

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE DES ASPECTS TRANSFORMATEURS DE LA TECHNOLOGIE POUR
L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE : ANALYSE DE TROIS LOGICIELS UTILISÉS
DANS LE MILIEU SCOLAIRE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

KARL-PHILIPPE TREMBLAY

DÉCEMBRE 2017

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Pour avoir fait de moi ton apprenti chercheur, ne me refusant jamais l'accès à ton expérience, je t'offre, Jean-François, mes plus sincères remerciements. Tu as été bien sûr un directeur, mais aussi un humain extraordinaire durant tout mon parcours académique. Même après toutes ces années, je m'émerveille devant ton constant intérêt à éveiller chez les uns et les autres des idées productrices.

Jérôme, ta présence dans l'équipe de direction a été essentielle, si ce n'est du suivi étroit et généreux que tu m'as offert durant tout le processus d'écriture. Ton apport à ma formation en recherche en didactique des mathématiques ne pourrait se résumer à des aspects quantifiables. Je suis reconnaissant de ta présence dans mon parcours.

Caroline, ton bureau est un endroit serein, ton écoute est apaisante et ton propos est sincère et sensible. Merci d'avoir toujours laissé la porte de ton bureau ouverte et d'avoir fait de cette chaise brune l'endroit le plus confortable de l'université.

Un grand merci aussi à mes collègues d'étage, de bureaux et de laboratoire. Vous avez été des complices formidables dans cette aventure. François, tu as d'abord été un collègue de classe, puis un partenaire de bureau et finalement un ami incroyable. À travers tout cela, j'ai découvert une personne sensible, courageuse, généreuse, ... de qui j'ai beaucoup à apprendre. Notre amitié m'est précieuse.

Finalement, je remercie Annie-Claude, ma tendre épouse. Tu m'as offert un soutien que je ne méritais pas toujours et tes sacrifices ont été aussi nombreux que tes encouragements. Tu crois en moi dans les petites et les grandes choses et c'est un réel plaisir de partager ma vie avec toi. C'est à toi que je dédie ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	IX
RÉSUMÉ	XIII
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
PROBLÉMATIQUE.....	3
1.1 Origine de mon questionnement: Papert, l'ordinateur et la culture	3
1.2 L'impact de la technologie en éducation et dans le monde scolaire.....	6
1.2.1 L'entrée de l'ordinateur dans les écoles et l'enseignement programmé	7
1.2.2 La position de Papert.....	9
1.3 Deux perspectives sur les effets de la technologie.....	11
1.3.1 La vision utilitaire du potentiel technologique sur l'apprentissage des mathématiques	12
1.3.2 La vision transformatrice du potentiel technologique sur l'apprentissage des mathématiques	14
1.4 Papert et la transformation des mathématiques	19
1.5 Objectifs / questions de recherche	21
CHAPITRE II	
CADRE CONCEPTUEL	23
2.1 Qu'entend-on par « aspect transformateur » de la technologie?.....	24
2.1.1 Les changements d'ordre quantitatif et qualitatif de Pea	24
2.1.2 Le continuum entre quantitatif et qualitatif selon Lévy	25
2.1.3 L'exemple de la calculatrice.....	27
2.2 Les aspects transformateurs dans une perspective papertienne	30
2.2.1 Micromonde	31
2.2.2 Le micromonde mathématique comme contexte transformateur pour l'activité mathématique.....	34

2.2.3	Quelques exemples d'aspects transformateurs dans le micromonde de la géométrie Tortue	36
2.2.4	Objet-pour-penser-avec.....	39
2.2.5	La Tortue comme un objet-pour-penser-avec	42
2.2.6	Le débogage.....	46
2.3	Le cadre de Papert mis à l'essai : relecture d'un article de recherche en didactique des mathématiques sous la perspective transformatrice.....	50
2.3.1	La technologie au service des intérêts du chercheur	51
2.3.2	La place/le rôle de la technologie dans le travail de recherche	53
2.3.3	La place accordée à l'activité mathématique.....	55
2.3.4	Un questionnement différent pour la recherche	55
2.4	Vers l'analyse d'autres environnements informatiques	57
CHAPITRE III		
	MÉTHODE	59
3.1	Introduction et approche générale	59
3.2	Le choix des environnements	60
3.3	Les trois environnements analysés	60
3.3.1	Les EGD et les simulateurs informatiques	61
3.3.2	AlNuSet	61
3.4	Les analyses.....	62
3.4.1	Les écrits scientifiques comme point de départ.....	62
3.4.2	Un va-et-vient dans l'écriture.....	62
CHAPITRE IV		
ANALYSE DES ASPECTS TRANSFORMATEURS D'UN MICROMONDE INFORMATIQUE POUR L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE : L'EXEMPLE DES ENVIRONNEMENTS DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE		65
4.1	Les environnements de géométrie dynamique (EGD)	65
4.1.1	Caractéristiques importantes des EGD	66
4.1.2	L'environnement de géométrie dynamique comme micromonde.....	69
4.2	Aspects transformateurs des EGD.....	72
4.2.1	Appréhension des objets géométriques	73

4.2.2 Une distinction particulière entre un objet géométrique statique et un objet géométrique dynamique	77
4.2.3 Le mouvement/dynamisme comme objet-pour-penser-avec pour les objets géométriques	80
4.3 L'exemple de la preuve en EGD	82
4.3.1 La géométrie comme terrain fertile pour la preuve en mathématique	82
4.3.2 L'activité géométrique en lien avec la démonstration dans les EGD	85
4.4 Conclusion	89
CHAPITRE V	
ANALYSE DES ASPECTS TRANSFORMATEURS D'UN MICROMONDE INFORMATIQUE POUR L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE : L'EXEMPLE DE ALNUSET	
5.1 AlNuSet.....	91
5.1.1 Description du module de la droite algébrique.....	92
5.2 AlNuSet en tant que micromonde.....	95
5.3 Une approche dynamique de l'algèbre dans le micromonde AlNuSet	98
5.3.1 Le symbolisme algébrique.....	99
5.3.2 Expressions algébriques et résolution d'équations algébriques	103
5.4 Conclusion	110
CHAPITRE VI	
ANALYSE DES ASPECTS TRANSFORMATEURS D'UN MICROMONDE INFORMATIQUE POUR L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE : L'EXEMPLE DU SIMULATEUR D'ÉVÉNEMENTS ALÉATOIRES	
6.1 Le simulateur de probabilité en tant que micromonde pour l'activité mathématique	113
6.2 Vers une approche statistique des phénomènes aléatoires.....	117
6.2.1 Une entrée par la répétition de simulations à la loi des grands nombres	118
6.2.2 Vers l'étude de la tendance des tendances	122
6.3 La dynamisation de la loi des grands nombres	130
6.3.1 « La loi dynamique des grands nombres ».....	139
6.4 Conclusion	142
CHAPITRE VII	
CONCLUSION.....	145

7.1	La question du mouvement	145
7.2	Le dynamisme et les objets mathématiques dynamiques	147
7.3	Retour sur les questions de recherche	149
ÉPILOGUE		153
BIBLIOGRAPHIE		159

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
Figure 1.1 Lois du mouvement de Newton tel que présentées dans <i>Principia</i> (1773) et sous leur forme moderne	17
Figure 2.1 Différentes façons de multiplier des nombres	26
Figure 2.2 L'exploration d'un environnement informatique (source : http://www.fi.uu.nl/toepassing/en/00014/toepassing_wisweb.en.html)	33
Figure 2.3 Un cercle dans l'environnement de la géométrie Tortue.....	35
Figure 2.4 La construction d'un triangle équilatéral dans la géométrie Tortue, virages de 60.....	43
Figure 2.5 La construction d'un triangle équilatéral dans la géométrie Tortue, virages de 120.....	45
Figure 2.6 La construction d'un triangle équilatéral dans la géométrie Tortue, virages de 110.....	47
Figure 2.7 La construction d'un triangle équilatéral dans la géométrie Tortue, virages de 118.....	48
Figure 4.1 La création d'un point dans Géogebra via les commandes écrites	66
Figure 4.2 La continuité dans la construction d'un cercle	68
Figure 4.3 Les apparences laissent croire que la figure est fermée	68
Figure 4.4 Le recadrage permet d'attirer l'attention sur certains aspects d'une construction	69
Figure 4.5 Construire la bissectrice d'un angle via l'objet « Bissectrice » du menu de GeoGebra	71

Figure 4.6 L'interface propose/favorise une entrée sur les propriétés des figures pour leur construction <i>GeoGebra</i>	73
Figure 4.7 Les menus se présentent comme une sorte d'encyclopédie des possibles.	74
Figure 4.8 Le déplacement des sommets du triangle QRS permet d'envisager toute une famille de triangles potentiels.....	75
Figure 4.9 Exploration de différentes propriétés des triangles par le déplacement	76
Figure 4.10 Exemple d'une construction molle du rectangle. À gauche la figure de départ, à droite la figure après le glissement de certains des sommets.	78
Figure 4.11 Exemple d'une construction robuste (qui résiste au mouvement/déplacement). La figure de gauche est celle de départ et les deux suivantes sont le résultat du glissement de certains des sommets.....	79
Figure 4.12 Les bissectrices d'un triangle sont concourantes	84
Figure 4.13 Déformation dynamique d'un triangle montrant que les bissectrices se croisent toujours	86
Figure 5.1 Interface du module de la droite algébrique	93
Figure 5.2 Effets du glissement de a vers -6	95
Figure 5.3 La valeur des éléments algébriques correspond à la position de l'élément sur la droite.....	103
Figure 5.4 Pour $t = 1$, $2t + 3 = 5$	104
Figure 5.5 L'importance de la position physique des étiquettes	107
Figure 5.6 La résolution de l'équation $2t + 3 = 5$ par le glissement de a sur la droite algébrique	109
Figure 6.1 La somme de deux dés dans le simulateur TinkerPlots. Résultat de 500 lancers.	114
Figure 6.2 Les environnements de simulations offrent une multitude d'outils d'analyse (exemple du logiciel TinkerPlots).....	115
Figure 6.3 Concevoir sa propre expérience aléatoire	116

Figure 6.4 Obtenir la somme de 7 lors du lancer de deux dés (250 répétitions de l'expérience) – Simulateur « Les dés », http://anniesavard.com/simulateur/	120
Figure 6.5 Trois expériences pour déterminer la fréquence relative associée à « Obtenir la somme de 7 » lors du lancer de deux dés après 500 lancers. De gauche à droite, les fréquences relatives sont : 18,8 % ; 13,2 % ; 14,2 %...	121
Figure 6.6 La barre d'outils du simulateur TinkerPlots	123
Figure 6.7 Historique des résultats du lancer de deux dés	124
Figure 6.8 Le graphique de la fréquence des fréquences relatives associées à « Obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés » pour 100 simulations de 100 lancers de dés chacune.....	124
Figure 6.9 Modification des pas de graduations du graphique de la fréquence des fréquences relatives associées à « obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés » pour 100 simulations de 100 lancers de dés chacune	126
Figure 6.10 Afficher les mesures de tendance centrale directement dans le graphique	127
Figure 6.11 Différents graphiques des résultats de N simulations de n lancers de dés. En abscisse : Les fréquences relatives associées au résultat « Obtenir la somme de 7 ». En ordonnée : La fréquence des valeurs en abscisse.....	129
Figure 6.12 Allure du graphique, à différents moments de sa construction dynamique, du lancer de deux dés.....	133
Figure 6.13 Moment A de la construction dynamique du graphique des résultats de l'expérience aléatoire « obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés »	134
Figure 6.14 Moment B de la construction dynamique du graphique des résultats de l'expérience aléatoire « obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés »	135
Figure 6.15 Moment C de la construction dynamique du graphique des résultats de l'expérience aléatoire « obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés »	136
Figure 6.16 Une certaine variabilité qui se répète	137
Figure 6.17 Moments D et E de la construction dynamique du graphique des résultats de l'expérience aléatoire « Obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés »	137

Figure 6.18 Trois images de la présentation de la construction d'un histogramme des résultats d'une suite d'échantillonnage. Tiré de Saldanha, 2004, p. 200.140

Figure 7.1 Le mouvement dans le « statique » 154

Figure 7.2 Une carte très informelle relatant certaines expériences significatives de l'apprenti chercheur 156

RÉSUMÉ

Ce mémoire aborde le thème des effets de la technologie pour l'activité mathématique dans une perspective des micromondes de Papert. Ce regard d'analyse revêt une grande importance puisqu'il permet de se centrer sur ce que favorisent, voire permettent, les caractéristiques des environnements technologiques de travail mathématique pour l'activité mathématique en ce qui concerne l'expérience des mathématiques, et non de son apprentissage institutionnel. En particulier, mon mémoire se penche sur les questions de recherche suivantes :

- *Dans la perspective de Papert, quelles sont les possibilités transformatrices de la technologie pour l'activité mathématique?*
- *Comment peut-on reconnaître ces aspects dans certains logiciels récemment développés pour faire des mathématiques?*

Trois types d'environnements technologiques conçus et utilisés dans les milieux scolaires ont été analysés. Il s'agit des environnements de géométrie dynamique, de l'environnement algébrique AlNuSet et des environnements de simulation d'expériences aléatoires. Pour chacun de ces environnements, l'analyse en termes de micromondes a permis de reconnaître des aspects transformateurs de la technologie pour l'activité mathématique. De façon générale, on reconnaît dans chacun de ces environnements des « objets-pour-penser-avec » pour les idées mathématiques, si bien que ce sont des mathématiques propres aux caractéristiques technologiques des environnements qui sont mises de l'avant. Loin de la question du « faire mieux », les analyses en termes de micromondes permettent de reconnaître des mathématiques différentes derrière les façons différentes et particulières de faire les mathématiques qu'offrent les micromondes mathématiques technologiques.

Mots clefs : Seymour Papert, technologie, activité mathématique, micromonde, objet-pour-penser-avec, logiciels pédagogiques, environnements technologiques.

INTRODUCTION

La technologie, et principalement l'ordinateur, a toujours été source d'émerveillement chez moi. D'aussi loin que je me souviens, cette machine a pris mon attention en otage, m'amenant à chercher toujours à en savoir davantage sur le fonctionnement des choses. Ce fut pour moi un terrain infini d'exploration, de découverte et d'expériences.

Naturellement, après ma formation d'enseignement de mathématiques au secondaire, je me suis intéressé aux effets de la technologie pour l'activité mathématique. Or, ce n'est vraiment qu'après avoir découvert Papert (1980) et son best-seller *Mindstorms* que j'ai trouvé un certain réconfort quant à la place que peut avoir la technologie dans l'activité mathématique. C'est donc sous la perspective des micromondes de Papert que ce travail de mémoire s'intéresse aux effets de la technologie pour l'activité mathématique.

Dans le premier chapitre, une **problématique** est offerte autour des enjeux technologiques dans le milieu scolaire. La position de Papert y est présentée et les effets de la technologie sont alors pensés sous un angle transformateur.

Dans le deuxième chapitre, un **cadre théorique** est développé sur la perspective des aspects transformateurs de la technologie pour l'activité mathématique. Ce chapitre clarifie d'abord la signification donnée au terme « transformatif » puis présente deux grandes perspectives des effets de la technologie pour l'activité mathématique. Une perspective utilitaire est d'abord abordée, selon laquelle les effets de la technologie sont d'abord conçus comme étant de nature quantitative. C'est l'idée que la technologie amplifie les actions/façons de faire/possibilités. L'autre perspective

présente plutôt les effets sous un angle qualitatif. C'est la base de la perspective transformatrice qui est alors développée à l'aide d'exemples tirés du micromonde de la géométrie Tortue de Papert. À la lumière de cette perspective transformatrice des effets de la technologie pour l'activité mathématique, une relecture d'un article de recherche est offerte afin d'illustrer comment le changement de perspective peut influencer la façon de s'intéresser aux effets de la technologie pour l'activité mathématique.

Ensuite, un chapitre **méthodologique** décrit le déroulement et la méthode utilisée pour l'analyse de trois environnements informatiques de travail mathématique.

Puis trois chapitres d'analyses sont offerts. Chacun d'eux s'intéresse à des environnements technologiques différents, mais chaque environnement est analysé en termes de micromondes. Des aspects transformateurs pour l'activité mathématique sont alors relevés. La première analyse porte sur les environnements de géométrie dynamique. La seconde analyse porte sur l'environnement AlNuSet, un logiciel conçu pour travailler les objets algébriques. Finalement, la troisième analyse porte sur les environnements de simulation d'expérience aléatoire. Chaque analyse comporte sa propre conclusion.

Suite aux analyses, une **conclusion** générale est présentée dans laquelle les points communs des analyses sont repris. L'importance du mouvement (le mouvement perceptible à l'écran, le mouvement pour les idées mathématiques, etc.) offert par chacun des environnements analysés est alors soulevée et discutée.

Finalement, je fais un retour sur mon expérience d'écriture en **épilogue**. Il s'agit d'une occasion d'offrir au lecteur un aperçu très personnel de certains des moments importants de mon expérience de formation en recherche en didactique des mathématiques.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 Origine de mon questionnement: Papert, l'ordinateur et la culture

Pour plusieurs, le succès *Mindstorms* écrit par Seymour Papert en 1980 est d'abord un essai sur l'utilisation (et l'apport possible) de l'environnement Tortue (et le langage de programmation LOGO) pour l'apprentissage des mathématiques. À sa lecture, j'ai toutefois trouvé qu'il y a bien d'autres choses à tirer de ses propos. En particulier, l'argumentation de Papert autour des aspects transformateurs de la technologie sur l'activité humaine, et même sur les mathématiques elles-mêmes, m'apparaît être un propos très fort/porteur qui mérite d'être analysé plus finement. Loin de présenter LOGO et sa Tortue comme la solution à l'apprentissage des mathématiques, Papert les utilise afin de nous partager quelque chose qu'il croit beaucoup plus important : sa vision de ce que peut représenter la relation qu'entretient un apprenant avec un ordinateur et comment celle-ci est transformatrice.

Déjà dans les années 1980, Papert voyait en l'ordinateur un outil particulier – un « *object-to-think-with* » (que je traduis par « *objet-pour-penser-avec* »). L'objet-pour-penser-avec dont Papert parle ici ne doit pas être vu comme un objet de médiation entre la pensée et un concept. Il s'agit de bien plus. L'objet-pour-penser-avec de Papert vient s'insérer dans la pensée, puisque littéralement, on se met à penser avec lui. Pour Papert, l'objet-pour-penser-avec devient donc une partie intégrante de tout ce qui se manifeste par lui. Autrement dit, c'est à travers l'objet-pour-penser-avec que les choses (objets de connaissance, les expériences, les savoirs, etc.) sont par la suite

pensées et vécues. Ce n'est donc pas surprenant que pour Papert l'ordinateur a la possibilité de transformer, et particulièrement d'ébranler, la façon d'apprendre les mathématiques scolaires.

Papert était certainement un visionnaire. En 1980, alors que l'ordinateur n'était pas établi dans toutes les sphères de la vie humaine, Papert voit déjà l'école du futur comme un monde où l'élève est en constante interaction avec des environnements informatiques permettant une exploration authentique, ce qu'il appelait des *micromondes*.¹ Le but de Papert avec ces micromondes était de faire vivre des apprentissages naturels, ce qui signifie, au sens piagétien, que l'élève n'est pas guidé par un curriculum et que les contenus à apprendre ne sont pas prédécidés.² Cette idée d'apprentissage naturel est fondamentale pour Papert. Il reprend alors la métaphore de Piaget de l'humain comme un « constructeur de choses » et explique le rôle qu'il attribue à la culture (autant l'environnement physique qu'idéologique) comme source de « matériaux pour construire des choses avec ».³ Selon lui, la culture peut être riche en certains matériaux, et pauvre en d'autres, influençant ainsi les apprentissages piagédiens qui s'en suivent. Par exemple, le fait que plusieurs choses dans la vie de l'enfant soient sous forme de paires (un père et une mère, les bas et les souliers, un

¹ Le concept de micromondes est repris en détail dans le deuxième chapitre.

² Pour Papert, l'apprentissage naturel n'est pas un apprentissage où l'on fait vivre à l'élève une série de découvertes programmées le menant finalement au contenu prédécidé. Par « naturel », Papert veut dire que tout émerge alors que l'activité a lieu, en ne suivant pas de chemin autre que celui qui se trace dans l'action, en fonction de l'élève et de ses préoccupations présentes. L'activité mathématique est donc authentique en ce sens que ni l'élève ni l'enseignant ne sont en mesure de dire avec certitude, avant les faits, comment les idées mathématiques seront préalablement traitées, ni même lesquelles.

³ Il est intéressant de noter que la communauté constructionniste issue des travaux de Papert (voir p. ex. <http://e-school.kmutt.ac.th/constructionism2016/>) insiste sur l'aspect littéral de la construction chez Papert, soit d'apprendre en construisant des « choses », en le plaçant souvent en opposition avec la vision de Piaget qui, elle aussi, est conceptuelle. Ces chercheurs donnent à la notion de « constructeur » un sens littéral (faire une maison, un robot, des boîtes) et concret (créer des images, développer des trucs dans un micromonde informatique). Ma lecture de Papert toutefois insiste sur les deux sens en les voyant imbriqués, soit, dans le cas de l'ordinateur, dans le sens concret de construire avec ses mains et des outils tangibles, mais aussi dans le sens de construction conceptuelle, les deux étant interreliés.

couteau et une fourchette, la main gauche et la main droite, etc.) est un « matériau » favorisant grandement la construction d'une compréhension intuitive des nombres. Encore, la tendance de l'être humain à rendre le monde rectiligne (les routes parallèles et perpendiculaires les unes aux autres, les lignes droites et les angles droits caractérisent la forme de presque tous les objets communs, etc.) est un « matériau » favorisant grandement la construction d'une compréhension intuitive de la géométrie euclidienne. Or, dans plusieurs cas où Piaget ou d'autres expliquaient un apprentissage plus lent de certains concepts par leurs niveaux d'abstraction et de complexité plus grands, Papert croit que ces ralentissements ou difficultés dans certains apprentissages découlent d'un signe du manque relatif de matériaux dans la culture de l'enfant pour rendre le concept simple et concret. Pour Papert, l'enfant apprend en fonction des matériaux qui sont accessibles dans son environnement (matériaux qui peuvent être concrets tout comme cognitifs et même sociaux tel que les personnes composant l'environnement de l'enfant et avec qui il interagit). Dès lors, la position de Papert ne pose pas de limites à ce qu'un enfant peut apprendre, dans la mesure où les matériaux adéquats sont présents et accessibles dans son environnement. Le terme « présence » peut cependant porter à confusion. Encore une fois, il ne suffit pas que l'enfant soit en présence de matériaux, il doit en avoir un accès privilégié à travers des gens qui *font les choses* qu'ils (les enfants) apprendront éventuellement. Ainsi, l'apprentissage se produit dans l'expérimentation du monde, et l'expérimentation du monde se « fait ensemble » avec les matériaux de la culture dans laquelle l'enfant est plongé. Cette culture, c'est celle propre à l'apprenant, elle n'est pas unique, elle est plurielle et dépend de multiples facteurs qui dépassent largement l'emplacement géographique. La famille, l'école, le quartier, les activités sportives et culturelles sont tous porteurs d'une microculture et de matériaux.⁴

⁴ Conséquemment, dans le contexte scolaire, la position de Papert décrit un rôle assez précis pour l'enseignant alors que l'élève est loin d'être laissé à lui-même. Dans le projet d'enseignement de Papert, l'enseignant est là pour créer les conditions propices à l'émergence d'une activité mathématique authentique. Non seulement l'enseignant est essentiel, mais il est lui-même de surcroît

Maintenant en 2017, plus de trente-cinq ans après les écrits de Papert, sa vision d'une école centrée sur des apprentissages naturels a-t-elle vraiment vue le jour ? Qui plus est, le curriculum mathématiques, à travers l'évolution technologique, a-t-il lui-même évolué considérablement ?

1.2 L'impact de la technologie en éducation et dans le monde scolaire

Il ne semble faire aucun doute que la technologie n'a pas eu l'effet en éducation que Papert espérait voir/conceptualisait (p. ex. dans la vision de Papert, chaque enfant serait apte à programmer un ordinateur pour en faire un objet d'apprentissage personnel/authentique). Pourtant, il n'en demeure pas moins que l'impact de la technologie sur notre société est difficile à ignorer, au point que l'utilisation du mot « impact » peut sembler faible. La société est transformée par la technologie et la transforme à son tour. On en vient même à se poser une question identitaire : ainsi, plusieurs disent alors, sans grande surprise, que la société *est* technologique.

À première vue, ces transformations (de notre société) par la technologie peuvent sembler plus faciles à identifier et à quantifier dans le secteur économique que dans le secteur éducatif. Dans le premier, la technologie permet de faire plus et plus rapidement, elle s'intègre parfaitement dans nos sociétés centrées sur le développement économique. Par contre, lorsqu'il s'agit d'éducation, son rôle est beaucoup plus difficile à cerner, car les objectifs que se donnent l'école et l'éducation au sens large se réduisent et se déterminent plus difficilement par des analyses quantitatives. À cet égard, lorsque les instances en charge de l'éducation présentent des objectifs principalement d'ordre quantitatif (p. ex. augmenter la réussite scolaire de 10 %, réduire le décrochage par 7 %, etc.) plusieurs acteurs de l'éducation dénoncent rapidement et avec force le manque de considération pour la complexité

en activité mathématique authentique. De par la nature de l'activité mathématique des élèves, il est inévitable que l'enseignant soit, au même titre que les élèves, en train lui aussi de faire et de développer des mathématiques. (Pour en savoir plus sur le projet d'enseignement de Papert, voir l'analyse de Barabé et Proulx (2017)).

générale des phénomènes éducatifs. À titre comparatif, bien peu s'indignent ou même sont surpris lorsqu'on annonce des mesures économiques visant à réduire de x % le taux de chômage ou lorsqu'on souhaite réaliser une croissance de y % dans un secteur économique donné. Par contre, en éducation, ces mesures/objectifs semblent peu adaptés, alors que les enjeux éducatifs se caractérisent habituellement davantage en terme qualitatif. Ils sont remplis de nuances et de particularités.

1.2.1 L'entrée de l'ordinateur dans les écoles et l'enseignement programmé

Quand l'ordinateur fit son entrée dans les écoles, c'est principalement à travers une approche qu'on appelle « l'apprentissage assisté par ordinateur » ou encore, « l'enseignement/apprentissage programmé ». Tout ceci fut le résultat d'un changement bien plus large que celui des avancées technologiques. Déjà en 1926, S. L. Pressey, psychologue américain, décrit une petite machine destinée à faire passer des tests. La machine imaginée par Pressey permettait de poser des questions et offrait plusieurs réponses, parmi lesquelles une était choisie en appuyant sur une touche. Pressey décrivait lui-même sa machine comme un dispositif simple de testage, de contrôle et d'enseignement (Pressey, 1926). Malgré l'intérêt que les idées de Pressey auraient pu avoir pour les éducateurs, personne ne les a exploitées pendant environ 30 ans. Toujours en s'appuyant sur les développements en psychologie, Skinner, dès 1954, s'intéresse lui aussi aux machines à enseigner :

Elle [machine à enseigner] est un moyen d'alléger le travail parce qu'elle peut mettre un seul programmeur en contact avec un nombre infini d'étudiants. Cela peut suggérer la production de masse, mais l'effet sur chaque étudiant est, de façon surprenante, semblable à celui d'un précepteur privé. La comparaison est valable de plusieurs points de vue... (Skinner et Burrhus, cité de Pocztar, 1971, p. 21.)

La réussite du projet de Skinner est en grande partie due à ce que Pocztar (1971) appelle la « pression technologique ». Suite à la Seconde Guerre mondiale, un énorme besoin d'enseignement dans tous les pays du monde s'est fait sentir, principalement dans les pays en voie de développement, et il y a eu une forte demande pour de la

formation accrue et spécialisée, principalement dans les pays industrialisés. Ainsi, les besoins d'enseignement se sont développés plus vite que l'accroissement démographique. Or, cette explosion scolaire n'était pas un fait isolé. Elle a traduit ou motivé d'autres phénomènes de progression spectaculaire concernant l'économie, la science, la technique, etc. si bien que toutes les croissances rapides constatées ailleurs se traduisent et s'additionnent en « besoins d'enseignement ». On comprend que, sous la pression de ceux-ci, il fallait chercher activement des solutions avec le souci de trouver vite des moyens de répondre à ces besoins massifs et en tenant compte de la pénurie des enseignants. Ce sont bien des méthodes et techniques nouvelles pour une situation nouvelle qu'il fallait découvrir, techniques capables de multiplier l'efficacité de chacun. (Pocztar, 1971).

Cette forte demande est venue changer certaines des considérations de l'enseignement, notamment et principalement celle de l'efficacité. À titre d'exemple, l'échec scolaire était soudainement devenu un véritablement problème, simplement parce qu'il touchait maintenant un très grand nombre de personnes (suite à la croissance disproportionnelle des besoins de formation par rapport à la croissance du corps professoral). C'est ainsi qu'on parle d'efficacité, de rendement, de contrôle du processus d'enseignement, et ce langage traduit une manière nouvelle d'envisager les problèmes d'enseignement. Il semble bien qu'en cela la réflexion pédagogique reflète à la fois le renouvellement de la pensée technologique et l'apport des sciences humaines.

Il y avait donc un fort besoin de changements en éducation manifesté par les besoins culturels, suite à l'essor sociétal important en économie, en sciences et en technologie. C'est dans ce contexte, où chaque détail ci-haut mentionné est important à la réalisation du changement encouru, que l'enseignement programmé a complètement dominé, dans les années 60 et pendant plusieurs décennies, le monde de l'éducation. L'idée de Pressey en 1926 dut donc attendre 50 ans avant de se

retrouver dans un contexte culturel propice à son développement. Les avancées technologiques n'ont pas inventé l'enseignement programmé, mais elles ont été nécessaires pour lui permettre de devenir un des courants éducatifs les plus influents de l'ère moderne.

Aujourd'hui, de façon un peu caricaturale, on associe à l'enseignement programmé l'idée d'un enseignement rigide et prédéfini, assisté par ordinateur, par lequel l'élève est mis en relation avec le savoir. La finalité est de voir l'élève acquérir un savoir standardisé. En ce sens, l'utilisation du terme « programmé » fait référence à un processus bien établi, hiérarchisé, voire algorithmique; des termes souvent associés à l'ordinateur. L'enseignement programmé peut être décrit comme une situation où la technologie est utilisée pour vérifier les connaissances et corriger les lacunes des élèves, à travers une rétroaction du type « vrai » ou « faux », ou encore, « bon » ou « mauvais ».

1.2.2 La position de Papert

Ce détour par l'enseignement programmé avait pour but d'établir un contraste important avec les idées proposées par Papert sur l'impact de la technologie dans l'environnement éducatif. Pour lui, la technologie ne peut révolutionner l'éducation qu'à travers une nouvelle compréhension de l'apprentissage, en termes de construction ou de production active et impliquée de la part de l'élève. En bref, la technologie doit transformer non pas uniquement les possibilités des apprentissages, mais la nature de ces apprentissages.

Évidemment, dans le contexte de l'enseignement programmé, c'est selon Papert l'ordinateur qui programme l'enfant : les savoirs sont prédécidés et l'enfant suit un parcours d'apprentissage et une progression tracés à l'avance « par » l'ordinateur. Pour vraiment tirer profit de ce que l'ordinateur rend possible en termes d'apprentissage, Papert (1980) croit que c'est plutôt l'inverse qui doit se produire, soit que ce soit l'élève qui programme l'ordinateur : une relation inversée où l'élève

se sert de l'ordinateur comme objet-pour-penser-avec, pour explorer, pour faire et pour construire des mathématiques.

Sans rejeter complètement les possibilités de l'ordinateur dans une perspective d'enseignement programmé, Papert la considère insuffisante comme orientation et propose plutôt la possibilité d'une réorganisation complète de la relation entre les mathématiques et l'élève à travers l'utilisation de l'ordinateur, une réorganisation aux antipodes de l'enseignement programmé :

It is not true to say that the image of a child's relationship with a computer I shall develop here goes far beyond what is common in today's schools. My image does not go beyond: It goes in the opposite direction. (1980, p. 5)

Et cette vision, dix ans plus tard, il l'explique aussi en termes d'une réorganisation complète du processus éducatif :

When we talk about computers in education, we should not think about a machine *having* an effect. We should be talking about the opportunity offered to us, by this computer presence, to rethink what learning is all about, to rethink education. (Papert, 1990. p.3. italique dans l'original).

C'est cette vision sur la réorganisation de la relation entre les mathématiques et l'élève par l'ordinateur, cette réflexion sur le processus éducatif en mathématiques, qui est le moteur de mon intérêt en recherche. Pour mon projet de maîtrise, je souhaite explorer le sens qui peut être donné aux aspects transformateurs de la technologie pour l'apprentissage des mathématiques.

Mais comment parler de ces aspects? S'agit-il de s'intéresser à ce que la technologie *permet* de faire en classe ? Ou encore, à comment elle *modifie* les stratégies de résolution ou à comment elle *améliore* la rapidité de calcul ? Y a-t-il lieu de se poser des questions d'un autre ordre ? Par exemple, peut-on observer comment la technologie influence le raisonnement mathématique ? Est-ce que la technologie transforme les mathématiques en elles-mêmes ?

Par contre, il n'y a pas que Papert qui ait pensé aux effets de la technologie sur l'éducation et l'apprentissage des mathématiques. C'est en effet un domaine vibrant en didactique des mathématiques. Ainsi, pour mieux situer mon travail de recherche et mon orientation par la perspective de Papert sur les effets de la technologie, je me penche maintenant sur d'autres travaux qui s'intéressent à des questions similaires, ce qui met de l'avant certaines dimensions des perspectives actuelles sur la présence (ses effets, son rôle, etc.) de la technologie dans l'apprentissage des mathématiques. Dans ce qui suit, deux perspectives globales sont relevées des écrits en didactique des mathématiques sur les effets de la technologie sur l'apprentissage des mathématiques.

1.3 Deux perspectives sur les effets de la technologie

Évidemment, la technologie au sens large et sous une forme ou une autre existe depuis toujours en mathématique. L'abaque, le papier, le crayon de plomb, les instruments de géométrie, la calculatrice, etc. peuvent tous être vus comme des « technologies » qui ont eu une influence remarquable sur l'apprentissage des mathématiques. À l'instar des « nouvelles technologies » qui nous intéressent aujourd'hui, elles ont forcé des changements de pratique. Et ces changements de pratique se situent à un niveau profond, qui semble être dans la nature même de la technologie. En ce sens, certains chercheurs vont jusqu'à questionner ce que veut dire « apprendre les mathématiques » en présence des nouvelles technologies.

Ainsi, les travaux portant sur les effets de la technologie en mathématique, parfois implicitement, parfois non, sont contraints par la posture qu'ils adoptent sur le potentiel inhérent de la technologie sur l'activité humaine. Ces postures peuvent se regrouper sous deux grandes perspectives, soit la *perspective utilitaire* et la *perspective transformatrice*, qui se différencient par la façon dont elles conçoivent ce que la technologie apporte à l'apprentissage des mathématiques.

1.3.1 La vision utilitaire du potentiel technologique sur l'apprentissage des mathématiques

Dans une vision utilitaire, la technologie éducative représente une ressource à exploiter, au même titre que le coton pour faire des vêtements (ressource matérielle) et les humains pour la productivité d'une entreprise (ressource humaine). Il faut ainsi en tirer profit pour ce qu'elle offre de concret et faire mieux que ce qui était possible sans elle.

Un exemple concret d'une vision utilitaire des effets de la technologie sur l'activité mathématique est donné par Pea (1987), lorsqu'il explique/critique le fait que la technologie est trop souvent vue comme un amplificateur de l'activité. Du latin *amplificare*, amplifier réfère essentiellement à une augmentation de quelque chose. Ainsi, sous cette métaphore, et appliqué aux mathématiques, Pea explique que la technologie est pensée en termes d'outil qui *augmente*, *accélère* et *améliore* ce qui est fait mathématiquement. D'ailleurs, il suffit de considérer à peu près n'importe quel texte en recherche portant de près ou de loin sur les effets de la technologie sur l'apprentissage pour réaliser à quel point cette dernière est parlée en termes amplificateurs, tels qu'« ajoute », « améliore », « accélère », « augmente la puissance », « précise », etc. Bien sûr, il peut être difficile d'être critique face à cette caractérisation de la technologie. Alors qu'il peut sembler s'agir là de la seule façon d'en parler, ce n'est pourtant pas nécessairement le cas, et c'est d'abord, pour Pea, un choix que de se positionner ainsi face aux effets de la technologie sur l'activité mathématique.

Ainsi, on y reconnaît là la vision presque *de facto* de la technologie : la technologie qui se substitue au dur labeur. Comme l'explique Gramain (2010), à la fin du 19^e siècle, le mathématicien William Shanks passa 20 ans de sa vie à calculer les 707 premières décimales de pi. Or, imaginons un peu la réaction de ce dernier s'il savait qu'il est possible, aujourd'hui, à un enfant de faire le même travail en l'espace

d'une seule journée avec une calculatrice qui coûte le même prix qu'un paquet de gomme, et fort probablement sans erreur.⁵

Cette vision d'amplification concernant les effets de la technologie est très présente dans l'opinion publique (journaux, instances gouvernementales, etc.). Le discours courant sur la calculatrice est un exemple illustrant cette notion d'amplification. Parce qu'elle libère des calculs longs et fastidieux, souvent très techniques, la calculatrice peut être perçue comme un outil capable de régler les aspects techniques et encombrants pour nous permettre d'en faire plus, d'aller plus loin dans notre activité mathématique en se concentrant sur des aspects souvent dit « plus conceptuels ». Sous la perspective de l'amplification, la calculatrice augmente nos possibilités (en termes d'ordre de grandeur) et notre vitesse de calcul.

On retrouve certains exemples de ce confinement dans les séries de science-fiction, principalement celles des années 1980, où l'ordinateur n'était pas encore ce qu'il est aujourd'hui, et ce, même si les scénarios n'avaient pas à conjuguer avec les limitations technologiques de l'époque. Ainsi, la science-fiction pouvait théoriquement présenter à l'écran (ou dans les livres) une vision de ce que pourrait un jour représenter la technologie pour la vie de l'homme. Par exemple, pour reprendre un exemple tiré d'un livre de Papert (1980), dans le célèbre vaisseau *Enterprise* de la série culte Star Trek se trouve un ordinateur ultra puissant capable de répondre rapidement aux questions très complexes de l'équipage. Pourtant, malgré l'aspect impressionnant de la vitesse d'exécution et d'adéquation de la machine, aucun effort n'est fait pour illustrer *comment* la présence d'un tel instrument pourrait affecter la façon de penser de l'équipage, ou encore, leur façon de faire face à un problème. Cette machine est alors un outil qu'on exploite, qui amplifie les possibilités, mais qui ne transforme pas en retour.

⁵ On se rappellera que William Shanks a fait une erreur à la 528^e décimale.

Or, bien que pour Pea (1987) une analyse en termes de paramètres quantitatifs, comme l'efficacité ou la rapidité d'apprentissage puisse décrire les changements encourus par la présence de la technologie en mathématique, et que l'aspect utilitaire de la technologie peut difficilement être nié, sa mise en garde est tout aussi claire : la technologie porte en elle beaucoup plus, elle porte un vent transformateur qui ne se réduit pas à une vitesse d'exécution ou à une simple « utilisation ». Pour lui, si nous nous confinons uniquement à une perspective utilitaire des effets de la technologie, *des changements plus profonds sont ignorés*. Il y a plus que les aspects utilitaires à observer et à comprendre de l'utilisation de la technologie en mathématique (scolaire).

1.3.2 La vision transformatrice du potentiel technologique sur l'apprentissage des mathématiques

On retrouve de plus en plus de travaux s'intéressant à la technologie comme un facteur de changements profonds pour l'apprentissage des mathématiques où on y fait régulièrement état des pratiques qui sont changées par l'intégration massive de la technologie en éducation, mais aussi des effets sur la formation et les curriculums d'étude (Artigue, 1997, 1998, 2000; Coen, 2007; Charlier, Daele & Deschryver, 2002; Hoyles & Lagrange, 2010; Kaput & Thompson, 1994; Linard, 2002). Par exemple, on peut argumenter que l'utilisation des tableaux blancs interactifs ne représente pas uniquement une surface de travail différente pour écrire, soit numérique plutôt qu'analogique, mais que cet outil entraîne un changement plus profond dans la pratique.⁶

⁶Pour s'en convaincre, il suffit de voir les besoins de formation exprimés de la part des enseignants pour apprendre à l'utiliser et l'intégrer dans leurs enseignements. Le modèle sur l'intégration de la technologie en classe SAMR (Puentedura, 2010) présente d'ailleurs le changement de pratique comme le plus haut niveau d'intégration de la technologie. Appliqué à l'enseignement des mathématiques, ce modèle propose d'analyser comment l'utilisation de la technologie influence ce que l'enseignant fait, et ce qu'il fait faire. Selon ce modèle, une action technologique peut offrir une amélioration (substitution et augmentation) ou une transformation (modification et redéfinition) de ce qui est fait. La substitution n'offre pas de changement fonctionnel, elle ne fait que répliquer l'ancienne utilisation

Devant ces changements de leur environnement de travail, les enseignants cherchent à exploiter, à faire autrement, à faire mieux et plus vite (les mathématiques). Ces questions dépassent largement les aspects techniques pour inclure des considérations didactiques, pédagogiques et épistémologiques, des aspects auxquels un technicien informatique ne peut pas répondre.

