UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE THÉORIQUE SUR LA RÉFÉRENCE AU PROCESSUS D'ABSTRACTION EN MATHÉMATIQUES DANS LA NOOSPHÈRE DU CHAMP DE L'ÉDUCATION AU QUÉBEC

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

À LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR

LAURIE BERGERON

NOVEMBRE 2017

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur, Gustavo Barallobres, qui m'a guidée, conseillée de façon remarquable et avec qui j'ai développé une si belle complicité au cours des dernières années. J'ai tant apprécié et appris de nos échanges, et par votre générosité et vos qualités de chercheur, vous avez contribué de façon inestimable à ce projet. Je suis impatiente de débuter mon doctorat avec un directeur si dévoué et dont les commentaires sont toujours enrichissants. À Jacinthe Giroux et Sophie Grossmann, deux chercheures pour qui j'ai énormément d'admiration, je tiens à vous remercier pour les judicieux commentaires qui ont été précieux dans l'élaboration de ce mémoire.

J'aimerais également remercier mes parents, Valérie et André, pour toutes les petites attentions et les encouragements. Je vous suis reconnaissante de nous soutenir dans nos projets qui sortent toujours de l'ordinaire. Ensuite, un chaleureux merci aux amies irremplaçables, Joanie Lagacé et Caroline Deshaies, celles qui vous encouragent, vous relisent et vous changent les idées ainsi qu'aux collègues devenues des amies, Catherine, Meijie et Marie-Aimée, dont le soutien est précieux et avec qui les longues périodes de travail se transforment en moments mémorables.

C'est à mon partenaire et mon meilleur ami, Marc-Antoine, que je dois le plus chaleureux des remerciements, car contrairement à moi, il ne doute jamais de mes capacités. Merci pour ton écoute, ton support, ta compréhension et ton amour. Finalement, ce projet n'aurait pu être mené sans l'importante contribution de la Fondation de l'UQAM, de la Faculté des sciences de l'Éducation, du DEFS, du SPUQ et de l'ADEESE dont le soutien financier m'a permis de prendre encore plus de plaisir dans mes études aux cycles supérieurs.

There is a theory which states that if ever anyone discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable…

There is another theory which states that it has already happened.

Douglas Adams

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES ET TABLEAUX

RÉSUMÉ

Cette recherche théorique de forme exploratoire vise à analyser un discours très répandu en adaptation scolaire stipulant que les difficultés d'abstraction des élèves sont un obstacle majeur à l'apprentissage des mathématiques. Même si ces difficultés ne sont pas explicitées et définies, elles sont habituellement associées à des problématiques cognitives des élèves. Cette interprétation conduit à des propositions d'interventions centrées sur la réduction de l'abstraction (ex. la manipulation d'objets concrets) sans considérer l'impact que cette décision a sur la nature spécifique des savoirs enseignés.

Ce mémoire a pour but d'analyser les différents usages et significations attribués à la notion d'abstraction en mathématiques dans le discours noosphérien de l'adaptation scolaire et à identifier les fondements théoriques et idéologiques sous-jacents à ce discours qui a une influence sur les pratiques enseignantes (Chevallard, 1991 ; Roiné, 2005, 2009 ; Sarrazy et Roiné, 2006 ; Giroux, 2014). Le cadre théorique présente des éléments de l'abstraction tels qu'abordés par la philosophie, la psychologie, les mathématiques et la didactique des mathématiques, ce qui contribue à élaborer un cadre d'analyse dépassant le strict point de vue psychologique et à comprendre la trame idéologique sous-jacente aux injonctions orientant les pratiques enseignantes. Sur le plan méthodologique, une analyse sémantique de contenu a été conduite, sur un corpus de 10 discours provenant des institutions en éducation (ministère et commissions scolaires) et de pédagogues particulièrement reconnus, afin de dépasser le sens manifeste des textes et ainsi d'avoir accès aux conceptions et modes de pensée des auteurs.

Les résultats de cette étude s'arriment à ceux d'études dans l'espace francophone qui montrent la prégnance d'un cadre mentaliste (Giroux, 2013, 2014 ; Roiné, 2009, 2014 ; Sarrazy, 2015) au sein des discours en éducation. Dans ce cas, il s'agit du discours portant sur l'abstraction et les difficultés d'abstraction qui est imprégné d'un cadre mentaliste, mais également des idéologies empiristes.

Mots-clés : abstraction, adaptation scolaire, conceptualisation, discours noosphérien, difficultés d'apprentissage, discours institutionnel, discours pédagogique, idéologies, didactique des mathématiques, théories.

INTRODUCTION

Les orientations gouvernementales en éducation permettent, comme l'ont fait remarquer plusieurs chercheurs (Chevallard, 1991 ; Roiné, 2005, 2009 ; Sarrazy et Roiné, 2006 ; Giroux, 2014), de comprendre certaines régularités dans les pratiques enseignantes. Au Québec, le système éducatif et plus particulièrement les politiques et rapports concernant l'adaptation scolaire semblent reposer sur deux positions épistémologiques diamétralement opposées. D'une part, le système en cascade instauré dans le cadre du rapport COPEX (MEQ, 1976) mise sur une formule normalisante inspirée du courant de *normalisation* et de *valorisation des rôles sociaux* danois (Wolfensberger, 1972) et a pour objectif l'intégration et la valorisation de tous en société dans le but d'éviter les inégalités sociales. D'autre part, *la politique de l'adaptation scolaire* (MELS, 1999) repose sur une approche individualisée visant l'identification et la catégorisation des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation et d'apprentissage (EHDAA), grandement inspirée du modèle bio-médical.

Si l'objectif de ces rapports et politiques vise l'accès à la classe ordinaire et le succès pour le plus grand nombre, pourquoi les inégalités persistent-elles ? Pourquoi les élèves identifiés comme étant en difficulté qui cheminent en classe spéciale sont-ils moins nombreux à obtenir un diplôme que leurs pairs ayant été intégrés en classe ordinaire et pourquoi le taux d'intégration de ces élèves n'augmente-t-il pas (MELS, 2006a) ?

Parmi les multiples facteurs pouvant expliquer la persistance de ces inégalités, l'analyse des pratiques enseignantes et des modèles pédagogiques qui leur sont sous-jacents est souvent mise de côté. Les propositions d'adaptation de l'enseignement auprès des élèves faibles sont majoritairement organisées en fonction des caractéristiques cognitives de ceux-ci et visent l'enseignement de stratégies d'apprentissage qui seraient transférables d'une discipline à une autre ; la nature spécifique des savoirs propres à chaque discipline ne semblerait pas être une variable importante à considérer.

Cet effacement des savoirs dans les propositions d'enseignement peut être repéré, notamment, dans les formations continues qui sont offertes aux enseignants de l'adaptation scolaire ainsi qu'aux orthopédagogues. Concrètement, il est possible de constater, lors de colloques québécois en lien avec le champ de l'adaptation scolaire, qu'un faible taux des conférences et ateliers proposés sont en lien avec les contenus propres aux disciplines scolaires. Par exemple, lors du 41^{e} congrès annuel de l'institut des troubles d'apprentissage ayant eu lieu en avril 2016, 6 des 70 conférences étaient liées à l'enseignement des mathématiques et 15 au français. Il en est de même pour les conférences et ateliers du 27^{e} colloque de l'Association Des Orthopédagogues du Québec (ADOQ, octobre 2016) lors duquel 7 des 27 conférences ont pour sujet l'enseignement des mathématiques et 9 concernent l'enseignement du français. Pour ces colloques, les conférences et ateliers restants avaient comme sujets l'explication des troubles d'apprentissage, la présentation de modèles pédagogiques et des stratégies adaptables d'une discipline à un autre ainsi que le dépistage des élèves à risque.

Si au cours des dernières années, les recherches étudiant les difficultés d'apprentissage en mathématiques se sont principalement inspirées du cadre de la psychologie cognitive, au sein duquel les difficultés sont généralement interprétées comme étant associées aux capacités cognitives des élèves, un mouvement provenant de la didactique des mathématiques élargit ces interprétations et propose une analyse systémique considérant d'autres éléments tels que des phénomènes spécifiques d'enseignement/apprentissages ainsi que des conditions didactiques et non didactiques inhérentes aux situations d'enseignement. Ce projet s'inscrit dans cette perspective.

Le présent projet pose les premiers jalons d'une recherche théorique ayant comme objectif d'identifier et de décrire certains éléments (théoriques et idéologiques) sous-jacents au discours noosphérien du champ de l'adaptation scolaire à propos de l'abstraction et des difficultés d'abstraction. Le premier chapitre a pour but de décrire la notion d'élève en difficulté telle qu'elle est conçue au Québec et de dépeindre, selon les différentes institutions influentes en éducation, les propositions d'interventions et d'enseignement auprès de ces derniers ainsi que certains phénomènes didactiques qui en découlent afin de préciser l'objet de cette recherche, c'est-à-dire l'abstraction et plus particulièrement les significations attribuées aux difficultés d'abstraction en mathématiques.

Le deuxième chapitre, qui se décline en deux parties, est consacré, tout d'abord, à la clarification de certains concepts qui sont constitutifs de l'objectif de cette recherche, tels que la notion de discours, de discours noosphérien et des significations attribuées aux termes « idéologie » et « théorie ».

La deuxième partie de ce chapitre présente une analyse conceptuelle de la notion « d'abstraction » en mathématiques selon différentes perspectives (philosophique, psychologique, mathématique et didactique). Ainsi, selon chaque perspective, des ouvrages d'auteurs provenant de postures et de courants théoriques différents ont été consultés afin de cibler les caractéristiques essentielles de l'abstraction et, plus particulièrement, de l'abstraction en mathématique.

Le troisième chapitre aborde la démarche méthodologie priorisée pour répondre aux objectifs de ce projet, c'est-à-dire l'analyse de contenu. C'est par l'entremise de la méthode d'analyse sémantique conceptuelle de contenu que les analyses sont menées. Le chapitre présente donc la sélection du corpus, le mode de catégorisation choisi, la définition des catégories, une définition de la méthode ainsi que le plan d'analyse prévu.

Quant au quatrième chapitre, celui-ci porte sur les analyses de contenu effectuées afin de cerner les différentes significations attribuées à la notion d'abstraction en mathématiques au sein des discours institutionnels et pédagogiques constitutifs de la noosphère du champ de l'adaptation scolaire. Ce chapitre comporte ainsi une section pour l'analyse du discours institutionnel et une seconde pour celle du discours pédagogique.

Le cinquième chapitre est consacré à l'identification des fondements (théoriques et idéologiques) du discours noosphérien de l'éducation quant aux significations accordées à la notion d'abstraction et aux difficultés d'abstraction en mathématiques. Ce chapitre permet ainsi, à partir des analyses de contenu effectuées, d'identifier la trame idéologique sous-jacente à ces discours qui influence le travail des acteurs en éducation.

Finalement, la conclusion de ce mémoire comporte tout d'abord un retour sur les différents constats effectués et, ensuite, propose quelques pistes de réflexion subséquentes.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 Émergence d'une école adaptée à tous ses élèves

Le système scolaire québécois a connu de nombreux changements au cours des cinquante dernières années. En effet, à l'aube des années soixante, la mise sur pied du ministère de l'Éducation inaugure le développement de services éducatifs spécialisés. C'est à partir de ce moment que divers mouvements et commissions d'enquête font en sorte que ces populations, autrefois mises à l'écart, peuvent bénéficier des mêmes droits que tous, notamment le droit à une éducation spécialisée (Horth, 1998). C'est en ce sens que le rapport du *Comité provincial sur l'enfance exceptionnelle* (COPEX) (MEQ, 1976), grandement influencé par les courants danois de normalisation et de valorisation des rôles sociaux (Wolfensberger, 1972), établit les orientations de l'éducation auprès des enfants en difficulté. C'est par le système en cascade de huit niveaux que les orientations du rapport COPEX priorisent une formule normalisante pour les élèves de l'éducation spécialisée. Sous cet angle, l'objectif d'un tel système est de favoriser le maintien de l'élève dans la classe ordinaire ou de faire en sorte qu'il y retourne au plus vite. Par ailleurs, l'entrée dans ce système d'éducation spéciale s'effectue par des évaluations se basant sur un diagnostic médical, psychiatrique ou psychologique. Tout comme l'approche médicale dominante, les difficultés liées au handicap ou au trouble sont identifiées ainsi que les moyens de les surmonter, voire de les « guérir ». Ce rapport a notamment servi de base lors de l'élaboration de la *Politique pour l'enfance en difficulté d'adaptation et d'apprentissage* (MEQ, 1976). Celle-ci vise à fournir à ces élèves une éducation de qualité ainsi qu'une accessibilité à des services éducatifs en plus de leur reconnaître le droit de grandir dans le cadre de vie le plus normal possible.

1.2 La politique de l'adaptation scolaire

C'est sous la bannière de *La réussite pour tous* que parait la dernière version de la *Politique de l'adaptation scolaire* (MELS, 1999). Se voulant une réponse aux principales conclusions de la commission des états généraux sur l'éducation, cette politique revisitée priorise non seulement l'accès à l'éducation de qualité pour tous, mais également l'accès au succès pour le plus grand nombre. Cette nouvelle politique conçoit la réussite à partir des trois missions de l'école québécoise : « instruire, socialiser et qualifier » (MELS, 1999, p.11). Pour les élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation et d'apprentissage (EHDAA), cela signifie de promouvoir leur intégration scolaire ainsi que leur intégration sociale, notamment en favorisant la transition entre le primaire et le secondaire et celle entre le secondaire et le marché du travail. Pour ce faire, il est primordial, selon cette politique, que le personnel enseignant ainsi que le personnel de soutien répondent aux besoins des élèves, préviennent les difficultés et interviennent de la façon la plus efficace et la plus rapide possible. De surcroît, elle accorde une priorité à l'adaptation des services éducatifs ainsi qu'à l'évaluation des élèves. Parmi les principales voies d'action, l'importance de répondre aux besoins de chaque élève est une prescription récurrente de la politique de l'adaptation scolaire. Par ailleurs, bien que le ministère s'engage à soutenir ces voies d'action en augmentant le nombre d'intervenants et de services, il est précisé que ces adaptations sont le fruit d'un effort supplémentaire et d'un « engagement sincère » de la part des enseignants (MELS, 1999, p.18).

1.2.1 Les élèves en difficulté d'apprentissage

Basée sur une approche individualisée pour répondre aux besoins et capacités de chaque élève, la politique de l'adaptation scolaire mise sur une définition des élèves ayant un handicap et des troubles d'apprentissage inspirée du modèle bio-médical

(Goupil, 2014), ce qui fait en sorte que l'on identifie chez ceux-ci un problème ainsi que ses manifestations, tout en tentant d'en expliquer les origines possiblement biologiques pour finalement prescrire un « traitement » et des interventions pour les « guérir ».

Pour chaque trouble et handicap est attribué un code de difficulté pour lequel un certain financement est alloué. Pour chaque code sont définies les conditions pour le diagnostic ainsi que les limitations et manifestations sur le plan scolaire qui y sont liées (MELS, 2007). Toutefois, les documents du ministère ne fournissent aucune description des interventions possibles n'est fournie. Outre les différents troubles et des handicaps définis, une autre catégorie d'élève est incluse chez les EHDAA : il s'agit des élèves en difficulté d'apprentissage. À l'inverse des troubles et des handicaps, la définition des élèves en difficulté d'apprentissage ne s'appuie pas sur des modèles médicaux et ne distingue pas les élèves du primaire et ceux du secondaire, malgré les grandes différences entre les deux institutions d'enseignement. L'élève en difficultés d'apprentissage est défini comme :

> Celui dont l'analyse de sa situation démontre que les mesures de remédiation mises en place, par l'enseignante ou l'enseignant ou par les autres intervenantes ou intervenants durant une période significative, n'ont pas permis à l'élève de progresser suffisamment dans ses apprentissages pour lui permettre d'atteindre les exigences minimales de réussite du cycle en langue d'enseignement et en mathématique conformément au Programme de formation de l'école québécoise. (MELS, 2007, p. 24.)

Il faut remarquer qu'aucune précision n'est donnée sur la période de temps minimale pour attester qu'un élève est en difficulté d'apprentissage ni sur la nature des interventions et des mesures de remédiation. De plus, pour le primaire, cette définition est accompagnée des diverses exigences quant au portrait des connaissances attendues pour les domaines du français et des mathématiques pour chacun des cycles. Dans le cas spécifique du secondaire, il n'en est rien. En fait, la définition des exigences minimales de réussite correspond à la pondération pour chacune des compétences et aux règles de réussite pour chaque discipline définies annuellement. Si les exigences de fin de cycle sont définies annuellement, cela signifie que les critères pour identifier un élève du secondaire comme étant en difficulté changent également annuellement. Par ailleurs, seuls le français et les mathématiques sont ciblés par cette définition laissant de côté les autres disciplines telles que le domaine de l'univers social, de l'anglais, etc.

1.2.2 La réussite pour tous ?

Au secondaire, la constitution des classes pour les élèves de l'adaptation scolaire se déroule de diverses façons selon les commissions scolaires. Dans le but de répondre aux besoins des élèves HDAA, onze types de classes spéciales sont identifiés pour ce niveau d'enseignement (MELS, 2009). La typologie des classes spéciales renvoie à la catégorisation des élèves comme en témoignent les différentes classes de déficience intellectuelle (DI) qui vont de DI légère à moyenne, de DI légère avec ou sans trouble associé, à la classe de déficience organique ainsi que plusieurs autres typologies. Les élèves sont donc répartis dans leur classe selon leur diagnostic. Certaines classes ont une typologie plus large pour accueillir plusieurs catégories d'élèves, c'est notamment le cas des classes de communication et de présecondaire qui concernent un spectre plus vaste de codes.

Bien que plusieurs données sur la répartition par type de classe de la population d'élèves HDAA soient disponibles pour le primaire, des données moins étoffées sont disponibles pour le secondaire. Pourtant, entre 2002 et 2007, c'est au secondaire que se trouve la majeure partie de ces élèves (MELS, 2009). Malgré la mise en place du système en cascade qui vise le retour vers la classe ordinaire, en 2006-2007, 87 % des élèves en difficulté évoluent dans une classe spéciale (MELS, 2009). Pour la même période, 83,3 % des élèves HDAA au secondaire se retrouvent dans une classe spéciale de type hétérogène, c'est-à-dire une classe réunissant des élèves ayant des codes différents et étant identifiés en difficulté. Bien qu'un des objectifs principaux de la

Politique de l'adaptation scolaire soit de répondre aux besoins de chacun des élèves, la classe spéciale homogène est de moins en moins présente au profit de la classe hétérogène (MELS, 2009).

À ce propos, il semble important de souligner que la réussite de tous les élèves en difficulté implique un changement dans les perceptions de la réussite éducative. En effet, selon le ministère de l'Éducation (MELS, 1999), il s'agit d'accepter que cette réussite soit envisagée différemment selon les capacités des élèves. Par ailleurs, celle-ci sera définie de façon plus large : « la réussite c'est l'obtention de résultats observables, mesurables et reconnus qui rendent compte de l'évolution de l'élève, des progrès continus enregistrés » (MELS, 1999, p. 17). Malgré tout, la réussite éducative se concrétise par l'obtention du diplôme d'études secondaire (DES). Dès lors, dans les différents documents d'analyse de parcours des élèves en difficulté, la réussite est mesurée selon leur obtention du DES ou selon la poursuite de leur parcours scolaire à la formation professionnelle (MELS, 2006a). Dans sa lutte contre le décrochage et pour la réussite scolaire, le ministère de l'Éducation a instauré des voies d'action pour soutenir la persévérance et la réussite. Par conséquent, le gouvernement vise un taux de diplomation de 80 % dès 2020 et a créé treize voies d'action qui visent l'atteinte de cet objectif (MEES, 2016a). Parmi ces voies, la plupart se rapportent à la diplomation des élèves, et ce, de diverses façons. En effet, plusieurs voies concernent les interventions et l'accompagnement des élèves en difficultés pour les mener à l'obtention d'un diplôme ou d'une qualification (voies 4, 5, 6, 7, 8, 11 et 12) alors que d'autres renvoient aux efforts que doivent fournir les différents acteurs comme les commissions scolaires (voies 1, 2 et 3). Finalement, les dernières voies d'actions (9 et 10) font appel à l'implication du milieu communautaire ainsi qu'à la création d'activités parascolaires pour maintenir les élèves du secondaire à l'école (MEES, 2016b). Il est intéressant de noter que, parmi les différentes actions proposées, la référence à la « nature » des apprentissages est presque absente. Il s'agit plutôt de réussite à des examens puisque ce sont les bulletins ainsi que les résultats aux épreuves standardisées qui sont des indicateurs de performance des écoles (Cowley, 2014 ; MEES, 2016c). Ainsi, il semblerait que l'obtention du diplôme prime sur la définition de la réussite que met de l'avant le ministère, selon laquelle il faut prendre en considération l'évolution de l'élève ainsi que ses capacités dans son cheminement.

Une analyse des cheminements d'élèves en difficulté montre que les élèves débutant leur secondaire en classe ordinaire sont plus nombreux à obtenir un diplôme que ceux qui le débutent dans une classe de cheminement particulier (MELS, 2006a). En effet, un élève en difficulté d'apprentissage qui débute sa scolarité au secondaire en classe ordinaire à 12 ans aurait 5 fois plus de chance d'obtenir un diplôme que celui qui le débute en classe de cheminement particulier. La classe de cheminement particulier a pour objectif d'aider les élèves ayant des difficultés à rattraper leur retard et celle-ci vise à réintégrer les élèves au secteur régulier. Il s'agit donc d'un type de classe hétérogène qui accueille des élèves ayant des difficultés, des besoins et des défis différents. Toujours selon cette étude, la moitié des élèves commençant leur secondaire dans ce type de classe accède à la classe ordinaire et 68 % des élèves de 12 ans qui débutent leur secondaire en classe ordinaire arrivent à s'y maintenir. Toutefois, cette étude ne considère pas tous les élèves de l'adaptation scolaire puisqu'elle se centre sur les élèves en difficulté d'adaptation et d'apprentissage selon deux regroupements de classe seulement (difficulté légère et grave d'apprentissage, déficience intellectuelle légère et trouble de comportement). Il est donc difficile de savoir quel est le cheminement de l'ensemble des élèves HDAA au secondaire.

Il semblerait donc, au secondaire, que la présence de la classe spéciale hétérogène prévale sur l'intégration en classe ordinaire où, d'ailleurs, la réussite y est plus accessible selon les données disponibles (MELS, 2006a). Les enseignants de l'adaptation scolaire enseignent donc de plus en plus à des élèves aux profils assez divers au sein d'une même classe. En lien avec les objectifs de la politique de l'adaptation scolaire, ils doivent ainsi favoriser la réussite de tous et adapter leur enseignement en fonction des besoins et des capacités de chaque élève. Parmi les multiples facteurs qui pourraient influencer le taux d'intégration des élèves en difficulté dans les classes régulières (les capacités cognitives des élèves, les modèles pédagogiques, les spécificités du milieu, etc.), il en est un qui est souvent négligé au profit d'une analyse centrée sur les caractéristiques spécifiques des élèves et de leurs apprentissages : l'analyse des pratiques d'enseignement (Roiné, 2009 ; Giroux, 2014).

1.3 L'enseignement auprès d'élèves en difficulté

Au cours des dernières années, les études portant sur l'enseignement auprès d'élèves en difficulté ont connu un essor très important en particulier aux États-Unis. Ces études sont principalement inspirées du champ de la psychologie cognitive et ont comme objectif de créer des modèles d'enseignement adaptés aux caractéristiques des élèves. Il est par ailleurs important de considérer que les orientations gouvernementales ont une influence sur la recherche et par conséquent, sur les pratiques enseignantes (Giroux, 2014). Il importe donc de décrire les principales orientations concernant les interventions en éducation spécialisée autant sur le plan des institutions influentes que sur le plan des recommandations issues de la recherche pour mieux cerner les caractéristiques essentielles de ces pratiques enseignantes.

1.3.1 Les interventions proposées par les hautes instances

En réponse à l'hétérogénéité croissante des classes et puisque les enseignants de l'adaptation scolaire doivent intervenir principalement dans la langue d'enseignement ainsi qu'en mathématiques auprès d'une population d'élèves en difficulté, le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur qui, au départ, n'avait pas proposé d'interventions spécifiques aux caractéristiques des élèves, n'a pas eu d'autre choix que d'en suggérer. En effet, il s'écoule presque dix ans entre la parution de la politique de l'adaptation scolaire (1999) et la proposition d'intervention spécifiques (2007). C'est donc par l'entremise de la différenciation pédagogique qu'est proposé un renouvellement des pratiques enseignantes (MELS, 2007). La différenciation pédagogique telle que la définit la politique de l'adaptation scolaire (MELS, 2006b, p.30 ; MELS, 2007, p.6) est la capacité de l'enseignant à tenir compte des différences individuelles des élèves dans leur enseignement ainsi que dans l'évaluation. Il faut noter que la définition donnée ne caractérise pas ce type de pratique en tant qu'activité collective partagée (soutenue par des règles, des principes et des accords), mais elle semble plutôt reposer sur les « capacités » individuelles des enseignants.

Ainsi, il est attendu que l'enseignant qui différencie adapte les modalités de travail selon les capacités et les difficultés de ses élèves pour qu'ils puissent évoluer au cours du cycle dans le développement de leurs compétences. Dans le cadre de la différenciation pédagogique, le gouvernement propose également la flexibilité pédagogique qui vise la participation de tous les élèves aux activités ayant lieu dans le cadre de la classe, des mesures d'adaptation qui ont pour but de réduire les obstacles que les élèves rencontrent et finalement les modifications qui entrainent la réduction des attentes et des exigences en regard du programme de formation de l'école québécoise (MELS, 2014). En ce sens, la différenciation est un acte d'adaptation qui se transfère d'une discipline à une autre.

C'est à l'aide de documents d'accompagnement à l'intention des enseignants que certaines provinces telles que le Québec, l'Ontario et le Manitoba font de la sensibilisation concernant l'enseignement différencié, en plus de certains professionnels, tels que des psychologues au sein de commissions scolaires, qui créeront des guides pour le personnel enseignant (Éducation Manitoba, 2004 ; FSE, 2013 ; MELS, 2014 ; ministère de l'Éducation de l'Ontario, s.d et Pelletier et Léger, 2004). Dans plusieurs de ces documents (FSE, 2013; ministère de l'Éducation de l'Ontario, s.d ; Pelletier et Léger, 2004), la mise en application de la différenciation pédagogique se réalise de façon générique et à quelques reprises de façon spécifique selon les disciplines. Puisque même dans les documents d'accompagnement des différents ministères les interventions proposées ne sont que très génériques, il est possible de constater qu'encore une fois, l'adaptation semble reposer sur « l'inventivité » des enseignants.

