'appuie sur une planification soignée, basée sur un entretien orthodidactique initial et une analyse à priori. Ces conditions favorisent l'apprentissage et la dévolution des tâches aux élèves, permettent un pilotage rapproché de l'activité mathématique des élèves par l'orthopédagogue, ainsi que le maintien de l'interaction élève/milieu. Nos résultats montrent également que les énoncés classiques de résolution de problèmes peuvent soutenir la décontextualisation des situations adidactiques de référence.

MOTS CLÉS : didactique des mathématiques, situation-problème, intervention orthopédagogique, adaptation scolaire, structures multiplicatives.

INTRODUCTION

Ce projet de recherche provient d'un questionnement sur des difficultés relevées dans ma pratique dans l'enseignement des mathématiques auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage, tant en dénombrement flottant, en orthopédagogie, qu'à titre de titulaire de classes d'adaptation scolaire. Les difficultés scolaires attribuées aux élèves le sont au regard du contenu du Programme de formation de l'école québécoise (PFÉQ) (MELS, 2006). Considérant le rôle que joue la résolution de problèmes dans la discipline mathématique, les élèves référés en orthopédagogie dans cette discipline reçoivent principalement des services qui consistent à l'enseignement d'une démarche de résolution de problèmes. Après avoir exercé cette stratégie d'intervention pendant plusieurs années, j'ai constaté que les élèves faisaient peu de progrès. En fait, ils étaient capables de mettre en application la démarche enseignée, par exemple de repérer la question, d'identifier ce qui est à « chercher » et les données importantes du problème, mais ils n'étaient pas nécessairement en mesure d'établir la relation entre les données et d'identifier la ou les opérations mathématiques à faire. Cela était le cas pour les problèmes complexes, mais aussi pour les problèmes d'application servant à développer la compétence *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques* (*Ibid.*)

Suite à ce constat, le document sur la Progression des apprentissages (PDA) (MELS, 2009a) a été publié, en 2009, et vient préciser les concepts et processus à acquérir en arithmétique. Cette section comporte trois parties distinctes : 1) sens et écriture des nombres; 2) sens des opérations sur les nombres ; 3) opération sur les nombres. La partie *Sens des opérations sur des nombres* (*Ibid.*, p. 9) vise à amener l'élève à *mathématiser une variété de situations illustrant différents sens* (*Ibid.*) L'objectif vise à ce que l'enfant puisse traduire un problème en problèmes plus simples, en plus de

dégager des relations entre les données, pour ultimement atteindre la solution. Ce document met bien en évidence l'importance pour les élèves d'établir un calcul relationnel entre les données, mais aucune stratégie d'enseignement n'est proposée pour soutenir l'élève dans la mise en place de ce calcul.

Mon questionnement a d'abord été orienté sur les différents sens attribués au concept de problème mathématique dans les écrits ministériels. Il s'est ensuite dirigé vers la façon de les utiliser pour permettre aux élèves d'acquérir des connaissances et des savoirs mathématiques. La présente recherche interroge donc la place et le rôle de la notion de problèmes dans l'intervention orthopédagogique. La recherche a été circonscrite aux connaissances et savoirs relatifs à la multiplication.

Le présent mémoire contient six chapitres, soit la problématique, le cadre théorique, la méthodologie, l'analyse des conduites mathématiques des élèves, l'analyse didactique de l'intervention relative aux repères et balises de Giroux (2013a) et la conclusion. La problématique fait état d'un bref historique de la profession d'orthopédagogue et met en évidence le besoin de trouver des pistes pour mieux intervenir en mathématiques auprès des élèves en difficulté dans le contexte actuel, balisé par le PFÉQ. Dans cette même section sont traités les différents sens de la notion de problème dans le programme, mais aussi dans la Théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau, 1998) et dans la Théorie des champs conceptuels (TCC) (Vergnaud, 1990). La problématique termine avec l'objectif général de la recherche.

Le cadre théorique, au chapitre deux, expose d'abord une recension d'écrits sur la résolution de problèmes à énoncé en contexte scolaire. Par la suite sont traitées les spécificités didactiques relatives aux élèves en difficulté dans l'enseignement des mathématiques. Finalement, les aspects théoriques relatifs au champ conceptuel multiplicatif, issus de la TCC, sont approfondis. Suit, dans la troisième partie, l'exposé des aspects méthodologiques mis en oeuvre pour atteindre les objectifs fixés.

Les chapitres quatre et cinq constituent respectivement l'analyse des conduites mathématiques des élèves et l'analyse didactique de l'intervention relative aux repères et balises de Giroux. Ces analyses permettent de dégager la progression des élèves, mais aussi d'analyser les conditions contribuant ou non à leur progression, au regard du choix des tâches, de leur enchâssement et du pilotage de l'intervention.

La conclusion termine la recherche. Elle offre un regard sur l'ensemble de la démarche, permet de mettre en lumière l'apport de l'étude, mais aussi ses limites et perspectives.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 Historique et contexte de l'orthopédagogie

Au Québec, l'orthopédagogie, comme pratique enseignante en soutien aux élèves, est apparue à la fin des années soixante à la suite de la création du ministère de l'Éducation du Québec. Les premières universités à offrir une formation en orthopédagogie ont été l'Université de Sherbrooke et l'Université de Montréal. La formation initiale avait alors pour objectif d'outiller les professionnels à évaluer et intervenir auprès des élèves en difficulté en français, en mathématiques, et également en ce qui concerne les déficits instrumentaux, dont la latéralité et la discrimination visuelle (Laplante, 2012; ADOQ, 2003).

À ses débuts, la profession a été forgée principalement à partir des recherches effectuées au sein des courants instrumental et pédagogique. Durant les années 80, l'aspect instrumental a été abandonné vu l'absence d'un lien de causalité entre les difficultés d'apprentissage et les déficits instrumentaux. Le courant pédagogique, qui a continué à être le moteur du développement de la profession, a, quant à lui, été alimenté par les recherches effectuées dans le champ de la psychologie cognitive. On s'intéressait alors particulièrement aux difficultés d'apprentissage en lecture et en écriture (ADOQ, 2003).

Cet intérêt n'était pas le résultat du hasard. En effet, il est reconnu que le développement des compétences en lecture est nécessaire pour évoluer dans la société et que les élèves ayant des difficultés dans cette sphère sont plus à risque de voir leur cheminement scolaire et professionnel affectés. Au fil des années, de nombreuses

études, dont celle de l'Institut de la statistique du Québec, datant de 2006, et basée sur des données de 2003, ont attribué des retombées positives au développement de la littératie[1] pour la population québécoise. Ces études ont permis d'observer que de bonnes compétences en littératie, notamment en lecture, sont associées à un niveau de scolarité plus élevé et à un plus faible taux de décrochage scolaire. Ces impacts positifs, valorisés mondialement, sont associés à une meilleure capacité des individus à fonctionner dans une société du savoir et d'information. Ce sont les statistiques spécifiques à la lecture qui ont motivé des chercheurs clés, tels Torgesen *et al.* (1999) et Snow *et al.* (1998), à se pencher sur les moyens de prévenir les difficultés en lecture. Il en résulte que les recherches concernant la lecture et l'écriture abondent. Le ratio pour la période 1996-2005 est, selon une recension effectuée par Gersten *et al.* (2007), d'une recherche en mathématiques pour 14 dans le domaine de la lecture/écriture.

L'activité professionnelle de l'orthopédagogue a été teintée de cet écart entre le nombre de travaux en français et en mathématiques puisque, sur la base des connaissances issues des recherches en lecture, des outils de dépistage de la dyslexie ont été construits pour permettre aux professionnels, neuropsychologues, orthophonistes et orthopédagogues, d'identifier les élèves présentant ce trouble d'apprentissage. Les recherches ont également permis de mieux connaitre et de diagnostiquer d'autres troubles d'apprentissage affectant les compétences en lecture et en écriture, dont les troubles du langage. Étant la première ressource professionnelle convoquée auprès de l'élève en difficulté dans la classe ordinaire, l'orthopédagogue est au premier rang dans le dépistage de ces troubles d'apprentissage.

---

[1] Selon Legendre (2005, p.841), la littératie est l'*habileté à lire, à écrire et à calculer.* Toutefois, la littératie est souvent interprétée comme étant uniquement l'habileté à lire et à écrire, ce qui inclut le décodage et la fluidité en lecture. Dans la compréhension populaire, elle s'apparente donc davantage à la lecture et à l'écriture qu'au calcul (Conseil Canadien sur l'Apprentissage, 2013; UNESCO, 2005). Elle est d'ailleurs définie comme telle dans plusieurs écrits, dont le rapport du National Joint Committee on Learning Disabilities (2008).

Compte tenu de l'importance accordée à la réussite des élèves en français en lien avec la persévérance scolaire et aux progrès en recherche dans le champ de la psychologie cognitive, la formation continue offerte aux orthopédagogues a été principalement orientée sur les moyens d'évaluer et d'intervenir auprès de ceux présentant des difficultés persistantes en lecture et en écriture.

1.2 L'intérêt croissant pour l'intervention orthopédagogique en mathématiques

L'historique de l'orthopédagogie permet de comprendre les raisons pour lesquelles peu d'élèves sont dirigés vers l'orthopédagogue pour des difficultés en mathématiques. Actuellement, il est possible d'observer, notamment dans les conventions annuelles de gestion et de réussite éducative[2] de plusieurs écoles, un désir de promouvoir la réussite des élèves en mathématiques. De plus, certaines initiatives de développement de démarches d'évaluation voient aussi le jour. C'est le cas de DEMMI — Démarche d'Évaluation en Mathématique pour Mieux Intervenir (Dumas *et al.*, 2013). Un aperçu en a été présenté au 22e Colloque de l'ADOQ en 2012. Cette démarche d'évaluation, qui est calquée sur la structure d'évaluation à trois niveaux DÉDAL — Démarche d'Évaluation des Difficultés d'Apprentissage de la Lecture (DesGagné *et al.*, 2000), propose un cadre théorique issu principalement de la psychologie cognitive. L'intérêt récent pour les difficultés et l'intervention en mathématiques s'expliquent par un développement récent des travaux sur la dyscalculie dans le champ de la neuropsychologie et de la psychologie cognitive[3], mais aussi par la mise

---

[2] Sous la responsabilité de la commission scolaire, la convention annuelle de gestion et de réussite éducative des écoles [...] *vise à convenir des mesures requises pour assurer l'atteinte des buts fixés et des objectifs mesurables prévus à la convention de partenariat* [...] *Elle précisera les moyens mis à la disposition de l'établissement pour réaliser son plan de réussite.* (MELS, 2009b, page 9)

[3] À titre d'exemple, en 2011, le 5e symposium du Centre d'évaluation neuropsychologique et d'orientation pédagogique (CENOP) avait pour thème la dyscalculie et les troubles d'apprentissage en mathématiques. L'objectif de la rencontre était de *comprendre* et *intervenir*. Dans la même année, le colloque annuel de l'ADOQ s'intitulait : *l'orthopédagogue au coeur des mathémaTICS*. De nombreuses conférences traitaient donc de mathématiques, sans toutefois être centrées sur la dyscalculie.

en lumière que les élèves à risque de décrochage scolaire présentent des difficultés en mathématiques, et ce, dans une mesure équivalente aux difficultés en français (Fortin *et al.*, 2004). Ces raisons incitent le milieu scolaire à procéder au dépistage des difficultés en mathématiques au préscolaire et en première année (Jordan *et al.*, 2010; VanDerHeyden *et al.*, 2011). De plus, des études récentes mettent en lumière qu'un bon niveau de compétence en numératie et en résolution de problèmes est associé à des emplois mieux rémunérés et à une meilleure stabilité d'emploi, de même qu'à un niveau de scolarisation plus élevé (OCDE et Statistique Canada, 2011).

Dans le contexte actuel, malgré un intérêt récent, mais aussi croissant pour les difficultés en mathématiques des élèves, les orthopédagogues se retrouvent démunis quant à la façon d'évaluer et d'intervenir efficacement dans cette discipline. Cela est dû à la fois par un manque d'expérience, mais aussi parce que les recherches en mathématiques sont beaucoup moins nombreuses que les recherches en français (Gersten *et al.*, 2007; Lusignan, 2011). De plus, l'étude de Fontaine (2008) sur *les représentations sociales des orthopédagogues du Québec en rapport avec l'intervention en mathématiques auprès des élèves à risque* montre que les orthopédagogues attribuent une plus grande importance au développement des compétences en français comparativement aux mathématiques et vient également statuer que *les orthopédagogues ont le sentiment d'être peu outillées et peu formées pour intervenir en mathématique*s (*Ibid.*, p. 4).

1.3 L'impact d'une approche par compétences sur l'intervention orthopédagogique en mathématiques

L'historique de la profession d'orthopédagogue et l'apport important de la recherche sur les difficultés en lecture/écriture permettent de comprendre pourquoi peu d'élèves reçoivent des services orthopédagogiques en mathématiques. De plus, l'intervention en mathématiques est souvent orientée sur la lecture des énoncés de problèmes. Pour comprendre cette orientation, considérons d'abord les trois compétences

disciplinaires du programme en mathématiques : *Résoudre une situation-problème*, *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques et Communiquer à l'aide du langage mathématique*. La première compétence fait référence à la situation problème qui implique, entre autres, la lecture d'un texte relativement long. La deuxième compétence fait référence au raisonnement mathématique. Celle-ci est principalement évaluée au moyen de situations problèmes, dites problèmes d'application, qui font intervenir la lecture de courts textes. L'évaluation de la dernière compétence est par ailleurs intégrée à l'évaluation des deux premières. La lecture est donc omniprésente dans l'évaluation sommative des compétences en mathématiques. Somme toute, l'approche par compétence a possiblement favorisé l'amalgame des difficultés en lecture et en mathématiques et rend peu visibles les difficultés relatives aux objets de savoirs mathématiques par l'orthopédagogue.

Compte tenu de ce contexte d'évaluation, l'intervention orthopédagogique en mathématiques tient essentiellement à l'enseignement de stratégies de résolution de problèmes et à l'enseignement de stratégies de lecture. On enseigne ainsi à l'élève des stratégies cognitives et métacognitives qui sont générales et non centrées sur les contenus mathématiques. Par exemple, les élèves sont entrainés à souligner ou à surligner les mots importants, à rayer les informations superflues, à dessiner, etc. L'intervention orthopédagogique porte également sur la lecture de l'énoncé afin que l'élève puisse comprendre ce qui est demandé et réaliser la tâche mathématique. Les limites observées de la nature de ces interventions sur la résolution de problèmes mathématiques autant que sur le développement des connaissances et savoirs mathématiques ont déjà été évoquées.

1.4 La place et le rôle de la notion de situation problème dans le programme scolaire québécois (PFÉQ)

Dans le PFÉQ, comme il a été énoncé précédemment, la résolution de problèmes est l'enjeu principal de deux compétences mathématiques, soit *Résoudre une situation*

problème mathématique et *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques* (MELS, 2006). L'expression a pourtant une portée extrêmement générale dans ce document et, sans être vraiment définie, *situation-problème* est employée à de nombreuses reprises et est au cœur non seulement de la discipline mathématique, mais également du programme dans son ensemble.

> Par son ampleur, la compétence à résoudre une situation-problème favorise le développement de l'ensemble des compétences transversales. Plus particulièrement, elle sollicite la pensée créatrice de l'élève, l'incite à traiter de l'information, à rechercher l'efficacité dans son travail, souvent collectif, et à développer des façons appropriées de communiquer. Sous tous ces aspects, elle présente de grandes affinités avec la compétence transversale portant sur la résolution de problèmes. (*Ibid.*, p. 126)

Dans la compétence *Résoudre une situation problème mathématique*, on précise qu'*En tant que processus, la résolution de situations-problèmes constitue un objet d'apprentissage en soi.* (*Ibid.*, p. 124). On précise également que (*Ibid.*, p. 126) :

> L'objectif ne saurait être atteint d'emblée, car il ne s'agit pas d'un exercice d'application. Sa quête suppose, au contraire, raisonnement, recherche et mise en place de stratégies mobilisant des connaissances. Aussi, la résolution de situations-problèmes en mathématique engage-t-elle l'élève dans une suite d'opérations de décodage, de modélisation, de vérification, d'explicitation et de validation. Il s'agit d'un processus dynamique impliquant anticipations, retours en arrière et jugement critique.

Ainsi, les situations problèmes complexes visant le développement de cette compétence ne sont pas conçues spécifiquement pour l'apprentissage de connaissances mathématiques puisque l'objectif est de développer les stratégies visant à les mobiliser.

Dans la compétence *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques*, qui vise l'apprentissage des concepts et processus (*Ibid.*, p. 129), l'usage de la résolution de situations problèmes est également présent, tel que l'énonce l'extrait suivant.

> Favoriser le développement de cette compétence implique le recours à des situations-problèmes qui vont forcer l'élève à se questionner, à établir des liens entre les éléments en présence et à chercher des réponses à son questionnement. (*Ibid.*, p.128)

Le texte précise aussi que *les mises en situation pédagogiques seront concrètes et accessibles* (*Ibid.*, p. 129). Sur la base de ces extraits du PFÉQ, il est possible d'observer que l'expression *situation-problème* est utilisée à la fois comme moyen d'enseignement pour les concepts mathématiques et à la fois comme une finalité du programme. On peut dès lors comprendre le poids de la résolution de problèmes dans les activités d'enseignement ordinaire et orthopédagogiques.

1.4.1 Les compétences en mathématiques du PFÉQ (MELS, 2006) au regard de la TSD

Dans les extraits cités, il apparait clairement que l'apprentissage des connaissances et des savoirs mathématiques devrait se faire à l'aide de situations problèmes au sein de la compétence *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques* (*Ibid.*) Dans le texte mentionné, on peut dégager deux éléments qui évoquent des notions centrales de la Théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) : la nécessité de l'engagement de l'élève et la mise en place de situations concrètes[4].

L'engagement de l'élève évoque la notion de dévolution de la TSD. Lorsqu'il y a dévolution, l'élève s'approprie la tâche et s'engage dans l'activité mathématique, non

[4] Brousseau ne réfère jamais aux situations «concrètes». Cependant, la situation d'action chez Brousseau réfère à la nécessité, pour l'élève, d'agir sur un milieu didactique. Ainsi, s'il peut y avoir manipulation de matériel «concret» en situation d'action, la situation n'est pas concrète en elle-même.

pas au regard des attentes de l'enseignant, mais en fonction des exigences du problème. Il endosse alors la responsabilité du résultat obtenu.

La dévolution est un processus géré par l'enseignant qui vise à ce que l'élève puisse s'approprier une situation adidactique que l'enseignant a aménagée pour lui. Une situation adidactique suppose que l'élève engage des connaissances mathématiques justifiées par la logique de la situation et non pour répondre à des intentions du professeur. Brousseau (1998) précise le rôle de l'enseignant ainsi :

> Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle, mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation.

Nous retrouvons un peu cette idée dans l'extrait suivant, tiré du PFÉQ, de la compétence *Résoudre une situation problème* : *Une situation-problème se caractérise aussi par le fait qu'elle est contextualisée et qu'elle représente un défi à la portée de l'élève. Elle doit susciter son intérêt et son adhésion et l'inciter à se mobiliser pour élaborer une solution* (MELS, 2006, p. 126).

Chez Brousseau, la situation d'action doit être aménagée pour offrir à l'élève une rétroaction sur la justesse des stratégies injectées par l'élève pour traiter la situation, Ce qui en assure la dimension adidactique. Cette dimension, essentielle au fonctionnement des connaissances dans la TSD, n'est pas présente dans le programme. On n'y retrouve donc pas l'idée que l'élève adapte ses connaissances en fonction de la rétroaction fournie par la tâche. À l'apprentissage des savoirs mathématiques, le MELS a privilégié, dans la compétence *Résoudre une situation-problème mathématique,* le développement de stratégies plus ou moins formalisées en résolution de problèmes chez l'élève, tout comme en psychologie cognitive, où l'on se

centre davantage sur les stratégies générales de résolution de problèmes, non spécifiques aux contenus mathématiques.

Selon l'analyse de Fabre (2001), l'apport de Brousseau sur la notion de situations problèmes a été généralisé, interprété, puis altéré par différents auteurs. Il aborde cette question lorsqu'il compare la théorie de Brousseau avec la généralisation qu'en a faite Meirieu dans le livre *Apprendre, oui, mais comment? (Meirieu, 1990, dans Fabre, 2001).* Fabre fait ressortir, entre autres, que cette généralisation permet difficilement de distinguer la situation problème d'une situation d'apprentissage de type constructiviste, qui n'assure pas la dévolution de la tâche à l'élève. En effet, en situation adidactique, l'élève obtient la rétroaction nécessaire quant à l'efficacité des stratégies mises en œuvre dans la résolution du problème. L'erreur[5] de l'élève peut alors devenir un moteur d'apprentissage dans la mesure où il peut réguler sa conduite mathématique en fonction de la rétroaction du milieu didactique.

Dans le milieu scolaire québécois, l'enseignement de savoirs mathématiques doit se faire par l'usage de *situations-problèmes*, sans que ces situations aient cependant une dimension adidactique. Pour construire chez l'élève des savoirs mathématiques, dont le sens des opérations, le PFÉQ prescrit l'utilisation de situations problèmes d'application[6], telles que celles utilisées pour évaluer la compétence à raisonner. La résolution de ces problèmes n'offre pas de rétroaction à l'élève lui permettant de progresser.

---

[5] Selon Brousseau, les erreurs en mathématiques sont *spécifiques d'une connaissance et/ou d'une situation mathématique* [...] *: inhérentes au processus d'apprentissage*. Il ajoute aussi que *quand l'erreur apparaît, elle n'est pas une faute, mais un accident normal pour l'élève, en réponse à une « provocation » légitime de la part du maître. Le professeur doit combiner un niveau de risque d'erreur supportable et une probabilité suffisante d'en tirer parti.* (Brousseau, 2000)

[6] Ces situations-problèmes visent à « forcer l'élève à se questionner, à établir des liens entre les éléments en présence et à chercher des réponses à son questionnement. » (MELS, 2006, p. 128) Ils requièrent la mise en application de quelques concepts et comportent peu d'étapes.

1.4.2 La compétence Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques au regard de la TCC

Les *situations-problèmes* visant la construction de sens et de savoirs mathématiques, tel que présenté dans plusieurs des extraits ci-dessus évoquent également la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990). Vergnaud définit la TCC comme *une théorie psychologique du concept* qui, bien qu'intéressée par la didactique, n'est pas une théorie didactique (*Ibid.*, p.134-135). Selon Vergnaud, un concept prend son sens à travers des situations et des problèmes à résoudre.

Dans la TCC, la notion de situation se niche dans la définition du concept. Celui-ci est défini par l'auteur comme un *ensemble des situations qui constitue la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par le sujet dans ces situations* (*Ibid.*, p. 145).

Un champ conceptuel s'articule donc autour d'un concept. Le champ multiplicatif, par exemple, contient l'ensemble des situations pour lesquelles la multiplication ou la division est utilisée pour résoudre les problèmes.

La PDA (MELS, 2009a), complémentaire au PFÉQ, à la section *Sens des opérations sur des nombres,* énumère les différentes structures identifiées par Vergnaud, mais aussi par des chercheurs de la tradition anglo-saxonne, tels que Carpenter et Moser (1983) et DeCorte et Vershaffel (1981), des champs conceptuels additif et multiplicatif. Or, ces structures sont orchestrées dans des énoncés de problèmes que l'élève doit résoudre à l'aide de procédés arithmétiques. Ces problèmes font partie de la classe plus large des *word problems*, ou problèmes d'application, qui sont des problèmes contextualisés[7], existants dans la tradition des énoncés de problèmes

[7] Ici, le mot *contextualisé* fait référence à des contextes de la vie, au vécu ou au possible, plutôt que de référer à l'aménagement du milieu didactique.

mathématiques depuis des millénaires (Merri, 2007, Swetz, 2012). Ces énoncés de problèmes sont largement utilisés pour développer la compétence à raisonner.

En somme, l'expression *situation-problème*, utilisée dans les textes des deux compétences en mathématiques, fait écho implicitement, mais aussi, partiellement, à certaines notions des théories de la TSD et de la TCC. Autant utilisée comme compétence transversale que dans les compétences de la discipline mathématique, la résolution de situations problèmes est une activité pour ainsi dire polymorphe et sert différentes finalités.

1.5 Objectifs de la recherche

Comme précisé dans l'introduction, cette recherche interroge la place et le rôle de la notion de problème dans l'intervention orthopédagogique en mathématiques. La problématique permet d'orienter théoriquement et méthodologiquement cette étude, mais il importe d'abord de distinguer les deux sens associés à la notion de problème utilisée dans le cadre de cette recherche.

Située dans la théorie des situations didactiques, la notion de problème est associée à la situation à dimension adidactique. Une situation à dimension adidactique favorise la dévolution du problème mathématique à l'élève, qu'il est appelé à résoudre à partir de l'ensemble de ses connaissances. La situation est dite adidactique si l'enseignant n'intervient pas en tant que « détenteur » du savoir. (Brousseau, 1998) La présente recherche fait également référence à la notion de problème tel qu'entendu dans la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990). Le mot « énoncé », signifiant *Phrase ou ensemble de phrases exprimées oralement ou par écrit* (Legendre, 2005, p. 567), sera ici privilégié pour cette acception. Ainsi, l'énoncé de problème arithmétique est utilisé, dans le cadre de cette recherche, comme un problème écrit, court, s'inscrivant dans un champ conceptuel donné.

À la lumière de la problématique, notre recherche est de type exploratoire et vise à étudier l'usage de la situation à caractère adidactique et de la notion d'énoncés de problèmes en contexte d'intervention orthopédagogique en mathématiques.

Pour réaliser une telle intervention, il est nécessaire de cibler un contenu mathématique. Le champ multiplicatif a été choisi pour répondre aux besoins de l'étude. Ces contenus mathématiques sont abordés dès la première année du primaire. Par contre, ces apprentissages sont majoritairement développés au deuxième cycle, notamment en ce qui concerne l'apprentissage des différentes structures multiplicatives et de leurs écritures correspondantes (MELS, 2009a). Par conséquent, l'élève du deuxième cycle ne peut être considéré en difficulté, puisqu'il est en apprentissage. Les élèves ciblés par notre étude sont donc de troisième cycle primaire.

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

Dans ce chapitre, il est d'abord question de l'état des connaissances relatif à l'activité de résolution de problèmes en mettant en évidence les différentes perspectives théoriques à partir desquelles est étudiée cette activité. Nous identifierons la perspective adoptée dans cette recherche et poursuivrons le développement des assises théoriques du volet empirique de la recherche en rappelant d'abord les spécificités des interactions didactiques en contexte d'adaptation scolaire. Ensuite, le champ conceptuel de la multiplication, tel que conceptualisé par Gérard Vergnaud, est exposé.

2.1 La résolution de problèmes à énoncé dans la transmission des connaissances

Les énoncés de problèmes sont apparus en même temps que l'écriture, il y a près de 6 000 ans. Les historiens qui ont suivi la trace des problèmes écrits ont été témoins d'une part de l'évolution des mathématiques, mais aussi de l'évolution de l'humanité puisque les problèmes mathématiques écrits relataient des contextes de la vie quotidienne. En conséquence, ils ont permis aux historiens de dresser un portrait du développement social à chacune des époques. Les problèmes retrouvés par les historiens et les archéologues sont issus de différentes cultures (Babylone, Chine ancienne, l'Égypte ancienne, l'Inde, etc.). On a retrouvé des énoncés de problèmes mathématiques partout où les mathématiques se sont développées et ont été enseignées.

L'usage initial des énoncés de problèmes était de développer des habiletés en calcul, notamment chez les scribes. Les premiers problèmes visaient la maitrise des

opérations arithmétiques et autres concepts mathématiques tels que le théorème de Pythagore. Ils sont graduellement devenus plus complexes, nécessitant une analyse plus approfondie des données en jeu dans le problème. On a vu apparaitre ensuite des problèmes conçus pour divertir en proposant un défi intellectuel, tels que les devinettes logiques (Swetz, 2012). Cet élargissement dans les types de problèmes n'a pas fait disparaitre l'usage de l'énoncé de problème comme moyen d'enseigner le calcul (Sarrazy, 2003). Ce besoin est en partie issu des usages sociaux liés au calcul, mais aussi des difficultés des élèves, observées alors, vers 1858, à résoudre ce genre de problème (*Ibid.*)

La transformation du système éducatif ainsi que la recherche sur la résolution de problèmes à énoncé ont contribué, par la suite, à ce que le développement de l'enfant soit considéré relativement à l'usage des énoncés de problèmes, c'est-à-dire la possibilité, compte tenu de son âge, de conceptualiser le savoir habillé par l'énoncé de problème (*Ibid.*, 2003). Dès lors, on s'est intéressé aux énoncés de problèmes dans l'enseignement des mathématiques comme outil de construction de sens, plutôt qu'à une vocation utilitaire pour l'apprentissage du calcul. L'intérêt des chercheurs pour les habiletés des élèves à résoudre des problèmes et, par conséquent à l'activité mentale impliquée dans la résolution de problèmes, s'est donc déployé depuis plus de quarante ans. Il en résulte que bon nombre de chercheurs se sont désintéressés de l'énoncé de problème en soi pour étudier plutôt l'activité de résolution de problèmes. C'est ainsi que la psychologie a particulièrement investi la résolution de problèmes comme moyen de simuler et modéliser l'activité mentale de l'adulte, mais également celle de l'enfant. L'étude de cette activité chez l'enfant permet d'étudier la genèse des activités cognitives et donc de l'apprentissage. Les sciences de l'éducation ont puisé et puisent encore dans les sciences de la cognition des modèles pour interpréter les conduites scolaires des élèves et intervenir comme nous l'avons vu dans la problématique.

2.1.1 Résolution de problèmes et psychologie cognitive

La résolution de problèmes au sens large est un objet d'étude central en psychologie cognitive. Les études en psychologie sur la résolution de problèmes ont ainsi pénétré la problématique de la résolution de problèmes mathématiques dans le champ scolaire.

Le modèle de Kintsch et Greeno (1985) est incontournable en psychologie cognitive ou autrement dit, dans les études sur le traitement de l'information. Il convient donc de l'exposer brièvement. Ce modèle, cité dans plusieurs travaux en résolution de problèmes, propose une description du traitement, par l'élève, du texte de l'énoncé de problème, en vue de construire une représentation contenant les informations nécessaires à l'opérationnalisation de la solution. Ce modèle a été appliqué, dans l'étude fondatrice de 1985, à la résolution d'énoncés de problèmes additifs par des élèves de deuxième année. Il repose sur un ensemble de structures de connaissances, conjugué à un ensemble de stratégies, rendant possible la construction de la représentation et la résolution du problème. Selon cette proposition, la représentation comporterait deux éléments : le *text base,* qui permettrait de repérer les concepts et les relations explicites ou inférées dans le problème, et le *problem model* (structure du problème), qui rendrait possible la sélection des informations importantes et l'identification de l'inconnue.

Le modèle fait état de trois ensembles de structures de connaissances nécessaires à la formation de la représentation et à la recherche de la solution : les *propositional frames*, qui seraient utilisés par l'élève pour « traduire » les phrases du texte en propositions rendant la connexion avec la structure du problème possible, les connaissances sur les différentes structures de problèmes (Vergnaud, 1982, dans Kintsch et Greeno, 1985) et un ensemble de schèmes opératoires. Les schèmes opératoires traités en lien avec la description du modèle consistent en quatre stratégies de résolution liées à la manipulation et au dénombrement. Par exemple, pour soustraire y de x, l'élève prélève x jetons, puis enlève y jetons. Il dénombre les

jetons restants pour trouver la solution au problème. Les auteurs précisent également que les mots inducteurs peuvent soutenir l'élève dans l'organisation cohérente des propositions dans la formation de la représentation.

Prenant appui sur le modèle de Kintsch et Greeno (1985), certains chercheurs ont tenté de classifier les différentes structures d'énoncés de problèmes additifs par niveau de difficulté. C'est le cas de Garcia *et al.* (2006). Ceux-ci ont comparé la performance d'élèves âgés de 7 à 9 ans ayant des difficultés en arithmétique et étant exempts de difficultés en lecture, à des élèves moyens du même âge. Ils ont considéré la structure du problème (transformation, comparaison, etc.), l'opération à effectuer et la position de l'inconnue. L'objectif de cette classification par niveau de difficulté avait pour but de mieux ordonnancer l'enseignement de la résolution de problèmes. Ils ont remarqué que la structure du problème à elle seule ne peut justifier le niveau de difficulté d'un problème. La position de l'inconnue semble avoir un impact plus important que sa structure. Selon ces chercheurs, cette variable affecte d'ailleurs davantage les élèves en difficulté que les élèves moyens.

Brissiaud et Sander (2010) ont, pour leur part, testé l'hypothèse que les énoncés de problèmes pouvant être résolus par l'utilisation de stratégies informelles (manipulation, procédés de comptage, faits numériques dérivés ou connus et méthode essai/erreur) sont plus faciles à résoudre que les problèmes nécessitant le recours à des algorithmes de calcul enseignés, indépendamment du fait que l'élève ait reçu cet enseignement ou non. Cette hypothèse est fondée sur l'idée que les problèmes se résolvant à l'aide de stratégies informelles stimulent la représentation du schéma de problème donnant ainsi accès au calcul numérique alors que les problèmes nécessitant l'activation d'algorithmes de calcul ou de connaissances sur les propriétés des opérations requièrent une transformation de la représentation initiale. Ils ont dégagé de leurs résultats que, bien que la position de l'inconnue dans la structure du problème est une variable importante du niveau de complexité du problème, les

nombres aussi le sont étant donné leur rôle dans le type de stratégie mise en place. Par conséquent, un problème soustractif de transformation où l'état final est recherché et comportant de grands nombres peut être plus difficile à résoudre qu'un problème où l'on recherche la transformation lorsque les nombres de ce dernier permettent le recours à une stratégie informelle. Ainsi, ces auteurs postulent également qu'un problème de division pouvant être résolu à l'aide de stratégies informelles peut être plus facile à résoudre qu'un problème de soustraction nécessitant l'activation d'un algorithme de calcul conventionnel.

Plusieurs chercheurs ont aussi tenté d'identifier les facteurs appartenant à l'élève ou ceux appartenant à l'énoncé affectant la performance de l'élève en résolution de problèmes, tel l'aspect de la contextualisation présent dans les courts textes (Coquin-Viennot et Moreau, 2007; Palm, 2008). L'hypothèse de Coquin-Viennot et Moreau suppose que l'inconsistance entre les aspects qualitatifs du problème, l'histoire, et sa structure mathématique devrait amener les élèves de troisième et quatrième année à faire plus d'erreurs dans la résolution des problèmes additifs de comparaison. Cette hypothèse était appuyée sur l'idée que la résolution de problèmes implique l'activation d'un schème sémantique qui permet d'associer les données numériques du problème aux variables du schème. Ainsi, selon le cadre théorique de cette recherche, deux types de connaissances sont distingués pour résoudre les énoncés de problèmes : 1) les connaissances langagières et les connaissances du monde réel pour comprendre l'énoncé; 2) les connaissances logico-mathématiques pour opérer la solution. Leurs résultats montrent que les élèves commettent davantage d'erreurs lorsqu'il y a inconsistance, peu importe le niveau scolaire.

De son côté, Palm (2008) s'est intéressé au caractère d'authenticité du contenu de l'énoncé de problème. Il cherchait à en vérifier l'impact sur l'aptitude de l'élève à considérer la réalité décrite dans le problème dans sa recherche de la solution. Ses résultats montrent que l'augmentation de l'authenticité de la tâche peut augmenter la

tendance chez l'élève à utiliser efficacement ses connaissances du monde réel dans sa recherche de la solution au problème. Par contre, il a également répertorié des raisons pour lesquelles l'élève ne considère pas cette authenticité dans l'accomplissement de la tâche. On retrouve, entre autres, la tendance de l'élève à se concentrer sur les nombres en jeu plutôt que sur la situation décrite, l'absence d'évaluation de la solution trouvée, les croyances des élèves en ce qui a trait aux mathématiques scolaires et leur absence de lien avec la réalité ainsi que le manque de connaissances antérieures.

Voyer (2011) a cherché à préciser la nature des difficultés des enfants faibles en mathématiques. Son objectif était d'examiner la relation entre la résolution d'énoncés de problèmes arithmétiques et la formulation de ceux-ci et de vérifier s'il y a une distinction à faire entre les élèves performants en mathématiques comparativement aux élèves faibles. Il a examiné certains facteurs appartenant à l'élève ou à l'énoncé du problème pouvant affecter le processus de compréhension. Quatre versions des mêmes problèmes ont été formulées allant de l'énoncé simplifié, contenant les informations essentielles, à l'énoncé contenant à la fois un contexte, des informations superflues et une explication. Il a conclu que les élèves faibles en arithmétique ne se représentent pas le problème de la même façon que les élèves plus forts et qu'ils accordent une plus grande importance aux explications fournies dans l'énoncé qu'au contexte. Les explications leur sont utiles et leur permettent de mieux réussir. Par contre, elles ne le sont pas pour les élèves plus forts. En fait, il a également observé que les élèves qui réussissent le mieux sont ceux qui s'attardent plutôt au contexte décrit dans le problème. Le contexte les aiderait à faire appel à leur vécu et faciliterait la résolution du problème. Bien que très différentes, ces trois dernières recherches permettent de dégager que l'élève faible éprouve de la difficulté à utiliser le contexte pour résoudre un problème.

Parmi les recherches explorant les difficultés en résolution de problèmes en lien avec les difficultés en lecture, Voyer *et al.* (2012), sur la base de recherches antérieures

affirmant qu'un bon rendement en lecture est associé à un bon rendement en mathématiques, ont cherché à préciser les habiletés spécifiques en lecture qui seraient les meilleurs indicateurs d'un bon rendement en résolution de problèmes écrits. Dans cette étude, les performances des élèves en compréhension de lecture de textes narratifs et informatifs, de même que leur habileté à répondre à des questions littérales et inférentielles, ont été recensées et mises en lien avec leur performance à résoudre des énoncés de problèmes variés. Les chercheurs ont conclu qu'il existe un lien significatif entre le rendement en résolution de problèmes et la compréhension de textes informatifs. De même, les habiletés des élèves à faire des inférences en lecture seraient reliées à l'habileté à résoudre des problèmes écrits. Si la relation entre performance en lecture et performance en résolution de problèmes semble bien établie, on ne peut cependant en conclure qu'il s'agit d'une relation causale. En effet, on pourrait, à l'opposé, poser l'hypothèse que de meilleures habiletés en résolution de problèmes sont un bon indicateur d'une meilleure performance en lecture.

Le domaine de la métacognition a aussi été investi par la recherche en résolution de problèmes. Certaines études ont vérifié l'impact de diverses stratégies d'enseignement ou encore l'enseignement de démarches de résolution de problèmes sur la réussite de l'élève. C'est le cas de Fuchs *et al.* (2003). Ceux-ci ont testé une intervention alliant enseignement explicite, métacognition et tutorat par les pairs auprès d'élèves de troisième année du primaire. L'objectif de la recherche était d'amener les élèves à transférer leurs apprentissages en résolution de problèmes de façon autonome, en faisant le lien entre de nouveaux problèmes et les problèmes types enseignés. L'intervention optimale contenait un premier volet qui visait la maitrise, par les élèves, de la démarche de résolution pour quatre problèmes types. Cette intervention consistait à modéliser la séquence de calcul à effectuer, sans que l'élève tente d'abord de les résoudre pour lui-même. Cette partie de l'intervention était nommée *solution treatment* (*Ibid.*, p.296). La démarche de résolution était donc enseignée, puis les élèves étaient entrainés à la reproduire pour résoudre des problèmes semblables. Par

la suite, le *transfer treatment* (*Ibid.*) était administré en trois étapes. Premièrement, un enseignement explicite sur la notion de transfert a été réalisé, puis on a enseigné aux élèves que quatre types de caractéristiques superficielles pouvaient légèrement modifier les problèmes sans toutefois en affecter la résolution. En dernier lieu, les élèves ont été entrainés à repérer ces caractéristiques superficielles dans les problèmes et à les résoudre en faisant les liens appropriés avec les problèmes types. Les résultats se sont avérés positifs. Les chercheurs notent toutefois que 36 % des élèves présentant des troubles d'apprentissage n'ont pas répondu à l'intervention, mais que les élèves faibles sans troubles d'apprentissage ont aussi bien répondu à l'intervention que les élèves sans difficulté particulière.

Un questionnement émerge quant au sens donné à la résolution de problèmes dans le cadre de la recherche citée ci-dessus, de même que le sens de la notion de transfert. D'abord, quel sens donner à la notion de problème s'il s'agit de problèmes enseignés? On comprend ici que l'enseignement visait la reconnaissance, par les élèves, de certains types de problèmes qu'ils pouvaient résoudre à l'aide de la démarche apprise. Mais alors, lorsque l'élève se trouve devant des cas de problèmes enseignés, résout-il un problème ou applique-t-il une procédure enseignée et apprise? De plus, compte tenu de l'idée de transfert, peut-on dire qu'il s'agit vraiment de nouveaux problèmes, puisqu'on annonce aux élèves la façon dont les problèmes initiaux sont modifiés? Selon certains chercheurs, les entrainements de ce type amènent les élèves à acquérir des connaissances figées, c'est-à-dire des connaissances mobilisables seulement dans ces situations typiques (Julo, 1995; Brousseau, 1998). Il est aussi à noter que cette intervention requérait trente séances pour l'entrainement à la résolution de seulement quatre problèmes types, ce qui s'avère chronophage du temps d'enseignement si on considère la variété des structures que l'élève est appelé à résoudre dans son parcours scolaire. De plus, cela irait à l'encontre même de ce que vise l'éducation, c'est-à-dire que l'élève, lorsqu'il n'est plus en situation scolaire, puisse résoudre les problèmes qui se posent à lui. On sait très bien que la forme et la structure des énoncés de

problèmes présentés en contexte scolaire ne sont pas du tout comparables à ceux qui se présentent dans la vie du citoyen.

Les recherches que nous venons de citer ne présentent pas d'analyse du contenu des problèmes, notamment en ce qui concerne les connaissances mathématiques sollicitées pour la résolution. À ce sujet, Julo (1995), chercheur dans le champ de la psychologie cognitive, précise l'importance d'interpréter les difficultés des élèves au regard des situations dans lesquelles elles émergent. Autrement dit, il plaide pour l'importance de considérer les caractéristiques mathématiques et didactiques des situations présentées aux élèves.

À la différence des recherches précédentes, Jitendra *et al.* (2007) considèrent les savoirs mathématiques en jeu dans une étude visant à la comparaison de deux stratégies d'enseignement de résolution de problèmes auprès d'élèves de troisième année, issus d'un milieu défavorisé. Pour ces chercheurs, l'énoncé de problème est considéré comme outil pour développer les connaissances des élèves en arithmétique. Ils ont comparé un programme d'enseignement explicite des schémas de problèmes additifs (composition de mesures, transformation et comparaison) à un programme d'enseignement de stratégies multiples (manipulation, dessin, équation mathématique et utilisation des données d'un graphique). Leurs résultats montrent que l'enseignement des schémas est plus efficace que l'enseignement de stratégies multiples et que les élèves maintiennent leurs acquis plus longtemps, soit au-delà de six semaines. Les auteurs invitent toutefois à la prudence en ce qui concerne la validité de leurs résultats pour les élèves ayant des troubles d'apprentissage, de faibles résultats scolaires ou pour les élèves allophones, étant donné leur échantillon restreint. Pour ces clientèles, aucun impact n'a été observé immédiatement après l'intervention. Par contre, ces élèves ont montré une amélioration importante au posttest de maintien. Ils en ont dégagé que l'enseignement axé sur la compréhension des notions est bénéfique pour ces clientèles.

2.1.2 Résolution de problèmes et didactique des mathématiques

Les chercheurs en didactique des mathématiques s'attardent particulièrement aux connaissances et aux savoirs pris dans leur contexte, c'est-à-dire au cœur de la situation problème et des phénomènes d'enseignement/apprentissage. La base théorique de ce courant de pensée relève principalement de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998). Les recherches en didactique concernant les énoncés de problèmes sont beaucoup moins nombreuses, voire quasi inexistantes. Sarrazy (2002) s'y est toutefois intéressé. Celui-ci a posé l'hypothèse que plus l'enseignant est habile à concevoir des énoncés de problèmes variés, plus il peut interagir efficacement avec l'élève face aux difficultés rencontrées par celui-ci et moins l'élève risque d'établir un lien figé entre les algorithmes et les problèmes auxquels ils peuvent s'appliquer. La capacité de l'enseignant à réaliser des variations dans la composition des énoncés de problème amènerait l'élève à se questionner davantage sur ses connaissances par les activités de décontextualisation et de recontextualisation amenées par l'emploi différencié des variables relatives à la formulation des énoncés de problèmes. Cela permettrait notamment aux élèves de coordonner et de différencier leurs schèmes opératoires. Il a donc demandé à sept enseignants de quatrième année de concevoir six problèmes arithmétiques de structure additive. Ces problèmes ont été analysés à l'aide d'une grille comportant 14 variables, dont le type de nombres utilisés (grands, petits), l'ordre de l'énoncé, l'organisation temporelle, la position de la question, etc. Ces problèmes ont été administrés à 27 élèves d'une classe de troisième année[8]. Les scores de réussite se sont avérés fortement corrélés avec les indices de variété des problèmes, un indice de variété élevé étant associé à un problème plus difficile. Les résultats démontrent que les élèves sont sensibles au contrat didactique et que le jeu sur les variables affecte la difficulté des différents problèmes. Il en a dégagé que la variabilité semble être un

[8] Le chercheur a choisi d'administrer les problèmes à un niveau inférieur étant donné que l'année scolaire était avancée et qu'il souhaitait pouvoir discriminer les performances des élèves relativement à la difficulté inhérente aux problèmes posés.

aspect de l'action de l'enseignant pouvant être une condition non exclusive susceptible d'avoir un impact positif sur le processus d'apprentissage des élèves.

Malgré l'apport important des recherches en psychologie cognitive au sujet des énoncés de problèmes et de la résolution de problèmes, deux constats importants se dégagent de l'ensemble de ces recherches. Premièrement, peu de recherches se sont penchées sur la façon d'utiliser les énoncés de problèmes comme un moyen d'enseignement des opérations en arithmétique. En effet, dans très peu de recherches, l'énoncé de problème est amené comme un instrument (Conne, 2004) ou un outil didactique nécessaire à l'acquisition de savoirs mathématiques spécifiques. Deuxièmement, il apparait important d'analyser l'usage des énoncés de problèmes dans le but de développer chez l'élève des connaissances en arithmétique, particulièrement chez les élèves en difficulté, pour lesquels ces tâches s'avèrent être un obstacle didactique important, exacerbé par les exigences du programme scolaire québécois.

2.2 Spécificités didactiques dans l'enseignement aux élèves en difficulté

Les phénomènes didactiques spécifiques à l'enseignement en adaptation scolaire s'observent au sein d'une réalité bien particulière. On retrouve d'abord le phénomène de l'échec, qui affecte à son tour les interactions didactiques entre l'enseignant et l'élève. Ainsi, selon Favre (1997, dans Giroux, 2004), l'échec constitue une contrainte dans l'enseignement en adaptation scolaire. Cette contrainte comporte trois volets : *l'échec préalable*, *l'échec effectif* et *l'échec latent* (*Ibid.*, p.307). L'échec préalable est celui qui a conduit l'élève à bénéficier de l'aide apportée. Selon Bloch et Salin (2004), l'échec préalable affecte les rapports didactiques dans la mesure où l'enseignant demande aux élèves, plus qu'en classe ordinaire, de démontrer ce qu'ils savent. L'échec effectif est celui avec lequel l'enseignant compose en situation d'enseignement. Giroux (2004) précise que *cet échec occupe un espace didactique*

important, l'enseignant visant à éradiquer l'échec au moment même où il se produit. L'échec latent, quant à lui, est l'échec anticipé par l'enseignant, qui peut créer un effet Golem[9]. Cette fragmentation de l'échec en trois volets permet de mieux comprendre son rôle au cœur du système didactique en adaptation scolaire.