En lien avec ces changements profonds associés à la technologie en mathématique, Pea (1987) présente une autre vision possible des effets de la technologie sur l'apprentissage. Il parle d'une *réorganisation* de la relation entre le savoir et le sujet comme effets de la technologie sur l'activité mathématique. S'appuyant sur des idées issues du courant socioculturel, Pea explique comment l'être est sans cesse en *devenir* à travers une boucle infinie d'influences réciproques avec le monde : « Our productive activities change the world, thereby changing the ways in which the world can change us. » (p. 93) Dès lors, par la création d'instruments physiques⁷, nous changeons notre façon d'expérimenter et de transformer le monde, ce qui inévitablement change la façon dont le monde nous influence en retour. Pour prendre l'exemple de la calculatrice, calculer avec une machine plutôt que sur nos doigts (ou avec des algorithmes papier-crayon, qui sont eux aussi des instruments) modifie la relation entre l'élève et les calculs. Non seulement la calculatrice permet de calculer plus rapidement et avec de plus grands nombres, mais les actions nécessaires pour réaliser ces calculs sont complètement différentes: calculer avec une nouvelle technologie conduit à une nouvelle « structure fonctionnelle du calcul » (p. 93). C'est

alors que l'augmentation remplace une pratique existante en offrant une amélioration fonctionnelle. En fait, la différence entre substitution et augmentation est très subtile et importe peu – l'idée générale du volet **amélioration** est celle qu'il est possible d'utiliser de nouveaux outils technologiques tout en conservant des pratiques traditionnelles, mais en augmentant l'efficacité ou encore la productivité. La modification et la redéfinition font quant à eux partie du deuxième volet, celui de la **transformation**. La modification fait référence à la technologie qui reconfigure significativement la tâche alors que la redéfinition de tâche signifie que la technologie permet de faire des activités qui seraient tout simplement inconcevables sans elle. De façon générale, ce deuxième volet s'intéresse au pouvoir transformateur de la technologie sur les activités.

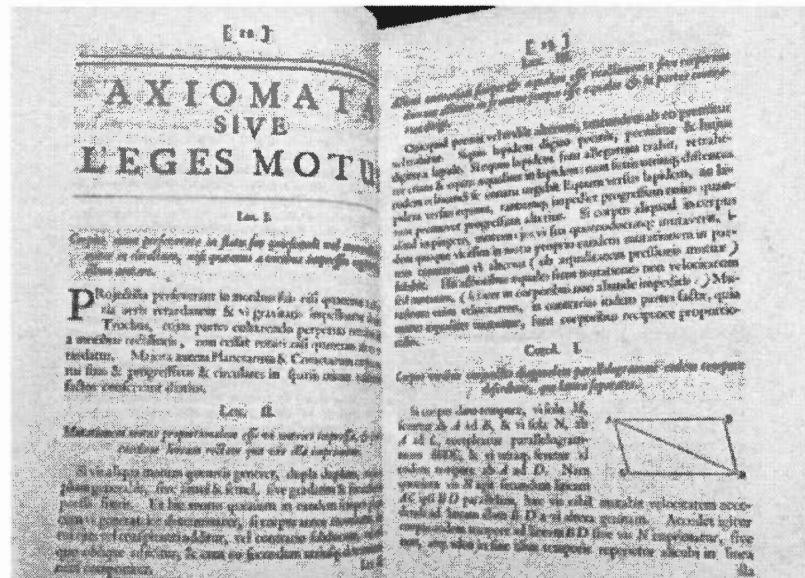
⁷ Une dimension qui ramène bien la notion de constructeur des travaux de Papert.

dans ce sens qu'on peut y reconnaître ce qu'on appelle un changement de paradigme: faire une addition avec une calculatrice est *autre chose* qu'additionner mentalement, ou de le faire sur papier, ou avec un boulier...

Cela dit, l'argument de la calculatrice ne semble peut-être pas suffisant pour se convaincre de la présence de changements profonds pour nos manières de faire les mathématiques et pour les idées mathématiques mêmes. Or, d'autres chercheurs ont repris une idée similaire, notamment Rabardel (1995). Ce dernier propose une vision d'influence réciproque, qu'il a appelée l'approche instrumentale, parlant non seulement de la transformation de la pratique par l'instrument, mais aussi, en retour, d'une transformation de l'instrument par la pratique. Il s'agit alors d'une boucle récursivo-transformatrice. Dans cette vision, faire des mathématiques à l'aide d'outils (technologiques) transforme la pratique à mesure qu'elle est instrumentée, qui transforme en retour l'outil (l'utilisateur adapte l'outil à ses nouveaux besoins), qui transforme en retour la pratique (p. ex. par ce que l'outil permet alors de faire), etc. L'approche instrumentale s'intéresse aux transformations associées à nos façons de faire en mathématiques.

Dans cette idée de transformation de la pratique mathématique par l'outil (technologique, dans notre cas), Hoyles et Noss (2009) vont encore plus loin et proposent que ce n'est pas uniquement l'activité et l'instrument qui sont transformés, mais aussi les idées mathématiques en elles-mêmes. Ils argumentent que le développement des idées mathématiques dépend des outils de représentations culturelles accessibles aux praticiens et de ce que ces outils rendent possible, en réponse aux besoins de la société. Par exemple, alors que les mathématiques d'aujourd'hui sont très liées aux expressions et aux représentations algébriques, cela ne fut pas toujours le cas. Par exemple, c'est avec *la géométrie* (schémas et descriptions verbales géométriques) que Newton présenta, dans *Principa*, ses lois sur le mouvement (et bien d'autres notions mathématiques). Ainsi, ce n'est pas avec

l'algèbre et son langage formel/fonctionnel, comme c'est habituellement aujourd'hui le cas (Hoyles et Noss, 2009). La Figure 1.1 permet d'illustrer le contraste entre ces deux approches pour la représentation de ces « mêmes » lois du mouvement.



$$\sum \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

Figure 1.1 Lois du mouvement de Newton tel que présentées dans *Principia* (1773) et sous leur forme moderne

Il y a donc cette idée des mathématiques qui sont ancrées dans leurs époques respectives, époques qui sont définies par toutes sortes de contraintes, de besoins et de particularités. Les lois de Newton, lors de leur introduction et sous leur forme algébrique, ne sont donc pas dans le même contexte et font référence à autre chose, à une autre culture mathématique et même à d'autres mathématiques en quelque sorte.

The discourse of mathematics is inevitably expressed within a set of semiotic tools, so it is reasonable to conjecture that mathematical cognition

evolves alongside the representational systems afforded by these tools (for related work on the shaping of representations, see Nunes, Schliemann & Carraher, 1993). The tools are cultural in the sense that they have evolved historically in response to the demands of mathematics itself, and, of course, the historical demands of the societies that gave rise to new mathematics. Modern mathematics in particular is intimately tied to algebraic expression – but this was not always so: consider, for example, the geometrical (and to us now, baroque) way that Newton expressed his laws of motion in *Principia* (diSessa, 2000). (Hoyles et Noss, 2009. p.2)

À l'époque de Newton, faire des mathématiques était principalement faire de la géométrie. De nos jours, les mathématiques sont exprimées de façon algébrique, où le symbolisme occupe une place importante. La géométrie analytique est un exemple intéressant de cela. Certes, les mathématiques travaillées dans des environnements différents ne se ressemblent, en apparence du moins, pas beaucoup.

Jackiw et Sinclair (2009) poussent un peu plus loin cette perspective dans laquelle les mathématiques sont influencées par les besoins de la culture et les outils qui sont à la portée de ceux qui font les mathématiques. Ils expliquent que les mathématiques ne dépendent pas uniquement des outils et de ce qu'ils rendent disponible et des besoins de la société, mais aussi, d'une façon plus intime/personnelle, des intérêts de leurs praticiens, de ce qu'ils décident d'entreprendre ou de négliger. De plus, Sinclair et Yurita (2008) illustrent comment le fait, pour des élèves, de travailler la géométrie dans un environnement informatique, soit la géométrie dynamique, a changé leur discours sur les objets géométriques. Pour Sinclair et Yurita, ceci témoigne d'un changement de compréhension profond, qui peut même selon elles se manifester et se maintenir en environnement papier-crayon : « Of course, having seen dynamic representations, students might use the new routines on static shapes - dragging and transforming them in their imagination. » (p. 148).

Ces exemples de transformation pointent aussi, bien que timidement, sur la dimension épistémologique derrière les changements que la technologie apporte. Dans ce cas, le logiciel de géométrie dynamique est vu comme ayant transformé

« l'imaginaire » des élèves, soit ce qu'est la géométrie, comment on la fait et comment on la pense. Cette perspective semble bien placer la notion de transformation de l'activité mathématique au cœur de l'impact de la technologie sur l'apprentissage des mathématiques des élèves. On constate dès lors une certaine rupture entre les deux perspectives que j'ai présentées jusqu'à maintenant (la perspective utilitaire en 3.1 et la perspective transformatrice en 3.2) puisqu'elles diffèrent dans leur conception des mathématiques elles-mêmes. L'une fait en effet référence implicitement à l'existence de mathématiques finies et invariables, sans égard à l'activité même de faire des mathématiques, alors que l'autre laisse la porte ouverte à des mathématiques vivantes qui n'existeraient qu'à travers l'activité.

En considérant tous les aspects présentés en 3.2, Papert semble aller encore plus loin que la transformation de l'activité mathématique et parle quant à lui d'une transformation possible des mathématiques en elles-mêmes. La prochaine section aborde cette perspective, ce qui mène par la suite au développement de mes objectifs de recherche.

1.4 Papert et la transformation des mathématiques

Pour Papert, l'environnement informatique permet de faire des mathématiques d'une façon bien différente de ce que l'on rencontre généralement à l'école (par l'écriture de programmes, le débogage, etc.). Ceci l'amène à postuler que la forme que prennent les idées mathématiques dans ce contexte est elle aussi changée. Par exemple, la géométrie Tortue pour Papert donne aux enfants du primaire un accès aux idées à la base du calcul différentiel et leur permet d'en avoir une compréhension intuitive. Ainsi, faire de la géométrie en traçant un cercle ou une maison dans l'environnement Logo, en positionnant correctement les figures dans cet environnement informatique, est non seulement une forme de géométrie différente de celle pratiquée à la règle et au compas, mais aussi un environnement qui réorganise ce qui est accessible mathématiquement aux élèves (p. ex. ce qui signifie un cercle) (Papert, 1980). En ce

sens, la technologie semble transformer les mathématiques, leur nature, leur sens. On peut résumer la vision de Papert de la rencontre des idées mathématiques en environnements technologiques de la façon suivante : faire des mathématiques différemment, c'est faire des mathématiques différentes.

En ce sens, l'exemple ci-haut des lois du mouvement de Newton mentionné par Hoyles et Noss peut être vu comme allant beaucoup plus loin qu'une simple différence de forme. Pour Papert, ceci peut décrire une différence, un changement, sur ce que sont les mathématiques en elles-mêmes d'une époque à l'autre. Dans d'autres mots, la culture (dans sa dynamique de changement continu) transforme comment on fait les mathématiques. Et changer comment on fait les mathématiques change aussi les mathématiques elles-mêmes. Hoyles et Noss pointent d'ailleurs implicitement dans cette direction avec l'affirmation suivante concernant les différents contextes professionnels d'activité mathématique : « As mathematical knowledge is embedded in new settings and activities, it undergoes an epistemological and cognitive transformation » (Noss, 2002, p. 55).

Si on accepte que les mathématiques *sont* d'abord le fruit de ce que ceux qui en *font* veulent bien qu'elles *soient*, (à travers ce qu'ils *font*), il est moins surprenant de réaliser qu'en influençant comment on fait les mathématiques, la culture change comment les gens *font* les mathématiques, et ainsi, ce que *sont* les mathématiques.

Ainsi, la technologie ne transformerait pas seulement comment les mathématiques s'apprennent, mais aussi les mathématiques elles-mêmes. En fait, Papert est convaincu que la technologie comme *objet-pour-penser-avec* a le potentiel de transformer ce que veut dire apprendre puisque tout l'être, une fois exposé à la technologie, n'est plus jamais le même. Ainsi, même lorsque la technologie n'est pas physiquement présente, c'est le processus d'apprentissage lui-même qui est modifié, et les effets de la technologie sont encore bien présents et ils transforment l'activité humaine (c'est l'hypothèse que font implicitement Sinclair et Yurita (2008)). Ainsi,

puisque la technologie est un acteur important de changement social et culturel, pourrions-nous penser que, au même titre que les intérêts de celui qui fait les mathématiques, la technologie, au-delà d'une simple influence, transforme l'allure, ou, plus puissamment encore, la nature de l'activité mathématique? Cet aspect fondamental du changement, que Papert a présenté comme une façon de concevoir les choses, oriente mon projet de maîtrise.

1.5 Objectifs / questions de recherche

Lorsque je regarde ce que la présence de la technologie apporte aujourd'hui en mathématique, j'en viens naturellement à me demander si on conçoit réellement les changements profonds sur l'activité mathématique, sur l'apprentissage des mathématiques et sur les mathématiques en soi dont parle Papert. En fait, que sont-ils et que peuvent-ils être? Pour Papert, ces changements sont d'ordre qualitatif, ils s'attaquent davantage à la nature même de ce qu'on entend par « éducation », « savoirs mathématiques », « apprentissage » et « apprentissage des mathématiques ». Par contre, mis à part les avoies énoncés, Papert ne décrit pas concrètement les changements dont il parle, principalement parce qu'il est difficile, voir impossible, d'imaginer l'impact futur d'une technologie qui évolue aussi rapidement que l'ordinateur sans imposer à notre vision les propriétés et contraintes de l'époque dans laquelle on se situe à ce moment.

À travers l'œuvre visionnaire de Papert, on retrouve différentes dimensions transformatrices pour l'apprentissage des mathématiques. Selon lui, la technologie transforme :

- comment on fait les mathématiques;
- ce qu'est une erreur mathématique / l'expertise en mathématique;
- les idées mathématiques elles-mêmes;

- comment on pense les idées mathématiques *avec* et même *sans* la (présence directe de la) technologie.

Dans le but d'explorer ces diverses dimensions possibles de la transformation, ma recherche se penche sur les apports possibles (pour l'apprentissage des mathématiques) de logiciels/environnements technologiques pensés spécifiquement pour l'apprentissage des mathématiques (scolaires). C'est sur ce thème que je me penche dans mon mémoire, en m'intéressant à la présence de la technologie en éducation aujourd'hui et aux changements profonds sur la nature même des objets ci-haut mentionnés qu'il est possible d'observer. En particulier, mon mémoire se penche sur les questions de recherche suivantes :

- *Dans la perspective de Papert, quelles sont les possibilités transformatrices de la technologie pour l'activité mathématique?*
- *Comment peut-on reconnaître ces aspects dans certains logiciels récemment développés pour faire des mathématiques avec des élèves?*

Ce sont ces questions de recherche qui guident mon travail de recherche dans les pages qui suivent. Dans un premier temps, pour répondre théoriquement à ces questions, le prochain chapitre aborde les questions de transformation à travers les concepts de micromonde, d'objet-pour-penser-avec et de débogage, au cœur de la vision de Papert de la technologie.

[...] the serendipitous discoveries, the bugs, and the mathematical insights all require movement to be appreciated.

Seymour Papert, 1980

CHAPITRE II

CADRE CONCEPTUEL

Dans le but de présenter en termes d'aspects transformateurs les effets de certains environnements technologiques pour l'activité mathématique, je vais développer les trois concepts clefs suivants, mis de l'avant par Papert (principalement dans son livre *Mindstorms* de 1980) :

1. micromonde;
2. objet-pour-penser-avec;
3. débogage.

La géométrie Tortue (Logo) me servira d'exemple dans l'élaboration de ces trois concepts clefs. Cet environnement particulier pour le travail mathématique est une manifestation de la vision de Papert sur l'activité mathématique en contexte technologique. En ce sens, la géométrie Tortue représente l'illustration idéale pour présenter/concevoir les aspects transformateurs que peut avoir la technologie sur les mathématiques et son activité. Ces exemples d'aspects transformateurs pour l'activité mathématique me serviront d'ancrage théorique lors de mes analyses de trois environnements technologiques récents conçus pour l'apprentissage des mathématiques.

2.1 Qu'entend-on par « aspect transformateur » de la technologie?

2.1.1 Les changements d'ordre quantitatif et qualitatif de Pea

Pea (1980), comme discuté dans le chapitre précédent, rapporte qu'il est possible de s'intéresser à deux types de changements dans l'activité mathématique produits par la technologie : des changements d'ordre quantitatif et des changements d'ordre qualitatif. S'intéresser aux effets quantitatifs de la technologie (ou ne voir que ceux-là), c'est se placer dans une perspective d'amplification. L'accent est alors sur les effets « plus directs » de la puissance technique de la technologie sur l'activité mathématique : la technologie permet de faire davantage, de faire mieux, de faire plus rapidement. Dans une perspective d'amplification, la calculatrice est principalement perçue comme un moyen de faire rapidement des additions ou des divisions, par exemple, ce qui permettra en retour de traiter des problèmes plus lourds de ce point de vue (p. ex. composition de tout un panier d'épicerie vs choix de quelques articles). En ce sens, il s'agit aussi d'une vision où la mécanisation/automatisation des opérations par l'instrument occupe une grande place.

En contrepartie, s'intéresser aux effets qualitatifs de la technologie sur l'activité mathématique, c'est se placer dans une perspective de réorganisation. On pense alors les effets de la technologie comme réorganisant le travail mathématique, les manières de faire, de raisonner, de travailler. Dans ce cas, on considère surtout comment la puissance de calcul de la calculatrice peut nous conduire à traiter des problèmes mathématiques de façon différente, voire traiter de nouveaux types de problèmes. Le changement est alors perçu comme étant plus profond, puisqu'on lui associe une redéfinition du travail mathématique. En quelque sorte, il ne s'agirait plus des mêmes mathématiques. On peut par exemple penser aux types d'activités mathématiques où la calculatrice est utilisée pour faire découvrir des régularités dans le développement décimal de certains quotients. Bien que possible en environnement papier-crayon, on sent que la calculatrice, par ses caractéristiques, encourage vers/favorise ce genre

d'activité. L'approche de Pea sur l'ordre des changements que peut offrir la technologie, parce qu'il dit bien que la technologie peut à la fois apporter des changements quantitatif et qualitatif, offre une coupure assez nette entre les aspects transformateurs (qualitatifs) et les aspects d'amplification (quantitatifs).

Thus, the amplifier metaphor for the roles of technologies in mathematical thinking leads one to unidimensional, quantitative theorizing about the effects of cognitive technologies. Pea (1987), p. 94

Sous la perspective de Pea, on peut ainsi observer et qualifier les changements qu'entraîne la technologie comme étant soit quantitatifs, soit qualitatifs. Par contre, cette approche compartimentalisée n'est pas la seule façon de penser la nature d'un changement d'ordre technologique. À cet effet, le regard de Lévy (1990) apporte un complément intéressant.

2.1.2 Le continuum entre quantitatif et qualitatif selon Lévy

Lévy (1990), dans son ouvrage philosophique sur la question de l'intelligence et de la communication, propose une analyse historique suivant laquelle les effets d'un changement sont perçus dans un continuum plutôt que de façon binaire; il n'y a donc pas de démarcation claire :

Qu'on m'entende bien : la succession de l'oralité, de l'écriture et de l'informatique comme modes fondamentaux de gestion sociale de la connaissance ne s'opère pas par simple substitution, mais plutôt par complexification de déplacement des centres de gravité (Lévy 1990, p.10)

Ainsi, le changement lui-même ne s'opère pas instantanément (n'arrive pas à terme immédiatement du moins); sa nature ne se découvre qu'avec le temps. La nature d'un changement n'est donc pas simplement quantitative ou qualitative, c'est d'une certaine façon beaucoup plus nuancé que cela. En fait, il s'agit plutôt d'un déplacement progressif entre les deux « états ». Reprenant l'exemple de Lévy, il a fallu un certain temps avant que l'écriture transforme notre façon de penser, y compris en mathématique. D'abord, l'écriture a servi à « amplifier » le mode de

communication principal de l'époque, la parole. On écrivait pour conserver plus longtemps les choses qui étaient dites, de sorte que si quelqu'un les oubliait, il était possible de les ressortir. Les tablettes sumériennes et les papyrus égyptiens sont des témoins de telles époques.

Cela dit, il fallut attendre que le papier devienne beaucoup plus accessible pour que des algorithmes tels que nous en connaissons aujourd'hui se répandent véritablement et remplacent les tables à calculer, par exemple. On peut cependant noter au final une transformation majeure de ce que multiplier des nombres signifie concrètement : déplacer des billes sur un boulier, ou tracer des chiffres sur du papier.

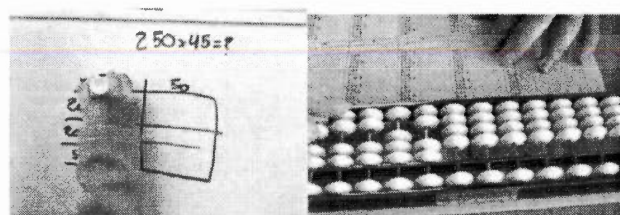


Figure 2.1 Différentes façons de multiplier des nombres

C'est un peu la même chose avec l'imprimerie : ce n'est pas à partir du jour où il fut possible d'imprimer plusieurs copies d'un livre que tout a changé (les façons de penser et de vivre). L'imprimerie fut d'abord un changement quantitatif en ce sens qu'elle permettait d'avoir *plus rapidement* un *plus grand* nombre d'exemplaires d'un même livre. Mais au fil du temps, la présence/circulation de ses multiples copies s'est intégrée aux habitudes de vie des gens et c'est alors qu'il est possible de voir des effets plutôt qualitatifs (sur la façon de vivre des gens). Par exemple, *Les Éléments* d'Euclide ont longtemps été recopiés à la main, faisant de chaque exemplaire un objet rarissime, et l'activité mathématique dont ils conservent la trace quelque chose à la portée d'une très petite élite, et pour un travail sans doute ponctuel et bien pesé. Aujourd'hui, il en circule des centaines de milliers de copies (sans parler des versions trouvées dans Internet et que chacun peut imprimer à sa guise), et bien peu

hésiteraient à laisser traîner la leur entre les mains de leurs enfants, ou à prendre des notes dans la marge (comme le fit Fermat dans sa copie d'un livre de Diophante!). Autant pour l'écriture que pour l'imprimerie, Lévy remarque que les gens (dans leur façon d'être, de vivre) se laissent peu à peu influencer par un changement d'abord d'ordre quantitatif, puis ces mêmes gens influencent en retour la nature du changement (pour répondre à leurs attentes), et éventuellement, ce sont les manières de faire/d'être qui ne sont plus les mêmes : c'est là qu'on constate, *a posteriori*, la présence d'un changement qualitatif. Ce continuum entre ce qui peut sembler d'abord être quantitatif et un changement plus profond, d'ordre qualitatif, n'était pas présent dans le propos de Pea.

L'ordinateur (et les technologies numériques) peut être conçu dans le même sens que l'écriture et l'imprimerie. Un argument similaire quant à la nature du changement qu'il encoure peut être fait. À l'image de ce que Lévy explique avec l'écriture et l'imprimerie, c'est à travers le temps, alors que les gens se laissent influencer par les nouvelles possibilités (quantitatives) offertes par la technologie et qu'ils l'influencent en retour, qu'éventuellement les manières d'être et de faire changent significativement. Il n'y a donc pas de rupture entre un changement d'ordre quantitatif et un changement d'ordre qualitatif : il s'agit d'un continuum.

2.1.3 L'exemple de la calculatrice

L'intégration de la calculatrice, dans les années 70, dans le milieu scolaire offre un exemple intéressant de ce continuum. En 1979, la synthèse de Suydam sur l'état (de l'époque) des travaux de recherche sur la calculatrice en milieu scolaire préuniversitaire, souligne que la grande majorité des premiers travaux de recherche autour de la calculatrice dans l'enseignement des mathématiques s'intéressait principalement à vérifier si l'utilisation d'une calculatrice en classe aurait des effets négatifs sur l'apprentissage des mathématiques tel qu'on le concevait sans la calculatrice. Dans ce contexte, la plupart des études (avant 1979) portaient très peu

d'attention à *comment* la calculatrice était utilisée en classe (alors que la calculatrice était déjà présente dans les milieux scolaires depuis quelques années). Conséquemment, peu d'efforts sont faits pour voir comment la calculatrice pourrait changer significativement les mathématiques et son enseignement.

While a number of studies have replicated the finding that use of calculators does not appear to have harmful effects on the mathematical achievement of students who use calculators, many of the studies have not carefully documented how the students or teachers use the calculators. Often the calculator is used "as the teacher or student sees fit" -- which may mean only for checking answers attained by paper-and-pencil computation or, worse, for activities which in actuality merely, affirm that the calculator can calculate. (Suydam, 1979. pp. 3-4)

On sent bien derrière les motivations de recherche ainsi que dans l'utilisation qu'il semble être fait de la calculatrice, que cette dernière n'avait encore, en 1979, qu'un effet très mineur sur les manières de faire et d'apprendre ainsi que sur les contenus mathématiques. Parallèlement et au fil du temps, d'autres chercheurs se sont intéressés plus finement à l'utilisation de la calculatrice dans la classe de mathématique. Certains ont notamment remarqué que son utilisation avait un effet positif sur la résolution de problème en mathématique.

Billy Hopkins found that calculators helped students in a ninth-grade basic mathematics course to achieve better problem-solving scores than non-calculator users did. (p. 4)

Les résultats de Hopkins sont différents des autres études en ce qu'Hopkins s'intéresse cette fois à une activité mathématique précise plutôt qu'à la réussite générale en mathématique : c'est encore une fois l'observation de changements d'ordre quantitatif, mais avec un intérêt plus grand sur les possibilités d'utilisation de la calculatrice, ce qui ouvre grandement la porte à l'étude des manières de faire avec la calculatrice. Et justement, quand certains chercheurs se sont penchés sur la façon avec laquelle la calculatrice était utilisée (dans les mathématiques scolaires), ils ont remarqué des choses surprenantes :

« Charlotte Wheatley considered the effect of calculator use on problem-solving strategies employed by children in grade 5, while Glendon Blume reported on how seventh graders solved equations. It appears that different strategies and solution methods are used with calculators than are used without calculators. In particular, the calculator makes the exploration of hypotheses feasible. » (Suydam, 1979. p. 4.)

Ce que Wheatley décrit ici, c'est que la calculatrice a influencé de façon générale les stratégies de résolution, mais ce qui est encore plus important pour mon propos, c'est qu'elle en rend certaines *plus réalisables*⁸ : « the calculator makes the exploration of hypotheses *feasible* ». Autrement dit, la calculatrice met en avant-plan, elle rend accessible, pas nécessairement de nouvelles stratégies, mais des stratégies qui n'avaient pas de puissance mathématique sans la calculatrice (p. ex. « exploration of hypotheses »). La calculatrice a donc permis d'influencer significativement le paysage mathématique dans la résolution de problèmes en donnant une pertinence mathématique à certaines stratégies qui, sans elle, n'avaient pas les moyens d'être. C'est en ce sens qu'aujourd'hui, lorsqu'on porte un regard global sur les effets de la calculatrice, on peut finalement dire qu'elle a eu un certain impact transformateur sur les mathématiques scolaires. À titre d'exemple, la présence de la calculatrice dans l'apprentissage des mathématiques a changé certains contenus d'enseignement. Notamment, autrefois les élèves (au Québec, du moins) devaient apprendre certains algorithmes de calcul (p. ex. algorithme du calcul de la racine carrée, du logarithme d'un nombre), alors que ce n'est plus le cas aujourd'hui. En fait, au lieu d'apprendre ces algorithmes par cœur, ce sont certaines fonctions de la calculatrice qui sont enseignées. La calculatrice et sa puissance de calcul (quantitatif) ont ainsi, avec le temps, influencé le contenu curriculaire—on n'apprend plus certains algorithmes, mais on apprend plutôt à utiliser les différentes fonctions de la calculatrice (qui « fait l'algorithme », en quelque sorte)—ce qui correspond à un changement bien plus

⁸ Dans la citation, l'utilisation du mot *feasible* ne vise pas à rendre compte du fait que la calculatrice aurait rendu possible quelque chose qui ne l'était pas sans elle (« exploration of hypotheses »), mais bien qu'elle a rendu une certaine approche pour le travail mathématique réalisable dans les contraintes du milieu (p. ex. le temps limité).

profond. On peut même se demander si ce ne sont pas tous les algorithmes du calcul arithmétique qui disparaîtront éventuellement (p. ex. l'algorithme de la division euclidienne).

Dans cet exemple, on voit comment les changements et leur « nature » (quantitatif $\leftrightarrow$ qualitatif) ne sont pas nécessairement accompagnés de coupures, mais comment ils peuvent s'entrecouper et coexister. Au départ, la calculatrice permettait sans doute de faire l'algorithme plus rapidement (changement d'ordre quantitatif), mais maintenant, c'est l'algorithme qui a disparu du curriculum d'apprentissage par la présence de la calculatrice (changement d'ordre qualitatif). Voilà pourquoi je dis qu'il n'y a pas de rupture entre un changement d'ordre quantitatif et un changement d'ordre qualitatif, et que c'est plutôt un continuum. En ce sens, les changements d'ordre quantitatif font aussi partie de changements d'ordre qualitatif, et le contraire aussi puisqu'ils sont interconnectés.

À la lumière de cette double entrée sur la transformation, la prochaine section développe les aspects transformateurs sous l'angle des idées de Papert sur l'apport de la technologie pour l'apprentissage des mathématiques. Je m'intéresse à comment ces aspects transformateurs prennent forme dans l'environnement informatique de travail mathématique de la géométrie Tortue.

2.2 Les aspects transformateurs dans une perspective papertienne

Avec la présentation de trois concepts clefs de *micromonde*, d'*objet-pour-penser-avec* et de *débogage*, Papert pose des bases solides sur lesquelles s'appuyer pour concevoir une vision transformatrice des effets de la technologie pour l'activité mathématique. Sans entrer immédiatement dans les détails : le *micromonde* est le nom donné par Papert aux environnements informatiques de travail offrant un certain ensemble de possibilités et de caractéristiques pour l'apprentissage; *l'objet-pour-penser-avec* représente le moteur de l'activité mathématique au sein du micromonde;

le *débogage* décrit quant à lui une partie centrale de l'activité qui prend place au sein du micromonde.

C'est à travers l'environnement de la géométrie Tortue que Papert donne vie à ces trois concepts. Il s'agit d'un environnement géométrique de programmation, basé sur le langage Logo, aussi le fruit du travail de l'équipe de Papert. La géométrie Tortue est un environnement de programmation pour/dans lequel les enfants peuvent faire des mathématiques. Dans les prochaines sous-sections, j'explique en quoi la géométrie Tortue est un *micromonde* dans lequel on peut identifier clairement un *objet-pour-penser-avec* qui, dans son comportement, amène l'utilisateur à le *déboguer*. Ce qui ressort de cela, ce sont des mathématiques, et des façons de faire des mathématiques qui sont transformées.

2.2.1 Micromonde

Selon Papert, un micromonde est un environnement puissant d'investigation dans lequel l'élève est plongé et qui a sa propre cohérence de fonctionnement. Il possède donc ses propres règles, ses contraintes et son contexte : c'est un monde, micro. De plus, malgré ses contraintes matérielles, un micromonde devrait n'avoir aucune contrainte quant à l'exploration qui peut y prendre place : la puissance d'un micromonde réside dans le fait qu'il est riche en possibilités d'exploration, que Papert dit même infinies. En somme il a été pensé ainsi comme l'explique Papert :

« Although there are constraints on the materials, there are no constraints on the exploration of combinations. [...] the power of the environment is that it is "discovery rich." » (Papert, 1980. p. 162).

On dira aussi qu'un micromonde favorise un apprentissage piagétien, c'est-à-dire un apprentissage qui ne suit pas de chemins prédéterminés, sans curriculum précis, et qui prend racine dans les actions de celui qui apprend, et non dans les intentions d'une personne extérieure. Ainsi, l'activité mathématique en contexte de micromondes se

place sous une posture épistémologique bien particulière, en rupture avec un contexte pour faire acquérir des connaissances préalablement déterminées (diSessa, 1986).

Weir (1987) rapporte que la première utilisation du terme micromonde nous vient en fait de Minsky et Papert, et qu'il était employé dans un contexte de recherche en intelligence artificielle. Toujours selon Weir, dans ce contexte, un micromonde était d'abord quelque chose de beaucoup plus simple que ce que Papert présente en 1980. Il s'agissait simplement d'un « small, coherent domain of objects and activities implemented in the form of a computer program and corresponding to an interesting part of the real world » (p. 12). Ainsi, les environnements informatiques sont à la genèse même du concept de micromonde. C'est sans doute le caractère plus complet, et complexe, des micromondes qui amena Papert, dans *Mindstorms*, à ne pas restreindre le micromonde aux environnements informatiques.⁹ Il n'en demeure pas moins qu'en puisant dans ses origines, on constate qu'il n'est pas surprenant d'identifier dans la nature même de la technologie des caractéristiques qui la rendent particulièrement favorable à l'élaboration de micromondes. Pour Papert, c'est l'aspect « caméléon » de l'ordinateur, ou comme Disessa (1988) le dit très bien, c'est sa versatilité sans limites, qui en fait un instrument de choix pour concevoir les micromondes :

Computers are so versatile in crafting interactive environments that we are more limited by our theoretical notions and our imagination. We can go far beyond the constraint of conventional materials, which are limited to an interaction of "push, pull, poke and position" in a high friction universe. (Disessa, 1988. p. 62)

Évidemment, la technologie prend une forme finale, ou encore une autre, selon une série de choix humains, mais de façon générale la technologie offre par conception ou non un terrain particulièrement fertile pour l'exploration. Il y a différentes raisons

⁹ Pour en apprendre davantage sur le développement historique de l'utilisation du concept de micromonde en lien avec l'enseignement des mathématiques, voir Healy et Kynigos (2010).

pour cela, mais simplement, on peut dire que la nature non permanente des actions posées et le feedback rapide qu'offre un environnement de travail informatique sont deux caractéristiques favorisant grandement cette approche explorative ; une idée au cœur du concept de micromondes. En effet, dans un environnement technologique, les traces laissées par nos actions ne sont généralement pas permanentes : il est possible de faire soit marche arrière, soit de simplement reproduire rapidement le comportement précédent en appliquant une légère modification. Il suffit de penser à la calculatrice : elle renvoie rapidement un résultat, peu importe la touche sur laquelle on appuie et elle permet aussi d'annuler une saisie numérique par une touche « effacer ». C'est tellement facile et rapide de reproduire certaines commandes qu'on peut dire que c'est dans sa nature même d'encourager l'exploration mathématique (par l'exploration de ses boutons/fonctions).

Et cette exploration peut prendre différentes formes : il y a l'exploration du fonctionnement plus technique de l'environnement technologique (comment il fonctionne) et l'exploration de ce qui est mis de l'avant mathématiquement dans les possibilités offertes par l'environnement. Mais ces deux types d'explorations ne sont pas disjointes, bien au contraire, car on en apprend habituellement davantage sur le fonctionnement du logiciel alors qu'on explore les idées mathématiques mises de l'avant, et vice-versa. Prenons l'exemple de l'applet Java de la Figure 2.2.

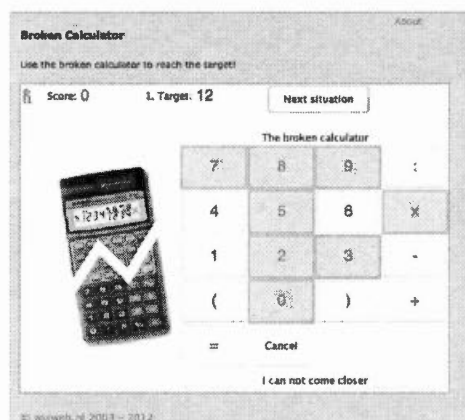


Figure 2.2 L'exploration d'un environnement informatique

(source : http://www.fi.uu.nl/toepassing/00014/toepassing_wisweb.en.html)

Lorsque placé dans cet environnement de travail mathématique, il semble, par exemple, assez naturel de chercher à comprendre/voir pourquoi certaines touches sont grisées alors que d'autres ne le sont pas. En appuyant sur les différentes touches, on réalise alors assez rapidement que les touches grisées sont les touches brisées de la calculatrice. Mais en découvrant cela, on a une nouvelle compréhension de l'activité mathématique qui prend place : on se met alors à s'intéresser à l'objectif (afficher le résultat « 12 » à l'écran de la calculatrice) et aux différentes façons de l'atteindre selon les touches brisées, et ainsi de suite. C'est cette double exploration (libre) qui prend place, celle du fonctionnement de l'interface et celle des idées mathématiques. C'est en ce sens que l'ordinateur et ses logiciels mathématiques peuvent être perçus comme des micromondes : la nature technologique de ces micromondes favorise grandement la conception d'environnements riches pour l'exploration.

2.2.2 Le micromonde mathématique comme contexte transformateur pour l'activité mathématique

De par ses caractéristiques, un micromonde offre un contexte particulier pour l'activité mathématique, un contexte qui facilite, rend propice, met en avant une activité mathématique riche et diversifiée. Derrière l'idée qu'un micromonde

mathématique doit favoriser un apprentissage naturel, il y a le fait que l'activité mathématique qui prend place est considérée comme valable à part entière. Par exemple, le micromonde de la géométrie Tortue (Logo) a été conçu pour offrir des expériences mathématiques significatives, puissantes et pertinentes, indépendamment du cadre scolaire institutionnel.

La construction du cercle en environnement Logo illustre bien cette idée et offre une image intéressante de ces expériences mathématiques significatives. Le cercle dans l'environnement de la géométrie Tortue n'a que très peu à voir, à première vue du moins, avec le cercle d'Euclide de la géométrie scolaire. On peut le construire (dans Logo) par une succession de déplacements « droits » suivis d'une « petite » rotation. Plus formellement, la procédure Logo suivante permet de tracer un cercle Tortue d'un certain « rayon » (qu'on peut modifier en changeant les valeurs de déplacement ou d'angle) : *repeat 360 [forward 1 right 1]*.

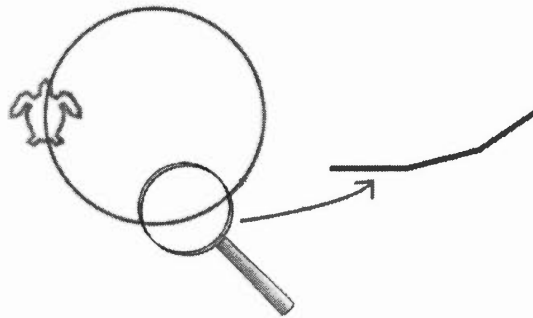


Figure 2.3 Un cercle dans l'environnement de la géométrie Tortue

Au final, ce qui apparaît à l'écran dépend du point de vue adopté pour le regarder. Pour celui qui se place dans le monde mathématique de la Tortue, il s'agit assurément d'un cercle—c'est ainsi qu'il se définit dans les contraintes de fonctionnement de l'environnement. Mais pour la géométrie scolaire, ce n'est certes qu'un polygone

régulier à n côtés, avec un n relativement élevé (dans ce cas-ci, 360). Par contre, dans le micromonde de la géométrie Tortue, il s'agit d'un cercle à part entière, produit par une activité mathématique systématique et rigoureuse. C'est cette possibilité de construire des mathématiques authentiques par le (les caractéristiques du) micromonde qui permet à ce type d'environnements informatiques d'être transformateurs pour l'activité mathématique. Les mathématiques produites le sont dans et par le micromonde, qui en retour est constitué à travers celles-ci (p. ex. cette conception du cercle donnera lieu à d'autres travaux mathématiques, et ainsi de suite).

C'est en ce sens que les micromondes sont vus comme des environnements de création mathématique : les mathématiques qui y sont faites ne doivent pas nécessairement correspondent aux mathématiques de l'extérieur pour être jugées valides, c'est la cohérence mathématique à l'intérieur du micromonde qui importe, c'est une rigueur locale. C'est ce regard sur l'activité mathématique technologique, en termes de micromonde, qui me guide pour déceler des aspects transformateurs.

2.2.3 Quelques exemples d'aspects transformateurs dans le micromonde de la géométrie Tortue

L'environnement de la géométrie Tortue met de l'avant des idées géométriques tout à fait particulières. Cela est tel qu'il semble nécessaire de parler d'une géométrie différente (de la géométrie euclidienne) (Papert, 1986). L'exemple de la construction (le traçage) du cercle dans le micromonde de la géométrie Tortue semble redéfinir cet objet mathématique, ou à tout le moins, en présenter des facettes tout à fait particulières par rapport à comment il se définit dans la géométrie euclidienne. Comme mentionné précédemment, le traçage d'un cercle Tortue se fait en répétant un certain nombre de fois la commande « avancer un peu, tourner un peu ». Cette façon de faire pour tracer un cercle dans le micromonde Tortue est bien différente de la méthode à la règle et au compas, et encore, bien différente du traçage du cercle dans

tout environnement qui s'appuie sur la géométrie euclidienne. Dans le micromonde Tortue, la Tortue trace le cercle en n'ayant aucune référence à un objet qui est à l'extérieur du tracé qu'elle vient de faire (alors que dans la géométrie euclidienne, le traçage classique du cercle s'appuie sur un point extérieur à sa trace, le centre du cercle, car il est un lieu de points).

En fait, chaque déplacement de la Tortue n'est qu'en fonction du précédent : c'est avec le précédent que le suivant est défini. Il suffit de penser à la façon dont l'orientation de la Tortue dans le tracé du cercle est définie par l'ensemble des étapes précédentes. Or, ce que Papert observe, c'est que l'activité mathématique pour la création du cercle dans le contexte particulier que rend probable le micromonde Tortue n'est pas banale : il place l'élève en contact avec les idées au cœur du calcul différentiel.