En général, pour favoriser la réussite, il est proposé aux enseignants de :

- Fractionner les tâches longues en plusieurs petites tâches. (Pelletier et Léger, 2004, p. 8) ;
- Utiliser des exemples de la vie quotidienne. (Pelletier et Léger, 2004, p. 37) ;
- Morceler le travail ; l'effort à y accorder semblera moins exigeant (ministère de l'Éducation de l'Ontario, s.d, p. 11) ;
- Aller du concret vers l'abstrait ; Favoriser la manipulation d'objets concrets ; revenir au concret lorsqu'il y a un problème de compréhension ; Avoir recours à des exemples qui collent au vécu des adolescentes et des adolescents ; Utiliser des dessins, des illustrations, des analogies ; Demander aux élèves de trouver des exemples, d'établir des comparaisons, de fabriquer du matériel concret (ministère de l'Éducation de l'Ontario, s.d, p. 21) ;
- [Offrir du] matériel didactique à manipuler afin de mieux comprendre les concepts abstraits et d'avoir un support visuel pour les procédures (FSE, 2013, p.8).

Il est suggéré, pour l'ensemble des disciplines, que les activités pédagogiques aillent du concret vers l'abstrait et que l'enseignant s'assure que l'élève soit engagé cognitivement dans la tâche (MELS, 2014).

> En ce sens, il convient de vérifier l'engagement cognitif de l'élève : en tout temps, avec le soutien de ces mesures, ce dernier accomplit les actions cognitives et métacognitives qui lui permettent de réaliser les apprentissages prévus ou d'en faire la démonstration de façon autonome. (MELS, 2014, p. 4)

Une grande importance est également accordée à la compréhension du développement des enfants et des adolescents, et c'est notamment par l'enseignement et l'usage de stratégies métacognitives qu'il est conseillé d'agir (ministère de l'Éducation de l'Ontario, s.d).

> La différenciation pédagogique vise à permettre à l'élève de réaliser son plein potentiel en lui présentant des défis d'apprentissage à sa mesure. L'étude du cerveau a permis de constater qu'un individu apprend mieux si on lui présente une tâche d'apprentissage qui dépasse ses compétences actuelles, mais qu'il peut tout de même réaliser. (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, s.d, p.21)

De surcroît, l'Association des Orthopédagogues du Québec (ADOQ, 2003) souscrit à ces idées en stipulant que les interventions spécialisées doivent se baser sur les processus métacognitifs et cognitifs qui empêchent le développement dans les processus d'apprentissage des élèves. En effet, la plupart de ces documents s'inspirent des résultats de recherches qui adoptent une hypothèse cognitiviste sur l'universalité des opérations de la pensée et sur l'existence de mécanismes de production de connaissances transférables d'un domaine de savoir à un autre. Comme Sarrazy (2015) le remarque, certains cognitivistes confondent le modèle et la réalité et considèrent que la pensée est régulée par (et non modélisée par) un programme organisé dans un ensemble de processus élémentaires de traitement de l'information. Les difficultés d'apprentissage des mathématiques dans ce contexte sont interprétées comme des « défauts » dans certains des processus élémentaires de traitement de l'information. Parmi ces « défauts » du fonctionnement cognitif, les difficultés d'abstraction sont fréquemment identifiées comme influençant grandement l'apprentissage (FSE, 2013; ministère de l'Éducation de l'Ontario, s.d ; Pelletier et Léger, 2004). Cette difficulté est souvent nommée, mais rarement définie dans les guides du ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur. Toutefois, il est possible d'en retrouver une définition dans un guide créé par une commission scolaire :

> Difficultés d'abstraction : Difficulté à comprendre l'information dans le contexte où elle est utilisée, à inférer un sens, à généraliser, confond les sens des mots qui en ont plusieurs, difficultés à comprendre les plaisanteries. Ces difficultés peuvent se répercuter en mathématiques et en sciences. Cette personne a une pensée très concrète, elle ne peut voir les aspects sous-jacents d'un problème et ainsi ne peut pas distinguer ce qui est utile de ce qui ne l'est pas, l'essentiel du superflu, et ce qui est approprié de ce qui ne l'est pas. Elle aborde chaque événement comme s'il était nouveau et isolé de son propre ensemble de règles. Cela peut mener à une difficulté de flexibilité mentale. (Pelletier et Léger, 2004, p. 36)

1.3.2 Les interventions spécifiques aux caractéristiques des élèves et les modèles pédagogiques adaptés issus des recherches

En continuité avec les suggestions des différentes instances, divers modèles pédagogiques, autres que la différenciation pédagogique, ont vu le jour pour combler le besoin des enseignants de l'adaptation scolaire quant à leur devoir d'adapter leurs interventions selon les spécificités des élèves. En effet, au cours des dernières années, un grand nombre de recherches concernant les apprentissages, basées sur des modèles cognitivistes, ont tenté de mettre en évidence les pratiques d'enseignement efficaces permettant d'optimiser les apprentissages et ainsi réduire les difficultés des élèves (Bissonnette, Richard, Gauthier et Bouchard, 2010 ; Rosenshine, 2012).

Dans le cadre d'une méga-analyse, Bissonnette, Richard, Gauthier et Bouchard (2010) ont voulu identifier les pratiques pédagogiques les plus efficaces pour accroître la « performance scolaire » (p.2) d'élèves en difficulté. Bien que l'analyse porte essentiellement sur les pratiques d'enseignement efficaces pour le primaire, plusieurs des méta-analyses retenues concernent également les pratiques d'enseignement au secondaire. Selon ces auteurs, il faut agir d'abord en prévention chez les élèves de niveau primaire pour éviter le décrochage scolaire et par le fait même augmenter le taux de diplomation. Sur les onze méta-analyses choisies, seulement trois concernent les stratégies d'enseignement des mathématiques. Parmi les différentes modalités pédagogiques expérimentées, il est possible de constater que les trois méta-analyses en viennent sensiblement aux mêmes résultats. En conclusion, cette méga-analyse promeut l'enseignement directif/explicite des règles et des concepts mathématiques qui semble être la meilleure modalité d'enseignement à adopter avec des élèves en difficulté. Dans une moindre mesure, les résultats démontrent que l'enseignement réciproque qui mise sur un enseignement par les pairs peut être favorable pour l'enseignement des apprentissages fondamentaux en mathématiques. De plus, les effets moindres des interventions inspirées de la pédagogie constructiviste amènent les auteurs à mettre en garde le lecteur quant aux orientations de la réforme qui promeut des modalités d'enseignement qui s'en inspirent telles que la pédagogie par projet. Ainsi, il est conseillé d'adopter une pédagogie explicite pour favoriser la réussite des élèves en difficulté et ainsi améliorer le taux de diplomation.

Discutant ce type de méga et méta-analyse, Giroux (2014) met de l'avant que ces études vont bien souvent généraliser l'effet d'une intervention spécifique à un savoir donné (l'enseignement d'un algorithme de calcul) à l'ensemble des mathématiques. C'est donc à partir d'une intervention d'une durée limitée et, la plupart du temps, liée à l'apprentissage du calcul arithmétique que sera validée l'efficacité d'un type d'enseignement, et ce, pour l'ensemble de la discipline. D'ailleurs, la déclaration de l'efficacité de certaines modalités d'enseignement semble reposer sur la « réussite » des élèves à une tâche quelconque qui, dans le cadre de ces méta et méga-analyses, n'est ni nommée ni spécifiée. Par ailleurs, les auteurs ne mentionnent jamais quelles sont les caractéristiques des instruments utilisés pour mesurer l'effet de l'intervention. En somme, ce qui semble importer pour qualifier une modalité d'enseignement comme étant efficace est le fait que les élèves aient réussi la tâche sans questionner la « nature » et la « qualité » des objets mathématiques appris.

En lien avec les travaux de Bissonnette, Richard, Gauthier et Bouchard (2010), Rosenshine (2012) met en lumière les stratégies d'enseignement les plus efficaces basées sur des principes phares de la recherche en psychologie cognitive. Les principales stratégies proposées aux enseignants sont de découper les apprentissages pour faire de courtes présentations en donnant plusieurs exemples concrets, de guider les élèves en leur montrant comment résoudre des problèmes, de poser beaucoup de questions pour valider la compréhension des élèves et de prendre plus de temps pour les explications. En bref, il s'agit de modalités d'enseignement faisant partie de l'enseignement explicite, ce qui rejoint les travaux récemment mentionnés. À cet égard, il est possible de retrouver des infographies qui vulgarisent les principales conclusions de ces travaux et celles-ci sont largement diffusées sur des réseaux d'informations destinées aux intervenants des milieux éducatifs (Annexe A).

Certains chercheurs comme Goupil (2014), en plus de promouvoir l'enseignement direct/explicite, ont également assigné à chaque catégorie d'élèves des interventions spécifiques à leurs caractéristiques cognitives en se servant des conclusions des recherches récentes. C'est à l'aide de stratégies d'apprentissage comme la métacognition, par l'enseignement direct et par l'enseignement réciproque qu'il est proposé d'intervenir, tout comme le mentionnent les divers documents d'accompagnement des gouvernements. Ces différentes stratégies d'apprentissage sont décrites principalement pour le français et les mathématiques, et ce, indépendamment de la spécificité de ces disciplines. Elles visent l'organisation et la planification de la tâche ainsi que la révision, en proposant des questions pour réguler les stratégies ainsi que les actions des élèves. La seule distinction effectuée entre la langue d'enseignement et les mathématiques est l'ajout d'un dessin ainsi que l'ajout de questionnements métacognitifs concernant les calculs et l'estimation. Par exemple, une stratégie de résolution de problème en mathématiques compte 7 étapes (lire, reformuler, visualiser, faire une hypothèse, estimer, calculer, vérifier) et pour chacune de ces étapes, trois sous-étapes sont proposées. La première, « dire », se veut l'exécution de l'étape principale. La seconde, « demander », est la réalisation de l'autoquestionnement qui permet à l'élève de réguler ses actions « quelle est la question ? Qu'est-ce que je cherche ? » (*ibid*, p. 98) et la dernière, « vérifier », permet de valider le passage à l'étape suivante « Est-ce que toutes les opérations ont été faites dans le bon ordre ? » (*ibid*, p. 98). Ces étapes agissent donc à titre de procédure qui doit être enseignée et suivie par les élèves.

Il est intéressant de constater que les stratégies d'enseignement ainsi que les stratégies à enseigner aux élèves sont plus nombreuses pour la langue d'enseignement que pour les mathématiques et que celles-ci ne concernent pas la spécificité des savoirs, mais plutôt l'organisation et la marche à suivre d'une tâche quelconque. En effet, les modèles d'enseignement se veulent transférables d'une discipline à une autre sans se questionner sur l'impact possible de la spécificité des objets de savoirs dans ce processus de transfert. D'ailleurs, l'étude des difficultés en mathématiques est moins présente dans les écrits scientifiques que celle des difficultés liées à la langue d'enseignement. Certains auteurs, comme Goupil (2014), interprètent cela comme étant dû au fait que lorsqu'un élève a de grandes difficultés dans les deux matières principales (le français et les mathématiques), les enseignants vont privilégier une intervention en lien avec les compétences de la langue d'enseignement.

1.3.3 La formation des enseignants de l'adaptation scolaire

En ce qui concerne les enseignants de l'adaptation scolaire, la formation universitaire leur permet d'acquérir des savoirs ainsi que des savoir-faire qui sont principalement relatifs à la population d'élèves HDAA avec qui ils travailleront tout au long de leur carrière. Au terme de leur parcours au baccalauréat, ces futurs enseignants doivent acquérir les mêmes douze compétences que leurs collègues en éducation, tous programmes confondus. Cependant, ceux-ci doivent également être en mesure de mettre en œuvre des interventions pédagogiques adaptées aux élèves, peu importe leurs spécificités, et ce, principalement en langue d'enseignement et en mathématiques (MELS, 2001).

Parmi les cours à suivre dans leur cursus de 120 crédits, une trentaine de ces crédits sont alloués à des cours concernant les spécificités et des interventions à prioriser auprès d'élèves HDAA (UShebrooke, 2016 ; UQAM, 2016a ; UdeM, 2016). Le nombre de cours ainsi que la typologie changent en fonction de l'université, mais il est possible de constater que mis à part le grand nombre de crédits alloués aux stages, la grande majorité des contenus de formation est en lien avec les spécificités de ces élèves. Bien que les contenus varient d'une université à l'autre, Martinez (1999) soulevait qu'une grande partie de la formation des maîtres en enseignement en adaptation scolaire portait sur des contenus provenant de la psychologie cognitive. Il n'est alors pas étonnant que les tâches et préoccupations des enseignants en activité se situent plus sur le plan des difficultés des élèves que sur le plan des contenus à enseigner (Giroux, 1999). D'ailleurs, l'apport de la didactique dans le cursus en enseignement en adaptation scolaire et sociale est souvent remis en question (Giroux, 1999). Quant aux cours concernant les contenus et savoirs propres aux disciplines dont ils sont porteurs, il y en a peu. Il s'agit là de la différence majeure entre la formation des enseignants de l'adaptation scolaire et ceux d'une discipline spécifique. Alors que les futurs enseignants de mathématiques doivent, en plus des cours de didactique, suivre des cours portant sur les contenus spécifiques à enseigner (un cours portant sur l'algèbre, par exemple), ceux de l'adaptation scolaire n'en ont aucun (UQAM, 2016b).

Somme toute, ces enseignants sont des généralistes qui, à la suite de leur diplomation, pourront enseigner toutes les disciplines scolaires à un même groupe-classe ou parfois une à deux disciplines à plusieurs groupes-classes, en fonction de l'école et de la commission scolaire, tout en adaptant leurs interventions aux besoins de leurs élèves et en favorisant la réussite de tous (sans tenir compte de la spécificité des savoirs, comme le suggère le Ministère de l'Éducation).

1.4 Finalités de l'enseignement : À la recherche du savoir perdu

Les dispositifs d'enseignement sont largement déterminés par les représentations qu'ont les enseignants de leur mission, mais également celles qu'ils ont de leurs élèves. Cependant, la régularité de représentations met en évidence l'influence des orientations des institutions (Chevallard, 1991 ; Roiné, 2005 ; Sarrazy et Roiné, 2006). Compte tenu des orientations partagées que semblent adopter le ministère de l'Éducation, les chercheurs s'inspirant de travaux de la psychologie cognitive et les programmes de formation, il est possible de constater la prégnance des idéologies mentalistes en enseignement[1] et plus particulièrement en enseignement auprès d'une population d'élèves en difficulté d'apprentissage. Comme il a été mentionné (voir *supra* p. 6), les

[1] C'est-à-dire que l'apprentissage est considéré comme une appropriation individuelle et non comme une démarche collective, ce qui entraîne ainsi des recommandations orientées sur l'individualisation de l'enseignement et le traitement des capacités cognitives des élèves (Roiné, 2015).

divers documents portent l'empreinte du cadre médical et du cadre psychologique qui conçoivent les difficultés d'apprentissage strictement en termes de caractéristiques cognitives des élèves et des défauts dans les processus cognitifs mis en place. Il n'est pas surprenant, en conséquence, que les interventions proposées se basent principalement sur le développement d'habiletés métacognitives et sur l'enseignement explicite des règles compte tenu du fait que, par le modèle adopté, toute acquisition de savoir serait réductible à des mécanismes de traitement de l'information, voire à un ensemble de règles.

1.4.1 L'enseignement des mathématiques selon les prescriptions : un parcours appauvri pour des élèves ayant des difficultés d'abstraction

Malgré les différents changements d'orientation et les tentatives de réduire les inégalités scolaires depuis plusieurs années, ces inégalités persistent. En effet, les travaux dans l'espace francophone ont permis de montrer que les élèves de l'adaptation scolaire ne vivent pas le même historique scolaire que ceux des classes ordinaires (Barallobres, 2017 ; Bloch, 2008 ; Bloch et Salin, 2004 ; Conne, 2003 ; Conne, Favre et Giroux, 2006 ; Favre, 1997 ; Giroux, 2013 ; Toullec-Théry, 2006 ; Roiné, 2009, 2010). Ceci serait en lien avec certains phénomènes didactiques propres à l'enseignement des mathématiques dans les classes spéciales qui ont été identifiés par les chercheurs ; en effet, ils ont constaté qu'il y avait une prévalence de la règle au détriment de la compréhension, ce qui conduit à une pré-algorithmisation des savoirs en jeu (Bloch, 2008 ; Bloch et Salin, 2004 ; Giroux, René de Cotret, 2001). Il semble également y avoir un surinvestissement de certains savoirs identifiés comme emblématiques (les algorithmes de calcul) au profit des autres savoirs (la géométrie, par exemple) (Conne, 2003 ; Conne, Favre et Giroux, 2006). Enfin, pour rendre accessibles les savoirs aux élèves et surmonter les difficultés et en tenant compte des stratégies promues et récemment mentionnées, les enseignants vont bien souvent morceler les tâches et en choisir certaines qui sont axées sur des contenus en lien avec la vie quotidienne, visant ainsi la concrétisation des savoirs (Barallobres, 2009 ;

Giroux, 2013 ; Roiné, 2010) ; ce qui est très problématique, surtout au secondaire, compte tenu du fait que plusieurs savoirs mathématiques à enseigner ne prennent sens qu'à l'intérieur même de la discipline.

Plusieurs de ces phénomènes didactiques découlent bien souvent de l'échec potentiel anticipé par les enseignants (Favre, 2003) et du système qui les amène à modifier leurs pratiques (Roiné, 2014). Dans le cas spécifique des difficultés d'abstraction, une difficulté qui semble rémanente au sein des circulaires ministérielles évoquées plus haut, il semble y avoir une injonction visant la réduction de la complexité des tâches par le morcellement, par exemple. En effet, ces tentatives et cette logique d'adaptation (Giroux, 2013) sont la résultante d'injonctions largement promues qui visent la réponse aux besoins de chaque élève et contribuent à un amoindrissement des savoirs. Ces phénomènes font en sorte que les élèves en difficulté d'apprentissage vivent un parcours différencié, appauvri et inégalitaire de par les propositions didactiques et les interactions stigmatisantes qui font partie de leur cheminement au sein de l'institution scolaire (Roiné, 2009, 2010, 2015, 2016).

De plus, la centration sur la « réussite » et la « performance » des élèves, selon une perspective normative issue directement du ministère de l'Éducation, ont un impact sur la nature des pratiques d'enseignement et sur les recherches produites en éducation. En effet, rappelons que dans la méga-analyse précédemment citée, la définition même de pratique efficace est en rapport avec la réussite et la performance scolaires (voir *supra*, p. 14) et prend les objets de savoir énoncés dans les programmes scolaires comme étant des objets « transparents », rattrapables par un acte langagier (l'explicitation) et tout prêts à être « explicités » et « transférés » vers la tête des élèves. Cette position fait fi de toutes les analyses philosophiques et épistémologiques mettant en évidence que la constitution des objets mathématiques et des représentations qu'un sujet peut en avoir sont des processus qui dépassent largement leur description langagière[2].

1.4.2 La didactique des mathématiques et de l'anthropo-didactique : un paradigme concurrent

Comme il a été mentionné, les modèles pédagogiques qui s'inspirent de la psychologie cognitive entrevoient les difficultés comme étant exclusivement inhérentes aux spécificités cognitives des élèves, minimisant le rôle que la nature spécifique des savoirs peut avoir dans l'interprétation des difficultés rencontrées par ceux-ci. Puisqu'ils se centrent sur l'apprentissage, ils laissent notamment pour compte les phénomènes liés à l'enseignement caractérisant la relation didactique (relation maitre-élève-savoir) au sein de laquelle l'élève acquiert des savoirs spécifiques (Giroux, 1999, 2014 ; Roiné, 2009 ; Sarrazy, 2015). D'ailleurs, la centration sur les caractéristiques des élèves, l'illusion de transparence des savoirs sous laquelle la psychologie cognitive construit ses propos, ainsi que la centration sur la réussite comme indicatif du progrès des élèves amènent à un inversement épistémologique (Bardini, 2003) ou historique (Chevallard, 2009) qui fait en sorte que l'enseignement des mathématiques est réduit à la présentation des règles avant la présentation de problèmes. En fait, cette inversion pourrait être interprétée comme une résultante de l'influence des modèles pédagogiques adaptés qui favorisent, entre autres, un enseignement explicite des « concepts ».

La didactique des mathématiques adopte une hypothèse épistémologique fondamentale : la nécessité de mettre à l'avant des problèmes qui feront naître les questionnements et les raisons d'être des savoirs mathématiques ; la synthèse (la présentation de concepts), quant à elle, est ce qui permet d'organiser les connaissances mises en acte à la suite de l'étude des problèmes qui les motivent.

---

[2] Cet aspect sera particulièrement traité dans le cadre du chapitre II.

L'organisation des pratiques d'enseignement des mathématiques liées aux modèles mentalistes est fortement influencée par les caractéristiques cognitives des élèves plutôt que sur une analyse des conditions didactiques dans lesquelles ces difficultés sont apparues (Giroux, 2014), ce qui rend les enseignants « aveugles aux conditions didactiques nécessaires pour permettre aux élèves la compréhension de l'usage des savoirs mathématiques enseignés » (Roiné, 2009, p.255). En effet, selon plusieurs chercheurs (Giroux, 2014 ; Sarrazy, 2002a ; Roiné, 2009), en voulant agir sur les processus cognitifs des élèves, la situation didactique par laquelle l'élève interagit avec le milieu didactique dans le but d'acquérir un savoir spécifique est négligée. Concevoir les difficultés d'apprentissage comme étant le produit des spécificités de l'élève, c'est écarter le fait que les spécificités des savoirs mathématiques peuvent générer d'elles-mêmes des difficultés (Fischer, 2009) et que les enseignants font également partie du système didactique. Ainsi, l'apport de la didactique des mathématiques devient fondamental pour mieux interpréter les difficultés liées aux savoirs spécifiques et pour replacer les finalités de l'enseignement :

> Une des fonctions de la didactique pourrait être alors [...] de contribuer à mettre un frein à un processus qui consiste à transformer le savoir en algorithmes utilisables par des robots ou des humains sous-employés et à diminuer la part de réflexion noble dans toutes les activités humaines pour en faire la dévolution à quelques-uns. Pour sacrifier au dieu de la soi-disant efficacité, l'enseignement prête son concours aujourd'hui à la réduction algorithmique et à la démathématisation. J'espère profondément que la didactique pourra combattre cette dépossession et cette déshumanisation. (Brousseau, 1989, p.68)

Plus récemment, le modèle anthropo-didactique, qui se situe au croisement de l'anthropologie et de la didactique, enrichit l'analyse didactique et propose un renouvellement de l'approche pour mieux comprendre les pratiques d'enseignement (Sarrazy, 2001). Selon ce modèle développé par Sarrazy (2002a), les situations d'enseignement sont déterminées à la fois par les conditions didactiques et par les conditions non-didactiques (des arrière-plans), c'est-à-dire que les situations sont interprétée à partir des habitudes et manières de faire de l'enseignant ou de l'élève par rapport au savoir en jeu et à la nature des situations didactiques, mais également à partir des croyances, des désirs, des valeurs sociales et des idéologies de l'enseignant, de l'élève et des institutions. Il s'agit donc de considérer la dimension anthropologique de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1989) et plus particulièrement, les *habitus épistémologiques*[3] qui influencent la sensibilité au contrat didactique (Sarrazy, 1997). L'analyse des conditions dans lesquelles les savoirs sont transmis permet aussi de mettre en lumière les distributions inégales des sensibilités en lien avec le savoir enseigné. Cette approche a notamment permis de comprendre que la variabilité des réponses des élèves dans une situation peut être interprétée d'une part comme différentes sensibilités au contrat didactique s'expliquant par l'arrière-plan scolaire, familial et le statut scolaire de l'élève, d'autre part que les interactions au sein de la classe assurent des fonctions didactiques et s'expliquent à travers les idéologies des enseignants (Sarrazy, 2001). De plus, certaines analyses effectuées en France ont permis de montrer que la prégnance des idéologies psychologisantes a une influence sur les perceptions des enseignants faisant en sorte qu'ils accordent moins d'importance aux usages sociaux des savoirs pour se concentrer sur une analyse des processus cognitifs des élèves (Roiné, 2009).

1.5 L'enseignement des mathématiques au secondaire et les difficultés des élèves

Au secondaire, c'est l'algèbre qui occupe une place prépondérante dans le programme de formation (MELS, 2006b) et celle-ci est réputée difficile autant chez les élèves du secondaire (Kieran, 1992 ; Kieran et Sfard 1999 ; MacGregor et Stacey, 1997 ; Radford et Grenier, 1996) que ceux de l'adaptation scolaire.

D'un point de vue didactique, Sierpinska (2000) signale déjà la difficulté des élèves du secondaire, avec le peu d'expérience qu'ils ont, d'abstraire et de généraliser leurs

[3] Sarrazy (1997) définit les habitus épistémologiques, entre autres, comme les différentes valeurs qui influencent les pratiques des enseignants et celles qui orientent les styles d'éducation familiale.

méthodes particulières de résolution de problèmes jusqu'à en faire une méthodologie. Étant un outil de généralisation et d'unification des connaissances mathématiques, il faudrait que les élèves aient à leur disposition ces connaissances, avant qu'ils puissent employer cet outil.

La question de la nature abstraite des objets algébriques est toujours mise de l'avant, lorsqu'il s'agit d'interpréter les difficultés que les élèves rencontrent. En fait, le Programme de Formation de l'École québécoise (PFEQ) (MELS, 2006b, 2006c) promeut le développement des capacités d'abstraction et de généralisation en mathématiques : la section du domaine de la mathématique est imprégnée par ces deux concepts qui reviennent à plus de 68 reprises. Selon le MELS (2006b, 2006c), les objets mathématiques sont pour la grande majorité abstraits. À ce propos, il est précisé à de multiples endroits que pour s'approprier ces concepts abstraits, l'élève devra acquérir un niveau d'abstraction adéquat pour résoudre des problèmes.

Pour enrayer les « difficultés d'abstraction » que pose l'apprentissage des mathématiques, et en particulier pour le secondaire, l'algèbre, plusieurs guides et politiques (FSE, 2013; Goupil, 2014 ; ministère de l'Éducation de l'Ontario, s.d. ; Pelletier et Léger, 2004) proposent de concrétiser les notions à apprendre et de miser sur la manipulation d'objets matériels. Il est important de rappeler que dans les documents de ce ministère, les « difficultés d'abstraction » sont plutôt associées à des caractéristiques spécifiques des élèves.

Un certain discours, répandu en adaptation scolaire, stipule que les difficultés d'abstraction des élèves identifiés en difficulté sont un obstacle majeur à l'apprentissage des mathématiques et particulièrement à l'apprentissage de l'algèbre (FSE, 2013; Goupil, 2014 ; ministère de l'Éducation de l'Ontario, s. d ; Pelletier et Léger, 2004 ; Radford, Demers et Miranda, 2009).

La visée de ce chapitre est de mettre de l'avant que le paradigme intégratif, le discours politique et les pratiques prescrites en ce qui concerne les difficultés des élèves en mathématiques semblent privilégier une entrée par les caractéristiques des élèves sans tenir compte du savoir enseigné. Plus précisément, les pratiques auprès de ces élèves semblent se concentrer sur **leurs** « difficultés d'abstraction », c'est-à-dire qu'il y a une absence de questionnement quant à la signification de l'expression « difficultés d'abstraction en mathématiques ».