Compte tenu de cette réalité, des recherches effectuées en classe d'adaptation scolaire au secondaire ont permis d'enrichir les connaissances au sujet des phénomènes spécifiques aux interactions didactiques propres à l'enseignement auprès des élèves en difficulté. Vannier (2008) a constaté qu'il est souvent difficile d'obtenir des élèves une réelle activité cognitive en situation de résolution de problèmes mathématiques. Des observations similaires ont été réalisées puis analysées par Bloch et Salin (2004) dans le but de mieux comprendre ces phénomènes. Ces auteures ont expérimenté des ingénieries didactiques en classe d'adaptation scolaire (SEGPA) en France, auprès d'élèves de 14 et 15 ans. Leur recherche, ayant pour cible la réintroduction du milieu objectif[10] dans l'enseignement en classe d'adaptation scolaire, a permis d'identifier certains phénomènes didactiques qui ne permettent pas à ces ingénieries de se développer comme attendu. L'enseignement a été orchestré sur les fondements de la TSD et était donc jugé optimal d'un point de vue didactique. Les phénomènes répertoriés dans cette recherche ont, par conséquent, été majoritairement attribués au fonctionnement de l'élève plutôt qu'à la situation elle-même. Les auteures ont observé des difficultés relatives à la dévolution, au fonctionnement des situations, à la décontextualisation et à la différenciation.

Selon ces auteures, les difficultés relatives à la dévolution sont justifiées, entre autres, par une difficulté chez l'élève à comprendre les consignes et par un blocage, dès le départ, à se représenter la tâche (*Ibid.*) Le manque d'engagement des élèves dans la

---

[9] L'effet Golem (Babad et al., 1982) consiste en un phénomène psychologique par lequel des attentes moins élevées envers un élève engendre une moins bonne performance de sa part.

[10] Selon Bloch et Salin (2004), le milieu objectif constitue un environnement favorisant la recherche et la découverte chez l'élève.

recherche mathématique est aussi attribué à une difficulté à mobiliser des connaissances.

Les difficultés relatives au fonctionnement des situations, vues du côté de l'élève, semblent être causées par l'absence de maitrise des savoirs antérieurs et l'abandon rapide des élèves (*Ibid.*) Vannier (2008) conforte cette position en notant l'instabilité des acquis observée par les enseignants, et ajoute que cela conduit ces derniers à évaluer à la baisse le potentiel des élèves. Toujours dans le fonctionnement des situations, Bloch et Salin (2004) ont également observé que les élèves se satisfont d'une validation approximative de leur solution et que le passage de la phase d'action aux phases de formulation et d'institutionnalisation est très difficile.

Les difficultés relatives au fonctionnement des situations, vues du côté de la situation elle-même, soulèvent une problématique particulière de l'adaptation scolaire. En effet, les situations choisies dans le cadre de la recherche de Bloch et Salin (*Ibid.*), issues des manuels *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* d'ERMEL (2001), s'adressent à des élèves de classes ordinaires. Or, elles n'ont pas originalement été créées pour des élèves de cet âge qui ont, par ailleurs, déjà été initiés aux connaissances visées par la tâche. Ainsi, l'élève en difficulté n'est pas totalement exempt de connaissances, même s'il n'a pas les acquis attendus et que ces connaissances qu'il possède ne sont pas efficientes (Salin, 2007). L'enseignement constitue alors un contrat de reprise (Brousseau, 1995, dans Bloch et Salin, 2004). Dans ce contexte, il apparait plus difficile de faire évoluer les connaissances que possède l'élève que d'en enseigner de nouvelles. Les conduites anticipées pour les différentes tâches, qu'un jeu sur les variables didactiques devrait normalement faire évoluer, ne sont pas nécessairement mobilisées par les élèves. Ces derniers tentent plutôt d'appliquer des connaissances non efficientes et perçues comme étant utiles.

En ce qui concerne la décontextualisation, il semble que les élèves de l'adaptation scolaire, habitués à faire des exercices d'application, arrivent difficilement à établir le

lien entre la situation à dimension adidactique et les exercices. La fonction d'outil de référence de la situation à dimension adidactique, sur laquelle l'enseignant peut s'appuyer, ne peut alors être activée (Bloch et Salin, 2004). La différenciation, quant à elle, est rendue complexe vu la difficulté d'articuler les différents contrats avec les élèves individuellement ou pour le groupe. Les enseignants ne possèdent pas les moyens didactiques pour organiser cette différenciation souhaitée (*Ibid.*)

Les recherches permettant de mettre en lumière les manifestations et conséquences des difficultés des élèves de l'adaptation scolaire en situation d'enseignement et d'apprentissage énumérées ci-dessus ont été réalisées chez des élèves d'âge secondaire, en classe fermée. Le risque que le phénomène soit amplifié au regard des élèves plus jeunes et en classe ordinaire est donc présent. Néanmoins, ces éléments constituent un apport important quant à l'examen du contexte de l'adaptation scolaire.

Il apparait opportun, ici, de rappeler le contexte de l'étude en cours, soit l'orthopédagogie. Les phénomènes rapportés ci-dessus, observés en classe d'adaptation scolaire, semblent aussi présents en dénombrement flottant, tel que nommé par Amigues *et al.* (2001). Ceux-ci critiquent d'ailleurs fortement les *groupes de consolidation*, qui sont l'équivalent des sous-groupes en dénombrement flottant. Ces auteurs affirment que l'articulation entre les groupes de consolidation et la classe ordinaire pose problème puisque les activités dans l'une et l'autre sont disjointes et conduites par des enseignants différents dans des espaces et des temps différents. La réflexion de ces chercheurs s'inscrit dans la prise de conscience des difficultés inhérentes à l'aide à l'élève telles qu'abordées ci-dessus. On peut toutefois envisager qu'une aide planifiée et pilotée en fonction des connaissances et savoirs à enseigner permettrait à l'élève de s'emparer du savoir en jeu. Les limites identifiées par ces chercheurs, à l'aide en sous-groupes, constituent cependant un argument en faveur de l'importance d'étudier les conditions didactiques à mettre en place pour une intervention en contexte orthopédagogique.

2.2.1 Les difficultés et les phénomènes relatifs à l'installation des mesures d'aide pour l'élève en difficulté

L'installation de mesures d'aide, étant une forme d'adaptation de l'enseignement, fait partie du quotidien des enseignants en adaptation scolaire puisque cette modalité est prescrite par l'Institution scolaire. Il convient de poser un regard sur le travail de l'enseignant concernant la planification de cette aide et les interactions didactiques en situation pour compléter le tableau des spécificités didactiques dans l'enseignement aux élèves en difficulté.

Giroux (2014), dans une recension des écrits sur le fonctionnement des systèmes didactiques en contexte d'adaptation scolaire, a repéré certains phénomènes spécifiques dans les interactions enseignement/apprentissage. Le premier phénomène est tiré d'une étude portant sur la comparaison de deux classes de première secondaire, animées par un même enseignant. L'une de ces classes regroupe des élèves doués et la seconde regroupe des élèves « doubleurs ». L'étude montre que dans la classe de « doubleurs », la progression est ralentie par l'algorithmisiation du savoir qui permet, par ailleurs, de faire une certaine économie du savoir dans les échanges didactiques (Giroux et René de Cotret, 2001, dans Giroux, 2014). L'économie du savoir réfère à un enseignement tronqué et partiel des objets de savoirs. L'algorithmisation des objets de savoir renvoie, quant à elle, à un type d'enseignement centré sur les règles et sur un découpage du savoir. La mise en évidence des relations entre les différents objets de savoir devient alors plus difficile à percevoir pour l'élève puisque l'enseignement ne s'appuie plus sur ce qui a déjà été enseigné. On peut observer ce phénomène également à l'intérieur d'une tâche. Ce découpage est nommé morcellement de la tâche. Cette aide est encouragée chez les tenants du paradigme de la psychologie cognitive comme un moyen pour l'élève d'accéder à une meilleure compréhension de la tâche (Venet *et al.,* 2008). Ces auteures nomment toutefois le défi, lié à cette aide, de la conservation du sens pour l'élève.

Un autre phénomène est relatif au surinvestissement des savoirs, tel qu'identifié par Conne (2003, dans Giroux, 2014). En effet, la reprise incessante de l'enseignement de savoirs emblématiques de l'école primaire, par exemple la numération et les opérations, se fait au détriment de l'enseignement d'autres contenus du programme, par exemple, la géométrie et la mesure (Giroux, 2014).

La centration sur l'erreur et son traitement est aussi un phénomène spécifique des échanges didactiques avec des élèves en difficulté (Favre, 2003; Cherel, 2003; Giroux, 2004). L'importance accordée par l'enseignant à repérer les erreurs produites par les élèves, à interroger les élèves sur le sens de l'erreur, à diriger les élèves pour la correction conduit à un évanouissement du savoir en jeu. En effet, les interactions auxquelles donne lieu une centration sur l'erreur, selon les études réalisées, occasionnent souvent des effets de contrat de type Topaze[11] ou Jourdain[12].

Parallèlement, Roiné (2012) s'est penché sur la planification de dispositifs d'aide et leur actualisation en cours d'enseignement auprès d'élèves en très grande difficulté au secondaire (classes de SEGPA). Les élèves de ces classes ne présentaient pas de caractéristiques cognitives particulières autres que leur retard scolaire. Le contenu des leçons portait sur l'enseignement des opérations à l'aide d'énoncés de problèmes. Quatre séances d'enseignement sont présentées dans le texte.

Le premier cas rapporte l'utilisation d'une forme d'aide nommée multi représentation et inspirée, plus ou moins correctement, des travaux de Julo (1995). L'enseignant, pour aider les élèves à résoudre un énoncé de problème, en propose un semblable pour lequel il joint la solution. Une discussion s'engage alors sur l'identification des

---

[11] L'effet Topaze fait référence à la négociation didactique qui s'effectue entre l'élève et l'enseignant. Brousseau (1982, p.3) définit l'effet Topaze comme *l'échec de cette négociation didactique lorsqu'il consiste pour le maître à vider de leur sens et de leur contenu cognitif les questions qu'il a posées.*

[12] L'effet Jourdain est une abjection de l'effet Topaze. Il se produit lorsque *le professeur, pour éviter le débat de connaissance avec l'élève et éventuellement le constat d'échec, admet de reconnaître dans les comportements ou dans les réponses de l'élève, bien qu'elles soient en fait motivées par des causes banales, l'indice d'une connaissance savante* (*Ibid.*, p. 5).

similitudes entre les deux problèmes. Les observations du chercheur, qui sont cohérentes avec celles de Julo (*Ibid.*), ont permis de constater que l'analogie entre les deux problèmes n'est pas forcément reconnue par les élèves. La multi représentation, tel qu'envisagée et expliquée par Julo, n'implique pas l'étape métacognitive visant l'explicitation de la similitude entre les problèmes. Elle vise simplement à offrir des contextes variés pour lesquels la connaissance est nécessaire. Selon l'analyse de Roiné (2012), le type d'aide apporté par l'enseignant dans le cas exposé ne permet pas aux élèves de s'engager dans la recherche d'une solution, mais plutôt de répéter les opérations identifiées utiles dans la réponse apportée au second problème.

Le deuxième cas fait appel aux tâches surajoutées. Cette forme d'aide semble aussi inspirée de Julo (1995). Il s'agit de donner aux élèves des tâches supplémentaires permettant à ceux-ci de construire leur représentation du problème. Or, dans la situation rapportée, les aides ont été offertes avant que les élèves en aient manifesté le besoin. De plus, Roiné (2012), dans son analyse, met en évidence que l'une des tâches ajoutées morcelle le problème initial en sous-problèmes, ce qui en change la nature. La complexité du problème est alors réduite à une série d'exercices. Les deux autres tâches impliquent pour les élèves d'identifier les données numériques et de les lier à leur intitulé. Par exemple, la valeur de la voiture est mise en lien avec 900 euros. Julo (1995) invite à la prudence dans l'utilisation de cette forme d'aide en spécifiant qu'elle peut se révéler négative si elle est trop lourde, ce qui s'est avéré le cas dans l'exemple donné. De plus, cette forme d'aide, qui devrait être planifiée, n'a pas à être utilisée systématiquement, mais uniquement en cas de besoin de l'élève.

Le troisième cas fait appel au milieu matériel, soit à l'utilisation d'objets permettant la modélisation par les élèves du problème au moyen de la manipulation. Encore ici, l'aide est « forcée ». Cette aide, parfois nécessaire, devient superflue lorsque l'élève peut opérationnaliser la solution et la justifier, donc abstraire la connaissance à l'aide du langage et de l'écriture mathématique, ce qui était le cas d'un des élèves. De plus,

selon Roiné (2012), elle peut devenir une béquille et empêcher des élèves d'avoir confiance en eux. D'ailleurs, il met également en évidence le risque de faire face à un glissement relatif au but de la tâche, occasionnant ainsi *un changement de contrat didactique et une incertitude quant au savoir en jeu dans la situation* (*Ibid.*, p. 142). Ainsi, dans l'exemple donné, le problème devant permettre à l'élève de faire appel à la multiplication devient un problème spatial impliquant la construction d'une frise qui peut être résolu à l'aide du dénombrement.

Le dernier cas présenté par Roiné consiste à habiller le problème d'un contexte proche de la réalité des élèves de sorte à le rendre plus concret, en l'occurrence une sortie de classe. Les observations montrent que le contexte prend le dessus sur les mathématiques, les élèves se référant davantage à leur vécu qu'à l'aspect mathématique de l'analogie. Cela étouffe d'une certaine manière le contenu mathématique et n'aide pas les élèves à le résoudre. À ce sujet, Perrin-Glorian (1993) précise, dans son étude sur les élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques, que même pour ceux exempts de difficultés, il est difficile d'opérer un raisonnement mathématique selon une logique du quotidien. Elle ajoute que *ces problèmes demandent de gérer le rapport avec le réel à travers la modélisation en même temps que de mettre en relation des connaissances mathématiques avec d'autres qui relèvent d'autres domaines* (*Ibid.* p. 41). Toujours selon Perrin-Glorian, *le fait de travailler sur les situations concrètes nécessite aussi de distinguer ce qui relève de la logique mathématique et de la logique du quotidien qui ne coïncide pas toujours* (*Ibid.*)

Ces ingénieries mises en place par les enseignants seraient, selon Roiné (2012), issues d'une idéologie mentaliste qui domine le milieu scolaire. Ainsi, cette idéologie conduit les enseignants à justifier les aides comme permettant à l'élève de mieux se représenter la tâche, de favoriser le transfert, d'alléger leur charge cognitive ou encore d'amener l'élève à développer une posture métacognitive (*Ibid.*) Il est également

possible de constater que la fonction du savoir n'est pas prise en compte dans les justifications apportées au sujet des mesures d'aide proposées.

L'enseignant, étant contraint par l'Institution scolaire d'adapter son enseignement aux caractéristiques des élèves, se situe dans une position difficile. En effet, la recherche de Roiné (2012) témoigne de la difficulté, pour les enseignants, à articuler l'aide comme étant une forme d'adaptation pour l'élève et le maintien de son activité au regard du savoir à acquérir. Ce chercheur remarque d'ailleurs que les enseignants proposent des aides sans préciser en quoi celle-ci est adaptée aux caractéristiques de l'élève en difficulté. Les aides sont proposées au groupe et ne sont pas fonction d'un besoin précis identifié. Elles deviennent alors centrales dans le scénario didactique (*Ibid.*)

Les verbatim rapportés dans l'étude de Roiné témoignent également de la difficulté, pour les enseignants, à gérer les interactions didactiques dans l'action. Amigues *et al.* (2001) abordent aussi cette difficulté en notant que l'enseignant, lorsque déstabilisé par des réponses inadéquates de la part des élèves, devient en surcharge cognitive. Dans cette situation, étant en recherche personnelle, il n'est plus en situation d'enseignement et, par conséquent, il ne contrôle plus l'avancée du temps didactique. Il convient cependant de préciser que ces moments peuvent néanmoins s'avérer positifs et déterminants dans la compréhension des difficultés de l'enfant au regard du savoir en jeu ou dans l'analyse, par l'enseignant, du milieu proposé.

En somme, les spécificités inhérentes à l'intervention auprès des élèves en difficulté sont nombreuses et les recherches ciblées sur l'intervention orthopédagogique en mathématiques sont quasi inexistantes. Ces études remettent en cause l'interprétation des difficultés comme relevant de caractéristiques personnelles de l'élève telles que l'instabilité des connaissances ou une difficulté à les mobiliser. Des phénomènes propres à la dynamique de l'adaptation scolaire et initiés par l'enseignant semblent aussi à l'origine des difficultés des élèves, dont l'algorithmisation des savoirs ou le

surinvestissement de certains savoirs. La centration sur l'erreur constitue également une particularité observée en contexte d'adaptation scolaire. Finalement, la planification de l'aide, guidée par la nécessité d'adapter l'enseignement pour l'élève en difficulté, ne tient pas forcément compte des besoins de l'élève ni de la prise en compte de la fonction du savoir en jeu.

2.2.2 Une proposition didactique pour l'aide individualisée

Dans son article sur les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en contexte d'adaptation scolaire, Giroux (2013a) propose, sur la base des travaux réalisés en didactique des mathématiques en contexte d'adaptation scolaire, un certain nombre de repères et balises pour faire l'étude des conditions didactiques à mettre en place pour soutenir l'apprentissage des mathématiques d'élèves identifiés en difficulté en mathématiques. Nous les décrivons dans ce qui suit puisqu'ils cadrent avec notre objectif général de la présente recherche.

Le premier repère concerne la *nécessité d'élargir le caractère d'utilité des connaissances* (*Ibid.*, p. 82), dans le but *de les faire fonctionner en tant que savoir* (*Ibid.*) Autrement dit, il s'agit ici de rendre opérantes des connaissances ayant un domaine d'application limité. Ce repère comporte trois balises. La première, favoriser la dévolution, vise à proposer à l'élève une situation à dimension adidactique, mais également à soutenir l'élève pour que, non seulement il mette en œuvre une stratégie, mais surtout pour qu'il la finalise, la rende à terme pour être en mesure d'apprécier l'effet de la stratégie mise en œuvre. Il convient donc de prendre en considération les connaissances opératoires de l'élève et de soutenir l'élève dans la mise en relation de la stratégie et du résultat obtenu.

La deuxième balise suggère la nécessité de proposer différents supports et différentes situations autour des mêmes connaissances visées. En proposant diverses tâches pouvant être résolues à l'aide des mêmes connaissances, on suppose que le caractère

d'utilité de celles-ci peut s'élargir. De plus, l'exposition aux différentes situations peut favoriser l'institutionnalisation des connaissances auprès des élèves.

La troisième balise suggère le besoin de favoriser une institutionnalisation mesurée, c'est-à-dire de *favoriser le repère et l'abstraction de régularités mathématiques, qui elles-mêmes favorisent la transformation de connaissances en savoirs* (*Ibid.*, p. 24). Selon Giroux, les élèves en difficulté sont sensibles aux régularités mathématiques et celles-ci leur permettent de structurer leurs connaissances. Cette structuration est nécessaire notamment pour rendre possibles l'anticipation et le contrôle de leur action.

Le deuxième repère est nécessaire pour que la dévolution puisse s'opérer chez l'élève. Il se définit comme *maintenir un enjeu mathématique et donc l'interaction élève/milieu* (*Ibid.*, p. 25) et comporte également trois balises. La première balise proposée concerne le besoin d'être sensible aux savoirs mobilisés par les élèves dans la situation autres que ceux visés à priori. L'intervenant doit user de souplesse et éviter de recentrer trop rapidement l'élève sur la connaissance visée. En effet, la mobilisation d'autres connaissances peut témoigner d'une activité mathématique complexe chez l'élève et être propice à la coordination de connaissances et à l'approfondissement de connaissances jugées préalables dans l'enseignement ordinaire, mais qui ne sont pas forcément maitrisées par l'élève en difficulté.

La deuxième balise concerne l'allègement du milieu et consiste à proposer des situations comportant des consignes, du matériel ou un contexte qui n'enfouissent pas l'enjeu didactique, le savoir visé. En effet, l'objectif est de mobiliser le travail de l'élève sur les enjeux mathématiques et de permettre l'abstraction des savoirs, plutôt que de concentrer ses énergies sur l'appropriation des règles de fonctionnement ou encore sur la gestion complexe d'un matériel didactique, par exemple, le matériel multibase.

La dernière balise, une adidacticité calibrée, propose d'organiser le milieu didactique de sorte à permettre une rétroaction rapide à l'élève sur l'adéquation des connaissances mobilisées. Caractéristique du milieu didactique issue de la TSD (Brousseau, 1998), l'adidacticité pure est difficile à actualiser. Toutefois, selon Giroux, deux aspects d'un milieu adidactique sont importants à préserver, dont l'espace de choix possibles.

> *S'il est trop grand, le milieu n'est pas suffisamment contraignant pour favoriser l'engagement mathématique de l'élève. Si l'espace est trop restreint, l'action de l'élève ne repose pas sur une réelle décision et ne permet pas une véritable mise à l'épreuve des connaissances mathématiques engagées* (Giroux, 2013b, p. 83).

Le deuxième aspect, difficile à installer et à contrôler dans un milieu adidactique auprès des élèves en difficulté, concerne l'information que l'élève peut dégager au regard des connaissances mobilisées. En effet, les élèves s'accrochent souvent à des stratégies difficiles à gérer et susceptibles de générer des erreurs. Alors, la rétroaction du milieu ne favorise pas la régulation des stratégies aux contraintes de la tâche. La notion de temps de réaction est alors importante. Selon Giroux, la rétroaction aura un meilleur impact si elle est rapide. Elle permettra à l'élève de mieux comprendre le fonctionnement du milieu au regard des choix effectués et des connaissances investies pour mieux interagir avec celui-ci.

2.3 Le champ conceptuel multiplicatif

Le champ conceptuel multiplicatif s'insère dans la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud (1983). Selon cette théorie, et comme vu précédemment, un champ conceptuel constitue un lot de situations et un ensemble de concepts. Le concept prend son sens pour l'élève à travers la résolution d'une variété de situations où différents aspects des concepts et des mêmes opérations sont impliqués (Vergnaud,

1994a). Les champs conceptuels constituent, par conséquent, des domaines d'analyse relativement larges.

Les procédures et représentations impliquées dans la résolution des situations sous-tendent les notions de calcul relationnel et de calcul numérique (Vergnaud, 1994b). Le calcul relationnel consiste à établir la relation entre les éléments en jeu dans la situation. Ce calcul peut prendre la forme de simples constatations de la réalité, mais il doit souvent être inféré. C'est notamment le cas dans les énoncés de problèmes, étant donné la présence d'une inconnue. Le calcul relationnel peut être adéquat ou inadéquat et il est nécessaire à l'opérationnalisation du calcul numérique. Le calcul numérique constitue le calcul effectué sur les données numériques et témoigne de la relation établie entre les données. Le calcul relationnel peut être adéquat et le calcul numérique faux, par exemple dans le cas où l'élève effectue une erreur calcul. Ces deux types de calcul sont donc les deux facettes d'une même activité de résolution qui ne sont pas nécessairement faciles à distinguer dans l'analyse des conduites d'un élève.

Le champ multiplicatif contient plusieurs sous-classes de situations. L'accent sera ici posé principalement, mais non exclusivement, sur les contenus qui relèvent du primaire, plus spécifiquement, les sous-classes de situations permettant aux élèves de développer une bonne compréhension des opérations de multiplication et de division. On retrouve d'abord la structure de problèmes de type « isomorphismes de mesures », puis celle des problèmes à un seul espace de mesures (ou relations scalaires) et finalement, la structure de type « produits de mesures ». Un regard détaillé s'impose sur chacune de ces sous-classes pour mieux définir les types et la complexité des raisonnements nécessaires pour les résoudre. Mais avant d'aborder les différentes structures, il convient de définir les opérations de multiplication et de division sur le plan mathématique.

2.3.1 Les opérations de multiplication et de division

La multiplication est une opération qui permet, à partir de deux nombres a et b, d'en obtenir un troisième, soit $a \times b$. Son résultat s'appelle un produit, les termes a et b sont les facteurs du produit. Cette opération est toujours définie; le résultat de la multiplication de deux entiers donne toujours un entier.

Les propriétés de la multiplication sont les suivantes :

a) La commutativité : la multiplication est commutative : $a \times b = b \times a$.
b) L'associativité : la multiplication de plus de deux nombres est associative : $a \times b \times c = a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.
c) L'élément neutre : le nombre 1 est l'élément neutre de la multiplication. Ainsi, le produit d'un nombre quelconque par 1 est toujours égal à ce nombre : $a \times 1 = 1 \times a = a$.
d) L'élément absorbant : si zéro est l'un des facteurs d'un produit, ce produit est nul. Zéro est l'élément absorbant de la multiplication : $a \times 0 = 0 \times a = 0$.
e) La distributivité de la multiplication sur l'addition : la multiplication d'une somme par un nombre peut se distribuer sur les termes de cette somme. : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.
f) La distributivité de la multiplication sur la soustraction : la multiplication d'une différence par un nombre peut se distribuer sur les termes de cette différence : $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$.

La division est l'opération inverse de la multiplication par laquelle on obtient le facteur inconnu, l'autre facteur et le produit étant connus. Si a et b sont des entiers, que a est multiple de b et que b est $\neq 0$, alors le résultat de $a \div b$ est un entier tel que $b \times q = a$. Autrement dit, il existe un entier q tel que $a = b \times q$. Le nombre a est dit le dividende, le nombre b est dit le diviseur et q, le quotient. Ainsi, l'opération qui fait correspondre au couple (a, b) le nombre q, est une division.

L'opération de division, hormis la division euclidienne, n'est pas définie pour tous les couples ordonnés d'entiers. On prolonge la notion de quotient au cas où a n'est pas multiple de b, on obtient alors un nombre rationnel. Ainsi, s'il n'existe pas d'entier

dont la multiplication par b donne a, le quotient est noté a/b (par exemple, $17 \div 5 = 17/5$ *puisque* $17/5 \times 5 = 17$).

On appelle la division euclidienne, l'opération qui consiste à trouver deux naturels, le quotient, q et le reste, r, étant donné un dividende et un diviseur. La division euclidienne est l'opération qui à tout couple (a, b) de nombres entiers fait correspondre le couple (q, r) d'entiers exprimé par la relation: $a = bq + r$ avec $0 < r < b$.

2.3.2 La structure d'isomorphismes de mesures

La première sous-classe de situations vue à l'école primaire, et communément acceptée comme étant la base du champ conceptuel multiplicatif, concerne les isomorphismes de mesures (Vergnaud, 1994a). Cette sous-classe de problèmes permet au jeune élève de s'approprier la multiplication et la division dans un contexte de partage ou de regroupement. Ces problèmes sont accessibles en début de scolarité dans la mesure où de petits nombres naturels sont impliqués et qu'ils réfèrent à des domaines d'expérience simples, par exemple, l'achat de biens, le partage d'objets, etc. Des problèmes de cet ordre, mais faisant appel au temps ou à l'espace, sont plus complexes, puisque des concepts relevant d'autres champs conceptuels sont alors impliqués.

Les problèmes d'« isomorphismes de mesures » sont des problèmes à quatre quantités. La relation quaternaire n'est pas adéquatement représentée par l'écriture mathématique qui compose trois termes (Vergnaud, 1994b). Par exemple, dans le problème suivant, les quatre quantités peuvent être représentées dans une table de valeurs tandis que l'opération à poser pour résoudre le problème se compose de trois nombres, dont une inconnue :

Simon achète 4 chandails à 15 dollars chacun. Combien devra-t-il payer?

Mesure 1 (nombre de chandails)	Mesure 2 (dollars)
1 chandail	15$
4 chandails	x

Cet exemple se représente à l'aide de l'écriture comportant les trois termes suivants : 4 X 15 = 60. Le rapport à 1, l'élément neutre, ne fait pas partie de l'écriture, mais il est présent dans l'énoncé, induit par le mot « chacun ».

a) La multiplication

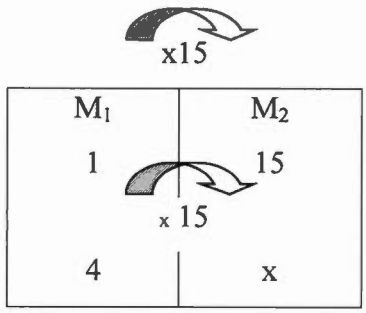
Les isomorphismes de mesures mettant en jeu la multiplication peuvent être résolus à l'aide de différents calculs relationnels. Dans l'exemple donné ci-dessus, l'élève peut reconnaitre la situation de multiplication directement et extraire la loi de composition binaire (a x b = x). Lorsque l'élève procède ainsi, il détache les nombres de leur dimension et attribue à la réponse la dimension adéquate, en l'occurrence, des dollars.

Généralement, selon Vergnaud (1983), le jeune élève ne détache pas les nombres de leur dimension et traite plutôt les problèmes à l'aide d'opérations unaires. Plusieurs calculs relationnels sont alors disponibles à l'élève, dont le raisonnement fonction et le raisonnement scalaire. Le raisonnement fonction fait appel à un opérateur fonction. L'opérateur fonction représente le coefficient de la fonction linéaire, soit a dans y =

ax. Sa dimension est le quotient des deux autres dimensions. Dans l'exemple donné, sa dimension constitue des dollars par chandail ($/chandail). Cette compréhension n'est pas forcément accessible en début d'apprentissage puisque *15 dollars chacun* doit être compris comme *15 dollars par chandail*, ce qui permet de mettre en relation multiplicative la dimension « chandail » et « dollars par chandail » pour obtenir des « dollars » (Vergnaud, 1994a). L'analyse dimensionnelle, où la dimension chandail est annulée par la division, est implicite dans la recherche de la solution :

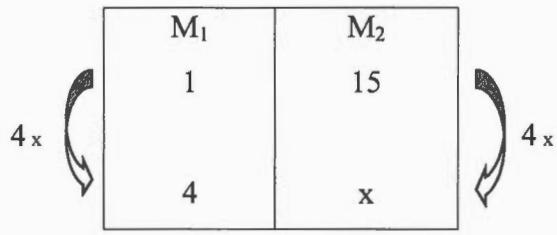
$$4\ \cancel{\text{chandails}} \quad X \quad \frac{15\ \text{dollars}}{\cancel{\text{chandail}}} \quad = \quad 60\ \text{dollars}$$

Ce calcul relationnel se représente ainsi :



L'élève peut aussi résoudre ce problème à l'aide d'un raisonnement scalaire. Il utilise alors un opérateur scalaire qui n'a pas de dimension. Le calcul comporte, dans ce cas, un ratio de deux quantités de la même sorte : 4 chandails coûtent 4 fois plus cher qu'un seul chandail (4/1).

Ce calcul se représente ainsi :



Lorsqu'il utilise ce raisonnement, l'élève peut résoudre le problème en multipliant 4 x 15. L'élève peut aussi opérer une addition répétée, reposant sur ce raisonnement scalaire, soit en posant 15+15+15+15. Selon Vergnaud (*Ibid.*), l'opérateur scalaire 15 fois plus, n'est pas pertinent sur le plan du calcul relationnel. Autrement dit, la multiplication 15 x 4, ou encore l'addition répétée de 4 chandails, 15 fois, n'a pas de sens ici puisqu'elle ne permet pas d'aboutir à la dimension recherchée soit des « dollars ». Cependant, il est possible de mettre en œuvre une addition répétée de 4 (15 fois) si on considère qu'il y a 4 chandails à 1 dollar chacun et que le coût sera 15 fois plus grand si chacun des chandails coûte non plus 1 dollar, mais 15 dollars. Nous aurions ainsi 4 chandails x 1$/chandail = 4$. On peut alors répété 4$, 15 fois puisque 4 $ doit être amplifié par 15.

Selon Vergnaud (1983), l'addition répétée, qui est souvent utilisée par les élèves en début d'apprentissage, n'est pas un raisonnement multiplicatif. Elle symbolise toutefois, comme nommé ci-dessus, un raisonnement scalaire reposant sur l'itération de l'addition. À ce sujet, Vergnaud (*Ibid.*) postule que les structures multiplicatives reposent en partie sur les structures additives, mais qu'elles ont aussi leur propre organisation intrinsèque qui n'est pas réductible aux aspects additifs.

L'utilisation par les élèves du raisonnement scalaire ou du raisonnement fonction peut être « forcée » par le choix des nombres en jeu. Cependant, l'auteur (*Ibid.*) précise que les élèves ont plus souvent recours au raisonnement scalaire, même lorsque les

nombres favorisent le raisonnement fonction, puisque le raisonnement scalaire ne nécessite pas une mise en relation de deux dimensions.

b) La division partage

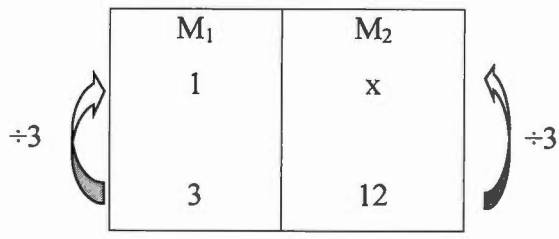
Dans les problèmes faisant appel à la division partage, l'élève doit trouver la valeur unitaire, par exemple :

Julie veut partager ses bonbons avec Jeanne et Li-Anne. Sa mère lui a donné 12 bonbons. Combien chacune recevra-t-elle de bonbons?

Mesure 1 (personnes)	Mesure 2 (bonbons)
1 personne	x
3 personnes	12 bonbons

Pour résoudre ce type de problème, l'élève peut avoir recours à différents calculs relationnels. Toutefois, il est aussi possible de le résoudre sans avoir recours à une procédure numérique faisant appel à la division. En effet, l'élève peut utiliser du matériel, comme des jetons, dessiner ou manipuler mentalement les bonbons pour en faire le partage. Cette procédure ne comporte pas de caractère multiplicatif et est peu efficace sur de plus grands nombres.

L'élève peut aussi utiliser un raisonnement scalaire qui se représente ainsi :



Le raisonnement scalaire n'implique pas les deux grandeurs du problème. Ainsi, une personne aura trois fois moins de bonbons que les trois personnes réunies. Le raisonnement se joue dans la grandeur « bonbons », en comparaison avec la grandeur « personnes ». Malgré que les deux grandeurs ne soient pas traitées, la division, étant l'inverse de la multiplication, constitue une difficulté conceptuelle pour plusieurs élèves. En effet, si «3 fois plus» est facilement associé à l'opération «x3», l'expression «3 fois moins» n'est pas facilement associée à l'opération «÷ 3». Mettre en relation «3 fois moins» et « ÷ 3» implique que l'élève induise que la relation «fois moins» est l'inverse de la relation «fois plus» et qu'alors il faut inverser la multiplication par la division. Un raisonnement multiplicatif qui ne sollicite pas la division, permettant donc d'éviter la difficulté conceptuelle soulevée par cette inversion, est de recourir à la multiplication trouée que l'on peut modéliser ainsi : 3 x ? = 12. Cette procédure est valable seulement pour des petits nombres entiers, lorsque l'élève peut se référer à ses tables de multiplication. L'adulte procèderait aussi ainsi en présence de petits nombres (Vergnaud, 1983).

c) La division regroupement

Dans les problèmes faisant appel à la division regroupement, l'élève doit trouver le nombre de groupements, par exemple :

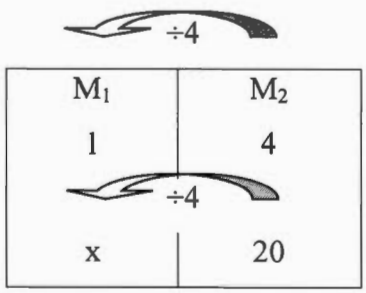
Pierre range ses photos dans un album. Il a 20 photos et il en place 4 par page.
Combien de pages remplira-t-il?

Mesure 1 (pages)	Mesure 2 (photos)
1 page	4 photos
x	20 photos

Cette structure de problème est plus difficile à résoudre pour les élèves que les problèmes de division partage puisqu'elle comporte deux difficultés conceptuelles

importantes. À la base, ces problèmes font appel à un raisonnement fonction et peuvent être résolus en inversant le coefficient de la fonction linéaire et en l'appliquant à y : y/a=x (Vergnaud, 1983). Dans l'exemple, y représente le nombre total de photos (20) et a représente le coefficient de la fonction linéaire « 4 photos/pages ». Donc, 20 photos divisées par 4 photos/page. Cette inversion constitue la première difficulté. La deuxième difficulté réside dans le fait que l'opérateur fonction a une dimension (*Ibid.*)

Ce calcul relationnel se représente ainsi :



Pour éviter ces difficultés conceptuelles et éviter le recours à la division, l'élève peut procéder par soustraction ou addition itérées qui sont des stratégies en accord avec la structure de regroupement puisque terme de l'addition correspond à la valeur d'une sous-collection. La présence de grands nombres vient rendre cette procédure très lourde à gérer.

L'élève peut aussi procéder à l'aide d'un raisonnement scalaire grâce au passage par l'égalité lacunaire suivante : 4 x ? = 20. Ainsi, l'élève se demande combien de fois 4 entrent dans 20, c'est-à-dire combien de paquets de 4 photos feront 20 photos. Ainsi, il évite l'inversion de l'opérateur fonction et le traitement de sa dimension. Le nombre recherché correspond alors à l'opérateur scalaire cinq fois plus, « x5 ». Cette procédure est possible lorsque l'on est en présence de petits nombres naturels qui font appel aux faits multiplicatifs. Elle est toutefois rendue complexe par la présence de

nombres pour lesquels le terme manquant se calcule difficilement. Le passage par le raisonnement fonction est alors nécessaire.

d) Les problèmes d'isomorphismes de mesures sans rapport à l'unité explicite dans l'énoncé de problème

Les isomorphismes de mesures contiennent aussi des problèmes pour lesquels le rapport à un n'est pas explicite dans l'énoncé, par exemple :

Catherine a fait 12 km à bicyclette en 30 minutes.
Si elle continue à la même vitesse, quelle distance aura-t-elle parcourue en 60 minutes?

Mesure 1 (km)	Mesure 2 (minutes)
12 km	30 minutes
x	60 minutes

L'inconnue peut se situer à l'une ou l'autre des positions de la table de valeurs. Ces problèmes sont difficiles pour les élèves du troisième cycle primaire puisqu'ils font appel aux concepts de proportion et de rapport. De même, une plus grande variété de procédures leur est disponible pour résoudre ces énoncés de problèmes. De plus, à l'intérieur de cette classe de problèmes, le niveau de difficulté varie, entre autres, en fonction du choix des nombres, qui peut nécessiter, ou non, le recours à la fraction et aux nombres décimaux (Vergnaud, 1994b).

Les calculs relationnels disponibles aux élèves sont, comme pour les classes de problèmes précédents, le raisonnement scalaire et le raisonnement fonction qui comportent les mêmes difficultés conceptuelles déjà nommées. La difficulté additionnelle pour ce type de problème réside dans l'absence du rapport à un dans

l'énoncé. Selon Vergnaud (1983), il est plus naturel pour les élèves d'utiliser le raisonnement scalaire pour les problèmes nécessitant une division. Pour ce type de problème, il a identifié huit étapes développementales en lien avec le raisonnement scalaire, chez des élèves âgés de 11 à 15 ans (Vergnaud, 1994b). À l'issue de ce développement, l'élève peut avoir recours à la règle de trois. Celle-ci est d'ailleurs utilisée par seulement 1 % des sujets de sa recherche.

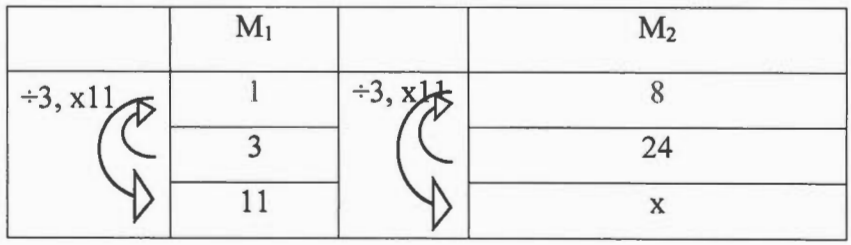
Dans l'exemple donné, que l'on peut retrouver au primaire, le choix des nombres facilite l'utilisation d'un raisonnement scalaire et n'incite pas la recherche du nombre de minutes pour 1 km. Ainsi, 60 étant le double de 30, l'élève, par rappel direct ou par calcul mental, peut avoir accès à l'opérateur scalaire deux fois plus, « x2 ». La situation est différente pour l'exemple suivant :

3 pelotes de laine pèsent 24 grammes.
Il en faut 11 pour tricoter un chandail. Quel est le poids du chandail?

Mesure 1 (pelotes)	Mesure 2 (poids)
3 pelotes	24 grammes
11 pelotes	x

Les nombres choisis dans cet exemple favorisent l'utilisation du raisonnement fonction. Ainsi, l'opérateur fonction *x 8 grammes/pelote* est plus facile à trouver que l'opérateur scalaire *x 3,6̄* Dans cette situation, selon Vergnaud (1994b), les élèves procèdent d'abord par la recherche de valeur unitaire, qui serait la première étape développementale. La valeur unitaire se trouve à l'aide d'un raisonnement scalaire. Ainsi, l'opérateur scalaire trois fois plus, « x3 », dois être inversé dans le calcul 24÷3. Par la suite, un deuxième raisonnement scalaire permet de trouver le poids du chandail à l'aide de l'opérateur scalaire « x11 ».

Ce raisonnement se représente ainsi :



En utilisant le raisonnement scalaire, l'élève évite de se confronter aux difficultés du traitement du quotient des dimensions. C'est principalement au cours de son développement, au secondaire, que l'élève acquiert les concepts de proportion et de rapport. L'apprentissage s'échelonne sur une longue période. Ces problèmes d'isomorphismes de mesures sont donc peu travaillés au primaire et, par conséquent, peu accessibles aux élèves en difficulté.

2.3.3 Les cas d'un seul espace de mesure

Les problèmes d'un seul espace de mesure peuvent être utilisés en troisième et en quatrième année pour susciter la réflexion des élèves en ce qui concerne le raisonnement scalaire (Vergnaud, 1994b). Ces problèmes comportent deux quantités et un opérateur scalaire, par exemple :

Pour fabriquer une jupe, il faut 2 mètres de tissu.
Il en faut trois fois plus pour fabriquer un costume.
Il faut donc 6 mètres de tissu pour fabriquer le costume.

La formulation de ces énoncés de problèmes nécessite les expressions *n fois plus* ou *n fois moins*, qui ne figurent pas dans les énoncés de problèmes d'isomorphismes de mesures. Par contre, on utilise ces problèmes pour expliquer le raisonnement scalaire. Les problèmes comportant un seul espace de mesure sont pertinents pour développer

chez l'élève le langage mathématique lui permettant de concevoir et de nommer des relations multiplicatives entre les nombres. Vincent (1992), dans son étude sur la prégnance des modèles additifs dans le développement des représentations sur les relations multiplicatives, a identifié trois grands niveaux de représentation chez les élèves pour ce type de problèmes. Les deux premiers niveaux de représentation ne conduisent pas à la bonne réponse. Ainsi, au premier niveau, *n fois plus* est compris comme *n de plus*. Alors, l'élève utilise le modèle additif pour résoudre l'énoncé de problème (2+3). Au deuxième niveau, *n fois plus que* est compris comme *n fois de plus que y*. Alors, l'élève combine multiplication et addition : 3x2+2. Au dernier niveau, les élèves différencient l'addition de la multiplication et peuvent réussir le problème.

Dans les problèmes d'un seul espace de mesure, selon ce qui est recherché dans l'énoncé, soit une des mesures ou l'opérateur scalaire, les élèves pourront avoir recours à la multiplication ou à la division. Ces problèmes peuvent aussi se résoudre à l'aide de l'addition ou de la soustraction répétée. De plus, pour trouver l'opérateur scalaire, l'égalité lacunaire peut être posée lorsque de petits nombres, faisant appel aux tables de multiplication, sont utilisés dans l'énoncé de problème.

Multiplication (recherche d'une mesure)	Division (recherche d'une mesure)	Division (recherche de l'opérateur scalaire)
Jupe 2 — x 3 — Costume x	Jupe x — x 3 — Costume 6	Jupe 2 — x x — Costume 6

Ce type de problème s'avère complexe pour les élèves lorsque la formulation de l'énoncé conduit à l'opération inverse de ce qui est induit par les expressions n fois

plus ou n fois moins. Par exemple, le problème suivant fait plutôt appel à la division alors que les mots *trois fois plus* sont présents dans l'énoncé :

William a 6 bonbons, il en a trois fois plus que sa sœur.
Combien sa sœur a-t-elle de bonbons?

2.3.4 Les produits de mesures

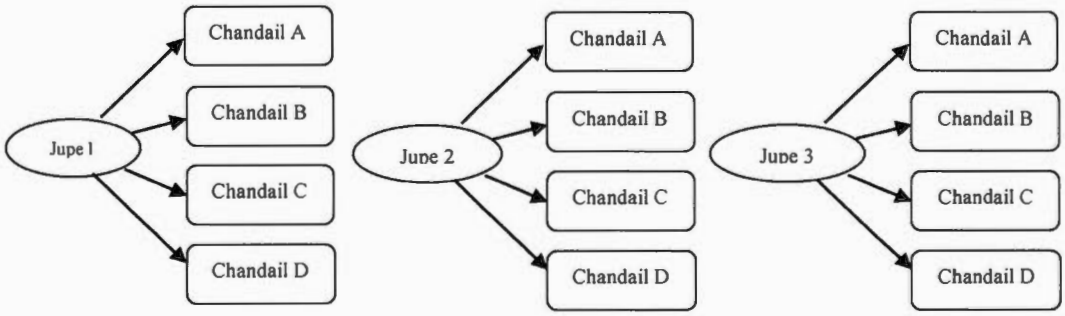
Les produits de mesures incluent, entre autres, les problèmes d'aire et de volume, ainsi que les produits cartésiens. Ces problèmes comportent trois quantités ayant chacune leur dimension propre, soit trois variables, dont aucune des dimensions n'est pas le quotient des deux autres, comme c'est le cas pour les isomorphismes de mesures (Vergnaud, 1983). Par exemple, des mètres multipliés par des mètres donnent des mètres carrés. Le mètre permet de mesurer des longueurs alors que le mètre carré permet de mesurer des surfaces. D'un point de vue conceptuel, ces problèmes sont complexes pour les élèves, puisque les dimensions sont différentes l'une de l'autre et le mot mètre est utilisé dans les deux cas. Vergnaud (*Ibid.*) postule que pour représenter ces problèmes, une table de valeurs ne convient pas. Il est nécessaire d'utiliser un tableau à double entrée. Lorsque des problèmes d'aire sont concernés, la relation entre les nombres se représente bien à l'aide d'un quadrillage, qui prend la même forme que le tableau à double entrée. Pour les problèmes de produits cartésiens, l'utilisation du tableau à double entrée ou du schéma est nécessaire, par exemple :

Dans ma garde-robe, j'ai 3 jupes ayant chacune une couleur différente
et 4 chandails ayant chacun une couleur différente.
Combien d'ensembles différents puis-je former?