For a student, drawing a Turtle circle is more than a "common sense" way of drawing circles. It places the child in contact with a cluster of ideas that lie at the heart of the calculus. (Papert, 1980. p. 66)

En effet, tel que décrit précédemment, le cercle se construit par une réflexion autour de la différence entre où la Tortue se trouve et où elle sera momentanément.

Differential calculus derives much of its power from an ability to describe growth by what is happening at the growing tip. [...] In our instructions to the Turtle, FORWARD 1, RIGHT TURN 1, we referred only to the difference between where the Turtle is now and where it shall momentarily be. This is what makes the instructions *differential*. (Ibid. pp. 66-67)

Ce n'est évidemment pas le formalisme du calcul différentiel qui est présent dans l'expérience de la construction du cercle dans le micromonde Tortue, mais plutôt une expérience intuitive autour de ses idées fondamentales, de son sens et de son usage.

The child in the Turtle circle incident was not learning about the *formalism* of calculus, for example that the derivative of x^n is nx^{n-1} , but about its use and its *meaning*. (Ibid. p. 66)

Ce qui devient apparent est que dans le micromonde Tortue, avec ses règles de fonctionnement, la construction du cercle Tortue permet de concevoir autrement l'idée d'une équation différentielle et cette vision alternative mise de l'avant est vue comme un vaisseau puissant pour les idées derrière la dérivée. Le cercle Tortue apparaît alors comme une courbe à courbature constante, où la *courbature est la valeur de rotation effectuée pour chaque mouvement avant (de la Tortue)*. Or, tel que l'explique Borassi (1996), cette vision et ce travail particulier autour du cercle permettent de mettre en lumière certaines relations entre des objets géométriques, et ce sont des relations qui sont très difficiles à « voir » en géométrie euclidienne. Par exemple, la droite et le cercle sont les seules courbes ayant une courbature constante—dans le micromonde Tortue, les étapes de construction du cercle et d'une droite mettent en avant cette relation.

Furthermore, circles are the only plane curve with constant curvature (different from zero), as can be proven by solving the differential equation corresponding to such a definition. Because straight lines are the only other plane lines with constant curvature (although, in this case, the curvature will always be zero), this definition reveals an unexpected commonality between circles and straight lines from a differential geometry standpoint. (Borassi, 1996. p. 88)

Cette entrée « différentielle » pour parler du cercle permet même de le définir comme la limite d'un polygone régulier à n côtés où n tend vers l'infini. Il s'agit d'une définition bien différente de ce qu'Euclide propose.

Although it may seem surprising at first, the property of having constant curvature can also be related to a definition of circle as « the limit of regular n -sided polygons, when n tends to infinity. » This relationship was clearly identified and justified by Papert, as he discussed the principal behind a program to draw circles in Logo consisting essentially of the repeated command « FORWARD 1 RIGHT TURN 1 » (Ibid. p.88)

Bien sûr, il ne s'agit pas là d'une découverte. Il est tout à fait possible, dans un contexte de géométrie euclidienne, de réfléchir à l'allure que prendrait un polygone ayant un nombre infini de côtés. Il n'est donc pas question de dire que d'inscrire

l'activité mathématique dans ce micromonde permet d'inventer systématiquement des mathématiques. Par contre, la notion de cercle par déplacement successif et systématique, comme présenté précédemment, décrit une notion totalement différente d'un cercle. C'est cette ouverture, cette sensibilité aux changements mathématiques que procure une approche par le micromonde qui en fait une potentialité de transformation.

Ce que l'exemple de la construction du cercle dans l'environnement informatique Tortue montre, lorsqu'observé comme ayant lieu dans ce micromonde, est une redéfinition à part entière de l'objet géométrique du cercle. C'est une transformation pour les idées mathématiques. Et encore, les étapes mêmes de la construction mènent à explorer/être exposé à des idées tout à fait particulières, comme celles au fondement du calcul différentiel, et ce, dès les premiers pas dans cet environnement. Ces idées ne s'inventent pas par le contexte du micromonde, mais c'est le micromonde qui permet de les mettre en avant. Le micromonde Tortue donne accès à une nouvelle géométrie, différentielle. Une approche en termes de micromondes permet de s'intéresser à ces idées mathématiques particulières qui viennent prendre l'avant-scène. En d'autres mots, penser l'activité mathématique technologique en termes de micromondes offre une posture épistémologique qui met de l'avant des aspects transformateurs de la technologie sur une activité mathématique authentique et créatrice, où les concepts et les actions prennent leur sens dans ce micromonde, qui en retour leur donne sens.

2.2.4 Objet-pour-penser-avec

Un micromonde est d'abord un contexte particulier pour inscrire l'activité mathématique, de façon globale. Il permet de décrire le contexte dans lequel a lieu l'activité mathématique, et surtout, quel sens lui donner, mais ce n'est pas à lui seul un outil particulièrement efficace pour décrire l'émergence des idées mathématiques. Pour ce faire, Papert utilise principalement l'idée d'objet-pour-penser-avec. Pour Papert, un objet-pour-penser-avec (les mathématiques) représente un artefact

personnel avec lequel un individu fait/se construit du sens (des mathématiques). C'est un objet personnel, qu'on s'approprie, qu'on forme à notre image : « objects that children can make theirs for themselves and in their own ways » (1980, p. 11). Il y a cependant un danger d'y voir là qu'un objet de médiation, dont le rôle serait de faciliter l'accès à des mathématiques statiques et prédéterminées. L'objet-pour-penser-avec s'inscrit dans la même perspective que le micromonde : il ne donne pas accès à des connaissances préexistantes, mais il influence par ses caractéristiques ce qui est pensé avec lui. En d'autres mots, un objet-pour-penser-avec peut avoir un effet transformateur sur toutes les idées qui prennent sens avec lui.

Papert, pour donner vie à l'idée d'objet-pour-penser-avec revient, dans la préface de *Mindstorms*, sur une expérience de sa jeunesse. Papert nous y raconte comment, alors jeune enfant, les engrenages ont été un objet avec lequel il s'est mis à penser le monde autour de lui. Dans les termes de Papert, les engrenages ont été un matériau, un environnement pour construire en pensée d'autres objets. Par exemple, Papert dit avoir été en mesure de donner, à travers un regard d'engrenages, un sens qui lui était propre aux systèmes d'équations. Pour lui, les systèmes d'équations étaient des combinaisons d'engrenages aux nombres de dents variées. C'est à travers sa relation avec les engrenages que Papert a compris le sens des ratios et des systèmes d'équations.

À travers cet exemple des engrenages, Papert amène à réfléchir à la manière dont la technologie propose des objets-pour-penser-avec qui transforment l'activité mathématique. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de s'intéresser aux environnements informatiques complexes (comme la géométrie Tortue) pour relever des exemples technologiques pouvant être conçus comme un objet-pour-penser-avec et qui ont un effet transformateur pour l'activité mathématique. La calculatrice, cet instrument considéré parfois comme presque exclusivement technique (une « calculette ») est un

de ces exemples de technologies simples qui pourtant lorsque pensé en termes d'objet-pour-penser-avec permet de voir une activité mathématique transformée.

Je reprends ici l'exemple de la calculatrice. Par sa puissance de calcul, elle permet une exploration mathématique remarquable. Il est très facile sur la calculatrice, par exemple, de se lancer à la recherche de régularités à travers la répétition d'une opération. Or, dans l'apprentissage de l'arithmétique, l'apprentissage des algorithmes d'addition, de multiplication et de division occupe une place si importante qu'il n'est pas insensé de dire que l'algorithme et son apprentissage sont plus que des instruments mathématiques. En fait, ils sont des (concepts) mathématiques. En d'autres mots, l'algorithme lui-même fait partie du « corps des mathématiques » scolaires, tout comme son apprentissage fait partie de « l'apprentissage des mathématiques » scolaires.

Toutefois, la calculatrice, avec ce qu'elle propose, permet d'envisager une autre façon d'être exposé à l'arithmétique où l'apprentissage d'algorithmes laisse place à la découverte de régularités. Cette recherche de régularités est d'ailleurs une activité mathématique excessivement riche (par exemple, voir Lajoie, 2009). Dans ce contexte particulier ouvert pour l'activité mathématique, être en mesure de procéder méthodiquement, par un choix judicieux des nombres, dans la recherche de régularités devient une partie importante du travail mathématique, autant que peut l'être l'apprentissage des algorithmes en contexte traditionnel. Et c'est par les caractéristiques de la calculatrice, ce qu'elle rend possible autrement dit, que ces régularités sont rendues visibles. La calculatrice, lorsque pensée ainsi pour la recherche de régularités est un objet-pour-penser-avec pour les idées mathématiques.

Une telle approche pour l'activité arithmétique, où la calculatrice est perçue comme un objet-pour-penser-avec dans la construction personnelle de sens pour les opérations via une exploration naturelle, permet d'envisager une redéfinition de l'activité mathématique. D'abord, dans un tel contexte, l'apprentissage des

algorithmes n'est non seulement plus au cœur de l'activité mathématique, elle n'y est tout simplement plus. Il s'agit donc d'un changement important dans la façon de faire les mathématiques (*le comment*).

Ensuite, si les opérations ne sont plus définies par les procédures pour accomplir les algorithmes, mais par le résultat qu'elles produisent (la recherche de régularité dans les résultats), c'est aussi les idées mathématiques qui sont transformées par la calculatrice comme objet-pour-penser-avec (*le quoi*). Dans cet exemple, la calculatrice, par la puissance de calcul et l'environnement naturel d'exploration qu'elle offre, permet de penser autrement l'activité mathématique de l'arithmétique. Et c'est par ses caractéristiques que la calculatrice comme objet-pour-penser-avec amène cette transformation. Ses caractéristiques sont donc des aspects transformateurs.

Cette idée d'objet-pour-penser-avec que présente Papert est ainsi très profonde et c'est lorsqu'inscrit dans un micromonde, comme celui de la géométrie Tortue, que les caractéristiques transformatrices de l'objet-pour-penser-avec développent toute leur richesse. La sous-section qui suit élabore davantage sur l'aspect transformateur pour l'activité mathématique de l'objet-pour-penser-avec.

2.2.5 La Tortue comme un objet-pour-penser-avec

La Tortue du micromonde de la géométrie Tortue est un des exemples les plus puissants d'objet-pour-penser-avec. Elle offre une panoplie d'exemples des aspects transformateurs d'un objet-pour-penser-avec pour l'activité mathématique. La Tortue est à la géométrie Tortue ce que le point est à la géométrie euclidienne : elle est essentielle et à la base de tout le travail dans le micromonde. Voici ses caractéristiques. D'abord, tout comme le point d'Euclide, elle a une position (elle est quelque part sur l'espace de travail de l'environnement de la géométrie Tortue et cet endroit possède des coordonnées). Par contre, elle a aussi une orientation. C'est cette caractéristique particulière qui lui donne une puissance en termes d'objet-pour-

penser-avec pour concevoir des idées géométriques. Alors que le point n'existe que théoriquement (il n'a aucune épaisseur), la Tortue crée un pont entre la géométrie Tortue et l'expérience personnelle de chacun du mouvement dans l'espace.

A Euclidean point is at some place—it has a position, and that is all you can say about it. A Turtle is at some place—it, too, has a position—but it also faces some direction—its heading. In this, the Turtle is like a person—I am here and I am facing north—or an animal or a boat. (p. 55)

et

And from these similarities comes the Turtle's special ability to serve as a first representative of formal mathematics for a child. Children can identify with the Turtle and are thus able to bring their knowledge about their bodies and how they move into the work of learning formal geometry. (Papert, 1980, p. 56)

Cette similarité entre le fonctionnement physique de la Tortue et celui de l'humain donne un caractère intime à la relation qu'entretient l'utilisateur à la Tortue dans le micromonde. Et cette relation met en avant une façon bien particulière de faire les mathématiques. En fait, ce sont toutes les expériences mathématiques du micromonde qui sont influencées/changées par la Tortue. Et la rencontre/compréhension des angles est au coeur de ces changements.

De par ses caractéristiques, la Tortue met en avant, voire force presque, une vision de l'angle comme une orientation, plutôt que comme une certaine région du plan délimitée par deux demi-droites. Dans la géométrie Tortue, l'angle n'est en fait qu'une façon d'exprimer l'amplitude d'une réorientation de la Tortue lors d'un traçage. De ce fait, c'est une bonne partie, sinon l'ensemble, de l'activité géométrique qui est pensée autrement. Par exemple, pour tracer un triangle équilatéral, la connaissance naïve de sa définition institutionnelle est de peu d'utilité. Demander à la Tortue de tracer un triangle équilatéral en faisant référence à la mesure de ses angles intérieurs donne ceci :

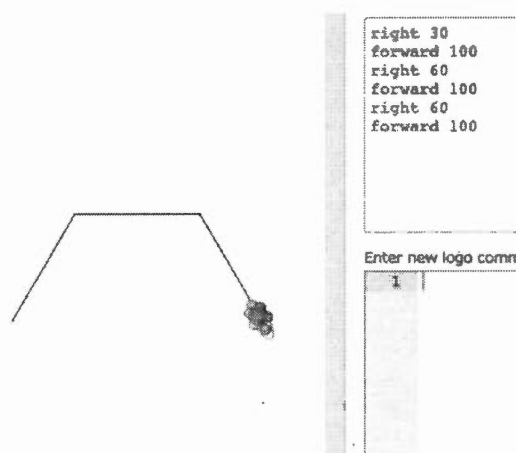


Figure 2.4 La construction d'un triangle équilatéral dans la géométrie Tortue, virages de 60

On constate alors que la Tortue, en tant qu'objet-pour-penser-avec nous force à repenser le triangle en un concept que la Tortue peut comprendre. Pour ce faire, il suffit de s'imaginer être la Tortue, puisque c'est de la même façon que nous que la Tortue se déplace. L'engagement physique que le micromonde avec son objet-pour-penser-avec rend possible devient un moyen de comprendre le fonctionnement de la Tortue à travers un questionnement sur le mouvement de notre propre corps. Cet engagement personnel dans l'activité mathématique qu'encourage l'objet-pour-penser-avec est l'une de ses caractéristiques importantes.

Le travail autour des angles dans l'environnement Tortue consiste à évaluer la « sévérité » du virage que la Tortue doit effectuer pour former l'allure désirée. C'est là un travail « sur les angles » bien différent qui met en avant une tout autre activité mathématique. Dans le cas présent, on remarque que la relation aux angles est changée par la Tortue. Puisque c'est à travers un déplacement physique que la Tortue trace les formes dans le micromonde, les angles intérieurs des différentes figures, qui prennent normalement, prennent un rôle secondaire, voire s'effacent complètement au profit des angles extérieurs. Ce sont bien les angles extérieurs en géométrie euclidienne qui correspondent davantage au contexte, celui de la rotation de la Tortue

dans sa réorientation dans l'espace de travail. En effet, un raisonnement sur les angles intérieurs des figures ne permet pas, ou très peu, de rendre compte de l'idée que la Tortue est orientée et que c'est à travers un déplacement que sont construites les figures. Ce qui devient important dans l'activité mathématique par les caractéristiques de la Tortue est l'angle de rotation de la Tortue, en fonction de son orientation.¹⁰

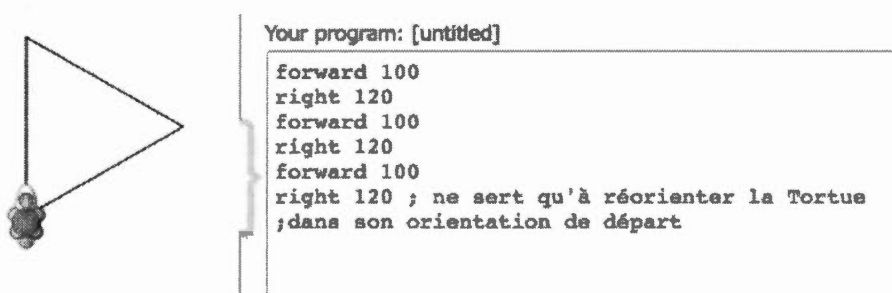


Figure 2.5 La construction d'un triangle équilatéral dans la géométrie Tortue, virages de 120

Or, puisque la notion d'angle prend un autre sens, ou du moins, s'opérationnalise différemment, c'est aussi la nature des figures qui changent. Dans l'exemple ci-haut, le triangle équilatéral est changé dans sa nature par comment il devient (il existe temporellement) dans le micromonde de la géométrie Tortue. Le définir comme étant un *triangle dont les angles sont tous égaux* (ou « *dont les angles mesurent tous 60 degrés* »)¹¹ n'a que très peu d'intérêt pour le travail mathématique dans ce micromonde. D'abord, ceci ne transmet pas l'idée que le triangle n'existe que par le déplacement de la Tortue. En effet, de par son contexte, les mathématiques construites avec la Tortue dans ce micromonde le sont seulement par le déplacement

¹⁰ L'utilisation d'expressions mathématiques comme « angle de rotation » est une description partiellement euclidienne du comportement de la Tortue. Dans le micromonde Tortue, l'idée de virage est sans doute une meilleure image.

¹¹ J'exclus volontairement de spécifier « intérieurs » en faisant référence aux angles puisque c'est toujours implicitement à cela qu'on fait référence en géométrie euclidienne.

(de la Tortue) et n'existent donc pas *a priori* en tant que références à un objet mathématique externe à reproduire. Le triangle équilatéral peut difficilement être pensé comme un objet qui se définit à l'extérieur de l'environnement Tortue dans lequel il est construit, puisqu'il prend forme différemment selon l'objet-pour-penser-avec. Dans le micromonde de la géométrie Tortue, c'est localement, par les caractéristiques du micromonde et de l'objet-pour-penser-avec (p. ex. la façon dont la Tortue se déplace) que le triangle équilatéral prend un sens. On peut dire que dans la géométrie Tortue le triangle équilatéral se présente ainsi :

On appelle le chemin ayant comme point d'arrivée son point de départ, obtenu par trois rotations successives de 120 dans la même orientation, un triangle équirotation.

On sent bien comment l'objet-pour-penser-avec, par ce qu'il met de l'avant (ce qu'il propose naturellement de faire et de ne pas faire), souligne différentes facettes des objets mathématiques auxquels il offre un certain accès.

Conséquemment, l'activité mathématique en contexte de micromondes, avec la présence d'objet-pour-penser-avec, met en avant une perspective transformatrice pour les mathématiques et les façons de faire les mathématiques. C'est l'objet-pour-penser-avec, avec ses caractéristiques, qui rend probable certaines façons de *faire les mathématiques* et de *faire sens des mathématiques* plutôt que d'autres, ce qui en retour transforme l'activité mathématique.

2.2.6 Le débogage

En informatique, un *bug* est généralement présenté comme une anomalie dans le fonctionnement d'un programme et le *débogage* est l'action d'agir sur cette anomalie (pour rétablir ce qui est souhaité). On peut donc concevoir le bug comme un comportement inattendu de l'environnement informatique. En ce sens, le bug est quelque chose de bien plus large qu'une erreur de syntaxe qui empêche le programme de fonctionner : il est toute différence perceptible entre ce que le programmeur

s'attend à voir suite à ses instructions et ce que l'ordinateur interprète de ces mêmes instructions. C'est dans cette perspective que Papert se sert de l'idée de bug et de débogage pour présenter le déroulement typique de l'activité mathématique dans le micromonde de la géométrie Tortue. C'est un passage assez naturel puisque la géométrie Tortue est un environnement de programmation. L'activité mathématique est alors un va-et-vient entre le constat d'un bug et les actions posées pour agir sur le bug.

Reprenons l'exemple de la construction du triangle équilatéral (Figure 2.6) par les mesures de ses angles intérieurs : ceci produit un bug puisque le résultat de cette commande ne produit pas la figure initialement attendue. Par cette construction surprenante, on constate comment le bug dans ce micromonde peut être le moteur d'une activité mathématique. En effet, par l'ouverture et le contrôle sur les objets mathématiques à l'écran qu'offre le micromonde de la géométrie Tortue, le bug invite l'utilisateur à agir et à se questionner mathématiquement sur ce qui « se produit ». Dans ce cas particulier et de façon générale, les caractéristiques informatiques du micromonde Tortue (p. ex. la possibilité de relancer la procédure en ne changeant qu'une valeur) ouvrent la porte à une exploration mathématique riche puisqu'il est facile, voire naturel, d'explorer plusieurs cas.

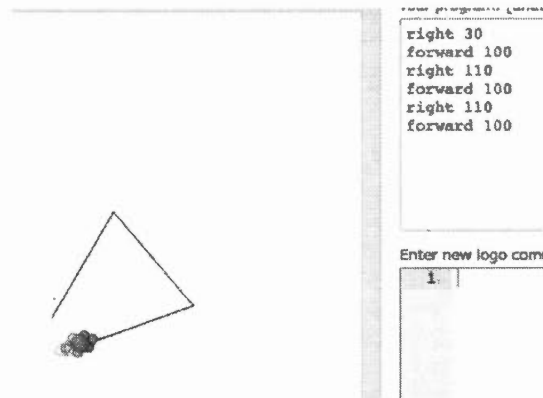


Figure 2.6 La construction d'un triangle équilatéral dans la géométrie Tortue, virages de 110

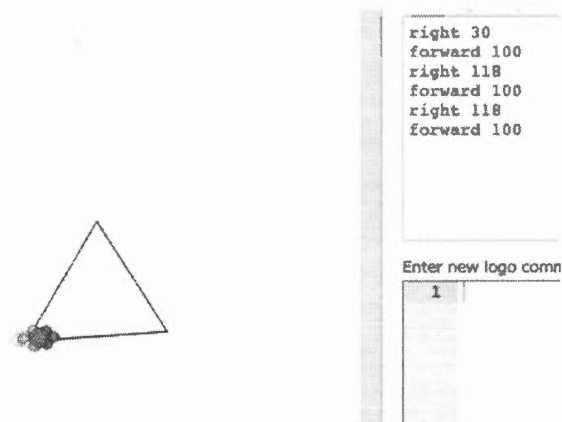


Figure 2.7 La construction d'un triangle équilatéral dans la géométrie Tortue, virages de 118

Cette exploration de différents cas, à la recherche de la procédure qui permet de construire un triangle équilatéral, permet de mettre en lumière le caractère particulier du bug dans l'activité mathématique des micromondes. En effet, d'un regard extérieur à l'activité mathématique qui prend place ici dans le micromonde Tortue, aucun de

ces deux tracés (« 110 degrés » et « 118 degrés ») ne représente un triangle équilatéral, et ce, même si le tracé obtenu par des virages de 118 degrés peut sembler visuellement bon. Il s'agirait donc d'une erreur. Par contre, si la personne qui est en train de faire ces mathématiques se satisfait de l'un ou l'autre de ces cas (surtout que dans la Figure 2.7, la Tortue cache habilement l'imperfection) il ne s'agit pas d'un bug. Pourtant, c'est bien une erreur mathématique au sens traditionnel du terme.

Selon le cas, il pourrait s'agir d'une construction *good enough* (Zack et Reid, 2003, 2004) à part entière, qui ne nécessite pas d'ajustement puisqu'elle correspond *suffisamment* à ce qui était désiré. Dans ce cas, comme je l'ai mentionné plus haut avec les propos de diSessa, il n'est pas question de juger en fonction d'une certaine perfection (p. ex. : « Ce n'est pas tout à fait parfait, mais presque. »), mais plutôt de simplement reconnaître la présence ou non d'un blocage (p. ex. : « Est-ce que le travail mathématique peut se poursuivre? »). Dans ce cas-ci, ce n'est que si la Tortue bouge qu'il devient apparent que le tracé n'est pas fermé. Le bug offre donc un rapport bien différent à l'erreur tel qu'on la conçoit normalement. Par extension, on peut alors dire que dans le contexte informatique, c'est par le débogage que l'expertise se définit.

Many children are held back in their learning because they have a model of learning in which you have either “got it” or “got it wrong”. But when you learn to program a computer you almost never get it right the first time. Learning to be a master programmer is learning to become highly skilled at isolating and correcting “bugs”, the parts that keep the program from working. (Papert, 1980. p. 23)

Ainsi, en informatique le bug est naturel et prévisible puisque « tu ne réussis pas toujours du premier coup ». Le bug est quelque chose avec lequel on travaille, sur lequel on agit dans le but de modifier le comportement du programme. Cette façon de penser l'erreur, en termes de bug informatique, est celle associée à l'activité mathématique dans un micromonde, et ce, même pour les micromondes qui ne sont pas des environnements de programmation à proprement dit. Il suffit de considérer le

bug dans son sens plus large : « un comportement inattendu de l'environnement informatique ». Ce changement de perspective sur l'activité mathématique amène à considérer différemment ce qu'est la « réussite » ou l'« échec » en mathématique, ou encore tout simplement l'erreur. Il n'est plus question de savoir si l'activité mathématique est soit « bonne », soit « mauvaise », mais de savoir si elle est réparable ou encore adaptable.

One does not expect anything to work at the first try. One does not judge by standards like “right—you get a good grade” and “wrong—you get a bad grade”. Rather one asks the question: “How can I fix it?” (Papert, 1980. p. 101)

Le rapport à l'erreur est alors redéfini : l'erreur n'est plus dans la personne et dans ce qu'elle (ne) connaît (pas), mais dans ce qui est perçu du comportement de l'objet-pour-penser-avec. L'erreur est donc dans l'interaction avec l'objet-pour-penser-avec et c'est sur cette interaction, communication même, qu'il faut intervenir (le débogage). Avec le débogage, Papert présente l'activité mathématique comme étant davantage un continuum que des instants de « bonne production » et de « mauvaise production » mathématique.

The learning sees progress, and also sees that things are not often either completely right or completely wrong but, rather, are on a continuum. (p. 62)

Le débogage de Papert est particulièrement utile pour décrire le déroulement de l'activité mathématique au sein des micromondes technologiques. Ceci exige un déplacement important quant au regard porté sur les l'activité mathématique (de l'élève) qui prend place au sein des micromondes. Dans cet aspect du va-et-vient continu entre ce que l'environnement renvoie et les actions de l'utilisateur sur l'environnement, l'activité mathématique est surprenante et imprévisible, puisqu'elle est guidée par les choses surprenantes qui se manifestent (visuellement) dans le micromonde. Pour l'activité mathématique, les micromondes informatiques, par le débogage, offrent une tout autre façon de concevoir l'erreur et l'expertise en

mathématiques et l'activité mathématique au sens large. L'erreur en tant que bug n'est pas une chose négative, mais bien quelque chose qui est inévitable, sur laquelle il est naturel d'agir et qui incite même à l'exploration, puisqu'il est par définition quelque chose de surprenant, d'inattendu et puisque l'expertise consiste à exceller dans le débogage. De façon plus générale, on peut dire simplement que de faire des mathématiques dans un micromonde mathématique, c'est de faire du débogage (soit d'agir sur les choses surprenantes que l'environnement met de l'avant).

2.3 Le cadre de Papert mis à l'essai : relecture d'un article de recherche en didactique des mathématiques sous la perspective transformatrice

Comme présentée précédemment, la vision transformatrice de la technologie pour l'activité mathématique est indissociable d'une certaine approche pour l'activité mathématique elle-même. Cette approche valorise la créativité mathématique et s'intéresse d'abord à rendre compte du potentiel de la technologie pour les idées mathématiques plutôt que de s'intéresser à la capacité de la technologie à faire apprendre un contenu bien particulier. C'est sous la perspective transformatrice que je propose une relecture d'un article de recherche en didactique des mathématiques, soit celui de Lucile Vadcard (2002), intitulé *Conception de l'angle chez des élèves de seconde*. Dans cet article où il est question d'activités mathématiques en contexte technologique, Vadcard s'intéresse à certaines facettes du concept d'angle en mathématique (ce qu'elle appelle des conceptions de l'angle).

2.3.1 La technologie au service des intérêts du chercheur

Concrètement, dans ce travail de recherche, Vadcard cherche à développer et expérimenter une situation fondamentale à la Brousseau (1998) pour faire travailler l'angle comme une inclinaison. Il s'agit là, selon Vadcard, d'une conception (de l'angle) très peu présente dans la littérature et dans l'enseignement. La technologie n'occupe donc pas d'emblée une place à proprement dit dans les intentions/le questionnement de recherche, mais elle devient importante lorsque Vadcard émet

l'hypothèse que l'environnement technologique pourrait favoriser l'émergence/le recours à cette conception (facette) de la notion d'angle.

René Berthelot et Marie-Hélène Salin (1992, p. 177) soulignent que « la conceptualisation de l'angle dans l'espace réel n'est nécessaire que dans des cas très particuliers [...], toutes situations impossibles à adapter au micro-espace si on ne veut pas se contenter de les évoquer mais en faire le centre de situations adidactiques ». Une des conclusions de notre travail sera de montrer que l'espace offert par les environnements informatiques permet en partie de résoudre cette difficulté. (Vadcard, 2002. p. 79)

Déjà là, Vadcard reconnaît une certaine puissance à la technologie. Vadcard soupçonne en effet que le logiciel, par ses caractéristiques, pourrait favoriser un certain type de travail de la part de l'élève. Du même fait, elle reconnaît aussi que l'environnement papier-crayon favorise certains aspects de la notion de l'angle au profit d'autres (l'angle comme inclinaison). Il semble y avoir dans ce constat l'idée que les caractéristiques de l'environnement (autant technologique ou papier-crayon) peuvent agir en tant qu'objet-pour-penser-avec pour les idées mathématiques en mettant de l'avant certaines facettes des mathématiques (alors que d'autres sont « mises de côté »). Mais il y a plus à dire sur comment Vadcard met de l'avant la « polyvalence » des environnements technologiques pour le travail mathématique.

On peut en effet parler d'une différence importante dans la manière donc Vadcard « se sert » de cette polyvalence par rapport à ce qui serait envisagé sous une perspective transformatrice. Le regard de Vadcard sur la technologie semble principalement utilitaire par le fait que l'argument de la polyvalence de la technologie est au service d'une difficulté associée à l'apprentissage des mathématiques scolaires dans l'environnement papier-crayon. Autrement dit, la polyvalence de la technologie est ici au service des intérêts du chercheur. Par exemple, Vadcard utilise Cabri-Géomètre, un environnement de géométrie dynamique (EGD), afin de rendre « possible » la création d'un problème qui, par sa conception, sera en mesure

d'amener l'élève à exploiter l'angle comme inclinaison dans son travail mathématique.

Cet espace [l'environnement de géométrie dynamique] va nous permettre de mettre en scène un problème de reproduction de polygones qui devra être résolu par repérage des points de la figure dans l'espace de l'écran. En invalidant dans cet environnement la mesure des distances, la stratégie d'intersection qui consiste à repérer un point à l'aide de deux visées sera alors la stratégie correcte et optimale de résolution de problème. (Vadcard, 2002. p. 101)

C'est en ce sens que la polyvalence de la technologie est au service des intérêts du chercheur. Aussi, dans cette approche d'utilisation de l'environnement technologique en recherche, l'environnement technologique de travail est fermé comme il a pour mandat de guider l'élève dans une direction bien particulière.

Dans un contexte similaire, donc de recherche en didactique des mathématiques, on peut imaginer une façon assez différente d'exploiter la polyvalence des outils technologiques. Dans la perspective transformatrice, cette polyvalence est en fait davantage vue comme offrant un espace de travail personnel, puisqu'elle ouvre la porte à une exploration des idées mathématiques (par la rétroaction visuelle dans la manipulation des objets mathématiques à l'écran, par la possibilité d'explorer différentes avenues de résolution, etc.). En ce sens, dans la perspective transformatrice, la polyvalence de la technologie est perçue comme étant au service des intérêts de l'élève pour les idées mathématiques. C'est une perspective différente de ce qui ressort des travaux de Vadcard.

Et cette différence en termes d'ouvertures de l'environnement met en avant une divergence importante quant à la position adoptée sur l'activité mathématique en environnement technologique : l'approche utilitaire de la technologie est fortement associée à une activité mathématique guidée de l'extérieur (par l'enseignant/le maître) alors que l'approche transformatrice est plutôt associée à une activité mathématique dite « authentique », qui est guidée par celui qui fait. Dans la

perspective transformatrice, c'est l'élève qui programme l'ordinateur, et non l'inverse. « One might say the *computer is being used to program* the child. In my vision, *the child programs the computer* [...] » (Papert, 1980. p. 5).

2.3.2 La place/le rôle de la technologie dans le travail de recherche

Ainsi, quand on s'intéresse au rôle associé à la technologie dans la recherche de Vadcard, ou plutôt, à comment elle (la technologie) entre comme actrice importante de la recherche, on constate une certaine inversion par rapport à l'approche transformatrice. La technologie est pour Vadcard considérée utile à l'étude parce qu'elle pourrait potentiellement aider à guider l'élève vers une activité mathématique, celle que Vadcard cherche à observer. Ainsi, ce n'est pas la technologie et ce qu'elle met en avant pour l'activité mathématique qui font l'objet de l'étude, mais bien une conception spécifique de l'angle. Autrement dit, on suppose ici que Vadcard s'intéresse en *premier lieu* à l'émergence de la notion d'angle en tant qu'inclinaison, une conception qu'elle cherche *ensuite* à favoriser en considérant un certain environnement technologique de travail mathématique.

La perspective transformatrice inverse ce processus. C'est en s'intéressant à ce que les caractéristiques de l'environnement technologique favorisent que le chercheur s'intéresse alors à certaines idées mathématiques produites par cet environnement. Les idées mathématiques faisant l'objet d'un certain intérêt de recherche sont principalement déterminées par une étude de ce que les caractéristiques d'un environnement technologique favorisent pour l'activité mathématique.

En ce sens, on peut déjà constater un effet important de la vision transformatrice sur la façon de concevoir les environnements technologiques en recherche. Indissociable de cette perspective sur les effets de la technologie est l'idée que l'activité mathématique a d'abord libre cours au sein du micromonde informatique. Ce sont donc les caractéristiques de l'environnement informatique, par le fait qu'elles permettent potentiellement l'émergence d'idées mathématiques particulières, qui sont

à la racine du travail de recherche, et non l'objet mathématique même (Papert parle de fournir des semences, des germes pour les idées mathématiques).

Il s'agit évidemment d'une distinction importante et lourde de conséquences pour le déroulement concret de l'étude/du travail de recherche. Par exemple, dans la recherche de Vadcard, selon la position qu'elle adopte, il est normal de constater qu'elle présente d'abord une analyse conceptuelle de l'angle en mathématiques. Ce n'est qu'ensuite qu'elle présente, par une analyse des caractéristiques d'un EGD, les apports possibles du logiciel. Dans la perspective transformatrice, c'est principalement le logiciel et ses caractéristiques qui font l'objet d'une analyse en termes des mathématiques qui peuvent émerger à travers la façon de faire les mathématiques dans le micromonde. C'est une autre façon de faire l'étude des effets de la technologique dans l'apprentissage des mathématiques. Cette entrée peut aussi mener à l'observation de différents phénomènes tels que présentés dans le point suivant.

2.3.3 La place accordée à l'activité mathématique

Durant la première phase d'expérimentation, Vadcard note que les élèves sont arrivés à exploiter l'environnement de géométrie dynamique de telle sorte qu'ils n'ont pas fait ressortir/eux recours à la conception de l'angle que l'équipe de recherche s'attendait à voir.

Les résultats obtenus par l'observation de 12 groupes d'élèves de seconde comprenant chacun 4 élèves – un binôme émetteur et un binôme récepteur – montrent alors que les élèves privilégient la recherche de stratégies reposant sur des propriétés spatiales de la figure (propriétés d'incidence, d'alignement, d'égalités de longueurs), et que la notion d'angle n'est pas opératoire dans la tâche de construction : *les contournements* que les élèves ont effectués pour résoudre le problème sans y avoir recours *sont parfois surprenant!* (Vadcard, 2002. p. 102, j'ai ajouté l'italique)

Dans la mesure où Vadcard voulait que la situation construite dans l'EGD fasse ressortir une certaine conception de l'angle, cette dernière a, suite à la première phase

d'expérimentation, modifié la tâche. Ce faisant, elle a restreint l'accès à différents outils de l'environnement technologique et ainsi forcé les élèves à manifester certaines des notions mathématiques que veut observer Vadcard. Mais alors qu'il s'agit d'un obstacle à la réalisation finale de sa situation, on peut voir dans cette situation particulière le cœur même de ma perspective transformatrice. Loin de chercher à ignorer/supprimer ces « contournements [mathématiques] surprenants », rendus probables par les caractéristiques de l'environnement technologique, la perspective transformatrice de la technologie cherche à en rendre compte. Ainsi, sous cette perspective, ce que Vadcard décrit comme une erreur de parcours dans le modelage de l'EGD est en fait l'objet principal d'analyse : observer et analyser l'activité mathématique qui prend place en environnement technologique afin de voir en quoi les caractéristiques de l'environnement permettent/favorisent/mettent de l'avant une activité mathématique surprenante.

2.3.4 Un questionnement différent pour la recherche

On remarque ainsi qu'une perspective transformatrice de la technologie sur l'activité mathématique amène à se poser d'autres formes de questions. Ce questionnement porte alors davantage sur la direction dans laquelle les caractéristiques d'un environnement technologique entraînent l'activité mathématique des élèves. Et cela influence alors ce qui est observé mathématiquement : c'est d'abord en observant une activité mathématique authentique prenant place dans l'environnement technologique qu'on reconnaît l'émergence des idées mathématiques chez les élèves. Et ce sont ces mathématiques qui deviennent l'objet d'étude, et non la façon avec laquelle un objet mathématique prédécidé est atteint avec l'aide de la technologie.

Pour le travail du chercheur, on constate alors que la perspective transformatrice instaure une certaine incertitude en ce sens qu'il y a une espèce de va-et-vient qui s'insère dans l'activité même d'analyse. Au départ, l'intérêt est principalement sur les caractéristiques de l'environnement technologique et sur leur influence potentielle sur

l'activité mathématique : Dans quelles directions peuvent-elles entraîner l'élève? Quels genres de semences pour les idées mathématiques peuvent émerger de l'exploration de ces caractéristiques par l'élève? Quels effets cela peut-il avoir sur nos façons de faire les mathématiques? etc. Mais ensuite, on s'intéresse explicitement à ces semences mathématiques, aux mathématiques produites durant le travail, afin de voir en quoi elles permettent de faire avancer l'activité mathématique de l'élève, à ce qu'elles permettent de travailler mathématiquement, en quoi il s'agit d'idées mathématiques riches, etc.

Ce n'est donc qu'en observant ce qui émerge du travail mathématique dans l'environnement informatique que les idées mathématiques sur lesquelles creuser, du point de vue du chercheur, se manifestent. En ce sens, cette posture guide le travail du chercheur (ces observations, ce qu'il en développe, etc.) dans une direction possiblement différente du travail habituel, plus intéressé et plus sensible à où les environnements informatiques peuvent mener mathématiquement, à comment ils peuvent faire avancer les mathématiques de l'élève, et moins sur comment la technologie permet d'atteindre un certain contenu/concept précis et déterminé. Au cœur de ceci réside toujours la même question : est-ce que faire les mathématiques différemment permet de faire des mathématiques différentes?

2.4 Vers l'analyse d'autres environnements informatiques

Dans les environnements informatiques, c'est principalement par les objets-pour-penser-avec (pour les idées mathématiques) que les aspects transformateurs sont mis de l'avant, c'est donc sur cela que je mettrai l'accent dans mes analyses. C'est ce dont j'ai parlé en reprenant les idées de Papert et en explorant sa géométrie Tortue. C'est aussi ce qui est ressorti de la relecture d'un article de recherche en section 2.3, alors que Vadcard a identifié dans les caractéristiques d'un EGD la possibilité de favoriser l'émergence d'une certaine facette de la notion de l'angle en mathématique. Ainsi, les micromondes et l'objet-pour-penser-avec proposent une autre façon de penser

l'activité mathématique. Il s'agit d'une perspective qui permet de parler des caractéristiques des environnements informatiques de travail mathématique en tant qu'aspects transformateurs.

Et ces aspects transformateurs ne devraient pas se restreindre qu'aux environnements informatiques développés par Papert (comme celui de la géométrie Tortue). Voilà pourquoi je propose d'analyser comment on peut retrouver ces aspects transformateurs dans d'autres environnements informatiques, des logiciels, en m'appuyant explicitement sur les concepts de micromonde et d'objet-pour-penser-avec.

[...] the serendipitous discoveries, the bugs, and the mathematical insights all require movement to be appreciated.

Seymour Papert, 1980

CHAPITRE III

MÉTHODE

3.1 Introduction et approche générale

Mon intention de recherche est de fournir des exemples, d'illustrer et d'explorer l'idée de Papert (1980), développée dans le chapitre précédent, des aspects transformateurs de la technologie sur l'activité mathématique. En ce sens, je ne cherche pas à analyser comment certains environnements informatiques peuvent aider à l'apprentissage d'un contenu mathématique spécifique (p. ex. *comment exploiter efficacement GeoGebra pour l'apprentissage du raisonnement déductif en géométrie*), mais bien à faire valoir comment les caractéristiques des micromondes informatiques peuvent être parlés et conçus comme des aspects transformateurs pour l'activité mathématique (p. ex. *comment GeoGebra influence comment on prouve géométriquement*). Comme je l'ai fait avec la relecture d'un article de Vadcard, je veux offrir une façon alternative de concevoir l'apport des outils informatiques. Dit autrement, je veux illustrer comment les environnements informatiques, par leurs caractéristiques, influencent comment on rencontre les idées mathématiques et comment cela peut influencer en retour les idées mathématiques qui émergent. Mais il s'agit toujours de n'offrir que quelques exemples—en aucun cas l'intention est de faire une analyse exhaustive des caractéristiques et des possibilités des différents environnements analysés.