1.5.1 Objectif général de recherche

L'absence de définition et de précisions à propos de l'abstraction entraîne certaines questions : De quoi s'agit-il lorsqu'il est mention d'abstraction ? Que doit-on comprendre par « abstraction » et par « difficulté d'abstraction » ? Si le langage est aussi abstrait que les mathématiques, pourquoi des élèves n'ayant pas de problèmes de langage peuvent avoir des difficultés d'abstraction, et ce, seulement en mathématiques ? S'il y a une distinction à faire entre le langage et les mathématiques, pourquoi donc les stratégies proposées, inspirées des travaux provenant de la psychologie n'en font pas la distinction ?

Cette recherche vise ainsi à examiner ce que signifie l'expression « difficultés d'abstraction en mathématiques » dans les discours circulant en éducation au Québec et son éventuel impact sur les propositions d'enseignement en classes d'adaptation scolaire.

CHAPITRE II

LES FONDEMENTS

PARTIE I

LES DISCOURS ET L'ÉDUCATION

Dans le cadre de la partie I du chapitre qui aborde les fondements de cette recherche, la notion de discours, telle qu'elle est entendue dans ce projet, est précisée. Puisqu'il s'agit d'une notion importante au sein de l'objectif de recherche, il importe de définir en quoi consiste le discours, ce qui lui est sous-jacent et ce qui en résulte.

2.1 La notion de discours et de discours noosphérien en éducation

La notion de discours est chargée d'enjeux et est instable, comme le remarque Maingueneau (2014). Ainsi, il importe de spécifier ce qui est entendu par « discours » au sein de ce projet. En ce sens, le terme discours ne renvoie pas nécessairement à une allocution effectuée devant un public ni à un enchaînement de phrases, mais à une action prise en charge par un sujet ou un groupe, régie par des normes, située dans un contexte et construite socialement. Il peut ainsi être considéré dans sa forme verbale, non-verbale et écrite. Dans le cadre de cette recherche, les discours sont considérés comme existant au-delà des textes qui les composent (Maingueneau, 2014).

Si Reboul (1984) considère et définit le discours pédagogique comme étant l'ensemble des discours portant sur l'éducation, le présent projet priorise le terme discours noosphérien, puisqu'une distinction est établie entre les différents discours qui concernent la noosphère de l'éducation (pédagogique, institutionnel, scientifique, syndical et sociologique) (Roiné, 2009, 2014, 2015).

Le terme de noosphère a été introduit pour la première fois, en didactique, par Chevallard (1991) et désigne un espace dans lequel s'effectue l'interaction entre le système d'enseignement et la société. Pour Sarrazy (2002a, p.11) :

> [L]a noosphère se rapporte à une partie de l'espace social dans laquelle les représentants du système d'enseignement (les membres des commissions ministérielles, les représentants de la société – parents d'élèves, spécialistes de la discipline, auteurs de manuels, des revues scientifiques ou militantes...) pensent, négocient, débattent de ce qu'il convient de faire ou de changer dans le système d'enseignement.

Ainsi, la noosphère peut être considérée comme l'ensemble des acteurs et des groupes qui sont concernés dans l'élaboration et la diffusion des savoirs dans un certain domaine (Brousseau, 1998) et est constituée de plusieurs discours, tels que le discours institutionnel, pédagogique, syndical, scientifique et sociologique (Roiné, 2015). Cette distinction rend compte de l'importance qui est accordée au contexte de production d'un discours ainsi qu'aux différents acteurs qui les véhiculent (leur visée, leurs valeurs, leurs normes, etc.). Par exemple, les finalités du discours institutionnel ne sont pas les mêmes que celles du discours syndical.

Le discours sur et à propos de l'éducation est fondamentalement un discours idéologique, car il véhicule des projets, des buts, des finalités, des valeurs poursuivis par une société donnée et ceux-ci ne sont pas objectifs (Bélanger, 2008 ; Charaudeau, 2005). En effet, « c'est à travers les valeurs véhiculées par l'idéologie ou les idéologies qu'un sous-système ou qu'une institution, comme celle de l'école, établit ses fondements, ses finalités, ses buts. » (Bélanger, 2008, p.29).

Le discours législatif, institutionnel se veut, dans son propos, un discours de vérité qui définit le système de valeurs au nom duquel doit s'établir le lien social qui rassemble *la diversité et la multiplicité* d'individus (Charaudeau, 2005).

> Ainsi, le discours écrit est en quelque sorte partie intégrante d'une discussion idéologique à grande échelle : il répond à quelque chose, il réfute, il confirme, il anticipe sur les réponses et objections potentielles, cherche un soutien, etc. (Bakhtine, 1977, p.136)

2.2 Fondements idéologiques et théoriques, une distinction à faire

Si la vérité est à partie liée avec le discours, c'est-à-dire que le discours vise à véhiculer une certaine représentation du monde, la connaissance que les acteurs en ont et les jugements qui sont portés sur celui-ci, il importe alors, selon Charaudeau (2005), de distinguer les deux types de savoirs qui sont engendrés par les discours. Dépendants du contexte dans lequel ils s'élaborent, les savoirs de connaissance et les savoirs de croyance constituent deux types de représentation (façons de voir, de discriminer et de classer) du monde. Cette façon de distinguer la croyance et la connaissance n'est pas nouvelle. Déjà, Platon dans le livre V de l'exposé de la *République* schématise quatre degrés de connaissance allant de l'opinion (imagination et croyance) à la science (pensée discursive et intellection pure). Bien que certaines questions soient soulevées à propos des différences entre les différents degrés de connaissances au sein de l'épistémologie de Platon[4], il n'en reste pas moins que la question des types de connaissance a fait et fait encore couler beaucoup d'encre au sein de différents champs

[4] Ces questions, bien qu'intéressantes à plusieurs égards, ne sont pas abordées au sein de ce mémoire. Pour plus d'informations, nous conseillons au lecteur de consulter le collectif *Philosophie de la connaissance* de Robert Nadeau (2016) et particulièrement du chapitre de Georges Leroux traitant de la théorie de la connaissance chez Platon.

et que du point de vue de la « vérité » de la « pensée pure », croyance et connaissance ne sont pas considérées comme des équivalents (Leroux, 2016).

Les savoirs de connaissances sont engendrés par des discours visant à expliquer le « pourquoi » et le « comment » des phénomènes qui nous entourent. Ils échappent à la singularité des individus et sont dépendants de la culture dans laquelle se produisent ces discours. Il s'agirait de raisons savantes à caractère véridique qui contribuent à la construire la connaissance du monde (Charaudeau, 2005). Les savoirs de croyances, quant à eux, ne portent pas sur la connaissance objective du monde, mais plutôt sur les valeurs qui y sont attribuées par les individus. Il s'agit d'une évaluation au terme de laquelle un individu détermine ses jugements à propos des faits du monde. Ces deux types de savoirs permettent ainsi d'établir une distinction entre ce que signifient théories et idéologies.

D'une part, les théories seraient constituées de savoirs de connaissance et sont caractérisées du fait que ce type de savoir est « ouvert », c'est-à-dire qu'il est réfutable et accepte la mise en cause et la critique. Ces discours sont organisés autour d'un noyau de certitude et sont articulés de façon raisonnée (Charaudeau, 2005). Au sens de Willett (1996), une théorie sert, entre autres, à définir, à expliquer, à comprendre des phénomènes ainsi qu'à poser de nouvelles questions à propos de ceux-ci afin de porter un jugement sur la réalité et ainsi prendre des décisions :

> Une théorie est une manière de concevoir et de percevoir les faits et d'organiser leur représentation. Elle sert à conceptualiser et à expliquer un ensemble d'observations systématiques relatives à des phénomènes et à des comportements complexes. (Willett, 1996, p. 6)

Une théorie semble ainsi plutôt référer à un ensemble logiquement organisé, comme le suggère Merton (1965), permettant non pas de révéler la vérité, mais de créer une réalité servant à expliquer « le réel » (Willet, 1996, p.6).

D'autre part, les idéologies renvoient à un ensemble de représentations sociales qui sont à la base de prises de position fondées sur des valeurs affectives et normatives échafaudées sur des croyances irréductibles et des connaissances qui sont considérées comme universelles et évidentes (Chabrol, 2004 ; Charaudeau, 2005).

Le terme idéologie peut prendre une valeur péjorative et conservatrice (conservation sociale) plutôt tournée vers le passé et qui contribue à une résistance au changement, mais il peut également être considéré de façon positive comme un précurseur à une approche scientifique (Gabel, 2017). Si les idéologies peuvent, dans certains cas, paver le chemin à de nouvelles théories, une théorie peut également s'idéologiser, ce qui devient un problème quant à la crédibilité de ladite théorie (Gabel, 2017). De façon générale, les idéologies sont présentées comme des systèmes de pensée plus rigides et fermés sur eux-mêmes (Charaudeau, 2005) puisqu'ils sont construits autour des valeurs qu'un groupe s'impose, mais également à partir d'intérêts plus ou moins conscients de celui-ci (Gabel, 2017).

Bien que l'effort de précision et de distinction entre ces notions soit permanent, il y a et il y aura toujours des zones « grises », comme le fait ressortir l'exposé de Gabel (2017), faisant en sorte qu'une catégorisation dichotomique n'est pas nécessairement souhaitable.

Dans le cadre de ce projet, nous participerons à cet effort de distinction entre ces termes qui sont, eux-mêmes, porteurs de significations afin de bien distinguer, dans les cas possibles, les fondements du discours noosphérien de l'éducation à propos de l'abstraction.

2.3 Le discours noosphérien : impact sur les pratiques enseignantes

L'approche anthropo-didactique postule que les situations d'enseignement sont structurées à la fois par des *conditions didactiques* et des *conditions repérables sur le plan anthropologique* (Sarrazy, 2002a) : il est primordial de considérer l'apprentissage des mathématiques comme un phénomène anthropologique, effectué au sein d'une institution par des actants qui sont assujettis à des façons de faire et de penser. Il faut ainsi considérer les circonstances qui teintent l'apprentissage et s'interroger sur l'organisation du milieu pour mieux comprendre ce qui influence les phénomènes d'enseignement/apprentissages (Roiné, 2009, 2014 ; Sarrazy, 2001, 2002a, 2006). Pour expliquer les facteurs autres que didactiques qui peuvent influencer les situations d'enseignement, l'approche anthropo-didactique considère, entre autres, la notion d'Arrière-plan en référence à Searle (1985, 1995) :

> [L]es phénomènes intentionnels tels que les significations, les compréhensions, les interprétations, les croyances, les désirs et les expériences ne fonctionnent qu'à l'intérieur d'un ensemble de capacités d'arrière-plan qui ne sont pas elles-mêmes intentionnelles. » (1995, p.238).

En d'autres termes, les Arrière-plans constituent les coutumes et la culture liées aux différentes institutions humaines et qui, d'une certaine façon, influencent de façon non intentionnelle les manières d'agir et d'être (Roiné, 2009 ; Sarrazy, 2006) : « l'Arrière-plan, dit-il, ce n'est pas ce qu'*un* individu est *en train de faire*, c'est cet ensemble grouillant ; c'est lui qui détermine notre jugement, nos concepts et nos réactions » (Wittgenstein, 1994, p. 629). En contexte éducatif, il peut s'agir des « profils d'action didactique des maîtres d'une part, et par les styles d'éducation familiale et le système de valeurs orientant les pratiques éducatives d'autres part. » (Sarrazy, 1997, p.16). Ainsi, pour l'enseignant, les différentes injonctions influencent sa façon d'enseigner tout comme la vision qu'il a de ses élèves alors que chez ceux-ci, c'est entre autres la culture familiale ainsi que leur statut scolaire qui influencent leur compréhension de la tâche.

Outre les Arrière-plans, les fondateurs de l'approche anthropo-didactique (Sarrazy, 2002a) accordent une importance considérable au « pouvoir symbolique » qui concourt à « faire voir et faire croire, [à] confirmer ou [à] transformer la vision du monde, et par là, l'action sur le monde, donc le monde… » (Bourdieu, 1980, p. 210). C'est donc par l'entremise de l'étude du discours noosphérien qu'il est possible d'identifier les valeurs, les idéologies et les fondements théoriques prégnants dans la noosphère scolaire qui influencent les discours et les pratiques enseignantes (Roiné, 2015 ; Sarrazy, 2002a).

En ce sens, l'étude des fondements théoriques et des idéologies sous-jacents au discours noosphérien du champ de l'adaptation scolaire devient un élément primordial pour comprendre et interpréter le travail de l'enseignant (Roiné, 2009, 2014, 2015).

PARTIE II

L'ABSTRAIT ET L'ABSTRACTION EN MATHÉMATIQUES : UN REGARD PLURIDISCIPLINAIRE

Comme il a été mentionné dans le cadre du premier chapitre, la question de l'abstraction et de la généralisation en mathématiques, en termes de *« capacités »* propres aux élèves, est toujours mise de l'avant lorsqu'il s'agit d'interpréter les difficultés d'apprentissage.

Dans cette partie du chapitre sur les fondements, il est question de présenter d'autres points de vue accordant un intérêt particulier à l'abstraction telle qu'elle est conçue par la philosophie, la psychologie, les mathématiques et la didactique, ce qui nous permettra d'élaborer un cadre d'analyse dépassant le point de vue strictement psychologique. La question de l'abstraction est articulée, par les auteurs, à celle de l'apprentissage et du développement de la pensée et ceux-ci utilisent, dépendamment de leur posture, différents termes pour aborder ce sujet tels que conceptualisation, symbolisme, fonctions psychologiques supérieures, généralisation, etc. Il apparait important d'ajouter lorsqu'il s'agit des objets de savoir spécifiques, comme les mathématiques, l'abstraction semble particulièrement associée à la généralisation et à la conceptualisation.

2.4 Quelques repères théoriques sur les idées abstraites en philosophie

La question de l'existence et de la signification des idées abstraites a nourri le débat philosophique durant des siècles : les idées simples réfèrent à des objets réels, mais à quoi renvoient les idées abstraites ? Les problèmes posés par les idées abstraites concernent alors les rapports entre « le monde matériel, sensible » et « la pensée, l'intuition » qui prennent des formes particulières au sein des différents courants philosophiques (Sylvand, 1999).

D'une part, le réalisme, conforme aux conceptions du sens commun et adoptant une posture matérialiste, postule l'existence du « réel sensible » et suppose que l'esprit entre en contact immédiat avec lui par l'intuition sensible et que « l'abstrait », en tant que contenu propre de l'intellect, est *dans* le donné et est obtenu de ce donné par un processus d'analyse. L'abstrait serait ainsi indépendant du sujet et devrait alors apparaître à n'importe quel individu qui pense et quel que soit le moment auquel a lieu l'acte de pensée (Dondeyne, 1938a). La confiance attribuée à l'objectivité du monde matériel et à la fidélité avec laquelle ce monde « moule, façonne » nos sens et nos pensées fonde la solidité de l'intelligible et définit ce qui serait le propre de l'intelligence, à savoir de saisir « l'essence profonde » des choses. Cependant, l'évolution des sciences ainsi que de la critique scientifique conteste cette version naïve de l'objectivité, en particulier les limites du fondement sensible dans la constitution de la connaissance scientifique, qui ne jouit pas de l'intemporalité que l'on souhaite lui attribuer. En effet, pour Dondeyne (1938a), fonder les affirmations métaphysiques et les fondements intellectuels sur la base *fragile* de la sensibilité et du donné est comparable à « bâtir sur le sable » (p.6).

Dans ce contexte réaliste, les idées abstraites renvoient toujours au sensible, car elles apparaissent en tant qu'*analyse* du donné ou comme un *schéma généralisant* du donné sensible et le sujet est en réceptivité passive puisque les objets et leurs propriétés se présentent à lui. Pour Reymond (1943), le cadre réaliste refuse au sujet toute capacité d'analyse sélective (chargée d'intentions), de généralisation ou même de synthèse constructive en le limitant à la seule capacité d'analyse, en bref, à une pensée passive. Qu'en est-il alors des idées que Kant appelait « pures », telles que la nécessité, la possibilité, la causalité ? Si l'objectivité des idées se fonde sur l'évidence claire de leur contenu, quelle objectivité attribuer à ces idées « pures » dont le contenu n'est pas tout à fait clair ?

À l'extrême opposé, l'idéalisme conteste l'idée d'un sujet réceptif « modelé » par l'objet externe et propose de le concevoir comme un pôle d'activité qui pose lui-même l'objet, qui le construit, par des opérations de synthèse plutôt que d'analyse. La synthèse consiste à ajouter un concept à un autre (par l'expérience ou par l'intuition pure), à unifier le divers : les idées abstraites dépassent ainsi le contenu immédiat du sensible et leur schématisation. Bien que l'idéalisme a eu le mérite de renverser le point de vue du réalisme en donnant un rôle central à la pensée en acte, il peine à dépasser les « limites du moi constructeur » (Dondeyne, 1938a), à expliquer l'existence de ce qui est « déjà-là » comme « fait » et à donner une place au sensible dans l'explication de la constitution de la connaissance.

L'intérêt pour le sensible, par le fait, mais en même temps, par le besoin de le transcender, de dépasser l'intuition du concret pour établir des généralisations (pour établir l'universel, le nécessaire) sont des éléments constitutifs de la pensée humaine :

> Enfin, ce qui à première vue peut paraître étonnant, il semble qu'il existe un lien fort étroit entre l'appétit métaphysique, lequel est un appétit du concret intime et du transcendant, et le désir naturel de l'abstrait, de l'universel, du transcendantal, et d'aucuns définiront la métaphysique comme la science de l'universel le plus strict, de l'absolument transcendantal, du nécessaire au sens le plus fort de ce mot, comme s'il était a priori évident que la pensée humaine ne peut atteindre le concret intime et le transcendant qu'à travers le transcendantal (Dondeyne, 1938a, p. 11)

Du point de vue des fondements des idées, le questionnement initial concernant le contenu des idées simples et des idées abstraites prend une autre forme : d'une part, il est difficile de savoir quel rôle et quel caractère de vérité attribuer à des idées qui ne se fondent pas sur le réel, mais sur des principes de cohérence logique interne et, d'autre part, il n'est pas évident de comprendre comment l'activité intuitive à partir d'un donné concret pourrait servir de fondement pour des affirmations dont la portée dépasse nettement les propriétés immédiates de ce donné (Dondeyne, 1938a). La question de la nécessité se pose clairement dans une remarque de Kant (Critique de la raison pure, cité par Dondeyne) :

> L'expérience nous apprend bien que quelque chose est de telle ou telle manière, mais non point que cela ne peut pas être autrement… Nécessité et stricte universalité sont les marques sûres d'une connaissance à priori. (Kant, 1781, p. 41, cité dans Dondeyne, 1938a, p.11)

En ce sens, Dondeyne (1938b) insiste sur le caractère actif et conceptuel de la pensée qui tire des informations d'expériences sensibles ou intuitives antérieures afin de les réintroduire à de nouvelles expériences. Le concept n'est pas le reflet de l'intuition ni des objets, mais il est plutôt une interaction entre sensible et intuition ainsi qu'une possession active, inachevée en constante croissance vers une compréhension totale du réel : « connaître, c'est posséder l'autre activement » (p.351).

On voit bien, ainsi, que l'on se déplace des positions extrêmes (réalisme, idéalisme) vers la reconnaissance de l'existence de processus intellectuels que la pensée développe en interaction avec un certain « réel », *des processus appelés d'abstraction,* qui peuvent prendre des formes différentes.

À ce propos, Delaunay (2016) distingue quatre formes d'abstraction :

1. L'abstraction par simplification permet de négliger toutes les particularités d'un acte, de se détourner de toute considération concrète et trop complexe pour la considérer dans son entièreté (circonstances, contextes, etc.) ainsi que de s'extraire de la relativité constitutive de l'expérience et des « questions de fait ». L'abstraction y apparait alors comme un retrait de considération des faits afin d'en retenir, par induction, une nature constante, une valeur, un sujet, une forme. « C'est l'attitude opératoire qui devrait permettre à l'esprit scientifique de déterminer expérimentalement un ensemble de rapports constants entre des faits pour en abstraire inductivement une loi » (*ibid*, para. 1).

2. En deuxième cas, il s'agit de l'abstraction par généralisation dans le cadre de laquelle l'esprit part des éléments/propriétés d'un objet (même des plus complexes) pour remonter vers des propriétés plus générales. Se fondant sur la logique des classes, cette forme d'abstraction est, selon l'auteur (*ibid*), constitutive de l'activité de conceptualisation. Par exemple, il est possible, à partir de plusieurs triangles spécifiques, de tenter de mettre en évidence les propriétés communes à tous les triangles. Ici, ce sont les processus de synthèse déjà mentionnés qui sont en jeu et qui permettent d'unifier diverses représentations sous une seule représentation et de mettre en relation divers objets, qui n'appartiennent pas à la classe d'objets considérés, dans une seule classe.

3. L'abstraction apparait aussi comme un processus mental qui consiste, en partant d'un donné spécifique quelconque, à isoler de l'intégralité du donné un aspect fragmentaire, un trait particulier et est nécessaire ainsi que préalable à l'acte de classification. Par exemple, à partir d'une feuille de papier, il est possible de n'en retenir que l'aspect blanc tout en écartant son aspect rectangulaire et sa texture tout comme il est possible, en géométrie, d'étudier un corps solide en tenant compte seulement de la forme et de la grandeur et d'en négliger la matière dont il est fait. On peut ainsi concevoir quelque chose issu du donné perceptif, mais qui n'est pas donné par la perception : ces processus se placent dans le langage et aboutissent à l'élaboration de principes structurant la connaissance du perçu (par exemple, l'idée de blancheur se détache des objets particuliers et ne comporte aucune nuance dans son abstraction, mais, en même temps, les comprend toutes).

Cette forme d'abstraction par sélection entraînerait, selon l'auteur, un appauvrissement du réel puisque sa vocation est réductrice en ignorant toutes circonstances et particularités.

4. Enfin, l'abstraction désigne également un processus de schématisation permettant une modélisation d'un donné et sa formalisation. L'auteur lie ce type d'abstraction à la

problématique de l'analyse, c'est-à-dire la décomposition et recomposition d'un système de donnés permettant d'extraire du sensible, des éléments de forme (de l'information), à partir desquels, par abstractions successives de même nature, se construiraient des niveaux de complexité formés par des représentations de plus en plus symboliques donc détachées du sensible.

Les quatre formes d'abstraction reflètent un travail formel de structuration du donné selon quatre processus de la pensée : simplification, généralisation, sélection et schématisation (Delaunay, 2016 ; Sylvand, 1999), mais qui correspondent également à quatre processus cognitifs : idéation, conceptualisation, classification et modélisation. L'abstraction consiste ainsi à penser à part ce qui ne peut être donné à part (Reymond, 1943) ; dans cet acte de mise à part, le langage joue un rôle fondamental, étant « le véhicule social de la pensée [...] parce que la pensée est essentiellement sociale et communicable » (Dondeyne, 1938b, p.346). Dans son essence, la conscience intellectuelle se manifeste comme attitude transcendantale : dans le sens où le sujet dépasse sa subjectivité individuelle « sortir de lui-même » pour se placer du point de vue d'une pensée générale ou d'un autre sujet (Dondeyne, 1938b).

Dans tous les cas, il est possible de constater que l'abstraction est un processus plus complexe qu'un simple acte qui consiste à « extraire » quelque chose du concret (*et que serait ce concret ?*). Gonseth la représente comme « une synthèse dialectique entre appréhension d'une situation donnée et la façon dont on l'exprime » (Bkouche, 2012, Nombres cardinaux et nombres ordinaux section, para.13). Observons que l'auteur parle de « situation » et non d'objet, ce qui élargit déjà les considérations précédentes. En ce sens, le langage est considéré comme la forme première de l'abstraction puisque l'expression langagière de la situation donnée est perçue comme abstraite et la situation comme objet concret. L'élaboration d'objets purement intellectuels (abstraits) n'est nullement indépendante des besoins propres à la situation : ces objets sont des outils pour ladite appréhension. Bkouche (2012) en donne un exemple particulièrement intéressant concernant la notion de chaleur. En principe, les idées de « chaud » et « froid » sont définies par la sensation captée par les sens, dans ce cas la peau. Cependant, une expérience simple montre les ambigüités dans cette définition et les limites de la connaissance sensorielle. Devant trois récipients, le premier rempli d'eau froide, le second rempli d'eau chaude et le troisième d'eau tiède, une personne met sa main gauche dans le premier récipient et sa main droite dans le second, puis elle retire ses mains et les met toutes deux dans le troisième récipient. La main gauche aura une sensation de chaud, alors que la main droite aura une sensation de froid bien qu'elles plongent dans la même eau. Dans le but de préciser cette notion, on *invente* un concept pour déterminer le degré de chaleur d'un corps, la température et des appareils pour la mesurer. Le concept qui précise ce qui est chaud et ce qui est froid est loin d'être le précurseur de l'appareil qui le mesure, il est défini grâce à la construction de l'appareil. La notion sensorielle de chaleur disparaît et se précise ainsi derrière une notion « abstraite » définie de manière arbitraire, mais qui devient un outil opératoire pour appréhender la problématique en question. C'est ainsi « l'abstrait » qui permet de mieux cerner « le concret » (et non pas quelque chose qui serait « extrait » du concret) et qui, d'ailleurs, émerge d'un contexte spécifique.

Bkouche (2012) montre bien qu'aujourd'hui, la notion de temps est apprise en apprenant à lire l'heure sur une horloge. Ainsi, la connaissance abstraite de temps n'est précédée par aucune connaissance d'un temps qui serait concret. Ce temps « abstrait » peut alors être considéré « concret », car il est connu par l'usage. D'ailleurs, la construction des savoirs géométriques illustre bien l'utilité de se servir des processus d'abstraction dans la résolution de certains problèmes physiques comme la comparaison de deux corps solides selon la grandeur et la forme. Évidemment, la « superposition » n'est pas possible lorsqu'il s'agit de deux corps solides et non de figures planes. Cela conduit à construire des critères rationnels de superposition (reposant sur le discours) permettant de comparer les deux corps (du point de vue de la forme et la grandeur), en laissant de côté la manipulation empirique. Dans ce cas, les processus d'abstraction émergent grâce au raisonnement déductif.

Dans les exemples précédents, au moins deux des formes d'abstraction mentionnées par Delaunay (2016) sont présentes : l'isolation de certains traits caractéristiques des objets physiques et la modélisation par le discours. Le développement de la géométrie et de la physique, par des processus d'abstraction de plus en plus élaborés, montre bien que ces processus sont bien loin de produire « un appauvrissement du réel », tel que mentionné par Delaunay, ou tout au moins, ils remettent en question ce que voudrait signifier ledit appauvrissement.

Ces analyses montrent ainsi une transformation dans la conception de l'abstraction : la dichotomie réalisme/idéalisme (objet/idée) donne place à une interaction où le langage occupe un rôle central et dans laquelle les aspects contextuels prennent de l'importance. Les processus intellectuels d'abstraction sont ainsi conçus comme des processus se développant à l'intérieur de situations (des exigences contextuelles), dans le cadre d'une culture (mathématique, physique, etc.), et ce, par le biais du langage.