Tableau à double entrée :

	Chandail A	**Chandail B**	**Chandail C**	**Chandail D**
Jupe 1	Ensemble A1	Ensemble B1	Ensemble C1	Ensemble D1
Jupe 2	Ensemble A2	Ensemble B2	Ensemble C2	Ensemble D2
Jupe 3	Ensemble A3	Ensemble B3	Ensemble C3	Ensemble D3

Schéma :



Sur le plan numérique, ce produit s'exprime par 3x4=12, visible dans ces deux représentations. D'un point de vue dimensionnel, le produit se conçoit comme jupes x chandails = ensembles. Outre le schéma et le tableau à double entrée, l'addition répétée des sous-ensembles est aussi possible, par contre, dans le cas des produits de mesures d'aire ou de volume, cette façon de résoudre le problème comporte une limite conceptuelle étant donné que la dimension finale en est une de surface plutôt que linéaire. L'addition répétée sur le plan dimensionnel n'est donc pas appropriée pour traiter un produit cartésien ou un produit de mesures car la multiplication est nécessaire pour identifier le produit nouveau.

Les problèmes de volume ou les produits cartésiens comportant trois mesures constituent une difficulté additionnelle, notamment lorsque l'on souhaite les illustrer ou les représenter sur papier. Toutefois, selon Vergnaud (1994b), la généralisation des problèmes comportant deux mesures vers ceux en comportant trois ne pose pas problème pour les produits cartésiens.

Même si cette classe de problèmes se retrouve dans le même champ conceptuel que les isomorphismes de mesures, ces problèmes sont très différents et sont plus difficiles à maitriser. Selon Vergnaud (1983), cette classe de problèmes pourra être pleinement maîtrisée par les élèves seulement lorsque les problèmes de proportions multiples seront compris.

La maitrise par les élèves des problèmes à structure multiplicative, compte tenu des différentes classes de problèmes, se fait donc progressivement et comporte différents obstacles. Cette analyse permet notamment de révéler la complexité des structures multiplicatives comparativement aux structures additives et de relever les calculs relationnels et numériques possibles, particulièrement en ce qui a trait aux isomorphismes de mesures, dont certains permettent d'éviter le recours à un raisonnement multiplicatif. L'auteur de la TCC spécifie que le raisonnement scalaire est privilégié par les élèves même si les nombres en jeu favorisent un raisonnement différent. Ce type de raisonnement, étant lié à l'addition répétée, peut d'ailleurs être abordé en début d'apprentissage, au deuxième cycle primaire, par la présentation de problèmes comportant un seul espace mesure. Il est également possible de constater que le choix des nombres et des dimensions peut grandement complexifier les énoncés de problèmes. Cette analyse permet aussi d'identifier que l'inversion de l'opération de multiplication pour concevoir la division et l'analyse dimensionnelle impliquée dans l'utilisation du raisonnement fonction sont autant de difficultés importantes pour l'élève. Finalement, on constate que les produits de mesures sont fondamentalement différents des isomorphismes de mesures et ne peuvent s'aborder de la même manière par l'élève. Ces problèmes sont d'ailleurs très complexes compte tenu du fait qu'ils peuvent se concevoir comme des problèmes à proportions multiples et qu'ils comportent des mesures élémentaires dont aucune n'est le quotient des deux autres.

2.4 Objectifs spécifiques de l'étude

Au terme du contexte théorique, nous précisons les objectifs de notre recherche. Rappelons d'abord que l'objectif général, formulé au terme de la problématique, est d'étudier l'usage de la situation à dimension adidactique et celle de la notion d'énoncés de problèmes en contexte d'intervention orthopédagogique en mathématiques.

Un certain choix doit s'opérer sur le contenu investi dans l'intervention considérant d'une part la durée limitée de l'intervention et, d'autre part, le niveau scolaire des élèves en difficulté. Ainsi, à la suite des travaux de Vergnaud (1983, 1994a, 1994b) sur les structures multiplicatives, nous visons un travail mathématique plus spécifique sur les problèmes de type isomorphismes de mesures et de type scalaire. Nous retenons aussi la relation facteur/multiple entre les nombres qui permet un traitement multiplicatif en contexte essentiellement « numérique ». Il convient également de structurer notre intervention tenant compte des résultats des recherches dans le domaine de la didactique des mathématiques en adaptation scolaire. Nous avons choisi d'appuyer cette structuration sur les repères et balises énoncés par Giroux (2013a) puisqu'ils sont relativement opérationnels en contexte d'orthopédagogie.

Deux objectifs spécifiques découlent donc de l'objectif général :

1. Planifier et piloter une intervention orthopédagogique mettant en œuvre l'usage de la situation à dimension adidactique et des énoncés de problèmes et à en décrire les effets sur la transformation des connaissances d'élèves sur les structures multiplicatives, notamment, celles relatives à la résolution de problèmes de types isomorphismes de mesures et scalaire.

2. Prendre en compte dans l'élaboration de l'intervention les repères et balises décrits par Giroux (2013a) et à apprécier leur effet sur le contenu des interactions didactiques.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Cette recherche met en place une méthodologie qualitative. Elle est de type exploratoire. C'est par l'élaboration d'une séquence d'intervention orthopédagogique sur les structures multiplicatives développée à partir de l'investigation des connaissances des élèves, et mettant en œuvre des problèmes s'appuyant sur la théorie des situations didactiques et sur la théorie des champs conceptuels, que sont poursuivis les objectifs de recherche.

3.1 Participants

L'échantillon est intentionnel et composé de cas typiques d'élèves en difficulté d'apprentissage. Les élèves, âgées de 11 ans, poursuivent une scolarité en classe ordinaire, au troisième cycle primaire. Ce choix découle des contenus mathématiques travaillés. En effet, l'élève du deuxième cycle ayant des difficultés à réaliser des tâches sur les structures multiplicatives n'est pas forcément considéré en difficulté puisque ces contenus sont abordés dans ce cycle et que les élèves sont en cours d'apprentissage.

L'expérimentation est réalisée avec un sous-groupe de deux élèves d'une école de la région de Lanaudière n'appartenant pas au même groupe-classe. Leur participation est volontaire et autorisée par les parents. L'organisation en sous-groupe vise à permettre une interaction et un partage de stratégies entre les élèves.

Les sujets ont été choisis sur la base de l'examen de leurs dossiers scolaire et orthopédagogique. Ceux-ci présentent des échecs en mathématiques aux évaluations

sommatives pour l'année scolaire 2013-2014 et n'ont pas bénéficié d'orthopédagogie en mathématiques dans le passé.

3.2 La séquence orthopédagogique

La séquence orthopédagogique se déroule en deux temps. D'abord, une investigation des connaissances est réalisée à l'aide d'un entretien orthodidactique en individuel. Puis, l'intervention proprement dite est conduite, en sous-groupe, sur 8 périodes de 60 minutes. Toutes les séances sont filmées pour être analysées par la suite.

3.2.1 L'entretien orthopédagogique initial

L'entretien orthopédagogique est nécessaire pour préparer la séquence d'intervention, notamment pour sélectionner les tâches et identifier certaines valeurs des variables didactiques. Ces entretiens sont dirigés et analysés individuellement. Les tâches pour cette investigation sont issues de l'entretien orthopédagogique de Giroux (2013b) sur les structures multiplicatives. Cet entretien comporte trois blocs de tâches : 1) codage et interprétation de l'écriture A x B; 2) résolution de problèmes; 3) calcul et propriétés de la multiplication. Les tâches du deuxième bloc sont toutes sélectionnées, de même que certaines tâches du troisième bloc, soit celles construites sous la forme de problèmes à résoudre et traitant des propriétés de la multiplication. La pertinence des tâches du premier bloc est moindre dans le contexte de cette étude, étant donné que les élèves du troisième cycle sont exposés depuis plusieurs années à l'écriture multiplicative. De même, les tâches de vérification des habiletés à calculer ou à rappeler les faits multiplicatifs du bloc 3 ne sont pas nécessaires, puisqu'elles ne font pas l'objet de la recherche. Par contre, la maîtrise des faits multiplicatifs et la connaissances des algorithmes sont observées dans les tâches du bloc 2 et, également, en cours de recherche.

L'analyse a priori de chacune des tâches de l'entretien est présentée à l'annexe A. Les conduites anticipées sont précisées pour certaines tâches et, lorsque nécessaires, mises en relation avec les choix relatifs aux variables didactiques. Le matériel utilisé lors des entretiens est présenté à l'annexe B. Dans ce qui suit, chaque bloc de tâches retenu est caractérisé sommairement.

a) Résolution de problèmes

Ce bloc de tâches contient un éventail de neuf items faisant appel à diverses structures de problèmes du champ conceptuel multiplicatif tel que présenté au tableau 3.1. Les produits de mesures d'aire et de volume, le produit cartésien et les cas de relation inverse d'un seul espace de mesure n'étant pas maitrisés au troisième cycle du primaire, ils ne sont pas retenus pour l'entretien. Toutefois, pour faire l'état des connaissances de l'élève, un problème de multiplication d'un seul espace de mesure en relation inverse est présenté, de même que deux multiplications présentant une structure de produit cartésien.

Tableau 3.1
Distribution des problèmes par structure

Structures	Numéros d'items de l'entretien orthopédagogique	Nombre total d'items par structure
Isomorphisme de mesures : multiplication	A1(b), A2 (a,b,c,d), A3, A4	7
Isomorphisme de mesures : division partage	A1 (e), A5, A6	3
Isomorphisme de mesures : division regroupement	A1 (f et g), A7	3
Isomorphisme de mesures : proportionnalité (sans rapport à l'unité dans l'énoncé)		Aucun
Un seul espace mesure : multiplication, recherche d'une mesure – relation directe	A8 (a)	1
Un seul espace mesure : division, recherche d'une mesure – relation directe	A8 (b)	1
Un seul espace mesure : division, recherche d'une mesure – relation inverse	A8 (c)	1
Un seul espace mesure : division, recherche de la relation		Aucun
Produit de mesures : produit cartésien - multiplication	A1(c), A9	2
Produit de mesures : produit cartésien - division		Aucun
Produit de mesures : aire		Aucun
Produit de mesures : volume		Aucun

b) Calculs et propriétés

Cette partie du protocole présente quatre items, soit des problèmes contextualisés qui sollicite des connaissances en acte sur les propriétés de commutativité, d'associativité et sur la recherche de facteurs.

Suite à l'entretien didactique, l'analyse des conduites des élèves permet d'identifier les stratégies utilisées pour résoudre les différents types de problèmes du champ conceptuel multiplicatif telles que détaillées dans le cadre théorique. L'ensemble de

l'analyse permet de préciser certaines valeurs des variables didactiques de l'intervention orthopédagogique.

3.2.2 Intervention orthopédagogique en sous-groupe

L'élaboration des situations et tâches proposées au cours de l'intervention s'appuie sur l'analyse didactique des contenus visés (présentés dans le contexte théorique), sur les balises et repères pour l'intervention orthopédagogique, et ce, dans la perspective d'utiliser une situation à caractère adidactique en contexte orthopédagogique à laquelle sont articulés des énoncés de problèmes à résoudre.

Aux tableaux 3.2 et 3.3, nous précisons comment chacune des balises, pour chacun de repères, est pris en compte dans l'élaboration de l'intervention.

Tableau 3.2
Premier repère

Premier repère : nécessité d'élargir le caractère d'utilité des connaissances		
Balises	Favoriser la dévolution	L'entretien d'investigation des connaissances qui précède devrait permettre de mieux situer les connaissances opératoires des élèves et donc de choisir des valeurs de variables adaptées au profil des élèves. Une situation de référence à caractère adidactique est choisie pour favoriser la dévolution et sur laquelle se fondent des énoncés de problèmes visant à l'appropriation des connaissances visées.
	Variété des supports et des situations.	Les situations et les supports de travail sont planifiés pour être variés, compte tenu de la durée limitée de l'intervention.
	Favoriser une institutionnalisation mesurée	Une attention sera portée au repérage des régularités mathématiques en cours de situation.

Tableau 3.3
Deuxième repère

Deuxième repère : maintenir un enjeu mathématique		
Balises	Sensibilisation de l'intervenant aux savoirs mobilisés autres que ceux visés à priori	L'orthopédagogue va chercher à éviter de recentrer trop rapidement l'élève sur la tâche lorsque celui-ci mobilise d'autres savoirs pouvant potentiellement être coordonnés avec ceux visés ou pouvant faire émerger une nouvelle connaissance mathématique.
	Allègement du milieu	Le choix des situations est réalisé en respectant cette balise.
	Adidacticité calibrée	Dans le cadre de cette recherche, toutes les situations ne reposent pas sur le principe d'adidacticité (Brousseau, 1998) et la rétroaction doit parfois être assurée par l'orthopédagogue notamment dans la résolution de problèmes à énoncé. Cette rétroaction doit idéalement permettre à l'élève d'évoluer plutôt que d'uniquement sanctionner la réussite ou l'échec.

L'articulation des situations à caractère adidactique et d'énoncés de problèmes, dans le cadre de l'intervention orthopédagogique, est partie prenante du deuxième objectif de cette recherche. Le jeu des étoiles, version multiplicative (Giroux, 2009 et 2013a), est choisi comme situation de référence, à caractère adidactique, à laquelle s'articulent d'autres tâches. Des problèmes multiplicatifs de différentes factures sont soumis : 1) énoncés de problèmes qui réfèrent au contexte du jeu des étoiles; 2) énoncés de problèmes de facture plus classique; 3) tâches tirées et adaptées de la thèse de Vincent (1992), pour lesquelles les élèves sont invités à illustrer des relations additives et multiplicatives dans divers contextes. Les tâches présentent ainsi une certaine variété et reposent sur des supports différents (jeu, feuille de route du jeu, énoncés de problèmes, dessins). Une progression possible du jeu et du maillage de l'ensemble des tâches est détaillée dans ce qui suit; certaines adaptations mineures à cette planification sont réalisées en cours de route et sont relevées au chapitre suivant.

a) Situation de référence : le jeu des étoiles, version multiplicative

Le jeu des étoiles a pour but de favoriser le passage du raisonnement additif au raisonnement multiplicatif par la mise en relation facteur/multiple. L'évolution des valeurs des variables didactiques au fil des parties jouées vise à alourdir le raisonnement additif. Le raisonnement multiplicatif devient alors utile, voire nécessaire à l'élève pour contrôler ses déplacements dans le jeu. Le jeu sur les valeurs des variables didactiques permet ultimement de travailler les propriétés de la multiplication.

Tel que décrit dans le document en annexe sur le jeu des étoiles (annexe C) (Giroux, 2009 et 2013a), les grilles du jeu sont formées d'une suite de nombres à intervalle réguliers différents de 1 (n étant l'intervalle) et comportent 5 ou 10 lignes de 10 nombres chacune. Malgré que l'intervalle soit respecté, les planches proposées ne sont pas entièrement numérotées. Chaque colonne de la grille est composée d'une suite de 5 ou 10 termes dont chaque terme est la somme du précédent et de $10n$. Ainsi, chaque nombre d'une même colonne se termine par le même chiffre.

Le but du jeu, pour les élèves, est d'accumuler le plus de points possible en arrêtant leurs déplacements sur des étoiles dont la valeur est de 1, 2 ou 3 points. Le gagnant est celui qui a accumulé le plus de points au cours d'une partie, dont le temps est déterminé à l'avance. Plusieurs possibilités de déplacement s'offrent aux sujets et ceux-ci doivent mobiliser leurs connaissances mathématiques pour dégager le meilleur déplacement à faire et le nombre devant figurer sur la case d'arrivée, si celle-ci n'est pas déjà numérotée. Après chaque coup joué, les joueurs doivent remplir leur feuille de route sur laquelle doit être inscrit : le nombre de départ, le(s) nombre(s) obtenu(s) sur le(s) dé(s), le nombre d'arrivée, le nombre de cases qui correspond au déplacement et le nombre de points obtenus[13].

---

[13] Pour l'analyse a priori plus détaillée, voir l'annexe C.

b) L'intervention orthopédagogique et son analyse à priori

Le contenu de chacune des séances de l'intervention orthopédagogique est présenté dans ce qui suit. La séquence tient compte des informations tirées des entretiens d'investigation. Une analyse a priori est réalisée afin de guider l'analyse des conduites mathématiques des élèves qui sera engagée au chapitre suivant.

Première période :

But :

- Familiarisation avec le jeu des étoiles et mise en œuvre de la stratégie élémentaire.

Jeux des étoiles, partie 1	Intervalles de 2 Planche de 50 cases graduées de 60 à 158 1 dé
Jeux des étoiles, partie 2	Intervalles de 5 Planche de 100 cases graduées de 50 à 545 1 dé

Deuxième période :

But :

- Mise en œuvre de la stratégie intermédiaire, voire optimale, dans le jeu des étoiles dans la version à un seul dé.
- Dégager la relation facteur/multiple dans le cadre du jeu des étoiles.
- Différenciation des expressions additives et multiplicatives de comparaison de mesures (de plus, de moins, fois plus, fois moins).
- Travail d'appropriation des relations scalaires.

Jeux des étoiles, partie 1	Intervalles de 5 Planche de 100 cases graduées de 50 à 545 1 dé
Jeux des étoiles, partie 2	Intervalles de 3 Planche de 50 cases graduées de 51 à 198 1 dé

Problèmes des poissons (Annexe D)	Cette activité, inspirée de Vincent (1992), propose aux élèves de compléter une variété de dessins comportant 2 aquariums entre lesquels une flèche pointant vers la droite indique le sens de la relation. Les aquariums peuvent ou non contenir des poissons. Les énoncés font appel aux structures additives et multiplicatives. Chaque élève pige au hasard une illustration différente. Il s'agit de transformer, au besoin, l'illustration pour qu'elle respecte la relation annoncée en faisant le moins de transformations possibles et en ne plaçant pas plus de 9 poissons dans un aquarium. Au final, après avoir ajusté le nombre de poissons d'un côté et/ou de l'autre de la flèche, l'aquarium de droite doit comporter le nombre de poissons correspondant au résultat de la relation appliquée à la quantité de poissons de l'aquarium de gauche. Par exemple, au problème 2 ci-dessous, il devrait y avoir au final 6 poissons à gauche et 3 à droite : 6 est *3 de plus que 3.* Il est attendue que les conduites soient adéquates pour les problèmes additifs alors que, pour les problèmes multiplicatifs, celles-ci s'apparentent à celles identifiées dans l'étude de Vincent (*Ibid.*) Par exemple, au problème 3 ci-dessous, si l'élève confond *2 fois plus* avec *2 de plus,* il pourrait ajouter 2 poissons dans l'aquarium de gauche pour qu'il y en ait 5 au total, puisque 5 est 2 de plus que 3. S'il comprend *2 fois plus* avec *2 fois de plus que*, il trouvera 9 (2x3+3) et ajoutera 6 poissons dans l'aquarium de gauche. Il peut aussi obtenir le bon résultat (6 poissons à gauche) et ajouter 3 poissons à l'aquarium de gauche. Certaines illustrations sont déjà conformes. La présentation des illustrations est accompagnée d'une discussion entre les parties. Plusieurs tours sont réalisés, compte tenu du temps disponible dans la période. La totalité des illustrations ne sera pas utilisée. Illustrations à compléter : 1- Relation : autant que Aquarium de gauche : vide Aquarium de droite : 3 poissons 2- Relation : 3 de plus que Aquarium de gauche : 3 poissons Aquarium de droite : 3 poissons 3- Relation : 2 fois plus que Aquarium de gauche : 3 poissons Aquarium de droite : 3 poissons 4- Relation : 3 fois plus que Aquariums de gauche : 2 aquariums de 3 poissons chacun Aquarium de droite : 3 poissons

	5- Relation : 4 de moins que Aquarium de gauche : 9 poissons Aquarium de droite : 4 poissons 6- Relation : 2 fois moins que Aquarium de gauche : 4 poissons Aquarium de droite : 8 poissons 7- Relation : 2 fois moins que Aquariums de gauche : 2 aquariums de 7 poissons chacun Aquarium de droite : 7 poissons 8- Relation : 3 de moins que Aquarium de gauche : 4 poissons Aquarium de droite : 8 poissons 9- Relation : 3 fois moins que Aquarium de gauche : vide Aquarium de droite : vide 10- Relation : moins que Aquarium de gauche : 7 poissons Aquarium de droite : 5 poissons

Troisième période :

But :

- Rencontrer la limite des stratégies intermédiaires dans le jeu des étoiles et mise en œuvre de la stratégie optimale dans le jeu des étoiles, dans la version à 2 dés.
- Différenciation des expressions additives et multiplicatives de comparaison de mesures (de plus, de moins, fois plus, fois moins).
- Travail d'appropriation des relations scalaires.

Jeux des étoiles : 2 parties avec les mêmes variables	Intervalles de 3 Planche de 50 cases graduées de 51 à 198 2 dés
Problèmes des poires (Annexe E)	Cette activité, inspirée de Vincent (1992), propose aux élèves de compléter une variété de dessins comportant 2 personnages ayant chacun une ou des assiettes de poires. Dans cette activité, l'énoncé comparatif doit être respecté, de même que le nombre total de poires à

	obtenir. Les conduites attendues sont similaires à celles des problèmes des poissons, par contre la contrainte du nombre total de poires vient encadrer l'élève et lui permet d'obtenir une rétroaction par la tâche. Chaque assiette ne peut contenir plus de 4 poires. Certaines illustrations sont déjà conformes. Chaque participant pige au hasard une illustration différente. La présentation des illustrations complétées par les élèves est accompagnée d'une discussion entre les parties. Plusieurs tours sont réalisés, compte tenu du temps disponible dans la période. La totalité des illustrations ne sera pas utilisée. Illustrations à compléter ou à modifier: 1- Énoncé : Marie a 4 poires de plus que Jean. Ensemble, ils ont 12 poires. Marie : aucune assiette de poires Jean : une assiette de 4 poires 2- Énoncé : Marie a 2 fois plus de poires que Jean. Ensemble, ils ont 12 poires. Marie : 2 assiettes de 4 poires Jean : 1 assiette de 4 poires 3- Énoncé : Jean a 2 fois moins de poires que Marie. Ensemble, ils ont 12 poires. Marie : 2 assiettes de 4 poires Jean : 2 assiettes de 2 poires 4- Énoncé : Marie a 3 fois plus de poires que Jean. Ensemble, ils ont 16 poires. Marie : 2 assiettes de 4 poires Jean : une assiette de 4 poires et une assiette d'une poire 5- Énoncé : Marie a 2 fois plus de poires que Jean. Ensemble, ils ont 15 poires. Marie : 2 assiettes de 4 poires Jean : une assiette de 4 poires et une assiette d'une poire 6- Énoncé : Jean a 2 fois moins de poires que Marie. Ensemble, ils ont 15 poires. Marie : une assiette de 4 poires et une assiette d'une poire Jean : une assiette de 4 poires et une assiette d'une poire 7- Énoncé : Jean a 3 fois moins de poires que Marie. Ensemble, ils ont 16 poires. Marie : 2 assiettes de 4 poires et une assiette de 2 poires Jean : une assiette de 4 poires et une assiette d'une poire

Quatrième période :

But :

- Contrôle de la stratégie optimale du jeu des étoiles et recours à la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition pour un meilleur contrôle des déplacements.
- Réinvestissement des connaissances mises en œuvre dans le jeu des étoiles sans appui sur une grille numérique.
- Résolution d'un énoncé de problème complexe, en contexte du jeu des étoiles, faisant appel aux structures multiplicatives (relation facteur/multiple).

<table>
<tr><td>Jeux des étoiles :
2 parties avec les mêmes variables</td><td>Intervalles de 7
Planche de 100 cases, graduées de 707 à 1400
2 dés</td></tr>
<tr><td>Feuilles de route à compléter
(Annexe F.1)</td><td>Les feuilles de route à compléter constituent un premier type de problème se rapportant au jeu des étoiles. Cette activité permet le passage du jeu aux énoncés de problème contextualisés en mettant en évidence les relations numériques impliquées dans le jeu. Diverses variables didactiques permettent d'augmenter progressivement la difficulté de la tâche au fil de trois périodes.

Pour résoudre les problèmes, l'élève doit souvent traiter les informations dans un ordre différent du déroulement du jeu et centrer son attention sur les relations entre les nombres, soit les relations facteur/multiple et/ou le caractère ordinal lié aux déplacements dans la suite. Par exemple, dans cette feuille de route, le premier nombre inconnu (nombre de cases du déplacement) correspond à ce que l'élève doit trouver en contexte de jeu, étant donné que le nombre de départ, l'intervalle du jeu, le nombre d'arrivé et le dé tiré sont connus. La recherche du deuxième nombre inconnu (dé tiré) ne respecte pas l'ordre du jeu et celui-ci doit être dégagé à partir des informations de la grille et de la connaissance de l'élève des relations numériques du jeu :

<table>
<tr><td>Nombre de départ</td><td>Dé tiré</td><td>Nombre d'arrivée</td><td>Nombre de cases du déplacement</td></tr>
<tr><td>100</td><td>25</td><td>125</td><td>_____</td></tr>
<tr><td>125</td><td>____</td><td>110</td><td>3</td></tr>
<tr><td>110</td><td>5</td><td>105</td><td>____</td></tr>
<tr><td>105</td><td>____</td><td>135</td><td>____</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

	Cette activité s'effectue idéalement sans les grilles de jeu ni les dés, mais ceux-ci peuvent soutenir l'élève qui n'y arrive pas. L'orthopédagogue doit les prévoir. À cette période, sur les grilles à compléter, les nombres de départ et d'arrivée sont déjà connus, de même que l'intervalle. Lorsqu'un seul terme est manquant, l'élève peut traiter uniquement la relation facteur/multiple. Lorsque les deux termes sont manquants, l'élève doit traiter le caractère ordinal du jeu pour dégager le dé tiré.
Énoncé de problème (Annexe G)	Problème A : Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles sur une grille à intervalle de 5. Lucie a avancé de 3 cases. Elle était à la case 460 avant de jouer son tour. Quel était le nombre obtenu sur son dé? À quelle case est-elle arrivée? L'énoncé de problème est proposé en contexte du jeu des étoiles. Il permet d'abstraire le fonctionnement des savoirs qui modélisent le jeu et la relation facteur/multiple. Pour répondre à la première question, l'élève doit multiplier 3 par 5 ou compter par intervalle de 5 trois fois. Cette réponse lui permet d'effectuer le calcul nécessaire pour répondre à la deuxième question, qui, elle, permet d'exprimer le caractère ordinal de cette relation sur la suite numérique. La grille de jeu et les dés peuvent être utilisés si les élèves ont de la difficulté à résoudre l'énoncé.

Cinquième période

But :

- Réinvestissement des connaissances mises en œuvre dans le jeu des étoiles sans l'appui d'une grille numérique.
- Résolution de problèmes à énoncé complexes, en contexte du jeu des étoiles, faisant appel aux structures multiplicatives (relation facteur/multiple et distributivité).

Feuilles de route à compléter (Annexe F.2)	Les feuilles de route à compléter, à cette étape de l'intervention, sont justifiées de la même façon qu'à la quatrième séance. Les feuilles de route présentées à cette période comportent deux termes manquants par ligne. Cela complexifie la tâche et nécessite la prise en compte de la relation facteur/multiple et du caractère ordinal

	simultanément.
Énoncé de problème (Annexe G)	Problème B : Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles à intervalle de 3. À son tour, Benoît était à la case 123 et a reculé de 7 cases. Il avait 9 sur un de ses dés. Quel était le nombre sur l'autre dé? À quelle case est-il arrivé? L'énoncé de problème est proposé en contexte du jeu des étoiles. Il permet d'abstraire le fonctionnement du jeu et la relation facteur/multiple. Ce problème est plus difficile que le problème A puisqu'il fait intervenir 2 dés. Il fait donc appel à la distributivité. Sa résolution doit s'effectuer en plusieurs étapes. D'abord intervient la relation facteur/multiple : l'élève doit dégager qu'un 9 sur le dé signifie un déplacement de 3 cases. Il doit ensuite soustraire 3 cases de 7 cases et multiplier 4 cases par l'intervalle 3 pour trouver le nombre du deuxième dé (12). L'élève peut aussi multiplier 3 par 7 pour trouver le déplacement total dans la suite, et soustraire 9. Le problème permet aussi d'exprimer le caractère ordinal de la relation sur la suite numérique. En effet, l'élève doit considérer les dés (12 et 9), ou 21 (3x7), et l'information spécifiant que Benoît recule pour trouver la case d'arrivée (102). La grille de jeu et les dés peuvent être utilisés si les élèves ont de la difficulté à résoudre l'énoncé.
Énoncé de problème (Annexe G)	Problème C : Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles. À son tour, Lucie est partie de la case 1015 et elle s'est arrêtée à la case 1 050. Elle a avancé de 5 cases. Sur un de ses dés, elle avait 28. Quel était le nombre sur son autre dé? Sur quelle grille de jeu jouent-ils? Ce problème aborde le jeu en relation inverse. L'élève doit traiter le caractère ordinal en premier pour répondre aux questions. Cela constitue une difficulté additionnelle, puisque le jeu, rendu à cet intervalle (7), a permis aux élèves de dégager la relation multiplicative et de délaisser, par le fait même, les stratégies additives, devenues lourdes. Le choix de « beaux » nombres, c'est-à-dire des nombres relativement grands pour lesquels le calcul mental est facilement accessible, permet cependant d'alléger la tâche. Ainsi, l'élève doit d'abord dégager le déplacement de 35 dans la suite (1050-1015), puis extraire l'intervalle par une division (35÷5 cases) ou la recherche du terme manquant (5 x ___ = 35). La stratégie additive de soustraction répétée est peu probable dans le contexte du jeu. Par la suite, l'élève doit réutiliser le déplacement total (35) et soustraire 28 pour trouver le

	nombre du deuxième dé (7). L'utilisation de la grille de jeu et les dés ne peuvent pas être utilisés, puisque l'objectif est de dégager la grille de jeu dans laquelle est contextualisé le problème. Cela constitue une difficulté supplémentaire.

Sixième période

But :

- Réinvestissement des connaissances mises en œuvre dans le jeu des étoiles sans appui sur une grille numérique.
- Résolution de problèmes à énoncé faisant appel aux structures multiplicatives dans de nouveaux contextes (variation de la position de l'inconnue).

Feuilles de route à compléter (Annexe F.3)	Les feuilles de route à compléter, à cette étape de l'intervention, sont justifiées de la même façon qu'à la quatrième séance. La feuille de route présentée à cette période permet de centrer la recherche du terme manquant sur la relation facteur/multiple seulement, puisque les nombres des cases départ et arrivée sont absents. Les termes manquants sont tantôt les dés tirés, le déplacement, ou l'intervalle.
Deux séquences de trois problèmes d'isomorphismes de mesures (Annexe H.1)	Les séquences de problèmes ne se situent pas en contexte du jeu des étoiles. Cela a pour but d'élargir l'utilité de recourir à la multiplication ou à la division pour résoudre des problèmes, et aussi de prendre connaissance de la réversibilité de la multiplication et de la division, compte tenu de l'inconnue à découvrir, pour une même structure de problème. L'utilisation de plus grands nombres vient rendre nécessaire l'utilisation d'algorithmes écrits de calcul. Les séquences de trois problèmes mettent en jeu les mêmes données numériques, mais font varier l'inconnue et le contexte. Première séquence : 1- L'épicière a reçu 6 caisses d'oranges. Chaque caisse contient 144 oranges. Combien d'oranges a-t-elle reçues en tout? Problème d'isomorphisme de mesures, multiplication 2- En promenant son chien, Benoît fait 144 pas par minute. Combien de pas aura-t-il faits en 6 minutes? Problème d'isomorphisme de mesures, multiplication

	3- Dans une usine de bonbons, on doit placer 864 bonbons à la cerise dans 6 sacs. Combien de bonbons y aura-t-il par sac? Problème d'isomorphisme de mesures, division partage Deuxième séquence : 1- Les élèves de la classe de 5e année présenteront la semaine prochaine une pièce de théâtre. Ils ont imprimé 130 programmes. Après entente avec la direction de l'école, les élèves versent 15 ¢ pour la photocopie de chaque programme. Combien paieront-ils pour l'impression des programmes? Problème d'isomorphisme de mesures, multiplication 2- Les 15 employés de l'usine LEGO se partageront les 1950 dollars gagnés à la loterie. Peux-tu trouver le montant que chacun recevra? Problème d'isomorphisme de mesures, division partage 3- Dans cette usine, les légos sont mis dans des boites de 130 pièces. Combien de boites seront nécessaires pour emballer 1950 pièces? Problème d'isomorphisme de mesures, division regroupement

Septième période

But :

- Réinvestissement contextualisé des connaissances mises en œuvre dans le jeu des étoiles par le biais d'un énoncé de problème complexe.
- Résolution de problèmes à énoncé faisant appel aux relations scalaires (problèmes à un seul espace de mesure, variation dans la position de l'inconnue).
- Confrontation de problèmes à un seul espace de mesure avec un problème d'isomorphismes de mesures.

Qui joue avec qui? (Annexe I.1)	Qui joue avec qui et sur quels tableaux? Marie a tiré 40 sur son dé. Elle avance de 8 cases. Jean a reculé de 6 cases. Il est parti de 60 et s'est arrêté à 24. Aline a tiré 48 sur son dé. Elle avance de 8 cases Laurent a avancé de 6 cases. Il est parti de 25 et s'est arrêté à 55. Ce problème complexe est un prolongement des grilles tronquées en contexte du jeu des étoiles. Ici, la feuille de route est absente. Le choix des nombres peut facilement amener l'élève qui s'engage moins facilement dans la tâche sur une fausse piste. En effet, deux énoncés comportent un déplacement de huit cases, et deux de six cases. Au premier énoncé, l'élève doit dégager l'intervalle de jeu à l'aide de la relation facteur/multiple (40÷8 ou 8x__=40). Au deuxième énoncé, l'usage du caractère ordinal permet à l'élève de dégager le déplacement total, soit le nombre tiré sur les dés (60-24). Il doit, dans une deuxième étape, dégager l'intervalle du jeu à l'aide de la division ou de l'égalité lacunaire (36÷6 ou 6x___=36). Au troisième énoncé, l'élève doit dégager l'intervalle de jeu (48÷8 ou 8x__=48). Au dernier énoncé, l'usage du caractère ordinal permet à l'élève de dégager le déplacement total, soit le nombre tiré sur les dés (55-25). Il doit, dans une deuxième étape, dégager l'intervalle du jeu à l'aide de la division ou de l'égalité lacunaire (30÷6 ou 6x___=30). Finalement, les 4 intervalles de jeu trouvés, l'élève pourra dégager qui joue avec qui.
Séquence de trois problèmes à un seul espace de mesure (Annexe H.2)	La séquence de problèmes ne se situe pas en contexte du jeu des étoiles. Cela a pour but d'élargir l'utilité de recourir à la multiplication ou à la division pour résoudre des problèmes, et aussi que la division est l'inverse de la multiplication dans N, compte tenu de l'inconnue à découvrir, pour une même structure de problème. Cette séquence a aussi pour but le réinvestissement de l'expression « fois plus que » permettant de décrire les relations scalaires travaillées aux trois premières séances. L'usage de « beaux nombres » vient rendre plus accessible la reconnaissance de la structure du problème (Brissiaud, 2010). La séquence de trois problèmes met en jeu les mêmes données numériques, mais font varier l'inconnue et le contexte. 1- Mikaël a lu 25 miniromans cette année. Chloé en a lu 6 fois plus. Combien Chloé a-t-elle lu de miniromans cette année? Problème à un seul espace de mesure, recherche d'une mesure, relation directe 2- Marie a récolté 150 bonbons à l'Halloween. Elle a récolté 6 fois plus de bonbons que Julie, qui habite à la campagne. Combien Julie a-t-elle récolté de bonbons? Problème à un seul espace de mesure, recherche d'une mesure,

	relation indirecte 3- Le livre de Julie coute 25 $. La vieille version originale coute 150 $. Combien de fois plus cher coute la version originale? Problème à un seul espace de mesure, recherche de la relation
Séquence de trois problèmes mettant en lien la structure d'isomorphismes de mesures et les problèmes à un seul espace de mesure (Annexe H.3)	L'objectif de cette séquence est de confronter deux structures de problèmes pour faire dégager que les mêmes opérations sont nécessaires pour les résoudre. Les mêmes nombres qu'à la séquence précédente sont utilisés. 1- Le lapin de Mélissa fait des bonds de 6 cm chacun. Combien de bonds le lapin fait-il pour parcourir une distance de 150 cm? Isomorphisme de mesures, division regroupement 2- La gazelle fait des bonds de 150 cm. Le lapin fait des bonds de 25 cm. Combien de fois plus long que ceux du lapin sont les bonds de la gazelle? Problème à un seul espace de mesure, recherche de la relation 3- Les bonds de 6 cm du lapin sont 25 fois plus courts que ceux du lion. De quelle longueur sont les bonds du lion? Problème à un seul espace de mesure, recherche d'une mesure, relation indirecte

Huitième période

But :

- Réinvestissement contextualisé des connaissances mises en œuvre dans le jeu des étoiles par le biais d'un énoncé de problème complexe.
- Recontextualisation et réinvestissement de la distributivité dans des énoncés de problèmes d'isomorphismes de mesures complexes.

Qui joue avec qui? (Annexe I.2)	Qui joue avec qui et sur quels tableaux? Marc recule de 10 cases. Il part de 88 et s'arrête à 8. Sally a tiré 12 et 20 sur son dé. Elle avance de 8 cases Sophie a tiré 24 et 4 sur son dé. Elle avance de 7 cases. Laurent avance de 8 cases. Il part de 160 et s'arrête à 224. Ce problème complexe est un prolongement des grilles tronquées en

	contexte du jeu des étoiles à deux dés. Ici, la feuille de route est absente, ce qui demande une abstraction complète du jeu. Au premier énoncé, l'usage du caractère ordinal permet à l'élève de dégager le déplacement total, soit le nombre tiré sur les dés (88-8). Il doit, dans une deuxième étape, dégager l'intervalle du jeu à l'aide de la division ou de l'égalité lacunaire (80÷10 ou 10x___=80). Au deuxième énoncé, l'élève doit dégager l'intervalle de jeu à l'aide de la relation facteur/multiple, en considérant la somme des deux dés (32÷8 ou 8x__=32). Au troisième énoncé, comme au précédent, l'élève doit dégager l'intervalle de jeu en considérant la somme des deux dés (28÷7 ou 7x__=28). Au dernier énoncé, l'usage du caractère ordinal permet à l'élève de dégager le déplacement total, soit le nombre tiré sur les dés (224-160). Il doit, dans une deuxième étape, dégager l'intervalle du jeu à l'aide de la division ou de l'égalité lacunaire (64÷8 ou 8x___=64).
Deux séquences de trois problèmes mettant en œuvre la distributivité de la multiplication sur l'addition (Annexe H.4)	Étant à la fin de l'intervention, ces séquences sont plus diversifiées dans le choix des valeurs des variables didactiques, dans le but d'offrir une plus grande variabilité (Sarrazy, 2002) visant une meilleure appropriation des notions enseignées. Les liens entre les problèmes sont plus opaques dans ces séquences. Seule la structure est la même. Le contexte, les nombres et la position de l'inconnue changent. Première séquence : Cette séquence de problèmes nécessite la mise en acte implicite de la distributivité, qui pourra éventuellement être institutionnalisée au moment opportun. Pour aider l'élève à dégager la structure des problèmes, la première séquence contient deux problèmes en contexte du jeu des étoiles à deux dés, connexes au problème C, présenté à la cinquième période. Le contexte ordinal n'est toutefois pas sollicité dans ces problèmes. 1- À un jeu d'étoiles sur des bonds de 5, Marie avance de 6 cases avec son premier dé et de 4 cases avec son deuxième dé. Quel est le total des dés qu'elle a tirés? (6+4) x 5=x ou (5x6) + (5x4)=x 2- Pour une sortie scolaire, les élèves doivent payer chacun 5 $. 9 élèves ont déjà payé et 8 n'ont pas encore payé. Combien d'argent sera accumulé lorsque tous les élèves auront payé? (9+8) x 5 = x ou (5x9) + (5x8)=x La structure et la recherche de l'inconnue des deux premiers problèmes sont les mêmes, mais le contexte et les nombres sont différents.

	3- Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles avec 2 dés, sur une grille à intervalle de 3. Lucie a avancé de 7 cases en tout. Sur un de ses dés, elle avait 9. Quel est le total de ses dés? Quel était le nombre sur son autre dé? De combien de cases chacun des dés lui a-t-il permis d'avancer? $[(9\div3) + x] \times 3 = (7\times3)$ ou $(3 \times 3) + (3 \times x) = 7 \times 3$ Ce problème est plus complexe puisqu'il s'agit de trouver un facteur partiel et que le multiple qui constitue la somme des deux autres est également à dégager par l'élève. Pour résoudre le problème, l'élève doit donc inférer plusieurs liens et effectuer plusieurs calculs. Deuxième séquence : Cette séquence de problèmes vient également contextualiser la distributivité. 1- Julie achète des caisses d'oranges 2 fois par semaine. Elle a acheté 3 caisses d'oranges lundi et 5 caisses d'oranges jeudi. En tout, elle a dépensé 64 $. Quel est le prix d'une caisse d'oranges? $(3+5) \times x = 64$ ou $(x \times 3) + (x \times 5) = 64$ Pour ce problème, le raisonnement de l'élève s'exprimant avec la deuxième écriture est moins probable vu la présence de deux inconnues. 2- Julie achète des caisses d'oranges 2 fois par semaine. Les caisses d'oranges coutent 9 $ chacune. Elle a dépensé 81 $ en tout. Lundi, elle a acheté 4 caisses d'orange. Combien de caisses a-t-elle achetées jeudi? $(4+x)x9=81$ ou $(9x4)+(9xx)=81$ 3- Pour la sortie scolaire de fin d'année, chaque élève doit acheter son billet d'entrée. 7 élèves ont déjà payé et 28 $ sont accumulés. Lorsque tous les élèves auront payé, 80 $ seront accumulés. Combien d'élèves n'ont pas encore payé? $28\div7=x$ $(7+x) \times 4 = 80$ ou $(4x7) +(4 \times x)=80$

3.3 La collecte de données

Deux types de données sont recueillis soit des enregistrements vidéos et les traces sur papier laissées par les élèves. L'entretien initial est filmé, ainsi que toutes les séances d'interventions. L'enregistrement vidéo est réalisé à l'aide d'une caméra fixe orientée vers la table de travail de manière à voir clairement les manipulations ou les écritures réalisées par les élèves. Toutes les traces produites par les élèves sur papier sont conservées aux fins d'analyse.

3.4 L'analyse de données

Deux types d'analyse sont réalisés pour répondre aux objectifs de recherche. L'analyse des conduites mathématiques des élèves à l'entretien initial, ainsi qu'au cours de l'intervention orthopédagogique, accompagnée de l'analyse des situations, permet de décrire les effets de l'intervention sur la transformation des connaissances des élèves. Cette analyse permet de répondre à notre premier objectif spécifique. Pour répondre à notre second objectif spécifique, une analyse didactique est engagée au regard de chacune des balises.

3.4.1 Analyse des conduites mathématiques des élèves

L'ensemble de la séquence est visionné afin de procéder à l'analyse des stratégies des élèves à chaque tâche réalisée. Pour réaliser cette analyse, nous nous appuyons sur les analyses à priori de l'entretien et de l'intervention, qui elles-mêmes reposent sur les études réalisées dans le domaine et présentées au contexte théorique.

Ainsi, pour chacun des énoncés de problèmes des entretiens ou de l'intervention, une analyse du calcul relationnel et du calcul numérique en fonction des variables didactiques en jeu (type de structure, position de l'inconnue, taille des nombres, etc.)

permet de situer la stratégie de l'élève ainsi que les connaissances que cette stratégie engage. Nous nous référons à la description des difficultés propres à chacune des structures et les conduites disponibles à l'élève énoncées dans le cadre théorique. Les conduites des élèves aux problèmes à un seul espace de mesure sont analysées à l'aune du modèle de Vincent (1992). Nous nous appuyons également sur l'analyse à priori du jeu des étoiles pour identifier les stratégies engagées à chacun des jeux réalisés par les élèves.

3.4.2 Analyse didactique de l'intervention relative aux repères et balises

Pour répondre à notre second objectif, chaque repère et balise de Giroux est successivement considérée (2013a). La séquence vidéo visionnée permet de repérer, pour chaque balise, des épisodes sensibles de l'intervention s'y rapportant. Ainsi, nous visons à cerner si les choix des tâches ou encore le pilotage de l'intervention sont en accord ou non avec chacune des balises. L'objectif d'une telle analyse n'est pas d'évaluer l'intervention au regard des balises, mais plutôt de considérer si le choix des tâches, et le type de pilotage lors des interactions sont propices à l'opérationnalisation de chacune des balises. Lorsque c'est le cas, nous discutons de l'effet de ces balises sur la transformation des connaissances. Lorsque ça ne l'est pas, nous tentons de saisir les raisons pour lesquelles les balises n'ont pas été respectées. Deux perspectives sont alors possibles, soit certaines tâches ou situations ne sont pas suffisamment contraintes par les balises, soit elles ne sont pas adaptées à l'intervention.

3.5 Considérations éthiques

La présente recherche s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche, intitulé Évaluation et intervention orthopédagogiques en mathématiques. Cette recherche est dirigée par la directrice du mémoire, Madame Jacinthe Giroux. Il a reçu l'approbation

au plan éthique (no S-703828). En effet, le Comité institutionnel d'éthique de la recherche avec des êtres humains de l'UQAM a examiné le protocole de recherche et l'a jugé conforme aux pratiques habituelles et normes établies pour ce type de recherche.

La participation d'un élève tient au consentement libre et éclairé de ses parents (ou tuteurs) accordé dans la suite d'une lettre d'informations précisant les membres de l'équipe de recherche, les buts poursuivis, le type de tâches et les mesures prises pour conserver l'anonymat des participants dans le traitement et la diffusion des données.

CHAPITRE IV

ANALYSE DES CONDUITES MATHÉMATIQUES DES ÉLÈVES

Dans ce chapitre, l'analyse des conduites des élèves par groupe de tâches et selon leur ordre d'apparition dans l'intervention est réalisée. La première section de l'analyse esquisse les connaissances des élèves sur la base de l'entretien orthopédagogique. Les sections qui suivent portent spécifiquement sur l'analyse des conduites mathématiques investies par chacun des élèves dans les situations expérimentées. Ainsi, dans la seconde section du chapitre, les conduites de E1 et de E2 au jeu effectif des étoiles sont examinées. Dans la troisième section, ce sont les conduites des deux élèves aux problèmes scalaires qui sont analysées. Enfin, dans la quatrième section, sont analysées les conduites des élèves aux différentes tâches connexes au jeu des étoiles, ainsi que leurs conduites aux énoncés de problèmes d'isomorphismes de mesures et de distributivité.

Les milieux des situations didactiques expérimentées ne sont pas fortement adidactiques dans la mesure où les rétroactions du milieu ne sont pas optimales pour que l'élève puisse adapter ses stratégies. Pour compenser cette limite du milieu, l'orthopédagogue intervient fréquemment pour donner une rétroaction à l'élève; ces interventions prennent parfois la forme d'un segment d'enseignement. C'est le cas, notamment, de la différence entre les expressions *de plus* et *fois plus* qui sont décrites par l'orthopédagogue suite aux interprétations fausses d'une élève. Dans ce chapitre, nous nous centrons sur les stratégies mises en œuvre par les élèves en considérant les interventions de l'orthopédagogue comme des éléments du milieu didactique. Ainsi, si nous indiquons à quel moment ont lieu les interventions de l'orthopédagogue, nous n'en précisons le contenu que lorsque cette information nous parait incontournable pour saisir les connaissances investies par les élèves.