Mes analyses veulent donc mettre en lumière comment il est possible de concevoir les environnements informatiques de travail mathématique comme des micromondes

pour l'activité mathématique. Je présente alors en quoi certaines de leurs caractéristiques sont des objets-pour-penser-avec pour les idées mathématiques.

3.2 Le choix des environnements

Comme il s'agit d'offrir quelques exemples d'une façon particulière de penser les effets de la technologie pour l'activité mathématique, le choix des environnements informatiques à analyser n'était pas particulièrement difficile. J'aurais bien pu analyser n'importe quel environnement informatique d'exploration d'idées mathématiques—comme on en trouve certainement des milliers dans l'Internet. Je me suis néanmoins efforcé de considérer des environnements qui étaient étroitement associés au contexte de l'apprentissage des mathématiques.

3.3 Les trois environnements analysés¹²

Ainsi, pour illustrer comment il est possible de parler et de concevoir les effets des environnements informatiques en termes transformateurs pour l'activité mathématique, j'analyse trois types d'environnements informatiques associés à l'activité mathématique :

- Les environnements de géométrie dynamique (EGD);
- Un environnement informatique de travail algébrique, soit AlNuSet;
- Les environnements pour simuler des expériences aléatoires (simulateurs informatiques).

Ces environnements offrent des milieux de travail pour trois thèmes mathématiques importants : la géométrie plane, l'algèbre et les probabilités respectivement.

¹² Il est à noter que c'est plutôt dans la section des analyses que je présente l'interface et le fonctionnement général de chacun des environnements. Ce choix s'est imposé par le fait que la description de chaque environnement est interreliée à son analyse.

3.3.1 Les EGD et les simulateurs informatiques

Dans le cas des EGD et des simulateurs informatiques, j'ai choisi de ne pas cibler spécifiquement un cas particulier. La raison est fort simple : bien qu'il existe un grand nombre de logiciels particuliers pour chacun de ces types d'environnements, ils partagent tous un ensemble de caractéristiques communes qui les distinguent. Pour les EGD, c'est la possibilité de manipuler directement les (propriétés des) objets géométriques alors que dans les simulateurs d'expériences aléatoires, c'est la possibilité de configurer, d'expérimenter et d'analyser ses propres expériences aléatoires. C'est donc pour offrir un propos qui résonne dans le plus d'environnements possibles que j'ai choisi de me concentrer sur les caractéristiques plus générales associées à ces environnements respectifs. J'ai tout de même eu, par moment, à présenter un environnement en particulier, notamment lors de la présentation de captures d'écran, ou dans l'exemplification du fonctionnement de certaines caractéristiques. Dans ces occurrences, j'ai utilisé dans mon analyse des EGD le logiciel GeoGebra et dans le cas de l'analyse des simulateurs informatiques, le logiciel TinkerPlots ainsi qu'un simulateur du lancer de dés disponible sur la plateforme informatique Netmaths.ca.

3.3.2 AlNuSet

Pour le troisième environnement analysé, AlNuSet, la situation est un peu différente. À ma connaissance, il s'agit du seul environnement en son genre pour l'exploration de certaines idées algébriques. Puisqu'il ne m'est pas possible de présenter AlNuSet comme faisant partie d'une famille d'environnements similaires, je m'y intéresse en tant qu'un cas particulier d'environnement technologique pour l'activité mathématique.

3.4 Les analyses

3.4.1 Les écrits scientifiques comme point de départ

Avant d'entrer concrètement dans l'écriture des analyses, j'ai consulté les écrits scientifiques (principalement ceux de la didactique des mathématiques) relativement aux trois environnements choisis.

C'est par ce premier survol des écrits scientifiques que je me suis familiarisé, pour chacun des environnements, à la façon dont étaient parlés, dans le contexte des mathématiques scolaires, les effets typiques reconnus à la technologie, le rôle (p. ex. facilitateur) qui lui était implicitement ou explicitement donné, les avantages et les inconvénients qu'on lui reconnaît, etc. C'est aussi dans cette première lecture que j'ai pu relever différents cas d'utilisation typique de chacun des environnements, des cas que j'ai ultimement repris dans mes analyses.

3.4.2 Un va-et-vient dans l'écriture

Mes analyses ont pris forme dans un va-et-vient entre mon écriture et la lecture de textes scientifiques. Dans chacune de mes analyses, je me suis d'abord servi des principaux arguments de la littérature associés à l'environnement technologique pour y relever des effets qu'il m'était possible de présenter sous une perspective transformatrice. Un peu comme pour l'analyse de Vadcard, j'ai cherché à reformuler certains des effets (associés à différentes caractéristiques des environnements informatiques) par l'idée d'objet-pour-penser-avec. La perspective d'objet-pour-penser-avec m'a amené à m'intéresser finement à ce qu'il est possible de voir émerger en termes des idées mathématiques, par les caractéristiques de ces objets-pour-penser-avec.

C'est à ce moment que j'ai repris les usages mathématiques typiques associés (dans les écrits scientifiques) à chacun des environnements. Afin d'analyser comment les caractéristiques des environnements pouvaient réussir à pousser l'activité

mathématique dans certaines directions (en rendant certains aspects des objets mathématiques plus visibles notamment), je me suis placé personnellement en activité mathématique authentique au sein des micromondes. J'ai donc exploré assez librement ce que chaque environnement rendait possible, facile, naturel, concret, etc. C'est dans ce processus d'exploration des environnements, appuyé par mon cadre d'analyse des micromondes, d'objets-pour-penser-avec et du débogage, que certaines idées mathématiques particulières ont émergé d'une façon particulière, provoquées par les caractéristiques des environnements technologiques. Dans chaque cas, c'est là que je suis retourné aux écrits scientifiques avec un regard plus ciblé sur ces notions mathématiques, afin de m'assurer de considérer les travaux en didactique des mathématiques portant sur ces notions en particulier. Il est possible de constater cette considération des écrits scientifiques dans mes analyses alors qu'un aller-retour est perceptible entre mes analyses, mon activité mathématique et les écrits des chercheurs du domaine.

[...] the serendipitous discoveries, the bugs, and the mathematical insights all require movement to be appreciated.

Seymour Papert, 1980

CHAPITRE IV

ANALYSE DES ASPECTS TRANSFORMATEURS D'UN MICROMONDE INFORMATIQUE POUR L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE : L'EXEMPLE DES ENVIRONNEMENTS DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

4.1 Les environnements de géométrie dynamique (EGD)

Les logiciels de géométrie dynamique trouvent leur origine au début des années 1960, avec la création du logiciel Sketchpad par l'informaticien Ivan Edward Sutherland du MIT (Hocquenghem, 1998). Ce logiciel permettait déjà de visualiser des constructions d'objets géométriques (arcs et segments) ayant certaines propriétés et pouvant composer des figures que l'on pouvait ensuite manipuler (déplacer, tourner, copier, redimensionner) sans qu'elles ne « perdent » ces propriétés. Dès le départ, c'est cet aspect du travail avec/par les propriétés des figures qui caractérise les environnements de géométrie, puisqu'il permet de travailler directement avec/sur les figures. Ainsi, dans un EGD on peut *définir* un point comme équidistant à deux autres points puis modifier les coordonnées de ceux-ci : les coordonnées du nouveau point se modifient alors automatiquement pour que ce dernier demeure équidistant aux deux autres.

Un autre élément clé des EGD : dès 1960 il fut possible d'interagir avec les constructions par geste, à l'aide d'un crayon optique touchant l'écran (Sutherland, 2003). Au milieu des années 1980, de nombreux logiciels font leur apparition rendant cette technologie accessible aux élèves via la souris de l'ordinateur (ou directement avec le doigt à l'écran, dans le cas des écrans tactiles) : Cabri-Geomètre, Geometer's

Sketchpad, GeoGebra, cinderella, carMetal, et ainsi de suite (Balacheff & Kaput, 1996).

Les EGD sont donc basés sur la création et la manipulation d'objets mathématiques (géométriques) via leurs propriétés ou leurs représentations. Des écrits scientifiques portant sur le sujet se dégagent un bon nombre d'autres caractéristiques relatives aux possibilités pour l'activité mathématique offerte par les EGD. Dans cette première section, je présente brièvement ces caractéristiques, et j'explique comment il est possible de voir les EGD comme des micromondes. Dans la section suivante, j'illustre par une analyse certains des aspects transformateurs des EGD, expliquant entre autres comment les EGD en tant qu'objets-pour-penser-avec font émerger des idées géométriques, de manière particulière et indissociable, de ces caractéristiques des environnements.

4.1.1 Caractéristiques importantes des EGD

Les EGD d'aujourd'hui offrent en général un ensemble de *prémisses* de constructions pour lesquelles l'utilisateur doit déterminer certaines *propriétés* au moment de les utiliser. Ainsi, un « outil » permettant de créer un point, une fois choisi, demande à l'utilisateur de spécifier où ce point doit se trouver ou encore à quel objet il appartient. Cela peut se faire à l'aide de la souris (p. ex. en déposant le point dans l'espace correspondant au plan) ou, dans certains logiciels, par une commande écrite (Figure 4.1).

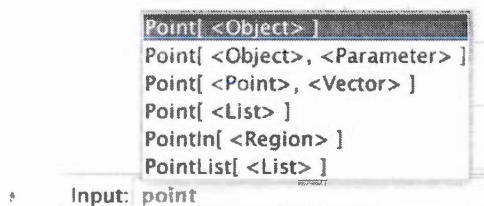


Figure 4.1 La création d'un point dans Géogebra via les commandes écrites

Les objets construits à l'aide des prémisses sont alors représentés à l'écran selon leurs propriétés géométriques, et il est alors possible d'agir sur/avec ces objets via leur représentation. On peut par exemple *manipuler* un cercle en le déplaçant directement, ou en déplaçant le point qui lui sert de centre (selon la manière dont il a été construit).

Cette possibilité de déplacement peut être associée à la caractéristique de *mouvement* des EGD. Il existe plusieurs manières de mettre une figure en mouvement, mais la plus générale consiste à changer directement un objet de position à l'aide du pointeur. Ainsi, un point placé dans le plan peut être bougé par manipulation graphique : on appuie sur le point avec le curseur de la souris (ou avec son doigt) et on fait glisser le point ailleurs. Le mouvement est cependant souvent accompagné d'une certaine *résistance*, résultant de sa construction. La résistance au mouvement dépend, et donc rend visible, des propriétés "fixes" des constructions. Ainsi, si un point est défini comme étant « sur un cercle », on pourra changer sa position sur le cercle, mais on ne pourra pas le « sortir » de l'objet.

La *globalité* est directement liée à la résistance et au déplacement : en changeant la position d'un élément d'une construction, ce sont tous les éléments en relation avec lui qui sont perturbés (et seulement ceux-là). Ainsi, en déplaçant un des sommets d'un quadrilatère quelconque, les deux segments qui le relient aux sommets voisins "suivent" le point, tandis que les autres sommets ne sont pas déplacés. De plus, la continuité permet un mouvement très fluide des objets à l'écran (p. ex. le déplacement n'est pas saccadé), ce qui favorise intuitivement un engagement physique entre le mouvement physique de l'utilisateur (p. ex. le déplacement de la souris ou encore le glissement du doigt sur l'écran tactile) et les objets à l'écran. En effet, par la continuité, ce ne sont pas seulement les positions initiales et finales des objets qui sont visibles, mais bien toutes les positions intermédiaires, « entre les deux ». On voit les objets se déplacer, on les observe, on les suit. Ainsi, malgré le caractère discret des représentations à base de pixels (plutôt que continues), la

continuité du mouvement dans l'espace de travail donne l'impression qu'une infinité de positions peuvent être occupées. L'exemple de la figure suivante (il s'agit d'une superposition d'images) illustre l'effet de continuité durant la construction d'un cercle de centre O et de rayon OA alors que l'allure qu'aurait le cercle selon la position du curseur est constamment affichée dans l'espace de travail, jusqu'à ce qu'une sélection finale soit faite.

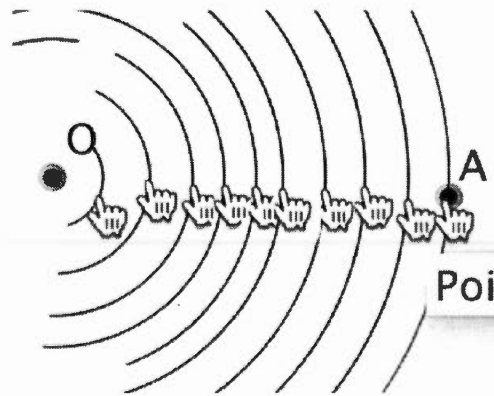


Figure 4.2 La continuité dans la construction d'un cercle

La possibilité de *recadrage* vient appuyer ceci au moyen des zooms permettant de visualiser les constructions à différentes échelles. L'exemple des figures suivantes permet de constater que malgré les apparences, on n'obtient *pas* un polygone régulier par l'assemblage de triangles isocèles dont le sommet α à une valeur de $51,43^\circ$.

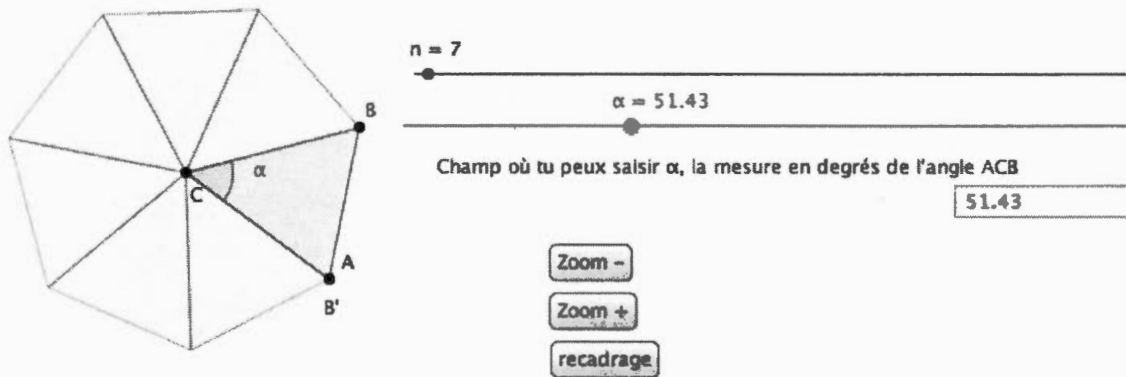


Figure 4.3 Les apparences laissent croire que la figure est fermée

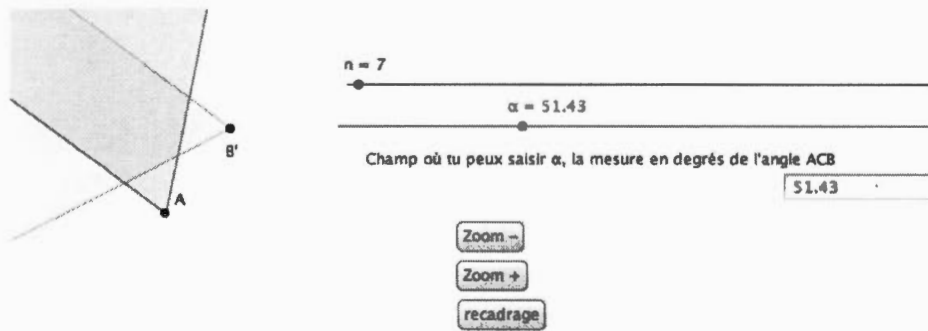


Figure 4.4 Le recadrage permet d'attirer l'attention sur certains aspects d'une construction

Une autre caractéristique souvent répertoriée est l'idée d'avoir accès à l'*historique de la construction*. Les EGD permettent généralement non seulement de construire de manière progressive une figure complexe, mais aussi de revisiter l'historique de sa construction (pour la reproduire, par exemple). Il est parfois même possible de modifier une figure à partir de son historique : revenir en arrière et la modifier en changeant certaines propriétés. Par exemple, on peut revenir en arrière et redéfinir un point construit initialement comme un objet « libre » en tant que point sur (appartenant à) un objet, comme la circonférence d'un cercle. Évidemment, ceci a pour effet de changer la nature de l'objet (ici le point), maintenant connecté au cercle.

Ceci n'est pas sans lien avec la fonction de *prévisualisation*. Au moment d'ajouter quelque chose à une construction, les EGD fournissent en effet très souvent une prévisualisation de ce qui sera produit. Par exemple, lorsqu'une parallèle est tracée à partir d'une droite, la nouvelle droite est rendue visible immédiatement, bien avant d'avoir sa position finale. Elle suit le curseur de la souris, demeurant toujours parallèle à la droite de référence, jusqu'au moment où l'utilisateur indique le point par lequel elle doit passer. La droite parallèle est alors en glissement jusqu'à ce qu'elle soit définie complètement.

4.1.2 L'environnement de géométrie dynamique comme micromonde

Les logiciels de géométrie dynamique offrent des environnements ouverts et extrêmement riches pour l'exploration d'idées mathématiques (Laborde, 1993). Ces logiciels, nombreux, offrent tous à leur façon un environnement pour explorer, créer et valider ses propres mathématiques (Edwards, 1997). Pour Lagrange (2009), les EGD permettent un accès plus direct et plus géométrique aux objets si on compare avec un environnement papier-crayon :

Les logiciels de visualisation interactive, par exemple la géométrie dynamique, permettent un accès direct à des objets considérés comme proches des entités mathématiques [...] favorisent aussi des approches où le rôle des représentations algébriques est minoré. (Lagrange, 2009. p. 40)

Cette proximité à laquelle fait référence Lagrange (« permettent un accès direct à des objets [...] ») peut se voir dans ce qui a été mentionné plus haut concernant l'utilisation de prémisses qui correspondent à des idées géométriques. Ainsi, dans *GeoGebra*, la bissectrice d'un angle est un objet auquel on fait appel via un menu, donc qu'on utilise directement, qui se manipule, sans avoir à le construire dans le sens traditionnel du terme (avec une règle et un compas) (Figure 4.5).

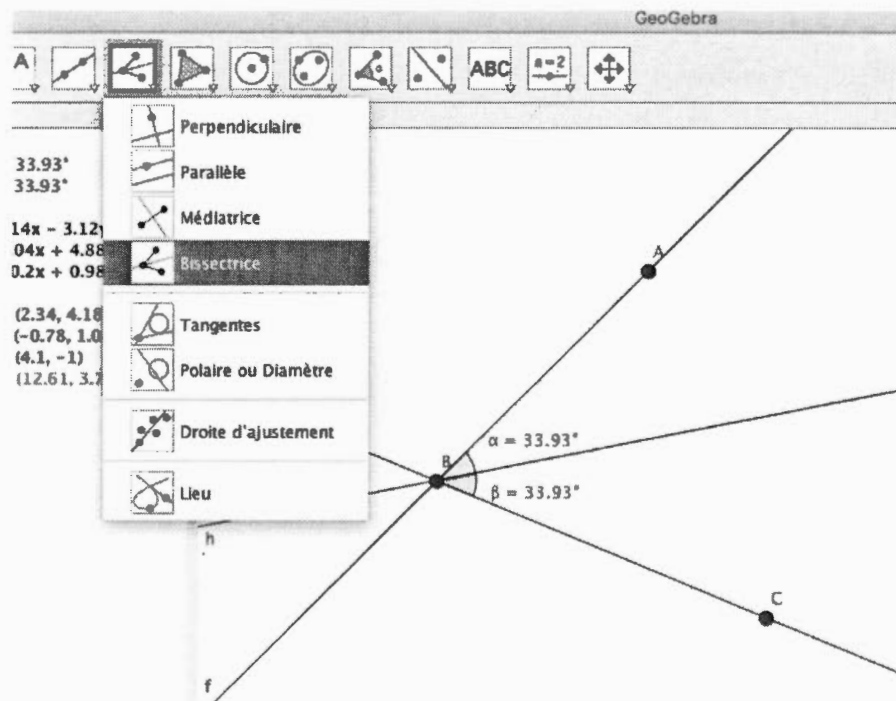


Figure 4.5 Construire la bissectrice d'un angle via l'objet « Bissectrice » du menu de GeoGebra

Dans ce contexte d'utilisation, l'objet géométrique est alors d'emblée un « instrument » à manipuler, à explorer, à s'approprier... et avec lequel il est possible d'analyser/travailler dans l'environnement. Il s'agit là d'aspects essentiels à la reconnaissance des EGD comme micromonde. Les EGD « encapsulent » les idées géométriques (comme la bissectrice) et propose de leur faire appel « en tant que tel », comme on appuie sur la touche « $\sqrt{\quad}$ » d'une calculatrice pour accéder directement à la racine carrée d'un nombre. Bien sûr, puisqu'il demeure possible de faire la construction classique de la bissectrice, on peut dire que la bissectrice, et les autres objets géométriques accessibles via les menus, sont à la fois des objets à construire et des objets avec lesquels construire d'autres objets, directement. Par ceci, l'objet géométrique (la droite, la médiatrice, le point milieu, etc.) n'a plus besoin d'être une « fin », il peut immédiatement servir de moyen, et participer à la création de figures, à

la production d'œuvres géométriques avec/par lesquelles on pourra explorer, découvrir, se familiariser et mieux comprendre une foule d'idées géométriques. Et ce micromonde, on le sent déjà, met en avant une manière assez différente de faire la géométrie, bien à lui, qui permet d'envisager autre chose que les constructions à la règle et au compas. Le micromonde des EGD possède bien son propre mode de fonctionnement, avec ces règles assez particulières et même des objets géométriques assez particuliers (p. ex. une droite peut exister et être visible sans pourtant être complètement définie, comme dans l'exemple de la construction d'une droite parallèle à une autre droite, à la fin de la section 4.1) et c'est dans tout ce que cela implique qu'apparaissent les objets mathématiques et leurs concepts.

4.2 Aspects transformateurs des EGD

Les EGD font l'objet d'un nombre impressionnant d'études que je ne pourrais prétendre toutes considérer, et ce n'est pas là le but. Plutôt, l'intention est de relever quelques aspects principaux des arguments présentés dans les écrits scientifiques et pour lesquels on peut reconnaître un caractère transformateur pour/sur l'activité géométrique. Par exemple, selon Artigue (2008), les EGD sont particulièrement appréciés pour travailler la géométrie pour deux raisons :

- la distinction qu'ils aident à apprécier entre « dessin » et « figure » (transition entre une appréhension perceptive et une appréhension géométrique des figures);
- les différents usages du déplacement et ce qu'ils permettent (généralisation, validation, conjecture, etc.).

Ces deux aspects sont liés aux caractéristiques des EGD dont l'attribut d'objet-pour-penser-avec tel que défini par Papert offre une façon particulière d'entrer en relation avec les objets géométriques : ce contact avec les idées et les objets géométriques se fait par le dynamisme qu'elles introduisent. Il s'agit là selon moi d'aspect transformateur pour l'activité mathématique et pour les objets mathématiques.

4.2.1 Appréhension des objets géométriques

Différents éléments de l'EGD contribuent à ce que la distinction entre dessin et figure apparaisse naturellement. Par ses outils de construction et la rétroaction qu'ils offrent sur les différentes actions posées, les EGD mettent en avant les propriétés des objets géométriques de façon très explicite (p. ex. cercle de rayon n et de centre o). De ce fait, les propriétés des objets construits sont toujours à l'avant-plan. Par exemple, dans le logiciel *GeoGebra*, l'utilisateur est immédiatement exposé aux propriétés des objets qu'il construit via les différents menus par un texte en survol (Figure 4.6). Et encore, puisque *GeoGebra* propose habituellement plus d'une façon de construire un certain objet (Figure 4.7), ce même texte en survol peut alors devenir une sorte « d'encyclopédie », ouvrant la porte à une sensibilité aux différentes possibilités, influençant alors l'activité mathématique subséquente.

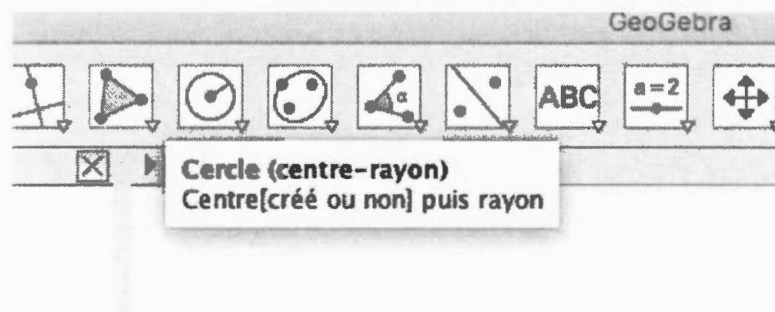


Figure 4.6 L'interface propose/favorise une entrée sur les propriétés des figures pour leur construction *GeoGebra*

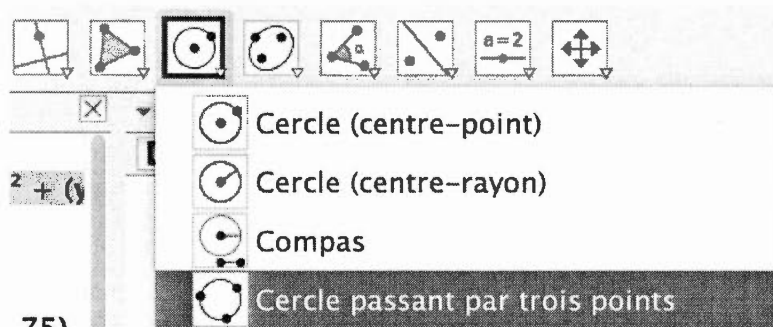


Figure 4.7 Les menus se présentent comme une sorte d'encyclopédie des possibles

Mais c'est aussi à travers la possibilité de faire bouger les figures et d'observer les effets et limites de ces déplacements (résistance au mouvement, globalité) que les propriétés prennent sens. On peut voir/manipuler ce que signifie « être perpendiculaire » pour deux droites ou « être isocèle » pour un triangle (lorsqu'ainsi construit) à travers ce que devient la représentation quand une de ses parties est manipulée. Par exemple, dans l'action de déplacer les sommets d'un triangle isocèle, ce sont davantage les caractéristiques invariables qui attirent l'attention que la variation de l'allure générale de la forme. J'ai précisé « dans l'action de » puisque c'est vraiment lorsque l'objet est manipulé, lorsqu'il est *en mouvement* que les aspects invariants sont particulièrement visibles. Quelques images statiques représentant différents moments d'un déplacement n'offrent pas la même chose. C'est en ce sens qu'on peut dire que les EGD favorisent le passage d'une appréhension perceptive à une appréhension géométrique des figures. Qui plus est, manipuler ainsi les figures (les réorienter, les déplacer, les déformer) n'est pas uniquement possible dans l'EGD, mais c'est au cœur du travail, c'est favorisé, encouragé par les caractéristiques de l'EGD et son fonctionnement.

On peut donc dire que les EGD mettent de l'avant la manière dont les figures géométriques sont en fait des ensembles de figures potentielles (Laborde, 2005; Leung, 2008; Hölzl, 1996) (Figure 4.8).

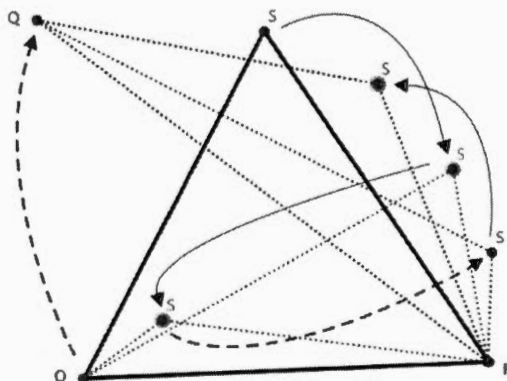


Figure 4.8 Le déplacement des sommets du triangle QRS permet d'envisager toute une famille de triangles potentiels

Quand un triangle se présente à l'écran, c'est implicitement toute une famille de figures qu'il y a « derrière » : ce sont tous les triangles rendus possibles par cette construction qui sont offerts. À travers cette multiplicité, les particularités de cette famille (p. ex. avoir 180° comme somme des angles intérieurs; avoir un angle droit) deviennent possiblement visibles, découvrables...

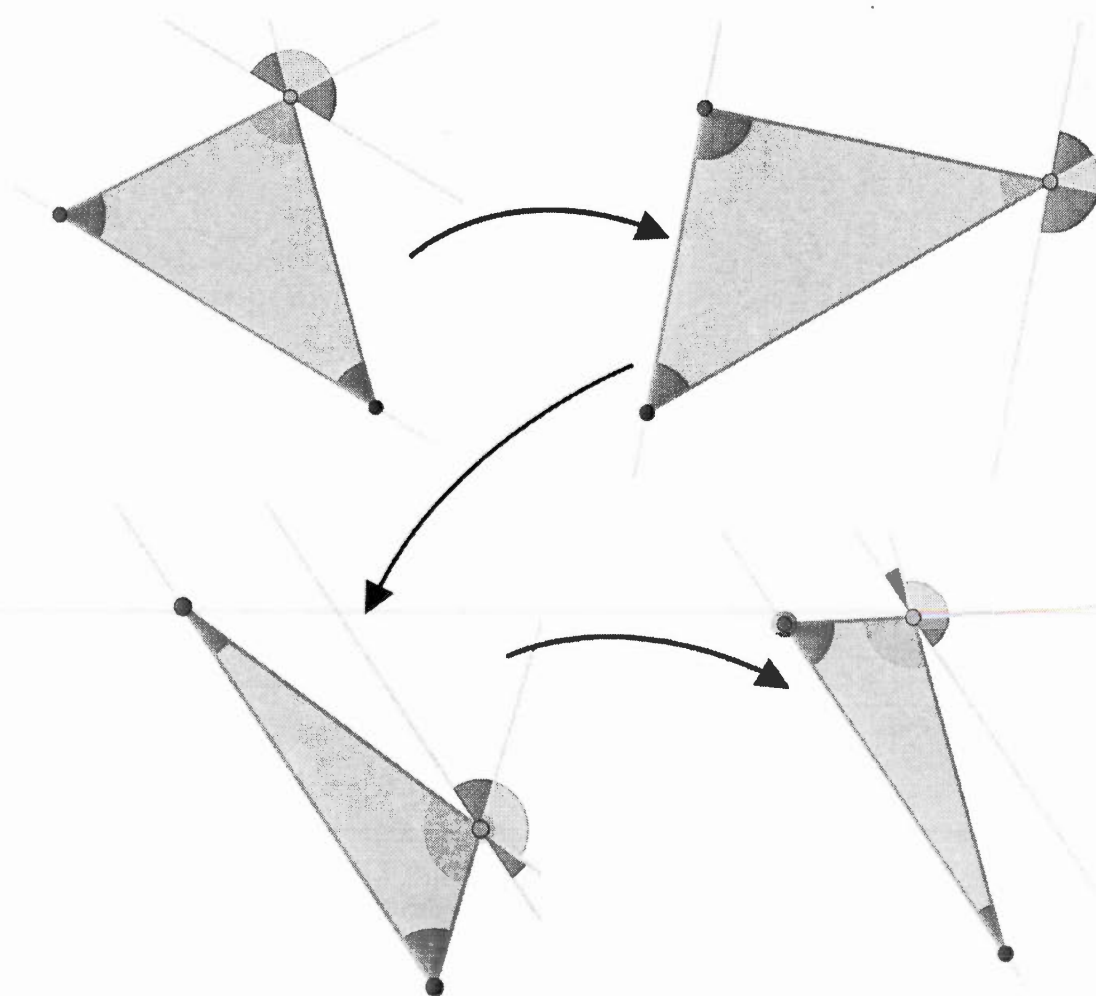


Figure 4.9 Exploration de différentes propriétés des triangles par le déplacement

Ce qui émerge de la construction d'un triangle « dynamique » (se manifestant à l'écran comme représentant d'un ensemble de triangles), ce sont les propriétés qui sont maintenues dans la manipulation de la figure. D'autres aspects moins « essentiels » comme les dimensions et l'orientation (dont la recherche montre bien la prégnance dans des environnements « statiques ») perdent de leur importance (puisque ni les mesures de côtés ni l'orientation ne sont fixes

(Figure 4.9)) (Laborde et Capponi, 1994). On entre donc dans un autre monde, un micromonde où les propriétés et les caractéristiques saillantes sont autres.

Évidemment, ceci n'est pas complètement nouveau, mathématiquement parlant, ni propre aux EGD. Un rectangle statique présenté pour *illustrer* « la figure du rectangle » (comme on en trouve dans *Les Éléments* d'Euclide par exemple) n'est toujours qu'une image derrière laquelle on sait pouvoir trouver une infinité de rectangles potentiels. La particularité des EGD est que par la manipulation de son représentant, ils donnent un accès immédiat, tangible, voire direct, et avec une facilité déconcertante, à cette « infinité » de rectangles (Restrepo, 2008). Ainsi, et c'est là une idée centrale, ce qui demeure stable dans le mouvement de la figure (ce qui *résiste au mouvement*) rend dynamiquement visible (c.-à-d. dans le changement) la nature géométrique de l'objet, ses propriétés. C'est l'aspect transformateur central derrière cet argument que les EGD favorisent le passage d'une appréhension perceptive à une appréhension géométrique.

4.2.2 Une distinction particulière entre un objet géométrique statique et un objet géométrique dynamique

Cet « appel au mouvement » est à la base de tout travail en EGD. Une des activités souvent proposées aux apprenants qui font leurs premières expériences en EGD consiste justement à initier à cette différence fondamentale entre la figure statique et la figure dynamique dont la nature (géométrique) véritable ne se révèle que par la manipulation à l'écran. On peut ainsi faire la distinction entre des constructions *solides* (qui résistent au mouvement) et des constructions *molles*. Ces dernières vont perdre, dans le déplacement à l'écran, plusieurs des propriétés visibles sur la disposition initiale (Soury-Lavergne, 2014).

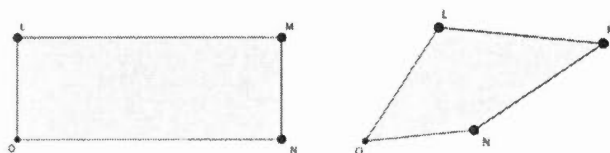


Figure 4.10 Exemple d'une construction molle du rectangle. À gauche la figure de départ, à droite la figure après le glissement de certains des sommets.

Si on y pense bien, cette distinction est très puissante du point de vue mathématique. Dans la figure précédente, l'image de gauche est un rectangle « mou » dont une déformation est montrée à droite. Prise de manière statique, l'image de gauche peut effectivement être considérée comme un rectangle disposant des toutes les propriétés attendues. Ses sommets ont été positionnés de manière précise (en indiquant leurs coordonnées), de sorte que nous soyons bel et bien en présence de deux paires de segments parallèles orthogonaux entre eux, et ainsi de suite. Cette construction molle est donc bien un rectangle, tant qu'il demeure dans son état statique. Par contre, en raison des propriétés utilisées pour sa construction, la position relative des sommets n'est pas contrainte, ce qui fait en sorte que la construction ne résiste pas au mouvement. Si on compare avec la construction de la figure ci-dessous, on a donc deux types de constructions produisant (au départ) le même objet géométrique.

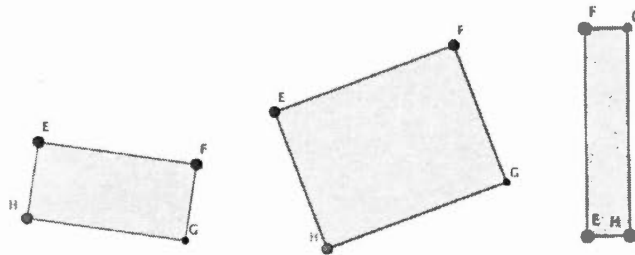


Figure 4.11 Exemple d'une construction robuste (qui résiste au mouvement/déplacement). La figure de gauche est celle de départ et les deux suivantes sont le résultat du glissement de certains des sommets.

Mais l'un se révélera être un rectangle dynamique (obtenu par construction solide) alors que l'autre est un rectangle statique (mais un quadrilatère dynamique dans ce cas, créé par une construction molle).

En ce sens, on peut dire que l'EGD, par ses caractéristiques, nous pousse/encourage à penser en termes de propriétés « permanentes » (ou non) d'objets géométriques, tout en étant dans un (micro)monde géométrique dynamique. Une figure statique est toujours de mesure et d'orientation données, et un travail particulier lié à la géométrie en ce contexte consiste à faire abstraction de ces particularités jugées non essentielles. Dans un EGD, l'orientation et les dimensions (pensez aussi au recadrage, au changement d'échelles) ne sont que transitoires. Ainsi, en encourageant la manipulation des figures pour « mettre à l'épreuve » leurs propriétés, les EGD sont des micromondes dans lesquels la distinction entre les propriétés spatiales et les propriétés géométriques est très évidente (Berthelot et Salin, 1993). Par leurs caractéristiques, les EGD offrent une nouvelle entrée sur la nature théorique des objets/figures par la mise en lumière de deux classes d'objets géométriques, soit celle des objets construits selon leurs propriétés géométriques et celle des objets construits selon leurs caractéristiques spatiales. C'est un autre exemple des aspects transformateurs pour les idées mathématiques à associer aux technologies.

4.2.3 Le mouvement/dynamisme comme objet-pour-penser-avec pour les objets géométriques

En considérant ce qui est apparent dans les micromondes des EGD, on constate à quel point le mouvement et la résistance au mouvement (entre autres) donnent un accès privilégié aux idées géométriques derrière la figure « rectangle ». Cette possibilité de déplacer et de déformer les figures peut être vue comme objet-pour-penser-avec par rapport aux idées géométriques. En effet, le dynamisme influence la manière dont l'utilisateur entre en relation avec les idées mathématiques et influence aussi les idées mathématiques mêmes, puisqu'il les teinte de ses caractéristiques. C'est ce que l'expérience d'une figure dans sa configuration dynamique témoigne : c'est à travers le dynamisme que l'EGD fournit que les caractéristiques géométriques de la figure se dévoilent si bien que c'est la figure qui est caractérisée de dynamique (et non seulement l'expérience de la figure).

Le rectangle-statique et le rectangle-dynamique présentent deux manières bien différentes de faire l'expérience (humaine) de l'objet géométrique. La figure du rectangle-dynamique offre une entrée beaucoup plus riche sur les propriétés de l'objet géométrique du rectangle puisqu'il est possible de la manipuler, de la déformer ou de tout simplement « jouer librement » avec elle. Ainsi, même s'ils sont le même objet géométrique d'un certain point de vue, on peut aussi dire que le rectangle-dynamique et le rectangle-statique ne sont pas le même objet mathématique. Ceci est particulièrement évident si on se place du côté de l'activité géométrique elle-même. En EGD, le rectangle comme ensemble de propriétés émerge à travers le dynamisme de l'environnement. Et, ce dynamisme influence le travail géométrique même en dehors de l'environnement technologique (Sinclair et Yurita, 2008). On observe ainsi que l'exposition aux EGD ouvre vers la perception des figures géométriques en tant qu'objets déformables (en imagination), offrant alors de penser les propriétés de mesures et d'orientation en tant que propriétés variables (et dynamiques) :

In terms of vocabulary, named shapes were discussed as if they were a multitude of objects, changing over time, rather than as a single object, and being available to human agency. In the new discourse, the word 'square' might as well be called 'all-squares-we-could-make' (thus casting the square quasi-empirically rather than analytically). (Sinclair et Yurita, 2008. p. 147)

Et encore

Since visual cues play a major role in the routines used around dynamic representations, students might find it reasonable to use perceptual cues also in the context of static representations. Of course, *having seen dynamic representations*, students might use the new routines on static shapes *dragging and transforming them in their imagination*, but perhaps not measuring them. (p. 148, italiques ajoutées)

Penser les objets géométriques avec les (caractéristiques des) EGD transforme leur nature. Le dynamisme des EGD s'« injecte » dans l'objet géométrique qui est alors pensé, conçu, en ces termes. En EGD, un objet géométrique est un objet qui, par les choix de sa construction, se comporte d'une certaine façon *dans le mouvement*.

Mais, faire émerger l'objet géométrique par sa manipulation, c'est aussi en quelque sorte s'intéresser autant à comment il a été construit (afin de résister au mouvement comme il le fait) qu'à ces propriétés géométriques. Cela ouvre la porte à un questionnement sur ce qui précède la figure donnée, sur son histoire. Car, en effet, toutes les constructions de rectangles (même solides) ne répondent pas de la même manière à toutes les tentatives de manipulations. Il est alors naturel de questionner le « fonctionnement »/comportement des figures. Un tel questionnement met en avant l'objet représenté comme quelque chose que quelqu'un a créé de telle et telle manière. Ce n'est plus seulement « un rectangle », mais une œuvre rectangulaire, le produit d'un travail mathématique, d'un acte créateur. Ce n'est plus tant/seulement l'objet pur de Platon, indépendant du monde, dont le mystère nous attire, mais le secret de sa création. Un rapport « intime » avec son auteur que les diagrammes statiques semblent avoir cherché à effacer, et ce, depuis la Grèce Antique :

In describing the dynamic parallelogram, Thomas talks about the way that the shape was “made”: that is, the parallel properties that went into its construction. Compare this with the way he talked about geometric shapes before, which was in terms of the properties that the shape possesses or in terms of its identity (as exemplified by the presence of the verb ‘to be’ in the following phrases: What is this? Is this a square? Is the parallelogram a rectangle?). Even the Ancient Greeks, who constructed diagrams and labelled them (sequentially, over time), wrote as if those constructions had been accomplished all along erasing the creator (see Pimm, 2006). In this case, however, a shape that gets “made” is one that did not exist before, and that existed only partially at some point in time. This suggests a very different sense of agency, in that Sarah’s parallelogram is what it is because she made it that way, while the diagrams on the worksheet were made to conform to some unknown person’s definition. The dynamic parallelogram is thus animated by having been created and by then being able to move. (Sinclair et Yurita, 2008. p. 143)

Dans les EGD, les constructions géométriques ont une histoire, une histoire qui en plus est « accessible » par la possibilité de s’intéresser à l’historique de la construction. Ceci s’ajoute à la possibilité offerte dans les EGD de s’approprier les figures géométriques par le mouvement, enrichissant ses pouvoirs en tant qu’objet-pour-penser-avec. Ainsi, l’aspect transformateur de la technologie concerne non seulement la manière d’entrer en relation avec les objets géométriques (p. ex. découvrir ce qui fait d’un losange un losange en l’étirant dans tous les sens), mais aussi comment ces objets existent et « voient » le jour (p. ex. apparaissent comme étant le construit de quelqu’un, réalisés d’une manière particulière).