Dans le cadre de ce travail, la question de l'existence des idées abstraites propre au débat philosophique sera mise de côté dans le but de rester à un niveau pragmatique : c'est l'usage de ces idées dont il sera question, d'une part dans la constitution des savoirs scientifiques et, d'autre part, dans la précision des rapports entre « le concret » et « l'abstrait ».

2.5 L'abstraction en mathématiques

La question de l'abstrait en mathématiques est intimement liée à la nature même de cette discipline. Certains concepts sont développés en lien avec des problématiques de nature très diverse et une dynamique d'enrichissement s'installe dans l'activité mathématicienne, caractérisée par l'obtention de résultats plus précis et plus sophistiqués nécessitant l'élaboration de définitions et d'arguments qui s'éloignent, peu à peu, des intuitions et des problèmes qui étaient sous-jacents à la construction de la théorisation. Ces niveaux de théorisation sont habituellement accompagnés de formalisations axiomatiques à l'intérieur desquelles les objets originaux sont effacés ou mis de côté, au risque de considérer la connaissance mathématique comme un ensemble de formules symboliques dépourvues de significations.

Cependant, comme Patras (2001) l'affirme, la revendication d'une fidélité inconditionnelle aux origines est dangereuse, car les contenus que les théorisations véhiculent risquent de cesser d'avoir du sens.

Dans ce processus de constitution des mathématiques, certaines questions ont peuplé la scène philosophique : si la connaissance est connaissance de *quelque chose,* si elle a un objet, si elle nous apporte des informations sur cet objet, les mathématiques sont la connaissance de quoi, de quels objets ? Si les mathématiques ne sont pas un ensemble de formules dépourvues de significations, alors de quoi parlent-elles ?

2.5.1 Débat à propos des notions mathématiques et de leur nature

Du côté de l'épistémologie des mathématiques, il est possible de remarquer certains traits de la dichotomie entre réalisme et idéalisme qui est présente dans les écrits philosophiques à propos des idées abstraites. Dans le cas précis des mathématiques, le débat se situe entre l'empirisme et le rationalisme et celui-ci ainsi que ses développements ultérieurs permettent de constater que les mathématiques ne peuvent être réduites à une science empirique ni à un ensemble de règles et d'axiomes.

Certains empiristes comme Mill (1843) considèrent que les notions mathématiques sont des notions empiriques qui portent sur des faits physiques, et que les propositions des mathématiques se fondent sur l'expérience ; l'affirmation $3 = 2+1$ porte sur le fait suivant : la totalité composée de trois éléments peut être divisée en une totalité de deux éléments et une autre d'un élément. Elles sont alors des abstractions d'une réalité matérielle.

Sans entrer dans des détails pour le moment, Frege notera bien la difficulté de cette conception de l'arithmétique, en particulier en ce qui concerne la notion de nombre : si le nombre dénote la totalité, quelle dénotation attribuer à 0 ?

À l'opposé de l'empirisme radical, le rationalisme de Leibniz (1646-1716) postule que les notions mathématiques sont de pures créations de l'esprit humain, des vérités de la raison. Il s'agit alors des idées de notre esprit, de leur mise en relation. Ces notions n'ont pas de contenu factuel et on n'a nullement besoin de recourir à l'observation du monde extérieur pour les vérifier : elles sont des vérités nécessaires et *a priori*. La position rationaliste n'est pas exempte de difficultés : comment expliquer ce qui fait d'une proposition mathématique une vérité de raison accessible indépendamment de toute expérience ?

Bonnay et Dubucs (2011) reconnaissent l'existence d'une certaine « expérience mathématique », de nature différente à l'expérience matérielle donnant lieu à des généralisations empiriques, et affirment que Kant (1724-1804) a cherché à construire une voie intermédiaire entre empirisme et rationalisme, en reconnaissant un rôle à l'intuition[5], mais sans que cette intuition fasse dépendre les vérités mathématiques des contenus empiriques :

> … Pour Kant, si nous savons que deux et deux font quatre, c'est que nous sortons du simple concept de somme de deux et deux et que nous avons recours à l'intuition, par exemple en comptant sur nos doigts. À nouveau, tout le problème est de comprendre comment nous pouvons nous appuyer

[5] Intuition pour Kant : représentation singulière, immédiate de quelque chose (si l'on met la main sur le feu, ce que l'on sent immédiatement est une intuition) ; toujours particulière, toujours immédiate. Il y a deux types d'intuitions pour Kant : empiriques et pures. Les intuitions pures sont a priori, c'est-à-dire indépendamment de tout contenu empirique : il s'agit de la capacité à recevoir des intuitions qui tiennent à la forme de notre sensibilité. C'est la « structure d'accueil », la réceptivité, la condition a priori de toute intuition. Toute intuition empirique se plie à la forme de notre intuition. Le temps et l'espace sont des intuitions a priori (nous n'avons pas l'intuition de l'espace, l'espace est une intuition pure qui est la condition de toute autre intuition).

> sur une intuition apparemment empirique pour établir une connaissance qui, elle, n'est pas empirique... La solution de Kant est de supposer l'existence d'une intuition pure, l'intuition pure des formes de la sensibilité. L'idée de forme de la sensibilité repose sur la distinction de deux aspects des phénomènes : leur forme, qui correspond à la manière dont sont ordonnés les phénomènes les uns relativement aux autres, et leur matière, qui correspond à la sensation. Les formes de la sensibilité, que sont le temps et l'espace, sont a priori : elles ne dépendent pas d'une expérience, elles fondent au contraire la possibilité de l'expérience. (p. 5)

Intuition pure et intuition empirique semblent faire partie des raisonnements mathématiques pour Kant : en s'appuyant sur une construction géométrique pour démontrer un théorème, on ne retient que les propriétés des figures qui reposent sur ce qu'il est possible de faire dans l'espace et non sur les propriétés empiriques de la figure que l'on observe : seule la partie pure de l'intuition empirique est pertinente pour fonder les raisonnements mathématiques (Bonnay et Dubucs, 2011). Les objets géométriques sont alors des conditions de possibilité délimitées par les formes pures de la sensibilité que notre esprit impose à l'expérience.

La thèse de Kant s'oppose à celle d'Hume (1711-1776) qui considérait que les mathématiques étaient des vérités analytiques. Hume distingue les connaissances qui portent sur le monde, sur la réalité concrète, et les connaissances logiques et mathématiques, qui elles ne portent pas sur le monde, mais sur *les idées de notre esprit et leur mise en relation*. Les premières connaissances sont alors des vérités synthétiques : elles sont variables et alors, elles peuvent changer de statut de vérité. Ces vérités sont a posteriori, on a besoin de les vérifier, de recourir à l'expérience. Les connaissances logiques et mathématiques sont des vérités analytiques : elles ne portent pas sur le monde, elles ne sont pas sujettes à changement, elles ne peuvent s'avérer fausses demain. Elles sont a priori et nécessaires. Kant affirme, pourtant, que les mathématiques sont a priori, mais pas analytiques. La logique, pour Kant, est purement formelle : science de la forme de penser en général, pure science des règles de l'entendement, incapable de dire jamais quoi que ce soit sur le contenu ou la matière de pensée (Patras, 1996). Les mathématiques sont, par contre, une science d'objets et elles se réfèrent à des contenus de connaissances ; elles ne peuvent alors se réduire à la logique formelle.

Cependant, la découverte des géométries non euclidiennes met en évidence que l'espace n'a aucune raison d'être euclidien, mettant en défaut les thèses de Kant. La question de l'analyticité des propositions mathématiques revient avec force, en particulier via diverses formalisations des mathématiques proposées par Russel, Frege et Hilbert.

Inspirés par la conviction de la complète généralité des mathématiques (le « nombre » s'applique aussi bien aux choses effectives qu'aux actions, aux pensées, à tout ce qui existe ou peut être imaginé [Frege] ; la généralité du nombre est ainsi comparable à la généralité de la logique), le logicisme de Russell (1872-1970) et celui de Frege (1848-1925) initient un programme dont l'intention est de dériver les mathématiques de la logique. Frege prétend démontrer que les vérités arithmétiques sont des vérités logiques en réduisant les lois et les règles arithmétiques à celles de la logique. Frege s'oppose fermement à la philosophie intuitionniste de Kant ainsi qu'à l'empirisme de Mill (1843), rejetant un fondement psychologique, intuitif ou empirique de la connaissance arithmétique.

Il est important de remarquer que l'approche logiciste, même si elle prétend que les mathématiques parlent de « tous les objets » (comme la logique), accepte en même temps l'existence d'objets propres aux mathématiques et distincts des autres entités (ce qui le distingue de l'approche formaliste). Russel et Frege partagent l'idée que les énoncés mathématiques ont un contenu sémantique (on parle de « platonisme sémantique », dans le sens d'attribuer au contenu mathématique *une réalité externe* au sujet, mais qui n'est pas la réalité physique).

Pour Frege, le contenu mathématique est une réalité en soi et c'est de leur adéquation à cette réalité que les règles tirent leur légitimation (par exemple, les nombres sont des objets abstraits, existant en soi, et ce, indépendamment de nous). Dans ce sens, les énoncés mathématiques cherchent à décrire une « réalité » que nous n'avons pas à construire ; ils sont vrais lorsque les objets auxquels ils se réfèrent ont bien les propriétés qu'ils leur attribuent (Dubucs, 2010). Suivant Russell, la géométrie et la mécanique perdraient leur valeur de vérité si *espace, temps et mouvement* étaient relatifs aux propriétés de l'esprit ; pour être des sciences vraies, il faut qu'elles aient un objet existant dehors nous (Brunschvicg, 1993). Une distinction est faite par Frege et Russel entre *ce qui est* un nombre et *la représentation ou image mentale* que se fait le sujet quand il pense le nombre (penser à ces entités n'implique pas les créer). Frege affirme qu'un mot n'a pas besoin d'être accompagné par une image mentale pour avoir un contenu et, même quand il est accompagné par une image mentale, celle-ci n'est pas le contenu du mot. On ne peut avoir une image mentale de la distance qui sépare la terre du soleil, mais les énoncés scientifiques concernant cette distance sont compréhensibles (Sabatier, 2009).

L'exemple sur le nombre illustre la position ontologique de Frege : la notion de « nombre » est « l'étendue » d'un concept, et s'avère ce qui recouvre la notion de classes d'équivalence bijectives d'ensembles finis ; cette notion n'est pas purement formelle, comme elle le deviendra pour la théorie d'ensembles, mais surtout intensive : définir le concept d'un nombre est avoir en vue un certain champ de situations où le concept fait sens, où des objets viennent se ranger dans ce concept (on voit bien que la définition n'est pas purement formelle, car on y attribue un « contenu »). Définir un nombre semble donc être, pour Patras (2001), plutôt un acte synthétique qu'analytique, puisque ce concept est abstrait d'une relation entre objets. Frege est conscient du paradoxe revendiquant d'une part, le caractère analytique de son axiomatisation du nombre et, d'autre part, la constitution de cette notion en termes d'extension de concepts, mais il affirme que ce n'est pas parce que certaines conditions subjectives sont requises pour définir le nombre que celle-ci est pour autant à reconduire à la subjectivité ; en termes de Frege, la vérité d'un énoncé ne coïncide pas avec ce qui est pensé en lui.

Le programme logiciste de Frege conduit cependant à une impasse lorsque Russell découvre un paradoxe : la solidité de tout l'édifice mathématique semble ainsi être mise en question. Le risque de perte de certitude garantie par cette discipline favorise l'émergence d'autres programmes tendant à garantir la solidité de l'édifice mathématique. Le formalisme en est un.

Pour le formalisme, l'important ce sont les règles auxquelles les objets mathématiques sont soumis et non pas la nature de ces objets. On peut remplacer les mots « droit », « point » et « plan » par n'importe quel autre nom (d'autres « objets ») ; ce qui compte ce sont les règles de la géométrie qui régissent leurs manipulations. Le formalisme nie l'existence de toute autre entité que les signes concrets qui sont l'objet des manipulations du mathématicien, donc l'existence d'entités abstraites (dans une version « moins forte », le formalisme postule la « mise entre parenthèses », et non l'élimination, des sens des symboles). Pour Hilbert (1862-1943), les mathématiques sont simplement une manipulation symbolique, un jeu formel : tout est réductible à des symboles dépourvus de contenu. La vérité, c'est la démonstration. Ce qui importe pour le mathématicien formaliste n'est pas ce qu'exprime un énoncé, mais la recherche d'une démonstration respectant des règles précises et formulées à l'avance.

Dans ce contexte de repli formaliste, le développement de symbolismes à chaque fois plus puissants conduit les mathématiciens à explorer des mondes « abstraits » de divers ordres, abandonnant absolument le type d'intuition auquel s'attachait Kant. Cependant, ce chemin de constitution d'objets mathématiques *par la manipulation strictement symbolique* (des objets « vides de contenu ») atteint ses limites lorsque le progrès de l'abstraction aboutit à l'introduction d'objets paradoxaux, porteurs de contradictions. À la même époque, Gödel (1906-1978) montre l'impossibilité de formaliser entièrement les mathématiques, et donc, l'impossibilité de les réduire à la logique. Il établit l'impossibilité de construire les mathématiques de manière strictement syntaxique et affirme l'existence d'objets mathématiques, indépendants des actes et des dispositions de l'esprit humain, qui décrivent une réalité non-sensible.

Ce qui distingue Frege de Gödel, les deux réalistes, est le mode d'accès à ces objets : Frege évoque l'existence, à côté de la perception sensible, d'une source logique de connaissance, sans faire appel à aucune intuition ; Gödel parle de perception de la réalité mathématique, d'intuition qui serait analogue à la saisie perceptuelle des objets physiques. Pour Gödel, nos idées empiriques contiennent des éléments abstraits « qualitativement distincts des sensations » qui ne peuvent avoir leur origine dans les sensations. La perception sensible est pour Gödel une relation entre concepts et objet particulier perçu, alors que la perception mathématique est une relation entre concepts. Mais l'intuition n'est pas le seul mode d'accès aux vérités mathématiques reconnu par Gödel. Dans le domaine empirique, certaines des lois fondamentales, dont le contenu n'est pas directement observable, sont vérifiées de manière indirecte par leurs conséquences ; il en va de même, dans les mathématiques, pour les axiomes dont le contenu échappe à l'intuition (ces axiomes s'imposent par leur succès) (Bonnay et Dubucs, 2011).

Les limites du formalisme qui suit l'échec des propositions kantiennes ainsi que celui du logicisme ouvrent de nouvelles voies à une épistémologie des mathématiques qui, refusant toujours de réduire les mathématiques à une science empirique, dépasse les questions des fondements et s'intéresse à l'analyse des traces constitutives de la pensée mathématique. Comme Patras (1996) l'affirme : « La logique formelle ne rend pas compte de la vie assez mystérieuse de la pensée qui se manifeste dans le travail mathématique » (p. 4).

2.5.2 L'émergence de la phénoménologie

La phénoménologie de Husserl, pour Patras (1996), a exploité la possibilité de construire une épistémologie post-kantienne permettant d'expliquer comment les mathématiques peuvent, tout à la fois et sans contradiction, être une science axiomatique susceptible de descriptions formelles et en même temps, une science d'intuitions très diverses (intuitions sensibles, intuitions plus abstraites). L'analyse de *la structure propre des actes* en jeu dans l'expérience mathématique (ensemble d'actes à travers lesquels on a accès aux objets mathématiques) devient un enjeu fondamental dans cette nouvelle épistémologie. Ces analyses montrent qu'une seule couche d'actes ne suffit pas à rendre pleinement déterminée la connaissance des objets mathématiques : il n'y a rien d'analogue à la composante *sensorielle* de la perception sensible dans l'expérience mathématique (Bonnay et Dubucs, 2011). La question de l'abstraction émerge, dans cette perspective, de l'analyse des couches constitutives du contenu mathématique développée par le mathématicien dans le contexte d'une pratique culturelle spécifique.

Il s'agit d'une posture qui réclame un contenu sémantique aux mathématiques, mais qui conçoit la réalité mathématique (le contenu en question) comme étant dépendante du mathématicien et ses constructions, de l'activité, de l'expérience du sujet à l'intérieur d'une culture (antiréalisme).

Il ne s'agit aucunement de nier que les vérités mathématiques sont indépendantes de toute expérience. Pour cette épistémologie, cependant, même si indépendamment de toute conscience qui les pense, les énoncés mathématiques continueraient d'exister et d'être vrais, pour que notre entendement puisse les concevoir, il devient nécessaire de s'intéresser au processus de conception, à la manière dont notre conscience manipule ces objets. L'activité (individuelle et collective) qui conditionne la formalisation (par généralisation et abstraction) devient ainsi un objet d'étude fondamental. Notre conscience est toujours conscience de quelque chose, elle est tournée vers des objets, elle vise toujours quelque chose. En philosophie, on parle d'intentionnalité. Sans prétendre fonder les mathématiques sur l'intentionnalité, Husserl considère que les structures de l'intentionnalité ont quelque chose à nous dire sur les mathématiques, au moins du rapport de la conscience aux objets mathématiques.

La distinction avec Frege (réaliste) est claire : pour celui-ci, une fois le concept construit, la façon dont nous formons le concept, dont nous prenons conscience, est effacée. Pour Husserl, contrairement, la pensée mathématique se construit par des abstractions successives, par des paliers conceptuels, par idéalisation. L'étude de ces couches d'abstraction devrait pouvoir éclaircir ce que sont les mathématiques. Cependant, le progrès mathématique n'a pas montré la linéarité que Husserl imaginait et certains aspects de l'argument de Frege sont tout à fait pertinents : une fois les idéalités mathématiques constituées, elles existent par elles-mêmes et deviennent indépendantes du moment de constitution (réutilisables dans d'autres contextes, parfois inattendus). Le sens des idéalités mathématiques appartient ainsi à la pratique mathématique, il évolue avec cette pratique et n'est pas fiché dans l'objet ni dans le processus de genèse original de l'objet (il ne faut pas aller le chercher dans les prétendues intuitions fondamentales, à la manière de Kant). Ce sens se constitue par un discours sur des contenus et non pas seulement par la transformation de formes pures plus ou moins tautologiques (Patras, 1996). Les objets mathématiques prennent ainsi du sens dans l'usage fait à l'intérieur d'une pratique mathématicienne. Patras affirme que la définition d'un objet mathématique n'épuise pas sa signification : si l'on montre sa définition à un mathématicien, il pense aux spécialisations de ce concept, les problèmes où il intervient, les variations possibles de la notion, les problèmes non résolus impliquant la notion, etc. (tout cela dépasse les intuitions au sens naïf, car les mathématiques ne sont pas une science d'intuitions au sens de l'Esthétique, mais une science de concepts).

L'intuition mathématique, pour la phénoménologie, va au-delà du sens naïf : elle ne porte pas directement sur les objets mathématiques, mais traduit la richesse de l'architecture des vécus de conscience, l'étendue de la structure d'horizon associée à notre perception de tel ou tel objet mathématique (Patras, 1996). L'intuition ne porte pas non plus seulement sur le langage : une expression algébrique ne contient pas en elle-même les caractéristiques des objets et des actions qu'elle pourrait représenter. L'ensemble d'intentions associées aux objets, aux actions et à leurs représentations constitue l'essence des intuitions.

L'intuition mathématique se développe ainsi à l'intérieur d'une pratique mathématique spécifique, par les questionnements que cette pratique même suscite et qui déterminent l'usage que l'on fait des objets mathématiques impliqués. L'accès aux objets mathématiques, dont le caractère est essentiellement opératoire, ainsi que l'élaboration d'intuitions, n'est pas une question d'observation, mais de « faire » et « refaire » des exercices et des problèmes. Les processus d'abstraction associés à la constitution d'objets mathématiques ne sont pas indépendants d'une certaine structure d'intentionnalité.

Certaines limites ont été déjà signalées concernant les propositions husserliennes ; d'autres auteurs vont dans le même sens. Caveing (2004), par exemple, affirme que l'entreprise husserlienne en mathématiques n'a pu aboutir puisqu'elle avait la conviction d'avoir à ressaisir *l'essence invariante de l'objet mathématique* par-delà la technique mathématique à travers laquelle se déploient les potentialités de l'objet. Le sens des idéalités mathématiques appartient à la pratique mathématique, il évolue avec cette pratique, il n'est pas fiché dans l'objet ni dans le processus de construction original de l'objet.

De son côté, dans un double souci de vérité et de « réalité », Gonseth (1890-1975) développe un point de vue appelé idonéisme, par une appropriation critique de la phénoménologie[6], dans lequel les objets mathématiques ne sont pas extraits de la

---

[6] Gonseth rejette de la phénoménologie l'idée d'une construction verbale, logique et rationnelle de la réalité à partir de qualités élémentaires, d'une espèce d'intuition immédiate, même s'il accepte qu'il y a des racines intuitives. Les notions « d'horizon de subjectivité » et « d'horizon d'objectivité », introduisent des ruptures par rapport à la philosophie du sujet de Husserl.

réalité, mais ils ne sont pas non plus des constructions purement idéales :

> Gonseth définit ce rapport [des mathématiques au monde de l'expérience] dans un processus qui fera passer de la réalité à un schéma de cette réalité, un schéma étant un support écrit, dessiné... qui tend vers l'abstraction, mais doit conserver une partie des relations qu'entretiennent entre eux les objets réels. Les schémas se construisent par le biais de signes, à différents niveaux de formalisation et conceptualisation (Bloch, 2014, p.4).

Ces schémas abstraits sont des repères marquant le passage de l'intuition à l'expérimentation par un processus de mathématisation ; ces schémas caractérisent la « forme » de l'expérimentation. L'idée de dialectique est affirmée par le fait que ni l'objet concret ni le schéma abstrait n'offrent, à eux seuls, le « vrai » visage de la réalité : les notions intuitives évoluent sous l'influence de la schématisation lors l'expérimentation, perdant ainsi une partie de ses attaches avec le réel et, d'autre part, le schéma abstrait, par lui-même, ne peut pas représenter tous les détails de l'objet en question. Les objets mathématiques se constituent à l'intérieur de cette dialectique, par différentes couches de schématisation et d'abstraction.

Jean Cavaillès (1903-1944), puis Jean-Toussaint Desanti (1914-2002) s'inscrivent aussi, chacun à sa manière, dans un programme phénoménologique, en reprenant l'idée du caractère intentionnel de l'objet, mais en lui conférant une certaine autonomie et universalité qui va au-delà d'une stricte subjectivité. Desanti en particulier, et dans une certaine continuité avec Gonseth, considère la construction des mathématiques « en étages imbriqués » :

> Les objets mathématiques existent par et dans leurs relations avec les autres objets précédemment construits ou en train de l'être, mais à partir d'objets premiers – des constructions ayant leur origine dans la pratique des métiers, des nécessités sociales comme le commerce, etc. Or les premiers objets mathématiques ont été construits en relation étroite avec des nécessités de comptage, de mesurage, etc. Les objets développés ultérieurement se sont appuyés au départ sur ces premiers concepts, puis, de construction en construction, ont acquis un caractère de plus en plus abstrait ; mais ils ne sont pas totalement détachés de leur origine première (Bloch, 2014, p.2).

Pour Desanti (2008), les objets mathématiques ont un statut relationnel et ne sont accessibles que dans le système de possibilités réglées ouvertes par les relations qui les définissent : une idéalité mathématique n'est rien d'autre qu'une indication de procédure opératoire ou démonstrative (cela exclut tout réalisme ou platonisme mathématique). Les objets ont un statut intrathéorique ou holistique (interne à une théorie). L'objet n'est jamais donné de manière isolée, il appartient à un contexte théorique impliquant d'autres objets, des opérations et des procédures démonstratives. Les questions possibles à propos d'un objet et ses propriétés potentielles manifestent une ouverture indéfinie de l'expérience mathématique. Cette expérience se caractérise par des actes qui s'organisent en une hiérarchie de types d'actes de degrés croissants : les objets mathématiques ne sont jamais donnés par la « perception » dans une seule couche d'actes ; ils sont toujours constitués par la hiérarchie d'actes dans laquelle il faut s'engager pour les obtenir (Dubucs, 2010).

Le moteur interne d'évolution des mathématiques est, selon Cavaillès, en lien étroit avec le caractère opératoire de la pensée mathématique et des limites d'applicabilité : une opération sur un champ d'objets excède les possibilités sur ce champ, exigeant la création de nouveaux objets ; une méthode dépasse son champ primitif d'application et réclame des nouveaux domaines ; un problème exige la création de nouveaux concepts (Pradelle, 2014).

S'éloignant de la phénoménologie, en ce qui concerne la recherche de la source originale des mathématiques dans la subjectivité[7], Caveing (2004) défend une thèse sur l'identité relationnelle et conceptuelle des objets mathématiques, inscrite au sein d'une philosophie qui considère le sujet comme un pôle d'activité traversé par le concept et qui refuse de lui donner le pouvoir de constituant absolu (la philosophie du concept de Cavaillès). Les objets mathématiques ne sont accessibles que dans le système des

[7] Caveing s'éloigne de la philosophie de la conscience qui présuppose la raison comme une faculté individuelle et invariante (ce qui nie le caractère historique de la rationalité mathématique) et qui explique la constitution des mathématiques par le renvoi à l'inventivité d'individus « purs » créateurs.

possibilités réglées ouvertes par les relations qui les définissent et par la symbolisation desdites relations et de systèmes de relations. Le caractère opératoire de la pensée mathématique est souligné et la règle apparait comme médiation entre les objets et les opérations faisables sur eux.

Caveing (2004) montre bien, comme dans le champ des entiers naturels, où certains actes sont autorisés et d'autres interdits - par exemple diviser un nombre par un nombre autre que l'un de ses diviseurs - que la nécessité d'opérer confrontée aux interdictions qui découlent des propriétés des objets motive inévitablement l'extension du champ opératoire par l'adjonction de nouveaux objets : les objets émergent des exigences intrinsèques du champ, l'extension du même pose de nouvelles questions et le sujet développe son activité à l'intérieur de ces contraintes.

Le caractère de l'objet est ainsi défini :

Ces objets mathématiques, c'est-à-dire ces entités abstraites que définit et étudie la mathématique, ne sont des « objets » ni aux sens usuels ni au sens philosophique d'objets de conscience, et l'auteur les désigne provisoirement par l'expression « M-objets ». Un M-objet est une idéalité, c'est-à-dire, selon Desanti, « un "être" qui n'est jamais offert par sa simple présence, mais par la médiation du système réglé des désignations qui permettent d'en disposer » (Caveing, 2004, p. 77), et n'a d'existence qu'intrathéorique.

Et le rôle du sujet est décrit par Caveing comme suit :

> Les exigences intrinsèques commandent les démarches du calculateur - éventuellement à son insu - même si celui-ci ne possède ni un concept de son objet ni la théorie adéquate des relations qu'il utilise, et reste dans l'ignorance de ce qui sera l'organisation prédicative de la pensée mathématique. (*Ibid*, p.32)

Dans ce contexte, les énoncés mathématiques sont soit des formes d'énoncés des règles, soit des formes de prescriptions ou de descriptions de propriétés ou prédicats de l'objet.

Étant donné qu'il n'est pas possible à la fois d'effectuer et de ne pas effectuer un acte bien déterminé (ou d'appliquer et de ne pas appliquer une règle), la logique de l'action comporte l'exigence de bivalence.