4.1 Esquisse des connaissances des élèves sur la base de l'entretien orthopédagogique

L'entretien orthopédagogique, auprès de chacune des deux élèves, permet d'esquisser un profil de leurs connaissances sur les structures multiplicatives, et ainsi mieux cibler le choix des valeurs des variables didactiques des situations. Dans ce qui suit, une esquisse des connaissances engagées par chacune des élèves lors des entretiens orthopédagogiques individuels est exposée.

4.1.1 Élève 1 (E1)

Les calculs relationnels engagés aux énoncés de type isomorphismes de mesures par E1 suggèrent que les structures multiplicatives sont en voie d'être dissociées des structures additives. En effet, l'élève recourt parfois à l'addition répétée plutôt qu'à la multiplication et bien qu'elle n'associe pas encore l'opération de division aux énoncés de type division partage ou regroupement, le calcul relationnel mis en œuvre est parfois réussi.

Le contrôle exercé par E1 aux problèmes de la classe d'isomorphismes de mesures varie en fonction de l'inconnue. Lorsque le produit est recherché, et qu'il s'agit donc d'un problème qui sollicite la multiplication, ceux-ci sont bien résolus. Sur le plan du calcul numérique, E1 privilégie alors l'addition répétée bien que sous l'effet d'une relance, elle établisse le lien entre l'addition répétée et la multiplication. En présence de grands nombres, elle choisit d'emblée l'algorithme de multiplication.

Lorsque la valeur unitaire (division partage) est recherchée, le calcul relationnel est approprié, mais sans engager, sur le plan du calcul numérique, la division. Ainsi, pour résoudre les énoncés de problèmes faisant appel à des faits multiplicatifs mémorisés, E1 procède mentalement par multiplication lacunaire (ex. : $4 \times n = 20$). Lorsque les énoncés impliquent de grands nombres, elle engage d'abord une représentation dessinée puis, cette procédure étant laborieuse, elle envisage, mais avec hésitation, la

division. Ajoutons que l'opération de division n'est pas intégrée comme solution optimale pour résoudre un énoncé de type division partage.

Pour les énoncés de division regroupement, le calcul relationnel n'est pas d'emblée approprié. Aux énoncés pour lesquels la calculette est utilisée, E1 effectue une multiplication. Jugeant le résultat numérique non approprié, elle effectue alors une division. Au problème à choix multiples (le problème des œufs), elle choisit, parmi les différentes écritures proposées, la division et l'addition répétée, mais n'admet pas la multiplication lacunaire parce que, selon elle, le nombre écrit à la droite du signe « égal » ne correspond pas à ce qui est cherché. Ainsi, E1 rejette une écriture qui, par ailleurs, correspond à un calcul mental qu'elle sait mettre en œuvre dans un autre contexte.

Aux trois énoncés de problèmes à un seul espace de mesure, l'expression *n fois plus* est interprétée, sur les plans relationnel et numérique, comme *n de plus*. Ainsi E1 procède par addition des deux nombres. De même, l'expression *n fois moins* est interprétée, sur les plans relationnel et numérique, comme *n de moins*. L'expression *n fois plus*, posée en relation indirecte, est interprétée, sur le plan relationnel comme la recherche d'une quantité moindre, mais sur le plan numérique, comme une addition.

Aucun véritable calcul relationnel n'est mis en œuvre lors de la présentation de l'énoncé de problème de type produit cartésien. Nous pouvons simplement en conclure que le produit cartésien n'est pas, pour cette élève, associé aux structures multiplicatives.

Finalement, la maitrise des propriétés de la multiplication est limitée. La commutativité est reconnue dans les écritures mathématiques, mais non utilisée en acte. Il en est de même pour l'associativité et la distributivité. Celles-ci ne sont pas mobilisées pour établir les relations entre les résultats (problème des crayons de couleur) ou encore pour opérer sur des nombres. Tel que formulé, le problème des

moutons favorise davantage le dénombrement que l'usage de l'associativité, et ne permet pas de juger si les élèves font un usage en acte de cette propriété.

4.1.2 Élève 2 (E2)

Il nous est difficile de juger des connaissances investies par E2 au cours de l'entretien, car il semble que plusieurs de ses réponses visent à recourir à l'objet d'enseignement mathématique du moment dans sa classe, soit la multiplication. Cette hypothèse repose, en particulier, sur le fait que l'énoncé de problème de type produit cartésien est résolu à l'aide de la multiplication alors que E1 peine à mettre en œuvre un calcul relationnel adéquat à des énoncés de problèmes additifs et multiplicatifs de la classe des isomorphismes de mesures.

La préséance du calcul numérique sur le calcul relationnel est observée à plusieurs occasions. Lorsque la calculette est autorisée, dans les énoncés de problèmes additifs et multiplicatifs, elle procède principalement d'abord par multiplication et, si le résultat numérique est improbable, recourt alors à un autre calcul numérique (division, addition ou soustraction). Elle considère le résultat numérique obtenu et s'arrête si elle juge que ce résultat est convenable. Ainsi, il nous semble que, malgré les réussites numériques décrites ci-dessous, E2 n'engage que très peu de calculs relationnels multiplicatifs. Nous supposons donc que si E2 possède des connaissances en multiplication (les tables, notamment), les structures multiplicatives ne sont pas encore dissociées des structures additives.

Pour les énoncés de type isomorphismes de mesures, lorsque le produit est recherché, le calcul numérique engagé par E2 est la multiplication. Cette élève recourt à l'algorithme, et ce, même en présence de petits nombres. Il est à noter que les tables de multiplication sont relativement bien intégrées, alors que celles des divisions le sont beaucoup moins.

Les calculs relationnels mis en œuvre en situation de division partage et de division regroupement ne sont pas adéquats. Leurs mises en œuvre semblent freinées par la mobilisation rapide d'un calcul numérique. Au problème de type division partage, elle amorce une stratégie de partage en dessin, mais opte finalement pour la multiplication, vue l'ampleur de la tâche. Un calcul relationnel additif est parfois mobilisé pour résoudre des problèmes de division regroupement, ainsi, elle soustrait les deux nombres en jeu au lieu de les diviser. Au problème de type division regroupement (œufs), elle choisit l'écriture multiplicative (6x78). Les interactions qui suivent avec l'orthopédagogue semblent montrer que l'addition et la soustraction répétées ne sont pas associées à la division regroupement.

Aux énoncés de problèmes à un seul espace de mesure les conduites de E2 sont variées. Sur le plan relationnel, *n fois plus* est interprété correctement. En ce qui concerne le calcul numérique, en relation directe, elle procède par dessin et dénombrement. Le sens de cette relation n'est pas respecté lorsque la relation est posée en relation indirecte. L'expression *n fois moins* est interprétée comme *n de moins*.

Finalement, comme pour E1, le contrôle des propriétés de la multiplication est limité. La commutativité est reconnue dans les écritures mathématiques, et utilisée en acte. Par contre, elle ne recourt à l'associativité et à la distributivité en aucun contexte.

4. 2 Conduites des élèves au jeu des étoiles

Comme détaillés dans l'analyse a priori, trois types de stratégies sont possibles au jeu des étoiles : les stratégies élémentaires, qui engagent un raisonnement additif, la stratégie intermédiaire, qui engage le surcomptage par intervalle, et la stratégie optimale, qui engage la relation multiplicative, soit les tables de multiplication[14]. Le

---

[14] Ces stratégies sont décrites à l'annexe C.

choix des valeurs des variables didactiques (Annexe C) vise à provoquer l'émergence de la stratégie multiplicative. Les tableaux 4.1 et 4.2 présentent les stratégies respectivement déployées par l'élève E1 et l'élève E2 au cours des différentes parties.

4.2.1 Élève 1 (E1)

Selon les informations obtenues lors de l'entretien orthopédagogique, les connaissances initiales que possède E1 lors de l'introduction du jeu des étoiles sont l'addition itérée ainsi que les faits multiplicatifs mémorisés. Le tableau 4.1 rend compte des stratégies de E1 aux sept parties jouées, sur une période de cinq semaines. Ce tableau met en évidence la progression des connaissances investies par cette élève. Ainsi, la stratégie de comptage rythmique est la première qui est mise en oeuvre. Dès la première partie, cette stratégie est supplantée par une stratégie de surcomptage par intervalle. Cette dernière est, quant à elle, supplantée dès la deuxième partie (intervalle de 5) par la stratégie optimale multiplicative. À un même jeu (intervalle de 5), au cours de la troisième partie, l'élève emprunte également d'abord du surcomptage et, ensuite, une stratégie multiplicative. À la quatrième partie, sur un jeu d'intervalle de 3, la stratégie de surcomptage est utilisée; elle est cependant suivie d'une stratégie multiplicative. C'est à partir de la cinquième partie que l'élève recourt à la stratégie optimale multiplicative de manière constante, et ce, pour des jeux d'intervalle de 3 sur un domaine numérique de 51 à 198 et d'intervalle de 7 sur un domaine numérique de 707 à 1400, avec une utilisation de deux dés. Lors de l'introduction du deuxième dé, à la cinquième partie, E1 s'ajuste rapidement. Elle considère les facteurs associés à chacun des dés et, au premier coup, procède à son déplacement en deux temps. Dès le deuxième coup, elle additionne les deux facteurs avant de procéder à son déplacement. Elle poursuit ainsi jusqu'à la fin des parties. Elle traite donc la distributivité en acte, sans passer par le résultat total des multiples. Elle dégage la valeur numérique de x et de y, puis les additionne : $(3 \times x)+(3 \times y)$; $x=4$ et $y=2$, alors $4+2=6$, ce qui correspond au déplacement total.

Tableau 4.1
Stratégies de E1 au Jeu des étoiles

Séance	Partie	Variables didactiques	Coups joués	Stratégie de déplacement				
				Stratégie additive : case départ plus valeur du dé	Stratégie additive : comptage rythmique	Stratégie intermédiaire : surcomptage par intervalle	Stratégie multiplicative : utilisation des facteurs	Autre
1	1	Intervalle : 2 Nombre de cases : 50 Domaine numérique : 60 à 158 Nombre de dés : 1 Départ à la case 108.	a					x
			b		x	x		
			c			x		
	2	Intervalle : 5 Nombre de cases : 100 Domaine numérique : 50 à 545 Nombre de dés : 1 Départ à la case 320.	a			x		
			b			x		
			c				x	
2	3	Intervalle : 5 Nombre de cases : 100 Domaine numérique : 50 à 545 Nombre de dés : 1 Départ à la case 320.	a			x		
			b			x		
			c				x	
	4	Intervalle : 3 Nombre de cases : 50 Domaine numérique : 51 à 198 Nombre de dés : 1 Départ à la case 123.	a			x		
			b				x	
			c				x	
3	5	Intervalle : 3 Nombre de cases : 50 Domaine numérique : 51 à 198 Nombre de dés : 2 Départ à la case 123.	a				x	
			b				x	
			c				x	
			d				x	
4	6	Intervalle : 7 Nombre de cases : 100 Domaine numérique : 707 à 1400 Nombre de dés : 2 Départ à la case 1085	a				x	
			b				x	
			c				x	
			d				x	
			e				x	
6	7	Intervalle : 7 Nombre de cases : 100 Domaine numérique : 707 à 1400 Nombre de dés : 2 Départ à la case 1085	a				x	
			b				x	
			c				x	

4.2.2 Élève 2 (E2)

Au départ, telles que révélées par l'entretien, les connaissances dont dispose E2 pour contrôler le jeu des étoiles sont principalement la maîtrise des faits multiplicatifs. Le tableau 4.2 met en lumière une progression plus lente des stratégies chez E2 que chez E1.

Au départ, à un jeu d'intervalle de 2 sur un domaine numérique de 60 à 158, E2 recourt à la stratégie additive du comptage rythmique, puis passe rapidement à la stratégie intermédiaire du surcomptage par intervalles. Elle conserve cette stratégie pour les parties 2 et 3, portant sur un intervalle de 5, et aussi à la partie 4 portant sur un intervalle de 3. Au cours de cette partie, elle effectue le passage à la stratégie multiplicative. À la partie 5, à son premier coup, E2 effectue un retour au comptage rythmique lors de l'introduction du deuxième dé, à un jeu d'intervalle de 3 sur un domaine numérique de 51 à 198. Elle a alors de la difficulté à considérer les deux dés et associe le déplacement à faire au facteur correspondant au deuxième dé. L'orthopédagogue l'accompagne pour qu'elle traite les deux facteurs. À son deuxième coup, elle reprend la même stratégie que E1, c'est-à-dire qu'elle retrouve d'abord le facteur associé à chacun des dés, puis les additionne pour retrouver le déplacement total à faire. Par la suite, elle poursuit avec cette stratégie multiplicative qu'elle conserve jusqu'à la fin des parties. Par contre, à la sixième partie, le comptage rythmique est utilisé pour retrouver le facteur de chacun des dés, vu l'absence de maîtrise de la table du 7, sans qu'il soit associé aux nombres inscrits sur la grille de jeu. De façon constante au fil des parties, elle éprouve de la difficulté à se déplacer sur la piste, ne sachant pas si la case de départ doit être comptée comme un déplacement. L'orthopédagogue l'accompagne pour pallier cette difficulté.

Tableau 4.2
Stratégies de E2 au Jeu des étoiles

Séance	Partie	Variables didactiques	Coups joués	Stratégie de déplacement				
				Stratégie additive : case départ plus valeur du dé	Stratégie additive : comptage rythmique	Stratégie intermédiaire : surcomptage par intervalle	Stratégie multiplicative : utilisation des facteurs	Autre
1	1	Intervalle : 2 Nombre de cases : 50 Domaine numérique : 60 à 158 Nombre de dés : 1 Départ à la case 108.	a					x
			b		x			
			c			x		
	2	Intervalle : 5 Nombre de cases : 100 Domaine numérique : 50à 545 Nombre de dés : 1 Départ à la case 320.	a			x		
			b			x		
			c			x		
2	3	Intervalle : 5 Nombre de cases : 100 Domaine numérique : 50à 545 Nombre de dés : 1 Départ à la case 320.	a			x		
			b			x		
			c			x		
			d			x		
	4	Intervalle : 3 Nombre de cases : 50 Domaine numérique : 51 à 198 Nombre de dés : 1 Départ à la case 123.	a			x		
			b			x		
			c				x	
			d				x	
3	5	Intervalle : 3 Nombre de cases : 50 Domaine numérique : 51 à 198 Nombre de dés : 2 Départ à la case 123.	a		x			
			b				x	
			c				x	
4	6	Intervalle : 7 Nombre de cases : 100 Domaine numérique : 707 à 1400 Nombre de dés : 2 Départ à la case 1085	a				x	
			b				x	
			c				x	
			d				x	
6	7	Intervalle : 7 Nombre de cases : 100 Domaine numérique : 707 à 1400 Nombre de dés : 2 Départ à la case 1085	a				x	
			b				x	
			c				x	
			d				x	

Tout comme E1, la stratégie de surcomptage se révèle trop lourde pour se déplacer en respectant des intervalles de 3 et de 7 et semble ainsi favoriser le recours à la stratégie multiplicative.

Si le jeu sur les variables didactiques a favorisé chez E1 une alternance des stratégies par surcomptage et multiplicative au cours des parties 2, 3 et 4, chez E2, en revanche, cette alternance est absente et la stratégie multiplicative ne s'impose qu'à la quatrième partie lorsque l'intervalle est de 3. En conclusion, le jeu des étoiles a permis de consolider chez E1 et d'installer chez E2 la relation entre l'addition répétée et la multiplication, ainsi que de traiter des relations facteurs/multiples autrement que par rappel de faits multiplicatifs mémorisés. Autrement dit, les faits multiplicatifs ont trouvé dans le jeu des étoiles un usage, mais surtout un sens à travers la relation facteur/multiple. Mentionnons également que le jeu a donné l'occasion de mettre en œuvre, en acte, la propriété de la distributivité.

4. 3 Conduites des élèves aux problèmes à un seul espace de mesure (problèmes scalaires)

Deux types de problèmes scalaires ont été présentés aux élèves, soit les *problèmes des poissons* et les *problèmes des poires*. Ces problèmes visent, en particulier, la différenciation des structures additives et des structures multiplicatives, ainsi que l'acquisition du vocabulaire relatif aux relations multiplicatives scalaires. Pour rappel, deux illustrations d'aquariums (problèmes des poissons) ou d'assiettes de fruits (problèmes des poires) sont présentées à l'élève ainsi qu'une expression additive ou multiplicative de comparaison. L'élève doit modifier l'illustration (la quantité de poissons ou de poires/assiettes) pour que soit respectée la relation mathématique donnée. Au départ, il était prévu que les élèves travaillent sur des problèmes différents, ce qui a été le cas pour les problèmes des poissons et les quatre premiers problèmes des poires. La gestion des interactions avec les élèves par l'orthopédagogue étant ardue dans ce contexte, les trois derniers problèmes des poires ont été résolus en groupe.

4. 3.1 Élève 1 (E1)

L'entretien initial a révélé que E1 interprétait *n fois plus* comme *n de plus* et *n fois moins* comme *n de moins*. Ces connaissances se sont bonifiées au fil des séances. Le tableau 4.3 rend compte des réponses de E1 aux problèmes des poissons. Sont inscrites, non seulement la solution initiale donnée par l'élève, mais également les solutions données suite à une intervention de l'orthopédagogue.

Tableau 4.3
Stratégies de E1 aux problèmes des poissons

Contraintes				**Calculs relationnels et numériques**			
Problèmes	**1e Aqua-rium**	**Expressions relationnelles**	**2e Aqua-rium**	**Essais**	**1e Aqua-rium**	**Traitement**	**2e Aqua-rium**
1	*6*	*3 fois plus que* **x**	*3*	1	6	Autant =	6
				2	6	3 de plus que +	3
				3	9	*3 fois plus que* **x**	3
2	*4*	*3 de moins que* +	*8*	1	3	3 fois moins que x	9
				2	3	*3 de moins que* +	6
3	*3*	*2 fois plus que* **x**	*3*	1	6	*2 fois plus que* **x**	3

La réponse initiale de E1 au problème 1 reproduit la solution de l'énoncé donné en exemple par l'orthopédagogue, soit la relation *autant.* Suite à l'intervention de celle-ci, E1 interprète *3 fois plus* comme *3 de plus*. L'orthopédagogue intervient auprès de l'élève pour enseigner la distinction entre *3 de plus* et *3 fois plus.*

O : **Ça veut dire quoi 3 fois plus ?**
E1 : **Ça veut dire qu'y'en a 3 de plus que lui.**
O : Non. Ce n'est pas pareil 3 de plus puis 3 fois plus. On l'a vu hier quand on faisait nos dessins. [...] (L'orthopédagogue montre le dessin réalisé la veille par **E1**.) C'était 3 fois plus ça.
E1 : (Dessine 3 poissons dans le petit aquarium du haut.)

Au problème 2, E1 interprète la relation additive *3 de moins que* comme une relation multiplicative. Il est possible que les données numériques 9 et 3, en tant que solution au problème précédent et associées à la relation *3 fois plus que,* soient reprises par l'élève, dans l'ordre inverse, pour exprimer que 3 est 3 fois moins que 9. Le problème 3 est résolu correctement au premier essai.

Le tableau 4.4 rend compte des conduites de E1 aux problèmes des poires. Ces problèmes nécessitent l'interprétation d'une relation additive ou multiplicative, en plus de comporter une contrainte relative à la quantité totale de poires.

Tableau 4.4
Stratégies de E1 aux problèmes des poires

Problèmes	Contraintes				Calculs relationnels et numériques		
	Poires/ Assiettes (p./as.)	**Expressions relationnelles**	**Poires/ Assiettes** (p./as.)	**Total**	**Poires/ Assiettes (p./as.)**	**Traitement**	**Poires/ Assiettes** (p./as.)
1	*2 as. x 2 p./as. 4*	*2 fois moins que*	*2 as. x 4 p./as. 8*	12	0	(2x2)-(2x2) enlève 2 paquets de 2	1 as. x 4 p./as. 4
2	*0 assiette*	*4 de plus que*	*1 as x 4 p./as. 4*	12	*1 as. x 8 p./as 8*	*4 de plus que*	*1 as x 4 p./as.* 4
3	*2 as. x 4 p./as 8*	*2 fois plus que*	*1 as x 4 p./as 4*	12	*2 as. x 4 p./as. 8*	*2 fois plus que*	*1 as. x 4 p./as. 4*
4	*1 as. x 4 p./as 1 as. x 1 p./as 5*	*3 fois moins que*	*2 as. x 4 p./as 1 as. x 2 p./as 10*	16	Non résolu		
5	*2 as. x 4 p./as. 8*	*2 fois plus que*	*1 as. x 4 p./as. 1 as. x 1 p./as. 5*	15	2 as. x 4 p./as. 8	2 fois plus que	1 as. x 4 p./as. 4
					2 as. x 4 p./as. 1 as. x 2 p./as. 10	*2 fois plus que*	*1 as. x 4 p./as. 1 as. x 1 p./as.* 5

6	*1 as. x 4 p./as.* *1 as. x 1 p./as.* *5*	*2 fois moins que*	*1 as. x 4 p./a.s* *1 as. x 1 p./as.* *5*	15	*1 as. x 4 p./as.* *1 as. x 1 p./as.* *5*	*2 fois moins que*	*2 as. x 4 p./as.* *1 as. x 2 p./as.* *10*
7	*2 as. x 4 p./as.* *8*	*3 fois plus que*	*1 as. x 4 p./as.* *1 as. x 1 p./as.* *5*	16	*3 as. x 4 p./as.* *12*	*3 fois plus que*	*1 as. x 4 p./as.* *4*

Au premier énoncé, qui implique la relation *2 fois moins que*, E1 traite une seule assiette de 4 poires plutôt que 2, et ce, sans considérer la contrainte du nombre total de poires. Pour E1, « 4 poires », interprété à partir de l'expression *2 fois moins que*, est identifié à 2 sous-collections de 2 poires chacune. Cette interprétation est certainement stimulée par le fait que l'illustration présente 2 assiettes contenant chacune 2 poires. Elle recourt à une stratégie mixte comme en témoigne le commentaire suivant : « Y'en reste pu parce que c'est 2 fois moins. Faque t'enlèves, mettons t'en enlèves d'autres, bien c'est 2 fois moins. [...]». L'élève semble exprimer que puisqu'il faut enlever *2 fois (*tiré de *2 fois moins que)* il faut enlever 2 sous-collections de 2 poires à 4, ce qui donne 0 poire. Au deuxième énoncé, qui comporte une relation additive, elle ajoute :

> « J'viens de comprendre. Parce que de plus que... bien de moins que... heu... pis ça, c'est comme t'en enlèves 4, bien t'en enlèves 4 pis **comme fois c'est des paquets**... ben... j'pense...».

Ce commentaire montre que E1 dégage que l'expression « fois » implique l'idée de sous-collections équivalentes (paquets). L'orthopédagogue soutient E1 dans la résolution des énoncés qui suivent, pour capitaliser l'idée de sous-collections et favoriser ainsi une compréhension multiplicative des relations scalaires. Les énoncés sont dans l'ensemble bien résolus dans la mesure où le nombre de fruits comparés respecte la contrainte sur la relation scalaire et sur le nombre total de fruits. Cependant, le nombre d'assiettes n'est pas pris réellement en compte par l'élève.

Pour conclure sur les connaissances investies par E1 au cours des situations sur les relations scalaires, on peut affirmer que ces problèmes ont permis à l'élève de faire une avancée dans sa compréhension des structures multiplicatives et de les

différencier des structures additives. L'apprentissage de la notion de sous-collections équipotentes liées aux expressions scalaires a été amorcé par la résolution des problèmes des poires.

4. 3.2 Élève 2 (E2)

Les problèmes scalaires proposés lors de l'entretien orthopédagogique initial ont permis d'observer que les conduites de E2 étaient variées, tant au niveau du calcul relationnel que du calcul numérique. Les problèmes comportant la relation *n fois plus* étaient traités par calcul multiplicatif, sans que le sens de la relation soit respecté en relation inverse. L'expression *n fois moins* était interprétée comme *n de moins*.

L'analyse de l'intervention témoigne des conduites de E2 au fil des séances. Le tableau 4.5 rend compte des stratégies mises en œuvre lors de la résolution des problèmes des poissons.

Tableau 4.5
Stratégies de E2 aux problèmes des poissons

Contraintes					**Calculs relationnels et numériques**		
Problèmes	**1e Aqua-rium**	**Expressions relationnelles**	**2e Aqua-rium**	**Essais**	**1e Aqua-rium**	**Traitement**	**2e Aqua-rium**
1	*4*	*2 fois moins que* x	*8*	1	6	Autant	6
				2	Non résolu	Mixte	Non résolu
2	*4*	*3 de moins que* +	*8*	1	4	*3 de moins que* +	7
3	*9*	*4 de moins que* +	*4*	1	8	*4 de moins que* +	4

La modalité choisie pour le déroulement de cette tâche, soit la pige au hasard des problèmes, n'a pas favorisé l'avancement des connaissances des structures multiplicatives chez E2. Cette modalité ne permet pas un contrôle des valeurs des variables par l'enseignant. Un tel contrôle s'avère précieux pour confronter les connaissances de l'élève et provoquer l'apprentissage. La résolution de E2 aux problèmes des poissons permet cependant d'observer qu'elle contrôle les relations additives de comparaison de plus et de moins.

Au premier problème, tout comme E1, E2 réplique la solution du problème donné en exemple par l'orthopédagogue. Par la suite, E2 verbalise qu'elle ne sait pas comment « enlever 2 fois moins », expression qui traduit un raisonnement mixte. Aux deux problèmes suivants, elle pige au hasard des problèmes additifs qu'elle résout facilement.

Les problèmes des poires ont été particulièrement ardus pour E2 et ont mené à de lourdes et peu productives interventions de l'orthopédagogue. Il en ressort toutefois que ces interventions ont permis, à tout le moins, que perce l'idée de sous-collections équivalentes. Le tableau 4.6 présente les contraintes des problèmes ainsi que les calculs relationnels engagés par E2 aux problèmes des poires.

Tableau 4.6
Stratégies de E2 aux problèmes des poires

Problèmes	Contraintes				Calculs relationnels et numériques		
	Poires/ Assiettes (p./as.)	**Expressions relationnelles**	**Poires/ Assiettes** (p./as.)	**Total**	**Poires/ Assiettes (p./as.)**	**Traitement**	**Poires/ Assiettes** (p./as.)
1	*2 as. x 2 p./as. 4*	*2 fois moins que*	*2 as. x 4 p./as. 8*	12	1 as. x 2 p./as. 2	2 fruits de moins que	1 as. x 4 p./as. 4
2	*2 as. x 4 p./as 8*	*2 fois plus que*	*1 as x 4 p./as 4*	12	*2 as. x 4 p./as. 8*	*2 fois plus de fruits que*	*1 as. x 4 p./as. 4*
3	*1 as. x 4 p./as 1 as. x 1 p./as 5*	*3 fois moins que*	*2 as. x 4 p./as 1 as. x 2 p./as 10*	16	1 as x 4 p./as 4	*3 fois moins d'assiettes que*	3 as. x 4 p./as. 12
4	*2 as. x 4 p./as. 8*	*2 fois plus que*	*1 as. x 4 p./as. 1 as. x 1 p./as. 5*	15	Non résolu L'élève abandonne et l'orthopédagogue lui propose un autre problème.		
5	*1 as. x 4 p./as. 1 as. x 1 p./as. 5*	*2 fois moins que*	*1 as. x 4 p./a.s 1 as. x 1 p./as. 5*	15	Non résolu E1 l'accompagne et lui explique.		
					2 as. x 4 p./as. 1 as. x 2 p./as. 10	*2 fois plus de fruits que*	*1 as. x 4 p./as. 1 as. x 1 p./as. 5*
6	*2 as. x 4 p./as. 8*	*3 fois plus que*	*1 as. x 4 p./as. 1 as. x 1 p./as. 5*	16	3 as. x 4 p./as. 12	*3 fois plus d'assiettes que*	1 as. x 4 p./as. 4

Au premier problème, étant donné les nombres traités par l'élève (2 et 4, plutôt que 4 et 8), l'orthopédagogue la questionne pour vérifier si elle traite les nombres de façon additive ou multiplicative. Cela lui permet d'identifier le traitement additif: «Ici y'en a 4. Si on en enlève 2, ça va faire le même résultat.» En effet, les nombres 2 et 4 peuvent être associés à la fois aux relations *2 de moins* et *2 fois moins*. Le deuxième problème présente les mêmes relations numériques qu'au premier problème, mais exprimées différemment : ce n'est plus *4 qui est 2 fois moins que 8*, mais *8 qui est 2 fois plus que 4*. E2 reconnait la similitude entre les deux situations et admet facilement que le nombre de fruits présenté permet d'illustrer la relation. Non seulement le nombre de fruits, mais aussi le nombre d'assiettes respecte la relation puisque 2 assiettes sont 2 fois plus d'assiettes qu'une assiette.

Le tableau 4.4 montre que les problèmes 3 et 6 sont échoués alors que les données semblent montre plutôt une réussite. En fait, ce sont des réussites «par défaut». Par exemple, au problème 3, la relation *3 fois moins que* est respectée du fait que l'élève met en comparaison 1 assiette avec 3 assiettes. Chacun de ces plats comporte le même nombre de fruits, soit 4, ce qui donne 16 comme l'exige la contrainte de départ. L'élève vérifie que la contrainte sur le nombre total de poires, soit 16, est respectée. Cependant, le rapport entre 4 poires et 12 poires n'est jamais pris en compte. C'est donc, par défaut, que ce problème est réussi. Ce passage du traitement des assiettes plutôt que des poires est possiblement un effet de l'intervention de l'orthopédagogue qui a mis en évidence, dans le but de différencier les relations additives et multiplicatives, que 3 est *3 fois plus que* 1. Le problème 6 dont la contrainte est également de type *3 fois plus que* sera également traité par l'élève en référence aux nombres d'assiettes, soit 3 et 1.

Le quatrième problème n'est pas résolu par E2 et E1 accompagne E2 dans la résolution du cinquième. À ce problème, c'est le nombre total de fruits qui respecte la relation scalaire *2 fois moins*. Partant du nombre de poires dans la seconde illustration, soit 5, elle ajuste la première illustration pour obtenir 10 poires. Cependant, le nombre de poires par assiette n'est pas constant bien que le nombre de poires total est respecté, soit 15, ce qui peut expliquer sa difficulté à le résoudre.

L'ensemble des conduites met en évidence que seules les relations scalaires *n fois* plus en relation directe sont contrôlées par E2, ce qui correspond aux informations récoltées à l'entretien initial.

En conclusion, en ce qui concerne les problèmes scalaires, la résolution des problèmes des poires a favorisé une progression, bien que modeste, des connaissances sur les structures multiplicatives, soit de dégager la notion de sous-collections équipotentes en multiplication.

4.4 Conduites des élèves aux tâches connexes au jeu des étoiles et aux situations des poissons et des poires

Les tâches connexes au jeu des étoiles et aux situations scalaires sont réparties sur cinq séances d'intervention, soit les séances quatre à huit. Ces tâches comportent divers problèmes en contexte du jeu des étoiles, puis des énoncés de problèmes de type isomorphismes de mesures, des énoncés scalaires et des problèmes de distributivité, visant à une première décontextualisation des connaissances mises en œuvre aux situations précédentes. Le tableau 4.7 rend compte de l'enchaînement de ces tâches. Étant donné la somme relativement importante de tâches, l'analyse des conduites procède par élève et selon la chronologie des séances et de leur contenu pour être au plus près du temps d'apprentissage, en quelque sorte. Pour soutenir l'intelligibilité de l'analyse et éviter trop de renvois aux annexes, les tâches sont rappelées en exergue dans le texte dans la section de l'analyse des conduites de E1. Pour ne pas alourdir le texte, elles ne sont pas nécessairement rappelées à la section portant sur les conduites de l'élève E2.

Tableau 4.7

Enchaînement des tâches connexes au jeu des étoiles et aux situations des poissons et des poires

	Tâches	Séance 4	Séance 5	Séance 6	Séance 7	Séance 8
1	Feuilles de route à compléter (Annexe F)	X	X	X		
2	Énoncés de problèmes en contexte du jeu des étoiles (Annexe G)	X	X			
3	Jeu des étoiles, partie ajoutée à la planification initiale Intervalle : 7 Nombre de cases : 100 Domaine numérique : 707 à 1400 Nombre de dés : 2 Départ à la case 1085			X		
4	Séquence de problèmes : isomorphismes de mesures (Annexe H.1)			X		
5	Qui joue avec qui (Annexe I)				X	X
6	Séquence de problèmes : scalaires (Annexe H.2 et H.3)				X	
7	Séquence de problèmes : distributivité (Annexe H.4)					X

4.4.1 Élève 1 (E1)

a) Séance 4

Tâches connexes au jeu des étoiles : isomorphismes de mesures et distributivité

La première feuille de route à compléter contient deux séries de quatre problèmes chacune (Annexe F.1). Les premiers problèmes réfèrent à une grille de jeu d'intervalle de 5. Cette première partie n'a pas posé problème à E1. Pour tous les coups, elle identifie le déplacement à l'aide du comptage par intervalle, puis effectue un rappel direct du multiple correspondant. L'intervalle choisi pour la première partie

de l'exercice semble avoir facilité l'identification des relations entre les nombres. Le tableau 4.8 ci-dessous décrit ses stratégies utilisées.

Tableau 4.8
Première feuille de route à compléter
E1

Nombre de départ	Dé tiré	Nombre d'arrivée	Nombre de cases du déplacement	Stratégies de l'élève
100	25	125	***5***	5 : **comptage** avant par intervalle de 5
125	***15***	110	3	3 (déjà inscrit) : **comptage à rebours par intervalle** de 5 à partir de 125 15 : Rappel direct
110	5	105	***1***	1 : **rappel direct**
105	***30***	135	***6***	6 : **comptage avant par intervalle** de 5 à partir de 105 30 : rappel direct

Les nombres en caractères gras et italiques sont ceux qui sont recherchés.

E1 complète en utilisant le comptage par intervalle ou le rappel direct, une deuxième feuille de route qui réfère à un jeu d'intervalle de 3.

Lors de la même période d'intervention, les problèmes A et B ont été travaillés (Annexe G). Au problème A, les élèves doivent retrouver le nombre obtenu sur le dé et la case d'arrivée sur un jeu simulé par intervalle de 5.

> *Problème A :*
> *Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles sur une grille à intervalle de 5. Lucie a avancé de 3 cases. Elle était à la case 460 avant de jouer son tour.*
> *Quel était le nombre obtenu sur son dé?*
> *À quelle case est-elle arrivée?*
>
> *Solutions.*
> *Le nombre obtenu sur le dé est 3 (déplacement de cases) x 5 (intervalle) = 15*
> *La case d'arrivée est : 460 (case départ) + 15 (dé obtenu) = 475 (case d'arrivée)*

E1 identifie le nombre obtenu sur le dé, soit 15, par rappel direct puis écrit une suite de 3 nombres par intervalle de 5 pour identifier la case d'arrivée : 465, 470, 475.

Au problème B, il faut identifier le nombre inscrit sur le deuxième dé ainsi que la case d'arrivée. Notons que la solution ne fait pas nécessairement appel à la distributivité. Cependant, la référence au jeu semble susciter une telle stratégie chez les deux élèves.

> *Problème B :*
> *Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles à intervalle de 3. À son tour, Benoît était à la case 123 et a reculé de 7 cases. Il avait 9 sur un de ses dés.*
> *Quel était le nombre sur l'autre* dé?
> *À quelle case est-il arrivé?*
>
> *Solutions.*
> *Le nombre sur le deuxième dé est :*
> *7(cases de déplacement) x 3 (intervalle) = 21 (somme des deux dés).*
> *7x3=9 + 12. 12 est le nombre obtenu sur le second dé.*
> *Par distributivité : 7x3= (3x3) + (4x3).*
> *La case d'arrivée correspond à : 123 - 21 = 102 (case d'arrivée)*

Malgré que la valeur des variables augmente considérablement la difficulté du problème, E1 le réussit seule, sans difficulté. La distributivité en acte est mise en œuvre [7x3=(3x3)+(3x4)]; son travail est visible par l'usage de ses doigts. Elle lève 7 doigts, puis en rabaisse 3, associés au premier dé (9). Elle procède ensuite par rappel direct (3x4=12) pour trouver le multiple sur le deuxième dé. Pour traiter le caractère ordinal, elle recourt à une stratégie additive coûteuse, mais efficace : elle écrit la suite à rebours à partir de 123 par comptage rythmique. Elle dessine les cases, comme sur une grille de jeu jusqu'à l'obtention de 102.

b) Séance 5

Tâches connexes au jeu des étoiles : isomorphismes de mesures et distributivité

La séance 5 débute avec de nouvelles feuilles de route à compléter (Annexe F.2). Nous reproduisons ici la feuille pour favoriser l'intelligibilité de l'analyse.

1er feuille de route : Jeu des étoiles avec des dés de 5. Avancer seulement.

Nombre de départ	Dé tiré	Nombre d'arrivée	Nombre de cases du déplacement
a. 45	___	55	_____
b. 90	45	___	_____
c. ___	___	165	7
d. ___	25	55	_____
e. 80	___	___	4

2e feuille de route : Jeu des étoiles avec des dés de 7. Avancer seulement.

Nombre de départ	Dé tiré	Nombre d'arrivée	Nombre de cases du déplacement
49	14	___	___
___	35	70	___
91	___	___	7

La tâche est relativement complexe du fait qu'il faut interpréter les deux données numériques au regard de ce qui est recherché. La place des inconnues varie d'ailleurs de ligne en ligne et l'élève doit traiter les données simultanément et non plus, de manière séquentielle, comme sur le jeu effectif.

Ainsi, les difficultés rencontrées par E1 aux tâches *a* et *b* se situent principalement dans l'identification d'une part, de ce qui est recherché, mais aussi, d'autre part, dans le contrôle des stratégies de comptage mises en œuvre. Par exemple, à la tâche *a*, E1 cherche à identifier le nombre qui correspond au « dé tiré » par un procédé de comptage par intervalle de 1 (de 45 à 55), mais obtient 9 au lieu de 10. Sachant que 9 n'est pas multiple de 5, elle tente une correction, mais confond le multiple (dé tiré) et

le facteur (déplacement). Elle compte alors le nombre de multiples en incluant 45 et obtient ainsi 3 (45-50-55:3) qu'elle associe au nombre tiré sur le dé. L'orthopédagogue intervient alors pour soutenir l'élève et corriger ses erreurs.

À la deuxième feuille de route, l'intervalle de 7 est mal contrôlé par E1. Nous formulons l'hypothèse que si l'intervalle de 7 est une valeur de variable utile en situation de jeu effectif pour susciter des stratégies multiplicatives, cet intervalle n'est pas approprié pour faire émerger des stratégies multiplicatives pour identifier un nombre d'arrivée sur une feuille de route. De même, étant donné que E1 maîtrise moins bien les multiples de 7 que de 5, elle confond plus facilement le nombre associé à k (le facteur correspondant au déplacement) et le multiple (la somme obtenue sur les dés). Le questionnement de l'orthopédagogue sur la signification des données l'amène à se réajuster. On observe alors le retour à l'addition répétée de sept, plutôt que le rappel direct du multiple 49, que pourtant elle connaît. En somme, l'analyse des conduites à la tâche portant sur la feuille de route à compléter met en évidence certaines limites des valeurs numériques choisies pour permettre à E1 de prendre le contrôle des relations multiplicatives visées par cet exercice.

La séance se termine par la réalisation du problème C (Annexe G). Notons que l'énoncé ne suppose pas nécessairement le recours à une stratégie multiplicative.

> *Problème C*
> *Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles. À son tour, Lucie est partie de la case 1015 et elle s'est arrêtée à la case 1050. Elle a avancé de 5 cases. Sur un de ses dés, elle avait 28.*
> *Quel était le nombre sur son autre dé?*
> *Sur quelle grille de jeu jouent-ils?*
> *Solutions.*
> *Le nombre obtenu sur le 2e dé : 1050 – 1015 = 35; 35 – 28 = 7 ou 35 ÷ 5 = 7.*
> *La grille du jeu est d'intervalle de 7.*

L'orthopédagogue amorce la tâche en effectuant un retour sur les problèmes A et B. E1 rappelle facilement ses procédures et les relations entre les nombres. Au problème C, elle repère l'intervalle de jeu (7) facilement à l'aide de ses connaissances des faits

multiplicatifs (28 est multiple de 7). Elle recourt ainsi à des connaissances multiplicatives. Par la suite, par une stratégie additive de complément, elle dégage le déplacement total (1015 + ***35*** = 1050) et l'associe à la valeur du deuxième dé, puis elle bloque. Dans ce problème, elle n'arrive pas à utiliser la distributivité en acte qu'elle a par ailleurs mobilisée au problème B ou encore, elle ne pense pas à soustraire 28 de 35 puisque cette soustraction n'est pas une stratégie utile dans le jeu effectif.

c) Séance 6

Tâches connexes au jeu des étoiles : isomorphismes de mesures et distributivité

L'orthopédagogue, visant à consolider le travail sur l'intervalle de 7, débute la sixième période par une partie du jeu des étoiles par intervalle de 7. La partie est jouée facilement et n'ajoute rien à la suite de l'intervention puisque les difficultés rencontrées sur la feuille de route sont spécifiques à ce type de tâches et non au jeu d'étoiles en tant que tel. Enfin, une dernière feuille de route est travaillée (Annexe F.3). Dans cette tâche, seul le contexte cardinal est sollicité, soit les relations facteur/multiple. Les inconnues sont les nombres tirés, le nombre de cases de déplacement ou l'intervalle de la grille. Ainsi, il n'y a plus de recherche du nombre de la case d'arrivée. E1 réussit facilement la tâche, à l'aide de ses stratégies multiplicatives.

Énoncés de problèmes d'isomorphismes de mesures (Annexe H.1)

Pour favoriser la lecture de l'analyse, nous rappelons les deux séquences de trois problèmes d'isomorphismes de mesures présentées à la séance 6.

Première séquence

1. L'épicière a reçu 6 caisses d'oranges. Chaque caisse contient 144 oranges. Combien d'oranges a-t-elle reçues en tout ?
2. En promenant son chien, Benoit fait 144 pas par minute. Combien de pas aura-t-il faits en 6 minutes?
3. Dans une usine de bonbons, on doit placer 864 bonbons à la cerise dans 6 sacs. Combien de bonbons y aura-t-il par sac?

Deuxième séquence

1. Les élèves de la classe de 5e année présenteront la semaine prochaine une pièce de théâtre. Ils ont imprimé 130 programmes. Après entente avec la direction de l'école, les élèves versent 15 sous pour la photocopie de chaque programme. Combien paieront-ils pour l'impression des programmes ?
2. Les 15 employés de l'usine LEGO se partageront les 1950 dollars gagnés à la loterie. Peux-tu trouver le montant que chacun recevra?
3. Dans cette usine, les légos sont mis dans des boites de 130 pièces. Combien de boites seront nécessaires pour emballer les 1950 pièces.

Le premier problème de multiplication est facilement résolu par E1, ce qui était attendu suite à l'entretien initial. Le deuxième problème est de même structure, mais contextualise différemment les mêmes nombres. E1 réussit facilement. Le dernier problème de cette séquence présente encore les mêmes nombres, mais en situation de division regroupement. E1 interagit avec l'orthopédagogue pour mettre en œuvre son calcul relationnel en fonction de la grandeur attendue du résultat et effectue le lien entre la multiplication et la division. Le fait que les mêmes nombres soient utilisés dans les trois problèmes, ainsi que la grandeur de ceux-ci, semble avoir permis à l'élève de choisir un calcul numérique optimal, ce qu'elle ne faisait pas d'emblée dans l'entretien en présence de petits nombres ou de choix multiples, où l'égalité lacunaire et l'addition répétée étaient privilégiées.

Le premier problème de la deuxième séquence présente un contexte moins familier pour les élèves. L'orthopédagogue explique le contexte et E1 effectue une multiplication. Les calculs relationnel et numérique sont adéquats. Par contre, elle ne convertit pas les sous en dollars. Au deuxième de la séquence et dernier problème de la séance 6, E1 annonce rapidement qu'il faut diviser, puisque les mêmes nombres

sont en jeu. Toutefois, une réflexion sur la grandeur du résultat semble présente et appuie son calcul relationnel.

d) Séance 7

Tâches connexes au jeu des étoiles : isomorphismes de mesures et distributivité

Les deux problèmes « Qui joue avec qui? » sont réalisés aux séances 7 et 8 (Annexe I). Ces problèmes sont complexes. Partant de 4 énoncés, il faut identifier les deux paires d'énoncés qui se rapportent à la même grille de jeu, soit ceux qui impliquent le même intervalle. Pour deux des quatre énoncés (voir lignes 2 et 4), plus d'une opération est nécessaire. De plus, certaines valeurs numériques, dans l'énoncé ou la démarche de solution, sont communs multiples des intervalles recherchés. Par exemple dans l'exercice A, 60 (dans l'énoncé) et 30 (dans la démarche de solution) sont à la fois multiples de 5 et de 6 (les intervalles qui caractérisent les deux grilles recherchées).

A) Qui joue avec qui et sur quels tableaux ?

1. Marie a tiré 40 sur son dé. Elle avance de 8 cases.
2. Jean a reculé de 6 cases. Il est parti de 60 et s'est arrêté à 24.
3. Aline a tiré 48 sur son dé. Elle avance de 8 cases
4. Laurent a avancé de 6 cases. Il est parti de 25 et s'est arrêté à 55.

NOMS DE L'ÉQUIPE 1 : _____ ET _____

INTERVALLE (BONDS) DE LA GRILLE: _____

NOMS DE L'ÉQUIPE 2 : _____ ET _____

INTERVALLE (BONDS) DE LA GRILLE: _____

Solutions

1. *Si Marie avant de 8 avec ayant obtenu sur le dé 40, elle joue sur une grille d'intervalle de 5, 40÷8=5.*
2. *Si Jean recule de 6 cases en ayant obtenu 36 sur le dé (60 – 24), il joue sur une grille d'intervalle de 6, 36÷6=6.*
3. *Si Aline avance de 8 ayant obtenu sur le dé 48, elle joue sur une grille d'intervalle de 6, 48÷8=6.*
4. *Si Laurent avance de 6 cases ayant obtenu sur le dé 30 (55-25), il joue sur une grille d'intervalle de 5, 30÷6=5.*

Marie et et Jean forment la première équipe et jouent sur une grille d'intervalle de 5.
Aline et Laurent forment la deuxième équipe et jouent sur une grille d'intervalle de 6.

B) Qui joue avec qui et sur quels tableaux ?

1. Marc recule de 10 cases. Il part de 88 et s'arrête à 8.
2. Sally a tiré 12 et 20 sur son dé. Elle avance de 8 cases
3. Sophie a tiré 24 et 4 sur son dé. Elle avance de 7 cases.
4. Laurent avance de 8 cases. Il part de 160 et s'arrête à 224.

NOMS DE L'ÉQUIPE 1 : _____ ET _____
INTERVALLE (BONDS) DU TABLEAU : _____
NOMS DE L'ÉQUIPE 2 : _____ ET _____
INTERVALLE (BONDS) DU TABLEAU : _____

Solutions

5. *Si Marc recule de 10 cases ayant obtenu 80 sur le dé (88-8), il joue sur une grille d'intervalle de 8, 80÷10=8.*
6. *Si Sally avance de 8 ayant obtenu 32 sur les dés (12 +20), elle joue sur une grille d'intervalle de 4, 32÷8=4.*
7. *Si Sophie avance de 7 cases en ayant obtenu 28 sur les dés (24+4), elle joue sur une grille d'intervalle de 4, 28÷7.*
8. *Si Laurent avance de 8 cases ayant obtenu sur le dé 64 (224-160), il joue sur une grille d'intervalle de 8, 64÷8=8.*

Marc et Laurent forment la première équipe et jouent sur une grille d'intervalle de 8.
Sophie et Sally forment la deuxième équipe et jouent sur une grille d'intervalle de 4.