4.3 L’exemple de la preuve en EGD

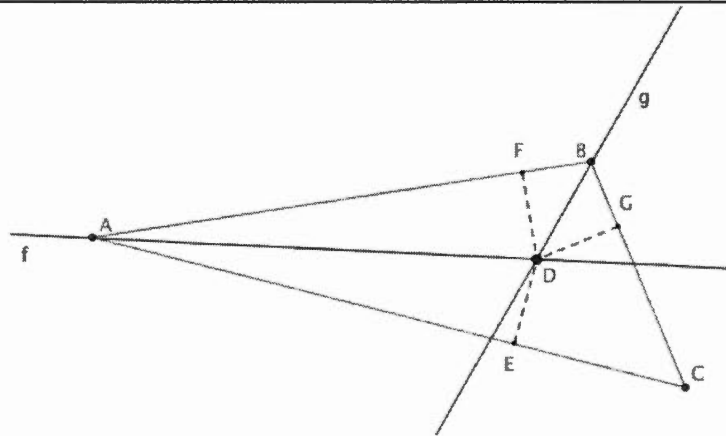
4.3.1 La géométrie comme terrain fertile pour la preuve en mathématique

La preuve dans ses différentes formes occupe une place très importante en mathématiques (Hanna, 2000). Différents auteurs lui reconnaissent différents rôles, mais il semble y avoir unanimité sur le fait que lorsque possible, la preuve devrait permettre non seulement de reconnaître la vérité d’un énoncé, mais aussi d’en

comprendre le pourquoi. Une preuve peut donc offrir beaucoup pour l'expérience des idées mathématiques :

As mentioned above, mathematicians clearly expect more of a proof than justification. As Manin (1977) pointed out, they would also like it to make them wiser. This means that the best proof is one that also helps understand the meaning of the theorem being proved: to see not only *that* it is true, but also *why* it is true. Of course such a proof is also more convincing and more likely to lead to further discoveries. (Hanna, 2000, p. 8)

Dans le contexte de l'activité mathématique, c'est souvent aussi ce qui est souhaité : démontrer qu'une proposition est vraie tout en permettant de voir pourquoi cela est le cas. Il s'agit là de preuves dites explicatives (Steiner, 1978), qui cherchent à rendre « évident » un résultat donné : « [such proof] reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the theorem, such that from the proof it is evident that the results depend on the property » (p. 143). La preuve généralement utilisée pour démontrer que les bissectrices d'un triangle sont concourantes est un exemple de ceci :



Données :

- la droite f est la bissectrice de l'angle BAC
- la droite g est la bissectrice de l'angle CBA
- Les points F , G et E sont les projetés orthogonaux du point D sur les côtés AB , BC et AC du triangle respectivement

Démonstration :

1. $DF = DG = DE$

D est sur la bissectrice de l'angle CBA . Et si un point est sur la bissectrice d'un angle, on dit qu'il est à égale distance des côtés de cet angle. Ainsi, $DF = DG$.

Si on applique le même raisonnement à l'angle BAC , puisque D est aussi sur la bissectrice de l'angle BAC , nous avons que $DE = DF$. Or puisque $DE = DF$ et que $DF = DG$, nous avons que $DE = DG = DF$

2. La droite passant par CD est la bissectrice de l'angle ACB

Par 1, $DE = DG$. Et si un point est équidistant aux deux côtés d'un angle, ce point est sur la bissectrice de cet angle. Ainsi, puisque D est équidistant aux deux côtés de l'angle ACB , il est sur la bissectrice de l'angle ACB . La droite CD est la bissectrice de l'angle ACB

Conclusion :

La troisième bissectrice passe par le point d'intersection des deux premières. Les bissectrices sont donc concourantes.

Figure 4.12 Les bissectrices d'un triangle sont concourantes

Dans cette démonstration, il y a une référence au fait que la bissectrice est le lieu de tous les points équidistants aux côtés de l'angle. C'est en ce sens qu'on dit qu'elle s'appuie sur les propriétés des bissectrices pour affirmer avec certitude l'existence de cette intersection. Cela dit, la simplicité et le caractère « direct » de la preuve ont

aussi beaucoup à voir avec l'idée de « rendre évident » que les bissectrices se croisent toujours en un même point. On peut en effet imaginer une preuve beaucoup plus complexe dont le pouvoir évocateur serait moins grand (p. ex. au moyen d'un calcul de distances, ou si on faisait une preuve plus générale pour inclure des géométries non euclidiennes). La géométrie se veut un domaine privilégié pour la construction/l'expérience de preuves explicatives (Hanna, 2000) et selon Hanna, les EGD ouvrent la porte à des approches complètement nouvelles pour l'expérience du raisonnement déductif en mathématiques.

4.3.2 L'activité géométrique en lien avec la démonstration dans les EGD

Les EGD facilitent, voire encouragent, une exploration/validation visuelle des énoncés géométriques en offrant la possibilité de manipuler/d'expérimenter les différentes propositions (et de les construire avec beaucoup de précision/d'exactitude) (Jackiw (1991, 1995)). Le glissement permet ainsi de s'intéresser intuitivement à la valeur de vérité d'un certain énoncé géométrique en testant sa validité pour un grand nombre de cas. Pour les mêmes raisons, les EGD favorisent l'émission de conjectures par l'exploration (la manipulation) d'une construction géométrique. (Restrepo, 2008; Tanguay et Geeraerts, 2014). Par exemple, on peut manipuler la construction des bissectrices d'un triangle, en déplaçant les sommets du triangle et en observant ce qui se produit. Une telle manipulation rend rapidement assez « évident » le fait que les bissectrices sont concourantes (Figure 4.13). C'est alors la construction en entier (on pourrait dire sa « représentation visuelle ») dans son statut dynamique qui ouvre la porte à la reconnaissance d'une propriété remarquable.

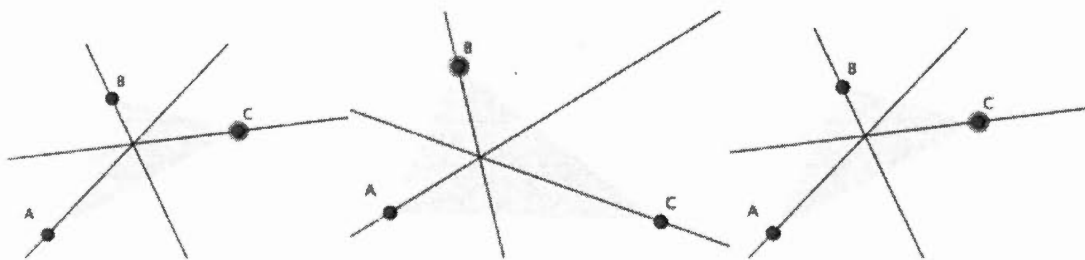


Figure 4.13 Déformation dynamique d'un triangle montrant que les bissectrices se croisent toujours

En ce sens, il s'agit là d'une entrée bien différente sur les énoncés géométriques et pour l'activité de la preuve en général. Déjà, on constate que les caractéristiques des EGD ouvrent la porte à une exploration des énoncés très détaillés (par l'exploration de la construction de l'énoncé) : on peut rapidement observer autant de cas qu'on le souhaite, et on peut zoomer pour « s'assurer » que les droites se croisent bel et bien. On y voit alors, dans les caractéristiques des EGD, des objets-pour-penser-avec, c'est-à-dire des manières, des outils, des fonctions pour comprendre (de manière particulière) certains phénomènes mathématiques.

Évidemment, bien que l'exemplification d'un énoncé géométrique pour se « convaincre » de sa véracité potentielle, notamment, ne soit pas quelque chose de propre à la technologie, on sent que les EGD donnent un sens particulier à ces « études de cas » par l'ordre de grandeur du nombre de cas particuliers qu'on peut maintenant considérer (p. ex. penser avec le déplacement). Cette ouverture sur la vérification expérimentale d'un énoncé géométrique et le fait que cela offre visuellement une sorte de confirmation de sa véracité sont un exemple de la manière dont les EGD peuvent modifier l'activité de preuve. De nombreux travaux de recherche insistent ainsi sur la possibilité de mettre les élèves (et on pourrait facilement étendre aux mathématiciens en général) en position de formuler des conjectures (qu'il faut ensuite valider de différentes manières); chose que les environnements de travail géométrique traditionnelle rendent beaucoup moins

évident. Ici, il suffit d'inviter les élèves à « jouer » avec les bissectrices, les médiatrices, les médianes ou les hauteurs d'un triangle pour que d'extraordinaires propriétés s'imposent à eux (la droite d'Euler!). L'objet géométrique manipulable apparaît donc ici comme un objet avec lequel il est possible de découvrir/créer d'autres objets mathématiques remarquables. En ce sens, le dynamisme invite à penser avec l'objet si bien que l'activité géométrique devient dynamique en quelque sorte : dans leur déplacement, les objets mathématiques sont des objets-pour-penser-avec. Jones (2000) relate ainsi que l'entrée par les propriétés géométriques qu'offrent les EGD aide les élèves à formuler des arguments précis à propos des propriétés et des relations géométriques, ce qui les aide ensuite à formuler des déductions appropriées.

Bien sûr, ce n'est pas l'ensemble du travail de preuve qui est radicalement changé ici : on peut toujours trouver une pertinence à *expliquer* sur la base d'un raisonnement déductif ce que le logiciel rend « évident ». Toutefois, plusieurs chercheurs questionnent l'importance accordée au raisonnement déductif par rapport à une approche entièrement exploratoire pour la justification des énoncés géométriques. Pour Mason (1991), la possibilité de vérifier un ensemble pratiquement illimité de cas (par le glissement, le recadrage et la continuité dans les EGD) permet d'attribuer une valeur de vérité à un énoncé:

Mason (1991), for example, maintains that with dynamic software one can check a large number of cases or even, “by appeal to continuity, an infinite number of cases”, and concludes that “truth will be ascribed to observations made in a huge range of cases explored rapidly on a computer” (p. 87) (Hanna, 2000. p. 13).

Si l'exploration des cas couverts par un énoncé ne constitue pas une preuve au sens de la démonstration *explicative*, cette exploration peut permettre d'en saisir la structure et les ramifications de façon unique (Hanna, 2000). C'est encore une fois l'idée d'explorer avec, mais aussi par l'objet (par ses caractéristiques, ce qu'il permet de faire/de voir).

Pour Kuzniak (2009), le dynamisme visuel des EGD est même un *obstacle* à l'activité de la preuve déductive en géométrie : « le glissement [...] favorisé par l'usage des logiciels qui instituent une preuve informatique vient à l'encontre de la preuve axiomatique. » (p.1284). Marrades et Gutiérrez (2000) notent cependant que l'accès privilégié qu'offre les EGD à l'exploration, l'heuristique et la visualisation peuvent conduire les élèves à reconnaître la limite des vérifications visuelles, et par là motiver le besoin d'aller vers la preuve déductive. Mariotti (2001) voit dans les possibilités offertes par les EGD l'occasion de donner un sens concret à différents processus (exploration, pose de conjecture, argumentation) menant à la preuve formelle. Qualifiant les EGD de « médiateurs sémiotiques » (ce qui s'apparente beaucoup à l'idée d'objets-pour-penser-avec) pour la compréhension d'une géométrie « théorique », Mariotti fait un parallèle avec la géométrie « empirique » à la manière d'Archimède¹³. On peut aussi voir une transformation du travail de preuve dans l'importance que prend l'invalidation de conjectures, par exemple. Hadas et al. (2000) ont ainsi observé un groupe d'élèves qui, ayant invalidé leur conjecture par la création d'un cas particulier, sont ensuite (par des manipulations directes, visuelles de la figure) parvenus à formuler une nouvelle conjecture. L'utilisation de l'expression « preuve informatique » par Kuzniak, les propos de Marrades et

¹³ Comme c'est rapporté pour les EGD, Archimède avait recours à ce qu'on pourrait appeler des « environnements mécaniques », qui s'apparentent aux EGD, seulement, il s'agissait de constructions physiques plutôt que virtuelles. Et c'est par ces constructions qu'il avait un certain accès à la démonstration de certains théorèmes. Et bien qu'il rapporte avoir été convaincu par les phénomènes géométriques qui émergeaient de la manipulation de ces mobiles, Archimède n'était pas prêt à y reconnaître là des preuves mathématiques.

C'est ainsi que, dans *La méthode relative aux théorèmes mécaniques*, Archimède explique comment la mécanique l'a guidé dans la rédaction de preuves géométriques qu'il n'aurait pu résoudre considérant la position des géomètres de l'époque sur les infinitésimaux (Peyrard, 1807). Archimède reste cependant réticent face à ces résultats : « certain things [...] first became clear to me by a mechanical method, although they had to be proved by geometry afterwards because their investigation by the said method did not furnish an actual proof » (Heath, 1921, p. 21). (Lagacé, 2015, p. 22-23)

Par ce qu'Archimède rapporte, il semble bien que la construction mécanique (dynamique) lui donnait un certain accès privilégié aux idées, et bien que cela le convainquait, il n'avait pas l'audace de dire qu'il s'agissait bien d'une preuve.

Gutiérrez et encore ceux de Mariotti témoignent tous d'un mouvement perceptible, initié par l'EGD et ses caractéristiques, pour l'activité géométrique liée à la démonstration.

Bien que modeste, on reconnaît dans ce survol de différents travaux en lien avec l'activité de la preuve en EGD plusieurs éléments qui font échos aux propos de micromonde et d'objet-pour-penser-avec de Papert. L'idée d'une géométrie personnelle, qui se construit est certes en arrière-plan de ce que j'ai présenté dans cette section. On y reconnaît l'idée de la construction d'objets mathématiques à l'aide de « matériaux de construction », à la Papert, où le micromonde, ici les EGD, détermine la nature des objets à construire (les figures géométriques) et où les objets-pour-penser-avec (p. ex. le mouvement et la résistance au mouvement, les différentes constructions géométriques exploitables en tant qu'objets en soi (médiatrice, droites parallèles, etc.)) sont en quelque sorte des matériaux pour construire ces objets géométriques. Dans les EGD, on construit donc *aussi* des objets géométriques *au sens propre*. Ces constructions (p. ex. la médiatrice d'un segment) ont la possibilité d'être plus qu'un support ou un médiateur sémiotique, ou un intermédiaire dans l'activité géométrique : elles ont le potentiel *d'être entièrement/complètement* l'activité géométrique. De ce point de vue, l'ensemble des étapes de la construction d'une figure géométrique dans laquelle les relations entre les éléments géométriques sont maintenues (par construction) *est* la preuve (constructive) de l'énoncé de la construction. On peut alors constater comment l'entrée par les propriétés des figures géométriques qu'offre l'EGD peut être pensée comme une semence puissante pour le développement du raisonnement déductif (Laborde, 2000).

4.4 Conclusion

En montrant comment les caractéristiques des EGD étaient des objets-pour-penser-avec pour les idées mathématiques, j'ai illustré que les EGD peuvent être conçus comme étant plus que des médiateurs de savoirs géométriques finis. Il s'agit en fait

d'environnements où prend place une activité géométrique différente, dynamique, dans laquelle émerge des concepts mathématiques teintés, définis même, par les caractéristiques de l'environnement. Ainsi, on constate comment les figures géométriques sont animées d'un dynamisme et que c'est par/dans ce dynamisme qu'elle se manifeste comme des objets géométriques. J'ai aussi discuté de comment ce même dynamisme a le potentiel d'influencer l'activité géométrique en lien avec la preuve, incluant possiblement même la vision de ce que peuvent être les preuves en géométrie. À cet effet, j'ai parlé des EGD (et de ses caractéristiques) en tant qu'objets-pour-penser-avec pour les idées mathématiques. En faire autant a permis de porter un certain regard sur les effets des caractéristiques du micromonde des EGD sur l'activité mathématique. Par exemple, par le simple fait qu'il soit naturel, dans les EGD, de construire des objets géométriques par leurs propriétés, on ressent un certain déplacement possible vers une activité géométrique où la construction géométrique encapsulerait en elle-même une certaine démonstration. En ce sens, penser les EGD en tant que micromonde permet de s'intéresser à l'activité géométrique comme étant particulière aux caractéristiques dynamiques par lesquelles elle émerge : les figures géométriques se présentent alors comme des objets manipulables, qu'on peut faire siens et qui permettent, encouragent l'exploration des idées géométriques. En ce sens, la nature dynamique des objets géométriques se présente comme un objet-pour-penser-avec des idées géométriques intimes et personnelles.

[...] the serendipitous discoveries, the bugs, and the mathematical insights all require movement to be appreciated.

Seymour Papert, 1980

CHAPITRE V

ANALYSE DES ASPECTS TRANSFORMATEURS D'UN MICROMONDE INFORMATIQUE POUR L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE : L'EXEMPLE DE ALNUSET

5.1 AlNuSet

Développé à l'Institut pour les Technologies Didactiques (ITD) du Centre National de Recherche d'Italie, dans le cadre du projet ReMath, AlNuSet (ALgebra on the NUmerical SETs) est un environnement informatique conçu spécifiquement pour faire de l'algèbre en contexte éducatif. Il met de l'avant plusieurs concepts mathématiques associés à l'algèbre, aux ensembles numériques et aux fonctions (Chiappini et Pedemonte, 2010).

De façon générale, AlNuSet représente un choix intéressant pour 2 raisons : (1) AlNuSet est un environnement informatique conçu *spécifiquement* pour travailler l'algèbre scolaire (primaire et secondaire) et (2) AlNuSet n'existe que depuis quelques années—relativement peu de travaux se sont intéressés à ses effets sur l'activité algébrique, et encore moins se sont intéressés à ses effets sur les idées mathématiques elles-mêmes.

Le logiciel mathématique AlNuSet propose trois composantes (modules) pour le travail algébrique et chacune de ces composantes a sa propre interface de travail ainsi que son entrée particulière (pour le travail algébrique) :

1. La droite algébrique;
2. Le manipulateur algébrique;
3. L'interface fonction.

Parmi ces trois modules, j'ai choisi de m'intéresser à *la droite algébrique* parce que son mode de fonctionnement introduit explicitement un dynamisme dans le travail algébrique. Ce dynamisme est présenté après la description sommaire du logiciel qui suit. L'analyse de ce module (qui est un environnement de travail en soi) permet de discuter de plusieurs aspects transformateurs pour l'activité algébrique. Concrètement, le fait de pouvoir manipuler soi-même le symbolisme algébrique (d'en avoir le plein contrôle) par la caractéristique du *glissement* permet de donner un caractère dynamique à la lettre. Le glissement est la possibilité de sélectionner et bouger librement un objet sur une plateforme numérique. Ensuite, je présente comment la nature dynamique associée au symbolisme dans AlNuSet permet de transformer l'activité algébrique de la résolution d'équations. En outre, l'analyse du module de la droite algébrique permet de présenter AlNuSet comme un micromonde de travail d'*algèbre dynamique*, au même titre que GeoGebra (ou Cabri, etc.) permet de faire de la géométrie dynamique. Bien sûr, il serait possible de faire une analyse similaire avec les deux autres composantes, mais l'analyse d'un seul module suffit pour exemplifier les aspects transformateurs de la technologie pour l'activité mathématique.

5.1.1 Description du module de la droite algébrique

L'environnement de la droite algébrique est caractérisé par la présence d'une droite numérique (tout à fait classique) sur laquelle il est possible d'insérer, via un éditeur d'expressions, des éléments algébriques, c'est-à-dire des symboles algébriques

(p. ex. des lettres) et des expressions algébriques (p. ex. $a^2 - 2b$). Ces éléments sont alors placés directement sur la droite numérique.¹⁴

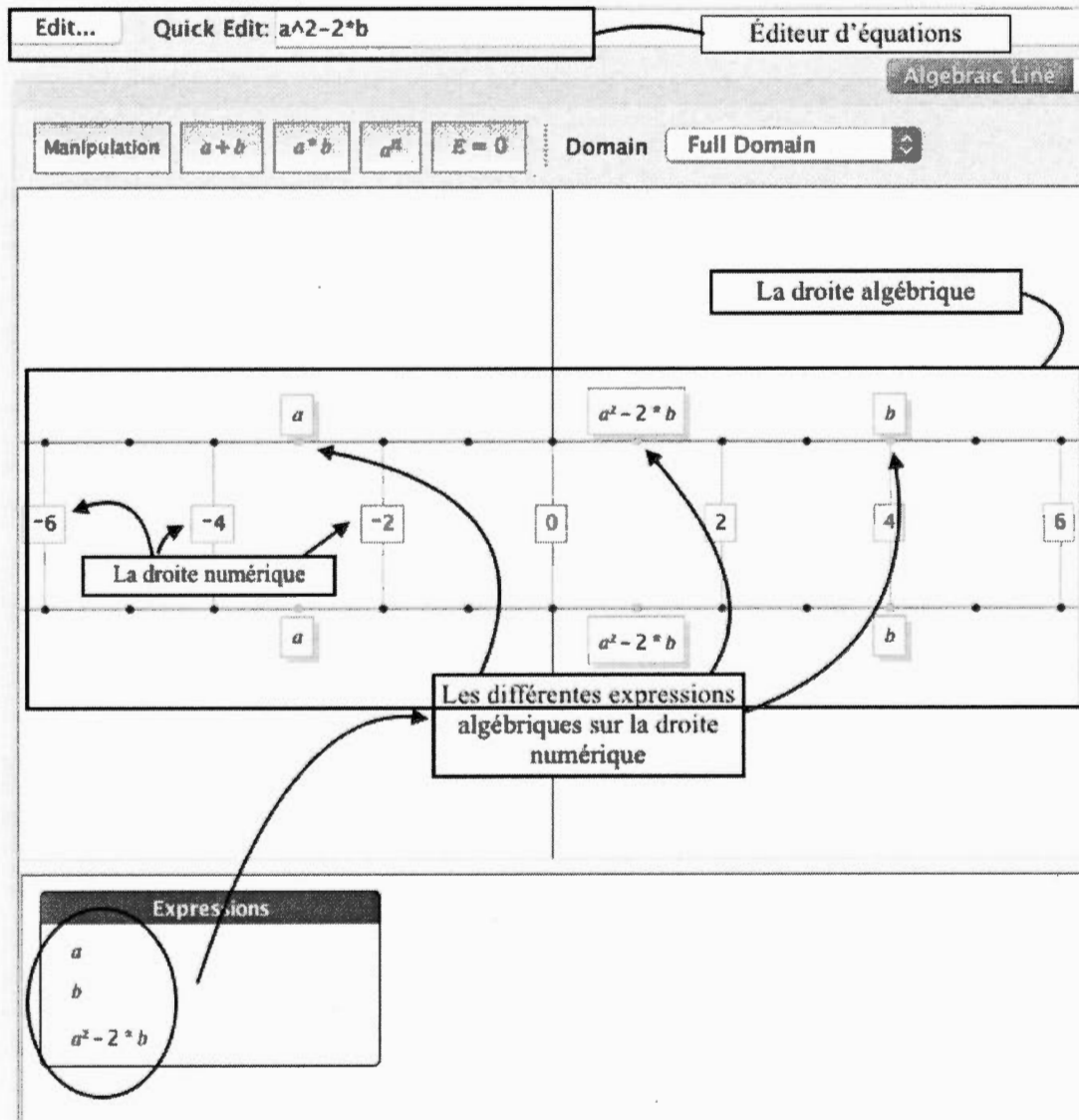


Figure 5.1 Interface du module de la droite algébrique

¹⁴ Il est à noter que dans mon analyse, je ferai parfois spécifiquement mention à la droite *numérique*, plutôt qu'*algébrique* pour indiquer que je parle de cet aspect particulier du module, et non du module entier.

D'abord, quelques précisions sur le fonctionnement de AlNuSet. Il est important de noter que la position des différents éléments sur la droite algébrique n'est pas aléatoire. Les lettres sont des éléments mobiles, ce qui veut dire que c'est par le *glissement* que l'utilisateur détermine leur position sur la droite numérique. Il est alors toujours possible de déplacer directement les lettres (sans intermédiaire autre que le curseur de la souris) dans une direction comme dans une autre via le *glissement*. Par contre, chaque déplacement (par le glissement) influence directement la valeur associée à la lettre puisque la valeur de la lettre n'est jamais inconnue : elle correspond toujours à sa position sur la droite numérique. Le logiciel associe ainsi à chaque lettre la valeur de sa position sur la droite numérique. En ce sens, dès qu'un symbole est placé sur la droite numérique, il admet une valeur réelle et connue, et cette valeur se modifie dynamiquement lorsque la lettre est déplacée (*glissée*) sur la droite numérique. Dans la Figure 5.1 ci-haut, a et b admettent respectivement la valeur de -3 et 4 . Si on glissait a vers 0 , la valeur qui lui est associée serait dynamiquement mise à jour selon la position de a durant le déplacement sur la droite numérique. Les lettres sont donc mobiles, mais elles admettent toujours la valeur précise de leur position sur la droite numérique.

Dans la même logique de fonctionnement, les expressions algébriques admettent elles aussi toujours une certaine valeur, connue, que le logiciel calcule selon la position des différentes lettres sur la droite. Par exemple, dans la Figure 5.2, l'expression algébrique $a^2 - 2b$ est positionnée à 1 parce que la valeur de a et de b renvoie la valeur 1 à l'expression $a^2 - 2b$. Si on glissait le symbole a jusqu'à -6 (sur la droite numérique), la valeur, donc la position, de l'expression algébrique $a^2 - 2b$ se modifierait dynamiquement, pour finalement admettre la valeur de 28 , car $(-6)^2 - 2(4) = 28$ (b ayant resté à la position 4). Évidemment, avant de s'arrêter à 28 , dans le déplacement de a , l'expression admettrait tout un ensemble de valeurs entre son ancienne position (1) et sa position finale (28) sur la droite.

Image 1

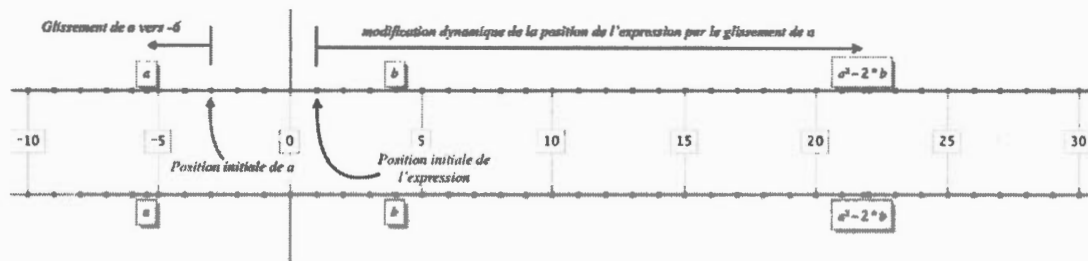
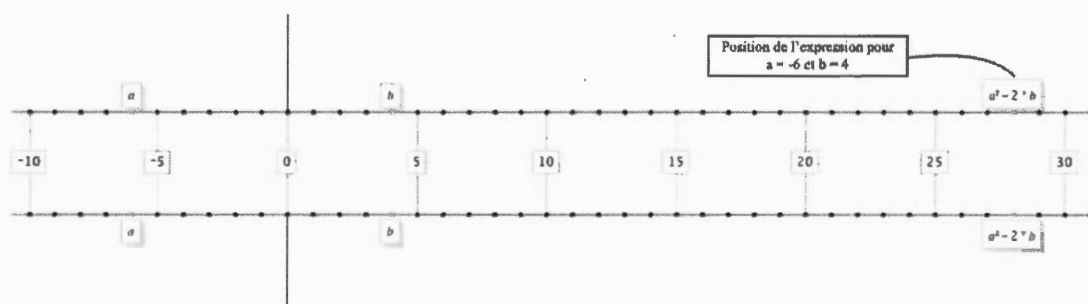


Image 2

Figure 5.2 Effets du glissement de a vers -6

La modification de la valeur associée à l'expression algébrique se manifeste toujours visuellement par le déplacement dynamique (en même temps que le déplacement de la lettre) de l'étiquette qui lui est associée. Ainsi, il y a *toujours* une valeur associée à chaque élément algébrique sur la droite numérique et cette valeur est *toujours* connue, puisqu'elle correspond tout simplement à l'emplacement sur la droite numérique. La prochaine section se penche sur l'aspect transformateur qui est rattaché à ce contexte particulier pour l'activité algébrique.

5.2 AlNuSet en tant que micromonde

En s'appuyant sur le fonctionnement général du module de la droite algébrique tel que je viens de le décrire, Chiappini (2008) décrit l'entrée offerte pour l'activité

algébrique de AlNuSet comme étant particulière (différente, selon elle, de ce qui se fait habituellement), c'est-à-dire comme étant une entrée *quantitative*.

A first essential change might consist in focusing the students' attention either on the numerical quantities indicated by a literal symbol or expression or on the numerical quantities that can condition the truth value of an equality. We name this kind of algebra *algebra of quantities*. p. 2

Considérant qu'il n'est pas possible de ne pas avoir une valeur numérique associée à un symbole (et à une expression algébrique) sur la droite numérique, il ne fait aucun doute que AlNuSet met de l'avant une activité algébrique où les quantités/valeurs numériques occupent une place importante. Et cette entrée particulière, rendue favorable par l'environnement technologique dans lequel elle (l'entrée quantitative) prend place, offre, toujours selon Chiappini, une très grande ouverture pour présenter/travailler l'algèbre scolaire :

The hypothesis underlying AlNuSet is that suitably exploited technology can make available new representative and operative possibilities to structure a new phenological space for algebraic activity, *thus allowing teachers to reconfigure algebraic knowledge into an object of investigation for students* and supplying students with new mediating tools to improve their learning. (2008, p. 2, mon italique)¹⁵

En effet, l'environnement AlNuSet propose pour l'activité algébrique un contexte ouvert, propice à l'investigation; ce qui pour Chiappini permet de reconfigurer l'apprentissage de l'algèbre scolaire. Il semble alors possible de voir dans cette ouverture pour l'exploration des idées algébriques offerte par l'environnement AlNuSet des effets qui dépassent largement la réorganisation des apprentissages algébriques curriculaires. Pour ses concepteurs, l'environnement AlNuSet a alors la possibilité de mettre l'utilisateur en contact avec des idées algébriques qui ne sont pas celles associées aux connaissances algébriques « traditionnelles ». AlNuSet est ainsi

¹⁵ On retrouve des conclusions similaires dans d'autres travaux (p. ex. Pedemonte, 2011; Robotti, 2013).

un microespace de travail mathématique possédant sa propre cohérence interne pour les idées mathématiques.

Concevoir AlNuSet en tant que micromonde, c'est d'abord identifier dans ses caractéristiques la possibilité d'être un environnement d'exploration (authentique) pour les idées mathématiques. Or, comme le mentionnait Chiappini, AlNuSet offre un environnement propice à l'exploration d'idées mathématiques, notamment par son caractère technologique, qui permet à l'utilisateur de « jouer » avec les fonctions de l'environnement et de voir immédiatement les effets de ces manipulations libres (par la rétroaction offerte par la technologie). On retrouve cette rétroaction dans AlNuSet, notamment dans le glissement des symboles sur la droite qui, visuellement, permet de s'intéresser à différentes idées mathématiques, tel que le montre plus en détail la prochaine section.

AlNuSet en tant que micromonde, est un environnement d'exploration pour les idées mathématiques qui ne guide pas vers des apprentissages prédéterminés, mais qui ouvre plutôt la porte à l'émergence de différentes façons de voir et faire les mathématiques. L'environnement AlNuSet possède ses propres règles de fonctionnement dans lequel les mathématiques qui y sont observées ont le droit « d'avoir du sens » principalement (ou uniquement) « par » l'environnement.

Le fait de placer les inconnues sur une droite numérique, le calcul en temps réel de la valeur des expressions algébriques, la possibilité de *glisser* les inconnues et d'observer les effets de ce glissement, et ainsi de suite, sont tous des exemples de l'environnement particulier d'AlNuSet dans lequel les idées mathématiques prennent un certain sens. Si bien que certaines des idées algébriques qu'AlNuSet met en avant proposent des façons de concevoir les connaissances/concepts mathématiques sous un autre regard, différent de celui traditionnel, voire institutionnel. L'inconnue algébrique est un exemple, qui sera traité plus en profondeur dans les sections suivantes, de ces connaissances mathématiques qui sont présentées sous un autre

regard dans AlNuSet. On verra que les inconnues admettent dans AlNuSet toujours une multitude de valeurs potentielles et passagères, leur donnant un caractère variable très inhabituel. Or, en contexte traditionnel, l'idée de la lettre inconnue est pourtant toujours associée à la recherche d'une certaine valeur, *sa* valeur. De ce fait, l'inconnue mathématique (si on choisit de l'appeler ainsi) qui se présente dans AlNuSet est un nouvel objet mathématique, auquel on rattache un nouvel ensemble de « savoirs » mathématiques (p. ex. savoir que la valeur de l'inconnue d'AlNuSet n'est qu'un indicateur passager).

En tant qu'environnement de travail mathématique, on peut identifier qu'AlNuSet permet un certain engagement physique entre les idées mathématiques et la personne qui fait les mathématiques (dans le contexte particulier de AlNuSet) pour l'émergence d'idées mathématiques. Cet engagement physique se manifeste principalement dans la manipulation des objets algébriques sur la droite numérique. Dans le module de la droite algébrique, l'utilisateur *possède* les symboles, car il doit les déplacer et les utiliser et c'est dans ces déplacements physiques que sont mises de l'avant certaines idées mathématiques. Et l'engagement dans le mouvement est bien physique et non strictement conceptuel : non seulement c'est l'utilisateur qui est en mouvement pour faire bouger les lettre-symboles (et les expressions algébriques), mais tout est aussi perceptible visuellement immédiatement à l'écran.

En ce sens, de façon générale, en tant qu'environnement global, le module de la droite algébrique de AlNuSet agit comme un objet-pour-penser-avec certaines idées algébriques, notamment le symbolisme. La prochaine section développe ceci et présente comment la lettre-symbole dans AlNuSet, par le fait qu'on puisse la manipuler directement sur la droite numérique (il n'y a que le curseur de la souris comme intermédiaire), modifie la façon de penser et de faire la résolution d'équations algébriques.

5.3 Une approche dynamique de l'algèbre dans le micromonde AlNuSet

En s'intéressant finement à comment les idées mathématiques sont mises de l'avant dans le micromonde AlNuSet, il semble que c'est principalement le *dynamisme* offert par la droite algébrique qui fait surface, au-delà de l'approche *quantitative* qui découle de l'association à une valeur numérique de tous les éléments algébriques positionnés sur la droite algébrique. Dire qu'AlNuSet offre une *algèbre quantitative* ne traduit pas suffisamment le mouvement perceptible dans l'interaction avec la droite algébrique. En effet, la représentation des lettres-symboles comme des points mobiles sur la droite numérique met en avant des concepts algébriques qui sont littéralement en mouvement. Et, ce mouvement des objets algébriques à l'écran ouvre la porte à une activité algébrique qui est visuelle, car les différentes distances (p. ex. la distance entre une lettre-symbole et une expression algébrique ou la distance entre deux expressions algébriques) perceptibles sur la droite numérique décrivent ce qui se produit mathématiquement. Ainsi, ce dynamisme influence les concepts clefs associés à l'algèbre, à commencer par le symbolisme algébrique.

5.3.1 Le symbolisme algébrique

L'unique manipulation de lettres (symboles) en mathématiques n'est pas synonyme d'activité algébrique : la lettre doit au minimum représenter une certaine valeur numérique et à cette valeur doit être associé un caractère « inconnu » (Janvier, 1996). Mais, cet aspect « d'inconnu » (dans le sens de mystérieux, ou encore, de « quelque chose qui nous échappe, mais qui est tout de même là ») associé à la valeur derrière le symbole varie lui aussi selon le contexte en jeu. Ainsi, on dira que dans certains cas la lettre a un statut « statique » et que dans d'autres cas, un statut « dynamique ». Autrement dit, l'utilisation unique de symboles en algèbre pour représenter des quantités mathématiques n'est pas suffisante pour mettre en avant l'idée mathématique d'entités qui varient (la lettre-variable). En effet, comme le disent Janvier et al. (1989) :

dans la formulation d'une équation du type $2t + 3 = 5$, rien ne suggère que le « t » doive varier. [...] En fait, on sait que « t » remplace un ou des nombres qu'il faut trouver. [...] Le symbole est considéré ici comme l'inconnue, ou le place-holder anglais qui n'a strictement aucun statut dynamique. On voit donc qu'en soi le recours à un symbole qui se substitue à une grandeur n'amène pas pour autant la variation dans le symbole ou mieux, dans l'esprit de celui qui analyse. C'est ainsi, croyons-nous, que l'algèbre en ce qu'elle a été la science des méthodes et techniques efficaces pour résoudre des « problèmes à inconnues » s'est historiquement présentée comme un obstacle épistémologique à l'avènement de la variable. p. 73

Ici, Janvier et al. présentent la lettre-inconnue¹⁶ comme ayant un caractère statique, car bien que sa valeur ne soit pas connue, elle n'est pas pour autant changeante. Au contraire, toujours dans le cas de la lettre-inconnue, la valeur recherchée est prédéterminée, fixée habituellement dès que l'équation est posée. Or, Janvier et al. voient dans l'étroit lien qui unit le développement de l'algèbre à l'utilisation de la lettre-inconnue, au caractère implicitement statique, un obstacle épistémologique à l'introduction d'un certain dynamisme pour le symbolisme algébrique. À la lettre-inconnue est associée un caractère statique, alors qu'est associé à la lettre-variable¹⁷ un caractère dynamique; l'un posant un certain obstacle à l'avènement de l'autre. Traditionnellement, la lettre-algébrique est donc soit statique (inconnue), soit dynamique (variable).

Le dynamisme que Janvier associe à la variable algébrique est surtout conceptuel en ce sens qu'il se manifeste dans « l'esprit de celui qui analyse », comme il le dit lui-

¹⁶ J'utilise la formulation « lettre-_____ » pour distinguer les différentes façons de penser la lettre en contexte algébrique tout en me permettant d'en parler aussi en termes génériques. Par exemple, la « lettre-symbole » est le nom générique que je donne au symbolisme, quand j'y fais référence simplement comme une lettre utilisée en contexte algébrique. Le terme « lettre-inconnue » réfère à la lettre en tant qu'une inconnue mathématique, au sens général, donné par les travaux en didactique de l'algèbre (p. ex. je cite ici Janvier et al. 1989). J'utilise aussi « lettre-variable » pour parler des variables algébriques.

¹⁷ La lettre-variable représente ici une lettre qui admet un ensemble de valeurs au sein d'une certaine expression algébrique, faisant en sorte que l'expression algébrique peut admettre un ensemble de valeurs, chacune associée à une des valeurs admissibles de la lettre-variable.

même. On ne le *voit* pas, on le conçoit, l'imagine. Or, dans AlNuSet, le dynamisme du symbolisme algébrique se manifeste bien différemment : par le mouvement à l'écran des éléments algébriques qu'il propose, le micromonde AlNuSet insuffle au symbolisme algébrique un dynamisme visuel qui lui est indissociable. Mais ce dynamisme est double : il s'agit simultanément (1) d'un dynamisme physique/qualitatif et (2) d'un dynamisme quantitatif.

(1) Le dynamisme qualitatif du symbolisme algébrique dans AlNuSet :

D'emblée, la lettre-symbole, donc avant même de « devenir » inconnue ou variable (ou paramètre, etc.) selon le contexte, est animée d'un certain dynamisme puisqu'aussitôt placée sur la droite numérique, elle devient mobile. Et l'interface du logiciel invite (force presque même) l'utilisateur à exploiter cette mobilité, puisque c'est là, sur la droite algébrique, le seul élément sur lequel l'utilisateur peut agir (physiquement), en le bougeant. Et c'est justement ce mouvement physique à l'écran qui entraîne le mouvement des expressions algébriques sur la droite numérique.

(2) Le dynamisme quantitatif du symbolisme quantitatif dans AlNuSet :

Le dynamisme quantitatif que met en avant l'environnement AlNuSet est similaire au dynamisme que propose Janvier et al. en ce sens qu'il a trait au caractère variable (changeant/changeable) de la valeur associée à la lettre-symbole. Ainsi, dans AlNuSet, pour chaque déplacement physique à l'écran (le dynamisme (1)), la valeur associée à la lettre-symbole change. Ce mouvement est différent du précédent puisqu'il s'agit cette fois d'une variation quantitative, un mouvement dans la valeur qui est associée à la lettre-symbole.

Ce double dynamisme vient introduire différentes choses pour le symbolisme algébrique. Alors qu'il existe, selon Janvier et al., une certaine dualité en

environnement traditionnel pour le symbolisme algébrique, soit statique (p. ex. dans le cas de la lettre-inconnue ($2t + 3 = 5$)), ou soit dynamique (p. ex. dans le cas des lettre-variable ($A=\pi r^2$)), le double dynamisme d'AlNuSet associe d'emblée à tout symbole un caractère dynamique.