Les divers auteurs mentionnés remarquent le caractère symbolique de la pensée mathématique permettant de décrire et d'objectiver, par des schématisations, les relations qu'ils explorent. Ces schématisations, de caractère essentiellement opératoire, deviennent ensuite objet d'étude en elles-mêmes et, ainsi de suite, donnant lieu à différentes couches d'abstraction et de généralisation. Les généralisations impliquent, d'une part, des modalités de représentations distinctes permettant des éclairages différents à une même situation et, d'autre part, de nouvelles constructions mathématiques plutôt que d'abstractions empiriques ; les généralisations caractérisent ainsi l'activité mathématique et la distinguent d'un processus strictement mécanisable et algorithmique ; elles deviennent, en même temps, autonomes à l'égard des actes qui les pensent.

Dans le contexte de ce projet, le point de vue phénoménologique ainsi que les développements postérieurs qui s'en inspirent portent un intérêt fondamental, puisque tout en dépassant le logicisme et le formalisme, ils explorent les étapes de constitution de la pensée mathématique, les manières dont les nouvelles idées et les concepts mathématiques peuvent émerger, considérant, avec Cavaillès, que les mathématiques constituent toujours un devenir. Comprendre la logique et la nécessité interne de la constitution des nouveaux objets implique faire et refaire les mathématiques.

2.6 Quelques points de vue psychologiques sur l'abstraction

La question des apprentissages et du développement de la pensée est en congruence avec celle de l'abstraction. Si, d'un point de vue psychologique, la dialectique empirisme/idéalisme n'est pas explicitement énoncée, elle se présente en filigrane, en faisant rentrer d'autres éléments explicatifs propres à ce champ. Il importe de spécifier qu'au sein du champ psychologique, différents termes sont utilisés pour désigner ce qui, dans le cadre de la section précédente, a été identifié comme la notion « d'abstraction » : la constitution de la pensée mathématiques. Ainsi, selon leur posture, les auteurs vont prioriser certains termes : conceptualisation, fonctions psychiques supérieures, etc.

2.6.1 Le point de vue piagétien[8]

L'œuvre de Piaget se situe, d'un point de vue philosophique, en continuité avec celle de Kant qui cherchait un compromis entre les positions empiristes et rationalistes concernant la constitution de la connaissance. Piaget s'écarte, par contre, de la philosophie avec l'ambition de fournir un fondement empirique à ses propos.

Piaget s'intéresse, tout d'abord, à la formation de la pensée chez l'humain et plus particulièrement chez les enfants. C'est, entre autres, par l'entremise des stades de développement ainsi que par ce qu'il nomme la pensée concrète et la pensée formelle que Piaget fonde l'approche développementale au sein de laquelle il affirme que le sujet construit ses connaissances en interaction avec les actions qu'il pose sur les objets et les phénomènes, grâce à des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes. La notion de schème est centrale dans cette théorisation : « [u]n schème est la structure ou l'organisation des actions telles qu'elles se transfèrent ou se généralisent lors de la répétition de cette action en des circonstances semblables ou analogues » (Piaget et Inhelder, 1966, p. 11). Piaget (1978) affirme qu'il y a, au cours du développement du sujet, une continuité fonctionnelle entre ce qu'il appelle l'intelligence sensori-motrice à l'intelligence conceptuelle. Ce passage entre les schèmes sensori-moteurs et les schèmes conceptuels s'effectue graduellement et est caractérisé par plusieurs changements, notamment les suivants : la décentration de l'objet au profit d'une représentation intérieure « conçue comme l'ébauche ou le

[8] Dans le cadre de ce projet, ce sont particulièrement les travaux de Piaget portant sur les types de pensées du sujet ainsi que les processus qui y sont associés qui importent plutôt que les stades du développement de l'enfant puisque l'objectif de ce projet est de mieux comprendre en quoi consiste l'abstraction.

schème anticipateur de l'acte» (Piaget, 1978, p.253) où les concepts, dans l'activité consciente du sujet, prennent la forme de classes ou de relations, remplaçant ainsi la simple poursuite du but pratique qui caractérise l'intelligence sensori-motrice ; « [u]n système de signes se surajoutant aux actions permettrait la construction des concepts généraux nécessaires à ces classifications et sériations [et] la socialisation qui accompagne l'emploi des signes insérerait la pensée individuelle dans une réalité objective et commune» (Piaget, 1978, p.253). Ainsi, la représentation formelle (schèmes conceptuels) incorpore les éléments des schèmes antérieurs aux actions actuelles du sujet en les rééquilibrant.

> [...] deux facteurs étaient nécessaires au fonctionnement de tout raisonnement formel : 1) une sorte de détachement du point de vue propre, ou du point de vue immédiat, tel que l'on puisse se placer au point de vue des autres et raisonner sur les croyances admises par ceux-ci, puis plus généralement, sur toute espèce de proposition simplement hypothétique ; 2) par le fait même que l'on se place ainsi dans la croyance d'autrui ou, plus généralement, dans l'hypothèse, il faut pour raisonner formellement, que l'on parvienne à rester sur le plan de la pure assomption sans revenir subrepticement au point de la croyance propre ou de la réalité immédiate. (Piaget, 1924, p.63)

Bien que, selon lui, la pensée concrète et la pensée formelle soient constitutives de la construction de la connaissance chez le sujet, Piaget accorde à l'expérience un rôle de toute première importance dans la formation des schèmes sensori-moteurs ou conceptuels.

> Si toute connaissance, chez l'enfant, suppose une participation de l'expérience pour se constituer, cette constatation psychologique ne justifie en rien l'empirisme, car il existe donc deux sortes d'expériences : l'expérience physique conduisant à une abstraction de propriétés tirées de l'objet lui-même et l'expérience logico-mathématique avec abstraction à partir des actions ou opérations effectuées sur l'objet et non pas à partir de l'objet comme tel. (Piaget, 1955, p.33)

Il distingue, ainsi, deux types d'expériences *physiques* et *logico-mathématiques* qui mènent à des connaissances relatives aux objets ou à des connaissances construites sur la base des actions menées par le sujet, et ces connaissances sont le produit de deux modes d'abstraction.

D'une part, la connaissance physique est la résultante d'une *abstraction empirique* ou *simple* qui consiste à abstraire une ou plusieurs caractéristiques de l'objet étudié.

> Notons d'emblée que, même sous ses formes les plus élémentaires ce type d'abstraction ne saurait consister en pures « lectures », car, pour abstraire d'un objet n'importe quelle propriété comme son poids ou sa couleur, il faut déjà utiliser des instruments d'assimilation (mises en relation, significations, etc.) relevant de « schèmes » sensori-moteurs ou conceptuels non fournis par cet objet, mais construits antérieurement par le sujet. (Piaget, 1977, p.5)

Ce paragraphe reflète bien le fait que même au niveau de l'abstraction simple, la problématique se situe au sein de l'interaction dialectique sujet/objet, d'où la distance prise par rapport à une posture empiriste.

D'autre part, l'*abstraction réfléchissante* mène aux connaissances logico-mathématiques et se forme à partir des inférences tirées des coordinations générales des actions du sujet sur les objets, tout en ayant un spectre beaucoup plus étendu de considérations que l'abstraction simple. L'abstraction réfléchissante est un processus cognitif lié à la pensée qui intègre des structures inférieures déjà établies à un palier plus élevé et qui vise à faire fonctionner la pensée indépendamment des objets de la réalité sensible et à représenter ces objets de manière symbolique.

> [...] l'abstraction réfléchissante peut s'observer à tous les stades : dès les niveaux sensori-moteurs le nourrisson est capable pour résoudre un problème nouveau d'emprunter certaines coordinations à des structures déjà construites pour les réorganiser en fonction de nouvelles données. Nous ne savons rien en ces cas des prises de conscience du sujet. Par contre, aux niveaux supérieurs, lorsque la réflexion est œuvre de la pensée, il faut encore distinguer entre son processus en tant que construction, et sa thématisation rétroactive, qui devient alors une réflexion sur la réflexion : nous parlerons en ce cas d'« abstraction réfléchie » ou de pensée réflexive. (Piaget, 1977, p.6)

En même temps, l'abstraction est toujours accompagnée de généralisations ; pour Piaget (1977), il s'agit d'une relation circulaire, car l'un ne peut avoir lieu sans l'autre. Ainsi, il distingue, pour chaque mode d'abstraction, un type de généralisation (Piaget, 1977). Sur le plan de l'abstraction empirique, ce mode d'abstraction de la connaissance mène à des généralisations de type inductives qui, sans chercher à expliquer les phénomènes ou objets étudiés, visent à déterminer le degré de généralité des propriétés extraites de l'objet et à effectuer des prévisions. Concernant l'abstraction réfléchissante, celle-ci conduit vers des généralisations nécessitant un cadre logico-mathématique, « puisque les "lois" de la logique ne sont pas simplement des lois au sens de la généralité des observables, mais bien les normes de la cohérence implicatrice régissant les compositions opératoires et issues de la coordination des actions » (Piaget, 1977, p. 78), et portant vers de nouveaux objets de savoir. Les généralisations de type constructives se scindent en deux formes de généralisation : la complétive et la synthétique. La généralisation complétive consiste à étendre la structure de départ des systèmes logico-mathématiques en créant un système plus complet et plus riche. Concernant la forme synthétique, il s'agit d'une construction à partir de structures déjà existantes qui seront fusionnées de façon intentionnelle ou par construction progressive. Il s'agit donc, pour ces deux types de généralisation, du passage à un système de schèmes supérieurs, par rapport à l'ancien, dans l'exercice de la pensée chez le sujet qui est plus riche que la généralisation de type empirique puisqu'elle fait plus que réunir des traits communs en passant du concret à un palier plus abstrait.

Si Vygotski s'est particulièrement employé à démontrer l'importance des concepts scientifiques dans le développement de la pensée abstraite chez le sujet, Piaget, quant à lui, a plutôt porté son attention sur ce qu'il appelle la pensée logico-mathématique. En fait, selon ses travaux, il ne peut y avoir d'abstraction simple ou réfléchissante sans l'intervention d'un cadre logico-mathématique puisque toute connaissance de l'objet est liée aux coordinations de l'action, c'est-à-dire l'activité structurante de la pensée qui est la source de la logique (1977). D'ailleurs, Piaget insiste particulièrement sur l'aspect structurant de la pensée mathématique en spécifiant que ce qui caractérise cette pensée est son caractère anticipateur par rapport à l'expérimentation qui vient, par la suite, valider ou non les hypothèses et les intuitions formulées par les cadres logico-mathématiques de la pensée ; cette pensée n'est aucunement réductible au langage. Ces cadres sont également caractérisés par la rigueur du raisonnement qui permet de saisir le réel tout en allant au-delà de celui-ci.

Il s'agit, ainsi, de construire de nouvelles structures en prenant appui sur celles déjà établies, et ce, continuellement pour aller vers les mathématiques pures qui sont « [...] celles dont les axiomes demeurent acceptables et dont les théorèmes restent valables indépendamment de tout objet empirique ou même de tout contenu intuitif. » (Piaget, 1961, p. 242)

> Au total, les deux principaux caractères des mathématiques pures sont (a) leur indépendance à l'égard des objets empiriques et des intuitions de niveaux élémentaires (imagées ou opératoires concrètes) et (b) l'homogénéité croissante qu'elles introduisent ou reconnaissent entre les différentes branches des mathématiques, avec rupture des cloisons traditionnelles entre la géométrie et l'analyse, ou entre la topologie et l'algèbre, etc. (Piaget, 1961, p. 245)

En somme, Piaget considère, à l'encontre des interprétations empiristes, que les objets ne servent que de support à la pensée ; deux éléments fondamentaux le distinguent de l'empirisme : d'une part, c'est le sujet qui introduit des propriétés aux objets, et, d'autre part, l'expérimentation est substituée par la déduction et les mises en relation. Son approche développementale met de l'avant l'aspect structurant de la pensée, tout comme le caractère modifiable des schèmes qui s'équilibrent au fil des expériences physiques et logico-mathématiques et qui évoluent constamment vers des paliers supérieurs (schèmes conceptuels). C'est notamment grâce aux deux modes d'abstraction que le sujet parvient construire ses connaissances, modifier ses schèmes et ainsi de passer d'un niveau élémentaire (expériences physiques) à un niveau supérieur (les expériences logico-mathématiques). À ce sujet, Piaget insiste sur le fait que l'abstraction est repérable à tous les stades du développement du sujet (Piaget, 1977).

2.6.2 Les fonctions psychiques supérieures et le développement des concepts chez Vygotski

Bien que Vygotski ait concentré la majorité de ses travaux sur l'acquisition et le développement du langage, il a également porté une attention particulière sur les liens étroits entre l'apprentissage et le développement de ce qu'il appelle les fonctions psychiques - *mentales ou psychologiques dépendamment des ouvrages*- supérieures. Pionnier du socioconstructiviste, Vygotski défendait la thèse selon laquelle les fonctions mentales humaines sont d'origine sociale.

> Les fonctions psychiques supérieures dans leur ensemble, pourrions-nous dire encore, n'ont pris forme ni dans la biologie ni dans une histoire purement phylogénétique, et le mécanisme même qui est à leur base est un calque du social. (Vygotski, 1930/2014, p.287)

D'ailleurs pour répliquer au fait que les nouveau-nés possèdent déjà certaines fonctions mentales, Vygotski (1934/2012) a introduit une distinction entre les fonctions mentales dites « de base ou inférieures » et celles dites « supérieures », ces dernières ayant la particularité de se développer culturellement. Selon ses travaux, le langage joue un rôle primordial dans le développement de ces fonctions psychiques supérieures : un des moments les plus significatifs dans le développement intellectuel, qui donne lieu à une intelligence pratique, mais également abstraite, prend forme lorsque le développement du langage et l'activité pratique se conjuguent.

Parmi les questions étudiées, une d'elles concerne le développement et l'apprentissage : comment le savoir[9], comme objet extérieur au sujet, devient-il intériorisé ?

En ce sens, les travaux de Vygotski (1934/2012) ont démontré que l'apprentissage scolaire éveille certains processus mentaux (fonctions supérieures) permettant au sujet de se détacher du concret et de l'expérience immédiate, le tout articulé par le changement dans la fonction du langage dans la construction sociale : c'est-à-dire le passage du langage égocentrique au langage intériorisé. Vygotski affirme qu'il ne fait aucun doute « que la première phase dans le développement du langage chez l'enfant n'est nullement liée au développement de la pensée » (1930/2014, p.315) et que « [c]'est seulement avec la socialisation croissante de son langage et de toute son expérience que la logique se développe chez lui » (1930/2014, p. 281).

C'est d'ailleurs par l'entremise des concepts quotidiens et des concepts scientifiques que Vygotski fonde son argumentaire.

Avant tout, selon Vygotski, tout concept implique des actes de généralisations. Il y a, bien sûr, différents niveaux de généralisation selon l'âge du sujet et le concept en lui-même. Ces actes de généralisation se réalisent par l'entremise de fonctions psychiques complexes et un concept peut contenir plusieurs couches de généralisations qui se distinguent par leur distance au concret et à l'abstrait. Ainsi, les opérations mentales inférieures sont toujours des cas particuliers de l'opération supérieure : par exemple le concept de marguerite ou de rose est à une distance moindre du concret que ne l'est le concept de fleur.

> Telle est la force de l'abstraction : elle présente le processus à examiner à l'état pur, indépendant, non-recouvert [...] nous pourrions dire que ce processus consiste dans le passage d'une forme de comportement-

[9] Cette question, abordée par Vygotski, est au cœur de la problématique du présent projet de recherche puisque l'élaboration des savoirs, en tant qu'objets culturels, implique la mise en acte de processus d'abstraction et de généralisation.

> inférieure- à une autre que nous qualifions par convention de supérieure, en tant que plus complexe sous le rapport génétique et fonctionnel. (Vygotski, 1930/2014, p.189)

Si on prend en exemple le domaine des mathématiques, « toute opération arithmétique est un cas particulier de l'opération algébrique » (Vygotski, 1934/2012, p.305), en ce sens, l'algèbre se situe à un niveau supérieur puisqu'il est un champ de savoir plus abstrait et libère la pensée de ses attaches au concret (Vygotski, 1934/2012). Remarquons que cette « libération » des attaches au concret est une des richesses de la pensée algébrique, car elle permet d'opérationnaliser le raisonnement.

Les concepts quotidiens ou spontanés sont définis par leur rapport étroit à l'expérience du sujet dans sa quête pour donner sens aux « objets » de son quotidien. Ils sont caractérisés par la non-conscience du sujet quant aux relations dans l'utilisation qu'il en fait. Par exemple, le concept de frère chez un enfant de 5 ans prend du sens dans son quotidien, mais s'il lui est demandé d'expliquer ce que signifie le concept de frère, il éprouvera de grandes difficultés à le verbaliser hors de son contexte d'utilisation (Vygotski, 1934/2012). Les concepts quotidiens se développent chez le sujet à partir de l'objet ou du phénomène (le concret), c'est-à-dire des propriétés élémentaires inférieures, et par des interactions caractérisées par des processus de généralisation. L'intériorisation des concepts quotidiens fait donc appel aux fonctions mentales dites « de base ou inférieures ».

Les concepts scientifiques se développent, chez le sujet, de façon particulière et opposée aux concepts quotidiens. Si l'intériorisation des concepts spontanés se réalise à partir des propriétés inférieures de l'objet jusqu'aux propriétés supérieures (du bas vers le haut), celle des concepts scientifiques s'effectue du haut, donc d'un système organisé (système de concepts) et détaché d'un contexte concret, vers le bas, c'est-à-dire vers l'expérience et le phénomène.

L'appropriation des concepts scientifiques se distingue également de celle des concepts quotidiens par le fait que ceux-ci se présentent dans l'apprentissage scolaire et qu'ils nécessitent un acte volontaire et non un besoin immédiat d'action sur la réalité, ce qui constitue un passage à l'acte conscient du sujet. En contexte d'enseignement, « on apprend à l'enfant ce qu'il n'a pas devant les yeux, ce qui dépasse infiniment les limites de son expérience immédiate, actuelle et potentielle » (Vygotski, 1934/2012, p.307).

D'ailleurs, les concepts scientifiques sont plus définis et permettent une prise de conscience progressive des caractéristiques et des relations que l'on peut établir avec d'autres concepts. Cette prise de conscience est nécessaire pour établir des liens et identifier des ressemblances et des différences avec d'autres concepts, c'est-à-dire pour identifier des généralisations et construire des systèmes de concepts, en se distanciant des objets et phénomènes immédiats ou primitifs (Vygotski, 1934/2012).

Ainsi, les concepts scientifiques se développent chez le sujet grâce aux fonctions psychiques supérieures et en collaboration avec le milieu. Le passage entre les fonctions de base et supérieures est effectué par l'apprentissage scolaire, mais également par la modification fonctionnelle de la conscience du sujet lorsqu'il atteint l'âge scolaire, comme la capacité de prise de conscience, l'intentionnalité, l'intellectualisation, l'attention, l'intervention de la volonté et la mémoire : « En ce qu'au stade supérieur du développement l'homme en arrive à maîtriser son propre comportement, soumet à son pouvoir ses propres réactions. » (Vygotski, 1930/2014, p.298).

Les traits distinctifs des fonctions psychiques supérieures, qui rendent possible l'apprentissage de concepts scientifiques, se situent principalement au niveau de la prise de conscience du sujet de ses généralisations des processus psychologiques qui conduisent à une certaine maîtrise de ses actions, mais également dans le caractère volontaire de la pensée scientifique propre à l'apprentissage scolaire ; ainsi « l'abstraction elle-même se produit parce que l'attention est dirigée à l'aide de signes indicateurs » (Vygotski, 1930/2014, p.403). C'est donc lors des leçons et par des interactions dirigées que se développerait la pensée abstraite du sujet.

D'ailleurs, la théorie Vygotskienne souligne l'importance de la collaboration dans l'acquisition de fonctions supérieures chez le sujet apprenant, et donc dans l'acquisition des concepts scientifiques.

> Le développement d'un concept scientifique touchant à la vie sociale s'effectue dans les conditions d'un processus éducatif, qui représente une forme spécifique de collaboration systématique entre le pédagogue et l'enfant, collaboration au cours de laquelle les fonctions psychiques supérieures de l'enfant mûrissent avec l'aide et la participation de l'adulte (Vygotski, 1934/2012, p.284).

> [L]e développement des processus qui conduisent à la formation des concepts a des racines profondes dans l'enfance, mais ce n'est qu'à l'adolescence que mûrissent, prennent forme et se développent les fonctions intellectuelles qui, combinées de manière originale, constituent la base psychique du processus de formation des concepts. (Vygotski, 1934/2012, p.214)

Finalement, Vygotski insiste sur le fait que ce sont les apprentissages scolaires qui déclenchent le développement des fonctions mentales supérieures et que l'acquisition d'objets de savoir tels que l'algèbre ou l'écriture n'est pas la résultante du seul développement biologique de l'enfant, mais d'une action collective socialisante :

> Il n'existe pas d'enfant dont les fonctions arithmétiques arriveraient naturellement à maturité ; au contraire, dès que l'enfant atteint, disons, l'âge scolaire ou un peu avant, il reçoit de manière externe des personnes qui l'entourent tout un ensemble de notions arithmétiques et d'opérations logiques. (Vygotski, 1930/2014, p.291)

2.6.3 L'acquisition du concept chez Bruner

Bruner (1966, 1993), se disant constructiviste, s'est inspiré des travaux de Piaget pour proposer une théorie de l'apprentissage dans laquelle le sujet occupe un rôle essentiel dans la construction de ses connaissances et plus tard, il a introduit des éléments de l'approche socioculturelle dans l'apprentissage en s'inspirant de la théorie Vygotskienne. Il insiste sur le fait que le développement cognitif ainsi que les instruments de la culture sont indissociables. Ainsi, il a proposé une approche constructiviste interactionniste inspirée à la fois de Piaget et de Vygotski créant une rupture avec les théories du traitement de l'information prédominantes de l'époque.

Parmi les thématiques explorées par Bruner, à propos du développement cognitif, il accorde une grande partie de ses travaux à comprendre le processus de classification, de catégorisation et d'acquisition des concepts par le sujet. Les concepts sont, selon Bruner, Goodnow et Austin (1986), des catégories construites par le sujet pour l'aider à classifier les objets, les idées ou les événements de son environnement qui ont des attributs en commun.

> The categories in terms of which we group the events of the world around us are constructions or inventions. The class of prime numbers, animal species, the huge range of colors dumped into the category of "blue", squares and circles; all of these are inventions and not "discoveries". They do not "exist" in the environment. The objects of the environment provide the cues or features on which our groupings may be based, but they provide cues that could serve for many groupings other than the ones we make. (Bruner, Goodnow et Austin, 1986, p.232)

Bruner définit la catégorisation comme : « a process of achievement: discovering the defining attributes of the environment so that they may serve with their proper values as the criteria for making judgments about identity » (Bruner, Goodnow et Austin, 1986, p.30). D'ailleurs, il existe différents types de catégories – ou concepts - qui se distinguent par la nature des critères de sélection des attributs effectués par le sujet ou ayant été établis par convention. La catégorie « conjunctive » est définie par la présence de tous les attributs qui définissent le concept. Une catégorie particulièrement difficile est la « disjunctive » qui est définie par la présence de l'un ou de l'autre des attributs qui définissent la catégorie ou le concept lors de l'identification de ceux-ci ou celui-ci chez l'objet ou dans la situation observée - par exemple les critères de diagnostic d'une réaction allergique. La catégorie de type « relational » doit comprendre une relation - un lien, une équivalence- spécifique entre les attributs. Finalement, la catégorie ou le concept « probabilistic », le plus fréquent dans notre environnement, est caractérisé par le caractère incertain que les événements présentent les attributs d'une classe définie ;

ainsi, le sujet doit estimer la probabilité que l'« objet » présente les propriétés ou les attributs d'une classe définie.

Le type de catégorisation utilisé sera, entre autres, tributaire du stade de développement du sujet.

D'ailleurs, selon Bruner (1966), il existe trois modes de représentation du monde chez le sujet pensant. Le premier mode, nommé énactif, est celui dans lequel les informations sont représentées en termes d'actions dites habituelles et quotidiennes qui sont effectuées de façon procédurale. Le mode iconique (les représentations visuelles) est celui où le sujet construit des représentations qui sont indépendantes des actions qu'il est possible d'exercer sur les objets. Le sujet va donc intérioriser les informations sensorielles et les actions en schéma stables. Il s'agit là d'une organisation perceptive particulièrement utile lors de l'acte de classification effectuée par le sujet. Finalement, le mode de représentation symbolique est caractérisé par une construction qu'effectue le sujet qui est arbitraire et abstraite, c'est-à-dire éloignée de l'objet concret. En ce sens, les systèmes de symboles servent d'outils pour les représentations et le langage est un support majeur et déterminant du développement cognitif. À ce niveau, le sujet commence à utiliser des concepts qui n'existent pas physiquement, mais sous forme d'idées (par exemple, le concept de « personne influente ») et ainsi, il conceptualise les situations à l'aide de représentations abstraites (Bruner, Goodnow et Austin, 1986).

En définitive, ces modes de représentation sont acquis successivement au cours du développement, mais ils constituent également les trois modes d'activité cognitive du sujet d'âge adulte (Bruner, 1966). Ces trois niveaux s'articulent les uns aux autres en fonction des expériences du sujet ainsi que de celles provenant de sa culture et ne correspondent pas nécessairement à des stades précis. En ce qui concerne les deux premiers modes, ils se construisent en interaction avec le milieu physique et les expériences concrètes alors que le 3e mode, quant à lui, est tributaire de la culture et est indissociable du langage.

Plus l'enfant vieillit, plus le système symbolique prend de l'importance et plus sa compréhension du monde devient abstraite, c'est-à-dire que l'activité conceptuelle prend une plus grande place que l'activité perceptive. La représentation symbolique chez le sujet se construit à l'aide de classifications qui sont, au départ, plus concrètes, mais qui deviennent de plus en plus abstraites et liées au langage ; donc détachées des caractéristiques physiques.

> One of the principal differences between the two form of categorization - the "perceptual" on the one hand and the "conceptual" on the other - is the immediacy to experience of the attributes by which their fitness to a category is determined. (Bruner, Goodnow et Austin, 1986, p.9)

Au contraire de Piaget, Bruner (1993) accorde une grande valeur au développement du langage et à son apport dans le développement intellectuel. Toutefois, selon Bruner (1993), le langage n'est pas la première preuve d'abstraction, car dès la petite enfance, les processus cognitifs semblent être orientés vers un but qui relève d'une intention de communiquer, d'une systématisation ayant un caractère abstrait et le tout, dans le but de tirer des règles de fonctionnement générales et ainsi, de définir l'environnement.

En ce sens, la pensée s'organise selon les similarités observées et c'est par un acte de discrimination qu'elle organise les objets ainsi que leurs propriétés ; la pensée se précise avec le temps. Le sujet est donc en alerte afin de définir et de sélectionner les attributs du nouveau concept afin de pouvoir le différencier d'autres concepts. Une telle activité est teintée des structures cognitives et des connaissances de celui qui en fait l'action. C'est selon ses expériences et connaissances préalables que le sujet classe et organise les attributs des « objets », mais également selon le contexte de la tâche. En effet, c'est le contexte de la tâche qui permet au sujet d'effectuer des hypothèses à propos du concept à atteindre ; le contexte oriente ainsi toutes ses décisions.