E1 répond rapidement en associant les énoncés pour lesquels le déplacement est le même (en A, Aline et Marie). Elle n'engage alors aucun calcul numérique. L'orthopédagogue la ramène aux tâches précédentes pour la relancer dans l'action. Elle arrive alors facilement à nommer l'intervalle de jeu pour les énoncés où le rappel des faits multiplicatifs suffit à mettre en relation les nombres (par exemple, 40 ÷ 8 = 5). Elle dégage ensuite mentalement l'intervalle des deux autres énoncés en identifiant la différence entre les nombres des cases de départ et d'arrivée (par exemple, 55-25=***30***), puis effectue un rappel direct à partir du déplacement, par égalité lacunaire (par exemple 6x***5***=30; l'intervalle est donc de 5). Pour compléter le deuxième exercice, elle procède à l'aide des mêmes stratégies. Au cours de la réalisation de cet exercice, l'intervention de l'orthopédagogue a permis à l'élève de

s'engager dans la tâche et de mobiliser ses connaissances sur le jeu, ce qu'elle n'a pas fait d'emblée, malgré l'accessibilité du problème au regard de ses connaissances.

Tâches connexes aux problèmes des poissons et des poires : relations scalaires

Le tableau 4.9 présente les stratégies de E1 aux énoncés de problèmes scalaires classiques lors de la séance sept (Annexe H.2 et H.3). Ces énoncés sont construits sur la base de la relation multiplicative 6x25=150. Ces nombres sont plus importants que ceux impliqués dans les problèmes d'assiettes et de poires; ils ont été choisis puisqu'ils sont facilement accessibles par calcul mental. La résolution fait appel soit à la division soit à la multiplication.

Tableau 4.9
Stratégies de E1 aux énoncés de problèmes scalaires de facture classique

Problème	Énoncé	Structure du problème	Essais	Calcul relationnel	Calcul numérique
1	Mikaël a lu 25 miniromans cette année. Chloé en a lu 6 fois plus. Combien Chloé a-t-elle lu de miniromans ?	*n fois plus* relation directe recherche d'une mesure	1	Adéquat	Addition répétée 25+25+25…
2	Marie a récolté 150 bonbons à l'Halloween. Elle a récolté 6 fois plus de bonbons, que Julie, qui habite à la campagne. Combien Julie a-t-elle récolté de bonbons ?	*n fois plus* relation inverse recherche d'une mesure	1	Inadéquat	Multiplication 150x6
			2	Adéquat	Égalité lacunaire 6x25=150
			3	Adéquat	Division Solution exprimée à l'oral
3	Le livre de Julie coûte 25$. La vieille version originale coûte 150$. Combien de fois plus cher coûte la version originale ?	*Combien de fois plus* relation inverse recherche de la relation	1	Partiellement adéquat	Division 150÷25=6 (validation avec la multiplication, étant donné la difficulté à opérer l'algorithme de division : 150÷25) *L'élève n'arrive pas à identifier que le résultat (6) correspond à une relation plutôt qu'à une mesure.*
4	Le lapin fait des bonds de 6cm. La gazelle fait des bonds de 150cm. Combien de fois plus long que ceux du lapin sont les bonds de la gazelle ?	*Combien de fois plus* relation inverse recherche de la relation	1	Partiellement adéquat	Division 150÷6=25 *L'élève n'arrive pas à identifier que le résultat (25) correspond à une relation plutôt qu'à une mesure.*
5	Les bonds de 6cm du lapin sont 25 fois plus courts que ceux du lion. De quelle longueur sont les bonds du lion ?	*Fois plus court* relation inverse recherche d'une mesure	1	Adéquat	6x25=150

L'ensemble des problèmes est traité par E1, du point de vue relationnel, sur le plan multiplicatif. Au départ, l'addition répétée, comme calcul numérique, est privilégiée à l'algorithme de multiplication. Celui-ci est associé à la multiplication après que

l'orthopédagogue lui ait demandé si un calcul plus rapide aurait été possible. Lorsque la relation multiplicative est indirecte et commande une division (*6 fois plus* associé à la division), l'élève ne respecte pas le sens de la relation et procède d'abord par multiplication. Ce raisonnement semble encore une fois calquer le calcul numérique gagnant du problème précédent. Dans ce problème, l'intervention de E2 de même que celle de l'orthopédagogue semblent contribuer au réajustement de E1. Dans l'interaction, E2 affirme que Julie ne peut pas en avoir plus que 150, et lorsque l'orthopédagogue lui demande de relire le problème, E1 efface et explique qu'elle doit trouver le nombre de bonbons de Julie. Elle semble alors entrer dans la tâche et s'attarder aux relations avant d'engager son calcul numérique. La relation est alors établie correctement et le calcul numérique consiste en une multiplication de type lacunaire : $6x\textit{n}=150$; la solution numérique étant 25. Ensuite, l'orthopédagogue demande à l'élève ce qu'elle aurait fait si elle n'avait pas su que le résultat était 25. Elle affirme qu'elle aurait divisé. L'orthopédagogue tente alors d'institutionnaliser la réversibilité de la multiplication et de la division en se référant aux problèmes d'isomorphismes de mesures faits dans une séance précédente (ceux-ci seront analysés plus loin). Au troisième énoncé, la relation numérique établie entre les données 6, 25 et 150, l'amène à associer la division à la relation scalaire indirecte, par contre elle n'arrive pas à opérer le calcul numérique. De plus, la recherche de la relation scalaire demeure difficile, et même avec l'intervention de l'orthopédagogue, elle arrive mal à identifier ce à quoi correspond le nombre trouvé, en l'occurrence *6* ***fois plus***. La même difficulté est observée au quatrième problème. Le dernier est réussi.

Les conduites de E1 aux énoncés de problèmes scalaires classiques montrent que les problèmes dont on recherche la valeur de la relation ne sont pas contrôlés, alors que ceux qui impliquent la recherche d'une mesure étant donné une relation *fois plus* directe ou indirecte sont réussis. Ceci marque une évolution des connaissances

multiplicatives de l'élève au regard de ce qui a pu être relevé au cours de l'entretien orthopédagogique.

e) Séance 8

Tâches connexes au jeu des étoiles : isomorphismes de mesures et distributivité

Outre, la complétion de la tâche « Qui joue avec qui? », la huitième séance est consacrée aux énoncés de problèmes portant sur la distributivité (Annexe H.4). Les énoncés de problèmes 1 et 3 réfèrent au jeu des étoiles.

1. À un jeu des étoiles sur des bonds de 5, Marie avance de 6 cases avec son premier dé et de 4 cases avec son deuxième dé. Quel est le total des dés qu'elle a tirés?
2. Pour une sortie scolaire, les élèves doivent payer chacun 5$. 9 élèves ont déjà payé et 8 n'ont pas encore payé. Combien d'argent sera accumulé lorsque tous les élèves auront payé ?
3. Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles avec 2 dés, sur une grille à intervalle de 3. Lucie a avancé de 7 cases en tout. Sur un de ses dés, elle avait 9. Quel est le total de ses dés? Quel était le nombre sur son autre dé? De combien de cases chacun des dés lui a-t-il permis d'avancer?

Solutions

1. La somme des dés est 50, soit 5 x (6 + 4).
2. L'argent à accumuler est 85, soit 5 x (9 + 8)
3. Lucie a avancé de 7 cases sur un jeu d'intervalle de 3. Elle a obtenu un total de 21, soit 7 x 3. Si l'un des dés est 9, l'autre est 12, soit 21 – 9. Le dé de 9 lui a permis d'avancer de 3 cases, soit 3x3, et le dé de 12 lui a permis d'avancer de 4 cases, soit 4 x 3.

Au premier énoncé, E1 trouve facilement la valeur de chacun des dés par comptage rythmique, puis pose les multiplications correspondantes. Elle semble buter sur le mot « total » et E2 lui indique qu'elle doit « faire le total des deux ». L'orthopédagogue demande ensuite aux élèves de modéliser la situation en une seule écriture. Réalisant que celles-ci n'ont pas reçu cet enseignement, elle pose ces écritures aux élèves : (5x6)+(5x4)=50 et 5x(6+4)=50. Suit le deuxième problème de même structure, mais qui ne comporte ni le même contexte ni les mêmes nombres. Encore ici, E1 met un moment à se mettre en action et jette un œil sur la copie de E2.

Elle procède de façon semblable à cette dernière, mais sans dessiner, en inscrivant une addition répétée de 9 *cinq*, puis écrit la multiplication correspondante. Par la suite, pour trouver la somme d'argent à accumuler, elle passe directement par la multiplication, puis additionne les deux produits. Son calcul se modélise par l'écriture suivante : (5x9) + (5x8) = 85. L'orthopédagogue lui demande à nouveau de modéliser la situation en une seule écriture. Celle-ci y parvient facilement.

Le problème suivant, troisième de la séquence, en contexte du jeu des étoiles, s'apparente aux énoncés de problèmes complexes (A, B et C) effectués aux séances 4 et 5. L'orthopédagogue oriente le travail des élèves puisqu'elles n'arrivent pas à le résoudre, en dépit du fait que le contexte ordinal ne soit pas impliqué dans le problème. Le problème se modélise ainsi : (7x3)=9+(3x *n*). Le contexte du jeu des étoiles et la nature de l'inconnue, soit la valeur du deuxième dé, complexifie sa résolution. En effet, E1 résout facilement par égalité lacunaire le problème des oranges en fin de séance, la donnée superflue ne lui causant aucune difficulté. Elle ne peut cependant modéliser l'énoncé par une seule écriture de type (5+3)xn=64.

> Julie achète des caisses d'oranges 2 fois par semaine. Elle a acheté 3 caisses d'oranges, lundi et 5 caisses d'orange, jeudi. En tout, elle a dépensé 64$. Quel est le prix d'une caisse d'oranges?

4.4.2 Élève 2 (E2)

a) Séance 4

Tâches connexes au jeu des étoiles : isomorphismes de mesures et distributivité

La tâche des feuilles de route à compléter (Annexe F.1) s'est avérée beaucoup plus difficile à réaliser pour E2 que pour E1. L'orthopédagogue intervient beaucoup en support. En situation de jeu, les connaissances sur la relation facteur/multiple ainsi que sur la relation ordinale sont efficaces. Cependant, la feuille de route à compléter ne sollicite pas tout à fait les mêmes opérations de pensée et de calcul que le jeu des

étoiles effectif; elle n'est pas simplement un exercice d'application à partir d'une situation de référence qu'est le jeu des étoiles. Par exemple, chez E2, la valeur de l'intervalle a un impact important sur les stratégies mobilisées. En effet, la stratégie intermédiaire de surcomptage ou le rappel direct sont utilisés pour résoudre les problèmes à intervalle de 5, sauf pour identifier l'écart entre 110 et 125, pour laquelle elle recourt à des stratégies additives. Pour la feuille de route suivante, par intervalle de 3, le recours aux stratégies additives est plus présent. E2 demandera d'ailleurs au cours de cette tâche d'utiliser les dés pour mieux contrôler les stratégies. Le tableau 4.10 présente ses stratégies pour la première feuille de route à compléter.

Tableau 4.10
Première feuille de route à compléter
E2

Nombre de départ	Dé tiré	Nombre d'arrivée	Nombre de cases du déplacement	Stratégies de l'élève
100	25	125	***5***	5 : elle inscrit d'abord 25, puis efface et écrit 5 lorsqu'E1 inscrit la solution sur sa feuille
125	***15***	110	3	3 (déjà inscrit) : O relit la consigne puis E2 effectue un rappel direct de 15 (3x5)
110	5	105	***1***	1 : rappel direct (sans être certaine de sa réponse)
105	***30***	135	***6***	30 : E2 considère d'abord le 35 de 135 et effectue un rappel direct du facteur 7. Puis l'orthopédagogue rappelle les nombres sur le dé. E2 surcompte ensuite par 5, à partir de 105 jusqu'à 135 pour identifier 30. L'orthopédagogue l'amène à se valider à l'aide de la stratégie additive, à partir de 105. 6 : avec un deuxième réseau, à partir des doigts, elle retrouve le facteur 6.

Pour compléter la deuxième grille, l'orthopédagogue intervient beaucoup auprès de E2. Elle a recours à la stratégie additive pour identifier l'écart entre 42 et 57 (15), puis fait du comptage pour identifier le facteur *k* (nombre de déplacement). Ainsi, E2 fait un comptage rythmique par 3 jusqu'à 15, en contrôlant le deuxième réseau avec les doigts, et identifie 5 : 3(1 sur les doigts), 4, 5, 6 (2), 7, 8, 9 (3), 10, 11, 12 (4), 13, 14, 15 (**5**). Elle n'utilise donc pas sa connaissance du fait multiplicatif, 3x5=15.

Les énoncés de problème en contexte du jeu des étoiles (Annexe G) sont encore plus difficiles à résoudre pour E2. Au problème A (Annexe G), E2 reproduit une partie de la grille de jeu. D'abord, elle trace une case contenant le nombre de la case de départ, puis trace trois autres cases, qui représentent le nombre de cases du déplacement. Elle y inscrit les nombres appropriés, puis met en place une stratégie de surcomptage : compte par intervalle de 5 en pointant les 3 cases ajoutées pour retrouver le 15. Elle n'utilise donc pas la stratégie multiplicative pour trouver le multiple. Au problème B, qui est beaucoup plus difficile, E2 commence par chercher la case d'arrivée. Pour y parvenir, elle effectue un comptage rythmique à rebours jusqu'à 105, en inscrivant les nombres dans leurs cases, à l'image de la grille de jeu. Si la procédure additive est adéquate, elle compte la case de départ comme un déplacement, ce qui lui occasionne une erreur. Lorsque vient le temps de retrouver le nombre sur le deuxième dé, elle confond facteur et multiple. Malgré l'aide apportée par l'orthopédagogue, l'élève ne réussit pas.

b) Séance 5

Tâches connexes au jeu des étoiles : isomorphismes de mesures et distributivité

À la cinquième séance, les activités débutent avec une feuille de route à compléter (Annexe F.2). E2, au départ, confond facteur *k* (déplacement) et multiple (nombre tiré sur le dé) et utilise un mauvais départ dans son comptage. E2 n'arrive pas à se représenter les informations qu'elle peut tirer des données présentées, car elle

confond la fonction des différents nombres présentés dans la feuille de route à compléter. Quelques interventions sont réalisées par l'orthopédagogue pour lancer E2 sur des mises en relations numériques, notamment par l'observation de régularités entre les lignes d'une même feuille de route, mais sans réelle percée pour E2.

Pour amorcer le problème C, un retour sur les problèmes A et B est réalisé. Par la suite, E2 trace une grille de jeu et inscrit la case de départ dans la première case. Elle commence à inscrire des nombres dans les autres cases en faisant des intervalles de 5. L'orthopédagogue ne permet pas à E2 de compléter cette démarche inadéquate. E2 se met alors à la recherche de 28 sur les dés disponibles. Cela lui permet de réaliser que le problème réfère à une grille de 7, mais elle procède ensuite à l'addition suivante 28+5=33, confondant, encore une fois, la fonction des nombres liés à l'intervalle (7) et au déplacement (5 cases).

c) Séance 6

Tâches connexes au jeu des étoiles : isomorphismes de mesures et distributivité

À la sixième période, la feuille de route à compléter ne sollicite que des connaissances relatives aux relations facteur/multiple. E2 utilise alors, selon les nombres en jeu, soit des stratégies multiplicatives, soit le comptage rythmique. Le comptage rythmique étant difficile à contrôler pour un intervalle de 6, elle demande les dés. L'orthopédagogue l'invite plutôt à écrire les nombres qui devraient se retrouver sur les dés, ce qui permet à E2 de résoudre facilement le problème.

Énoncés de problèmes d'isomorphismes de mesures

Sont ensuite présentées les deux séquences d'énoncés de problèmes de type isomorphismes de mesures[15] (Annexe H.1). La première séquence est facilement résolue par E2. Le fait que les mêmes nombres soient utilisés dans les trois énoncés semble lui avoir permis d'alléger sa mémoire de travail et d'établir les calculs relationnel et numérique adéquats. Elle utilise par ailleurs les algorithmes de multiplication pour résoudre les deux premiers et le troisième problème est résolu par l'algorithme de division.

Au premier problème de la deuxième séquence, E2 bénéficie de la clarification du contexte demandée par E1, sans toutefois qu'elle mette en place un calcul relationnel adéquat. Elle procède d'abord par soustraction puis propose l'opération de division sans effectuer le calcul numérique. Au deuxième problème de la deuxième séquence de trois, E2 effectue une soustraction. L'échange avec l'orthopédagogue l'amène à verbaliser qu'elle doit diviser. Ainsi, la deuxième séquence d'énoncés de problèmes n'a pas permis à l'élève d'établir la relation multiplicative entre les nombres 15, 130 et 1950 sur la base des structures des trois énoncés de problèmes. Il est possible que la taille des nombres et donc, la difficulté à opérer sur ces nombres, soit un frein à la mise en relation des données des problèmes.

---

[15] *Première séquence*

1. L'épicière a reçu 6 caisses d'oranges. Chaque caisse contient 144 oranges. Combien d'oranges a-t-elle reçues en tout ?
2. En promenant son chien, Benoit fait 144 pas par minute. Combien de pas aura-t-il faits en 6 minutes?
3. Dans une usine de bonbons, on doit placer 864 bonbons à la cerise dans 6 sacs. Combien de bonbons y aura-t-il par sac?

Deuxième séquence

1. Les élèves de la classe de 5e année présenteront la semaine prochaine une pièce de théâtre. Ils ont imprimé 130 programmes. Après entente avec la direction de l'école, les élèves versent 15 sous pour la photocopie de chaque programme. Combien paieront-ils pour l'impression des programmes ?
2. Les 15 employés de l'usine LEGO se partageront les 1950 dollars gagnés à la loterie. Peux-tu trouver le montant que chacun recevra?
3. Dans cette usine, les légos sont mis dans des boites de 130 pièces. Combien de boites seront nécessaires pour emballer les 1950 pièces.

d) Séance 7

Tâches connexes au jeu des étoiles : isomorphismes de mesures et distributivité

À la période 7, la tâche « Qui joue avec qui? » s'avère trop difficile à réaliser pour E2. En effet, cette tâche nécessite une parfaite maitrise des relations en jeu, ce qui a été difficile dans les tâches précédentes.

Tâches connexes aux problèmes des poissons et des poires : relations scalaires

Les énoncés de problèmes scalaires de la septième séance d'intervention (Annexe H.2) représentent un défi pour E2, ce qui n'est pas étonnant compte tenu de ses conduites aux problèmes des poissons et des poires. Ces derniers comportent un aspect tangible puisqu'ils sont accompagnés d'une illustration et de petits nombres. Le saut dans la complexité de la tâche semble trop grand pour E2. Il faut noter que les énoncés présentés sont hautement plus difficiles que ceux présentés aux problèmes des poires et des poissons, puisqu'ils portent sur la recherche de la relation scalaire, sur des relations inverses et impliquent des données numériques qui ne sont pas du même domaine numérique que les problèmes des poires. De plus, le contexte de mesure du problème 5 ajoute à la difficulté de l'énoncé. Le tableau 4.11 témoigne de ses conduites. E2 ne contrôle toujours pas la relation inverse (problèmes 2, 4 et 5). Elle ne peut également interpréter les énoncés dont l'inconnue porte sur la relation scalaire (problèmes 3 et 4).

Tableau 4.11
Stratégies de E2 aux énoncés de problèmes scalaires de facture classique

Problème	Énoncé	Structure du problème	Essais	Calcul relationnel	Calcul numérique
1	Mikaël a lu 25 miniromans cette année. Chloé en a lu 6 fois plus. Combien Chloé a-t-elle lu de miniromans ?	*n fois plus* relation directe recherche d'une mesure	1	Adéquat	Multiplication 25x6=150
2	Marie a récolté 150 bonbons à l'Halloween. Elle a récolté 6 fois plus de bonbons, que Julie, qui habite à la campagne. Combien Julie a-t-elle récolté de bonbons ?	*n fois plus* relation inverse recherche d'une mesure	1	Inadéquat	Multiplication 150x6
			2	Adéquat	Division 150÷6=25
3	Le livre de Julie coûte 25$. La vieille version originale coûte 150$. Combien de fois plus cher coûte la version originale ?	*Combien de fois plus* relation inverse recherche de la relation	2	Adéquat	Division avec calculette 150÷25=6
4	Le lapin fait des bonds de 6cm. La gazelle fait des bonds de 150cm. Combien de fois plus long que ceux du lapin sont les bonds de la gazelle ?	*Combien de fois plus* relation inverse recherche de la relation	1	Non résolu	Non applicable
5	Les bonds de 6cm du lapin sont 25 fois plus courts que ceux du lion. De quelle longueur sont les bonds du lion ?	*Fois plus courts* relation inverse recherche d'une mesure	1	Non résolu	Non applicable

e) Séance 8

Tâches connexes au jeu des étoiles : isomorphismes de mesures et distributivité

À la séance 8, pour la tâche « Qui joue avec qui? », l'activité mathématique de E2 s'appuie essentiellement sur celle de E1. En effet, elle effectue un comptage rythmique pour valider l'information sur les intervalles identifiés par E1.

Pour la dernière séquence d'énoncés de problèmes, E2 réussit plus facilement les deux premiers, bien qu'ils fassent appel à la distributivité. Il est probable que les nombres en jeu facilitent la mise en œuvre de son calcul relationnel. En ce qui concerne le premier problème, en contexte du jeu des étoiles, elle rappelle directement les multiples de 5 associés aux déplacements, puis les additionne. Au

deuxième, elle illustre d'abord les deux sous collections, puis, par surcomptage, elle trouve le résultat. Par la suite, elle inscrit et résout l'algorithme 17X5 pour valider son surcomptage.

Le troisième problème se situe en contexte du jeu des étoiles, mais ne comporte pas l'aspect ordinal qui lui posait problème aux séances précédentes. E2 entame une démarche adéquate écrivant la suite des multiples de 3 jusqu'à 21, soit 7 multiples, par comptage rythmique, pour dégager le déplacement total. Le problème se pose lorsqu'elle cherche la valeur des dés. Elle inscrit 9 et 21, alors qu'elle devrait trouver la valeur du deuxième dé pour un déplacement de 4. Le dernier problème (les caisses d'oranges) n'est pas réussi, E2 n'arrive pas à interpréter la donnée superflue.

4.5 Conclusion sur les analyses des conduites des élèves

Dans cette dernière section, nous faisons une brève conclusion sur les conduites mathématiques des élèves E1 et E2 mises en œuvre au cours de la séquence d'intervention et tentons de caractériser l'avancée de chacun de ces élèves, dans les structures multiplicatives.

4.5.1 Élève 1 (E1)

Malgré les difficultés rencontrées tout au long des séances et de l'investissement mathématique variable de E1, nous pouvons conclure que les connaissances mises en œuvre au cours de l'intervention ont progressé au regard de l'entretien orthopédagogique, notamment en ce qui concerne la mise en œuvre d'un calcul relationnel adéquat en situations de division partage et de division regroupement, qui sont eux-mêmes associées à l'opération de division. De même, la notion de sous-collections équipotentes liées aux expressions scalaires s'est développée ainsi qu'une première mise en relation que l'opération de division (dans N) est l'opération inverse de la multiplication.

De façon générale, E1 aborde les tâches en utilisant des conduites qu'elle maîtrise bien, même si une conduite plus évoluée lui est accessible. Cela a été observé dans le jeu des étoiles, où à chaque début de séances, elle voyait ses stratégies reculer, ou encore à l'usage de l'addition répétée, alors que la multiplication était reconnue comme un calcul numérique valable dans les problèmes. Conjointement à cela, nous observons également qu'elle est relativement réceptive aux interventions de l'orthopédagogue et que celles-ci, en tant qu'élément du milieu didactique, contribuent à sa progression.

Un autre élément notable relatif au contrat didactique et à la dévolution des tâches à l'élève concerne la variété des problèmes, notamment les tâches faisant appel tantôt aux structures additives et tantôt aux structures multiplicatives (poissons et poires). Ceux-ci ont, en quelque sorte, forcé l'élève à s'engager dans un calcul relationnel plutôt que de répéter le calcul numérique utilisé au problème précédent. Malgré que cette variété l'ait déstabilisée, elle a été favorable à l'établissement d'un contrat didactique différent de celui vécu en classe et, en conséquence, l'a conduit à s'approprier davantage les tâches.

Finalement, les connaissances opératoires de E1 (mémorisation des faits multiplicatifs et des algorithmes de multiplication et de division à un chiffre) se sont avérées contributives dans son avancée à établir les calculs relationnels dans plusieurs situations.

4.5.2 Élève 2 (E2)

Au terme de l'intervention, nous constatons que la progression de E2 est très faible. Les situations ayant eu le plus d'impact sont le jeu des étoiles et les problèmes des poires. Nous pouvons constater que l'évolution des valeurs des variables didactiques du jeu des étoiles a permis une progression de ses stratégies. Conjointement à cela, nous formulons l'hypothèse que les interactions didactiques avec E1, notamment par

l'injection en situation de stratégies plus évoluées, ou encore celles avec l'orthopédagogue semblent avoir peu contribué à cet avancement. Les problèmes des poires comportant deux contraintes semblent avoir permis à E2 d'effectuer une première distinction entre les structures additives et multiplicatives, ainsi que d'amorcer une compréhension de la notion de sous-collections équipotentes. Bien que E2 arrive plus difficilement à s'ajuster à la variété de tâches et que sa difficulté à traiter les grands nombres constitue un frein à la mise en place de stratégies et donc de connaissances plus évoluées, le jeu sur les valeurs des variables didactiques des situations a favorisé une adaptation progressive de ses stratégies ainsi que des occasions pour consolider certaines stratégies entraînant ainsi une avancée dans les structures multiplicatives. Par contre, l'usage de connaissances mises en place dans des contextes différents s'avère difficile. La variété de tâches visant l'utilisation des mêmes savoirs à différents types de problèmes s'est avérée moins efficace, entre autres, à maintenir un contrat didactique favorisant la dévolution des problèmes à l'élève. De même, les tâches nécessitant une rétroaction unique par l'orthopédagogue s'avèrent inefficaces et créent un stress affectant l'engagement de l'élève. Il est possible de croire que sa réponse à l'enseignement en classe ordinaire serait similaire.

4.6 Conclusion sur les situations expérimentées

Pour faire suite à l'analyse des conduites des élèves, nous terminons ce chapitre avec la mise en évidence de quelques considérations didactiques sur les situations et tâches expérimentées, en lien avec les difficultés vécues par les élèves.

4.6.1 Sur le rapport au jeu effectif et au jeu simulé sur la feuille de route

Nous formulons deux hypothèses sur les difficultés de E1, mais aussi de E2 à réinvestir les stratégies mises en œuvre dans le jeu effectif aux tâches qui portent sur la complétion d'une feuille de route. La première hypothèse concerne les

connaissances spécifiques qu'exige la feuille de route à compléter. En effet, alors que le jeu effectif pour lequel les relations numériques se déterminent par la séquence temporelle d'un tour de jeu, la feuille de route présente des relations numériques statiques à coordonner afin d'identifier deux des quatre données. Ainsi la coordination des dimensions ordinale et cardinale du jeu est plus exigeante sur la feuille de route que sur le jeu effectif, car il faut distinguer la fonction des différentes données sur la feuille de route : les nombres de départ et d'arrivée ont une dimension « ordinale », mais le nombre tiré a une valeur « cardinale » pour le déplacement, lequel est à déterminer en fonction de l'intervalle donné du jeu. La seconde hypothèse concerne le fait qu'en situation de jeu, les stratégies additives ont vite été abandonnées au profit des stratégies intermédiaire et multiplicative pour identifier le nombre de cases du déplacement. Pour identifier le nombre de la case d'arrivée (lorsque la case d'arrivée est vide), la stratégie additive était aussi abandonnée. Rappelons brièvement trois grandes stratégies qui précèdent la stratégie multiplicative pour identifier le nombre et la localisation de la case d'arrivée, partant du cas où il faut trouver la case d'arrivée d'un tableau d'intervalle de 5, partant de 40 et une somme de 15 obtenue sur les dés : 1) la première stratégie additive consiste à additionner la somme des dés au nombre de départ : 40 + 15 = 55; 2) la deuxième stratégie additive consiste en un comptage rythmique soutenu par un deuxième réseau et 3) la stratégie intermédiaire de surcomptage consiste à se déplacer de k cases, en comptant par intervalle de n jusqu'à la somme obtenue sur le dé, sur le tableau à partir du nombre de départ : 40 → 5 (45) → 10 (50) → 15 (55). Le nombre de la case d'arrivée est 55 ; 3) une stratégie multiplicative consiste à avancer de k cases partant de la case de départ; le nombre d'arrivée peut être obtenu par l'addition, mais aussi en tenant compte de l'intervalle et des nombres avoisinants : par exemple, 40 → 1 (45)→ 2 (50) → (?) ; si l'intervalle est de 5 et que 50 est le nombre précédant et/ou 60 est le nombre qui succède, la case d'arrivée est 55. En situation effective de jeu, les élèves ont vite abandonné la stratégie additive pour identifier le nombre de la case d'arrivée au profit d'une stratégie qui porte sur l'examen des nombres

avoisinants. Sur la tâche consistant à compléter la feuille de route, la stratégie additive n'est alors plus disponible et, ne disposant plus de la grille de jeu, les stratégies de surcomptage ou d'examen des nombres avoisinants ne sont plus possibles. Les élèves sont donc dans l'embarras et l'orthopédagogue va alors expliciter la stratégie additive avec la calculette. Cependant, pour la partie de l'exercice portant sur l'intervalle de 5, E1 ne va pas s'emparer de cette stratégie et va plutôt engager la stratégie de surcomptage qu'elle peut contrôler. Dans le second exercice portant sur l'intervalle de 7, elle va cependant utiliser la stratégie additive.

De même, bien que E2 ait des stratégies relativement efficaces au jeu des étoiles, ses stratégies aux tâches connexes du jeu des étoiles mettent bien en évidence que les connaissances sollicitées dans la feuille de route à compléter ne sont pas les mêmes que celles du jeu effectif. Le jeu effectif sur la grille présente une séquence temporelle (case de départ, lancer du dé, déplacement, etc.) soutenue par la grille numérique et la feuille de route qui permet de situer la fonction des différentes valeurs numériques impliquées dans le jeu et de distinguer, en particulier, celles qui relèvent du déplacement de celles qui relèvent des nombres sur les cases. La présentation simultanée des données, sur les feuilles de route à compléter ou encore la tâche « Qui joue à qui? », exige un niveau de coordination des connaissances qui n'est pas exigé par le jeu effectif.

4.6.2 Sur les situations des poissons et des poires et les énoncés de problèmes scalaires

La pige au hasard aux situations de poissons n'a pas permis une progression des valeurs des variables propice à l'apprentissage des élèves. Ainsi, aux problèmes des poissons, E2 a d'abord pigé la relation *2 fois moins que*, qui est particulièrement difficile. Ce problème a été suivi de deux relations additives, qu'elle a facilement réussies. Ainsi, la tâche ne lui a pas permis de s'approprier les structures multiplicatives ni de différencier les structures additives des structures multiplicatives.

E1, à l'opposé, a pigé une suite de problèmes mieux calibrée : *3 fois plus que*, suivi de *3 de moins que* et *2 fois plus que*. Les deux premiers problèmes l'ont conduite à amorcer la différenciation des relations additives et multiplicatives. Au troisième problème, elle a pu réinvestir la structure multiplicative avec succès.

Les problèmes des poires, comportant deux contraintes, ont rapidement mis en lumière la nécessité d'ordonnancer les problèmes en une progression orientée vers un objectif précis. Le réajustement dans l'action de l'orthopédagogue n'a évidemment pas été optimal, puisqu'une planification préalable aurait été requise. Ainsi, la contrainte du total des poires, qui était propice à la validation par l'élève de ses conduites, s'est avérée d'abord un obstacle, pour ensuite être utilisée comme telle. Cependant, ce que nous n'avions pas anticipé est l'appréhension de la notion de sous-collections équipotentes dans le traitement de ces énoncés.

À la lumière de nos données, les illustrations utilisées pourraient être bonifiées. Par exemple, la flèche entre les aquariums, qui pouvait être inversée pour ajuster l'illustration, ne s'est pas avérée un élément utile et ne fait qu'alourdir la compréhension de la consigne. De même, la possibilité d'enlever des poissons ou des poires complexifie le milieu didactique. La séquence pourrait démarrer avec un groupe d'énoncés de problèmes où seul l'ajout de poissons serait autorisé. Par exemple, un groupe pourrait être formé par la combinaison de *2 de plus que* (solution : 6 et 4), *2 fois plus que* (solution : 8 et 4) et *2 fois moins que* (solution : 4 et 8) à partir d'une illustration qui comporte 4 poissons de part et d'autre. Un deuxième groupe pourrait être composé des relations *3 de moins que* (solution : 9 et 12), *3 fois moins que* (solution : 4 et 12) et *2 fois moins que* (solution : 6 et 12), à partir d'une illustration comportant 12 poissons de part et d'autre où seul le retrait de poissons serait permis. L'absence de rétroaction par le milieu demeure un élément problématique lorsque cette situation est présentée, non pas sur un logiciel comme la version originale, mais sur papier (version utilisée pour cette recherche). Cependant,

une situation de communication pourrait être créée à partir de ce contexte, à la manière d'un jeu de commande qui favoriserait l'interaction entre les élèves. Une approche des relations scalaires au regard de la théorie des situations didactiques serait définitivement à investir.

Le même examen des nombres et de l'ordonnancement des problèmes est nécessaire pour les problèmes des poires. En effet, cet examen permettrait de maximiser son potentiel à faire appréhender la notion de sous-collections équipotentes liée aux expressions scalaires; cette notion étant favorisée par la coordination du nombre d'assiettes et du nombre de fruits. La contrainte sur le total des poires demeure un aspect intéressant permettant la validation par la tâche.

4.6.3 Sur les énoncés de problèmes de type isomorphismes de mesures et la propriété de la distributivité

Les séquences de problèmes de type isomorphismes de mesures et de distributivité se sont avérées productrices de connaissances. Ces problèmes sont typiques de la forme scolaire et ont favorisé un engagement plus rapide et soutenu de la part des élèves. La durée de l'intervention étant courte, plus de temps et plus de problèmes auraient été nécessaires pour favoriser la décontextualisation par l'emploi de variables relatives à la formulation des énoncés de problèmes (Sarrazy, 2002), et à l'articulation de ces énoncés avec des écritures mathématiques comme « modélisation » des relations. Ces énoncés visent en effet à décontextualiser les relations travaillées en situation du jeu des étoiles et à les recontextualiser pour favoriser leur abstraction. Le temps imparti à la séquence d'intervention a permis d'amorcer cette phase de l'intervention, mais pas de la compléter.

L'analyse des conduites des élèves et le retour sur les différentes tâches soulèvent plusieurs questions et préoccupations en ce qui concerne la notion de problèmes dans l'intervention orthopédagogique. Au chapitre suivant, l'examen de l'intervention,

effectuée dans le cadre de cette recherche, au regard des repères et balises de Giroux (2013a), apportera un regard plus détaché des élèves et des tâches elles-mêmes, et permettra d'identifier les enjeux prioritaires à considérer lors de la planification et du pilotage des séances orthopédagogiques pour favoriser la transformation des connaissances des élèves au moyen de problèmes mathématiques.

CHAPITRE V

ANALYSE DIDACTIQUE DE L'INTERVENTION RELATIVE AUX REPÈRES ET BALISES

L'analyse de l'intervention, au regard des repères et balises de Giroux (2013a), permet, d'une part, de repérer les épisodes de l'intervention qui permettent de juger si les repères et balises ont été mis en oeuvre dans l'intervention effective et, lorsqu'il y a lieu, leurs effets sur la transformation des connaissances et des savoirs des élèves. Cette analyse permet, d'autre part, d'offrir un regard détaché de l'apprenant lui-même et axé sur l'intervention dans sa globalité. En effet, au-delà des difficultés propres à l'élève, les conditions d'apprentissage relèvent de la responsabilité de l'orthopédagogue, qui doit installer un milieu didactique favorisant la progression de l'élève en difficulté. Cette analyse permet en particulier de relever l'importance de la planification du choix des situations et de leur ordonnancement ainsi que de dégager l'importance et les difficultés relatives au pilotage de l'intervention par le professionnel.

Pour atteindre le deuxième objectif de la présente recherche exploratoire, les repères et balises seront discutés successivement sur la base de l'expérimentation conduite auprès de chacun des élèves.

5.1 Nécessité d'élargir le caractère d'utilité des connaissances

La nécessité d'élargir le caractère d'utilité des connaissances vise à rendre opérantes des connaissances qui ne permettent pas de contrôler les situations. Les informations relevées au cours de l'entretien orthopédagogique sont utiles pour identifier ces connaissances. Trois balises sont énoncées par Giroux (2013a) pour faciliter

l'opérationnalisation de ce premier repère. Nous examinerons les conditions de mise en œuvre de chacune de ces balises.

Chez E1, l'intervention vise essentiellement l'élargissement du caractère d'utilité des structures multiplicatives en situation d'isomorphismes de mesures, en particulier pour les structures de types division regroupement et partage, mais aussi à intégrer les relations scalaires aux relations multiplicatives. Selon l'entretien orthopédagogique, les connaissances sur lesquelles l'intervention peut compter sont essentiellement les faits multiplicatifs ainsi que le lien entre addition répétée et multiplication, lien qui suppose une première dissociation des structures additives et multiplicatives.

Chez E2, l'intervention vise essentiellement à donner du sens à la multiplication en situation d'isomorphismes de mesures et de relations scalaires. Les connaissances des faits multiplicatifs et la réussite à quelques situations multiplicatives – interprétée comme une conduite visant à répondre à l'intention de l'enseignant plutôt qu'à la situation – sont celles sur lesquelles l'intervention peut tabler. En fait, E2 connaît des faits multiplicatifs, mais n'utilise pas ces connaissances pour contrôler les situations multiplicatives présentées dans l'entretien.

5.1.1 Favoriser la dévolution

Une première balise est le soutien de l'orthopédagogue pour que l'élève puisse mettre en œuvre une stratégie finalisée dans le cadre d'une situation à dimension adidactique. Pour soutenir l'élève, l'enseignant doit, d'une part, prévoir une situation à dimension didactique et, d'autre part, tenir compte des connaissances opératoires des élèves dans le choix des valeurs des variables didactiques. Il nous parait clair que le caractère adidactique des situations du jeu des étoiles, des poissons et des poires, mises en oeuvre dans le cadre de l'intervention, n'est pas optimal. En effet, les situations n'ont pas toujours permis aux élèves de juger de l'adéquation des connaissances investies au regard de la rétroaction du milieu didactique.

La situation du jeu des étoiles est sans doute celle qui favorise le plus l'interaction entre le joueur et le milieu didactique. De plus, le choix des valeurs des variables didactiques de cette situation a favorisé la transformation des connaissances des élèves et l'apprentissage des relations multiplicatives. Comme anticipé dans l'analyse à priori, le jeu a permis aux élèves d'utiliser d'abord le comptage rythmique, puis le surcomptage par intervalle, et finalement la stratégie optimale, multiplicative. La modélisation des stratégies attendues par l'orthopédagogue en situation effective n'a donc pas été nécessaire. Ainsi pour E1, le jeu des étoiles a permis de consolider la relation entre addition répétée et multiplication. Il lui a aussi permis de dégager les relations entre facteurs et produit, ce qui engage un raisonnement multiplicatif, et de donner ainsi un sens nouveau aux faits multiplicatifs. Pour E2, la dévolution du jeu des étoiles a également opéré et permis d'installer la relation entre l'addition répétée et la multiplication ainsi que d'amorcer une relation multiplicative entre deux nombres et leur produit, associés aux faits multiplicatifs mémorisés. Ainsi, la dévolution a permis à l'une et l'autre des élèves d'élargir la signification des faits multiplicatifs, en partie mémorisés.

Le pilotage de l'enseignant a quelquefois affecté la dévolution de la situation du jeu des étoiles. En effet, lors du pilotage, les interventions de l'orthopédagogue tendaient à forcer la « découverte » de la stratégie la plus évoluée, ce qui a conduit à une accélération de la situation restreignant ainsi l'exploitation de l'articulation entre les dimensions additive et multiplicative du jeu. C'est à tout le moins une hypothèse que nous faisons pour expliquer la difficulté rencontrée par les élèves à traiter les relations additives lors du traitement des énoncés de problèmes sur le jeu des étoiles.

La dévolution a moins opéré pour les situations des poissons et des poires. Cela est principalement causé par la perte de certaines propriétés didactiques de la situation originale informatisée, notamment la rétroaction, dans le processus d'adaptation en version « papier ». En effet, dans l'environnement informatique, une rétroaction était

fournie à l'élève après qu'il ait effectué ses choix; ce qui n'est pas possible dans l'environnement papier. C'est l'orthopédagogue qui a donc fourni la rétroaction et, bien sûr, souvent en y jumelant un enseignement des expressions à traiter. Certaines de ces interventions ont favorisé une évolution des connaissances. Par exemple, en permettant à E1 et E2 de saisir que les expressions « de plus » et « fois plus » n'étaient pas synonymes ou, autrement dit, devaient être dissociées.

La situation des poires a été plus riche que celle des poissons en raison de l'interprétation de la notion de sous-collections équipotentes qu'elle a suscitée dans le traitement des relations scalaires. Cette interprétation semble être favorisée par les illustrations dans lesquelles il est possible de faire trois types de comparaison[16] : 1) le nombre de fruits; 2) le nombre d'assiettes (qui a suggéré l'idée de sous-collections); 3) le nombre de fruits par assiette. Pour dynamiser la situation des poissons et des poires en version « papier », nous avons suggéré au chapitre précédent d'organiser une situation de communication. Une telle situation obligerait en quelque sorte les élèves à identifier le type de comparaison qu'ils effectuent et favoriserait par le jeu de rétroactions entre élèves de considérer plusieurs niveaux de comparaison scalaire.

Une autre raison pour laquelle la dévolution des situations des poissons et des poires a peu fonctionné est que les connaissances opératoires des élèves n'ont pas été prises en compte dans la progression des valeurs des variables didactiques. Le fait que les expressions étaient traitées au gré d'un tirage aléatoire n'a pas permis de contrôler les valeurs des variables ajustées aux connaissances opératoires de E1 et de E2. De plus, certains enchainements de relations de comparaison additives et scalaires ont suscité plus de confusion qu'autre chose, alors que d'autres se sont révélés, par hasard, judicieux. C'est le cas notamment, de l'enchainement des relations, *4 qui est 2 fois*

---

16 La comparaison est établie entre deux illustrations. Dans chacune des illustrations, il y a un certain nombre de fruits dans un certain nombre d'assiettes. Si l'illustration de gauche comporte 2 poires par assiette et 3 assiettes et que l'illustration de droite comporte 4 poires par assiette et 3 assiettes, la relation peut être exprimée par : 2 fois plus (de fruits par assiette). Ce serait le cas également s'il y avait à droite, 2 poires par assiette et 6 assiettes (2 fois plus d'assiettes) ou encore 1 assiette de 12 poires (2 fois plus de fruits au total).

moins que 8, et *8 qui est 2 fois plus que 4,* dans la séquence des poires pour E2. Cet enchainement a permis à E2 de prendre conscience que les deux expressions renvoient à une même relation numérique entre 4 et 8.

5.1.2 Proposer différents supports et différentes situations autour des mêmes connaissances visées

Dans le respect de cette balise, deux niveaux de « variétés des supports » ont été prévus à l'intervention. Au premier niveau, trois blocs de tâches ont été planifiés : la résolution de problèmes de types *isomorphismes de mesures* et *relations scalaires* ainsi que la mise en relation des notions de facteurs et de multiples. Ces blocs de tâches constituent une première diversité des situations au sein du champ conceptuel multiplicatif.

Le deuxième niveau s'actualise par la progression des situations pour chacun des blocs. C'est le cas de la séquence sur le jeu des étoiles. Le jeu lui-même constitue la situation d'action initiale au sein de laquelle la rétroaction est présente. Les différents supports autour du jeu sont utilisés pour faire progresser l'apprentissage et forment une collection de tâches connexes. Ainsi, les élèves passent d'une situation d'action au sens de Brousseau (1998), à partir des dés et de la grille de nombres, à des supports nécessitant l'abstraction des relations numériques additives et multiplicatives, tels que les feuilles de route à compléter et la tâche « Qui joue avec qui? ». Cependant, ces tâches connexes n'assurent plus la rétroaction. En effet, le contexte du jeu des étoiles permet, dans un premier temps, d'isoler le traitement des relations numériques additives (pour le déplacement) et multiplicatives (pour identifier le nombre de cases de déplacement), pour ensuite intégrer la nécessité de manipuler directement les relations numériques. L'apport du jeu concernant la différenciation des structures additives et multiplicatives s'est d'ailleurs avéré plus important que ce qui avait été anticipé dans l'analyse à priori et sans doute que la

variété des tâches autour de cette situation a participé à cet apprentissage chez les élèves.

Le passage de la situation d'action aux feuilles de route à compléter a été, comme nous l'avons vu au chapitre IV, difficile en raison du traitement simultané des données que sollicite la complétion des feuilles de route. L'ajout d'une tâche à la séquence, entre la situation d'action et les feuilles de route à compléter, serait à considérer. Nous pensons, en particulier à l'ajout de parties avec différents dés, sans grilles de nombres (ou planches de jeu), mais avec la feuille de route à compléter. Un tel milieu rendrait nécessaire la mise en lien du caractère ordinal (le nombre de la case d'arrivée) et cardinal (la valeur numérique du déplacement) du jeu, puisque les élèves ne pourraient pas se référer aux nombres inscrits sur la grille de jeu pour trouver la case d'arrivée. Le risque dans l'organisation de nombreuses tâches autour du même contexte est de rendre les élèves compétents dans ce contexte particulier sans que les connaissances acquises soient abstraites et reconnues utiles dans d'autres contextes. Ce cas de figure ne s'est pas présenté. En effet, comme soulevé au chapitre précédent, E1 sait adapter ses stratégies pour réussir les tâches connexes au jeu des étoiles alors que E2 ne réussit pas à abstraire et réutiliser les connaissances mobilisées en situation de jeu. Nous ne pensons pas que l'ajout de cette tâche favoriserait le développement de compétences trop locales.

À l'opposé de la séquence précédente, les contextes choisis pour travailler les relations scalaires ont été variés, la constante étant, bien sûr, les expressions scalaires. Ainsi, ce bloc de tâches a été propice à la différenciation des expressions additives (*de plus, de moins*) et multiplicatives (*fois plus, fois moins*), de même qu'à la prise de conscience qu'une même relation multiplicative peut s'exprimer dans un sens comme dans l'autre (*fois plus* et *fois moins*). Rappelons aussi que cette séquence a suscité la découverte de la notion de sous-collections équipotentes liée aux relations scalaires (*3 fois plus que 5 éléments, c'est 3 fois une sous-collection de 5 éléments*). L'aspect

relationnel dans le traitement de ces énoncés est donc nécessairement dominant. De plus, dans la partie des énoncés de problèmes scalaires classiques qui impliquent la relation multiplicative entre 6, 25 et 150 semble avoir favorisé la reconnaissance que la division (avec un quotient naturel sans reste) est l'inverse de la multiplication.