Par contre, même si tous les symboles algébriques dans AlNuSet sont forcément dynamiques (qualitativement et quantitativement), ils ne sont pas pour autant systématiquement des lettre-variables au sens commun de la variable algébrique. En fait, le double dynamisme du micromonde AlNuSet met en avant un symbolisme algébrique dont le sens est tout à fait particulier, puisqu'il n'est pas vraiment comme une lettre dont on cherche à connaître la valeur (une inconnue), ni exactement comme une lettre représentant simultanément tout un ensemble de valeurs au sein d'une relation (variable), mais bien comme une lettre dont on *connaît la valeur*, mais qui est *constamment variable*. En fait, c'est une nouvelle sorte « d'inconnue » qui est associée au symbolisme algébrique. La notion traditionnelle d'inconnue, dans le sens d'incertitude, de « unknownness » comme le dit Janvier (1996) disparaît dans AlNuSet puisque la valeur de chaque symbole, et par conséquent de chaque expression algébrique, est connue, en tout temps, par sa position sur la droite algébrique (Figure 5.3).

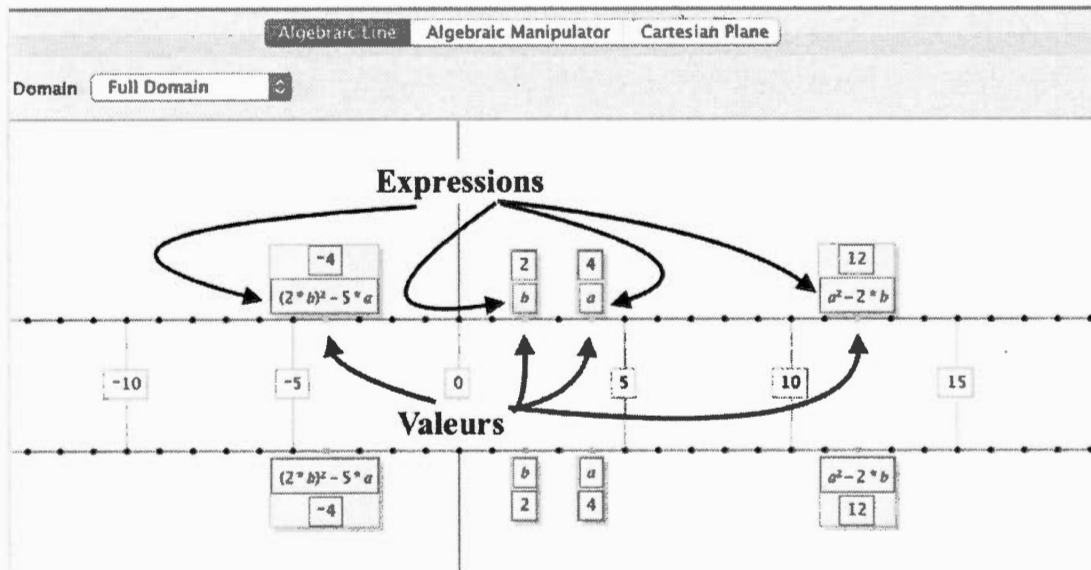


Figure 5.3 La valeur des éléments algébriques correspond à la position de l'élément sur la droite

C'est donc dire que par les caractéristiques du micromonde AlNuSet, le symbolisme mis en avant représente une quantité tout autant variable que connue et met de côté un symbolisme représentant des quantités inconnues aux états fixes (soit statique, soit dynamique).

La section qui suit présente un exemple de comment le micromonde AlNuSet, avec sa façon d'exploiter l'idée mathématique du symbolisme algébrique, vient transformer l'activité algébrique de résolution d'équations. On y voit notamment comment la lettre-symbole (en tant qu'objet manipulable sur la droite numérique) agit en tant qu'objet-pour-penser-avec pour la résolution d'expression algébrique, ce double dynamisme associé au symbolisme rendant dynamique l'activité mathématique de la résolution d'équations.

5.3.2 Expressions algébriques et résolution d'équations algébriques

Il y a différentes façons de s'intéresser à la résolution d'équations dans le module de la droite algébrique de AlNuSet. Par exemple, afin de résoudre l'équation $2t + 3 = 5$ directement sur la droite numérique, il est possible de s'intéresser à la valeur/position de t qui permet à l'expression algébrique $2t + 3$ d'admettre la valeur/position 5 sur la droite numérique. C'est donc en glissant (soi-même) la lettre t qu'on en vient à résoudre l'équation, lorsque $t = 1$ (c'est-à-dire lorsque t est positionnée à 1 sur la droite numérique (Figure 5.4)).

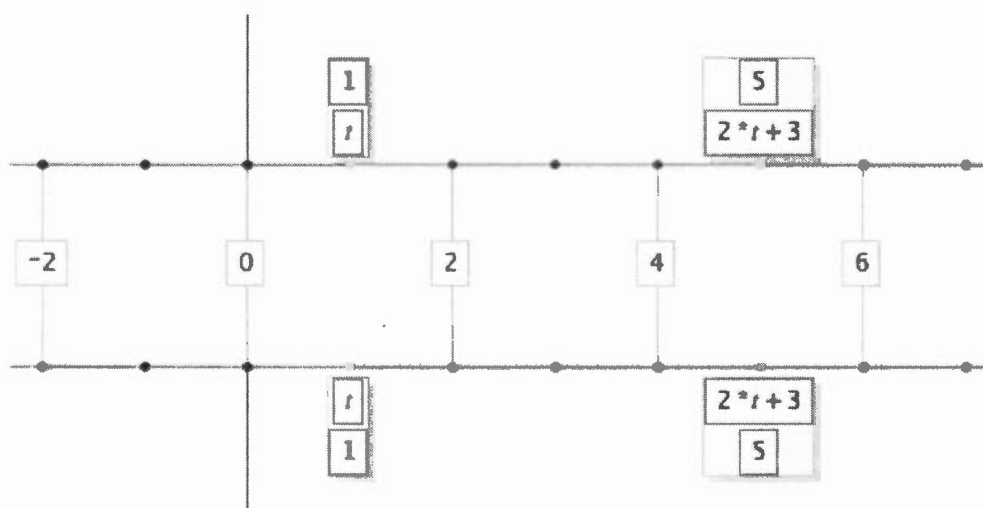


Figure 5.4 Pour $t = 1$, $2t + 3 = 5$

Ainsi, puisque $2t + 3$ est positionnée à 5 sur la droite numérique et que la position d'un élément sur la droite correspond toujours à sa valeur, on a bien trouvé la valeur de t tel que $2t + 3 = 5$. C'est-à-dire qu'on a bien fait une résolution d'équations. À titre de comparaison, pour résoudre cette « même » équation en environnement traditionnel, on procède habituellement par l'application de certaines règles de manipulation du type :

$$2t + 3 = 5$$

$$2t + 3 - 3 = 5 - 3$$

$$\frac{2t}{2} = \frac{2}{2}$$

$$t = 1$$

Or, que l'on fasse la résolution par le glissement de t sur la droite numérique de AlNuSet ou par l'application de différentes règles de manipulations algébriques en contexte traditionnel, t demeure cette lettre dont on cherche à connaître la valeur, t est dans les deux cas une inconnue algébrique. En effet, le dynamisme inhérent aux lettres dans AlNuSet ne fait pas en sorte que t devient ici une variable, parce que peu importe l'environnement dans lequel on se place, 1 demeure la seule valeur qui permet à l'expression $2t + 3$ de valoir 5. Ainsi, on ne reconnaît pas dans ce micromonde informatique une transformation du sens mathématique qu'admet le symbole algébrique dans la résolution d'équation. Les effets du micromonde AlNuSet sont en effet ailleurs que sur le contenu mathématique même (celui du sens mathématique de la lettre t) : ils sont sur l'activité mathématique de la résolution d'équations.

Ainsi, AlNuSet ne propose pas une résolution d'équations statique, mais une activité dynamique de résolution d'équations. En effet, ce qu'on observe dans la résolution d'équations en contexte traditionnel, c'est que l'inconnue mathématique t admet des états fixes. D'abord, il y a l'état initial alors qu'on pose la résolution d'équations, puis

il y a l'état final lorsqu'on a découvert la valeur de t . *L'état initial* est caractérisé par un certain mystère : on ne connaît pas du tout la valeur de t , on cherche à la découvrir. Et il y a *l'état final*, quant à lui caractérisé par une découverte : on découvre ou on constate, suite aux manipulations pour isoler sa valeur, la valeur qui était « secrètement » associée tout au long des étapes de résolution à t . Mais il y a une espèce de vide entre les deux états : on ne s'intéresse pas vraiment aux valeurs possibles de t durant les manipulations mathématiques. La valeur de t n'est donc pas un « objet » sur lequel on agit, au contraire, c'est plutôt autant au niveau de la lettre elle-même que de sa valeur, quelque chose qui est mis de côté au profit des manipulations. On parle alors d'une inconnue-statique. Le seul instant où la valeur de t est considérée (en soi) est lorsque les manipulations sont terminées. On cherche alors à savoir si la valeur obtenue permet bien de vérifier l'égalité. En attribuant la valeur obtenue à t dans l'équation initiale, on constate alors si la réponse est bonne ou mauvaise. On retrouve encore, entre une bonne réponse et une réponse erronée, un vide dans la recherche de la valeur de t . Effectivement, il n'existe pas vraiment « d'entre-deux » ou de « presque » bonne réponse ici, puisqu'une réponse qui ne vérifie pas l'équation est habituellement associée à une erreur dans les manipulations algébriques. En ce sens, il ne s'agit pas d'une approximation de ce que l'on cherche, une approximation qu'il serait possible de raffiner en agissant dessus. Par conséquent, la « mauvaise » réponse n'est pas très utile, n'offre que très peu finalement, pour la recherche de la bonne valeur de t .

AlNuSet offre quelque chose de complètement différent. D'abord, c'est par un engagement physique avec la lettre t que le micromonde AlNuSet propose de résoudre l'équation. t en tant que lettre mobile sur la droite numérique est un objet sur lequel il faut agir et c'est sa mobilité qui représente l'entrée pour la résolution d'équation. On agit donc sur t en la glissant sur la droite, modifiant ainsi non seulement sa position, mais aussi *sa valeur*. Or, ce qu'on constate dans cet engagement physique est que t est alors plus qu'une valeur inconnue statique, elle est

un ensemble de possibles puisqu'elle prend un ensemble de valeurs intermédiaires qui ne vérifient pas nécessairement l'équation de départ. C'est donc en s'intéressant à un ensemble de « mauvaises » valeurs de t qu'AlNuSet propose de résoudre l'équation. Alors qu'on identifie deux états disjoints (initial et final) à l'inconnue-statique (contexte traditionnel), c'est plutôt en termes de continuum que l'inconnue t est mise en avant dans AlNuSet. Il s'agit donc d'une inconnue-variable, variable au sens de changeante. De ce fait, c'est tout le processus de résolution d'équations qui est dynamisé, phénomène qu'on peut appeler une « résolution d'équations dynamique ».

L'engagement physique avec la lettre en tant qu'objet de manipulation dans AlNuSet est par conséquent cet objet-pour-penser-avec pour la résolution d'équations et c'est à travers son double dynamisme (qualitatif et quantitatif) que cet objet-pour-penser-avec dynamise la résolution d'équation. Par exemple, un des effets de l'introduction de ce dynamisme sur la nature de l'activité mathématique de la résolution algébrique est qu'il est possible, voire même probable et naturel, de s'intéresser aux distances physiques (à l'écran) entre les objets algébriques sur la droite numérique pour penser la résolution d'équations.

Tel que mentionné en début de section, pour résoudre l'équation $2t + 3 = 5$ dans l'environnement AlNuSet, « on s'intéressait à la valeur/position de t qui permet à l'expression algébrique $2t + 3$ d'admettre la valeur/position 5 sur la droite numérique ». Or, cette description est d'ordre davantage mathématique, alors que visuellement, ce qui se produit lorsque la résolution est terminée se décrit autrement. En fait, dans AlNuSet, on dira que, visuellement, la résolution est terminée lorsque l'étiquette de l'expression $2t + 5$ se trouve au-dessus de la position 5 sur la droite numérique. Et pour faire bouger l'étiquette de l'expression algébrique $2t + 3$, il faut évidemment agir sur l'étiquette de t , c'est-à-dire la faire « glisser ». Les étiquettes et leur position physique sur la droite numérique occupent donc une place très

importante dans l'activité mathématique parce que c'est cela qui est d'abord accessible, c'est ce sur quoi on agit directement (leur position physique sur la droite)—et non sur les valeurs elles-mêmes.

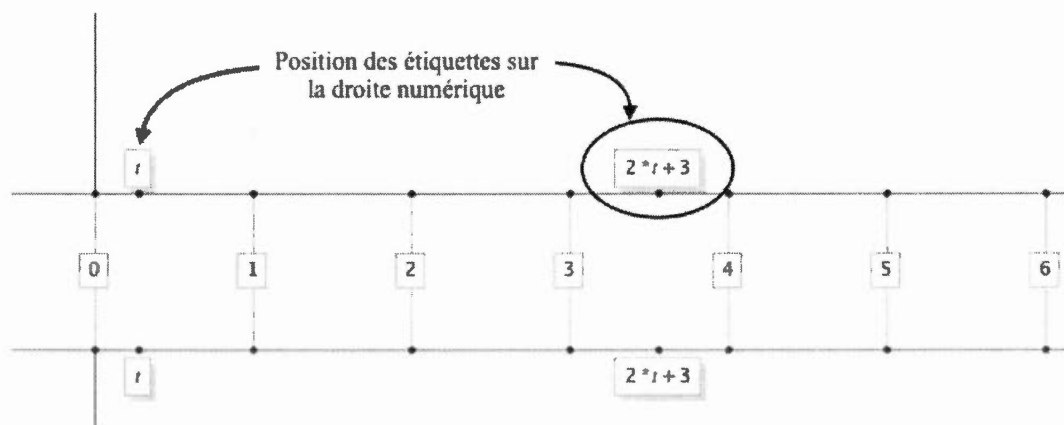
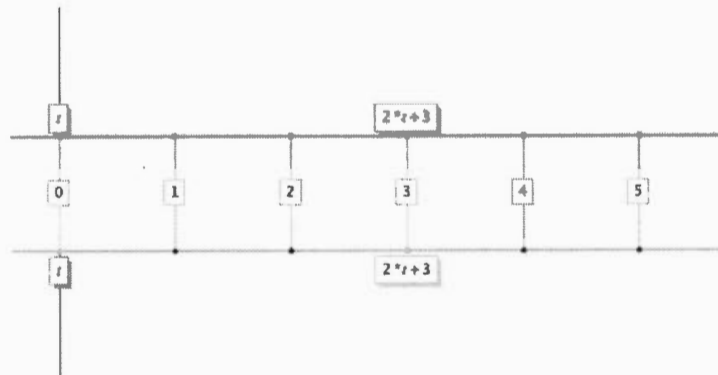


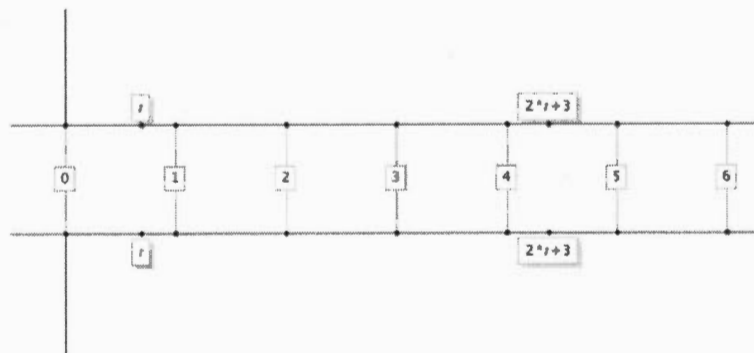
Figure 5.5 L'importance de la position physique des étiquettes

Et c'est justement par le fait qu'il est nécessaire d'agir sur le t , de la faire glisser, que t devient/est une inconnue-variable, mais il y a plus à dire sur les valeurs intermédiaires que t admet pour parler des effets sur la nature de l'activité mathématique de résolution d'équations. On remarque alors que c'est la distance physique (et non quantitative) de l'étiquette $2t + 3$ qui détermine la pertinence des valeurs intermédiaires qu'admet t . Car alors que t est glissée sur la droite, c'est le déplacement de l'étiquette de l'expression qui importe, car c'est elle qui détermine si la résolution est atteinte. En d'autres mots, moins la distance entre l'étiquette $2t + 3$ est grande, plus la valeur intermédiaire de t est importante. Car alors que $2t + 3$ tend vers 5, (on imagine le déplacement de t à l'écran—donc le mouvement de la main qui tient la souris—ralentir progressivement alors que l'étiquette de l'expression approche de 5 sur la droite numérique) t tend quant à elle vers 1.

Instant A, t est la position 0.



Instant B, t glisse vers la droite à partir de 0.



Instant C, l'étiquette de l'expression est presque au-dessus de 5.

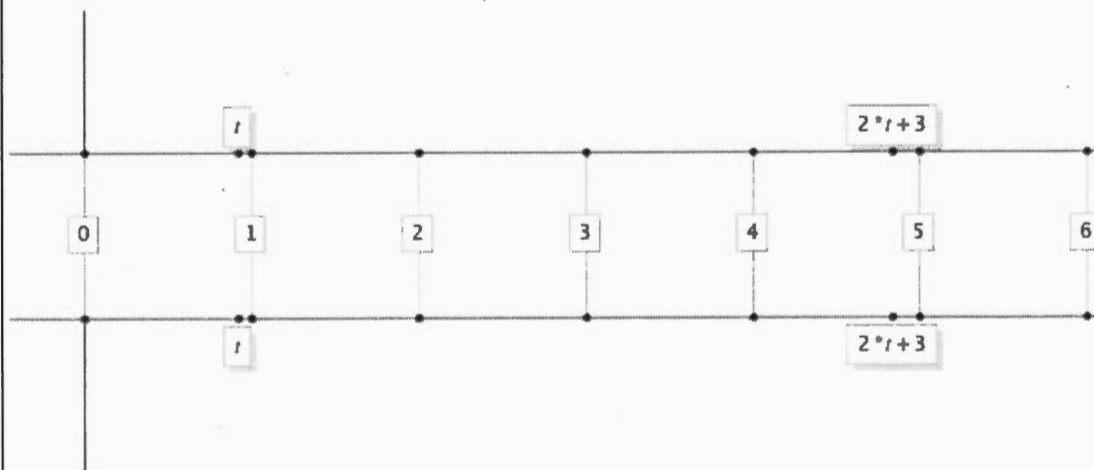


Figure 5.6 La résolution de l'équation $2t + 3 = 5$ par le glissement de a sur la droite algébrique

Et c'est seulement à cet instant (instant C, Figure 5.6), où $2t + 3$ approche 5, que les valeurs intermédiaires de t prennent un certain sens mathématiquement. Avant cela (instants A et B, Figure 5.6), les valeurs intermédiaires n'existent pas vraiment puisqu'on ne s'y intéresse pas : même si c'est en déplaçant physiquement (par le mouvement du curseur) t que le processus de résolution se met en branle, ce qu'on observe à l'écran n'est pas le déplacement de t , mais bien la conséquence de ce déplacement sur la position de l'étiquette de $2t + 3$. Ce n'est que lorsque $2t + 3$ approche 5 (dans cet exemple) que le centre d'intérêt, visuellement et mathématiquement, se déplace progressivement vers la position et la valeur de t .

L'engagement physique dans l'activité de résolution de problème que propose AlNuSet par ce jeu sur le mouvement (notre mouvement physique et celui des objets algébriques à l'écran) est caractéristique de ce que veut dire faire de la résolution d'équations dans le micromonde AlNuSet. La résolution d'équations est dans ce contexte quelque chose de dynamique puisqu'elle se produit dans/par le mouvement du corps et des objets algébriques.

5.4 Conclusion

L'analyse en termes de micromonde de l'environnement AlNuSet a permis de lui reconnaître des effets importants, possiblement transformateurs, pour l'activité algébrique puisqu'elle a permis de porter un regard sur l'influence des caractéristiques particulières de l'environnement AlNuSet sur la manipulation des idées algébriques. L'effet des caractéristiques du logiciel sur le symbolisme algébrique, qui l'anime d'un double dynamisme est un exemple de ces aspects transformateurs qui ont été présentés. De plus, on peut même dire que ce double dynamisme transforme l'activité mathématique de la résolution d'équations, pour en faire quelque chose d'encore une fois dynamique, plutôt que statique, comme c'est le cas dans l'environnement traditionnel. Loin d'être un jeu entre deux états fixes, le connu et l'inconnu, la lettre-inconnue dans la résolution d'équation sur la droite

algébrique de AlNuSet se présente plutôt comme un continuum de valeurs intermédiaires connues et changeantes. Elle est une inconnue-variable. Ce changement de perspective et l'engagement physique offert par le micromonde AlNuSet permettent de mettre en lumière certaines valeurs intermédiaires de l'inconnue mathématique alors que celle-ci tend vers la valeur qui vérifie l'égalité. Il s'agit alors d'une algèbre dynamique.

[...] the serendipitous discoveries, the bugs, and the mathematical insights all require movement to be appreciated.

Seymour Papert, 1980

CHAPITRE VI

ANALYSE DES ASPECTS TRANSFORMATEURS D'UN MICROMONDE INFORMATIQUE POUR L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE : L'EXEMPLE DU SIMULATEUR D'ÉVÉNEMENTS ALÉATOIRES

6.1 Le simulateur de probabilité en tant que micromonde pour l'activité mathématique

On retrouve une certaine unanimité dans les écrits autant scientifiques que professionnels sur le fait que les simulateurs informatiques offrent des possibilités intéressantes pour l'activité mathématique autour des probabilités (Thibault, 2011, 2015; Savard et al., 2013; Jones et al., 2007; Mills, 2002; Shaughnessy, 1992, 2007; Stohl & Tarr, 2002). Ce constat n'est pas sans lien avec le fait que la technologie facilite l'expérience de phénomènes mathématiques à grande échelle grâce à la puissance de calcul des ordinateurs permettant de générer des résultats, et à la facilité à représenter ceux-ci visuellement, par exemple. On sait aussi que la loi des grands nombres joue un rôle important dans le raisonnement probabiliste¹⁸ (Saldanha, 2016; Saldanha et Thompson, 2007; Henry, 2001), en particulier parce qu'elle fait explicitement référence à l'existence de tendances observables à *long terme* (Ore, 1963)¹⁹. Les écrits scientifiques révèlent implicitement que l'environnement technologique est en quelque sorte responsable d'un mouvement pour l'activité

¹⁸ Dans les mathématiques scolaires, on dénote généralement trois approches pour l'étude des probabilités : théorique, fréquentielle et subjective. La loi des grands nombres apparaît être « un incontournable » pour faire le rapprochement entre les différentes approches.

¹⁹ Voir Sheynin (1968) pour un survol du développement historique de la loi des grands nombres.

mathématique autour des probabilités, en rendant certains aspects de cette activité mathématique plus accessibles : l'expérimentation par la simulation d'une expérience aléatoire des effets de la loi des grands nombres est un exemple. Ce mouvement dans l'activité mathématique concerne « ce qui semble naturel de faire » au moment de travailler les probabilités, illustrant donc parfaitement cet aspect transformateur de la technologie dans le contexte des simulateurs.

En tant qu'environnement technologique pour l'activité mathématique, il est assez simple de concevoir les simulateurs informatiques comme des micromondes pour l'activité mathématique. Prenons par exemple un logiciel comme TinkerPlots, dans lequel on peut explorer le résultat d'une expérience aléatoire comme le lancer de dés (voir Figure 6.1, où on observe les sommes obtenues).

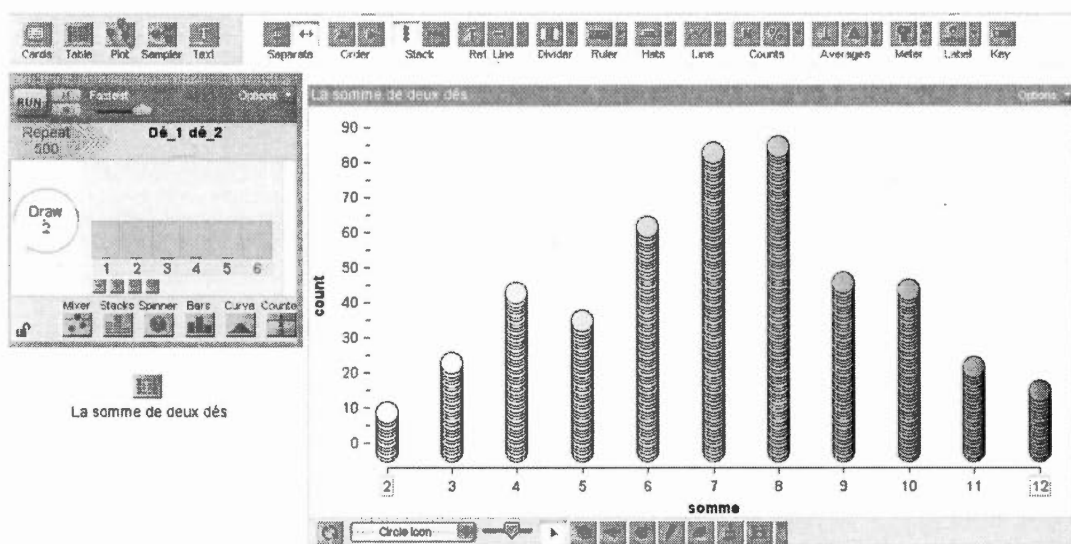


Figure 6.1 La somme de deux dés dans le simulateur TinkerPlots. Résultat de 500 lancers.

Les simulateurs informatiques sont des environnements qui encapsulent certaines expériences du monde physique (les situations aléatoires et de probabilités en général) et les rendent manipulables, librement explorables. Par l'entremise de

l'interface et des fonctions de l'environnement technologique, il devient possible de manipuler les idées mathématiques de façon plus « immédiate ». La moyenne, par exemple, est une *fonction* du logiciel (en haut à droite dans la barre d'icônes visibles à la Figure 6.1) au même titre que les touches « % » ou « $\sqrt{\quad}$ » d'une calculatrice peuvent l'être. Il devient donc possible de travailler directement avec la moyenne en tant qu'objet/idée mathématique sans avoir à la produire laborieusement au préalable. On peut alors non seulement y observer (rapidement, en grande quantité) des expériences aléatoires, mais aussi les analyser avec une plus ou moins grande flexibilité selon les logiciels (Figure 6.2).

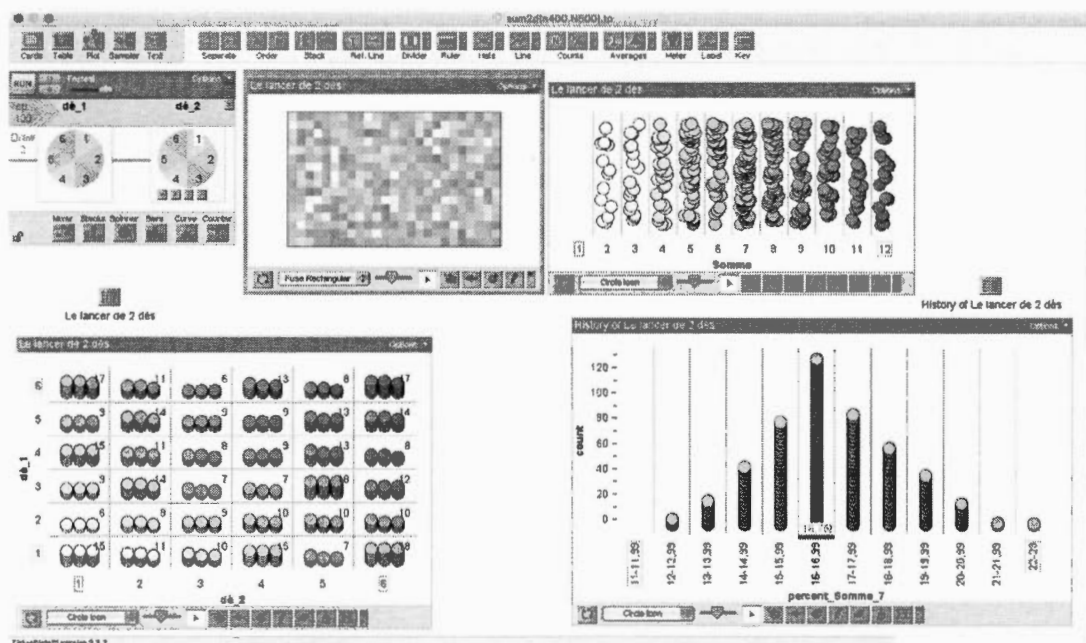


Figure 6.2 Les environnements de simulations offrent une multitude d'outils d'analyse (exemple du logiciel TinkerPlots)

Les simulateurs tels que TinkerPlots offrent également de configurer (en plus de réaliser et d'analyser) sa propre expérience aléatoire (Figure 6.3). Fidèle à la conceptualisation des micromondes de Papert, il s'agit donc d'un environnement

programmable soi-même qui peut devenir un endroit d'exploration personnelle pour les idées mathématiques qu'il met en scène.²⁰

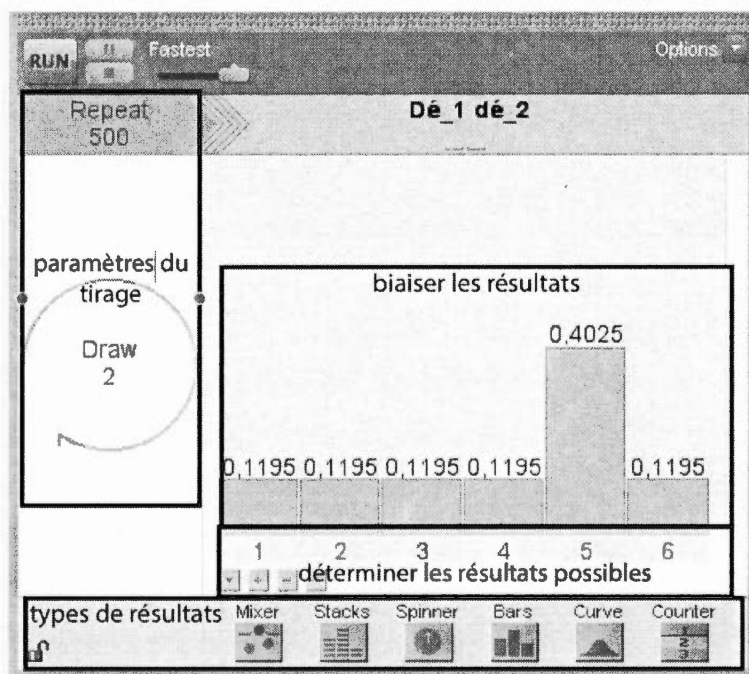


Figure 6.3 Concevoir sa propre expérience aléatoire

Pour montrer de manière concrète comment un tel simulateur peut se présenter comme un espace de travail mathématique ouvert (modifiable, façonnable) et personnel (par le contrôle sur son fonctionnement), je vais m'intéresser dans les sections qui suivent à la loi des grands nombres, tâchant d'explicitier la manière dont le logiciel permet d'entrer en relation de façon plus intime avec cette dernière. Plus précisément, je vais utiliser le contexte de la recherche, par une approche empirique, de la probabilité d'un événement aléatoire simple (je reste avec l'idée d'une somme de dés) sous deux angles :

²⁰ Pour une conceptualisation en profondeur des simulateurs informatiques, en tant que micromondes mathématiques, voir Stohl et Drier (2000).

Je montre d'abord comment la possibilité de simuler d'énormes quantités d'expériences aléatoires combinée à l'accessibilité directe à une foule d'objets mathématiques (p. ex. tables de valeurs des résultats, graphiques des résultats, l'accès aux différentes mesures de tendances centrales des simulations via un bouton, etc.) guide vers une étude fine des effets d'un large échantillon sur le calcul d'une probabilité.

Je montre ensuite comment l'affichage dynamique des résultats à l'écran (p. ex. l'histogramme des résultats d'une expérience aléatoire se modifie constamment en fonction des nouvelles simulations) met en avant-scène une approche dynamique pour l'étude de la limite de la fréquence relative d'un événement aléatoire et de comment cela ouvre la porte d'abord à la rencontre d'une loi des grands nombres qui apparaît dans une forme dynamique et ensuite à une activité mathématique des probabilités qui est elle-même dynamique (comme on peut parler de géométrie dynamique dans certain environnement informatique).

On notera par ailleurs que ce choix d'investigation n'est pas banal. Au moment de vouloir faire un travail en probabilités avec un simulateur, c'est (évidemment!) d'emblée une approche empirique qui semble naturelle parce que c'est dans cette direction que les caractéristiques de la technologie entraînent l'activité mathématique en quelque sorte.

6.2 Vers une approche statistique des phénomènes aléatoires

Par la puissance de calcul qu'on associe aujourd'hui à la technologie, l'environnement du simulateur rend rapidement accessible et presque sans effort, la production de quantités de données qu'il serait farfelu d'essayer de collecter dans le monde physique, surtout si on considère les contraintes institutionnelles du milieu scolaire. Mais c'est surtout parce que le simulateur met à la disposition une très grande quantité d'instruments/concepts pour s'intéresser à ces (nombreuses) simulations qu'il est un environnement transformateur pour la rencontre d'idées

mathématiques telles que la loi des grands nombres. De manière quasi instantanée (via un simple bouton), il est possible de commander l’affichage des résultats de multiples façon ou de faire évaluer la moyenne, le mode, l’étendue d’un échantillon de données... et plus encore.

Ainsi, dans la recherche par une approche empirique/fréquentielle de la probabilité d’un événement aléatoire, l’interface du simulateur (et sa nature technologique) encourage, et même guide vers la répétition des simulations. Avec ses boutons et l’affichage rapide des résultats, il devient naturel dans le micromonde du simulateur de faire et de s’intéresser à plusieurs simulations. Et cette direction dans laquelle l’environnement du simulateur pousse l’activité mathématique de la recherche d’une probabilité laisse entrevoir certaines façons particulières d’entrer dans l’activité mathématique. Ces façons de faire les mathématiques sont ici dites particulières en ce qu’elles émergent comme étant naturellement favorisées par les caractéristiques de l’environnement du simulateur, des caractéristiques qu’on ne retrouve pas nécessairement dans d’autres milieux.

6.2.1 Une entrée par la répétition de simulations à la loi des grands nombres

De façon un peu simpliste, on pourrait dire que pour l’étude empirique de la probabilité d’un événement aléatoire, la loi des grands nombres stipule grossièrement que plus on répète une expérience aléatoire, plus la fréquence relative associée à un résultat tend vers la probabilité associée à ce résultat. « En effet, par la loi des grands nombres, plus le nombre d’essais est grand, plus la probabilité fréquentielle se rapproche de la probabilité théorique. » (Thibault, 2011. p. 95). Ainsi, la fréquence relative du résultat « Obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés » devrait s’approcher de plus en plus de $1/6$ alors que le nombre de répétitions augmente. En arrière-plan de cette approche empirique se trouve bien sûr l’idée de s’intéresser à la limite (tendance à long terme) d’un événement pour évaluer la probabilité de manière expérimentale. Mais cette façon d’exploiter les principes associés à la loi des grands

nombres pour déterminer la probabilité d'un événement comporte certains « dangers ». En effet, tel que le dit De Moivre (1738), de par la nature même de ce que sont les expériences aléatoires (et des phénomènes liés aux probabilités en général), rien ne garantit que la fréquence relative d'un événement aléatoire (obtenu suite à un nombre fini, si grand soit-il, de répétitions) corresponde bien à la probabilité du résultat en question. Il demeure toujours possible que la série d'événements aléatoires sur laquelle on s'appuie pour établir la limite de la tendance ne suive « exceptionnellement » pas la tendance réelle (probabilité) associée à l'événement. On retrouve dans le développement historique de la loi des grands nombres cette préoccupation concernant la difficulté de se fier à un échantillon aléatoire, aussi grand soit-il, pour émettre des hypothèses sur la probabilité d'un événement.

... if after taking a great number of experiments, it should be perceived that the happenings and failings have been nearly in a certain proportion ... it may safely be concluded that the probabilities of happening or failing at any one time assigned will be very near in that proportion, and that the greater the number of experiments has been, so much nearer the truth will the conjectures be that are derived from them.

But suppose it should be said, that notwithstanding the reasonableness of building conjectures upon observations, still considering the great power of chance, events might at long run fall out in a different proportion from the real bent (according to) which they have to happen one way or the other; and that supposing for instance that an event might as easily happen as not happen, whether after three thousand experiments it may not be possible it should have happened two thousand times and failed a thousand, and that therefore the odds against so great a variation from equality should be assigned, whereby the mind would be the better disposed in the conclusions derived from the experiments:

In answer to this, I will take the liberty to say that this is the hardest problem that can be proposed on the subject of chance, for which reason I have reserved it for the last... [...]. (Tiré de Sheynin, 1968, pp. 30-31)

Pour De Moivre, cette constante incertitude qui plane au-dessus des résultats associés à la répétition d'événements aléatoires est le problème lié aux phénomènes aléatoires

le plus difficile sur lequel se pencher. À ce sujet, on peut dire que l'environnement du simulateur représente un contexte incroyablement puissant pour l'expérience personnelle de cette variabilité dont parle De Moivre. En effet, par les caractéristiques du simulateur, notamment le fait qu'il encourage à la répétition de multiples simulations (où chaque simulation est un ensemble d'expériences aléatoires), la variabilité entre les différents ensembles de résultats devient rapidement apparente. Comme il suffit d'appuyer sur un bouton pour répéter une simulation, il est possible de constater par soi-même que même avec un nombre relativement grand de tirages par simulation, la tendance à long terme d'un événement aléatoire dévie parfois de façon assez surprenante de ce qui est attendu.

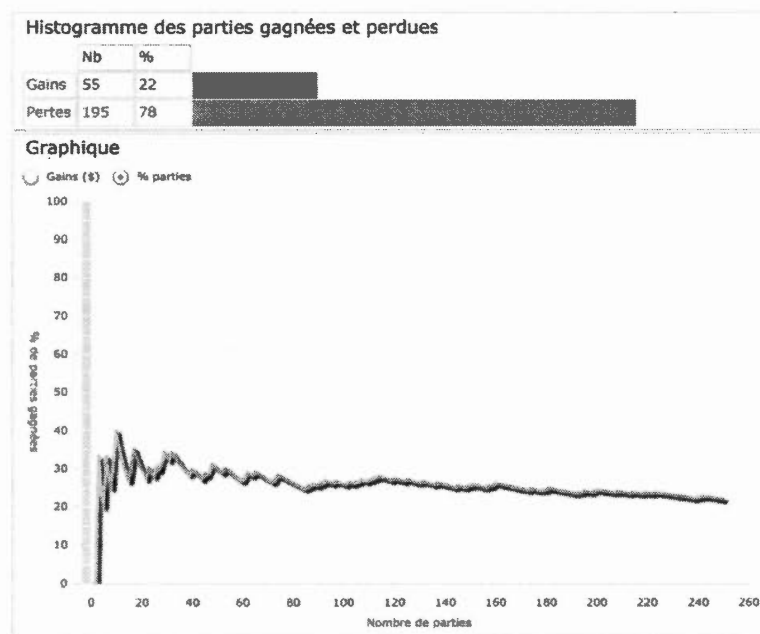


Figure 6.4 Obtenir la somme de 7 lors du lancer de deux dés (250 répétitions de l'expérience) – Simulateur « Les dés », <http://anniesavard.com/simulateur/>

Par exemple, il est possible de réaliser assez rapidement qu'un grand nombre de lancers de dés ne garantit pas nécessairement que la tendance va s'approcher des valeurs attendues. Dans les résultats de la Figure 6.4, la fréquence relative associée

à « Obtenir la somme de 7 lors du lancer de deux dés », après 250 lancers de dés, est de 22 % (alors que la probabilité d'obtenir la somme de 7 lors du lancer de deux dés est de $1/6$, soit environ 16,67 %). Bien sûr, 250 lancers ne sont peut-être pas un nombre suffisamment grand pour parler de tendance à long terme. Mais les mêmes constats peuvent être faits pour des simulations de 500 lancers de dés (profitant du fait que le simulateur encourage à la réalisation d'expériences toujours plus « grandes ») si bien qu'on peut constater aussi une grande variabilité lorsque l'on fait plusieurs simulations avec cette fois 500 lancers de dés. La Figure 6.5 présente d'ailleurs trois résultats bien différents obtenus en quelques secondes (18,8 % ; 13,2 % ; 14,2 %).

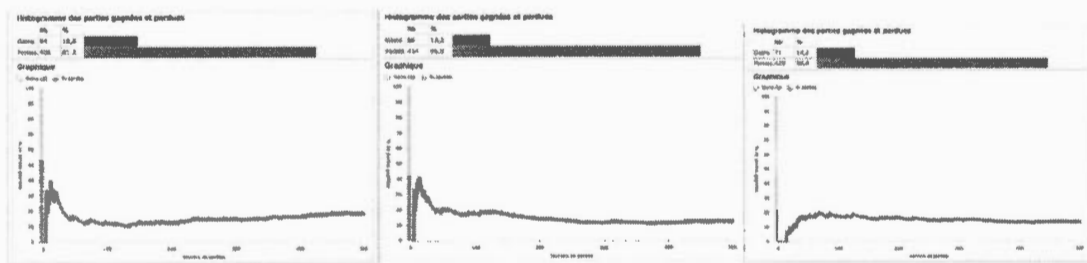


Figure 6.5 Trois expériences pour déterminer la fréquence relative associée à « Obtenir la somme de 7 » lors du lancer de deux dés après 500 lancers. De gauche à droite, les fréquences relatives sont : 18,8 % ; 13,2 % ; 14,2 %.