Le sujet s'engage donc dans une démarche de résolution de problème dans laquelle il émet des hypothèses quant à la nature du concept à atteindre, tente de déterminer quels sont les attributs des « objets » à sélectionner, détermine si la catégorisation effectuée est valide pour ensuite inférer et généraliser sur d'autres cas, objets ou événements.

L'acte de classifier s'effectue à l'aide de comparaisons dans le but d'établir des ressemblances et des différences qui mènent le sujet à créer des catégories. « A category is, simply, a range of discriminably different events that are treated "as if" equivalent. » (Bruner, Goodnow et Austin, 1986, p.231). Par exemple, devant plusieurs formes (carrés, triangles et rectangles) de couleurs différentes, certains vont les classer selon les couleurs et d'autres selon la forme, car ce qu'ils perçoivent est directement en lien avec leurs connaissances et les expériences acquises propres à leur âge. Toutefois, si cette tâche est mise en contexte, l'acte de classification et de catégorisation sera modifié par la définition de cette dernière. Bruner remarque également que plus « l'objet » étudié comporte un grand nombre d'attributs discriminables, plus le travail pour déterminer les attributs à sélectionner dans la définition du concept sera ardu.

Après avoir fait une première ou quelques tentatives de catégorisations, le sujet doit déterminer si ses hypothèses sont valides ou non. Lors de l'apprentissage, il va, à partir de plusieurs exemples, faire des inférences et en tirer des conclusions pour ensuite en faire la vérification. En cas d'erreur, le processus recommencera avec une nouvelle hypothèse, à partir d'autres inférences, et ce, jusqu'à ce que les bonnes relations entre les objets soient identifiées.

> There appear to be four general procedures by which people reassure themselves that their categorizations are « valid ». The first is by recourse to an ultimate criterion, the second is test by consistency; the third, test by consensus and the fourth, test by affective congruence. (Bruner, Goodnow et Austin, 1986, p. 17)

Lorsque l'inférence est correcte et que la catégorisation est validée, il est possible de passer à l'étape supérieure qui est la généralisation à un plus grand ensemble

« d'objets ». Ainsi, le sujet va tenter d'appliquer le concept dans différents contextes dans le but d'en dégager une définition ou une règle.

> The first thing that may come to mind is that the person knows he has learned the concept when he feels he is able to predict the status of new instances with a «sufficiently high degree of certainty » [...] we will find that some people will continue to explore obvious attributes and abstract not obvious ones to explore as long as they are not able to categorize perfectly. (Bruner, Goodnow et Austin, 1986, p.53)

Ce qui est important, plus le niveau de difficulté augmente, c'est de spécifier par rapport à quels critères la classification d'objets est effectuée et c'est notamment par l'entremise de la tâche et de l'intentionnalité émergeant du contexte que le sujet pourra orienter ses hypothèses et ses actions. La tâche et le but poursuivi consistent ainsi en des éléments particulièrement fondamentaux dans le cadre de la conceptualisation.

La catégorisation dans le but d'atteindre des concepts de types « disjunctive, relational and probabilistic » est beaucoup plus complexe que celle pour atteindre des concepts de type « conjunctive », considérés plus simples, car pour comparer les trois premiers types, il est nécessaire d'effectuer différents rapprochements en se détachant de l'objet concret et cela nécessite une plus grande activité mentale.

> The difficulty with disjunctive concepts is their arbitrariness; the lack of any apparent relation between these attributes which can substitute for one another [...] The relational concept or category is one defined by a specifiable relationship between defining attributes. (Bruner, Goodnow et Austin, 1986, p. 43)

En synthèse, l'acte de conceptualisation, chez Bruner, relève d'une démarche de résolution de problème dans laquelle le sujet, influencé par la nature de la tâche ainsi que par le contexte, tente de définir les critères selon lesquels il va catégoriser des objets, des événements, des idées, etc.

2.6.4 La perspective cognitiviste : la pensée d'ordre supérieur

Vers la fin du 20e siècle, l'approche cognitiviste s'est imposée et a développé une théorie de la connaissance en réaction aux théories béhavioristes de l'époque. Un des principaux arguments qui a permis aux tenants de cette approche de se positionner est en lien avec la mémoire humaine et plus particulièrement, les travaux qui ont démontré la capacité limitée celle-ci (Miller, 1956) remettant ainsi en question un des fondements de l'approche béhavioriste stipulant que la mémoire serait un réceptacle vide dans lequel les connaissances s'emmagasineraient. Ce changement de paradigme a donc été possible grâce à l'ouverture de la « boîte noire » des processus mentaux ainsi que le développement de l'informatique (machine de Turing) qui, après la Seconde Guerre mondiale, ont permis plusieurs hypothèses et travaux portant sur le fonctionnement du système nerveux (Legrand, 1990). Il importe de spécifier que ce courant théorique est souvent relié aux travaux sur la construction de l'abstraction de Bruner qui est considéré comme l'un des précurseurs du cognitivisme (Legrand,1990). La psychologie cognitive a évolué de deux façons différentes. La première forme s'inspire des opérations produites dans un ordinateur et considère ainsi le cerveau humain comme un système de traitement de l'information (Ausubel, 1960). La seconde se concentre sur l'acquisition graduelle des stratégies mentales qui sont considérées fondamentales au sein d'une démarche structurée d'apprentissage (Tardif, 1992).

Ausubel (1918-2008), l'un des théoriciens importants de l'approche du traitement de l'information, a développé une théorie de l'apprentissage visant l'acquisition d'un ordre supérieur de pensée « *a higher order thinking* » (Ivie, 1998, p.36). L'ordre supérieur de pensée est, selon Ivie (1998), la finalité de l'éducation sans que toutefois les acteurs concernés sachent exactement ce que cette notion signifie et implique. Dans un effort de clarification, Ivie (1998, p. 36) énonce trois critères de cet ordre de pensée en empruntant aux théories de Jerome S. Bruner, Sexton et Poling ainsi que Max Black. Ainsi, cet ordre implique l'utilisation de structures abstraites de pensée pour saisir la structure complexe des savoirs. Il implique également l'organisation de l'information en un système organisé et intégré c'est-à-dire la capacité du sujet d'établir des liens et des relations entre les différentes informations. Finalement, l'application de règles de logique et de jugement pour développer le raisonnement semble le critère le plus ardu à atteindre (Ivie, 1998). Ainsi, l'apprentissage vers un ordre de pensée supérieur présuppose une structure cognitive organisée (Ivie, 1998) et cet aspect serait la variable la plus fondamentale influençant la capacité du sujet à acquérir de nouvelles connaissances. Ausubel (1960) conçoit la connaissance comme un système intégré et l'esprit humain organiserait (traiterait) l'information (faire des liens entre les idées) dans des catégories selon des règles logiques. Les informations seraient ainsi classées et hiérarchisées dans des « boîtes » selon leur importance. L'apprentissage est conçu par la psychologie cognitive comme une activité de traitement de l'information (Tardif, 1992).

L'apprentissage signifiant[10] (*meaningful learning*) (Ivie, 1998 ; Tardif, 1992) implique alors la représentation et l'organisation des connaissances chez le sujet. Dans le cadre de ce processus actif et constructif, le phénomène d'ancrage est d'une importance capitale puisqu'il s'agit d'intégrer les nouvelles connaissances aux anciennes déjà encodées en mémoire et ceci permet une meilleure organisation des structures mentales (Ivie, 1998 ; Tardif, 1992). Tardif (1992, p.29) compare alors l'élève à un réalisateur de films qui doit effectuer un court montage à partir d'une importante quantité de matériel de tournage tout en conservant l'essence du scénario.

À cette définition de la constitution d'un ordre supérieur de pensée, Tardif (1992, p.27) ajoute que l'apprentissage implique l'acquisition d'un « répertoire de connaissances », de stratégies cognitives et métacognitives. Si la psychologie cognitive entrevoit l'apprentissage comme « l'acquisition de connaissances organisées, intégrées systématiquement en mémoire à long terme » (Tardif, 1992, p.44), elle est beaucoup

[10] L'apprentissage signifiant semble être lié à l'encodage d'un savoir en mémoire et l'intégration de celui-ci à un système d'informations (intégration des informations dans une structure cognitive) (Ivie, 1998, p.40).

plus que cela pour Tardif qui, en s'appuyant sur les travaux de Pressley et Harris (1990), met de l'avant que l'utilisation fonctionnelle des connaissances implique la mise en application de stratégies cognitives et métacognitives.

Dans son traitement d'informations cognitives, le sujet choisit les stratégies les plus susceptibles de lui permettre de réaliser un apprentissage et ainsi, il planifie les étapes pour réaliser sa tâche. Les stratégies cognitives sont différentes selon les domaines d'enseignement et permettent à l'élève de résoudre la tâche donnée, mais toutes les stratégies ne se valent pas nécessairement (Pressley et Harris, 1990 ; Tardif, 1992). Certaines sont plus couteuses cognitivement que d'autres et il importe que l'enseignant dévoile et explicite les stratégies possibles et qu'il « rende les élèves conscients » (Tardif, 1992, p.44) de leur efficacité.

Mettre en application les stratégies sélectionnées implique des informations métacognitives, selon Tardif (1992), afin que la mise en relation entre les connaissances déjà acquises et les nouvelles informations présentées se réalise. Ces informations métacognitives lui permettent de superviser la mise en application de la tâche, d'évaluer son engagement dans celle-ci et d'évaluer la tâche lorsqu'elle est terminée. Tardif retient particulièrement la définition de la métacognition telle qu'elle est formalisée par Marzano et ses collègues (1988) qui considèrent qu'elle comporte deux niveaux : la connaissance et le contrôle. Au niveau de la connaissance, la métacognition réfère la conscience des exigences de la tâche et des stratégies et de connaissances qui lui permettront de réaliser effectivement la tâche (facteurs cognitifs). De plus des facteurs affectifs entrent en jeu puisque l'élève a une perception du contrôle qu'il peut opérer sur sa réussite ou son échec face à la tâche faisant ainsi référence à son engagement et sa persistance. Au niveau du contrôle, la gestion que l'élève effectue de ses stratégies cognitives et affectives (gestion de soi) dans la réalisation de la tâche. Ce niveau est communément nommé « autorégulation » (Tardif, 1992) et cette composante de la métacognition serait très liée à la motivation.

Au sein de cette approche, la construction d'un ordre supérieur de pensée est une activité exclusivement cognitive à la charge de l'apprenant et des stratégies qu'il met en place. L'approche cognitiviste se distingue ainsi de l'approche béhavioriste de l'époque en réintroduisant les modèles mentaux. Elle se distingue également des approches (socio)constructivistes puisqu'elle centre son objet d'étude sur la cognition et les structures mentales du sujet et fournit un modèle explicatif de la connaissance et prescriptif de l'enseignement en évacuant l'apport de la culture.

2.6.5 La conceptualisation chez Vergnaud : entre la psychologie et la didactique

En 1990, Gérard Vergnaud propose une théorie qu'il qualifie de théorie psychologique du concept. Provenant de la psychologie, elle contribue à la didactique par le rôle fondamental qui est accordé aux savoirs spécifiques et à l'épistémologie des savoirs. Les éléments constitutifs de la théorie des champs conceptuels (TCC) sont les *situations,* les *schèmes* et bien sûr, les *concepts.* C'est à partir de ces trois éléments que l'auteur tente d'expliquer l'acte de conceptualisation chez le sujet.

Selon Vergnaud (1988, 1990), trois ensembles sont à considérer dans l'activité conceptualisante du sujet : S (le référent), I (le signifié) et ζ (le signifiant) : le premier ensemble (S) fait référence à la variété de situations qui permettent de donner du sens au concept. Le second (I) est celui des invariants opératoires qui sont constitutifs du fonctionnement des schèmes. Un schème est composé de règles d'action, d'anticipations/inférences et d'invariants opératoires (théorèmes-en-acte et concepts-en-acte)[11] et bien qu'ils soient souvent implicites, les invariants opératoires sont indispensables à l'acte de conceptualisation du sujet puisque, dans le cadre de la résolution de la tâche, ils organisent la recherche de l'information appropriée et vont également régir les inférences. Dans ce cadre constructiviste (il ne faut pas oublier que

[11] Les théorèmes-en-acte et les concepts-en-acte sont deux des trois logiques des invariants opératoires, de type « propositions » et « fonctions propositionnelles ». Ils se construisent dans l'action et peuvent être utilisés sans toutefois être expliqués/formulés par le sujet.

Vergnaud était un disciple de Piaget), c'est, entre autres, l'accommodation des schèmes qui permet aux sujets d'élaborer de nouveaux savoirs et de développer des compétences de plus en plus élevées.

Le dernier ensemble (ζ) désigne les différentes représentations langagières, non langagières et symboliques qui représentent le concept, ses propriétés, des procédures et des situations. À ce sujet, le langage, en plus d'avoir des fonctions de représentation et de communication, est une aide à la pensée du sujet lors de la conceptualisation et, en ce sens, sa fonction est triple puisqu'il permet de désigner, de raisonner et d'anticiper des effets et des buts pour, ainsi, favoriser la transformation des connaissances en des niveaux de plus en plus élevés. Le langage peut donc être contenu dans les schèmes ; cependant, Vergnaud remarque que : « La pensée ne fonctionne pas bien sans signifiants, ce qui ne veut pas dire qu'elle n'existe pas sans signifiants » (1988, p.53).

Dans l'ensemble, bien que Vergnaud accorde un rôle considérable au langage dans l'acte de conceptualisation, il accorde pourtant une plus grande importance aux deux premiers ensembles (référent et signifié) : « La référence pour un psychologue cognitiviste, c'est d'abord le réel, et les situations dans lesquelles se joue la transformation des compétences et des conceptions du sujet » (1991, p.85). Ainsi, il considère que l'acte de conceptualisation est plus tributaire de la représentation que des mots et que ce sont les invariants opératoires qui permettent au sujet de surpasser ses conceptions antérieures lors des nouveaux apprentissages : « Dans cetteperspective, on peut considérer que la conceptualisation est une forme d'action : comme l'action, elle repose sur des informations incomplètes, par rapport auxquelles il faut cependant prendre des décisions » (Vergnaud, 2002, p.42).

Vygotski, Bruner et Vergnaud s'intéressent tous les trois à l'apprentissage des savoirs scolaires ; dans ce contexte, les processus d'abstraction et de généralisation sont fortement liés aux processus de conceptualisation caractérisant l'élaboration de savoirs spécifiques. Ces processus, bien qu'ils accordent une place fondamentale au sujet, ne s'y réduisent pas. Le rôle de l'environnement (situations et contexte) est ainsi fondamental pour les trois auteurs, même si sa nature peut varier d'un auteur à l'autre, certains attribuant un poids plus important au langage et à la culture.

2.7 Abstraction, conceptualisation et symbolisme selon les différents courants de la didactique des mathématiques

L'enseignement et l'apprentissage des mathématiques sont abordés de différentes façons chez les didacticiens selon les fondements théoriques qui sous-tendent leurs travaux.

Par la nature spécifique des objets mathématiques, l'apprentissage de ces objets implique une attention spéciale aux aspects sémiotiques (Barallobres, 2017 ; Bardini, 2003 ; Chevallard, 1989 ; D'amore et Fandiño Pinilla, 2001 ; Dreyfus, Hershkowitz et Schwarz, 2001 ; Hazzan et Zazkis, 2005 ; Mercier, 2012 ; Winsløw, 2008). La conceptualisation en mathématiques dépasse la manipulation physique des objets sensibles : « la conceptualisation n'est donc pas fondée sur des significations s'appuyant sur la réalité concrète, et elle ne peut pas l'être, vu que, dans les mathématiques, des renvois ostensibles ne sont pas possibles » (D'amore et Fandiño Pinilla, 2001, p.116). En ce sens, les signes et les représentations jouent un rôle essentiel dans l'apprentissage des mathématiques et même, pour Hoffman (2006), l'essence des mathématiques consiste à travailler avec des représentations.

2.7.1 L'abstraction et la conceptualisation interprétées par le courant anglo-saxon

Pour Dreyfus, Hershkowitz et Schwarz (2001, p. 307), l'abstraction est un processus de réorganisation des connaissances antérieures dans lequel le contexte et la constitution d'une nouvelle structure occupent une place fondamentale : « We take abstraction to be an activity of vertically reorganising previously constructed mathematical knowledge into a new structure. Abstraction is thus a context dependent process. ». Ces processus sont considérés comme une activité dans laquelle de nouvelles relations sont établies permettant l'élaboration de connaissances plus développées. Selon le modèle constitué par Dreyfus, Hershkowitz et Schwarz (2001), l'abstraction est constituée de trois actions épistémiques : *reconnaître* (Recognising), *assembler* (Constructing) et *construire avec* (Building-With). L'action de *reconnaître* une structure mathématique familière fait appel aux situations déjà vécues par l'élève et qu'il peut, par analogie, lier en vérifiant qu'elle correspond, en partie ou totalement, à la nouvelle situation qui lui est présentée. L'étape centrale de l'abstraction est celle d'*assembler* qui consiste à lier les connaissances déjà présentes (reconnues) et les artéfacts de la connaissance[12] dans le but d'en produire une nouvelle structure plus abstraite, mais qui deviendra, dans le temps, plus familière pour l'élève (par l'usage et la fréquentation). Finalement, l'activité de *construire avec* demande la combinaison des artéfacts de la connaissance existants pour atteindre un but comme la résolution d'un problème ou la justification d'une proposition. Une même tâche peut conduire les élèves à différentes actions épistémiques selon l'historique et le bagage culturel propre à chacun des élèves.

Observons que la description des trois actions épistémiques constituant l'abstraction est centrée sur l'élève comme si, d'une certaine manière, ces trois actions lui étaient intrinsèques ; le rôle de l'enseignant comme représentant de la culture mathématique ainsi que la nature des situations auxquelles l'élève est confronté ne sont pas mentionnés explicitement.

En ce qui concerne Sfard (1991), celle-ci affirme que l'apprentissage des mathématiques consiste en un processus dialectique entre une conception opératoire (procédurale) et une conception structurelle (conceptuelle) de la même notion mathématique. La conception opératoire fait référence à des procédures, des actions et

---

[12] Les artéfacts de la connaissance (*Knowledge artefacts*) peuvent être tangibles (des documents, des images, des objets) et intangibles (pensées, conversations, métaphores). L'utilisation des artéfacts de la connaissance permet de partager, mais également de transférer les connaissances (Abuhimed, Beheshti, Cole, Alghamdi et Lamoureux, 2013).

des algorithmes. Cela implique que la notion mathématique est perçue comme une possibilité plutôt qu'une entité et elle prend forme à partir d'une requête dans une séquence d'actions ; la conception structurelle des notions mathématiques correspond à les traiter comme des entités abstraites, à pouvoir s'y référer en tant qu'objet, à une idée qu'il est possible de manipuler comme un tout sans avoir besoin d'entrer dans les détails. En s'appuyant sur une analyse historique et cognitive, Sfard (1991) fait l'hypothèse que, dans l'apprentissage des mathématiques, la conception opératoire précède la conception structurelle. De ce fait, plusieurs degrés d'abstraction/structuralisation séparent et lient les deux conceptions dans le développement des concepts. La première étape de l'activité de la formation des concepts mathématiques, *l'intériorisation*, est celle où l'apprenant se familiarise avec la procédure, ce qui l'amène, éventuellement, à acquérir un nouveau concept. Durant l'étape de *condensation*, l'élève est capable de considérer une certaine procédure comme un ensemble sans avoir à recourir à des exemples particuliers. Il est plus aisé de passer d'une représentation à une autre du concept, mais l'élève est toujours très attaché à la procédure. C'est lors de la *réification* que l'élève considère les différentes représentations qu'il avait du concept en une seule représentation (généraliser). Cette nouvelle entité créée n'est plus considérée en tant que procédure, mais en tant qu'objet faisant partie d'une catégorie et dont il est possible d'en étudier les propriétés. Lors de l'étape de réification, l'intériorisation de concepts de plus haut niveau commence.

Abordant l'acte de compréhension comme étant un processus propre à l'élève, mais également selon les caractéristiques propres aux objets de savoir, le modèle développé par Sierpinska (1990) permet de concevoir l'acte de compréhension d'un concept selon une perspective « positive » et « négative » qui dépend du point de vue de l'observateur. Dans un premier temps, l'acte de compréhension peut être perçu comme une nouvelle manière de connaître basée sur les connaissances, convictions et croyances antérieures :

> Understanding the concept will then be conceived as the act of grasping

> this meaning This act will probably be an act of generalization and synthesis of meanings related to particular elements of the "structure" of the concept (the "structure" being the net of senses of the sentences we have considered). These particular meanings also have to be grasped in acts of understanding. (Sierpinska, 1990, p.27)

En lien avec cette définition, un lien peut être établi entre ce que Sierpinska nomme l'acte de compréhension et les processus d'abstraction déjà mentionnés puisque la généralisation et la synthèse sont des formes d'abstraction. Dans le but de créer une catégorisation de l'acte de compréhension en mathématique, Sierpinska combine les idées de Locke, Dewey et Hoyles et ainsi identifier quatre moments déterminants de la formation des concepts. *L'identification* est le premier stade de la compréhension où l'apprenant identifie/perçoit des objets liés au concept de façon globale. Ce n'est qu'au stade de *discrimination* qu'il sera capable de distinguer des idées, des objets et des propriétés qu'il confondait auparavant. La *généralisation* est caractérisée par la prise de conscience de l'apprenant concernant certaines hypothèses pouvant être ignorées, mais également de la possibilité d'étendre le rayon d'application du concept mathématique. Finalement, la *synthétisation* permet de saisir les relations entre plusieurs objets, propriétés et faits pour ensuite les organiser en un tout cohérent.

Dans un second temps, ce qui distingue cette auteure anglophone des autres cités précédemment est l'importance accordée à la construction et au développement historique du concept, qui est la notion d'obstacle épistémologique, dans l'acte de compréhension. « Un obstacle épistémologique est constitutif de la connaissance en ce sens que celui qui l'a rencontré et surmonté a une connaissance différente de celui qui ne s'y est pas heurté. » (Bessot, 2003, p.20). Ces obstacles peuvent être retrouvés dans l'histoire des concepts et lors de l'apprentissage, il est impossible et non souhaitable d'y échapper vu leur rôle constitutif de la connaissance à atteindre. Dans l'acte de compréhension, il s'agit de surmonter des obstacles épistémologiques, mais également d'en rencontrer de nouveaux (Sierpinska, 1990).

« A description of the acts of understanding a mathematical concept would thus contain a list of the epistemological obstacles related to that concept, providing us with fuller information about its meaning » (*Ibid*, p.28).

De ce point de vue « négatif », il est possible de considérer la compréhension en mathématique en termes d'obstacles épistémologiques qui sont liés au concept en question qui permettent ainsi d'avoir une meilleure idée de sa signification. Analyser la conceptualisation de cet angle permet de relever ce qui était insuffisant et erroné dans la façon de comprendre de l'apprenant.

En s'appuyant sur le travail des auteurs précédents, Hazzan et Zazkis (2005) proposent un cadre théorique permettant d'interpréter les comportements des élèves lorsqu'ils doivent faire face à des tâches impliquant trois différents niveaux d'abstraction.

La première interprétation des niveaux d'abstraction rejoint la définition d'abstraction donnée par Dreyfus, Hershkowitz et Schwarz (2001) : il s'agit de la *qualité des relations établies entre l'objet de la pensée et la personne*. Pour chaque concept et chaque personne, il est possible d'observer différents niveaux d'abstraction qui reflètent leur historique avec ce concept : plus l'élève a rencontré ce concept, moins il semble abstrait. Il s'agit donc de faire d'une idée non familière une idée familière en la réorganisant, en structurant les informations et en établissant des liens avec les situations similaires vécues. Cette représentation de l'abstraction accorde une importance particulière à l'élève dans le processus d'abstraction puisque cela dépend de son historique personnel.

La deuxième interprétation des niveaux d'abstraction, qui rejoint, entre autres, les travaux de Sfard (1991), est basée sur la *dualité procédure-objet*. D'un tel angle, une importante distinction est effectuée entre la conception des concepts mathématiques comme une procédure et comme un objet. Par conséquent, dans l'apprentissage d'un concept mathématique, la conception opératoire (conception procédurale) serait moins abstraite et précèderait la conception du concept structurelle d'un objet mathématique.

La troisième interprétation des niveaux d'abstraction conçoit l'abstraction à partir du *degré de complexité des concepts mathématiques* « the degree of complexity of the mathematical concept of thought » (Hazzan et Zazkis, 2005, p.104). Ainsi, plus un concept mathématique a de composantes, plus il serait abstrait puisqu'un plus grand nombre de détails doivent être ignorés lorsque vient le temps d'analyser le concept comme un tout. Ce sont les moyens pris par les élèves pour remplacer un ensemble d'éléments par un de ses éléments et ainsi travailler avec un objet comportant moins de composantes qui sont étudiés.

Pour tenter d'expliquer le comportement des élèves, ils élaborent le cadre théorique de « réduction de l'abstraction » qui se rapporte à des situations dans lesquelles les élèves se révèlent incapables de manipuler les concepts en jeu dans le problème présenté et qui, inconsciemment, vont réduire le niveau d'abstraction des concepts impliqués pour qu'ils soient mentalement accessibles. Ce cadre a particulièrement été utilisé dans l'étude de problèmes d'algèbre puisque c'est la première fois que les élèves sont amenés à travailler, selon les auteurs, avec des concepts ayant été introduits de manière abstraite.

2.7.2 L'activité sémiotique en mathématique

Abordant l'abstraction selon une perspective analogue aux auteurs anglophones mentionnés ci-haut, Radford, Demers et Miranda (2009) affirment que l'abstraction est un des processus cognitifs des plus élémentaires qui, toutefois, peut devenir assez ardu lorsqu'il s'agit des mathématiques puisque les abstractions concernant les savoirs mathématiques sont caractérisées par la concaténation opératoire des abstractions et qu'elles ne portent pas sur des objets, mais sur des symboles les représentant. En effet, le travail mathématique implique l'utilisation de symboles représentant des relations de plus en plus complexes ; dans le contexte de l'apprentissage, l'élève doit établir des liens entre les symboles et leurs significations, ainsi que des liens entre des symboles et d'autres symboles, afin de passer à un nouveau niveau de généralité. Radford (2001,

2004) accorde une place fondamentale à la généralisation, en tant que processus sémiotique, dans la formation des objets mathématiques ; l'activité sémiotique devient ainsi un objet d'étude essentiel dans l'apprentissage des mathématiques.