Cette expérimentation sur huit séances présente une diversité de supports et de situations, par contre, certaines tâches pourraient être bonifiées. C'est le cas notamment des situations sur les poissons et les poires, mais aussi sur l'articulation des tâches connexes aux situations principales. Pour la tâche « Qui joue avec qui », les premiers énoncés pourraient être un peu simplifiés pour favoriser la représentation de la situation. C'est le cas également des nombres dans les énoncés classiques de problèmes à un seul espace de mesure. S'il est d'intérêt d'exploiter selon différents angles la relation entre deux nombres et leur produit (6, 25 et 150), d'autres énoncés avec différents nombres seraient également intéressants à présenter.

5.1.3 Favoriser une institutionnalisation mesurée

Giroux (2013a) propose qu'une institutionnalisation « mesurée », c'est-à-dire qui favorise le « repère et l'abstraction de régularités mathématiques », soit aménagée en contexte d'adaptation scolaire. Le contexte orthopédagogique conduit facilement en une conception adaptée de l'institutionnalisation parce que, d'une part, l'intervention orthopédagogique relève souvent d'un contrat de reprise (Brousseau, 1995, dans Bloch et Salin, 2004) et, d'autre part, parce que les situations utilisées lors des interventions ne s'appuient pas toutes sur la TSD. Néanmoins, l'institutionnalisation revêt un caractère essentiel dans l'enseignement.

Cette balise a été peu actualisée dans notre séquence. Nous avions prévu que les occasions d'abstraire des régularités soient exploitées par l'orthopédagogue en cours de pilotage des situations. Cependant, il aurait fallu travailler davantage l'ensemble

des situations dans cette perspective de manière à ce qu'elles puissent générer des régularités que l'orthopédagogue pourrait alors exploiter.

Trois moments d'institutionnalisation sont, à tout le moins relevés, par l'analyse des interactions didactiques. Le premier concerne le jeu des étoiles et la prise de conscience que les multiples correspondent aux produits appris dans les tables de multiplication. L'orthopédagogue accompagne alors les élèves à identifier les déplacements sur la grille de jeu associés à chacun des multiples et dresse ainsi la table de multiplication du 5. Le deuxième moment a lieu pendant la réalisation des problèmes des poires, où la confrontation de deux problèmes comportant les mêmes nombres permet de nommer que *fois moins* est l'inverse de *fois plus*[17]. Le troisième moment a lieu lorsque les deux élèves ont utilisé des procédures différentes pour résoudre un problème de distributivité. L'orthopédagogue procède à l'écriture mathématique correspondant à chacune des procédures : (5X6)+(5X4)=50 et 5X(6+4)=50 et identifie la propriété de la distributivité associée à l'équivalence de ces écritures.

5.2 Maintenir un enjeu mathématique, soit l'interaction élève/milieu

Maintenir un enjeu mathématique est identifié par Giroux (2013a) comme étant nécessaire pour que la dévolution puisse opérer. Ce repère fait donc tandem avec le précédent et s'attache plus particulièrement à l'importance de maintenir l'engagement mathématique de l'élève, ou plus précisément, les interactions de l'élève avec le milieu. Ce repère serait tributaire de trois balises, soit la sensibilité aux savoirs mobilisés autres que ceux visés à priori par l'enseignant, l'allègement du milieu et l'adidacticité calibrée.

---

17 En contexte de relation directe dans ce cas-ci.

5.2.1 Sensibilité aux savoirs mobilisés autres que ceux visés à priori

Cette balise requiert de la souplesse de la part de l'orthopédagogue. Ainsi, il doit éviter de recentrer trop rapidement l'élève sur la tâche lorsque des savoirs mobilisés par l'élève ne sont pas ceux visés par la situation. La peur de laisser glisser l'élève vers une réflexion qui serait une perte de temps d'apprentissage est réelle chez les orthopédagogues, ce qui ne favorise pas la prise en compte de conduites mathématiques non attendues. Dans la présente intervention, très peu d'observations de la part de l'orthopédagogue sur la mobilisation de savoirs autres que ceux visés ont été réalisées. Il est difficile, après coup, de considérer à partir des vidéos si certaines connaissances injectées par l'élève auraient pu mener ailleurs. C'est une balise difficile à prendre en compte en contexte orthopédagogique puisque l'orthopédagogue est au plus près de l'interaction de l'élève avec le milieu et peut intervenir aussitôt qu'il juge que l'élève s'éloigne de la tâche en jeu.

En revanche, nous pouvons profiter du retour sur cette balise pour rappeler que la différenciation entre les structures additives et multiplicatives, notamment dans le jeu des étoiles, n'avait pas été prévu. Cette différenciation a été mise en évidence par le passage de la stratégie du surcomptage par intervalle à la stratégie multiplicative par le biais de la mise en relation du surcomptage par intervalle à l'addition répétée. À ce titre, cette dimension de l'apprentissage des structures multiplicatives peut être considérée comme un savoir mathématique mobilisé, bien que non prévu. Dans l'enseignement ordinaire, les deux champs conceptuels sont le plus souvent travaillés en vase clos; la différenciation entre les structures étant laissée à la charge de l'élève. Cette observation pourrait ouvrir sur un espace de recherche didactique intéressant à développer.

5.2.2 Allègement du milieu

Cette balise a pour finalité que le savoir visé ne soit pas enfoui sous la lourdeur du dispositif d'enseignement (les consignes longues, un contexte artificiel et inutile, etc.) Les situations que nous avons aménagées l'ont été en partie au regard de cette balise. C'est donc principalement dans la phase de planification que cette balise joue son rôle. Nous relevons cependant deux éléments qui nous semblent dignes d'attention à propos de cette balise.

Les interventions de l'orthopédagogue, réalisées sur le vif, ont sans doute, à l'occasion, alourdi le milieu didactique. Lorsque le caractère adidactique de la situation n'est pas puissant, l'orthopédagogue se voit contrainte de combler ce vide, sans toutefois que ces interventions produisent les effets attendus sur la transformation des connaissances. Bien qu'on ne puisse enseigner exclusivement par les situations adidactiques et considérant que l'élaboration et la mise en place de ces situations soient ardues, les situations permettant à l'élève de se valider par lui-même, ainsi que les situations typiques de communication nous semblent pertinentes à l'intervention orthopédagogique pour éviter, entre autres, la prise en charge du travail mathématique par l'orthopédagogue.

Une des conditions prévues pour l'allègement du milieu est celle de référer à une situation adidactique pour favoriser des interactions élève/milieu relativement simples à produire. Cependant pour maintenir l'engagement mathématique de l'élève, celui-ci doit bien saisir les règles du jeu non seulement pour interagir avec le milieu, mais également pour interpréter les rétroactions du milieu. Les déplacements sur une grille numérotée par intervalle sont difficiles à interpréter pour les élèves et E2 a, tout au long des parties, hésité sur les déplacements à effectuer (compter ou non la case initiale). De plus, l'utilité de la feuille de route à compléter s'est avérée difficile à justifier chez les élèves. En effet, la feuille de route sert à noter les points accumulés et l'utilité d'y inscrire les déplacements n'a pas été reconnue par les élèves. Donc, les

déplacements sur la grille, dont le contrôle fait appel aux connaissances visées, sont si différents des jeux de grille habituels qu'ils ont été difficiles à gérer par les élèves. Cette lourdeur a affecté en quelque sorte l'engagement des élèves. De plus, la feuille de route leur apparaît comme un artifice. La situation pourrait sans doute être revue pour favoriser des rétroactions et donc des interactions plus autonomes de l'élève avec le milieu. Un environnement informatique permettrait de générer sans doute de telles interactions.

Cependant, il convient également de considérer le glissement possible entre « jeu didactique » et « jeu de divertissement » qui peut surprendre certains élèves et affecter leur engagement. Rappelons que la situation adidactique s'inscrit elle-même dans une situation didactique. Elle est ainsi un « jeu » auquel se prête l'élève, sachant par ailleurs que ce jeu vise un apprentissage. La balise prévoit que le milieu ne doit pas être alourdi de consignes et de contextes qui camouflent les relations mathématiques, mais elle suppose aussi que la dimension « ludique » ne doit pas l'emporter sur la dimension didactique. Autrement dit, la dimension ludique du jeu ne doit pas agir comme un distracteur de la situation adidactique. Pour cela, l'enseignant doit s'assurer d'inscrire le processus de dévolution dans un cadre didactique. Le processus de dévolution à l'élève ne doit aucunement suggérer qu'il s'agit d'un divertissement. C'est une condition didactique importante qui nous semble liée à cette balise.

5.2.3 Adidacticité calibrée

La balise de l'adidacticité calibrée vise à favoriser des rétroactions rapides du milieu pour maintenir l'interaction élève/milieu et donc l'engagement mathématique de l'élève. Cette balise doit cependant s'opérationnaliser en tenant compte de conditions favorables à la dévolution : 1) il faut maintenir un espace de choix possibles; 2) l'élève doit pouvoir lire et interpréter la rétroaction fournie par le milieu.

Dans la situation du jeu des étoiles, l'espace de choix possibles nous semble relativement correct. L'élève peut avancer ou reculer et doit, pour le faire, prendre une décision sur le nombre de cases correspondant au déplacement. L'absence de rétroaction juste sur la stratégie engagée par les élèves est plus problématique, car elle ne leur permet pas, au sens de la TSD, d'ajuster leurs connaissances en fonction de la rétroaction. L'élève doit être proactif pour corriger le tir dans la mesure où un certain nombre d'informations peuvent être tirées pour être interprétées en tant que rétroaction. Par exemple, les nombres avoisinants peuvent agir comme rétroaction pour contrôler le nombre d'arrivée, ou encore, le comptage rythmique par intervalle doit aboutir à un nombre qui convient à la grille; s'il y a une erreur dans le comptage, l'élève peut arriver sur un nombre situé entre deux cases et constater qu'il y a nécessairement une erreur. Donc, la rétroaction dans le jeu des étoiles commande un certain nombre de connaissances et ne peut se faire que dans une interaction mathématique, pourrions-nous dire, avec le milieu.

La situation des poires, plus que celles des poissons, permet à l'élève de réguler sa conduite, sur la base de la rétroaction du fait de la contrainte sur la somme à respecter. L'espace de choix possibles est en théorie illimité, mais en pratique beaucoup plus circonscrit, dans la mesure où l'élève part de quantités déjà déterminées qu'il peut modifier à son gré, en faisant des essais, par exemple, jusqu'à l'atteinte de nombres, qui selon lui, respectent la relation scalaire imposée. Les élèves, choisissant des nombres d'un domaine numérique qu'ils contrôlent, peuvent alors se centrer davantage sur le calcul relationnel que sur le calcul numérique, ce qui favorise leur progression. L'orthopédagogue doit cependant jouer le rôle de « rétroacteur » et, encore davantage, dans le jeu des poissons. Cependant, cela n'est pas, selon notre expérience de ces situations, un élément qui est peu favorable à l'apprentissage en soi. C'est le calibrage de la dimension adidactique qui est difficile à réaliser pour que l'élève puisse maintenir ses interactions.

En somme, les deux repères et les balises qui les accompagnent sont l'objet d'une proposition d'étude par Giroux (2013a) et n'ont pas valeur de prescription. Ils s'inscrivent dans la recherche de conditions didactiques optimales pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en contexte d'adaptation scolaire et s'appuient sur l'idée que si les élèves identifiés en difficulté d'apprentissage sont en retard dans leur apprentissage par rapport à la norme, l'intervention didactique ne doit pas nécessairement se définir par rapport à des « manques de connaissances dont souffrirait l'élève ». La proposition est plutôt de viser à donner un plus grand pouvoir aux connaissances que possède l'élève par l'élargissement du caractère d'utilité de ses connaissances tout en s'assurant qu'il soit actif et engagé sur les plans cognitif et mathématique pour assumer l'activité mathématique nécessaire à l'apprentissage.

Nous avions anticipé que, considérant que la déclinaison des repères et des balises est un support théorique avant tout pour réfléchir à la dimension adidactique des situations en contexte d'adaptation scolaire, il serait difficile d'en discuter successivement sans aucune redite. Ils sont intimement liés les uns aux autres, comme en témoignent les renvois de thématiques d'une section à l'autre dans ce chapitre. Plus spécifiquement, la situation adidactique est intimement liée à la dévolution, qui elle-même est étroitement liée à l'institutionnalisation. C'est la raison pour laquelle nous avons beaucoup traité, dans ce chapitre, de la dimension adidactique de la situation, et plus précisément, de la dévolution de la tâche aux élèves, de la qualité de la rétroaction des situations proposées sur les conduites des élèves, de l'effet des interventions de l'orthopédagogue sur la dévolution, ainsi que des moments d'institutionnalisation avec, en toile de fond, les interactions didactiques analysées au chapitre précédent et les apprentissages dont elles ont été porteuses.

Au regard des repères et balises, il nous paraît que, pour assurer la dévolution, la planification des tâches et des situations en s'appuyant sur les informations tirées de

l'entretien orthopédagogique n'est pas suffisante. Tout le pilotage de l'intervention par l'orthopédagogue participe aux conditions didactiques qui agissent sur la dévolution (Houle, 2016). Cet aspect constitue une zone sensible de l'interaction didactique étant difficile à contrôler et à anticiper en contexte orthopédagogique, mais en grande partie déterminé par les tâches utilisées, la maîtrise par l'orthopédagogue non seulement de la tâche, mais aussi de ce qu'elle peut générer comme conduite mathématique chez l'élève. La difficulté à anticiper le déroulement des séances provient aussi des écarts entre les profils des élèves rencontrées. Dans notre séquence d'intervention, du fait que E1 évolue plus rapidement que E2, l'orthopédagogue a du mal à calibrer ses interventions pour qu'elles soient pertinentes sans pour autant amplifier le décalage entre E1 et E2. Cela affecte par moments, la dévolution des tâches auprès de E2.

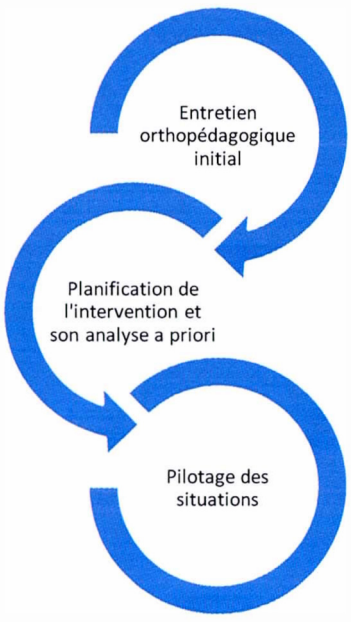
Ce qui n'est pas prévu par les repères et balises est l'impact des interactions entre élèves sur la dévolution. Cette interaction s'est avérée favorable à la dévolution et au support au pilotage par l'orthopédagogue. Lorsque les élèves travaillent en vase clos, notamment sur les problèmes des poissons et les premiers problèmes des poires, le pilotage des situations est ardu et l'engagement des élèves est limité. Lorsque l'orthopédagogue invite les élèves à travailler en commun, la situation mathématique est dynamisée; E2 contribue parfois à faire progresser E1. Ainsi, malgré les limites énoncées dans ce chapitre, les situations que nous avons proposées ont permis une progression des élèves. Cette progression a été plus marquée lorsque le travail mathématique était réalisé en interactions. La réalisation des tâches en sous-groupe permet d'amener les élèves à formuler et justifier leur solution de même qu'à la confronter à celle de l'autre.

Pour terminer, favoriser la dévolution (figure 5.1), dans l'intervention orthopédagogique, nécessite la coordination et l'engrenage de trois moments dans le travail orthopédagogique. L'entretien orthopédagogique initial permet de prendre en

considération les connaissances des élèves dans la planification des tâches et l'anticipation des conduites des élèves. Ces deux éléments permettent de créer des conditions favorables à un pilotage fluide des situations permettant de minimiser l'écart entre l'activité mathématique des élèves et celle de l'orthopédagogue. Autrement dit, ils permettent de minimiser la régulation des conduites par des séquences d'enseignement. Ainsi, l'orthopédagogue effectue une meilleure lecture des connaissances engagées par l'élève en cours d'intervention, ce qui augmente l'efficacité de celle-ci. C'est ce que nous tentons d'illustrer, à partir de notre expérience à la fois d'orthopédagogue et de chercheur, à la figure 5.1.

Figure 5.1

Favoriser la dévolution



CHAPITRE VI

CONCLUSION

La présente recherche s'attache à la résolution de problèmes dans le cadre de l'intervention orthopédagogique. Cette recherche provient d'un questionnement professionnel, en tant qu'orthopédagogue, sur l'attribution d'une capacité limitée à la résolution de problèmes mathématiques chez les élèves dits en difficulté. Dans la problématique, nous avons mis en évidence que la notion même de *difficultés à résoudre des problèmes* doit être interprétée d'abord à l'aune du Programme de formation de l'école québécoise (MELS, 2006) qui fait de la résolution de problèmes mathématiques l'enjeu principal de l'enseignement et de l'évaluation dans la discipline mathématique.

L'expression *situation-problème,* ne revêt ni la même ampleur ni la même complexité selon qu'il s'agisse de la compétence *Résoudre une situation-problème* ou de la compétence *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques.* De plus, suite à une lecture des textes associés à ces deux compétences sous l'angle de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) et de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990), nous avons fait l'hypothèse que l'expression *situation-problème* réfère implicitement et partiellement, d'une part, parfois au concept de situation adidactique de la théorie des situations didactiques et, d'autre part, parfois à la notion d'énoncé de problèmes telle qu'on la retrouve dans la théorie des champs conceptuels. C'est sur la base de ce double emprunt implicite que les objectifs de la recherche ont été formulés.

L'objectif général de cette recherche de type exploratoire vise à étudier l'usage de la situation adidactique et de la notion d'énoncés de problèmes en contexte

d'intervention orthopédagogique en mathématiques. Pour atteindre cet objectif, deux objectifs spécifiques ont été identifiés. Le premier vise à planifier et piloter une intervention orthopédagogique mettant en œuvre l'usage de la situation adidactique et des énoncés de problèmes et à en décrire les effets sur la transformation des connaissances d'élèves sur les structures multiplicatives, notamment, celles relatives à la résolution de problèmes de types isomorphismes de mesures et scalaires. Le second vise à prendre en compte dans l'élaboration de l'intervention les repères et balises décrits par Giroux (2013a) et à apprécier leur effet sur le contenu des interactions didactiques.

Le cadre théorique, par une recension d'écrits, montre que les recherches concernant la résolution de problèmes à énoncé en contexte scolaire s'inscrivent principalement dans le paradigme de la psychologie cognitive, et ce, dans la suite des travaux fondateurs de Kintsch et Greeno (1985) en résolution de problèmes. L'objectif poursuivi par ces recherches est principalement de rendre l'élève compétent dans l'activité de résolution de problèmes. Il semble ainsi que l'objectif soit rarement celui de l'apprentissage du contenu en jeu dans le problème. De plus, d'autres chercheurs, Fuchs *et al.*, (2003), montrent les limites d'une intervention centrée sur la cognition ou la métacognition et sur l'enseignement des stratégies de résolution de problèmes auprès des élèves présentant des difficultés.

La didactique des mathématiques offre une perspective tout à fait différente sur la résolution de problèmes du fait qu'elle en fait un moyen d'enseignement/apprentissage et non une fin en soi. En contexte d'adaptation scolaire, les recherches ont principalement dressé un portrait des difficultés rencontrées dans l'enseignement de la résolution de problèmes à énoncé et les perspectives d'intervention sont principalement celles de la psychologie cognitive en visant à agir sur la cognition et la métacognition. Nous avons donc opté, dans cette étude, pour l'investigation d'une approche didactique, centrée sur la spécificité et les

caractéristiques du savoir visé pour intervenir auprès des élèves dits en difficulté d'apprentissage en résolution de problèmes. Les repères et balises de Giroux (2013a) ont permis de fonder didactiquement notre intervention.

Le contenu mathématique visé par notre recherche est celui des structures multiplicatives. Nous appuyant sur la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1983, 1994a, 1994b), nous avons ciblé plus particulièrement les énoncés de structures *isomorphismes de mesures* et *un seul espace de mesure (scalaire)*. La recension des études menées dans le cadre théorique montre que la construction du champ des structures multiplicatives est un processus de longue durée qui s'amorce avec l'appropriation des relations de type isomorphismes de mesures. Cette appropriation permet un premier détachement des structures additives pour entrer dans le champ multiplicatif. La recension réalisée met également en évidence un certain nombre de variables à contrôler pour favoriser l'apprentissage. C'est le cas notamment des valeurs numériques des énoncés et de la position de l'inconnue dans la structure multiplicative dont relève l'énoncé.

Nous avons retenu un devis de recherche exploratoire et qualitatif qui s'appuie sur deux études de cas. Deux élèves, âgées de 11 ans, d'une classe ordinaire de cinquième année, ont donc participé à l'intervention. Toutes deux présentaient des échecs en mathématiques et n'avaient jamais bénéficié de soutien orthopédagogique dans cette discipline. Après un entretien orthopédagogique mené auprès de chacune, l'intervention s'est déroulée en présence des deux élèves, sur une durée de huit séances d'une heure chacune. Le tableau 6.1 présente la structure du contenu d'intervention. Une situation de référence à caractère adidactique pour travailler la structure multiplicative de type *isomorphismes de mesures* et une autre situation pour la structure de type *relation scalaire* ont été choisies. À chacune de ces situations, ont été jumelées des tâches connexes impliquant des énoncés de problèmes

classiques. L'intervention se termine avec des énoncés de problèmes faisant appel à la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Tableau 6.1
Structure du contenu de l'intervention

	Isomorphismes de mesures	**Un seul espace de mesure (relation scalaire)**
Situations de référence à dimension adidactique	Jeu des étoiles (version multiplicative)	Problèmes des poissons et des poires
Tâches connexes	Feuilles de route à compléter et «Qui joue avec qui?» Énoncés de problèmes impliquant le contexte du jeu des étoiles Énoncés de problèmes classiques d'isomorphismes de mesures Énoncés de problèmes sur la propriété de la distributivité par rapport à l'addition	Énoncés de problèmes classiques scalaires

Deux types de données ont été recueillis, soit des enregistrements vidéos et les traces « papier » des élèves. L'analyse des données s'est effectuée en deux temps. Dans un premier temps, l'analyse des conduites mathématiques des élèves et de leur progression a été effectuée. Cette analyse comporte également un regard didactique sur les différentes tâches proposées. Dans un deuxième temps, à la lumière des interactions didactiques auxquelles a donné lieu l'intervention, ont été mis en discussion au regard des repères et balises les tâches ainsi que le pilotage réalisé par l'orthopédagogue.

Les informations recueillies lors des entretiens initiaux montrent que les deux élèves ont des profils de connaissances légèrement différents sur les structures multiplicatives. Une différenciation des structures additives et multiplicatives est amorcée par E1, mais pour E2 les conduites ne montrent pas une réelle pénétration des structures multiplicatives. Les réussites locales de E2 semblent relever davantage d'une régulation de la conduite sur des indices contractuels. Toutes deux, par ailleurs, connaissent un certain nombre de faits multiplicatifs. L'intervention est donc construite principalement pour favoriser l'élargissement du caractère d'utilité des connaissances de E1 et E2 sur les structures multiplicatives.

6.1 Le rapport entre la transformation des connaissances des élèves et les situations de référence

Un regard sur les situations proposées a permis, en partie, de mieux comprendre les difficultés vécues par les élèves en cours d'intervention. La dimension adidactique des situations que nous avons choisies n'était pas assez puissante pour que les élèves puissent véritablement interagir de manière autonome avec le milieu. En effet, si le jeu des étoiles permet une certaine rétroaction sur les connaissances investies par les élèves et donc une certaine régulation de la stratégie par adaptation, les problèmes des poissons et des poires ne l'ont pas permis. Le pilotage de l'orthopédagogue a été nécessaire pour fournir cette rétroaction et pour donner quelques enseignements, notamment sur la distinction entre les expressions de comparaison additives et multiplicatives.

E2 s'est trouvée relativement insensible à ces interventions et c'est le jeu sur les valeurs des variables didactiques qui semble lui avoir permis de progresser, alors que E1 a été plus réceptive au contenu des interventions de l'orthopédagogue. Il est intéressant de noter que les connaissances plus importantes de E1 lui ont sans doute permis d'intégrer les propositions de l'orthopédagogue.

Par ailleurs, les tâches connexes au jeu des étoiles se sont avérées difficiles à réaliser par les élèves. Deux hypothèses concurrentes ont été émises. La première est que les tâches connexes sur papier exigent un niveau de coordination de connaissances que ne commande pas la temporalité d'une joute effective. La seconde est que les stratégies additives, ayant été vite abandonnées en situation effective, n'étaient pas disponibles lorsque requises lors des tâches connexes.

Les séquences de problèmes de type isomorphismes de mesures et de distributivité sont, pour leur part, productrices de connaissances, mais nécessitent plus de temps d'enseignement pour permettre de pleinement décontextualiser les relations travaillées à partir du jeu des étoiles et de les articuler avec des écritures mathématiques permettant de les modéliser.

Les interactions didactiques aux situations des poissons et des poires, particulièrement celles des poissons, ont mis en lumière l'importance d'organiser l'évolution des valeurs des variables didactiques et la rétroaction par la tâche à la situation des poires s'est avérée une valeur ajoutée. Cela nous conduit à proposer de repenser ces tâches pour qu'elles épousent davantage la dimension adidactique d'une situation telle que définie dans la TSD. Elles pourraient alors prendre la forme de situation de communication classique. De plus, les énoncés de problèmes scalaires faisant usage des mêmes nombres se sont avérés relativement efficaces, notamment pour comparer les opérations de multiplication et de division.

Au terme de l'intervention, les connaissances multiplicatives de E1 ont davantage progressé que celles de E2. Ainsi, E1 a élargi son contrôle sur la structure d'isomorphismes de mesures, réussissant à mettre en œuvre un calcul relationnel adéquat en situation de division partage et de division regroupement, qui est lui-même associé à l'opération de division. La notion de sous-collections équipotentes liée aux expressions scalaires s'acquiert de même que la mise en relation de la réversibilité des opérations de multiplication et de division. E2, pour sa part, amorce

la différenciation des structures additives et multiplicatives et la compréhension de la notion de sous-collections équipotentes.

Nous avons soutenu l'idée dans notre problématique que la *situation-problème* pouvait s'incarner dans une situation à caractère adidactique et dans des énoncés de problèmes. Notre recherche tend à montrer que la situation adidactique est viable en contexte orthopédagogique dans la mesure où le choix de la situation et de ses valeurs de variables doit être soigné pour susciter des interactions didactiques entre les élèves et entre les élèves et le milieu de manière à provoquer l'appropriation d'un contenu mathématique. Du point de vue des élèves, les énoncés de problèmes sont d'une facture plus classique que les situations adidactiques et les élèves y entrent plus facilement. Il nous parait que les situations des poissons et des poires présentent une forme alternative intéressante dans la mesure où leur habillage contextuel est léger et l'enjeu mathématique fort. Les élèves s'y engagent relativement bien. Si certains aménagements seraient nécessaires pour bonifier les interactions didactiques, il faut cependant préserver les conditions qui favorisent une centration sur les relations mathématiques que ces tâches permettent.

Enfin, un résultat important de notre recherche est que l'articulation de tâches connexes à une situation de référence bien ciblée et relativement centrée sur les relations mathématiques est une organisation didactique pertinente pour l'intervention orthopédagogique en mathématiques.

6.2 La recherche de la dévolution et du maintien de l'activité de l'élève par la prise en compte de repères dans la planification et le pilotage de la séquence

L'analyse de l'intervention dans sa globalité à partir des repères et balises de Giroux (2013a) a permis d'apprécier leur mise en œuvre et leur effet sur la transformation des connaissances des élèves. Le premier repère, soit *la nécessité d'élargir le*

caractère d'utilité des connaissances a pour fonction de rendre opérantes des connaissances qui se révèlent d'emploi limité. La première balise, *favoriser la dévolution*, concerne le soutien offert par l'orthopédagogue pour que l'élève finalise les stratégies qu'il amorce dans le cadre d'une situation à caractère adidactique. L'analyse des situations proposées nous a permis de préciser que les conditions favorisant la dévolution nécessitent que la planification de l'intervention s'appuie sur les informations tirées de l'entretien orthopédagogique initial et sur un choix de situations respectant les principes de la TSD. De plus, l'orthopédagogue doit avoir intégré un certain nombre d'informations de l'analyse à priori des situations choisies pour qu'il puisse, dans la mesure du possible, réguler ses interventions à l'activité mathématique de l'élève. Autrement dit, l'analyse a priori est un instrument puissant pour interpréter l'activité mathématique de l'élève et éviter des interventions dont l'élève ne peut s'emparer du fait qu'elles sont trop éloignées de sa propre activité.

La deuxième balise concerne l'usage de différents supports et différentes situations autour des mêmes connaissances visées. Cette balise a été facilement mise en œuvre et a contribué à la progression des élèves. La balise *favoriser une institutionnalisation mesurée* n'a pas été beaucoup exploitée dans notre intervention. La progression variable des élèves et le repérage sur le vif des occasions d'institutionnaliser en cours d'intervention s'avère difficile et nous amène à relever l'importance de prévoir l'institutionnalisation dans l'intervention, notamment par le choix de situations permettant de générer des régularités pouvant être institutionnalisées.

Le deuxième repère, *maintenir un enjeu mathématique*, soit maintenir l'interaction élève/milieu, nous parait, au terme de notre étude, toujours important à considérer pour que la dévolution opère. Trois balises permettent de l'opérationnaliser. La première, la sensibilité de l'orthopédagogue aux savoirs mobilisés autres que ceux visés à priori, s'est avérée difficile à opérationnaliser dans le cadre de cette recherche.

Il semble que dans l'intervention, l'orthopédagogue, étant en constante interaction avec les élèves, a eu tendance à beaucoup intervenir. On comprend que ces interventions étaient pour elle un moyen de maintenir une distance minimale entre son activité mathématique, qui implique la stratégie attendue, et celles des élèves. Par contre, dans l'action, elle a su identifier la valeur ajoutée du jeu des étoiles au regard de la différenciation des structures additives et multiplicatives. Cela nous amène à élargir cette balise en incluant également le besoin d'être sensible au potentiel didactique non anticipé des tâches proposées. En effet, malgré les analyses a priori réalisées et compte tenu de l'engagement mathématique des élèves et de la transformation de leurs connaissances en situation, des opportunités didactiques variées peuvent surgir à partir d'une même tâche.

Pour opérationnaliser la deuxième balise, *l'allègement du milieu* se réfère à la nécessité que l'enjeu mathématique ne soit pas étouffé par les consignes, le contexte, le matériel, etc. Notre étude montre que pour mettre en œuvre cette balise, il faut également considérer le potentiel de rétroaction du milieu de manière à ne pas alourdir la situation de rétroactions verbales. Il y a là un effet de boucle qui mériterait un examen plus attentif de ces repères et balises pour qu'ils soient mieux distingués. Nous pouvons ajouter que la situation des poires et des poissons se révèle très dépouillée sur le plan contextuel et semble favoriser l'engagement des élèves.

Finalement, la dernière balise concerne l'adidacticité calibrée. Celle-ci vise à prévoir des rétroactions rapides du milieu didactique compte tenu des conditions favorables à la dévolution, soit maintenir un espace de choix possibles et la possibilité pour l'élève de lire et interpréter la rétroaction fournie par le milieu. L'analyse didactique des situations expérimentées a relevé l'importance de l'adidacticité en contexte orthopédagogique. En effet, l'adidacticité permet de renouveler le rapport de l'élève aux mathématiques qui est affecté par les échecs vécus en classe. L'aspect du

calibrage est essentiel en situation de reconstruction d'un contrat didactique productif pour l'élève.

6.3 Limites et perspectives

Cette recherche comporte certaines limites, notamment au regard de l'interprétation des résultats obtenus. En effet, l'intervention expérimentée ne s'est pas avérée optimale dans la transformation des connaissances des élèves et la plupart des situations utilisées doivent être revues pour bonifier leur potentiel didactique. De plus, bien que l'analyse de la planification et du pilotage de l'intervention a permis d'observer certains effets des repères et balises de Giroux, et d'alimenter la réflexion sur la planification et le pilotage d'interventions orthopédagogiques, des recherches supplémentaires sont nécessaires afin de consolider les assises didactiques du recours aux problèmes mathématiques dans l'intervention orthopédagogique. Finalement, cette recherche étant axée sur les structures multiplicatives, l'ensemble des résultats ne peut, sans précaution, être repris pour d'autres domaines mathématiques.

Cette étude, axée sur l'intervention orthopédagogique, permet de soulever la pertinence de ce domaine de recherche. En effet, peu de recherches sur la façon d'intervenir en orthopédagogie des mathématiques ont été réalisées dans le champ de la didactique, ce qui a, en quelque sorte, déterminé la méthodologie exploratoire de cette recherche. La recherche en orthodidactique s'avère essentielle, notamment dans la perspective de bonifier la formation initiale des orthopédagogues, ainsi que leur formation continue.

ANNEXE A

ENTRETIEN ORTHOPÉDAGOGIQUE

ANALYSE À PRIORI

A1 : dissociation entre les structures additives et multiplicatives

Cet item contient sept énoncés de problèmes visant à observer la dissociation entre les structures additives et multiplicatives chez le sujet. On y retrouve des problèmes classiques d'isomorphismes de mesures, un produit cartésien et un problème à un seul espace de mesure. Il contient aussi des problèmes additifs. Il est demandé à l'élève de résoudre le problème à l'aide de la calculette. Cette consigne vient évacuer l'usage du dessin ou autre procédure non numérique. Toutefois, l'élève peut avoir recours aux additions et aux soustractions répétées.

a) Problème de transformation négative, recherche de l'état final

Jeanne a fabriqué 36 paires de boucles d'oreille, elle en vend 6. Combien de paires de boucles d'oreille a-t-elle?

Les nombres choisis pour cet énoncé de problèmes suscitent l'usage de la soustraction. Le mot « paires » pourrait toutefois amener l'élève à proposer une multiplication par 2 de 6 ou de 36.

b) Problème d'isomorphisme de mesures, multiplication

Les boites de jus sont vendues en paquets de 3 boites. Combien y a-t-il de boites de jus dans 3 paquets?

Le sujet peut poser une multiplication ou une addition répétée (réponses justes), ou une simple addition (réponse fausse).

c) Problème de produits de mesures, produit cartésien, multiplication

Un fabricant offre 4 modèles de voitures. Chaque modèle est disponible en trois couleurs différentes. Combien de choix différents offre le fabricant?

Le sujet peut poser une multiplication ou une addition répétée (réponses justes), ou une simple addition (réponse fausse).

d) Problème de transformation négative, recherche de l'état final

Marie a 25 ballons pour son anniversaire. Au cours de la fête, 5 ballons éclatent. Combien en reste-t-il?

Les nombres choisis suscitent l'usage de la soustraction. Ce problème est placé à cet endroit dans la séquence pour ne pas influencer ou guider l'élève à utiliser la multiplication. Il vise donc à contrer un effet de tâche possible.

e) Problème d'isomorphisme de mesures, division partage

Les bûcherons ont coupé 63 arbres dans une journée. Chacun des 7 bûcherons a coupé le même nombre d'arbres. Combien d'arbres chacun a-t-il coupés?

L'élève peut proposer une division ou une multiplication (7x9=63) (réponses justes). L'usage de la multiplication nécessite la connaissance des tables de multiplication ou un procédé par essais et erreurs. Il pourrait aussi soustraire ou additionner (réponses fausses). Cette structure de problème n'invite pas à l'addition répétée et à la soustraction répétée de 7, mais celle-ci pourrait aussi apparaitre pour épuiser le tout.

f) Problème d'isomorphisme de mesures, division regroupement

Carole a une boite de 350 perles. Elle fabrique des colliers de 28 perles chacun. Combien de colliers peut-elle fabriquer?

L'élève peut résoudre le problème à l'aide d'une division. Les nombres choisis peuvent occasionner une difficulté à l'élève. Ainsi, l'élève qui éprouve de la difficulté à identifier la division n'a pas accès à la multiplication par le recours aux tables de multiplication (28x?=350). De plus, la réponse comporte un reste. Le résultat trouvé à l'aide la calculette peut faire douter l'élève et l'amener à modifier son choix de calcul, mais aussi renseigner sur sa possibilité ou non à traiter le reste. Le sujet pourrait aussi soustraire ou additionner (réponses fausses). L'addition répétée jusqu'à l'atteinte du 350 ou la soustraction répétée jusqu'à épuisement du tout seraient aussi possibles, mais encore ici, le reste peut être difficile à traiter et amener l'élève à penser qu'il a commis une erreur de sens ou une erreur avec la calculette.

g) Problème d'isomorphisme de mesures, division regroupement

Nicolas range 40 photos dans un album. Il place 4 photos par page. Combien de pages utilisera-t-il?

L'élève peut proposer une division ou une multiplication (4x10=40) ou encore utiliser l'addition et la soustraction répétées (réponses justes). Il pourrait aussi soustraire ou additionner (réponses fausses). Les nombres choisis ici, pour lesquels l'élève peut recourir à ses connaissances en numération, peuvent faciliter l'accès à une réponse juste comparativement au problème précédent, qui comporte la même structure, mais dont le choix de nombres complexifie la tâche.

Pour ces problèmes, lorsque l'addition répétée ou la soustraction répétée sont utilisées, il est possible, par une relance, de vérifier si l'élève effectue le lien entre ces opérations additives et les opérations multiplicatives en leur demandant d'effectuer la tâche avec une seule opération.

A2 : isomorphisme de mesures, multiplication – version 3^{e} cycle

Sachant qu'une boite contient 24 crayons de couleur, on demande à l'élève de trouver combien de crayons il y a dans 3, 6, 9 et 10 boites. Cet item, faisant appel à la multiplication, peut être résolu à l'aide de l'algorithme traditionnel. Or, les élèves ne le maitrisent pas tous. Ils peuvent donc utiliser l'addition répétée et s'appuyer sur certaines propriétés de la multiplication, particulièrement l'associativité et la distributivité, de même que leurs connaissances en numération. Ainsi, le premier résultat peut être trouvé par l'addition répétée, qui fait appel à un raisonnement scalaire. Dans ce problème particulier, la grandeur des nombres en jeu ne permet pas de repérer des difficultés quant à la compréhension de la multiplication chez l'élève qui utilise l'addition répétée, puisque celle-ci permet de pallier l'absence ou la non-maîtrise de la technique opératoire. Ce procédé peut être utilisé pour trouver tous les résultats. La pertinence de cette tâche vise plutôt à vérifier l'usage des propriétés de la multiplication.

En effet, le premier résultat trouvé (3 x 24) peut être utilisé pour trouver les deuxième et troisième résultats demandés. Ainsi, dans 6 boites, il y aura deux fois plus de crayons. L'élève qui procède ainsi fait naturellement appel à l'associativité ($6x24=[(2x3)x24]=[2x(3x24)]=x$), par un raisonnement scalaire. Ce raisonnement, en tant que théorème-en-acte, ne donne pas nécessairement un sens à l'écriture correspondante. Il en est de même pour le 3^{e} résultat ($9x24=[(3x3)x24]=[3x(3x24)]=x$). L'élève qui ne connait pas les techniques opératoires en multiplication peut activer ce raisonnement scalaire à l'aide

d'additions répétées. Pour ce dernier sous-problème, il pourrait aussi faire appel à la distributivité et additionner les deux premiers résultats [(3x24)+(6x24)=9x24=x]. Finalement, pour le 4^{e} résultat, l'élève peut utiliser ses connaissances en numération et apposer directement un zéro à 24 pour multiplier 10x24. Ici, les relances serviront à vérifier si l'élève associe l'addition répétée à la multiplication et s'il peut construire un résultat à partir d'un autre en faisant appel aux propriétés de la multiplication, lorsqu'il y est invité.

Relances possibles :

Association addition répétée et multiplication : Comment as-tu fait pour trouver le nombre de crayons pour six boites? Pour neuf boites? Aurais-tu pu faire autrement, par un autre calcul?

Propriétés de la multiplication : Comment as-tu fait pour trouver le nombre de crayons pour six boites? Pour neuf boites? Comment pourrait-on faire pour trouver combien dans six boites à partir de ta réponse pour 3 boites? Comment pourrait-on faire pour trouver combien dans neuf boites à partir de tes réponses pour trois et six boites?

Numération : Et pour 10 boites, quel calcul serait plus rapide?

A3 : isomorphisme de mesures, multiplication à l'aide de matériel de manipulation

Dans cette tâche l'élève est amené à déposer un objet sur la table à 5 reprises. Sans aucune autre explication, à chaque fois que le sujet dépose un objet, l'expérimentateur en montre trois, puis les cache sous sa main. Par la suite, il est demandé à l'élève combien d'objets sont cachés sous la main de l'expérimentateur. Cette tâche ne requiert pas la connaissance ni l'usage de l'écriture A x B ou de l'écriture additive. Le problème se résout mentalement. Pour y parvenir, le sujet peut reconnaitre la multiplication et effectuer un rappel direct du résultat 3X5. S'il n'a pas mémorisé ce fait, il peut procéder par addition répétée. L'usage du dénombrement est

aussi possible. Ainsi l'élève peut se représenter mentalement la collection cachée et dénombrer ou encore faire un comptage rythmique.

A4 : isomorphismes de mesures, multiplication – problème à plusieurs données

Ce problème complexe fait appel à la multiplication dans le cas d'une relation de proportionnalité entre quantité et prix. Le sujet doit comparer les dépenses de trois personnes qui achètent des articles différents.

Pour réussir le problème, le sujet doit calculer la dépense de chacune des personnes et identifier le nom de celle qui a dépensé le plus et de celle qui a dépensé le moins. Le problème se résout à l'aide de trois multiplications ou d'additions répétées et de la comparaison de leur résultat. Les nombres en jeu favorisent le recours aux tables de multiplication plutôt qu'au calcul écrit. Une relance à l'élève qui utilise l'addition répétée peut permettre de mieux interpréter sa conduite : aurais-tu pu trouver le résultat avec un autre calcul?

Les élèves en difficulté peuvent aussi confondre le nombre d'articles achetés ou le prix des articles avec le montant de la dépense totale et répondre sans effectuer de calcul.

A5 : isomorphisme de mesures, division partage

Dans ce problème, il est demandé à l'élève de partager 104 billes entre 8 enfants. À la différence de l'item A1, pour lequel le sujet doit utiliser la calculette, ce problème vise à vérifier la façon dont il opère la division. La procédure optimale est la division. Si le sujet ne connait pas la technique opératoire, il peut procéder par soustraction répétée ou utiliser un procédé hybride alliant soustraction répétée et multiplication.

L'élève peut procéder par essai et erreur en cherchant le terme manquant de l'égalité lacunaire : 8 x x = 104. Des procédés de décompositions faisant appel aux propriétés de la multiplication et aux connaissances sur le nombre, reposant sur l'utilisation du groupement par 10 peuvent être mis en œuvre tel que : (8 x 10) + (8 x 3) = 8 x 13 = 104. D'autres procédés hybrides peuvent être utilisés pour réduire la lourdeur de l'addition répétée, tels qu'additionner des 16 (2 x 8). Dans l'éventualité où l'élève résout le problème à l'aide de l'addition répétée ou de la multiplication, une relance possible serait de lui demander s'il y a une autre façon de le résoudre. Cette relance permet de vérifier si l'élève reconnait la division dans le problème, alors que ses connaissances opératoires ne lui permettent pas de recourir à cette opération. Finalement, il peut également partager 104, en distribuant progressivement la quantité en dizaines d'éléments, soit en 8 sous-collections, puis le reste, les 24 unités restantes, jusqu'à épuisement du 104. Ces dernières procédures témoignent d'un traitement multiplicatif en acte sans que nécessairement l'élève rattache l'énoncé à une structure multiplicative.

A6 : lien entre structure multiplicative et numération (Dubois, Fénichel et Pauvert, 1993)

Dans ce problème, le sujet doit estimer le résultat d'une division partage. Les nombres choisis visent à activer les connaissances de l'élève sur les structures multiplicatives et la numération. Ainsi, il doit estimer le partage de 2500 bonbons entre 23 enfants. Il doit choisir sa réponse parmi 5 nombres et justifier celle-ci.

L'élève qui n'a pas compris la structure multiplicative impliquée en numération décimale aura du mal à proposer une réponse et à la justifier parce que les nombres sont grands et que le calcul n'est pas demandé.

Choix de réponse	
15	Ce nombre a été choisi pour repérer chez un élève la difficulté à juger de la grandeur d'un résultat. L'élève pourrait effectuer ce choix parce qu'il est plus facile d'opérer avec de petits nombres.
75	Ce nombre a été choisi pour repérer chez un élève la difficulté à juger de la grandeur d'un résultat. L'élève pourrait effectuer ce choix parce qu'il est plus facile d'opérer avec de beaux nombres.
95	Ce nombre vise à vérifier si l'élève reconnait que la réponse se situe près de 100, mais qu'il n'arrive pas à repérer que le résultat doit y être supérieur.
108	Bonne réponse
305	Ce nombre a été choisi pour repérer chez un élève la difficulté à juger de la grandeur d'un résultat. Ainsi, les grands nombres proposés dans l'énoncé de problème pourraient conduire un élève à faire ce choix.

A7 : isomorphisme de mesures, division regroupement

Dans ce problème, le sujet est invité à repérer les écritures permettant de trouver le nombre de boites de 6 nécessaires pour ranger 78 œufs. Un choix de 6 réponses est proposé. Ce choix vise à observer si le sujet, pour un même problème, admet l'équivalence entre la multiplication lacunaire et la division et reconnait l'équivalence de certaines écritures additives et multiplicatives. Pour résoudre la tâche, l'élève doit être en mesure de se représenter le problème.

78 ÷ 6	Réponse juste
78 – 6	L'élève confond le signe - avec le signe ÷ ou le sens de ces signes
78 + 6	L'élève ne reconnait pas la structure multiplicative du problème et ne peut anticiper le sens du résultat
6 x 78	L'élève reconnait la structure multiplicative, mais ne connait pas le signe représentant la division ou le sens de ces deux signes ou du résultat anticipé
6 x __ = 78	Réponse juste
6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6	Même s'il manque 6 pour faire 78, le sujet pourrait effectuer ce choix s'il commet une erreur de calcul ou verbaliser qu'il manque un 6 pour que ce choix soit adéquat. Ce calcul est complexe à gérer. Ce choix de réponse est en lien avec la différenciation des structures additives et multiplicatives.

A8 : un seul espace de mesure (inspiré de Vincent, 1992)

a) Dans ce problème, il est demandé au sujet le nombre de poissons contenus dans l'aquarium de Julie sachant qu'il y en a trois fois plus que dans l'aquarium de Sophie, qui en contient 9. Ce problème sollicite le raisonnement scalaire et permet de vérifier si l'élève associe les expressions *fois plus* à un raisonnement multiplicatif. Les aquariums sont illustrés sur la page du problème et servent à soutenir l'élève dans son raisonnement. Si l'élève les utilise pour dégager le résultat, on peut lui demander quel calcul correspond à son dessin. Ainsi, si l'élève confond *n fois plus* avec *n de plus*, il trouvera 12 (9+3). S'il comprend *n fois plus* comme étant *n fois de plus que*, il trouvera 36 (3x9+9). Il peut aussi trouver le bon résultat 27 (3x9). Ce sujet associe l'expression *fois plus* au raisonnement multiplicatif.

b) Pour ce problème, le sujet doit trouver le nombre de poissons dans l'aquarium de Pierre sachant qu'il en a 5 fois moins que Sophie qui en a 25. Ce problème

sollicite le raisonnement scalaire et permet de vérifier si l'élève associe les expressions *fois moins* à un raisonnement multiplicatif. La consigne impose le dessin de la solution. Par contre, l'orthopédagogue peut suggérer le calcul également. Ainsi, si l'élève confond *n fois moins* avec *n de moins*, il trouvera 20 (25-5). S'il comprend *n fois moins* comme étant *n fois de moins que*, il trouvera 0 (25÷5-5). Il peut aussi trouver le bon résultat 5 (25÷5). Ce sujet associe l'expression *fois moins* au raisonnement multiplicatif, soit à une division.