Et il serait possible de constater la même chose avec des simulations de 1000 lancers bien sûr, et encore de 10 000; c'est là l'expérience de la grande difficulté que décrit De Moivre par rapport aux phénomènes aléatoires et au fait de faire confiance à un ensemble de résultats finis. Voilà donc un aspect assez fin de la loi des grands nombres que le simulateur rend particulièrement évident dans la recherche par une approche empirique de la probabilité d'un événement. On y voit que la tendance à moyen/long terme d'une simulation (donc n lancers de dés) n'est pas nécessairement garante de la probabilité d'un événement aléatoire puisque la *chance* d'obtenir un ensemble des résultats à l'extérieur de la « norme » demeure probable.

Avec ceci, un déplacement intéressant s'opère. En rendant évidente l'existence d'une variabilité dans les résultats de plusieurs simulations d'une même situation aléatoire, l'exploration dans le micromonde relativise l'étude de l'effet sur la fréquence d'un événement donné d'un plus grand nombre de répétitions (n) dans une même expérience aléatoire. On peut toujours observer comment une tendance tend à se stabiliser après n lancers de dés, mais il devient difficile de ne pas mettre ceci en contraste avec la variabilité de ces fréquences. Il semble donc nécessaire de s'intéresser à plusieurs simulations et peut-être même de concevoir qu'il est préférable d'aborder la recherche empirique d'une probabilité en multipliant les simulations, et non les événements. Ce déplacement (pour l'activité mathématique) par le simulateur, exploité en tant que micromonde, encourage une autre manière d'expérimenter la loi des grands nombres, et illustre bien le pouvoir transformateur de la technologie.

6.2.2 Vers l'étude de la tendance des tendances

Ainsi, l'environnement ouvert du simulateur invite à l'exploration et à la comparaison de différents résultats/simulations. Cette possibilité dépend fortement de la manière dont l'environnement rend visible la variabilité entre les différentes répétitions d'une même expérience aléatoire, même pour un grand nombre de répétitions, quelque chose qui peut être difficile à expérimenter personnellement à l'extérieur d'un environnement de simulations. On peut désormais observer et discuter ce problème que De Moivre qualifie de « hardest problem that can be proposed on the subject of chance » (Sheynin, 1968).

Or, dans cette exploration de plusieurs simulations, le simulateur place au bout des doigts une multitude d'outils pour analyser et comparer les résultats (p. ex. construction de représentation graphique, affichage de la moyenne ou de la fréquence relative, etc. (voir Figure 6.6)).

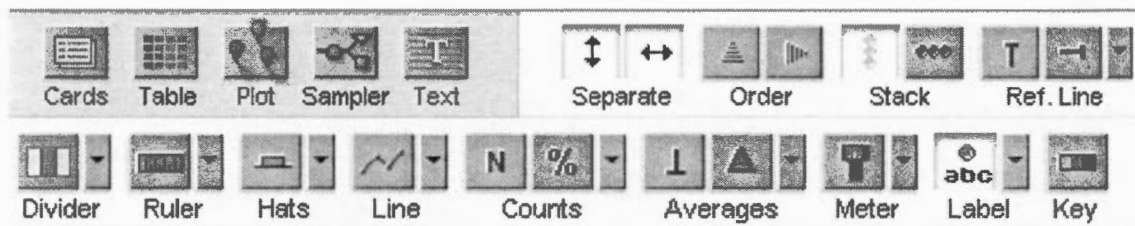


Figure 6.6 La barre d'outils du simulateur TinkerPlots

Bien sûr, ces différentes fonctions n'offrent rien de nouveau puisqu'il s'agit de concepts utilisés aussi à l'extérieur de l'environnement technologique. Cependant, comme mentionné plus haut, ce qui est particulier dans l'environnement du simulateur c'est de pouvoir en faire appel en tant qu'objet, et non comme quelque chose qu'il est nécessaire de construire ou de calculer. Par la répétition d'expériences aléatoires que favorise l'environnement du simulateur, le logiciel encourage à s'intéresser à la « tendance des tendances » dans la recherche empirique de la probabilité d'un événement aléatoire. C'est-à-dire qu'il permet d'explorer et d'exploiter plusieurs simulations, indépendantes les unes des autres, en tant qu'un ensemble de données. Je ne veux pas parler ici de regrouper les résultats de toutes les simulations en un seul grand échantillon de données, mais bien de mettre en relation les résultats des différentes simulations. Par exemple, le logiciel TinkerPlots conserve les résultats des simulations antérieures (historique des résultats) (Figure 6.7) de telle sorte qu'il est naturel de les exploiter (p. ex. pour en faire différentes représentations graphiques (Figure 6.8)).

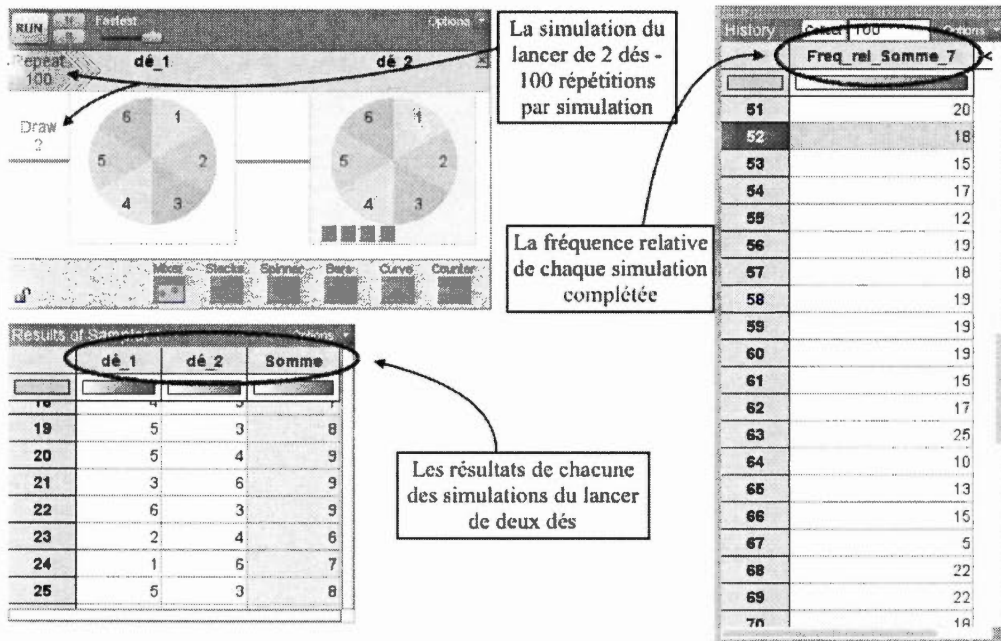


Figure 6.7 Historique des résultats du lancer de deux dés

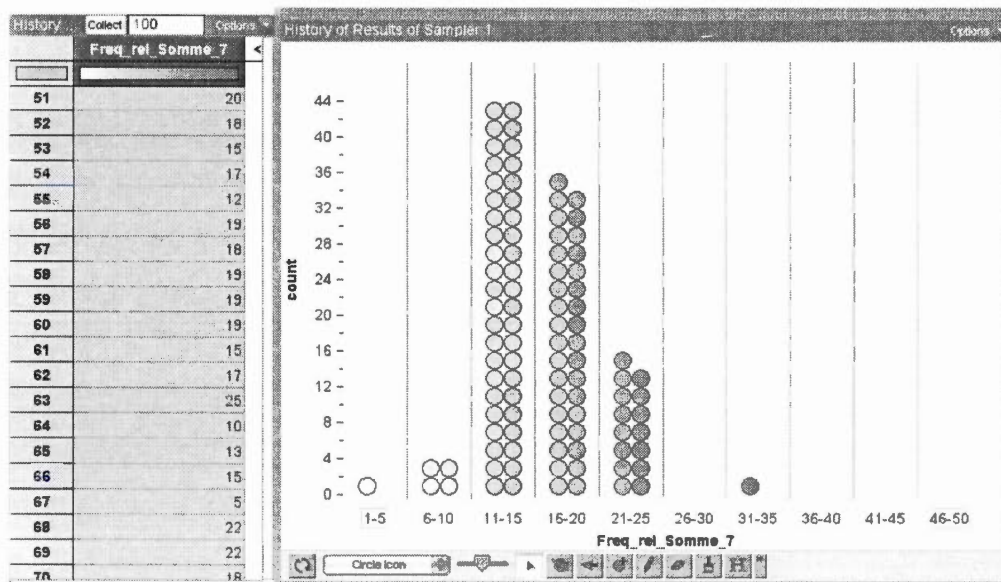


Figure 6.8 Le graphique de la fréquence des fréquences relatives associées à « Obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés » pour 100 simulations de 100 lancers de dés chacune

Ainsi, le micromonde du simulateur permet, en seulement quelques clics, de mettre graphiquement en relation les données de son choix – il suffit de faire glisser l'une des données des tableaux des résultats sur les axes d'un graphique. Il peut aussi y avoir plusieurs graphiques, simultanément. Par la construction et l'affichage du graphique des résultats, le micromonde du simulateur offre ainsi un résumé des résultats obtenus qui permet de s'intéresser, voire d'estimer la tendance des fréquences relatives. En d'autres mots, par l'historique des résultats, le simulateur permet de mettre en relation l'ensemble des fréquences relatives observées (p. ex. s'il y a 200 simulations de 500 lancers, il est possible de mettre en relation les 200 fréquences relatives).

Dans le cas de la somme « 7 » par exemple, on constate que la grande majorité des 100 fréquences relatives obtenues suite aux 100 simulations de 100 lancers de dés se situe entre 11 % et 20 % (Figure 6.8), puisque c'est là que sont concentrés la grande majorité des résultats dans le graphique. Ainsi, avec la représentation graphique, on est en mesure d'entrer dans la tendance des tendances (parce qu'on s'intéresse à la tendance des fréquences relatives, et chaque fréquence relative est la tendance à long terme d'un certain événement aléatoire) et d'observer qu'elle se situe dans un certain intervalle. Et bien que l'intervalle puisse paraître relativement grand (comme dans notre exemple), les objets que le micromonde du simulateur met de l'avant sont malléables si bien qu'il est possible de modifier les paramètres d'affichage et d'ainsi entrer plus finement dans les résultats (Figure 6.9).

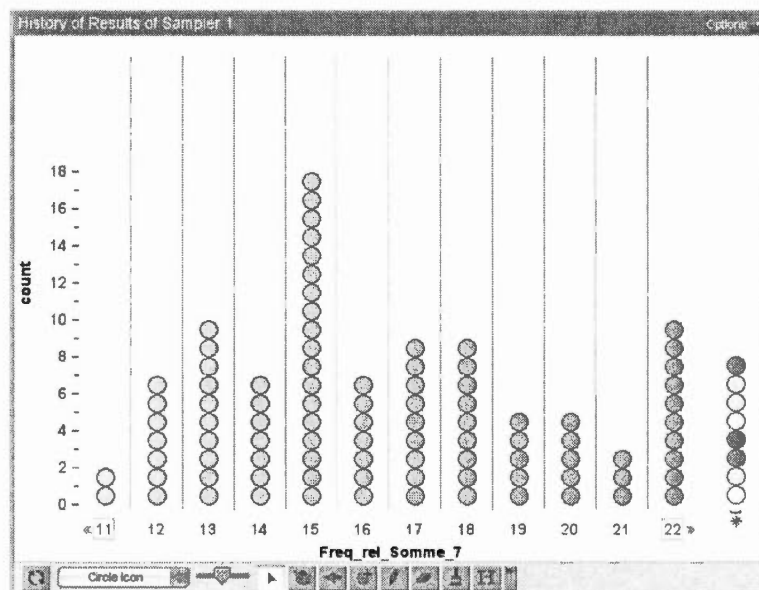


Figure 6.9 Modification des pas de graduations du graphique de la fréquence des fréquences relatives associées à « obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés » pour 100 simulations de 100 lancers de dés chacune

Dans ce cas-ci, raffiner le domaine d’affichage ne permet pas vraiment d’avoir une meilleure idée de la tendance à long terme des fréquences relatives associées à « obtenir la somme de 7 ». Par contre, le micromonde du simulateur, par ses caractéristiques, met encore à la portée de l’utilisateur bien d’autres pistes à explorer, par exemple, à partir du graphique, qui pourrait facilement être modifié pour y ajouter des données de simulations.

On peut noter que le travail sur cette situation de probabilité est sur le point de subir un autre déplacement important. Le travail sur un grand nombre de résultats à comparer semble maintenant guider l’activité mathématique vers l’utilisation de concepts statistiques pour entrer dans l’analyse des résultats. Il semble en effet assez naturel de s’intéresser ici à la moyenne des tendances observées, ou encore à la médiane et au mode, et même à l’étendue des fréquences afin d’avoir une meilleure idée de la tendance à long terme des fréquences relatives. Et puisque le logiciel donne

accès aux mesures de tendance centrale via des boutons, ces dernières apparaissent comme des objets mathématiques à exploiter « directement » via l'interface du micromonde.

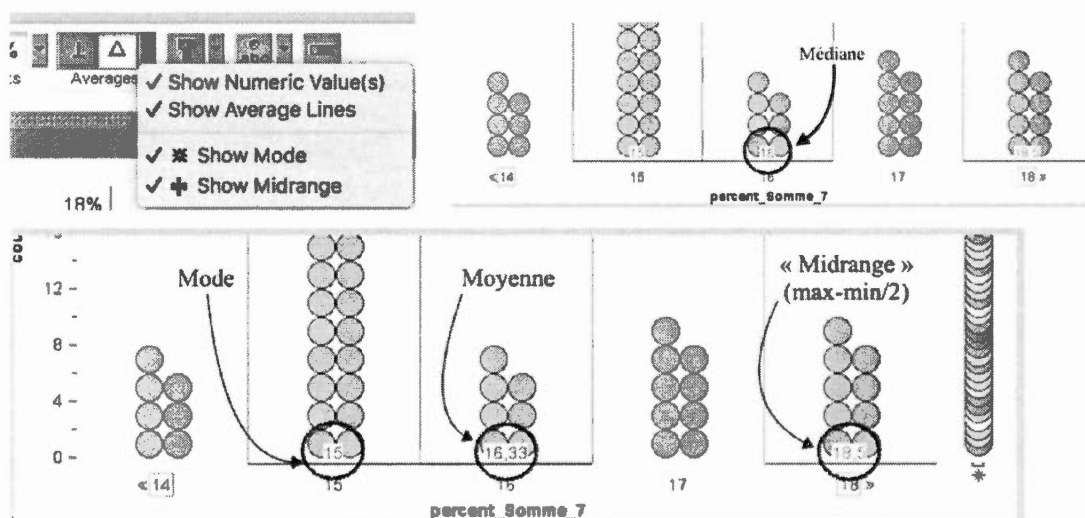


Figure 6.10 Afficher les mesures de tendance centrale directement dans le graphique

Pour l'activité mathématique en approche fréquentielle des probabilités, une entrée aussi explicite sur les mesures de tendance centrale ouvre la porte à un questionnement/exploration mathématique. Par exemple, peut-on dire que la moyenne des tendances (fréquences relatives) corresponde ici à la fréquence relative à long terme de l'événement aléatoire? Est-ce que la médiane, ou encore le mode, pourrait aussi correspondre à cette tendance à long terme? Dans l'exemple ci-haut, la moyenne est « plus près » de la probabilité de l'événement que la médiane, mais avec un plus grand nombre de simulations, est-ce que ces mesures convergent vers la probabilité?²¹ Voilà plusieurs pistes d'exploration mathématique offertes par

²¹ Le choix des nombres influence aussi ici le résultat en ce sens qu'il s'agit des fréquences relatives pour des simulations de 100 lancers de dés. Ainsi, puisque les fréquences (des différentes fréquences relatives) observées sont forcément entiers, il y a une limite relativement importante à combien proche le mode ou la médiane peut tendre vers la probabilité de l'événement, qui est d'environ 16,67 %.

l'environnement ouvert du simulateur. L'accès direct aux mesures de tendance centrale et la possibilité de modifier librement les paramètres de simulation permet de s'intéresser à :

- comment le nombre de simulations pourrait influencer l'allure du graphique et les valeurs des mesures de tendance centrale;
- comment le nombre de lancers par simulation pourrait influencer l'allure du graphique et les valeurs des mesures de tendance centrale.

Et l'exploration mathématique de ces questions, rendue possible en grande partie par les caractéristiques du micromonde du simulateur, permet notamment d'observer de façon expérimentale certains effets/certaines caractéristiques de la loi des grands nombres. Par exemple, par l'allure des graphiques (Figure 6.11) produits dans le simulateur et par l'utilisation des outils de mesures de tendance centrale, on peut observer intuitivement que :

- la valeur de n influence l'étendue des différentes fréquences observées dans les N simulations. Dit autrement, plus un nombre de lancers (n) par simulation est grand, moins l'étendue des fréquences relatives sera grand (N simulations $\rightarrow N$ fréquences relatives)—plus concentrés seront les résultats autour de la moyenne des fréquences relatives observées;
- plus N (la quantité de simulations) est grand, plus il semble y avoir une symétrie dans les résultats. Dit autrement, pour un nombre de simulations N grandissant, la distribution des résultats est plus uniforme;²²
- la moyenne des fréquences relatives ne semble pas varier de façon notable pour des valeurs de n et de N changeantes ou que le mode, la médiane et la moyenne semblent converger vers un même point pour un N plus grand, etc.

²² Je fais ici référence à l'uniformité d'une distribution selon les principes de la loi normale.

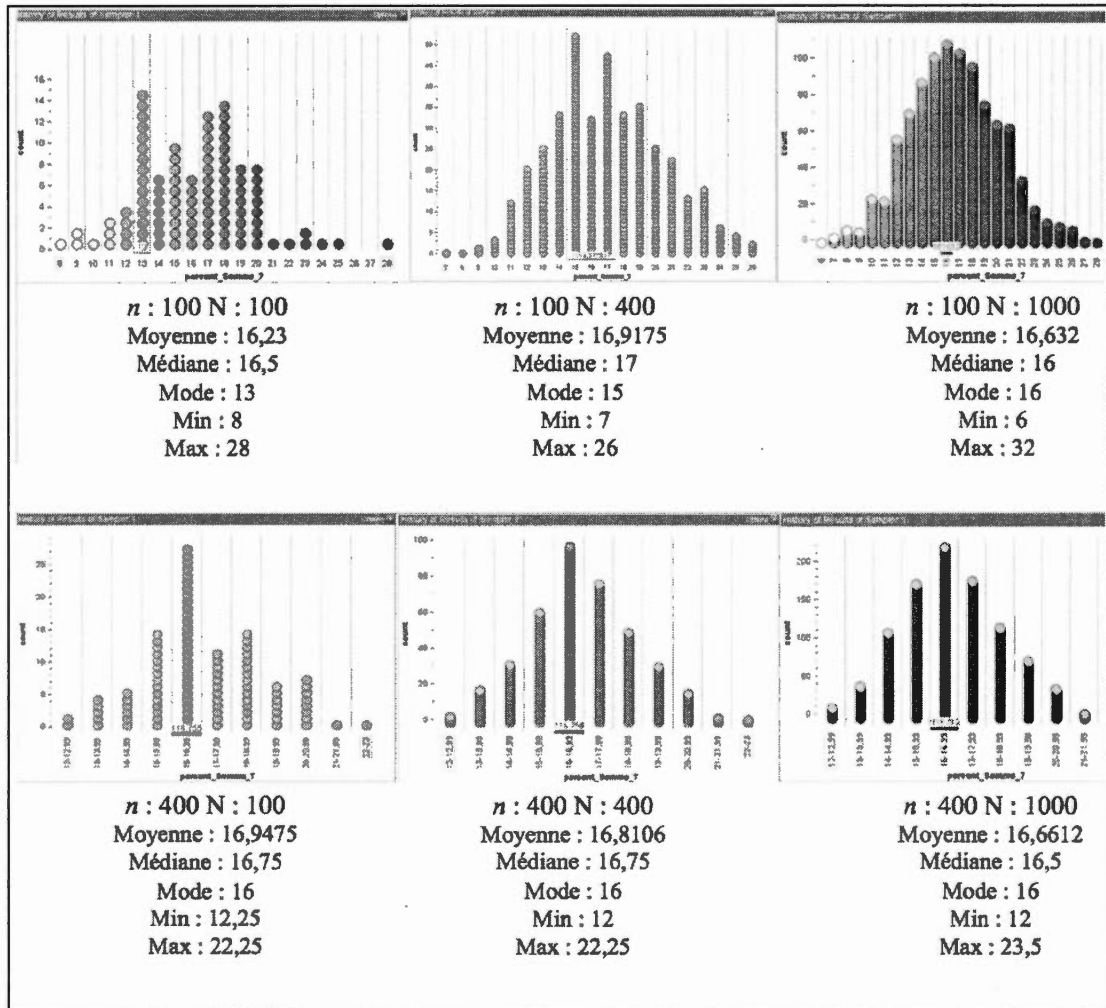


Figure 6.11 Différents graphiques des résultats de N simulations de n lancers de dés. En abscisse : Les fréquences relatives associées au résultat « Obtenir la somme de 7 ». En ordonnée : La fréquence des valeurs en abscisse.

En termes de valeurs de tendance centrale, cette ouverture sur la répétition de simulations et l'accès direct qu'elle donne aux résultats permet d'explorer plusieurs caractéristiques statistiques des distributions, ce qui donne un accès privilégié à la loi des grands nombres. En effet, tel que le disent Maxara et Biehler (2010), différents aspects de la loi des grands nombres peuvent être observés dans la répétition d'une simulation :

But repeating “throwing 1000 coins” 100 times is something very different than repeating “throwing 100 coins” 1000 times (cf. Saldanha, 2007 and Meyfarth, 2008). The simulation of such a coin tossing experiment gets more complicated, because one has to pay attention to two aspects: 1) the spread of the sampling distribution of the proportion of successes depends on the number of coin tosses n , and 2) the smoothness: depending on the number N of repetitions of the coin-tossing experiments, the greater the number N is the “smoother” is the sampling distribution. That is, the empirical law of large numbers appears in two aspects: 1) a closer clustering around the expected value, and 2) the smoothness of the sampling distribution. Both aspects are essential for understanding the simulation of sampling distributions. (p. 4)

Ainsi, le simulateur invite à travailler la loi des grands nombres en tant que tendance plutôt que comme limite. Et même si l’on peut penser ces deux manières d’envisager le concept comme des solutions de remplacement l’une à l’autre sur le plan mathématique, il ne fait aucun doute que l’environnement du simulateur semble en favoriser une, selon ses caractéristiques et ce qu’il rend naturel. Et cette direction dans laquelle l’environnement du simulateur pousse l’activité mathématique ouvre la porte à une exploration extrêmement riche, mais aussi très personnelle, des idées associées à loi des grands nombres. Je veux maintenant m’intéresser aux aspects transformateurs provoqués par le dynamisme qui émerge des représentations graphiques dans les simulateurs.

6.3 La dynamisation de la loi des grands nombres

Dans l’approche fréquentielle des probabilités, la représentation graphique des résultats offre une entrée sur les résultats d’une expérience aléatoire que l’on pourrait qualifier d’*après les faits*, en ce sens que la représentation graphique apparaît comme une vision globale d’une certaine situation, comme un résumé. À ce sujet, l’environnement des simulateurs a quelque chose d’intéressant à offrir (pour l’activité mathématique des probabilités) puisque par ces caractéristiques technologiques, il met en avant des représentations graphiques en mouvement, dynamiques. Selon les paramètres de la simulation, ces représentations graphiques peuvent donc se

construire pas à pas (alors que les résultats sont simulés avec un délai relativement long entre chaque simulation), ou encore très rapidement, ou même en joignant ou séparant des ensembles de données. Il y a certes une grande variété dans les façons de faire. En ce sens, on peut penser que les représentations graphiques dynamiques des simulateurs, que ce soit dans l'affichage en mouvement des résultats ou dans la représentation à l'écran de différentes simulations aléatoires, mettent de l'avant un environnement d'exploration où il est possible d'entrer « intimement » en relation avec certaines idées mathématiques probabilistes. Par les différentes représentations graphiques qu'il propose, le micromonde du simulateur offre une vision riche, nuancée, flexible, à la fois globale (après les faits) et pas-à-pas du phénomène mathématique à l'étude. Mais cette intimité vient aussi du potentiel d'interaction avec les idées mathématiques. Comme le note Stohl (2000), ce potentiel d'action est fondamental à l'idée de micromonde :

The ability to have moveable iconic representations of randomly generated data substantially extends the capabilities of experimentation with physical devices where results are usually only listed or tallied. In this regard, the computer microworld not only connects with a child's physical world, but extends the potential actions available in this new mathematical "world."
(p. 169)

En fait, le dynamisme introduit dans diverses représentations (p. ex. un graphique) a ici le potentiel d'être un objet-pour-penser-avec pour les idées mathématiques puisqu'il permet de concevoir les idées mathématiques alors que celles-ci apparaissent temporellement, dans le mouvement/dynamisme des représentations. Ce sont donc des idées mathématiques qui « apparaissent », qui « se forment », dans l'expérience dynamique qu'on en fait. Le dynamisme offre donc plus qu'une entrée particulière pour l'expérience d'idées mathématiques finies, il insuffle un dynamisme aux idées mathématiques, modifiant ainsi potentiellement la nature de la conception qu'on en fait.

Si l'on s'intéresse par exemple à ce qui émerge de la construction dynamique du graphique (par le simulateur, selon nos paramètres) de la fréquence relative d'un événement aléatoire (pour un nombre grandissant de répétitions de cet événement aléatoire), on constate en fait que le mouvement dans la représentation graphique (la façon dont l'allure du graphique change au fur et à mesure que les données sont générées et compilées graphiquement) influence de façon importante ce qui est observé (dans l'étude d'une certaine tendance après n répétitions). C'est l'effet de l'objet-pour-penser-avec qui, par ses caractéristiques, influence ce qui devient apparent et ce qui est mis de côté (d'un point de vue perceptible).

Lorsque les résultats de chaque événement aléatoire apparaissent l'un après l'autre (même très rapidement), la représentation graphique dynamique du simulateur met de côté, pendant sa construction, l'allure générale du graphique pour mettre l'accent, d'abord sur chacun des résultats, individuellement, puis après suffisamment de répétitions, sur des sous-groupes de résultats. Dans la Figure 6.12, on remarque ainsi la présence de « points » bien distincts en A (on peut facilement voir le résultat de chaque lancer), et puis, petit à petit, ce regard sur les résultats individuels cède sa place à une vision d'ensemble. C'est ce qu'on constate en l'instant C, où l'on remarque un changement important dans la graduation de l'axe horizontal. Enfin, on peut parler d'un déplacement sensible du « regard » en l'instant E, où l'attention est maintenant naturellement portée vers ce qui est apparu comme une zone de stabilisation des résultats (une « ligne droite »).

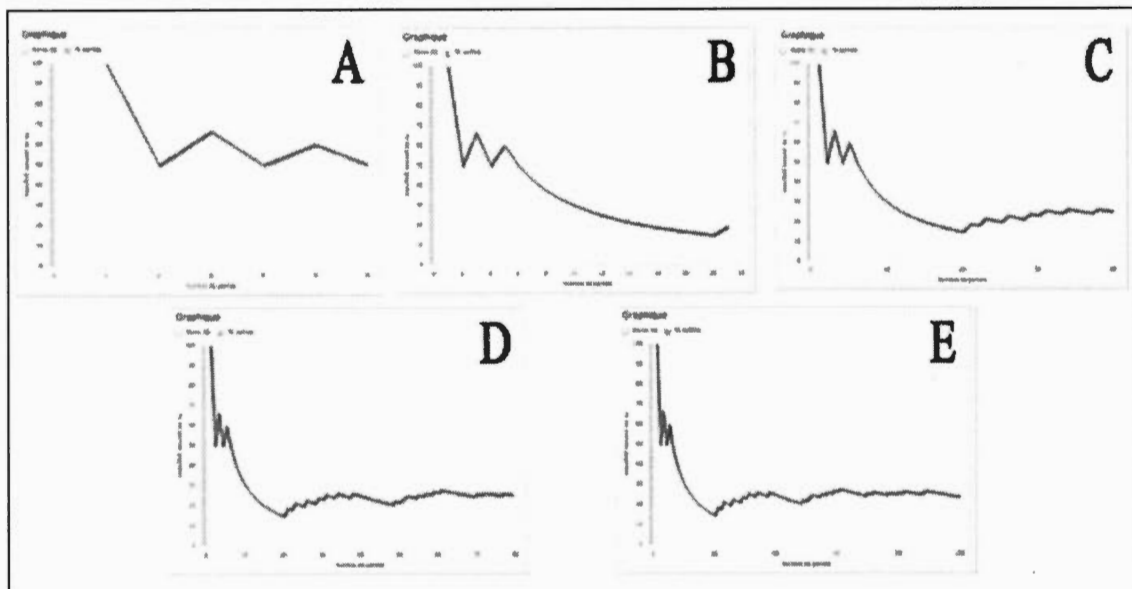


Figure 6.12 Allure du graphique, à différents moments de sa construction dynamique, du lancer de deux dés.

En abscisse, le nombre de répétitions, en ordonnée, la fréquence relative associée au résultat « somme de 7 ». A : après 8 lancers; B : après environ 20 lancers; C : après environ 40 lancers; D : après environ 80 lancers; E : à la fin de la simulation de 100 lancers.

En d'autres mots, la représentation dynamique des résultats encourage d'abord (alors qu'il n'y a encore que peu de résultats de compilés) un questionnement autour de chacun des résultats, individuellement ou en très petits ensembles de résultats. C'est ainsi parce qu'il n'existe pas vraiment encore d'allure globale sur laquelle se pencher. Ensuite, cette représentation dynamique des résultats met en avant-scène un questionnement sur l'allure globale de sous-ensembles de résultats (avant même que la simulation soit complète) par rapport au reste du graphique.

Ainsi, par le dynamisme, la représentation graphique offre une certaine entrée (et même un « cheminement » peut-on dire) pour concevoir le phénomène mathématique qui émerge. De ce point de vue, c'est bien un objet-pour-penser-avec pour les idées entourant la loi des grands nombres.

Voici une description de l'expérience de la construction dynamique du graphique que la Figure 6.12²³ ci-haut présente :

À différents moments de la constitution du graphique, diverses idées mathématiques se présentent. En A, il y a peu de résultats et par conséquent, il n'y a pas vraiment de comparaison à faire entre eux ou avec d'autres « instants ». Il est aussi assez difficile à cet instant de penser en termes « d'allure générale », et de loi des grands nombres.

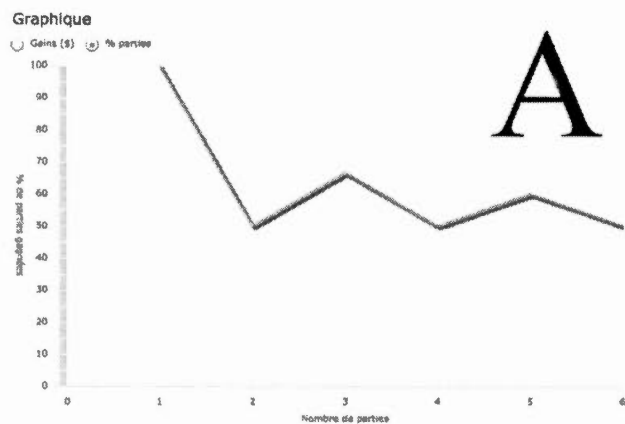


Figure 6.13 Moment A de la construction dynamique du graphique des résultats de l'expérience aléatoire « obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés »

La représentation graphique met davantage en avant le caractère variable de l'expérience aléatoire, et il est difficile d'établir une relation forte entre les résultats puisque ces derniers semblent plutôt imprévisibles. En même temps, l'apparition de ce qui semble être une tendance d'alternance entre les résultats pique la curiosité.

²³ Avec la Figure 6.12, j'essaie tant bien que mal de traduire de façon statique l'allure du phénomène dynamique qui se produit à l'écran lors de la construction dynamique du graphique. Les images A-B-C-D-E sont des clichés du film de la construction dynamique du graphique en E. De ce fait, ils apparaissent ici clairement, alors que dans l'expérience dynamique, chaque cliché n'est qu'un instant qui laisse rapidement place au suivant. Ils traduisent néanmoins l'allure du film du graphique à différents moments de l'expérience—sans toutefois illustrer le mouvement visible à l'écran—et chacun de ces moments offre un certain regard sur ce qui sera potentiellement une tendance vers la probabilité fréquentielle limite.

Mais dans le cas de cette construction dynamique du graphique, cette apparition est trop futile pour permettre l'exploration d'une hypothèse.

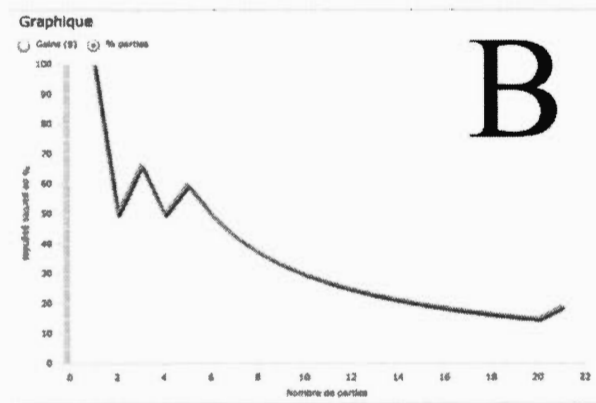


Figure 6.14 Moment B de la construction dynamique du graphique des résultats de l'expérience aléatoire « obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés »

Un instant plus tard, c'est la figure B, et déjà là, cette apparence d'alternance ne tient plus, puis c'est l'instant C qui se présente. À cet instant, un certain ralentissement dans l'évolution (de l'allure) du graphique s'opère naturellement (puisque l'addition de données à chaque seconde (qui est constante) produit un changement moins grand sur l'ensemble du graphique (puisque'il contient davantage de données), *en même temps* que les données particulières s'effacent de plus en plus (on ne les remarque moins) au profit d'un questionnement sur l'allure *globale* de la courbe, et même de sous-ensembles de résultats.

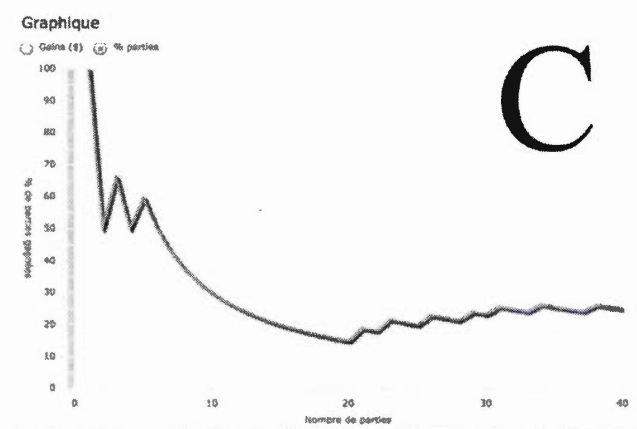


Figure 6.15 Moment C de la construction dynamique des résultats de l'expérience aléatoire « obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés »

Dans ce déplacement partiel de l'intérêt sur l'allure du graphique, du local vers le global, on peut constater deux séries de résultats semblent s'opposer : celle visible en A, et les nouvelles données, dont l'organisation, n'évoque pas du tout une alternance. Et le nombre plus élevé de données contribuant à la seconde série (l'instant B contient beaucoup plus de données que l'instant A) semble vouloir confirmer que c'est cette « tendance » qui est « la bonne ». Mais encore, un regard d'ensemble sur un moment plus « local » est aussi parfaitement possible : on pourrait interpréter B en se disant que « plus on répète l'expérience, moins on obtiendra de résultats "somme de 7" ».

En C, quelque chose de différent se dessine toutefois. La courbe « remonte » et semble présenter des alternances qui viennent redonner la prédominance à l'espèce de variabilité dans un intervalle donné, quelque chose de similaire à ce qui a été observé en A, mais qu'il est possible de voir aussi à d'autres moments (le tout a posteriori).

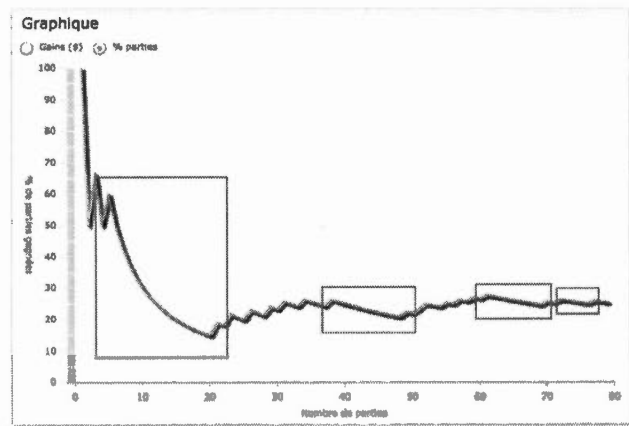


Figure 6.16 Une certaine variabilité qui se répète

En D et E finalement, l'impression d'un « phénomène de stabilisation » s'impose à nouveau.

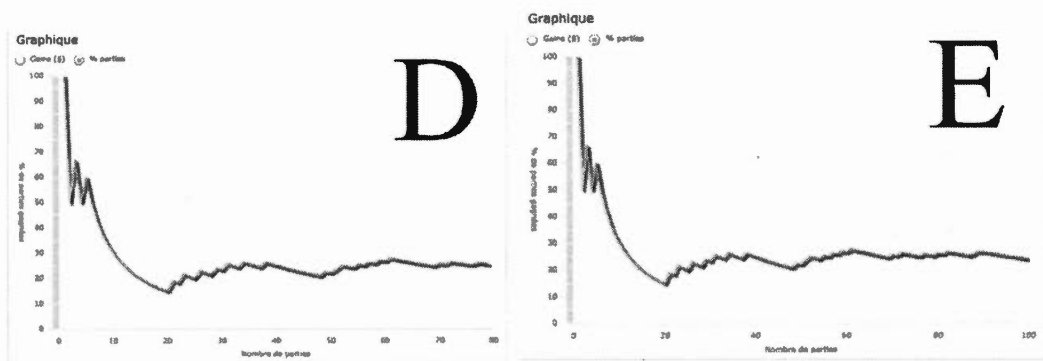


Figure 6.17 Moments D et E de la construction dynamique du graphique des résultats de l'expérience aléatoire « Obtenir la somme de 7 sur le lancer de deux dés »

Les nouveaux résultats semblent d'une certaine manière répéter ce qui vient de s'établir : l'organisation des résultats dans un assez petit intervalle de variabilités. À ce moment du film de la construction du graphique des résultats, on commence à

ressentir la présence de la loi des grands nombres et ses « effets ». On peut alors remarquer comment la représentation dynamique du simulateur offre ici de vivre dynamiquement (c'est-à-dire temporellement) la naissance, et la croissance, de l'établissement d'une tendance à moyen/long terme de la fréquence relative d'un événement aléatoire.

Ainsi, s'intéresser à la fréquence relative d'un événement aléatoire via la représentation dynamique des résultats suggère une perception dynamique des idées mathématiques qui émergent, comme la loi des grands nombres. Une telle séquence de « phénomènes » (les différentes allures de la représentation et ce que ça fait naître comme réflexions) lors de l'observation d'une expérience aléatoire, offre une approche particulière de la loi des grands nombres qui permet en quelque sorte de vivre, de se construire, sa propre constitution pas à pas de la loi des grands nombres et de certains de ses effets. À ce sujet, Stohl (2000) reconnaît/attribue une certaine puissance à ce qui se produit *durant* la construction du graphique :

Use of these representations as dynamic units of analysis can help children visualize concepts such as the law of large numbers and develop appropriate uses of the representative heuristic. The true power comes from children watching the graphical representations *during* the simulation process and observing the wide variability in small samples and how the results "even out" (for equiprobable outcomes) as the number of trials increases. (p. 171.)

De ce fait, le dynamisme dans la visualisation, mis de l'avant par les environnements de simulations, permet un engagement « unique » avec les idées mathématiques. Cet engagement est unique pour différentes raisons en lien avec l'aspect dynamique discuté plus haut. Par exemple, la description de l'engagement qui se crée avec ce qui émerge mathématiquement durant « le film » de la Figure 6.12 met en scène une série d'idées (variabilité, tendance, intervalles, stabilisation, sous-ensembles de données) dont l'ordre et la présence dépendent de l'expérience unique qui a été progressivement produite par le logiciel, et ici, de ma propre familiarité avec ces idées mathématiques. De plus, un certain vocabulaire s'est imposé dans la description

que j'ai fournie : l'idée « d'effets », de « transformation » (du graphique), « d'ajout » (de données), etc. Encore une fois, Stohl constate ce même type d'engagement dans ce qui émerge mathématiquement par le dynamisme de la représentation. Il s'agit d'un autre exemple des effets du mouvement dans le graphique sur la façon de penser les idées mathématiques :

Consider Dean's (9 years old) description of the pie graph during an experiment of tossing a coin 500 times. At the beginning of the experiment (about 1-50 trials) he said "wow, look at it go!" The ratio of heads to tails at this point were varying widely (e.g. 25%-75%, 60%-40%, 30%-70%) and the pie graph was changing rapidly as the outcomes were generated. As the trials increased to 500, the ratio of heads to tails tended toward 50%-50% and the changes in the graph became less noticeable. In a subsequent description, Dean pivoted his forearm to mimic the changes in the graph with large swings representing the wide variability with a small number of trials decreasing toward tiny up-and-down motions to represent the approach to the 50%-50% ratio with a large number of trials. [...] These children were able to visualize the phenomenon of the law of large numbers and used body motions and verbal descriptions that suggest the dynamic analysis of the pie graph helped them conceptualize this phenomenon. (Stohl, 2000. p. 171)

La façon dont l'élève décrit ici sa « rencontre » avec la loi des grands nombres témoigne de son engagement envers son expérience des idées mathématiques. Le graphique dynamique est pour Dean, le garçon dans l'exemple ci-dessus, un objet-pour-penser-avec pour les idées mathématiques qui émergent de son engagement dans l'environnement du simulateur. Il reprend alors, même en dehors du simulateur, le dynamisme offert dans la représentation graphique par un mouvement de son corps (il oscille son bras pour illustrer la variation des fréquences) et par son vocabulaire : « Wow, look at it go! ». Il parle de son expérience en des gestes et des termes dynamiques (*mouvement* de bras, verbes d'action). On constate ainsi que le dynamisme (le film des résultats à l'écran) a entraîné un engagement dynamique avec les idées mathématiques pour Dean.