Apportant un point de vue différent de celui de la psychologie, Ernest (2006), Otte (2005), Radford (2001, 2004), Radford, Dermers et Miranda (2009), Radford et Grenier, (1996), Steindbring (2006), entre autres, adoptent une perspective sémiotique à propos de l'activité et de l'apprentissage des mathématiques et centrent leurs analyses sur l'étude des signes et de leurs usages. La perspective sémiotique de l'activité mathématique est considérée comme étant en continuité avec les théories socioculturelles et socioconstructivistes de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques. En allant au-delà d'une position psychologique et d'un contexte strictement comportemental, cette approche s'intéresse aux modes d'appropriation des signes par les élèves à l'intérieur même du contexte social d'apprentissage et de signification : les modèles d'utilisation et de création des signes, les conventions sociales qui leur sont sous-jacentes, le sens et les contextes d'utilisation des signes en tant que pratique individuelle (Ernest, 2006). Pour ces chercheurs, l'usage des signes/symboles est constitutif de la pensée humaine et, sans ceux-ci, la généralisation ne serait pas possible.

Radford, pour sa part, élabore l'approche sémiotique anthropologique (ASA) sous l'hypothèse suivante : l'objet du savoir n'est pas directement acquis par nos sens, mais plutôt par des modes culturels de signification (sens) et à travers ce qu'il appelle « la technologie de l'activité sémiotique » (langage, écriture, formules, graphiques...). Dans cette théorisation : « apprendre, c'est prendre conscience d'un objet général selon les modes de rationalité de la culture » (Radford, 2004, p.24). L'interaction entre les symboles et les idées doit être conçue comme un système de relations construit par l'élève dans son cheminement intellectuel qui est à la fois individuel et social.

Les systèmes sémiotiques (associés aux nombres rationnels, l'algèbre...) auxquels les élèves seront confrontés sont nombreux au cours de leur parcours scolaire et plus ils avancent dans leurs études, plus les systèmes qu'ils devront développer sont abstraits (Ernest, 2006). L'utilisation des symboles, selon Radford et Grenier (1996), émerge de l'activité de résolution de problèmes dans le but de pouvoir communiquer plus aisément. L'acquisition du symbolisme demande un détachement de l'objet concret et la construction d'objets mentaux et de structures de référence qui se réalisent par des processus d'abstraction et de généralisation (Radford, 2001 ; Radford et Grenier, 1996 ; Steindbring, 2006). Ainsi, l'abstraction et la généralisation sont des processus qui sont considérés comme étant *des moteurs* de l'activité mathématique et, par conséquent, de l'activité sémiotique :

> Now it can be said that generalization is the essential feature of the mathematical, and also that, in this, the signs [...] are the object of activity. Whereas mathematical generalization consists ultimately in introducing ideal objects, the process also depends essentially on the concrete symbolic innovations, because ideas are indeed not given in themselves. (Otte, 2005, p. 11)

2.7.3 Le point de vue de la didactique française

Dans les travaux du courant anglo-saxon, il est possible d'identifier un changement de perspective dans la conception des processus d'abstraction/généralisation, dépassant le point de vue strictement psychologique et proposant une approche sémiotique de l'activité mathématique qui tient compte des modes culturels de signification. Malgré le fait que le rôle du contexte culturel soit mentionné, il semble difficile, dans certaines propositions, d'identifier la manière spécifique dont ce contexte intervient effectivement dans les analyses de l'activité mathématique des élèves. Dans certains cas, les processus d'abstraction/généralisation semblent attachés à des intentionnalités propres aux sujets individuels et la nature des tâches, la spécificité de l'activité mathématique institutionnelle, le contexte culturel et les caractéristiques spécifiques des processus d'enseignement apparaissent comme des éléments secondaires dans les explications fournies.

Dans le contexte de la didactique française, l'analyse des pratiques mathématiques des élèves, impliquant des processus d'abstraction/généralisation, se produit à l'intérieur d'une approche structurelle qui donne un rôle fondamental à l'analyse épistémologique du savoir et aux pratiques institutionnelles au sein desquelles le savoir se développe. Les travaux de Chevallard, en particulier, apportent un éclairage spécifique sur l'analyse des savoirs mathématiques dans le sens qu'il postule que cette analyse doit considérer également l'étude des pratiques institutionnelles dans lesquelles les savoirs sont enseignés, appris et utilisés. Pour la théorie anthropologique du didactique, les savoirs mathématiques renvoient « à une organisation praxéologique particulière, douée d'une certaine "générativité" lui permettant de fonctionner comme appareil de production de connaissances, c'est-à-dire de nouvelles praxéologies » (Chevallard et Bosch, 1999, p.7).

Une organisation praxéologique est constituée de techniques permettant d'accomplir des tâches (supposant l'activation d'ensemble d'objets ostensifs et non-ostensifs), de technologies justifiant la technique, de théories rendant intelligible la technologie, le tout, organisé autour d'une tâche (Chevallard, 1994 ; Chevallard et Bosch, 1999).

Une technique est qualifiée de maîtrisée et d'efficace lorsque les tâches faisant appel à la technique ne sont plus considérées comme problématiques et qu'elles sont devenues routinières. À contrario, une évolution/un apprentissage nouveau se produit lorsque les techniques ne sont pas suffisantes pour résoudre la tâche, ce qui la rend « problématique » (Chevallard, 1994, p. 2) et fait en sorte qu'il faille étudier le problème dans le but d'élaborer la technique manquante. Ainsi, « un nouveau "savoir-faire" est construit, que l'on doit encore organiser pour lui assurer un fonctionnement régulier dans l'institution » (Chevallard, Bosch, 1999, p.6). La perspective anthropologique conçoit que *la création de techniques n'est pas la seule responsabilité de l'élève*, mais celle de toute la classe y compris l'enseignant. Ainsi, si la construction de la technique est perçue comme une activité coopérative, celle de la mise en application est normalement considérée comme une activité à la charge de l'élève.

De ce fait, la compréhension d'un concept est dépendante de la technique dans laquelle le concept est mis en jeu et la mise en application de la technique se fait à l'aide d'objets ostensifs régulés par des objets non-ostensifs émergeant de la praxis humaine (Chevallard, 1994). Les ostensifs sont des objets de nature sensible ayant une certaine matérialité qui peuvent être manipulés (pas simplement par le toucher, mais aussi la voix, le regard) et qui sont accessibles par les sens. Ils sont la partie perceptible de l'activité mathématique (sons, graphismes, gestes) et possèdent une valence instrumentale signifiant qu'ils permettent de travailler ainsi que d'agir et une valence sémiotique permettant de voir, de produire du sens et de communiquer, tandis que les non-ostensifs renvoient à ce qui ne peut être manipulé à proprement parler comme des concepts et des idées, mais qui sont évoqués par l'entremise de la manipulation d'ostensifs. Les non-ostensifs règlent les manipulations et permettent de justifier et d'expliquer les actions de la technologie et/ou de la technique. C'est par l'entremise des ostensifs (le sensible) et des non-ostensifs (l'abstrait) qu'une nouvelle technique peut être construite dans le but d'accomplir une tâche et que le savoir a une fonction technologique (justification des techniques), le tout, articulé et influencé par l'institution.

Si, dans la théorie anthropologique du didactique, il n'y a pas de mention directe des processus d'abstraction et de généralisation, c'est parce que cette approche considère que la conceptualisation n'est pas tributaire de l'élève seul, mais bien de la praxis humaine à l'intérieur de laquelle l'individu évolue. Ces processus d'abstraction, associés à la manipulation dialectique des ostensifs/non-ostensifs, sont dépendants de la nature des organisations praxéologiques à l'intérieur desquelles la pratique mathématique de l'élève se développe. Cependant, dans la brève description effectuée, l'idée de « technique routinière » peut être associée à l'idée de « familiarité » d'un objet de la pensée (par la maîtrise des situations dans lesquelles cette technique est impliquée), et ainsi, des liens possibles peuvent être établis avec les propos concernant l'abstraction et, plus particulièrement, le processus dialectique entre conception structurelle et conception opératoire des objets mathématiques, avancés par Sfard.

En étroit lien avec la théorie anthropologique du didactique, la théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau, 1998) offre un cadre plutôt micro-didactique pour penser les situations d'enseignement en fonction des caractéristiques des savoirs, dans lequel la notion de milieu didactique, spécifique au savoir, occupe un rôle fondamental.

Brousseau identifie trois dialectiques agissant en tant que fonctionnements distincts de la connaissance. La dialectique de l'action est la phase dans laquelle l'élève agit sur une situation qui lui pose problème et tente d'adapter ses stratégies en fonction des rétroactions que la situation lui donne. La dialectique de la formulation permet de formuler et de communiquer, à l'aide du langage mathématique, les connaissances en jeu lors de la phase précédente. Ainsi, au moins deux actants devront formuler sous une forme quelconque la connaissance dans le but de la convertir en savoir collectivement acceptable. Finalement, la dernière phase, la dialectique de la validation, consiste à prouver, convaincre et théoriser ce qui aura été explicité lors de la phase de formulation. Bien que ces dialectiques permettent à l'élève de rencontrer le savoir en situation, il est important de le fixer de façon conventionnelle (Bessot, 2003 ; Brousseau, 1998 ; Sarrazy, 2001, 2006). C'est le processus d'institutionnalisation, effectué par l'enseignant et les élèves, qui favorise la décontextualisation et l'émergence d'une connaissance qui pourra être identifiée et réinvestie dans d'autres contextes (domaine de validité) et qui prendra un statut de savoir.

Tout comme dans le cas des travaux de Chevallard, la TSD n'aborde pas de façon explicite les processus d'abstraction/généralisation ; cependant, c'est par l'entremise des dialectiques de formulation et de validation ainsi que par l'institutionnalisation que les processus de conceptualisation, et alors d'abstraction et de généralisation prennent forme. Butlen et Pezard (2003) s'intéressent, dans le contexte de la TSD, à la conceptualisation et plus particulièrement aux étapes intermédiaires qui la sous-tendent dans le cadre de l'organisation de l'enseignement.

Selon ces auteurs, la conceptualisation est le processus final d'une série d'activités intermédiaires du processus de décontextualisation. Ainsi, c'est à travers la généralisation, le changement de contexte et la formalisation que la décontextualisation s'opère et qu'elle mène à la conceptualisation. Correspondant à des degrés différents, ces activités intermédiaires permettent de passer de l'exemple concret à un énoncé formel ou à une définition et elles sont considérées comme une activité collective propre à chaque classe plutôt que comme une activité dont la responsabilité et le bon déroulement sont imputés à l'enseignant. La conceptualisation s'effectue en grande partie grâce au dialogue (dans les phases de formulation, en particulier) par l'organisation spécifique de l'enseignement et par le passage à l'écrit dans le cadre desquels les élèves doivent se décentrer de leurs expériences personnelles pour rendre compte des savoirs élaborés dans le cadre des tâches rencontrées (phases de validation et phases d'institutionnalisation des savoirs).

Pour que le processus de décontextualisation prenne forme et mène à la conceptualisation, il est impératif, selon ces auteurs, que les élèves puissent rencontrer fréquemment des tâches riches mettant en jeu les notions mathématiques ciblées et que ces tâches leur permettent de rencontrer ces savoirs dans des contextes d'application variés.

2.8 Des thématiques communes à propos de l'abstraction

À la lumière de ce cadre élargi, plusieurs thèmes sont récurrents et permettent de mieux cerner les notions d'abstraction et généralisation. Les différentes formes d'abstraction décrites par les auteurs montrent bien que cette notion dépasse l'idée empiriste d'« extraction » de quelque chose « du concret ». D'ailleurs, le langage, la situation, le but poursuivi, la culture et le contexte sont des thèmes qui, outre celui de l'activité cognitive du sujet, deviennent incontournables dans l'explication de la nature et des modes d'accès auxdites formes.

La question du « contenu » des idées abstraites, de leur nature, de leurs modes de représentation et de leur caractère de vérité est récurrent chez différents auteurs et prend des caractéristiques spécifiques lorsqu'il s'agit de mathématiques. Si l'abstraction implique de penser à part ce qui ne peut pas être donné à part, il en résulte que la pensée joue un rôle fondamental dans la constitution de ces idées ; cependant, dans ce « penser à part », les objets (matériels ou idéaux) occupent également une place importante dans l'élaboration de l'abstraction. Les processus d'abstraction ne sont ni le reflet des idées (de l'intuition) ni celui de l'objet : l'interaction entre ces deux éléments devient un enjeu fondamental.

Lorsqu'il s'agit des objets de savoirs spécifiques, par exemple les mathématiques, l'abstraction apparait associée à la généralisation et à la conceptualisation. Loin de caractériser les processus d'abstraction associés à la constitution d'objets mathématiques à des aspects de la perception sensible, la synthèse épistémologique proposée laisse entrevoir que l'élaboration d'objets idéaux, réalisée toujours dans un contexte d'une pratique culturelle qui encadre les buts poursuivis, implique différents paliers de structuration des données (qui ne sont pas nécessairement « sensibles ») et de formalisation et que l'objet abstrait, en tant qu'outil opératoire, n'est pas nécessairement « extrait » du concret, mais qu'il peut permettre aussi, dans certains cas, de mieux cerner « le concret ». C'est dans l'usage et la fréquentation des objets, à l'intérieur d'une pratique mathématicienne, que les rapports entre « concret » et « abstrait » se précisent. L'analyse de cette pratique, des natures des expériences et des structures des actes qui les constituent devient fondamentale pour comprendre les processus de généralisation et d'abstraction propres aux mathématiques.

Du point de vue de l'apprentissage, et en particulier des apprentissages des mathématiques, le rôle de l'action du sujet dans la construction de nouvelles structures de pensée (par abstraction/généralisation), du langage et de la culture (en particulier du contexte scolaire) est différemment identifié par les auteurs. La place du langage distingue la position des différents chercheurs.

D'ailleurs, Bronckart (2007), dans une perspective Vygotskienne, montre chez Vergnaud et Piaget, l'absence d'une définition de l'*agir ;* il fait ressortir le fait que toute action collective, complexe et instrumentée demande un *mécanisme d'entente* (le langage). Ainsi, l'action sensée humaine est dépendante de l'activité langagière et est également influencée (et non déterminée) par l'interaction avec des préconstruits sociaux auxquels s'ajoute la mise en place de capacités d'abstraction et de généralisation qui participent à la *décontextualisation de la pensée* ; plus le sujet est confronté à des corpus de connaissances formelles, plus la pensée se développe.

Dans le cas spécifique de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, les aspects sémiotiques jouent un rôle fondamental, en particulier par la nature même des objets impliqués. Les auteurs anglophones ainsi que francophones cités en témoignent en rejoignant les propos philosophiques et épistémologiques déjà mentionnés : la nécessité de détachement de l'objet concret dans la constitution des objets abstraits, mentionnée par les didacticiens, s'interprète bien à l'intérieur du cadre philosophique développé ; la dualité processus/objet et la notion de réification chez Sfard appellent à une analyse historico-épistémologique de l'évolution des notions mathématiques. D'ailleurs, les aspects structuraux concernant les caractéristiques des pratiques mathématiques institutionnelles sont mis de l'avant par les théories francophones et permettent de mieux cerner les processus de conceptualisation impliqués dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

2.8.1 Objectif de la recherche

Étant donné que le discours noosphérien sous-tend tout texte traitant de l'éducation en y mobilisant des fondements théoriques et idéologiques (et prescrivant des pratiques d'enseignement) et que l'abstraction en mathématique est appréhendée de diverses façons selon les disciplines (philosophie, psychologie, didactique, etc.) du discours noosphérien, alors l'objectif général *d'examiner ce que signifie l'expression « difficultés d'abstraction en mathématiques » dans les discours circulant en éducation* *au Québec et son éventuel impact sur les propositions d'enseignement en classes d'adaptation scolaire* signifie :

De cerner et d'analyser les diverses significations attribuées à l'expression « difficultés d'abstraction » ;

D'identifier les fondements théoriques et idéologiques à la base du discours noosphérien qui sous-tendent les pratiques d'enseignement (relatives à l'abstraction) prescrites aux enseignants.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Ce projet s'insère dans la catégorie des recherches fondamentales de type exploratoire et correspond à la forme théorique puisqu'il vise à produire des énoncés théoriques à partir de différents énoncés théoriques, l'écrit étant donc la principale source de données et non les données de nature empirique (Martineau, Simard et Gauthier, 2001 ; Van der Maren, 2004). D'ailleurs, l'auteure de ce projet partage les propos de Martineau, Simard et Gauthier (2001) qui, tout en remarquant le peu de place accordée à la méthodologie de la recherche théorique, mettent en évidence le fait que « la méthodologie » de celle-ci pose elle-même problème, de sorte que l'objet de recherche est clarifié par la méthodologie, tout comme la méthodologie l'est par le traitement de l'objet de recherche.

3.1 Critères de sélection du corpus

L'analyse porte sur différents types de discours inhérents à la noosphère[13] du champ de l'éducation, plus particulièrement celui de l'adaptation scolaire au sujet de l'abstraction en mathématiques. Bien que la noosphère soit constituée de différents types de discours (institutionnel, pédagogique, syndical, sociologique, etc.), la présente recherche analyse plus particulièrement le discours pédagogique (ouvrages de

[13] La noosphère correspond au monde des idées : ce qui circule, se dit, se manifeste, se développe, se conceptualise dans un champ théorique donné à propos d'un milieu particulier (Sarrazy, 2002a).

pédagogues influents en grande circulation dans le milieu éducatif francophone et québécois) et le discours institutionnel (cadres normatifs du système d'éducation, programmes, échelles d'évaluation et circulaires ministérielles du Québec). D'ailleurs, la sélection d'un corpus de nature contrastée, c'est-à-dire un corpus « provenant d'auteurs qui ont des options, des préconceptions, des points de vue différents à propos d'une notion ou d'un événement » est priorisée (Van Der Maren, 2004, p. 136).

S'inspirant des travaux déjà présents dans le cadre de l'approche anthropo-didactique (Roiné, 2009, 2015 ; Sarrazy, 2002a), l'analyse cherche à identifier les fondements théoriques de certains discours constituant la noosphère de l'adaptation scolaire et à mieux comprendre la trame idéologique sous-jacente aux injonctions orientant les pratiques des enseignants.

Dans le processus de sélection du corpus analysé, plusieurs critères sont considérés pour en assurer la pertinence :

- Les documents régissent ou ont une influence dans le milieu éducatif et ils sont destinés aux enseignants ;
- Ils doivent principalement être orientés sur la pratique mathématique au secondaire et en adaptation scolaire ;
- Ils doivent traiter de l'abstraction/généralisation et/ou de la conceptualisation d'objets de savoirs mathématiques, particulièrement chez les élèves en difficulté.

3.2 La constitution du corpus

Dans la sélection du corpus, trois catégories de discours sont identifiées, en fonction de la nature des auteurs ou de l'institution le véhiculant, afin d'assurer un corpus contrasté pour ainsi permettre « de se faire une représentation de l'éventail des significations » (Van Der Maren, 2004, p. 136). Ainsi, les différents discours proviennent :

- Du Ministère de l'Éducation ;
- Des commissions scolaires ;
- De pédagogues influents et de maisons d'édition accessibles aux milieux éducatifs (guides d'accompagnement pédagogique).

Les éléments du corpus appartiennent à deux types de discours constituant la noosphère en éducation (institutionnel et pédagogique). Lors de la phase préparatoire de ce projet, trois types de discours avaient été envisagés à des fins d'analyses (institutionnel, pédagogique et syndical). Toutefois, l'ampleur de la tâche a fait en sorte que le discours syndical a été écarté de ce présent projet. Les tableaux 1 et 2 présentent en détail les éléments du corpus qui font l'objet d'analyses.

Tableau 3.1 Présentation des discours institutionnels

<table>
<tr><th>#</th><th>Titre</th><th>Auteur(s)</th><th>Année</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Programme de formation de l'école québécoise (mathématiques, 1^{er} cycle du secondaire)</td><td>MEES</td><td>2006b</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Programme de formation de l'école québécoise (mathématiques, 2^{e} cycle du secondaire)</td><td>MEES</td><td>2006c</td></tr>
<tr><td colspan="4">Le PFEQ est un document phare pour l'enseignant. Il établit les contenus à enseigner, les approches pédagogiques ainsi que les visées de l'évaluation des apprentissages en mathématiques pour le premier et le deuxième cycle du secondaire. Ainsi, chaque discipline, dans ce cas-ci les mathématiques, est présentée dans son ensemble et selon les compétences à atteindre au cours du cycle visé.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Progression des apprentissages au secondaire : présentation de la discipline (mathématiques)</td><td>MEES</td><td>2016</td></tr>
<tr><td colspan="4">La progression des apprentissages est un outil pour l'enseignant concernant les savoirs essentiels et les moments appropriés (cycles) pour les introduire, de façon progressive, dans la formation des élèves. Une brève présentation de la discipline concernée est présente et toutes les composantes des domaines des mathématiques sont abordées de façon organisée (liste) et décrites selon le niveau de maîtrise qui doit être atteint par l'élève selon son cycle.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>4</td><td>Agir autrement en mathématiques : pour la réussite des élèves en milieux défavorisés</td><td>MEES</td><td>2012</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ce guide pédagogique, émergeant de programmes et de mesures visant la persévérance scolaire d'élèves issus de milieux défavorisés, vise à promouvoir les pratiques efficaces en enseignement des mathématiques dans ces milieux. Il s'agit donc de présenter ce que la recherche a identifié comme pratique efficace ainsi que les éléments sur lesquels une attention particulière devrait être portée dans l'enseignement des mathématiques en milieux défavorisés.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Vers des pratiques pédagogiques adaptées : guide d'accompagnement</td><td>Commission scolaire de Laval</td><td>2013</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ce guide pour les enseignants de la commission scolaire de Laval a pour objectif de présenter les différents déficits et troubles d'apprentissage afin d'assurer une meilleure compréhension de ceux-ci par les enseignants. Il propose également des stratégies d'intervention et de différenciation pour aider les élèves atteints de différents troubles. Il a été réalisé par deux conseillères pédagogiques.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Cadre de référence en orthopédagogie</td><td>Commission scolaire de la Beauce-Etchemin</td><td>2013</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ce cadre de référence de la commission scolaire de la Beauce-Etchemin propose des orientations quant aux interventions orthopédagogiques basées sur les plus récents résultats de la recherche. Ainsi, ce document clarifie les interventions à prioriser selon la clientèle[14] visée et les pratiques d'enseignement à promouvoir afin de répondre aux besoins des élèves et favoriser la réussite.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>L'apprentissage de l'abstraction</td><td>Commission scolaire de la Capitale</td><td>2006</td></tr>
<tr><td colspan="4">Cette page web diffusée par la commission scolaire de la capitale propose de définir ce que signifie l'apprentissage de l'abstraction dans le cadre scolaire et l'importance de cet apprentissage pour les élèves. Destinée aux enseignants, cette page web propose aux enseignants de bien structurer les contenus à enseigner et d'enseigner des concepts plutôt que des exemples particuliers. Elle a été réalisée en</td></tr>
</table>

[14] Les résumés des documents sont écrits en empruntant les termes employés par les auteurs desdits discours afin des respecter les orientations théoriques et idéologiques de ceux-ci et afin de prévenir l'influence de la posture épistémologique de la chercheure.

collaboration avec des pédagogues.			
8	Les difficultés d'apprentissage	Commission scolaire de la Seigneurie-des-milles-Îles	s.d
Ce document d'accompagnement destiné aux enseignants de la Commission scolaire de la Seigneurie-des-Milles-Îles propose des interventions spécifiques pour chaque type de difficulté ou de troubles d'apprentissage. Sont nommées chaque difficulté et trouble ainsi que les manifestations associées afin de proposer des interventions spécifiques.			

Tableau 3.2. Présentation des discours pédagogiques

#	Titre	Auteur(s)	Année
1	Un cerveau pour apprendre les mathématiques	David A. Sousa Adaptation de Michel Lyons et Gervais Sirois	2010
Bien que l'auteur de ce livre soit anglophone, les auteurs responsables de son adaptation sont des figures particulièrement connues en milieu québécois, entre autres Michel Lyons, qui est coauteur de divers manuels en mathématiques utilisés au Québec. Ce livre sert donc de guide pour les enseignants de tous niveaux puisque plusieurs chapitres sont dédiés à différents groupes d'âge. Ainsi, il traite particulièrement des aspects cognitifs qui sont impliqués dans l'apprentissage des mathématiques. De plus, la question des difficultés en mathématique est abordée tout comme celle de l'enseignement. Trois chapitres de ce livre sont analysés : Chapitre 3 : Une revue des éléments impliqués dans l'apprentissage Chapitre 6 : L'enseignement des mathématiques aux enseignants Chapitre 7 : Le dépistage des difficultés en mathématiques et les interventions possibles			
2	L'apprentissage de l'abstraction	Britt Mari Barth	2013

Ce livre publié à la fois chez Retz et Chenelière Éducation aborde l'apprentissage de l'abstraction selon une perspective pédagogique et provenant de la psychologie cognitive. L'auteure de ce livre fonde, en grande partie, ses propos sur les travaux de Bruner et sur ses expériences et expérimentations en tant qu'enseignante pour élaborer une méthode d'enseignement pour aider les élèves à conceptualiser. À la base de cet ouvrage se trouve un questionnement de l'auteure quant aux raisons des échecs et difficultés des élèves. Cinq chapitres sont retenus pour les analyses :

Chapitre 1 : Les difficultés de l'abstraction : un point de vue cognitif

Chapitre 2 : Le savoir et son élaboration : apprendre quoi et comment ?

Chapitre 4 : Stratégies d'enseignement : comment aider les élèves à construire leur savoir

Chapitre 6 : Stratégies d'apprentissage : le cheminement vers l'abstraction

Chapitre 7 : La métacognition : apprendre à conduire consciemment sa pensée

3.3 Analyse de contenu du discours noosphérien

Bien que l'analyse de contenu soit reconnue comme méthode de recherche, il n'en reste pas moins que sa place est souvent remise en question par rapport à des méthodes dites plus « scientifiques » comprenant des données de nature quantitatives (L'Écuyer,1987). D'ailleurs, selon L'Écuyer (1987), la primauté accordée à ce type de données conduit parfois les chercheurs à modifier la conduite de leurs analyses au profit d'analyses de type quantitatif (fréquences, variances, etc.) lorsque les catégorisations sont effectuées, faisant en sorte que l'analyse de contenu disparait derrière les chiffres. Elle devient ainsi une analyse quantitative au sein de laquelle la matière première (le contenu) n'est plus considérée. Il appartient donc au chercheur d'en être conscient lors de ses analyses.

De façon générale, cette méthode de recherche vise à déceler le ou les sens et les significations d'un message (L'Écuyer, 1987 ; R.Mucchielli, 2006 ; Paillé et A.Mucchielli, 2012) :

> Tout document parlé, écrit ou sensoriel contient potentiellement une quantité d'informations sur la personne qui en est l'auteur, sur le groupe

> auquel elle appartient, sur les faits et événements qui y sont relatés, sur les effets recherchés par la présentation de l'information, sur le monde ou sur le secteur du réel dont il est question. (R.Muchielli, 2006, p. 24)

Au sein du champ de l'analyse de contenu, il existe différentes méthodes permettant d'atteindre les significations d'un message, dont l'analyse structurelle, stylistique et sémantique, pour ne nommer que celles-ci. Dans ce cas, c'est au sens des messages qu'un intérêt particulier est porté. La méthode priorisée fait donc référence à l'analyse sémantique du contenu (R.Mucchielli, 2006).