Il est attendu que le problème précédent est plus facilement réussi que celui-ci puisque les mots *fois plus* sont plus faciles à associer à la multiplication (faire un « fois »), que l'expression *fois moins* à la division.

c) Ici, le sujet doit trouver l'âge du frère de Laurent. Celui-ci a 12 ans et il est 4 fois plus âgé que l'autre. Ce problème fait appel à la relation inverse. Le sujet doit d'abord dégager le sens de la relation, donc comprendre que le frère de Laurent est plus jeune. L'élève qui centre son attention uniquement sur les mots et qui ne cherche par le sens de la relation risque d'utiliser une des procédures décrites au problème a ci-dessus. L'élève qui dégage le sens de la relation utilisera une des procédures décrites en b.

A9 : produit cartésien

Dans ce problème, le sujet doit trouver le nombre de chapeaux qu'il est possible de fabriquer étant donné qu'il y a 4 couleurs de chapeaux et 2 formes différentes. Pour le résoudre, le sujet peut représenter toutes les possibilités à l'aide d'un arbre ou d'un tableau. Il peut aussi multiplier, bien que le produit cartésien soit une structure complexe pour l'élève du primaire, tel que précisé précédemment, dans le cadre théorique.

B1 : commutativité et associativité

Cet item est tiré et adapté de Berthoud-Papandropoulou et Kilcher (1983) vise à mettre en acte les propriétés de commutativité et d'associativité à l'aide d'une situation contextualisée et d'un matériel physique. Le sujet doit préparer le repas du canard pour qu'il mange « la même chose » que le mouton sachant que le mouton mange 3 boulettes d'un coup alors que lui en mange 2 d'un coup. L'élève a accès à l'image du repas du mouton. Les questions grisées constituent des relances menant à une réponse chiffrée (combien) à la suite de la manipulation des jetons. Au problème a, la commutativité est sollicitée. L'intervenant, à l'aide de jetons et d'assiettes, doit préparer le repas du mouton : 2 assiettes de 3 boulettes et le sujet doit préparer « la même chose » pour le canard en respectant la contrainte de 2 boulettes d'un coup. Le repas du canard doit donc être composé de 3 assiettes de 2 boulettes. Une fois le travail réalisé par l'élève, l'intervenant peut demander l'écriture mathématique correspondant à la situation.

Au problème b, l'associativité est sollicitée. L'intervenant prépare la nourriture du mouton qui mange 2 repas de 4 assiettes de 3 boulettes chacune, toujours à l'aide de jetons et d'assiettes. Le sujet doit préparer la nourriture du canard en respectant, cette fois, 2 contraintes : le canard mange 2 boulettes d'un coup et sa nourriture doit composer 3 repas. Le sujet doit donc préparer 3 repas de 4 assiettes de 2 boulettes chacune. Une fois le travail réalisé par l'élève, l'intervenant peut demander l'écriture mathématique correspondant à la situation.

B2 : commutativité

Cette tâche est un énoncé de problème sur la commutativité. L'élève est invité à trouver la réponse sans calculer. La situation initiale propose 14 sacs de 15 bonbons

chacun. Le sujet doit recomposer la collection de bonbons pour qu'il y ait 15 sacs plutôt que 14. Celui-ci peut « prélever » un bonbon de chacun des sacs de départ, ce qui lui donnera 14 bonbons avec lesquels il composera le quinzième sac ou dégager rapidement la solution en utilisant sa connaissance de la commutativité.

Pour l'élève qui procède instinctivement en prélevant des bonbons des sacs, une relance permettra de vérifier s'il reconnait la commutativité dans la situation posée en lui demandant d'écrire ou de dire les écritures mathématiques modélisant les deux situations.

B3 : facteurs en contexte

La dernière tâche de l'entretien didactique est un énoncé de problème modélisant une situation de partage; elle vise à faire dégager les facteurs de 24. Le sujet doit trouver toutes les possibilités pour distribuer également 24 cartes à jouer, sans que le terme facteur soit utilisé. L'usage de vraies cartes à jouer peut soutenir le travail de l'élève. Le lien avec l'écriture mathématique est à valider lors des relances. Ainsi, il est possible que l'élève délaisse le matériel en cours de tâche en faisant le lien avec ses tables de multiplication ou en prenant conscience de la commutativité de la multiplication.

ANNEXE B

ENTRETIEN ORTHOPÉDAGOGIQUE

MATÉRIEL

Item A1

Résous les problèmes avec la calculette.

Énoncés de problème	**Réponses**
Jeanne a fabriqué 36 paires de boucles d'oreille, elle en vend 6. Combien de paires de boucles d'oreille a-t-elle?	
Les boites de jus sont vendues en paquets de 3 boites. Combien y a-t-il de boites de jus dans 3 paquets?	
Un fabricant offre 4 modèles de voitures. Chaque modèle est disponible en trois couleurs différentes. Combien de choix différents offre le fabricant?	
Marie a 25 ballons pour son anniversaire. Au cours de la fête, 5 ballons éclatent. Combien en reste-t-il?	
Les bûcherons ont coupé 63 arbres dans une journée. Chacun des 7 bûcherons a coupé le même nombre d'arbres. Combien d'arbres chacun a-t-il coupés?	
Carole a une boite de 350 perles. Elle fabrique des colliers de 28 perles chacun. Combien de colliers peut-elle fabriquer?	
Nicolas range 40 photos dans un album. Il place 4 photos par page. Combien de pages utilisera-t-il?	

Item A2

Dans une boite, il y a 24 crayons de couleur.

24 crayons de couleur

a) Combien de crayons il y a dans 3 boites? _____

b) Combien de crayons il y a dans 6 boites? _____

c) Combien de crayons il y a dans 9 boites? _____

d) Combien de crayons il y a dans 10 boites? _____

Item A3

Combien de jetons sont-ils cachés? _____

Item A4

Voici les achats faits par trois personnes :

Olivia : 5 revues
Xavier : 3 jouets
Adam : 8 gros suçons

Les prix sont les suivants :

Une revue : 4 $
Un jouet : 5 $
Un gros suçon : 2 $

Qui a dépensé le plus? _____
Qui a dépensé le moins? _____

Item A5

On veut partager 104 billes
entre 8 enfants.

Combien chaque enfant aura-t-il de billes? _____

Item A6

J'ai 2 500 bonbons à partager entre 23 enfants.

Peux-tu prévoir combien de bonbons va recevoir chaque enfant?

Entoure le nombre qui, d'après toi, convient et explique pourquoi tu l'as choisi.

15 75 95 108 305

Item A7

Il y a 78 œufs à placer dans des boites.
On place 6 œufs dans chacune des boites.

Combien de boites peut-on remplir?

Entoure le ou les calculs qui te permettent de trouver le résultat.

78 ÷ 6

78 - 6

78 + 6

6 x 78

6 x ____ = 78

6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6

Item A8a

Dans l'aquarium de Sophie, il y a 9 poissons.
Dans l'aquarium de Julie, il y en a trois fois plus.

Combien de poissons y a-t-il dans l'aquarium de Julie? _____

Sophie

Julie

Item A8b

Dans l'aquarium de Sophie, il y a 25 poissons.
Dessine les poissons de Sophie.

Dessine 5 fois moins de poissons dans l'aquarium de Pierre.

Sophie

Pierre

Combien de poissons y a-t-il dans l'aquarium de Pierre ? _____

Item A8c

Laurent a 12 ans.
Il est 4 fois plus âgé que son frère.

Quel âge a son frère ? _____

Item A9

Jacques veut fabriquer des chapeaux en papier. Il a du papier rouge, du papier bleu, du papier vert et du papier jaune. Il n'utilise qu'une seule couleur par chapeau. Il veut faire des chapeaux pointus et des chapeaux arrondis.

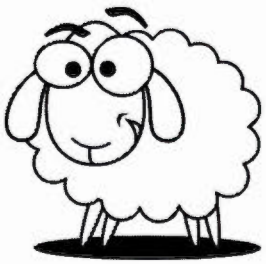
Combien de modèles de chapeaux différents Jacques peut-il fabriquer?

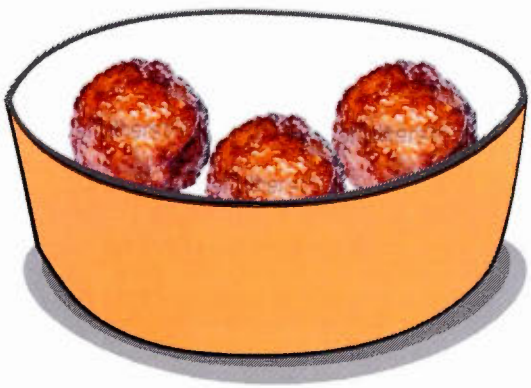
_____

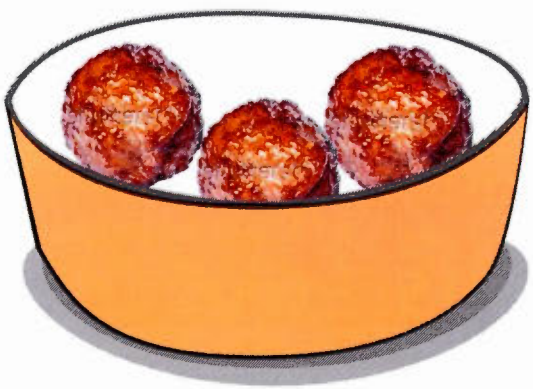
Item B1a

Le mouton mange 3 boulettes d'un coup.

Le canard mange 2 boulettes d'un coup.







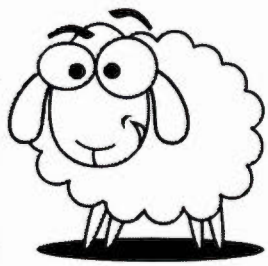
Peux-tu préparer autant, la même chose à manger, pour le canard?

Combien de fois le canard doit prendre 2 boulettes pour en manger la même chose que le mouton ?

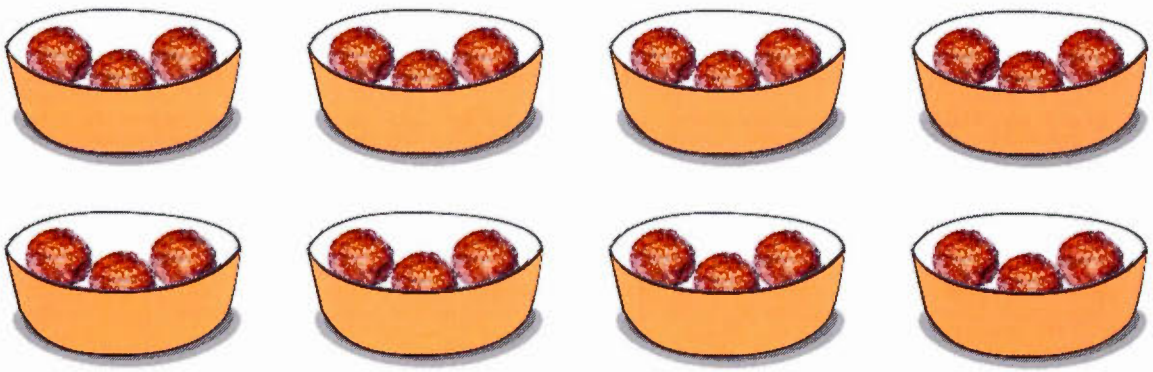
_____

N'oublie pas que le canard mange 2 boulettes d'un coup.

Item B1b



Le mouton mange 3 boulettes d'un coup.
Il prend 2 repas de 4 assiettes de 3 boulettes.



Peux-tu préparer autant, la même chose à manger, pour le canard, **en 3 repas**?

Si le canard mange la même chose que le mouton, mais en 3 repas, combien d'assiettes aura-t-il à chaque repas ? _____

N'oublie pas que le canard mange 2 boulettes d'un coup.

J'ai préparé des petits sacs de bonbons à offrir à mes invités pour les remercier d'être venus à mon anniversaire. J'ai préparé 14 sacs, et dans chacun, j'ai mis 15 bonbons. Mais, oups, il n'y avait pas 14 amis à ma fête, mais 15 amis!!! Vite! Vite! J'ai refait mes sacs. J'ai donc préparé 15 sacs avec les mêmes bonbons.

Sans calculer, peux-tu me dire combien de bonbons il y a maintenant dans chacun de mes sacs? Explique ta réponse.

Réponse : _____

Item B3

Il y a 24 cartes à jouer. Chaque joueur doit avoir le même nombre de cartes et toutes les cartes doivent être distribuées.

Combien de joueurs peuvent jouer et combien chacun aura-t-il de cartes ?
Voici un exemple :

- S'il y a 1 joueur, il aura 24 cartes.
- S'il y a ___ joueurs, chacun des joueurs aura ____ cartes.

Donne toutes les possibilités.

ANNEXE C

JEU DES ÉTOILES

Jeu des étoiles (Giroux, 2009) : les variables didactiques et les stratégies possibles

Plusieurs parties sont nécessaires pour amener l'élève à utiliser le raisonnement multiplicatif. Voici une brève analyse a priori mettant en valeur les différentes variables didactiques, et le jeu sur ces dernières, au regard des stratégies qu'elles sont susceptibles de générer.

Variables didactiques		
Variables	**Justification**	**Ordonnancement**
Intervalle	Plus l'intervalle est important, plus le calcul additif mental ou le surcomptage devient coûteux.	Intervalles de 2 Intervalles de 5 Intervalles de 3 Intervalles de 7
Nombre de cases et domaine numérique de la grille	Pour les grilles à intervalles de 2, 5 et 3, le nombre de départ de la grille est inférieur à 100. De plus, pour les grilles à intervalles de 2 et 3, le domaine numérique est moins étendu étant donné que les grilles comportent 50 cases. La grille par intervalle de 5 comporte 100 cases; le domaine numérique est donc plus étendu. Pour le tableau à intervalle de 7, le nombre de départ est beaucoup plus élevé et le domaine numérique est beaucoup plus étendu. Ces variables, conjointement à la précédente, viennent complexifier le travail de déplacement dans la grille, cela rend nécessaire une évolution dans les stratégies utilisées, pour en arriver à un traitement reposant sur les relations entre facteurs et multiples.	Tableau intervalle de 2 : Nombre de cases : 50 Domaine numérique : 60 à 158 Tableau intervalle de 5 : Nombre de cases : 100 Domaine numérique : 50 à 545 Tableau intervalle de 3 : Nombre de cases : 50 Domaine numérique : 51 à 198 Tableau intervalle de 7 : Nombre de cases : 100 Domaine numérique : 707 à 1400

Variables didactiques		
Variables	**Justification**	**Ordonnancement**
Nombre de dés	L'emploi d'un seul dé permet de travailler la relation entre facteur et multiple. L'emploi de deux dés permet de solliciter la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition.	1 dé 2 dés
Multiples sur les dés	Les nombres sur les dés sont les 6 premiers multiples de l'intervalle entre les nombres de la grille. Ils correspondent au déplacement à faire dans la suite numérique soit vers l'avant soit vers l'arrière. Par exemple, la face d'un dé identifiée 10 pour un jeu sur une grille de 2 signifie que l'on doit se déplacer de 5 cases (2x5=10). Si le nombre sur la case de départ est 66, celui de la case d'arrivée sera 76, et correspond à un déplacement de 5 cases.	6 premiers multiples des intervalles choisis : Tableau intervalle de 2 : 2-4-6-8-10-12 Tableau intervalle de 5 : 5-10-15-20-25-30 Tableau intervalle de 3 : 3-6-9-12-15-18 Tableau intervalle de 7 : 7-14-21-28-35-42

Les valeurs des variables, au cours des premières parties, visent à ce que les élèves se familiarisent avec les règles du jeu. La stratégie additive sera alors privilégiée. Il suffit d'additionner le nombre de départ à celui obtenu sur l'unique dé pour identifier une case d'arrivée selon un déplacement avant. Pour y parvenir, les joueurs doivent cependant identifier l'intervalle sur lequel est construite la grille (différent de 1). Les joueurs ont aussi la possibilité de reculer pour tenter de trouver un déplacement plus avantageux (plus de points).

La stratégie la plus élémentaire consiste à utiliser des stratégies additives. Pour prévoir la case d'arrivée selon un déplacement avant, il faut additionner les nombres correspondant à la case de départ et au nombre obtenu sur le dé. Pour prévoir la case

d'arrivée selon un déplacement arrière, il faut soustraire le nombre obtenu sur le dé de la case de départ. En plus d'une certaine lourdeur sur le plan des calculs à effectuer, cette stratégie est difficile à gérer si le nombre d'arrivée (en reculant ou en avançant) n'est pas inscrit sur la grille. Certains repères visibles, par exemple les nombres des colonnes qui comportent un même chiffre aux unités, sont alors utiles. Il est aussi possible d'ajouter ou de soustraire par un comptage rythmique. Par exemple, sur une grille de 3, si le nombre tiré est 9 et que la case de départ est 171, le sujet peut compter **171**-172-173-**174**-175-176-**177**-178-179-**180**. La soustraction se fera par comptage à rebours. L'utilisation de cette stratégie additive nécessite l'identification de l'intervalle.

La stratégie intermédiaire consiste à avancer ou à reculer dans le tableau en surcomptant en rappelant une suite des multiples, sans se préoccuper des nombres inscrits sur la grille. Par exemple, si, sur un tableau d'intervalle de 5, le nombre tiré sur le dé est 25 et le nombre de départ est 275, un déplacement avant peut être réalisé ainsi : **5** (case 280), **10** (case 285), **15** (case 290), **20** (case 295), **25** (case 300). On peut se déplacer par l'arrière en procédant de la même manière en partant de 275. Cette stratégie devient laborieuse sur une grille d'intervalle de 7. Pour compléter la feuille de route, le calcul additif reste nécessaire pour identifier la case d'arrivée si le nombre n'y est pas inscrit. Le sujet peut alors utiliser les indices de la grille pour trouver le nombre d'arrivée à inscrire sur sa feuille de route sans avoir besoin d'additionner ou de soustraire le(les) nombre(s) inscrit(s) sur le(les) dé(s).

La stratégie optimale est celle qui engage les connaissances sur la relation multiplicative entre le multiple inscrit sur le dé (k x n) et l'intervalle (n), soit les tables de multiplication. Le déplacement dans le tableau sera alors contrôlé par l'identification du facteur k. À cette étape, les sujets peuvent verbaliser leur raisonnement. Par exemple, si le joueur obtient 42 et qu'il joue sur une grille par

intervalle de 7, il peut affirmer : 6X7=42, je dois donc me déplacer de 6 cases. Le contrôle de la suite numérique du tableau devient non nécessaire pour jouer. Encore ici, le sujet peut alors utiliser les indices de la grille pour trouver le nombre d'arrivée à inscrire sur sa feuille de route. Cette opération est totalement détachée du choix du déplacement.

Jeu des étoiles : règles du jeu et animation par l'intervenant

Les indications ci-dessous n'ont pas été modifiées du document original de l'auteur.

But du jeu : Chaque équipe doit tenter d'accumuler le plus de points possible. L'équipe qui gagne est celle qui a accumulé le plus de points durant le temps déterminé pour jouer une partie.

Équipes : Six équipes de 2 ou 3 joueurs

Matériel nécessaire :

- Tableaux de nombres d'intervalles 2, 3, 5, 6, 7, 8
- 6 dés dont les faces correspondent aux 6 premiers multiples de l'intervalle en jeu : (2, 4, 6, 8, 10, 12) ; (3, 6, 9, 12, 15, 18) ; (5, 10, 15, 20, 25, 30) ; (6, 12, 18, 24, 30, 36) ; (7, 14, 21, 28, 35, 42) ; (8, 16, 24, 32, 40, 48)
- Une feuille de route par équipe
- 6 pions (1 par équipe)
- Un crayon effaçable par équipe (pour écrire les nombres manquants sur le tableau)

Déroulement de la partie :

A) Préparation

L'enseignante écrit au tableau la valeur de chaque couleur d'étoile : les étoiles rouges valent 3 points, les étoiles jaunes valent 2 points et les étoiles bleues valent 1 point.

L'enseignante distribue à chaque équipe : un tableau de nombres, le dé qui lui correspond, un pion et une feuille de route.

L'enseignante explique le jeu aux élèves. Pour ce faire, elle peut donner un exemple (voir ci-dessous), mais elle ne doit pas verbaliser comment elle a avancé ou reculé, seulement déplacer son pion sur le tableau et faire un choix (c'est important, parce qu'il ne faut pas guider les élèves vers la stratégie optimale).

Exemple avec le tableau d'intervalle 2 :

« Le nombre de départ est 108. Le nombre tiré sur le dé est 4. Je dois choisir si je me déplacerai en avançant au nombre 112 (non inscrit sur le tableau) ou en reculant au nombre 104. Si je choisis d'avancer, j'aurai une étoile rouge (3 points). Si je choisis de reculer, je n'aurai pas d'étoile. Ensuite, je dois remplir la feuille de route de mon équipe. Je dois toujours écrire sur quelle case j'arrive. Aussi, s'il n'y a pas de nombre écrit dans la case, je l'écris sur le tableau avec le crayon effaçable. »

B) Début du jeu

Chaque équipe place le pion sur le nombre du tableau qui est le départ (ce nombre est indiqué sur chaque tableau).

Le premier joueur de chaque équipe lance un dé. Il doit alors décider s'il avancera ou s'il reculera du nombre indiqué par le dé. Sa décision sera fondée sur la possibilité d'accumuler le plus de points possible (étoiles).

Suite à sa décision, le premier joueur doit déplacer le pion sur sa case d'arrivée.

Le premier joueur complète sa feuille de route. Il doit indiquer : son nombre de départ, le nombre tiré sur le dé, le nombre où il arrive après avoir avancé ou reculé, de combien de cases il s'est déplacé et le nombre de points accumulés (dans la case « Étoiles »).

C) Déroulement du jeu

Le deuxième joueur de l'équipe doit procéder exactement de la même façon. Par contre, sa case de départ est la case d'arrivée du joueur précédent.

La partie se continue de la même manière.

D) Fin de la partie

La partie se termine quand la feuille de route est complétée. Chaque équipe additionne le nombre de points accumulés durant la partie. L'équipe gagnante est celle qui a le plus de points.

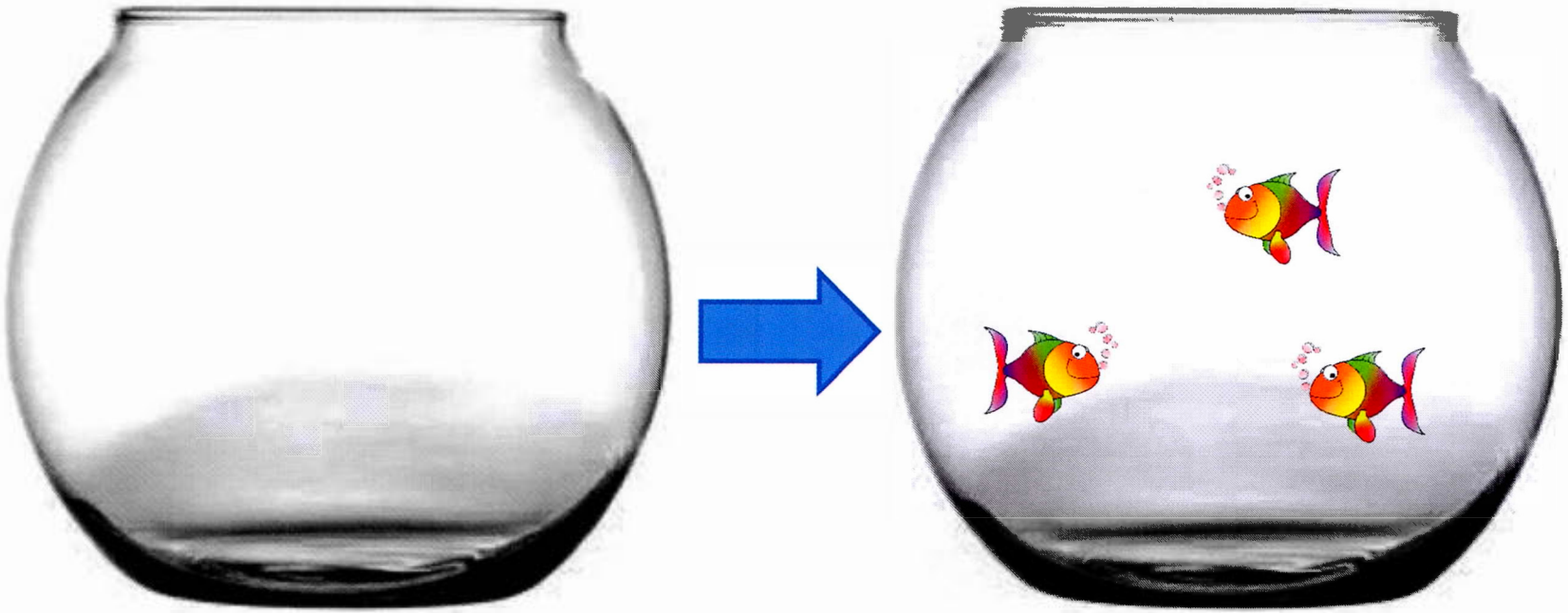
Quand les élèves utilisent la relation facteur/multiple pour jouer plus rapidement, il est possible de jouer avec deux dés. Chaque équipe possèdera donc deux dés identiques qui seront les 6 premiers multiples de l'intervalle du tableau qui leur est attribué. L'emploi des deux dés permettra le recours à la distributivité pour contrôler le déplacement provenant de leur somme.