6.3.1 « La loi dynamique des grands nombres »

Les travaux de Saldanha (2004) nous invitent à aller encore plus loin dans la façon de penser les effets des représentations dynamiques sur la rencontre avec la loi des grands nombres. Selon ces travaux, on peut dire que c'est en quelque sorte la conceptualisation des idées mathématiques elles-mêmes qui se dynamise (et pas seulement notre manière de les approcher). En effet, Saldanha rapporte avoir eu l'impression que les étudiants avaient une vision « statique » d'une situation en probabilité/statistique, et décida de présenter « l'animation » de la construction d'un graphique (histogramme) des résultats (Figure 6.18), plutôt que de simplement discuter la figure finale.

As the animation unfolded, the instructor described what was happening, as above. He stressed that students should think of the histogram not as existing all at once, but rather as being built up as samples are selected and their percents get dispersed along the emerging graph's horizontal axis. [...] (Saldanha, 2004. p. 200)

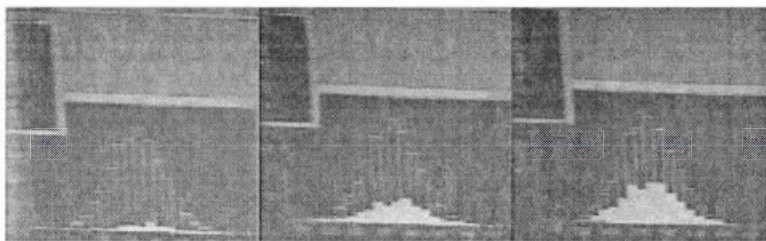


Figure 8.18. Three states in a histogram's emergence as it appeared on a projection screen.

Figure 6.18 Trois images de la présentation de la construction d'un histogramme des résultats d'une suite d'échantillonnage. Tiré de Saldanha, 2004, p. 200.

Construisant ainsi la loi des grands nombres avec les élèves de manière intuitive, visuelle, mais surtout s'appuyant sur la constitution dynamique des objets, Saldanha constate un changement de regard important dans l'activité mathématique. Soudainement, aussi bien l'enseignant que les étudiants se sont mis à parler des idées entourant la loi des grands nombres en termes dynamiques. C'est par exemple en

employant des mots associés à un mouvement dans le temps (p. ex. « faster », « start building up at higher rate ») que l'enseignant posait des questions et que les étudiants se sont mis à décrire leur compréhension du phénomène. L'« existence » d'une certaine tendance (par la loi des grands nombres) est alors devenue quelque chose de dynamique, puisqu'elle a une histoire, un commencement et une fin, une progression. C'est quelque chose qui s'est construit :

The excerpt is particularly interesting in that it illustrates how the instructor used a discourse about rate to occasion the emergence of ideas about how the data were aggregated around the population percentage. [...] This seemed to provide a way for students to begin thinking about the rows of data values in terms of patterns of their accumulation. This enabled comparisons of these rows of data, across different sample sizes, in terms of the relative degree of their accumulations. For instance, Peter's claim (lines 42-46) that the sample percents for sample size 200 were building up "faster" than those for sample size 100 was presumably not a reference to accumulation with respect to time, but rather with respect to spatial intervals around the population percentage. (Saldanha, 2004. pp. 202-203)

Il me semble évident que les représentations graphiques « en mouvement » offertes par les simulateurs agissent ici en tant qu'objets-pour-penser-avec pour l'expérience de la loi des grands nombres, et c'est d'abord cela qui guide, influence et rend favorable l'utilisation d'un vocabulaire dynamique pour décrire comment est perçu (l'effet de) la loi des grands nombres.

Une étude de Pfannkuch et Budgett (2016) sur l'utilisation des représentations dynamiques pour travailler les processus de Markov²⁴ avec des élèves offre un autre

²⁴ De Wikipédia : En mathématiques, un processus de Markov est un processus stochastique possédant la propriété de Markov. Dans un tel processus, la prédiction du futur à partir du présent n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information concernant le passé. Les processus de Markov portent le nom de leur inventeur, Andreï Markov.

Propriété de Markov : En probabilité, un processus stochastique vérifie la propriété de Markov si et seulement si la distribution conditionnelle de probabilité des états futurs, étant donnés les états passés et l'état présent, ne dépend en fait que de l'état présent et non pas des états passés (absence de « mémoire »). Un processus qui possède cette propriété est appelé processus de Markov.

exemple de comment les représentations dynamiques en tant qu'objets-pour-penser-avec donnent un accès privilégié aux phénomènes mathématiques qu'elles présentent en mouvement. Par le dynamisme, certaines facettes des idées mathématiques semblent en effet être mises en avant-plan, si bien que pour Pfannkuch et Budgett, les représentations dynamiques permettent une compréhension différente, voire plus complète des phénomènes mathématiques. Et par les commentaires de certains étudiants ayant participé à l'étude de Pfannkuch et Budgett, il semble que l'on puisse attribuer à l'expérience dynamique du phénomène mathématique la dynamisation de la façon de penser les idées mathématiques :

The students also appreciated being able to visually see the equilibrium and hitting times distributions, something that had not occurred to them as possible. To Lisa the visual imagery made a "lot of things clearer now than they were before" while Mike rejoined with: "visuals just help you understand more what it's doing." They also liked following the process and seeing the self-looping or as Lisa said, "how random it can be." Simone was able to articulate that the tool and tasks gave her "a quite flexible way to think about it [and] I do not know how to describe it just like what I think before when I think about that question and now shh shh shh..." which we understood to mean that she now had a dynamic image of Markov processes. (2016. p. 71).

Le mouvement pour les idées mathématiques que soutiennent les simulateurs dans les représentations dynamiques permet donc bien de dynamiser la façon de faire, parler et conceptualiser les idées mathématiques. Le jeune Dean a décrit un engagement dynamique avec le phénomène présenté dynamiquement et Saldanha et ses étudiants ont quant à eux fait naître certains des effets associés à la loi des grands nombres par un vocabulaire et des « analogies » habituellement réservées à des phénomènes de variation explicite.

6.4 Conclusion

Pour les effets sur l'activité mathématique en probabilité (scolaire), l'analyse en termes de micromonde de l'environnement des simulateurs de probabilités m'a

permis de centrer mon attention sur la direction dans laquelle poussent les caractéristiques (technologiques) de l'environnement en ce qui a trait à comment on fait les probabilités. Cela m'a permis de ne pas forcément m'intéresser aux moyens par lesquels les simulateurs peuvent servir d'appuis pour faciliter l'apprentissage des probabilités scolaires, mais plutôt d'observer comment, en tant qu'objets-pour-penser-avec, les caractéristiques du micromonde du simulateur (les multiples représentations, l'accès direct à différentes mesures, la possibilité de construire sa propre expérience aléatoire complexe, le dynamisme dans les représentations, etc.) pouvaient influencer la façon dont les idées mathématiques émergent, comme la loi des grands nombres, et aussi le contenu lui-même.

J'ai notamment montré comment les caractéristiques du simulateur encourageaient fortement un regard empirique pour l'étude de la probabilité d'un événement aléatoire. J'ai aussi montré comment la possibilité de faire appel directement à différents concepts mathématiques encourageait une exploration plus grande des phénomènes aléatoires. Je fais notamment référence ici à la simplicité avec laquelle l'environnement permet d'exploiter les mesures de tendance centrale pour analyser les différentes simulations, ce qui a permis de penser différemment la probabilité d'un événement, en tant qu'une mesure de tendance centrale d'un ensemble d'échantillons. En ce sens, les caractéristiques du micromonde du simulateur sont des objets-pour-penser-avec pour les idées mathématiques puisqu'elles influencent, en favorisant certaines approches, comment on entre en relation avec les idées mathématiques et comment les idées mathématiques se manifestent (dans leur forme).

Aussi, par le dynamisme des représentations graphiques, on constate comment la loi des grands nombres se manifeste comme un phénomène qui arrive dans le temps, offrant un tout autre regard sur l'idée de la tendance à long terme associée à la fréquence relative d'un événement aléatoire qu'on répète. L'objet-pour-penser-avec des représentations graphiques dynamiques rend notamment compte visuellement, par

l'aspect temporel de sa construction, des effets d'un nombre grandissant d'expériences sur la variabilité en générale de l'expérience aléatoire. Par une série de captures statiques du film de la construction du graphique des résultats de plusieurs simulations, j'ai montré comment ce constat était dynamique. En effet, on a pu voir que c'est « au fur et à mesure », dans la somme des répétitions de l'expérience aléatoire (et non en tant qu'un constat après les faits, comme « déterminés d'avance ») que les résultats qui semblent sortir d'une certaine tendance perdent leur importance dans le phénomène global pour finalement laisser place à ce qu'on pourrait appeler la tendance limite.

Ce regard sur cette approche dynamique des effets de la loi des grands nombres a aussi permis de montrer que c'est par le dynamisme, introduit par l'environnement du simulateur, que la loi des grands nombres a émergé. Si bien que l'on peut dire qu'il s'agit d'un objet mathématique différent en quelque sorte, pensé par les caractéristiques du simulateur. Grâce aux travaux de Saldanha (2004, 2007, 2016) notamment, j'ai montré les effets de cette influence sur les idées mathématiques : par le vocabulaire employé pour parler les mathématiques; par les questions et les observations qui se présentent; par la manière dont les idées mathématiques sont exploitées.

En ce sens, les micromondes des simulateurs d'expériences aléatoires ouvrent bel et bien la porte à des *probabilités dynamiques*, au même sens que les environnements de géométrie dynamique permettent de faire de la *géométrie dynamique*.

[...] the serendipitous discoveries, the bugs, and the mathematical insights all require movement to be appreciated.

Seymour Papert, 1980

CHAPITRE VII

CONCLUSION

7.1 La question du mouvement

Il est difficile de ne pas reconnaître la place centrale qu'occupe le mouvement dans les environnements analysés dans ce travail de mémoire : la possibilité de déplacer librement les objets géométriques dans les environnements de géométrie dynamique (EGD), la possibilité d'observer la construction pas-à-pas du graphique des résultats de simulations d'expériences aléatoires ou encore la possibilité offerte par AlNuSet de déplacer librement les variables sur la droite numérique n'en sont que quelques exemples. Et il semble raisonnable de reconnaître là un mouvement d'ordre mathématique. Car bien que certains mouvements sont très élémentaires, comme celui lié au curseur de la souris, plusieurs des objets en mouvement sont des objets mathématiques (p. ex. un point, une étiquette représentant une variable). On pourrait argumenter que ce mouvement des objets mathématiques révèle quelque chose de particulier par rapport aux idées mathématiques qui y sont rattachées, et que ces aspects (p. ex. la résistance au mouvement, l'inconnue-variable) font désormais partie intégrante de ces concepts. De cette façon, le mouvement serait donc une caractéristique fondamentale des aspects transformateurs de la technologie sur l'activité mathématique comme discuté dans les analyses.

Or, ce mouvement prend racine dans les actions de l'utilisateur, puisque c'est ce dernier qui le produit en quelque sorte, par l'interface logiciel. En ce sens, on peut

argumenter que l'utilisateur, dans un micromonde, ne peut pas que subir le mouvement, il doit en être le producteur. Cela permet donc de penser le mouvement avancé dans les micromondes technologiques comme offrant un engagement (physique/personnel) à l'utilisateur. Et c'est d'ailleurs ce qui peut être constaté par les analyses : le mouvement (même « élémentaire ») semble ouvrir la porte à un engagement particulier dans l'activité mathématique. On peut alors penser en termes du regard que le mouvement permet de porter sur les idées mathématiques. Par cette réflexion que permet le mouvement sur l'activité mathématique, on pourrait donc concevoir que le mouvement lui-même est un objet-pour-penser-avec dans les micromondes technologiques.

Ainsi, la possibilité offerte dans les EGD de déplacer les objets à l'écran permet de mettre en avant les propriétés géométriques des figures. Le mouvement offert par l'environnement du simulateur informatique (la construction dynamique des représentations visuelles, par exemple) permet d'illustrer les principes derrière la loi des grands nombres, voire la loi des grands nombres elle-même. La possibilité de déplacer le symbolisme algébrique sur la droite numérique dans l'environnement AlNuSet met en lumière les valeurs numériques associées aux différentes expressions algébriques. Et ces différents exemples de dynamisme ont tous permis de présenter des effets « de surface » pour l'activité mathématique, mais aussi des effets « plus profonds », surtout lorsque présentés sous l'angle du micromonde.

Pour les EGD, l'effet de surface du déplacement consiste à faciliter le passage d'une approche perceptive à une appréhension théorique des figures. Mais « derrière » cet effet, on peut reconnaître des déplacements potentiels importants pour l'activité géométrique de la preuve, surtout si on voit dans la « construction dynamique » une justification des propriétés/énoncés/théorèmes géométriques. C'est un tout autre rôle pour la représentation visuelle dans la démonstration et dans l'activité géométrique au sens large.

Dans les simulateurs, les effets de surface de la construction dynamique des graphiques portent principalement sur les effets (explicitement visibles) d'un nombre grandissant de simulations pour la fréquence limite d'un événement aléatoire. On peut notamment entrevoir, par le « film de la construction » du graphique des résultats, comment certains résultats plus surprenants (par ex. ceux qui dévient de la tendance à long terme) deviennent invisibles ou insignifiants dans l'accumulation des résultats. Mais on observe aussi, par exemple dans les travaux de Saldahna (2004, 2007, 2016), que l'expérience dynamique de la loi des grands nombres change la façon de parler et de concevoir ces mêmes idées mathématiques : les questions que l'on se pose, les discussions et le travail mathématique en général sont par la suite empreints de ce dynamisme.

Pour *AlNuSet*, on peut voir dans le déplacement des variables sur la droite numérique, pour l'activité de la résolution de problèmes, l'émergence d'un symbole algébrique inusité : l'inconnue-variable. Mais avec cette inconnue-variable, c'est possiblement toute l'activité de la résolution de problèmes qui est transformée en un processus dynamique par la mise en évidence des valeurs intermédiaires qui lui sont associées alors que l'expression algébrique tend vers la réponse attendue.

7.2 Le dynamisme et les objets mathématiques dynamiques

En considérant les effets du dynamisme sur les idées mathématiques qui émergent des environnements technologiques, il semble qu'il y ait plus qu'on pourrait dire par rapport au dynamisme et à la nature des mathématiques. Cela dit, l'analyse conduite donne peut-être l'impression que c'est la technologie qui a introduit un certain dynamisme dans les idées mathématiques, qui elles seraient statiques. Ce n'est pas mon point de vue. En effet, ne pourrait-on pas croire que ce sont les mathématiques elles-mêmes qui sont des objets dynamiques constamment en mouvement? Et si tel était le cas, il serait alors possible d'avancer que la nature des micromondes technologiques permet de rendre explicite ce dynamisme. Évidemment, le présent

travail ne permet pas d'affirmer cela, mais il semble néanmoins ouvrir la porte à ce questionnement important.

Il semble après tout assez facile de s'imaginer « en mouvement » les objets mathématiques soulevés dans les analyses sans avoir nécessairement devant soi l'environnement technologique qui présente ces images animées. De fait, la technologie dynamique nous rappelle que chaque « image » d'une figure géométrique, peu importe l'environnement, peut être perçue comme un représentant d'un ensemble de figures possédant certaines propriétés et qu'il est donc toujours possible de s'imaginer déplacer cette figure, ou la déformer. Et il en va de même pour les inconnues algébriques, qui sont elles aussi des lettres dont la valeur peut être conçue comme changeante (il suffit de penser aux démarches de résolution d'équations par tâtonnement, aux approches algorithmiques de calcul ou encore aux équations conditionnelles). Le mouvement à l'écran qu'introduit la technologie semble davantage mettre en lumière, rendre visible et explicite, l'aspect dynamique changeant et non fini des objets mathématiques.

On trouve un écho à cette idée dans les propos de Châtelet (1987) où ce dernier suggère de voir les objets mathématiques comme des objets incertains, en perpétuel mouvement, jamais finis. Par exemple, Châtelet dit du triangle : « *Le triangle n'existe qu'en tant qu'il y a des triangles virtuels autour de lui. Le triangle n'existe pas en tant que figure rigide comme signe perché dans l'espace mais il existe en tant que mobile.* » (p. 9). Il fait ici référence à Leibniz et à son calcul différentiel, et à l'idée qu'on peut voir le triangle « comme quelque chose qui peut se déplacer infiniment peu. » (p. 9). Cette vision des mathématiques constamment en mouvement se visualise en effet assez bien avec/dans les environnements technologiques. Comme les analyses le présentent, les micromondes technologiques ont le potentiel d'offrir une entrée relativement directe sur le mouvement des idées mathématiques, ce qui en fait des lieux fertiles pour expérimenter ce probable mouvement continu dont parle

Châtelet. Dans une telle perspective d'un mouvement continu, pourrait-on dire que c'est alors la possibilité de mouvement, à travers l'outil technologique, qui permettrait cette dimension transformatrice des mathématiques?

Par cette transformation, les environnements technologiques peuvent offrir une expérience immédiate des idées mathématiques comme un ensemble de traces dynamiques. La résolution d'équations dans l'environnement *AlNuSet* est un bon exemple de cela, où soudainement, par le mouvement du symbolisme, c'est tout un ensemble de valeurs intermédiaires qui constitue la réponse à l'équation. Alors qu'on approche visuellement de la position souhaitée sur la droite numérique, on ressent le besoin de s'intéresser à la valeur de l'inconnue *avant même* que cette valeur ne soit la « bonne » et on se penche sur son ensemble de possibles. Tout le déplacement physique des expressions algébriques et de leurs valeurs sur la droite numérique devient un ensemble de possibilités, quelque chose qui « tend » vers autre chose, et qui n'est jamais vraiment résolu.

On peut penser que cet ensemble de valeurs incertaines est toujours présent dans la résolution d'équations en quelque sorte, mais le mouvement dans *AlNuSet* permet d'en rendre compte d'une façon particulière. De même pour les EGD, cette potentialité se manifeste dans le dynamisme des figures statiques (p. ex. *celle* qui apparaît à l'écran), qui existent dans l'infini d'autres figures potentielles. Le mouvement rendu possible par les EGD expose la nature dynamique des objets géométriques. Tous ces objets, algébriques ou géométriques, demeurent, dans ce mouvement, en vie, étant une infinité d'états en même temps.

7.3 Retour sur les questions de recherche

Deux questions de recherche ont agi comme moteur de ce travail. Pour conclure, il semble donc naturel d'y revenir afin d'offrir une certaine synthèse des éléments de

réponses qui ont été développés tout au long des chapitres et principalement dans les analyses.

1^{ère} question de recherche :

- *Dans la perspective de Papert, quelles sont les possibilités transformatrices de la technologie pour l'activité mathématique?*

Ce travail de mémoire n'a jamais eu la prétention de vouloir faire une liste exhaustive des aspects transformateurs des environnements technologiques, ou même de les circonscrire, mais bien d'essayer d'en offrir un certain regard, d'ouvrir la porte à une certaine sensibilité à leur égard. En ce sens, dans les éléments de réponse à cette question qui se retrouvent un peu partout dans les analyses, on retrouve deux grands volets pour les possibilités transformatrices :

- l'engagement personnel avec les objets mathématiques;
- l'ouverture sur l'exploration fine des objets mathématiques.

Afin d'entrer plus en détail dans ces deux volets, il est préférable, voire nécessaire de répondre à la deuxième question de recherche.

2^{ème} question de recherche :

- *Comment peut-on reconnaître ces aspects dans certains logiciels récemment développés pour faire des mathématiques avec des élèves?*

Le commun dénominateur dans les analyses concernant l'engagement personnel et l'ouverture sur une exploration fine des objets mathématiques est la présence *d'objets-pour-penser-avec*. C'est par la présence d'un objet-pour-penser-avec qu'il a été possible de reconnaître les aspects transformateurs des environnements de travail

informatique. L'objet-pour-penser-avec offre une entrée particulière et personnelle sur les objets mathématiques. En ce sens, il n'est pas uniquement une caractéristique, une possibilité ou une fonction de l'environnement. L'objet-pour-penser-avec, dans ce qu'il propose par ses caractéristiques, influence comment il est possible d'entrer en relation avec les objets mathématiques, donc il influence aussi les objets mathématiques mêmes. Il est aussi malléable, modifiable, ce qui en fait un objet personnel, adaptable dans son comportement par les intentions de l'utilisateur. Chaque analyse offre plusieurs exemples de cette malléabilité. C'est donc en s'intéressant aux caractéristiques des environnements informatiques en tant qu'objets-pour-penser-avec pour l'activité mathématique que les analyses ont mis en avant-plan les aspects transformateurs associés à la possibilité d'entrer en contact de façon personnel, intime, avec les objets mathématiques (les faire nôtres) et la possibilité d'explorer finement ces mêmes objets mathématiques, par les nombreuses options pour la manipulation (des objets mathématiques) qu'offrent les environnements technologiques de travail mathématique.

Ainsi, on peut constater dans les analyses que la présence d'objets-pour-penser-avec dans chaque environnement a permis de concevoir des idées/objets mathématiques qui étaient des constructions qui appartiennent à l'utilisateur, des objets mathématiques pour lesquelles les caractéristiques du logiciel permettent une grande exploration/manœuvrabilité. Et cette grande ouverture pour l'exploration et la manipulation de certaines idées mathématiques ouvre nécessairement la porte à une expérience fine des objets mathématiques, comme il a été possible de le constater avec les figures dynamiques dans les EGD, le symbolisme algébrique dans AlNuSet et la loi des grands nombres dans les simulateurs d'expériences aléatoires.

La perspective de micromonde de Papert a bien permis de poser un regard transformateur sur les effets des environnements technologiques pour l'activité mathématique. Ce regard place les « intérêts » de la technologie en avant-plan, c'est-à-

dire ce qu'elle est, et la direction vers laquelle ses caractéristiques peuvent entraîner l'activité mathématique et les mathématiques elles-mêmes. Cela dit, il reste encore beaucoup de questions connexes en suspens. Par exemple, comment une telle perspective des effets de la technologie peut influencer l'activité mathématique des élèves? Comment peut-on tirer profit de cette influence? Quelles nouvelles mathématiques sont envisageables par une activité mathématique s'inscrivant exclusivement dans une posture épistémologique de micromonde (des *mathématiques technologiques*)?

[...] the serendipitous discoveries, the bugs, and the mathematical insights all require movement to be appreciated.

Seymour Papert, 1980

ÉPILOGUE

J'aimerais profiter de cette occasion pour revenir brièvement sur mon expérience d'écriture. Alors que j'étais à retravailler l'un de mes chapitres, quelques jours avant ma « première remise », mon directeur m'a fait un commentaire intéressant sur la citation suivante, que j'avais décidé d'afficher en entrée du chapitre qui faisait l'objet de cette révision tardive :

[...] the serendipitous discoveries, the bugs, and the mathematical insights all require movement to be appreciated.

Seymour Papert, 1980

Vous la reconnaissez sans doute, puisqu'elle est maintenant bien ancrée à la fin de chacun de mes chapitres—ce ne fut pourtant pas toujours le cas. Mais voilà que mon directeur, dans un éclat de rire, me fit réaliser comment, chapitre après chapitre, il semblait possible d'y voir dans les mots de Papert davantage de sens, de possibilités. Comme si la citation dans ce qu'elle transmet au lecteur bougeait elle-même au fur et à mesure que le travail progressait. Voici ainsi pourquoi vous avez pu la lire après chaque chapitre. Il s'agissait d'un clin d'œil au mouvement—des idées, de vous, de moi—dans l'écriture et la lecture de ce mémoire. En effet, le mouvement est quelque chose de bien personnel, c'est une expérience entre quelqu'un apte à percevoir, à ressentir un certain mouvement et quelque chose d'extérieur (un phénomène, un objet, etc.). Ainsi, un objet qui serait naturellement défini comme étant statique, comme une image unique, peut en effet procurer une expérience de mouvement, être

complètement en mouvement. Pour moi, les images qui suivent sont une expérience de mouvement.

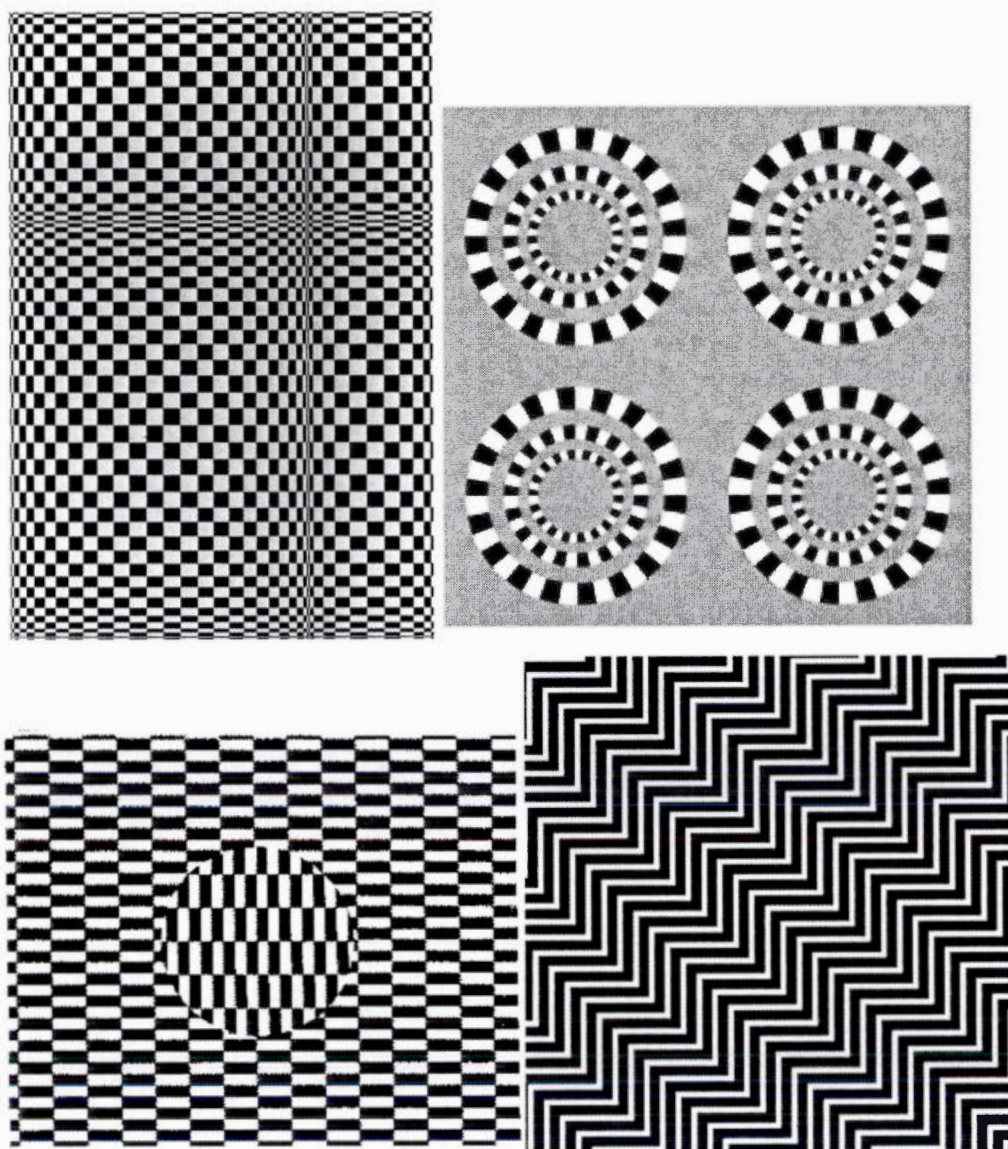


Figure 7.1 Le mouvement dans le « statique »

Ainsi, bien que la citation soit toujours la même en termes des mots qui la composent, elle n'est jamais vraiment la même non plus, puisque nous ne sommes jamais les mêmes.

Et encore, alors que Papert mentionne combien le mouvement est important dans l'appréciation des mathématiques, j'ai réalisé combien j'ai eu à bouger moi-même en retour pour apprécier/découvrir/faire mienne les idées que j'ai avancées ici. Et quel déplacement impressionnant ce fut d'essayer de porter un regard personnel, plus intime (moins technique) sur la technologie et sur ses effets pour l'activité mathématique. Pour y arriver, j'ai eu à visiter des endroits parfois merveilleux, parfois terrifiants. Au final, mon parcours est une accumulation de détours dans l'épistémologie, la philosophie, l'histoire et bien des endroits encore des mathématiques.

Ce qui me mène à une image que j'ai retrouvée récemment—elle témoigne très bien du mouvement qui a pris place en moi durant tout ce processus d'expérience à la recherche en didactique des mathématiques. En fait, c'est davantage une « carte » qu'une image. La production de ce gribouillis remonte déjà à un bon moment, quelque part à la mi-parcours. Mon directeur m'avait alors demandé de faire une « carte relatant certaines de mes expériences significatives » vécues jusqu'à ce jour (dans le programme de maîtrise). Ne sachant trop quoi en penser, j'ai pris mes crayons et j'ai laissé vagabonder mon esprit. Il ne s'agissait pas d'un exercice formel, mais bien uniquement d'une suggestion de sa part afin de m'aider, peut-être, à cerner certains intérêts de recherche. Loin de présenter une vision claire d'où j'allais aboutir, cette carte offre aujourd'hui une vision magnifique pour moi (Figure 8.2). On peut évidemment y voir simplement une trace relatant le mouvement qui avait pris place chez moi *jusqu'à ce point*. Mais pour ma part, j'y vois plutôt une potentialité que je ne lui soupçonnais pas.



Figure 7.2 Une carte très informelle relatant certaines expériences significatives de l'apprenti chercheur

Au-delà du fait que je semble avoir représenté la *mathland* de Papert (la contrée des idées mathématiques) comme ayant la silhouette d'un chat qui dort (le voyez-vous? Il est au centre de la carte), on y retrouve certaines traces puissantes faisant état de ce mouvement des choses qui est si important pour moi aujourd'hui. Par exemple, on peut y lire (juste au-dessus du chat!) que « la recherche est un mouvement d'idées » ou encore ailleurs sur la carte, qu'il semble que l'on puisse s'imaginer connaître les mathématiques « comme on apprend à connaître quelqu'un ». Et il y a évidemment un genre de tornade sous « Papert – Mindstorms », ce qui semble bien sûr approprié vu le chamboulement qu'il a produit en moi. Il apparaît donc que ce mémoire (et le programme de maîtrise en didactique des mathématiques de l'UQAM d'un point de

vue global) m'a surtout fait bouger en tant qu'apprenti chercheur en didactique des mathématiques.

Je réalise ainsi que de tous les mouvements que j'ai observés dans la construction de ce mémoire (p. ex. les mouvements des idées mathématiques au sein des micromondes informatiques), le plus grand demeure celui de mes idées.

[...] the serendipitous discoveries, the bugs, and *everything else* life throws at you all require movement to be appreciated.

BIBLIOGRAPHIE

- Artigue, M. (1997). Le logiciel 'Derive' comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational studies in mathematics*, 33(2), 133-169.
- Artigue, M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies. In *Information and communications technologies in school mathematics* (pp. 121-129). Springer US.
- Artigue, M. (2000). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. In *Proceedings of the Annual Meeting of the GDM. Potsdam*.
- Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In *International handbook of mathematics education* (pp. 469-501). Springer Netherlands.
- Berthelot, R., & Salin, M. H. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39-56.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Greenwood Publishing Group.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques [textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield], Grenoble. *La Pensée Sauvage*.
- Coen, P.-F. (2007). Intégrer les TIC dans son enseignement ou changer son enseignement pour intégrer les TIC : une question de formation ou de transformation? Dans B. Charlier et D. Peraya (dir.), *Transformation des regards sur la recherche en technologie de l'éducation* (p. 123-136). Bruxelles, Belgique : De Boeck.
- Charlier, B., Daele, A., & Deschryver, N. (2002). Vers une approche intégrée des technologies de l'information et de la communication dans les pratiques d'enseignement. *Revue des sciences de l'éducation*, 28(2), 345-365.
- Châtelet, G. (1987). L'enchantement du virtuel. *Chimères*, (2), 64-82.

- Chiappini, G., Pedemonte, B., & Robotti, E. (2008). Using Alnuset to construct the notions of equivalence and equality in algebra. In *Learning to Live in the Knowledge Society* (pp. 345-348). Springer US.
- Chiappini, G., & Pedemonte, B. (2009, January). The design of new digital artefacts as key factor to innovate the teaching and learning of algebra: The case of alnuset. In *Proceeding of CERME* (Vol. 6).
- De Moivre, A. (1738). *The doctrine of chances: or, A method of calculating the probabilities of events in play* (Vol. 1). Chelsea Publishing Company.
- DiSessa, A. A. (1986). Artificial worlds and real experience. *Instructional science*, 14(3), 207-227.
- DiSessa, A. A. (1988). Knowledge in pieces. In G. Forman et P. Pufall. (ed.), *Constructivism in the computer age*. (pp. 49-70). Psychology Press.
- DiSessa, A. A. (2001). *Changing minds: Computers, learning, and literacy*. Mit Press.
- Hocquenghem, S. (1998). Evolution de la notion de figure géométrique depuis les imagiciels jusqu'à GéoplanW. In *Des outils informatiques dans la classe aux calculatrices symboliques et géométriques: quelles perspectives pour l'enseignement des mathématiques*. Actes de l'Université d'été. 26 Août au 31 Août 1996. IREM Rennes, 77-95.
- Edwards, L. D. (1997). Exploring the territory before proof: Student's generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2(3), 187-215.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, 44(1), 5-23.
- Heath, T. L. (1921) *A History of Greek Mathematics II*. Oxford, UK: Clarendon Press.
- Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM*, 42(1), 63-76.
- Henry M. (2001). Notion d'expérience aléatoire, vocabulaire et modèle probabiliste, Autour de la modélisation en probabilités, p.161-172, Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités, collection Didactiques, Presses Universitaires de Franche-Comté, Besançon.

- Hoyles, C., & Lagrange, J. B. (2010). *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*. Berlin, Germany: Springer.
- Hoyles, C., & Noss, R. (2009). The technological mediation of mathematics and its learning. *Human development*, 52(2), 129-147.
- Jackiw, N., & Sinclair, N. (2009). Sounds and pictures: dynamism and dualism in dynamic geometry. *ZDM*, 41(4), 413-426.
- Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. In *Approaches to algebra* (pp. 225-236). Springer Netherlands.
- Janvier, C., Charbonneau, L., & Cotret, S. (1989). Obstacles épistémologiques à la notion de variable: Perspectives historiques. *Construction des savoirs, obstacles et conflits*, 64-75.
- Jackiw, N. designer (1991). *The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
- Jackiw, N. designer (1995). *The Geometer's Sketchpad*, v, 3.0. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational studies in mathematics*, 44(1), 55-85.
- Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In F. Lester, (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 909-955). Reston, VA: NCTM.
- Kaput, J. J., & Thompson, P. W. (1994). Technology in mathematics education research: The first 25 years in the JRME. *Journal for research in mathematics education*, 25(6), 676-684.
- Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 15, No. 1).
- Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: the case of geometry. In *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 48-67). Springer, Berlin, Heidelberg.

- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 151-161.
- Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. *Meaning in mathematics education*, 159-179.
- Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14(1.2), 165-210.
- Lagacé, F. (2015). Mathématique et physique sous l'angle d'aristote, archimède et Châtelet. *For the Learning of Mathematics*, 35, 1.
- Lagrange, J. B. (2009). Innovations technologiques dans l'enseignement des mathématiques: paradigmes et changement de la professionnalité de l'enseignant.
- Lajoie, C. (2009). La calculatrice comme source et support de questions fécondes: quelques exemples pour la classe de mathématiques au primaire et pour la formation des maîtres. *Bulletin AMQ*, 49(1), 66. p. 65-75
- Lévy, P. (1993). *Les technologies de l'intelligence: l'avenir de la pensée à l'ère informatique*. Editions la découverte.
- Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(2), 135-157.
- Linard, M. (2002). Conception de dispositifs et changement de paradigme en formation. *Éducation permanente*, (152), 143-155.
- Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, 44(1), 87-125.
- Mason, J.: 1991, 'Questions about geometry', in D. Pimm and E. Love (eds.), *Teaching and Learning Mathematics: A Reader*, Holder and Stoughton, London, pp. 77-99.
- Mariotti, M. A. (2001). La preuve en mathématique. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 1(4), 437-458.

- Maxara, C., & Biehler, R. (2010, July). Students' understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. In *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*.
- Meyfarth, T. (2008). *Die Konzeption, Durchführung und Analyse eines simulationsintensiven Einstiegs in das Kurshalbjahr Stochastik der gymnasialen Oberstufe. Eine explorative Entwicklungsstudie*. Hildesheim, Franzbecker. Online: <https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2006100414792>.
- Mills, J. D. (2002). Using computer simulation methods to teach statistics: A review of the literature. *Journal of Statistics Education*, 10(1), 1-20.
- Noss, R. (2002). Mathematical epistemologies at work. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 2-13.
- Ore, O. (1963). *Cardano, the gambling scholar*. Princeton University Press.
- Pearson, K. (1924). Historical note on the origin of the normal curve of errors. *Biometrika*, 16, 402-4.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books, Inc..
- Papert, S. (1986). Beyond the cognitive: The other face of mathematics. *Epistemology & Learning Group, Media Lab, Massachusetts Inst. of Technology*.
- Papert, S. (1990). A critique of technocentrism in thinking about the school of the future. Cambridge, MA: Epistemology and Learning Group, MIT Media Laboratory.
- Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education.
- In Schoenfeld, A. H. (Ed.). *Cognitive science and mathematics education*. (pp. 89-122). Psychology Press.
- Peyrard, F. (1807) *Oeuvres d'Archimède*. Paris, France : Bachelier
- Pfannkuch, M., & Budgett, S. (2016). Markov processes: exploring the use of dynamic visualizations to enhance student understanding. *Journal of Statistics Education*, 24(2), 63-73.

- Pocztar, J. (1971). Théories et pratiques de l'enseignement programmé. Unesco, Paris.
- Pedemonte, B. (2011). Conjecturing and proving in AlNuSeT. *Acedido em*, 1.
- Pressey, S. L. (1926). A simple apparatus which gives tests and scores-and teaches. *School and Society*, 23(586), 373-376.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains* (p. 239). Armand Colin.
- Restrepo, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème* (Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I).
- Robotti, E. (2013). Dynamic representations for algebraic objects available in AlNuSet: how develop meanings of the notions involved in the equation solution. *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*, 99.
- Saldanha, L. A. (2004). "Is this sample unusual?": *An investigation of students exploring connections between sampling distributions and statistical inference* (Doctoral dissertation, Vanderbilt University).
- Saldanha, L., & Thompson, P. (2007). Exploring Connections between Sampling Distributions and Statistical Inference: An Analysis of Students' Engagement and Thinking in the Context of Instruction Involving Repeated Sampling. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3).
- Saldanha, L. (2016). Conceptual issues in quantifying unusualness and conceiving stochastic experiments: insights from students'experiences in designing sampling simulations. *Statistics Education Research Journal*, 15(2).
- Savard, A., Freiman, V., Theis, L., & Larose, F. (2013). Discussing Virtual Tools That Simulate Probabilities: What are the middle school teachers' concerns?. *McGill Journal of Education/Revue des sciences de l'éducation de McGill*, 48(2), 403-423.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions.

- Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Sheynin, O. B. (1968). Studies in the history of probability and statistics. XXI. On the early history of the law of large numbers. *Biometrika*, 55(3), 459-467.
- Sinclair, N., & Yurita, V. (2008). To be or to become: How dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 135-150.
- Soury-Lavergne, S. (2014). Les technologies pour la géométrie à l'école primaire. Dans les actes du colloque Copirelem, Nantes. pp.14
- Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies*, 34(2), 135-151.
- Stohl-Drier, H. (2000). The Probability Explorer: A research-based microworld to enhance children's intuitive understandings of chance and data. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 22(3/4), 165-178.
- Stohl, H., & Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 319-337.
- Sutherland, I. E. (2003). Sketchpad: A man-machine graphical communication system.
- Suydam, M. N. (1979). The Use of Calculators in Pre-College Education: A State-of-the-Art Review.
- Tanguay, D., & Geeraerts, L. (2014). Conjectures, postulats et vérifications expérimentales dans le paradigme du géomètre-physicien: Comment intégrer le travail avec les LGD?. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(4).
- Thibault, M. (2011). Apprentissage des probabilités chez des élèves du secondaire dans une séquence d'enseignement basée sur la simulation de jeux de hasard et d'argent: émergence de conceptions.
- Thibault, M. (2015). Utiliser les mathéma-TIC pour enseigner les probabilités. *Revue Envol (GRMS)*, 165, 9-13. Récupéré de <http://grms.qc.ca/wp-content/uploads/2009/03/Revue-1652.pdf>
- Weir S. (1987). *Cultivating minds: A Logo casebook*. New York: Harper & Row.

- Zack, V., & Reid, D. A. (2003). Good-enough understanding: Theorising about the learning of complex ideas (part 1). *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 43-50.
- Zack, V., & Reid, D. A. (2004). Good-enough understanding: Theorising about the learning of complex ideas (part 2). *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 25-28.