ANNEXE D

PROBLÈMES DES POISSONS

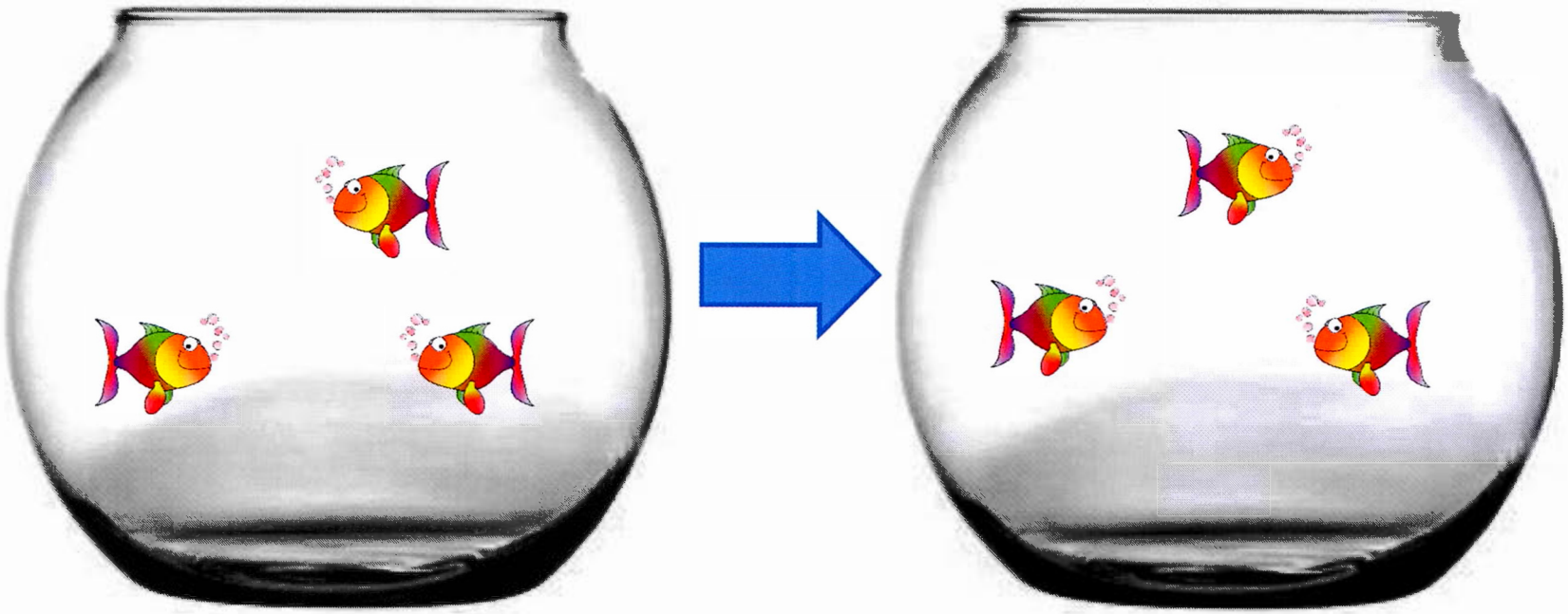
AUTANT QUE

Contrainte : un aquarium ne peut pas contenir plus de 9 poissons



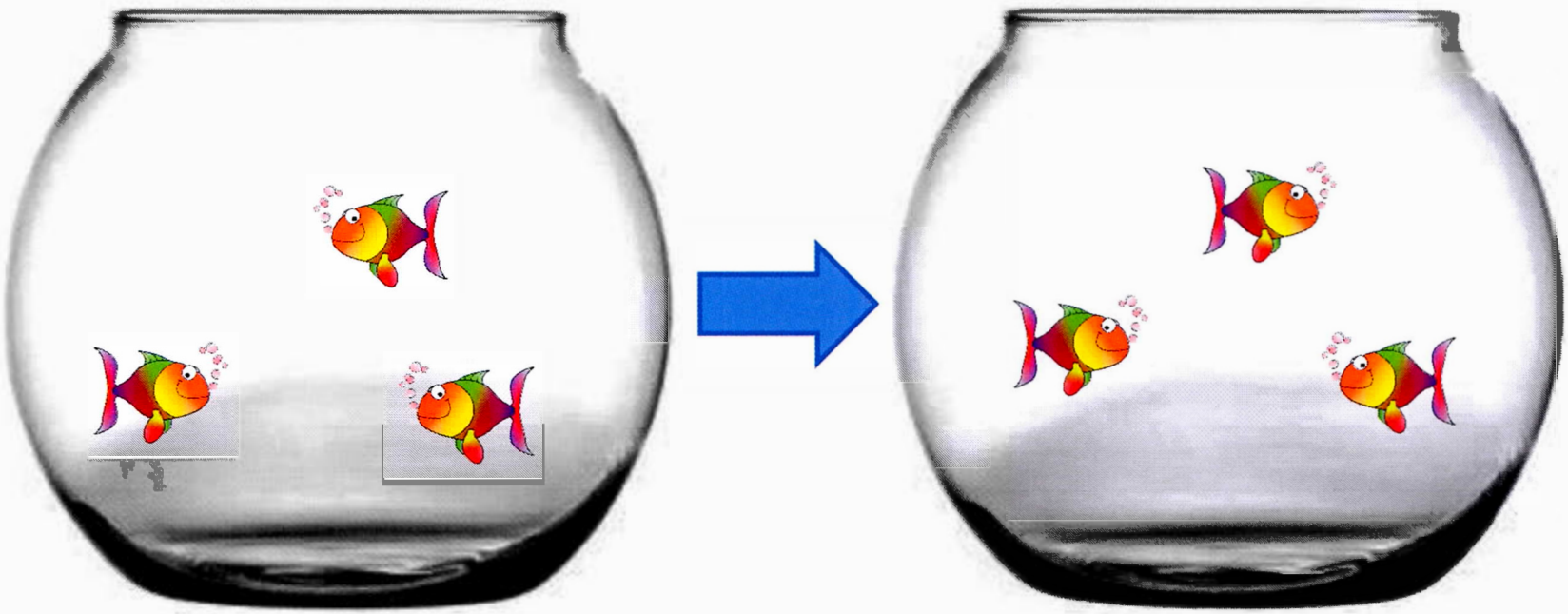
3 DE PLUS QUE

Contrainte : un aquarium ne peut pas contenir plus de 9 poissons



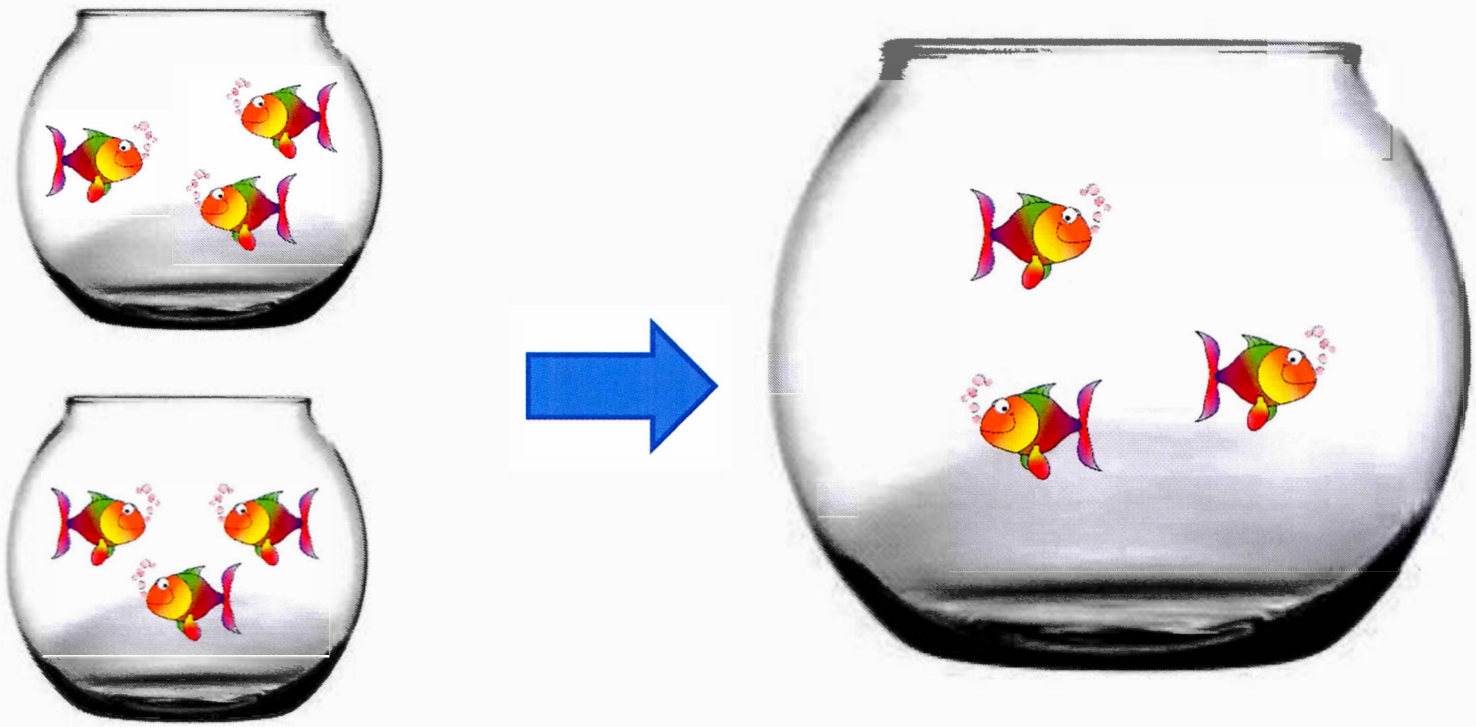
2 FOIS PLUS QUE

Contrainte : un aquarium ne peut pas contenir plus de 9 poissons



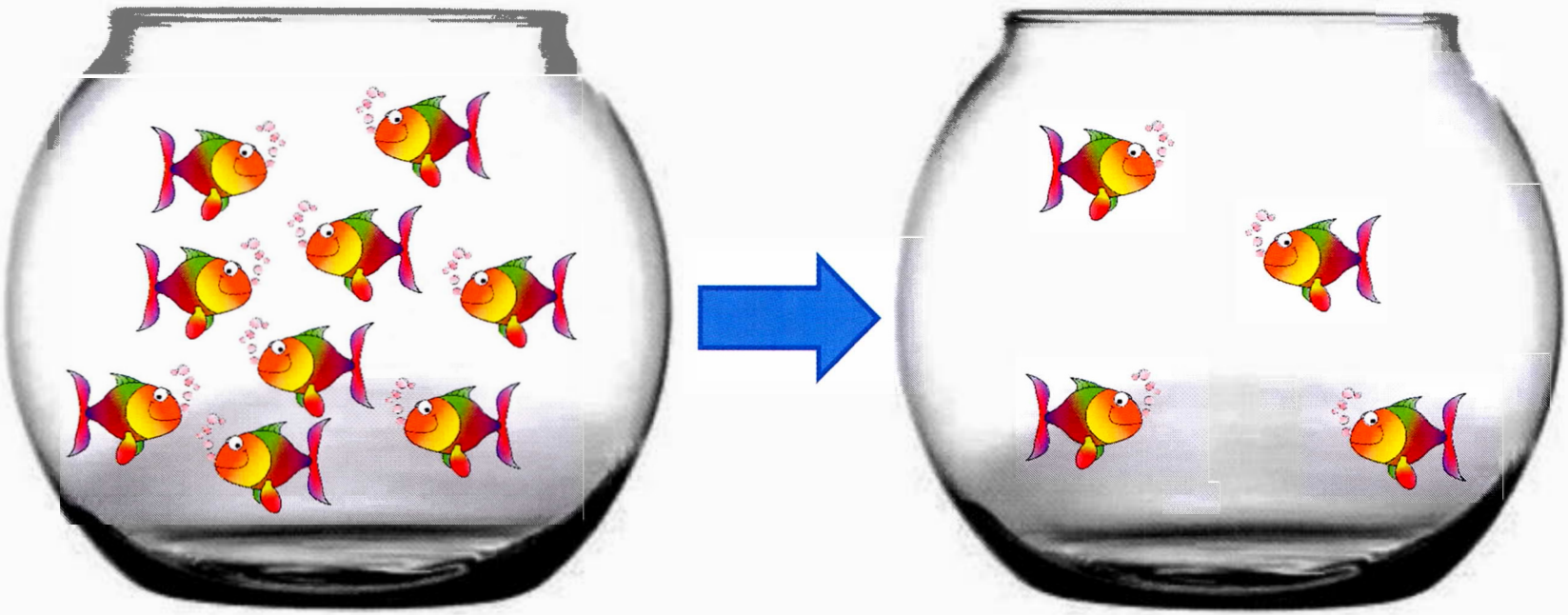
3 FOIS PLUS QUE

Contrainte : un aquarium ne peut pas contenir plus de 9 poissons



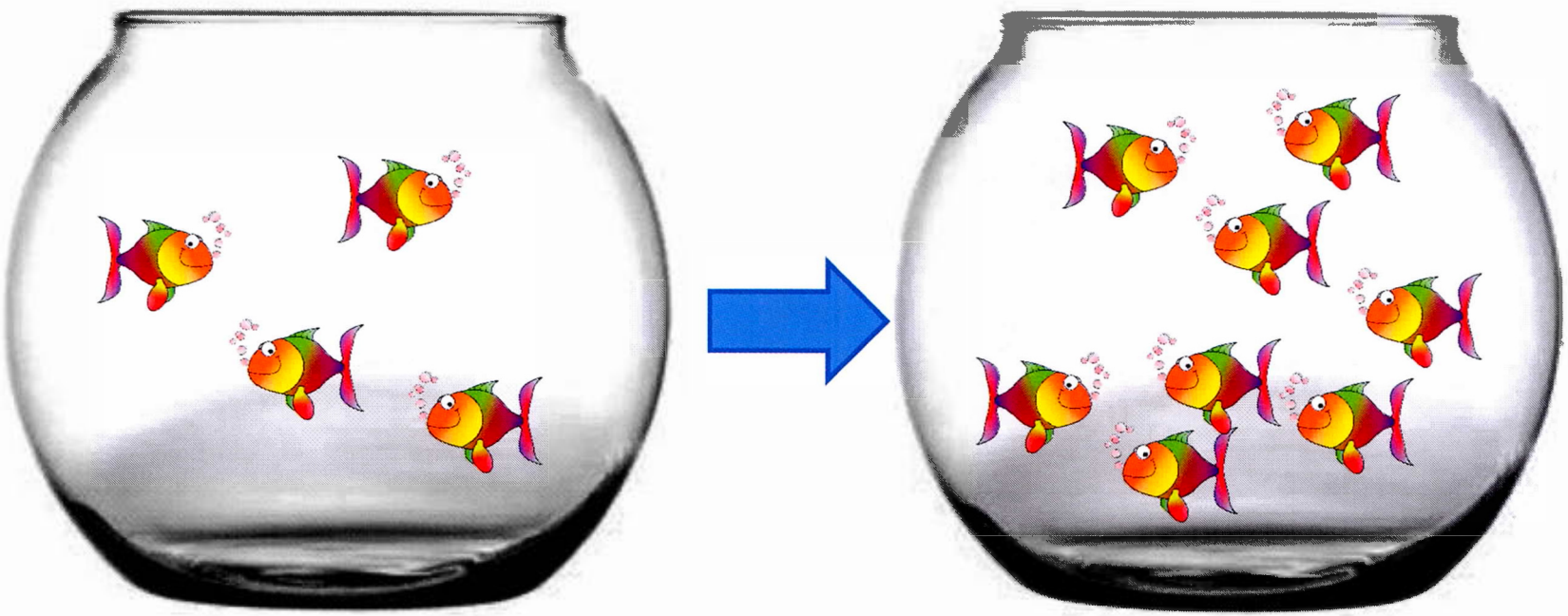
4 DE MOINS QUE

Contrainte : un aquarium ne peut pas contenir plus de 9 poissons



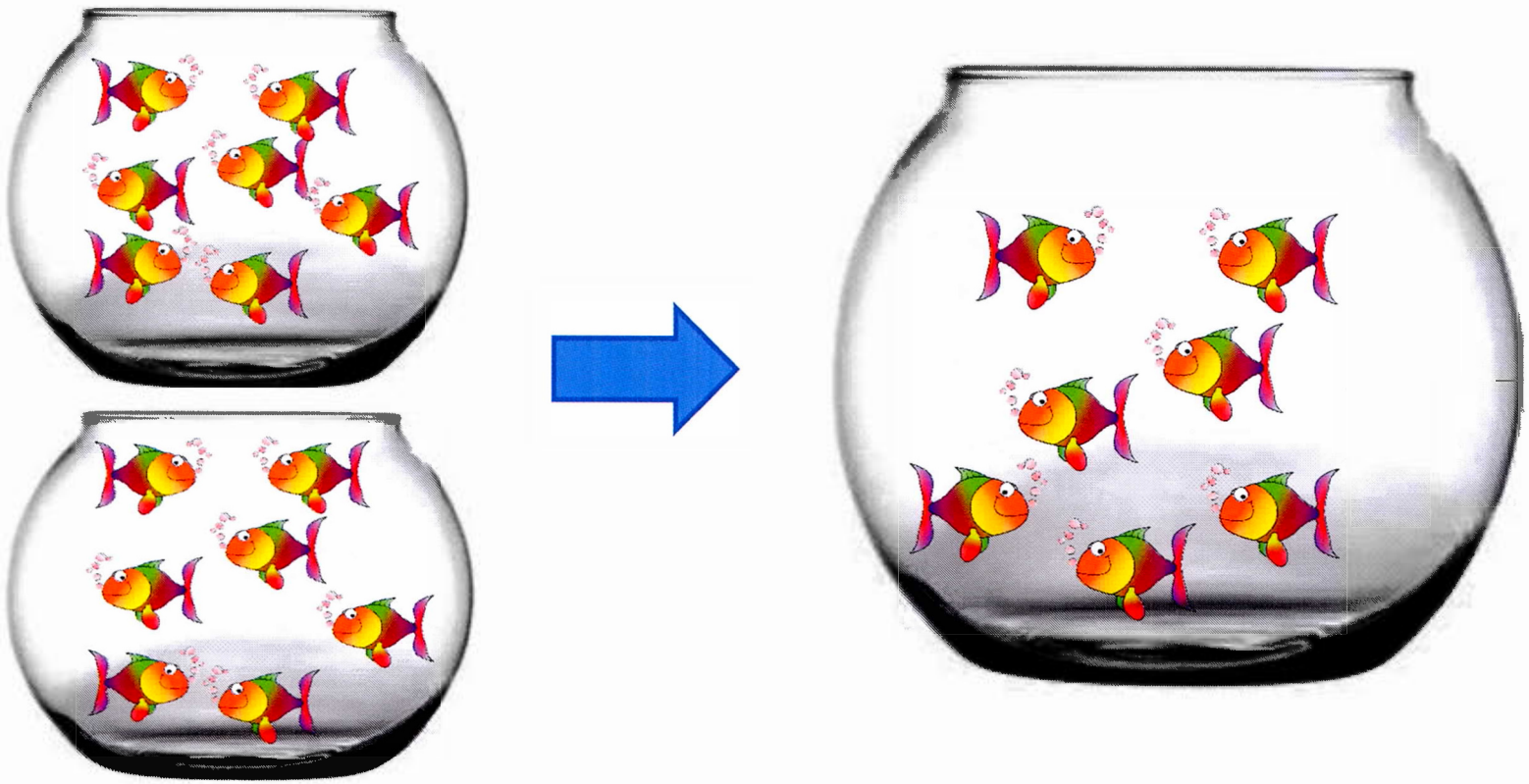
2 FOIS MOINS QUE

Contrainte : un aquarium ne peut pas contenir plus de 9 poissons



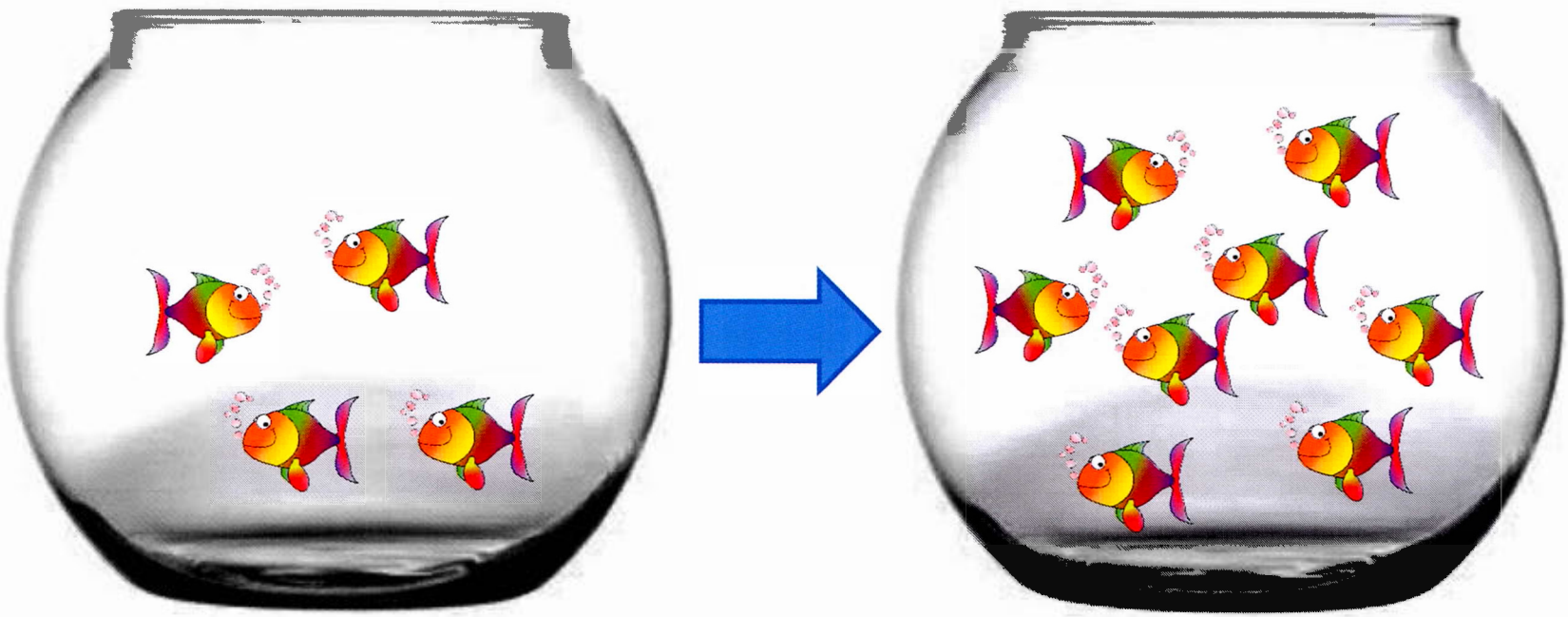
2 FOIS MOINS QUE

Contrainte : un aquarium ne peut pas contenir plus de 9 poissons

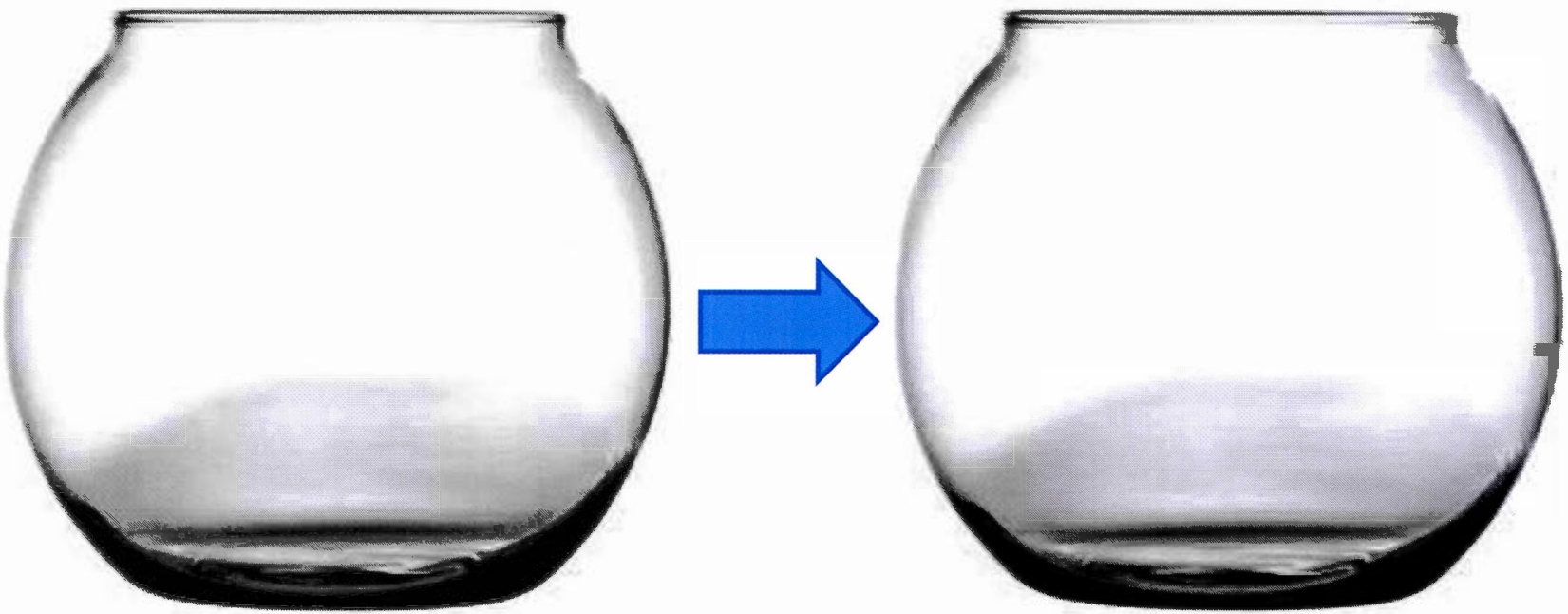


3 DE MOINS QUE

Contrainte : un aquarium ne peut pas contenir plus de 9 poissons

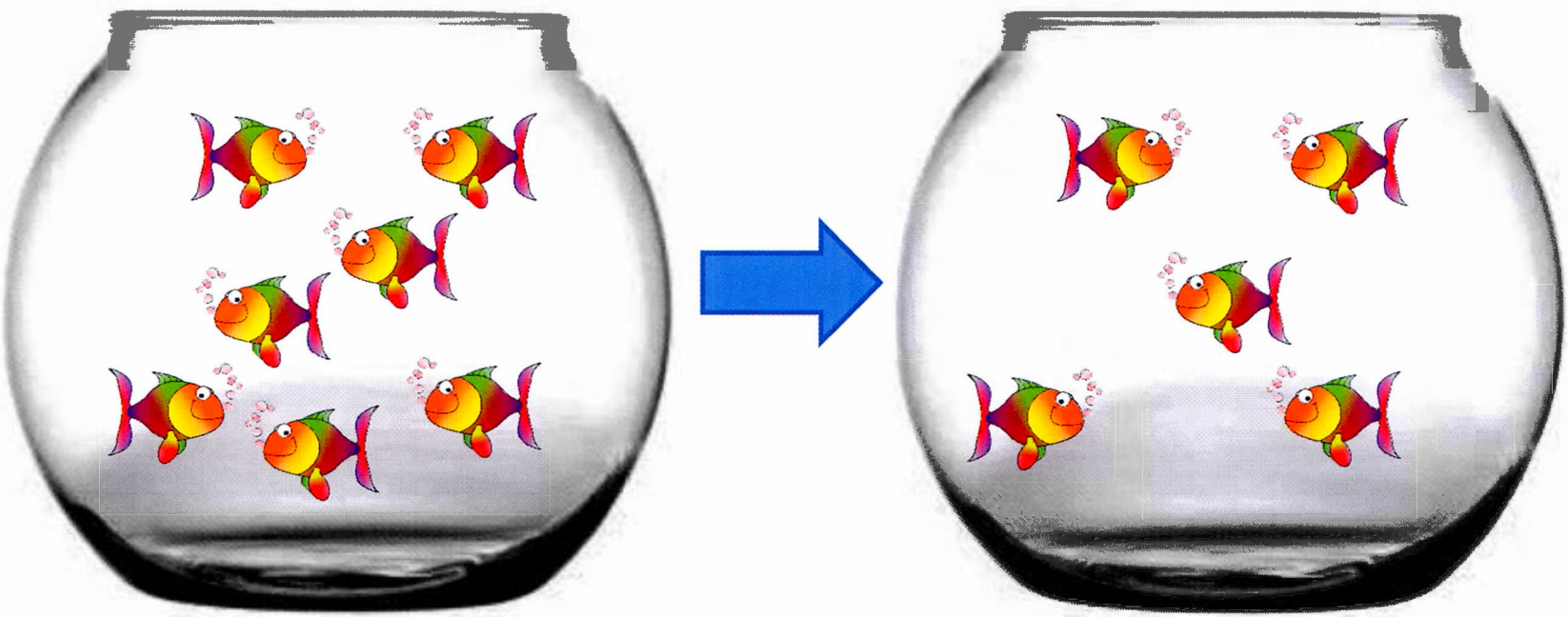


3 FOIS MOINS QUE



MOINS QUE

Contrainte : un aquarium ne peut pas contenir plus de 9 poissons



ANNEXE E

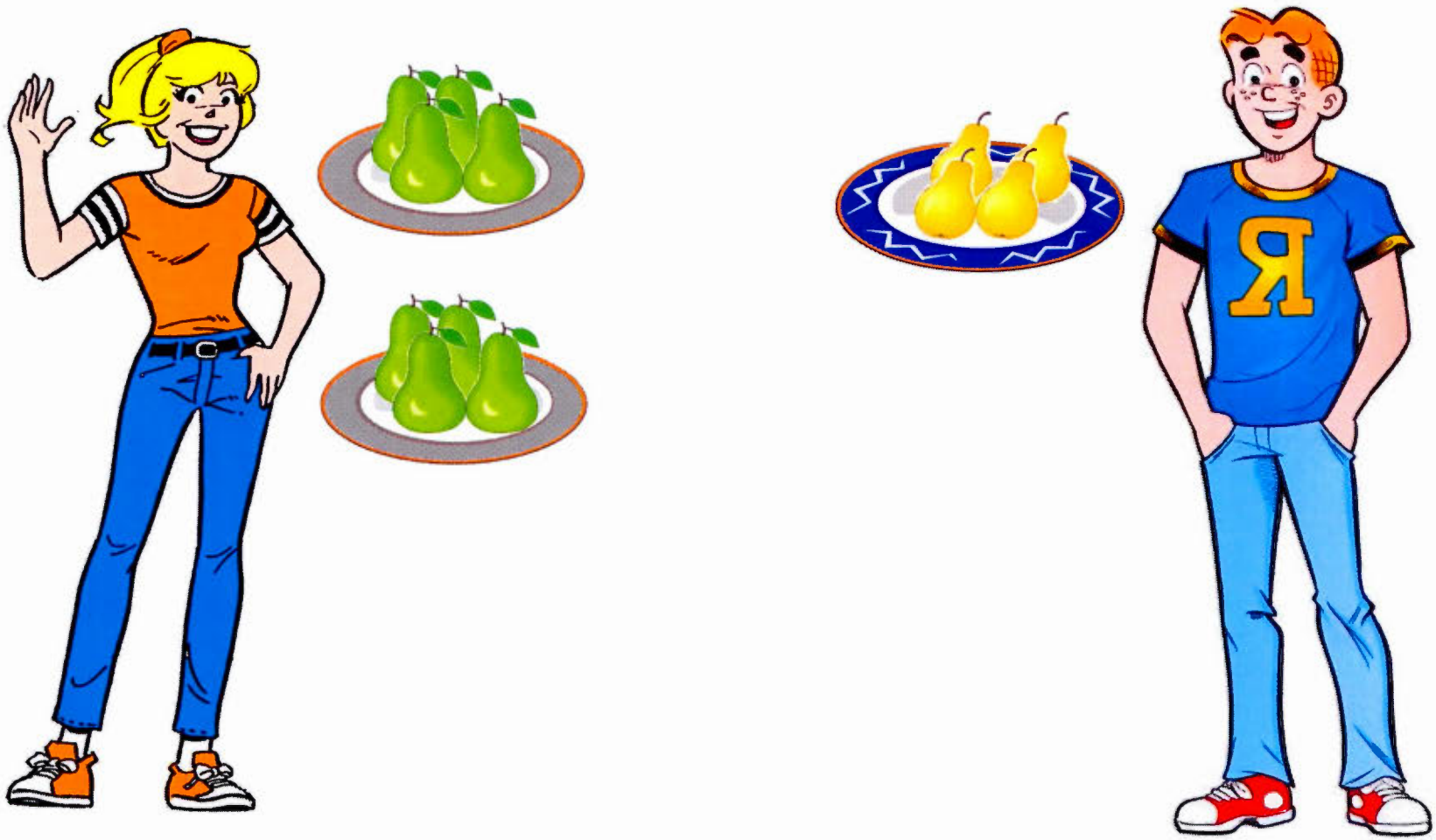
PROBLÈMES DES POIRES

Marie a 4 poires de plus que Jean. Ensemble, ils ont 12 poires.

Un plateau ne peut contenir plus de 4 poires.

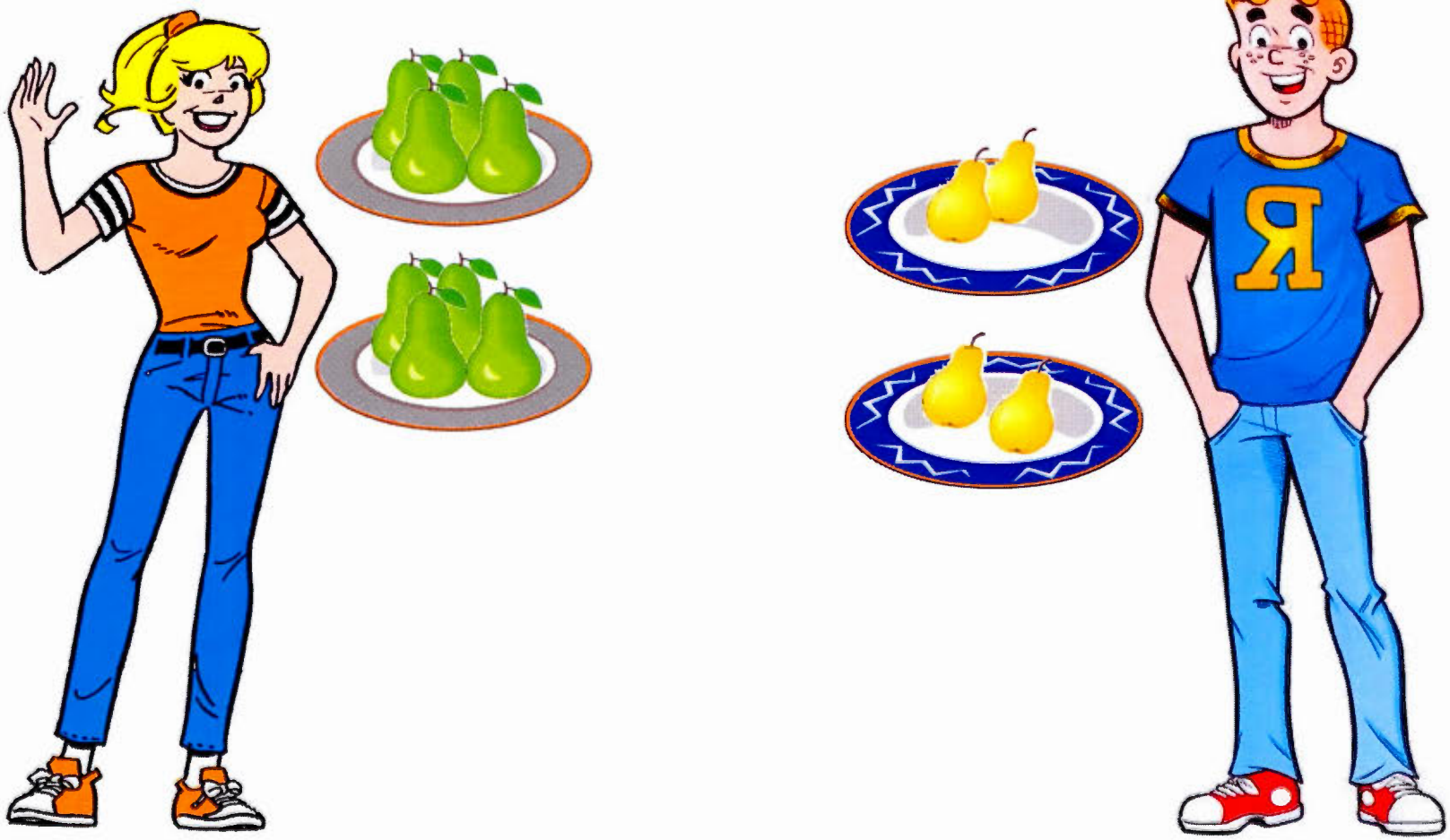
Marie a 2 fois plus de poires que Jean. Ensemble, ils ont 12 poires.

Un plateau ne peut contenir plus de 4 poires.



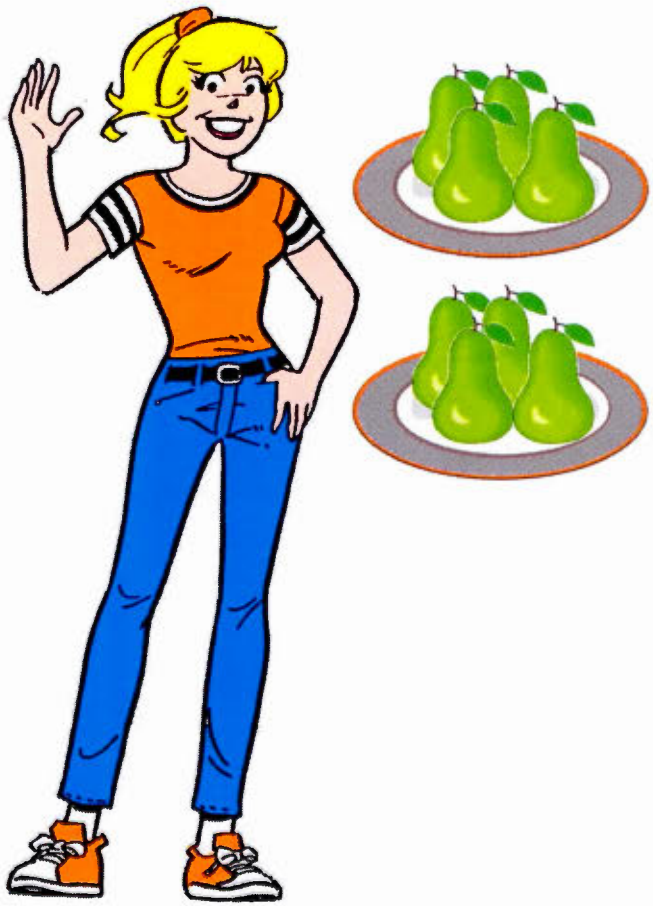
Jean a 2 fois moins de poires que Marie. Ensemble, ils ont 12 poires.

Un plateau ne peut contenir plus de 4 poires.



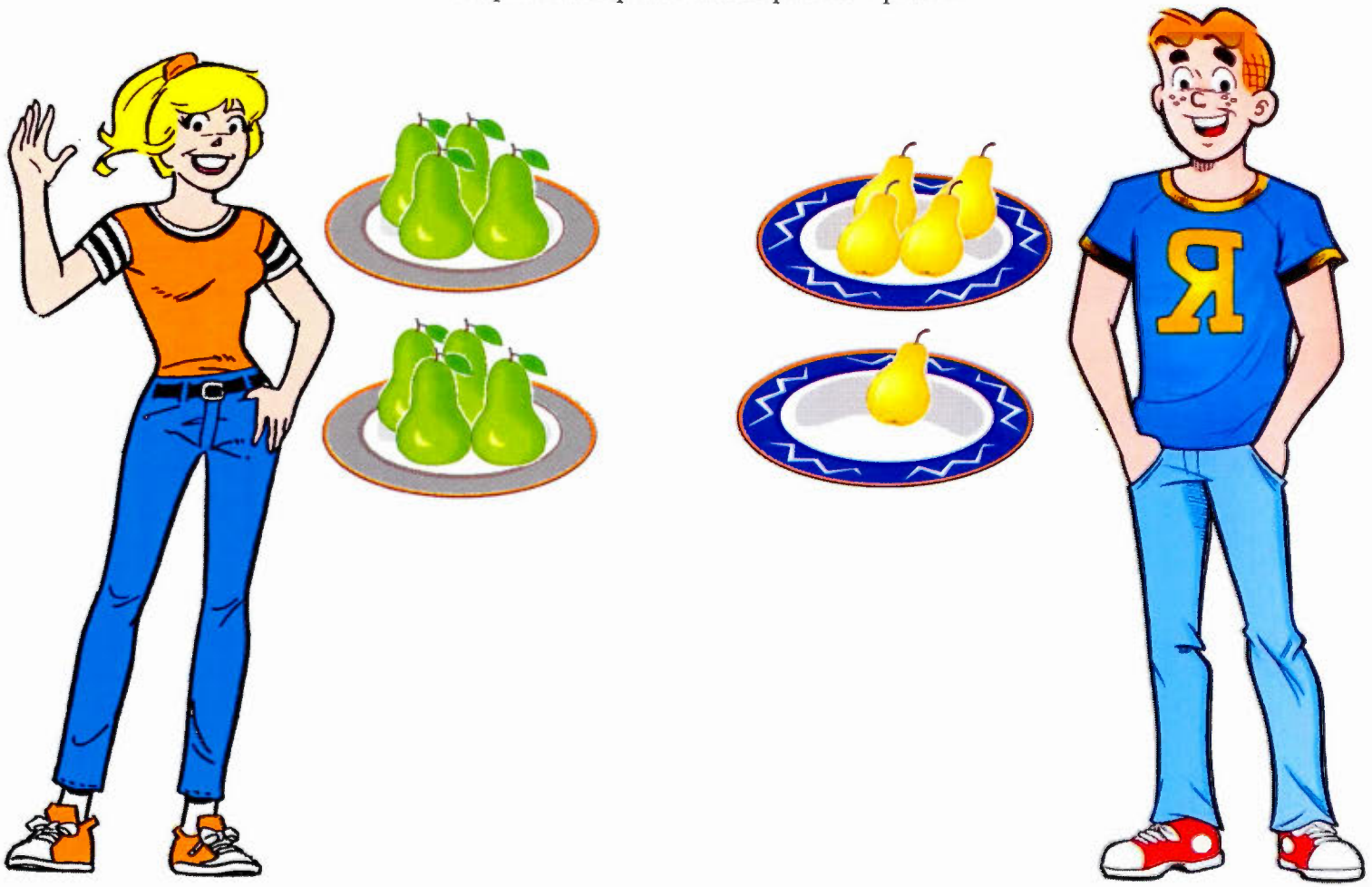
Marie a 3 fois plus de poires que Jean. Ensemble, ils ont 16 poires.

Un plateau ne peut contenir plus de 4 poires.



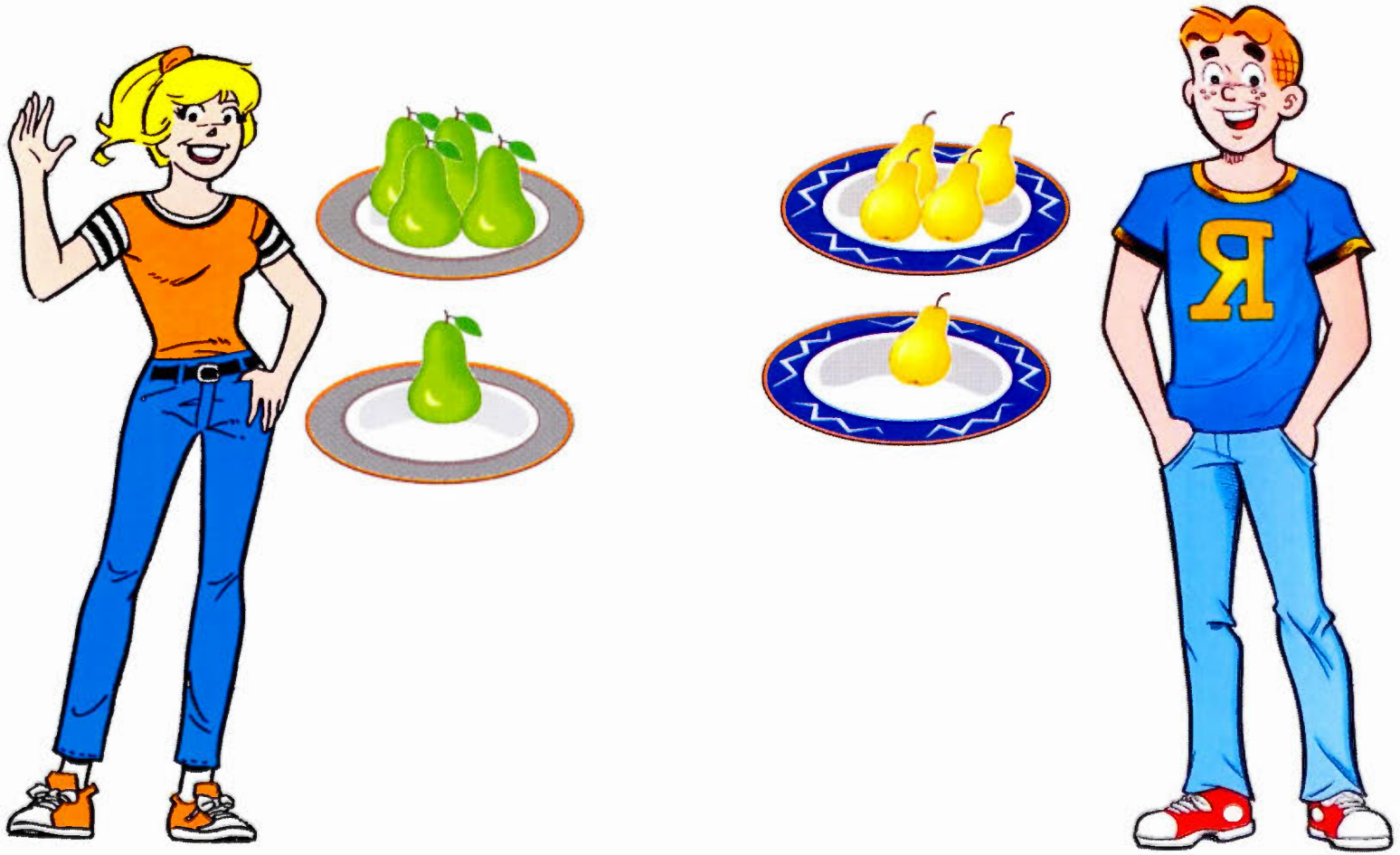
Marie a 2 fois plus de poires que Jean. Ensemble, ils ont 15 poires.

Un plateau ne peut contenir plus de 4 poires.



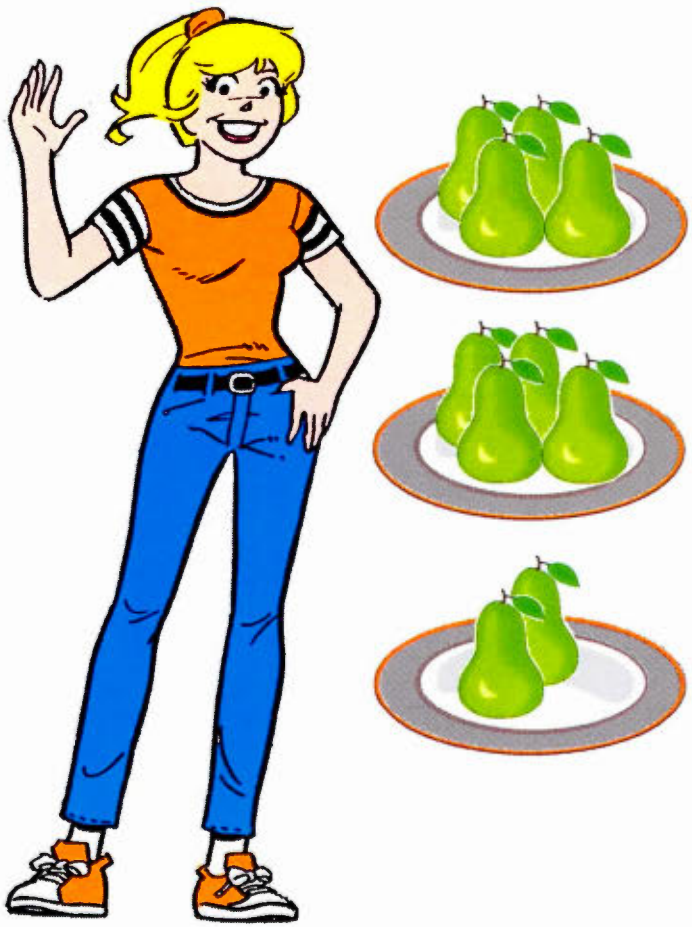
Jean a 2 fois moins de poires que Marie. Ensemble, ils ont 15 poires.

Un plateau ne peut contenir plus de 4 poires.



Jean a 3 fois moins de poires que Marie. Ensemble, ils ont 16 poires.

Un plateau ne peut contenir plus de 4 poires.



ANNEXE F

FEUILLES DE ROUTE À COMPLÉTER

F.1 Feuille de route à compléter : quatrième période 206
F.2 Feuille de route à compléter : cinquième période.....207
F.3 Feuille de route à compléter : sixième période 208

F.1 Feuille de route à compléter : quatrième période

Voici quelques problèmes pour toi !

Complète les feuilles du jeu des étoiles. Comme si quelqu'un avait joué et que des nombres étaient effacés. Tu dois essayer de trouver les nombres qui manquent.

Je joue sur un jeu qui fait des bonds de 5. Sur mon dé, il y a les nombres 5, 10, 15, 20, 25, 30. Je ne joue qu'avec un seul dé.

Nombre de départ	Dé tiré	Nombre d'arrivée	Nombre de cases du déplacement
100	25	125	_____
125	_____	110	3
110	5	105	_____
105	____	135	_____

Je joue sur un jeu qui fait des bonds de 3. Sur mon dé, il y a les nombres 3, 6, 9, 12, 15, 18. Je ne joue qu'avec un seul dé.

Nombre de départ	Dé tiré	Nombre d'arrivée	Nombre de cases du déplacement
21	12	33	_____
33	_____	39	2
39	18	57	_____
57	____	42	_____

F.2 Feuille de route à compléter : cinquième période

A. Jeu des étoiles avec des dés de 5. Avancer seulement.

Départ	**Nombre tiré**	**Arrivée**	**Déplacement _____ cases**
45	_____	55	____
90	45		____
	_____	165	7
	25	55	____
80	_____		4

B. Jeu des étoiles avec des dés de 7. Avancer seulement.

Départ	**Nombre tiré**	**Arrivée**	**Déplacement _____ cases**
49	14		____
	35	70	____
91	_____		7

F.3 Feuille de route à compléter : sixième période

Jeu d'étoiles avec différents dés.

a)

Nombres tirés	Déplacement	Tableau de
16 et 8	3 cases	8

b)

Nombre tiré	Déplacement	Tableau de
12 et 12	4 cases	____

c)

Nombres tirés	Déplacement	Tableau de
49 et 7	___ cases	7

d)

Nombres tirés	Déplacement	Tableau de
Total : _____	8 cases	6

e)

Nombres tirés	Déplacement	Tableau de
18 et 18	_____ cases	3

ANNEXE G

ÉNONCÉS DE PROBLÈMES

Problème A:

Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles sur une grille à intervalle de 5. Lucie a avancé de 3 cases. Elle était à la case 460 avant de jouer son tour.
Quel était le nombre obtenu sur son dé?
À quelle case est-elle arrivée?

Problème B :

Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles à intervalle de 3. À son tour, Benoît était à la case 123 et a reculé de 7 cases. Il avait 9 sur un de ses dés.
Quel était le nombre sur l'autre dé?
À quelle case est-il arrivé?

Problème C :

Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles. À son tour, Lucie est partie de la case 1015 et elle s'est arrêtée à la case 1 050. Elle a avancé de 5 cases. Sur un de ses dés, elle avait 28.
Quel était le nombre sur son autre dé?
Sur quelle grille de jeu jouent-ils?

ANNEXE H

SÉQUENCES DE PROBLÈMES

H.1 Deux séquences de trois problèmes d'isomorphismes de mesures 212
H.2 Séquence de trois problèmes à un seul espace de mesure 214
H.3 Séquence de trois problèmes mettant en lien la structure
d'isomorphisme de mesures et les problèmes à un seul espace de mesure.....215
H.4 Deux séquences de trois problèmes mettant en œuvre la distributivité
de la multiplication sur l'addition.....216

H.1 Deux séquences de trois problèmes d'isomorphismes de mesures

Voici 3 problèmes.

L'épicière a reçu 6 caisses d'oranges. Chaque caisse contient 144 oranges. Combien d'oranges a-t-elle reçues en tout?	En promenant son chien, Benoît fait 144 pas par minute. Combien de pas aura-t-il faits en 6 minutes?	Dans une usine de bonbons, on doit placer 864 bonbons à la cerise dans 6 sacs. Combien de bonbons y aura-t-il par sac?

Voici 3 problèmes.

Les élèves de la classe de 5e année présenteront la semaine prochaine une pièce de théâtre. Ils ont imprimé 130 programmes. Après entente avec la direction de l'école, les élèves versent 15¢ pour la photocopie de chaque programme. Combien paieront-ils pour l'impression des programmes?	Les 15 employés de l'usine LEGO se partageront les 1950 dollars gagnés à la loterie. Peux-tu trouver le montant que chacun recevra?	Dans cette usine, les légos sont mis dans des boites de 130 pièces. Combien de boites seront nécessaires pour emballer 1950 pièces?

H.2 Séquence de trois problèmes à un seul espace de mesure

Voici 3 problèmes.

Mikaël a lu 25 miniromans cette année. Chloé en a lu 6 fois plus. Combien Chloé a-t-elle lu de miniromans cette année?	Marie a récolté 150 bonbons à l'Halloween. Elle a récolté 6 fois plus de bonbons que Julie, qui habite à la campagne. Combien Julie a-t-elle récolté de bonbons?	Le livre de Julie coute 25$. La vieille version originale coute 150$. Combien de fois plus cher coute la version originale?

H.3 Séquence de trois problèmes mettant en lien la structure d'isomorphismes de mesures et les problèmes à un seul espace de mesure

Voici 3 problèmes.

Le lapin de Mélissa fait des bonds de 6 cm chacun. Combien de bonds le lapin fait-il pour parcourir une distance de 150 cm?	La gazelle fait des bonds de 150 cm. Combien de fois plus long que ceux du lapin sont les bonds de la gazelle?	Les bonds de 6 cm du lapin sont 25 fois plus courts que ceux du lion. De quelle longueur sont les bonds du lion?

H.4 Deux séquences de trois problèmes mettant en œuvre la distributivité de la multiplication sur l'addition

Voici 3 problèmes.

Résous les trois problèmes.

Observe les ressemblances et les différences entre les trois problèmes.

À un jeu d'étoiles sur des bonds de 5, Marie avance de 6 cases avec son premier dé et de 4 cases avec son deuxième dé. Quel est le total des dés qu'elle a tirés?	Pour une sortie scolaire, les élèves doivent payer chacun 5 $. 9 élèves ont déjà payé et 8 n'ont pas encore payé. Combien d'argent sera accumulé lorsque tous les élèves auront payé?	Benoît et Lucie ont joué au jeu des étoiles avec 2 dés, sur une grille à intervalle de 3. Lucie a avancé de 7 cases en tout. Sur un de ses dés, elle avait 9. Quel est le total de ses dés? Quel était le nombre sur son autre dé? De combien de cases chacun des dés lui a-t-il permis d'avancer?

Voici 3 problèmes.

Résous les trois problèmes.

Observe les ressemblances et les différences entre les trois problèmes.

Julie achète des caisses d'oranges 2 fois par semaine. Elle a acheté 3 caisses d'oranges lundi et 5 caisses d'oranges jeudi. En tout, elle a dépensé 64 $. Quel est le prix d'une caisse d'orange?	Julie achète des caisses d'oranges 2 fois par semaine. Les caisses d'oranges coutent 9 $ chacune. Elle a dépensé 81 $ en tout. Lundi, elle a acheté 4 caisses d'orange. Combien de caisses a-t-elle achetées jeudi?	Pour la sortie scolaire de fin d'année, chaque élève doit acheter son billet d'entrée. 7 élèves ont déjà payé et 28 $ sont accumulés. Lorsque tous les élèves auront payé, 80 $ seront accumulés. Combien d'élèves n'ont pas encore payé?

ANNEXE I

QUI JOUE AVEC QUI?

I.1 Premier problème.....219
I.2 Deuxième problème 220

I.1 Premier problème

Qui joue avec qui et sur quels tableaux ?

NOM : _____

Marie a tiré 40 sur son dé. Elle avance de 8 cases.

Jean a reculé de 6 cases. Il est parti de 60 et s'est arrêté à 24.

Aline a tiré 48 sur son dé. Elle avance de 8 cases

Laurent a avancé de 6 cases. Il est parti de 25 et s'est arrêté à 55.

Noms de l'équipe 1 : _____ et _____

Intervalle (bonds) du tableau : _____

Noms de l'équipe 2 : _____ et _____

Intervalle (bonds) du tableau : _____

I.2 Deuxième problème

Qui joue avec qui et sur quels tableaux ?

NOM : _____

Marc recule de 10 cases. Il part de 88 et s'arrête à 8.

Sally a tiré 12 et 20 sur son dé. Elle avance de 8 cases

Sophie a tiré 24 et 4 sur son dé. Elle avance de 7 cases.

Laurent avance de 8 cases. Il part de 160 et s'arrête à 224.

Noms de l'équipe 1 : _____ et _____

Intervalle (bonds) du tableau : _____

Noms de l'équipe 2 : _____ et _____

Intervalle (bonds) du tableau : _____

RÉFÉRENCES

Amigues, R., Lataillade, G. et Mencherini, N. (2001). Travail du professeur et activité de l'élève dans les dispositifs d'aide aux élèves en difficulté : un exemple, les groupes de consolidation. *Revue suisse des sciences de l'éducation, 23*(2), 299-319.

Association des orthopédagogues du Québec. (2003). *L'acte orthopédagogique dans le contexte actuel.* Récupéré le 23 septembre 2012 de http://www.ladoq.ca/medias/doc/general/memoire-acte_orthopedagogique.pdf

Babad, E. Y., Inbar, J., & Rosenthal, R. (1982). Pygmalion, Galatea, and the Golem: Investigations of biased and unbiased teachers. *Journal of Educational Psychology*, 74(4), 459.

Berthoud-Papandropoulou, I. et Kilcher, H. (1983) *Multiplication et associativité multiplicative.* dans J. Piaget (dir), 2: *L'évolution du nécessaire chez l'enfant*, Paris: Presses universitaires de France, 1983, p. 95-118.

Bloch, I. et Salin, M-H. (2004). *Contrats, milieux, représentations : étude des particularités de l'AIS – L'enseignement en SEGPA : questions et outils théoriques d'analyse.* Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Paris, France: Université de Paris VII.

Brissiaud, R. et Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving: a Situation Strategy First framework. *Developmental Science, 3*(1), 92-107.

Brousseau, G. (1982). *Les «effets» du «contrat didactique».* Récupéré le 8 août 2013 de http://guy-brousseau.com/2315/les-%C2%AB-effets-%C2%BB-du-%C2%AB-contrat-didactique-%C2%BB-1982/

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France: La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2000). Les erreurs des élèves en mathématiques. *Petit x, 57*, 5-30.

Carpenter, T. P. et Moser, J. M. (1983). *The acquisition of addition and substraction concepts.* dans R. Lesh et M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathématical concepts and processes*, New York : Academic Press, 7-44.

Cherel, C. (2003). *Étude didactique d'une intégration partielle aux leçons de mathématiques en classe ordinaire de deux élèves d'une classe d'adaptation scolaire.* Mémoire de maîtrise inédit, Université du Québec à Montréal, Montréal.

Conne, F. (2004). Problèmes de transposition didactique. *Petit x, 64,* 62-81.

Conseil Canadien sur l'Apprentissage. (2013). *Qu'est-ce que la littératie et comment se mesure-t-elle?* Récupéré le 15 janvier 2013 de http://www.ccl-cca.ca/ccl/Topic/Literacy/WhatisLiteracy-2.html

Coquin-Viennot, D. et Moreau, S. (2007). Arithmetic problems at school: When there is an apparent contradiction between the situation model and the problem model. *British Journal of Educational Psychology, 77,* 69-80.

DeCorte, E. et Vershaffel, L. (1981). Children's solution processes in elementary arithmetic problems : Analysis and improvement. *Journal of Educational Psychology, 6,* 765-779.

DesGagné, L., Boisvenu, A. et Laplante, L. (2000). *Démarche d'évaluation diagnostique des difficultés d'apprentissage en lecture.* Ouvrage de référence. Hull : Commission scolaire de l'Outaouais, Éducation-Outaouais (1ère édition 1997).

Dubois, C., Fénichel, M., Pauvert, M. (1993). *Se Former pour enseigner les mathématiques. Tome 4. Nombres et opérations, fonctions numériques.* Paris, France : Éditions Armand Colin.

Dumas, B., Fortin, N., Veillette, L. et Lévesque, R. (2013). *Démarche d'Évaluation en Mathématique pour Mieux Intervenir: DEMMI.* Cadre théorique, Services régionaux de soutien et d'expertise à l'intention des élèves présentant des difficultés d'apprentissage, Québec.

Institut National de Recherche Pédagogique, Équipe de recherche en didactique des mathématiques (ERMEL) (2001). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes.* Paris, France : Éditions Hatier.

Fabre, M. (2001). La situation-problème ou le retour de la Métis. *Penser l'éducation, 9,* 5-17.

Favre, J.M et Cange, C. (2003). L'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé est-il pavé de bonnes analyses d'erreurs? *Éducation et francophonie,* vol. 31, 2.

Fontaine, V. (2008). *Les représentations sociales des orthopédagogues du Québec en rapport avec l'intervention en mathématiques auprès des élèves à risque.* Mémoire de maitrise inédit, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec.

Fortin, R., Royer, É., Potvin, P., Marcotte, D. et Yergeau, É. (2004). La prédiction du risque de décrochage scolaire au secondaire: facteurs personnels, familiaux et scolaires. *Revue canadienne des sciences du comportement, 36*(3), 219-231.

Fuchs, L., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C., Owen, R., Hosp, M. et Jancek, D. (2003). Explicitly Teaching for Transfer: Effects on Third-Grade Students' Mathematical Problem Solving. *Journal of Educational Psychology, 95*(2), 293-305.

García, A., Jiménez, J. et Hess, S. (2006). Solving Arithmetic Word Problems: An Analysis of Classification as a Function of Difficulty in Children With and Without Arithmetic LD. *Journal of Learning Disabilities, 39,* 270-281.

Gersten, R., Clarke, B. et Mazzocco M.M. (2007) Historical and contemporary perspectives on mathematical learning disabilities. dans D.B. Brech et M.M.M. Mazzocco, *Why is Math So hard for Some Children?,* Baltimore: Éditions Brookes, 7-29.

Giroux, J. (2004). Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire. *Revue des sciences de l'éducation, 30*(2), 303-327.

Giroux, J. (2009). *La situation didactique du jeu des étoiles.* Document inédit. Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.

Giroux, J. (2013a). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire: Problématique et repères didactiques. *Revue Éducation et didactique, 7*(1), 59-86.

Giroux, J. (2013b). Analyse a priori d'investigation dynamique des connaissances sur les structures multiplicatives. Projet en orthopédagogie Région LLL/UQAM. Document de travail inédit.

Giroux, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. dans C. Mary et L. Theis (éds), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques.* Éditions PUQ, 11-44.

Houle, V. (2016). *Fondements didactiques pour une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction.* Thèse de doctorat inédite, Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.

Institut de la statistique du Québec (2006). *Développer nos compétences en littératie: un défi porteur d'avenir. Rapport québécois de l'Enquête internationale sur l'alphabétisation et les compétences des adultes (EIACA), 2003.* Récupéré le 27 janvier 2013 de http://www.stat.gouv.qc.ca/publications/conditions/pdf2006/Alphabetisation2003.pdf

Jitendra, Griffin, Haria, Leh, Adams et Kaduvettoor (2007). A comparison of Single and Multiple Strategy Instruction on third-Grade Students' Mathematical problem Solving. *Journal of Educational Psychology, 99*(1), 115-127.

Jordan, N., Glutting, J. et Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences, 20,* 82-88.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.* Rennes : PUR.

Kintsch, W. et Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92*(1), 109-129.

Laplante, L. (2012). L'historique de l'orthopédagogie au Québec. *Vie pédagogique, 160,* 10-14.

Legendre, R. (2005). *Dictionnaire actuel de l'éducation.* Montréal : Guérin.

Lusignan, G. (2011). Une formation continue en mathématique auprès du personnel enseignant en orthopédagogie des commissions scolaires francophones de l'île de Montréal. *Vie pédagogique, 158,* 51-54.

Merri, M. (2007). *Activité humaine et conceptualisation : questions à Gérard Vergnaud.* Toulouse : Presses universitaires du Mirail.

Ministère de l'Éducation, Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise, version approuvée*. Québec : Ministère de l'éducation.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, Gouvernement du Québec. (2009b). *La convention de partenariat - Outil d'un nouveau mode de gouvernance.* Récupéré le 8 juillet 2013 de http://www.mels.gouv.qc.ca/sections/publications/publications/BSM/ConvPartenariat_GuideImplantation.pdf

National Joint Committee on Learning Disabilities. (2008). *Adolescent literacy and older students with learning disabilities.* Récupéré le 15 janvier 2013 de http://www.ldonline.org/article/25031/

OCDE et Statistique Canada. (2011). *Literacy for Life - Further results from the adult literacy and life skills survey.* Récupéré le 15 janvier 2013 de http://www5.statcan.gc.ca/bsolc/olc-cel/olc-cel?catno=89-604-x&lang=eng

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 37-58.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles". *Recherches en didactique des mathématiques*, 13, 1.2, 5-118.

Roiné, C. (2012). *Des «besoins éducatifs particuliers» aux «parcours spécifiques» - Étayage antropologique et didactique.* Récupéré le 22 juillet 2013 http://ddata.over-blog.com/xxxyyy/4/33/03/53/Des---besoins-educatifs-particuliers---aux---parcours-s.pdf

Salin, M.-H. (2007). À la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques pour des élèves en grande difficulté scolaire. Dans J. Giroux & D. Gauthier (éds) *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques*. Éditions Montréal, Bande didactique.

Salin, M.-H., Clanché, P., et Sarrazy, B. et Brousseau, G., (2005). *Sur la théorie des situations didactiques : questions, réponses, ouvertures : hommage à Guy Brousseau.* Grenoble, France: La pensée sauvage.

Sarrazy, B. (2002). Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem-solving among pupils of 9-10 years *European Journal of Psychology of Education, 17*(3), 321-341.

Sarrazy, B. (2003). Le problème d'arithmétique dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire de 1887 à 1990. *Carrefour de l'éducation, 15*, 83-101.

Snow, C., Burns, S. et Griffin, P. (1998). *Preventing reading difficulties in young children - Committee on the Prevention of Reading Difficulties in Young Children.* Washington: National Academy Press.

Swetz, F. (2012). *Mathematical Expeditions: Exploring Word Problems across the Ages.* Baltimore (MD): The Johns Hopkins University Press.

Torgesen, J. K., Wagner, R.K.,Rashotte, C. A., Rose, E., Lindamood, P., Conway, T. et Garvan, C.(1999). Preventing Reading Failure in Young Children With Phonological Processing Disabilities: Group and Individual Responses to Instruction. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 579-593.

UNESCO. (2005). *EFA Global Monitoring Report 2006: Literacy for life.* Paris, France: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.

VanDerHeyden, A. M., Broussard, C., Snyder, P., George, J., Lafleur, S. M. et Williams, C. (2011). Measurement of Kindergartners' Understanding of Early Mathematical Concepts. *School Psychology Review, 40*(2), 296-306.

Vannier, M.-P. (2008). Enrôlement et dévolution dans des classes d'adolescents en difficulté. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, vol. 2, 42.

Venet, M., Schmidt, S. et Paradis, A. (2008). *Analyse des conditions favorables au cheminement et à la réussite scolaire des élèves en difficulté d'apprentissage en classe ordinaire au primaire - Volume 3 - Les conditions liées à la relation maître-élèves.* Sherbrooke, Québec : Université de Sherbrooke.

Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative Structures.* Dans R. Lesh et M. Landau : *Acquisition of mathematics concepts and processes.* New York :Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1994a). *Multiplicative Conceptual Field: What and Why?* Dans G. Harel et J. Confrey: *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of mathematics.* Albany, New York: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (1994b). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne, Suisse : Peter Lang S. A.

Vincent, S. (1992). La construction des structures multiplicatives chez des jeunes élèves du primaire. Thèse de doctorat inédite, Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.

Voyer, D. (2011). Performance in Mathematical Problem Solving as a Function of Comprehension and Arithmetic Skills. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9,* 1073-1092.

Voyer, D., Beaudoin, I. et Goulet, M. (2012). De la lecture à la résolution de problèmes: des habiletés spécifiques à développer. *Revue Canadienne de l'Éducation, 35*(2), 401-421.