3.3.1 Analyse sémantique conceptuelle de contenu

Les méthodes d'analyse sémantiques et structurales ont comme objectif, contrairement aux méthodes d'analyses logico-sémantiques et esthétiques de contenu, de dépasser le contenu manifeste explicite et ainsi, à l'aide d'une analyse « d'un second degré », d'atteindre le sens latent, implicite du discours (R.Mucchielli, 2006). L'analyse ne se situe donc pas à un niveau linguistique, mais plutôt à un niveau sémantique. Il ne s'agit pas de dévoiler le sens caché du texte, mais plutôt le sens implicite de celui-ci, la structure de signification qui renvoie au cadre de référence et aux principes de la pensée des conceptions des auteurs. L'intérêt n'est ainsi pas directement porté sur les mots, mais sur les idées afin de « [...] définir le champ des significations d'un objet dans un ensemble cohérent donné » (R.Mucchielli, 2006, p.116).

En ce sens, on présuppose que le discours contient de multiples niveaux de significations atteignables par plusieurs lectures, mais que celles-ci sont insuffisantes sans la mise en relation d'éléments structuraux à un niveau analytique plus étoffé.

Les analyses sont donc conduites à l'aide de la méthode d'analyse sémantique conceptuelle (R.Mucchielli, 2006). Il s'agit tout d'abord de définir un thème général, dans ce cas l'abstraction, et de recueillir des discours s'y rapportant. Ensuite, il convient de repérer dans ces discours les notions-clés, les descripteurs, les expressions qui servent au(x) locuteur(s) à définir, à qualifier et expliquer le thème général à analyser et les éléments qui y sont reliés. Finalement, il importe d'établir des relations entre les différents descripteurs au sein du discours afin de tenir compte des relations d'équivalence, de restriction, d'exclusion, de conjonction ou de disjonction se rapportant à la thématique analysée. Cette dernière étape est particulièrement significative afin de rendre compte du système de pensée du locuteur ou du groupe produisant le discours.

3.3.2 Définition des thématiques et des catégories d'analyse

L'Écuyer (1987), Paillé et A.Mucchielli (2012) et R.Mucchielli (2006) constatent que l'identification des catégories peut poser problème avec ce type de méthode de recherche. Ainsi, le choix des catégories est déterminant afin d'assurer la qualité et la représentativité des résultats. Ce projet emploie un mode de catégorisation mixte (L'Écuyer,1987), c'est-à-dire que des catégories sont préalablement identifiées, sans toutefois être immuables et qu'au fil des analyses, de nouvelles catégories peuvent émerger afin d'assurer une certaine fidélité par rapport aux spécificités du contenu.

Afin d'assurer la qualité des catégories identifiées, les critères établis par R.Mucchielli (2006) ont été appliqués. Ainsi, les catégories sont à la fois exhaustives et exclusives, ce qui permet d'épuiser les unités tout en s'assurant que celles-ci apparaissent à un seul endroit. Afin de valider leur objectivité et leur pertinence, un juge-codeur s'est soumis au même exercice de catégorisation afin d'ajuster les catégories.

3.3.3 Plan d'analyse

Tout d'abord, il semble important de préciser que le plan d'analyse n'est pas linéaire et que des allers-retours sont possibles entre différentes étapes.

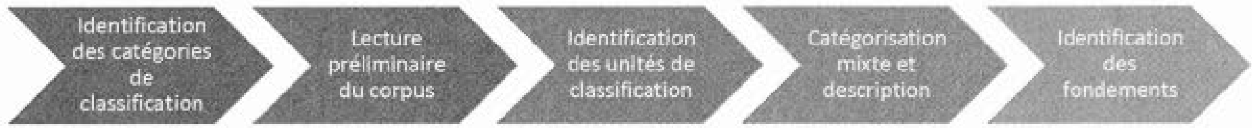


Figure 3.1 Modèle d'analyse de contenu adapté de L'Écuyer (1987)

1. Identification des catégories de classification

En adéquation avec l'objectif poursuivi ainsi qu'avec le cadre conceptuel élaboré, certaines questions et thématiques guident les lectures ainsi que l'élaboration de catégories :

- Y a-t-il une caractérisation de ce que l'on entend par « idée abstraite » ou « abstraction » en mathématiques ?
- Quel est le rôle joué par le langage dans l'abstraction et la conceptualisation ?
- Quels sont les rapports abstraction/concret explicites ou implicites aux discours ?
- L'abstraction et la généralisation comme préalable à la conceptualisation.
- Différents niveaux d'abstraction dans la constitution et l'apprentissage des objets mathématiques.
- Le rôle de la formalisation et de la symbolisation.

À leurs façons, ces questions viennent faciliter l'identification des fondements sous-jacents aux discours analysés et permettent ainsi une analyse en profondeur des composantes identifiées comme étant constitutives de l'abstraction. Au final, 18 catégories ont été identifiées préalablement aux analyses et en adéquation avec les principales composantes concernant l'abstraction relevées au chapitre 2. Le tableau 3 présente l'arborescence à partir de laquelle les premières lectures ont été réalisées. Les catégories ont été délibérément formulées avec un certain niveau de généralité afin qu'elles ne perdent pas de leur valeur et que le travail de description subséquent au codage soit riche quant aux objectifs poursuivis (R.Mucchielli, 2006).

Tableau 3.3 Thématiques et catégories de classification initiales (Annexe B)

Thématiques	Catégories
La caractérisation des idées abstraites	- Ayant plusieurs niveaux ; - Étant extrait du concret ; - Étant une interaction entre le sensible et l'intuition ; - N'étant pas exclusivement extrait du concret.
L'abstraction en mathématiques comme un processus inhérent à l'élève	- À son intentionnalité ; - À sa pratique mathématicienne ; - À son historique, ses connaissances antérieures ; - À ses actions (schèmes).
L'abstraction en mathématiques comme un processus inhérent à l'environnement d'apprentissage	- Au but poursuivi ; - À la tâche et ses composantes ; - Au contexte institutionnel ; - À la collaboration et coopération entre l'enseignant et les élèves ; - À la culture, l'environnement de classe.
L'abstraction comme une caractéristique des objets de connaissance mathématiques	- Les objets de savoir sont porteurs de spécificités, d'obstacles épistémologiques ; - Les concepts mathématiques comportent différents paliers de structuration de données.
Le rôle du langage pour abstraire	- Le langage comme véhicule de la pensée ; - Le langage comme élément constitutif de la pensée ;
Le rôle du symbolisme et de la formalisation pour abstraire	- Les signes et symboles sont constitutifs de l'activité mathématique ; - L'acquisition du symbolisme implique des processus d'abstraction.

2. Lecture préliminaire du corpus et Identification des unités de classification

La première lecture de corpus a permis, tout d'abord, de valider la pertinence des discours choisis et ensuite, d'identifier les unités à classifier et à analyser dans les discours.

3. Catégorisation mixte et description

Une fois les unités identifiées, plusieurs lectures de celles-ci ont rendu possible leur classification au sein de catégories existantes ou la création de nouvelles catégories afin d'être fidèle au sens véhiculé par le discours. Les analyses ont été conduites à l'aide du logiciel N Vivo 11.4 pour lequel la chercheure a suivi une formation. Une fois la première classification effectuée, une lecture des unités par catégorie a été conduite afin d'en valider leur appartenance. Dans le cas où certaines unités n'étaient pas en adéquation avec la catégorie de référence, le processus de catégorisation de ces unités était recommencé jusqu'à ce que chaque unité soit classée au sein d'une catégorie.

Lorsque la totalité des unités identifiées a été classée, une description des significations accordées à chaque thématique est présentée selon les deux types de discours noosphérien du champ de l'adaptation scolaire.

Par exemple, au sein du discours du ministère de l'Éducation, un passage est particulièrement récurrent (au moins 12 reprises intégrales) :

> [...] **l'élève construit et s'approprie les concepts et processus suivants** [...] (PFEQ, 2e cycle, p.54, etc.)

Un second passage en adéquation avec celui-ci est également repéré dans un autre document du ministère de l'Éducation.

> Puisque l'objectif premier du Programme de formation est le développement de compétences, **la plupart des concepts et des processus doivent être construits par l'élève** et réinvestis dans des contextes diversifiés. (PFEQ, 1er cycle, p. 248)

La présence importante du premier passage est tout d'abord édifiante du poids de cette affirmation dans l'explication du phénomène d'abstraction en mathématiques et c'est en relation avec d'autres passages que les relations d'équivalence peuvent s'effectuer afin d'identifier le ou les fondements du discours. Les verbes utilisés renvoient à une production de l'élève qui semble être autonome (construire, s'approprier). Ainsi, en suivant les catégorisations identifiées au tableau 3, ce passage serait classé au sein de la thématique : *L'abstraction en mathématiques comme un processus inhérent à l'élève*, puisque celui-ci est dépeint comme l'acteur principal de ce processus, mais une nouvelle catégorie devrait être créée pour qu'elle corresponde effectivement au sens dégagé par ce passage c'est-à-dire que l'abstraction est présentée comme le produit des capacités de l'élève à construire des concepts. Au fil des lectures et des différents passages, cette nouvelle catégorie se précise selon les relations d'équivalence repérées au sein des unités de sens.

4. Identification des fondements

Cette dernière étape consiste en l'interprétation des différentes thématiques qui ont été relevées chez les instances étudiées quant à la problématique de l'abstraction en mathématique. Elle met ainsi en relation les idées fondatrices des discours avec les différentes théories et idéologies relatives à l'abstraction présentées au chapitre 2. L'établissement de cohérence ou l'absence de cohérence avec les composantes identifiées dans le cadre de l'analyse conceptuelle de l'abstraction permet d'éclaircir une partie de la trame théorique ou idéologique à la base des discours pédagogiques et institutionnels.

Cette recherche ne vise pas nécessairement la théorisation, mais plutôt le développement de connaissances théoriques (Loiselle et Harvey, 2007) ainsi qu'à dévoiler certains aspects de la trame idéologique sous-jacente aux discours pour ainsi ouvrir la voie à une meilleure compréhension des pratiques d'enseignement.

CHAPITRE IV

ANALYSE DE CONTENU DU DISCOURS

Dans ce chapitre, il sera question de cerner et d'analyser les différents usages de la notion d'abstraction en mathématique dans le discours noosphérien de l'adaptation scolaire. Le corpus sélectionné est divisé selon la typologie du discours qui est établie dans la méthodologie. Pour chacun des types du discours noosphérien (institutionnel et pédagogique), l'analyse de contenu est d'abord présentée pour permettre, dans un deuxième temps, d'identifier certains éléments de leurs possibles fondements.

L'analyse de contenu est une méthode d'analyse visant à déceler la signification de différentes formes de messages (L'Écuyer, 1987). Ainsi, la classification des différents éléments du corpus au sein de catégories permet de faire ressortir les principales thématiques abordées en lien avec l'abstraction qui seront nécessaires pour aborder la problématique des fondements. Dans un esprit de synthèse, les analyses sont présentées selon les grandes thématiques et les questions identifiées dans le cadre conceptuel et dans la méthodologie.

L'abstraction étant un concept ne disposant pas d'une seule définition et appellation, l'analyse de contenu ne s'est pas arrêtée aux mentions explicites du terme « abstraction » dans les différents éléments du corpus analysé. En effet, ont été considérées toutes les mentions qui contenaient implicitement les thématiques liées aux différentes composantes de ce concept, c'est-à-dire référant au processus d'apprentissage, aux concepts en eux-mêmes, à la conceptualisation, à la généralisation, au symbolisme, etc. Les premières lectures des discours ont donc servi à identifier les passages dans lesquels l'abstraction est mentionnée explicitement ou implicitement.

4.1 Le discours institutionnel

4.1.1 Les principales thématiques relatives à la notion d'abstraction

Dans le cadre de ce projet, quatre discours provenant du ministère de l'Éducation et de l'Enseignement Supérieur (MEES) et quatre discours provenant de commissions scolaires québécoises ont été sélectionnés pour conduire les analyses (Voir tableau 1) Une première partie de l'analyse de contenu a permis d'encoder 301[15] passages selon des catégories prédéfinies en référence au cadre conceptuel développé au chapitre 2.

Au cours des analyses, certaines catégories ont émergé alors que d'autres ont été modifiées, comme il est possible de le constater dans la présentation suivante. L'ensemble des catégories a permis de déceler les différentes significations liées aux usages de la notion d'idées abstraites ou d'abstraction.

Tableau 4.1 Thématiques et significations en lien avec la notion d'abstraction repérées au sein des discours institutionnels (n=8) (Annexe C)

Thématiques liées à l'abstraction	**Significations accordées à la notion d'abstraction**	**n**
a) La caractérisation des idées abstraites	**L'abstraction a plusieurs niveaux ou degrés.**	**3**
	L'abstraction n'est pas strictement extraite du concret.	1
	L'abstraction est une activité de simplification et de généralisation.	1
b) L'abstraction inhérente aux composantes des situations d'apprentissage	**L'appui sur le concret est plus efficace pour la conceptualisation (réalité quotidienne).**	**7**
	Le constant passage au concret aurait plutôt tendance à alourdir les apprentissages.	1
	L'utilisation du matériel de manipulation est efficace pour favoriser et soutenir les apprentissages.	**7**

[15] Les fréquences d'encodage des mentions de l'abstraction selon les thématiques et les catégories au sein du discours institutionnel sont présentées en Annexe D et E.

	La diversité des modes de représentation est primordiale pour amener les élèves à conceptualiser et à abstraire.	5
	Le but visé par les situations ou les situations problèmes permet la conceptualisation.	4
	L'utilisation d'outils technologiques favorise la conceptualisation.	5
c) L'abstraction inhérente aux capacités de l'élève	**L'abstraction est inhérente aux actions intrinsèques de l'élève et de son engagement actif.**	**6**
	L'autonomie de l'élève serait préalable à la conceptualisation.	3
	La conceptualisation serait la résultante de l'activation et de l'approfondissement des concepts appris antérieurement par l'élève ainsi que de son intuition.	3
	La maîtrise et le développement de stratégies cognitives et métacognitives sont impératifs pour abstraire.	**5**
	Les difficultés d'abstraction sont liées à des défauts cognitifs des élèves.	4
d) L'abstraction et la conceptualisation inhérente aux objets de savoir	La mathématique entraine certains types de raisonnements et implique de traiter ses objets de façon abstraite afin de généraliser.	2
e) Le rôle de l'enseignant dans le développement de l'abstraction et de la conceptualisation	L'enseignant est perçu comme le spécialiste de la mathématique.	3
	L'enseignant a la responsabilité de planifier son enseignement afin de faire évoluer les connaissances actuelles des élèves en connaissances supérieures.	3
	L'enseignant a comme rôle la gestion des processus mentaux des élèves (stratégies cognitives et métacognitives).	**5**
f) Le rôle du symbolisme et de la formalisation pour abstraire	La définition des concepts et objets mathématiques permet de formaliser les apprentissages.	3
g) Le rôle du langage pour abstraire	La discussion est indissociable du raisonnement mathématique et peut causer des difficultés.	4
	Le langage permet le développement de fonctions cognitives utiles à la mathématique.	5

Le tableau 4 regroupe les différentes significations accordées à la notion d'abstraction dans les discours institutionnels et la surbrillance, indique les significations attribuées à la notion d'abstraction qui sont les plus prégnantes au sein de leurs thématiques respectives (plus haute fréquence d'encodage). Les analyses mettent en évidence le fait que certaines thématiques semblent plus récurrentes que d'autres : les composantes des situations d'apprentissage pour le développement de l'abstraction (la manipulation d'objets concrets, les situations concrètes, les divers registres de représentation, le but des situations, etc.) et la spécificité des capacités de l'élève (ses actions intrinsèques, ses stratégies cognitives et métacognitives, son niveau d'autonomie, son engagement, etc.) émergent comme des catégories prépondérantes.

Quant au rôle joué par le langage pour abstraire, celui de l'enseignant, l'apport des spécificités des objets de savoir dans la construction de l'abstraction ainsi que la caractérisation des idées abstraites, ces thématiques sont nettement moins présentes dans le discours institutionnel. Ce constat n'est pas étonnant ; il a été déjà soulevé (Voir *supra*, p. 19) que, bien que le rôle du langage, de l'enseignant, de la culture, etc., soient identifiés, dans différentes théories, comme étant constitutifs du développement de l'abstraction, le discours éducatif donne moins de place aux aspects intrinsèques du savoir mathématique ainsi qu'à son élaboration au sein des institutions et est plus souvent attaché à des caractéristiques propres aux sujets individuels ou à leurs processus cognitifs.

4.1.2 Quelle conception des mathématiques ?

Toutefois, avant de présenter les différentes significations attribuées à la notion d'abstraction, il importe de spécifier la façon dont les mathématiques sont perçues par certaines institutions du milieu éducatif québécois. En effet, lors des analyses des discours institutionnels, la caractérisation des mathématiques comme étant une discipline qui traite des objets du quotidien est présente de façon prononcée. Il s'agit d'un élément particulièrement important à prendre en considération, car cette interprétation des mathématiques influence les prescriptions d'enseignement effectuées par ces mêmes institutions.

Effectivement, il semble que le MEES mise sur une conception des mathématiques étroitement liée aux applications de la vie courante.

> **Elles** [*les mathématiques*] **occupent donc une place prépondérante dans notre société,** car elles aident à la prise de décisions dans de nombreux domaines. **Notre vie quotidienne**

> **est truffée de données qualitatives et quantitatives** (graphiques, taux, pourcentages, moyennes, prédictions, etc.), et ce, dans divers domaines : santé, emploi, finance, sport, etc. Aussi les situations d'apprentissage permettant à l'élève d'exploiter ces champs mathématiques peuvent-elles être facilement **tirées de son environnement immédiat**. (PFEQ, 2e cycle, p.64)[16]

Que les mathématiques permettent d'interpréter la réalité est une évidence indiscutable. Par contre, l'affirmation concernant le fait que les situations d'apprentissage des mathématiques tirées de l'environnement immédiat permettent « aisément » d'exploiter les champs mathématiques et, en conséquence, de fournir des significations aux objets mathématiques à enseigner implique une conception empirique de l'abstraction et de la nature des objets mathématiques.

D'ailleurs, cette utilité ne serait pas ou peu perçue par les élèves provenant de milieux socioéconomiques plus faibles.

> **L'utilité de la mathématique au quotidien n'est pas perçue par certains élèves et particulièrement en milieu défavorisé. L'exigence de donner du sens aux apprentissages** est donc particulièrement importante en milieu défavorisé afin de donner accès à de nouveaux savoirs et diversifier ses repères culturels. (Agir autrement en mathématiques, p. 39)

On voit bien que **l'exigence** de donner du sens aux apprentissages relève, encore une fois, de la possibilité d'ancrer les différents objets mathématiques à enseigner dans des situations du quotidien. De plus, sans préciser ce qui est entendu par « utilité des mathématiques », on présuppose que les expériences vécues par les élèves des milieux défavorisées sont moins « riches », du point de vue des possibilités de mathématisation, que celles des élèves provenant des milieux aisés, sans préciser la nature desdites expériences.

Cette conception des objets mathématiques permet déjà d'expliquer la prégnance des références (Tableau 4, point b) concernant l'apport des composantes des situations

---

[16] Notez que la surbrillance et le soulignement effectués dans les citations sont les nôtres.

d'apprentissage pour abstraire et notamment celles qui concernent l'importance de la concrétude des situations.

4.1.3 Différentes significations attribuées à l'abstraction dans le discours institutionnel

a) La caractérisation de la notion d'« abstraction »

L'abstraction est caractérisée et perçue de diverses façons au sein d'un même document. En elle-même, la notion d'abstraction est peu décrite, mais un élément apparait comme transversal aux discours institutionnels : il est surtout question de *« niveaux » et de « degrés » d'abstraction*[17]. En effet, la question des nouveaux apprentissages en mathématique et celle de la progression des élèves au sein du cursus scolaire sont toujours liées à cette idée de « niveaux » qui sont de plus en plus précis et complexes. Ce sur quoi portent ces « niveaux » varie entre les discours et au sein d'un même discours parfois.

En fait, dans le Programme de Formation de l'École Québécoise (PFEQ), ces niveaux d'abstraction sont identifiés comme caractérisant des situations d'application ainsi que des situations problèmes. D'autre part, il semblerait que ces niveaux d'abstraction soient également considérés comme une condition préalable exigée des capacités cognitives de l'élève, un sujet qui est plus longuement abordé au point c). D'ailleurs, l'abstraction et ses différents niveaux semblent aussi être mis en relation avec une certaine finalité liée à la situation. Bien que l'abstraction soit un processus qui se développe à l'intérieur de situations (exigences contextuelles) au sein d'une culture, dans ce cas-ci mathématique (Bkouche, 2012), et par le biais du langage (Dondeyne, 1938b), les exigences contextuelles mentionnées sont souvent associées à des capacités cognitives des élèves ; la question du langage apparaît liée à des questions d'apprentissage.

Plus particulièrement, une situation d'application peut être caractérisée par les paramètres

[17] L'usage de caractères en *italique*, dans le cadre de ce chapitre, réfère aux catégories identifiées pour le type de discours analysé.

> suivants : le **niveau d'abstraction** exigé par **la représentation mentale et opérationnelle des concepts mobilisés** et **par les passages entre les différents registres de représentation sémiotique**. (PFEQ, 2e cycle, p.34)

Il est important de constater que la question reste au niveau des représentations mentales, passant sous silence ce qui est constitutif de l'objet de savoir et qui ne dépend pas desdites représentations (Sabatier, 2009). L'analyse de plusieurs documents semble suggérer que les passages entre les modes de représentation sémiotique sont identifiés comme des conditions préalables à l'abstraction ou au niveau d'abstraction requis par la situation, alors que, d'un point de vue épistémologique, l'abstraction et la généralisation sont des processus constitutifs des objets mathématiques, qui se développent au sein d'une activité sémiotique favorisée par le passage d'un registre de représentation à un autre (Radford, 2001 ; Radford et Grenier, 1996 ; Steindbring, 2006).

Un élément essentiel, repéré dans le cadre des analyses, est l'idée que les objets et *les concepts mathématiques semblent être constitués en paliers qui se précisent et s'enrichissent au fil des apprentissages*. Ces paliers constitueraient ainsi les différentes précisions apportées aux définitions des objets mathématiques.

> Étant donné que **plusieurs définitions de termes se précisent** à mesure que progressent les apprentissages, il importe de leur accorder une attention particulière. Par exemple, **la définition du carré** que l'on utilise au premier cycle du primaire est, en principe, **moins riche et précise** que celle à laquelle se réfèrent les élèves du premier cycle du secondaire. (PFEQ, 1er cycle, p. 246)

L'enrichissement dont il est question dans la citation précédente semble ainsi relever des définitions auxquelles il faut se référer plutôt que de l'usage qui est fait de ces objets. Un document provenant d'une commission scolaire reflète une interprétation particulière quant à ce que comporteraient ces niveaux :

> Mais, au-delà de ces concepts spécifiques propres à une discipline donnée, se dissimule un palier supérieur d'abstraction qui est celui qui nous intéresse véritablement. [...] Essentiellement, **la hiérarchie conceptuelle comporte trois niveaux** : **l'énoncé du concept** (le mot lui-même, la vedette, par exemple) ; sa **définition** (et les mots-clés qui en constituent un résumé opérationnel) ; et, finalement, **des exemples** (qui sont des applications particulières du concept dans une matière ou une situation donnée). (CS de la Capitale, p.7-8)

Le palier « supérieur » mentionné semble indépendant des objets spécifiques du savoir « au-delà des concepts spécifiques… » et des contextes orientant des buts et des finalités particulières. Dans ce cas, c'est l'image du résultat d'un processus et non le processus en lui-même qui est décrit. En effet, cette interprétation, au lieu d'analyser le rôle joué par les exemples dans le processus de conceptualisation, ce qui va bien au-delà de l'extraction des règles et des définitions d'une expérience concrète, minimise leur portée et les associe à des instances spécifiques d'un objet générique (les applications particulières).

Malgré le fait que ce même discours véhicule l'idée que *l'abstraction n'est pas strictement extraite de quelque chose de concret*, mais qu'elle peut déjà porter sur des objets abstraits, il évacue le processus dialectique entre « le particulier » et le « général », en assignant à l'exemple un rôle très figé.

> Or, si l'exemple est utile pour faire comprendre ou pour retenir, il n'est d'aucune utilité, et peut même avoir des effets pervers, **lorsqu'il s'agit d'abstraire, de conceptualiser. L'exemple n'est pas le concept**, il n'en est qu'une actualisation parmi d'autres. [...] **Il faut, croyons-nous, cesser de vouloir toujours être concret à tout prix**. (CS de la Capitale, p.2-3)

Le rapport concret/abstrait est abordé de façon explicite dans certains discours et le développement de l'abstraction est majoritairement perçu comme étant plus efficace s'il est appuyé ou extrait de l'expérience sensorielle. De plus, aucun questionnement à propos de la notion même d'abstraction n'est spécifiquement abordé, sauf dans le cas de la CS de la Capitale. La majorité des documents fait appel à une certaine notion « intuitive » ou « naturalisée » de l'idée d'abstraction.

En général, l'idée que l'abstraction serait un acte de schématisation (Delauney, 2016) permettant la formalisation d'un concept se dégage des différents documents analysés. Il n'en reste pas moins que l'abstraction « schématisation » ne représente qu'une des formes possibles d'abstraction. Cependant, certains passages suggèrent la constitution de niveaux d'enrichissement :

> Au deuxième cycle du secondaire, **l'élève active** et **approfondit des concepts et des processus** qu'il a acquis au cours du premier cycle. Ces concepts et ces processus servent de tremplin à de nouveaux apprentissages et lui permettent d'établir des liens entre diverses situations qui sont plus élaborées qu'au premier cycle. (PFEQ, 2e cycle, p.54)

La seule définition spécifique de l'abstraction dans les discours institutionnels analysés apparaît dans le document de la CS de la Capitale : *l'abstraction est une activité de simplification et de généralisation.* Cette définition de l'abstraction comme étant un acte de simplification afin de généraliser se rapproche de la classification des types d'abstractions définies par Delauney (2016). Cependant, encore une fois, cette activité semble détachée des situations spécifiques, de la nature des savoirs en jeu, des buts et des finalités contextuelles.

> Simplifier, c'est abstraire. C'est, en acceptant de perdre de la précision pour gagner en puissance, généraliser. C'est l'inverse de spécifier. **C'est axer l'attention sur les traits communs aux divers programmes plutôt que d'insister sur les traits caractéristiques de chacun.** C'est à ce prix que pourra se réaliser l'intégration des apprentissages. (CS de la Capitale, p. 1)

En bref, il semblerait que les discours analysés font appel à une notion d'abstraction « intuitive » en tant que processus cognitif détaché d'un contexte (car il est bien visible qu'abstraire c'est « décontextualiser »), d'une pratique spécifique, des finalités particulières et de la nature même des objets de savoir. De plus, lorsque le contexte est mentionné, il apparaît en tant que point de départ faisant référence en majorité à une réalité quotidienne, source de signification, dont il faut se détacher pour gagner une puissance, véhiculant ainsi une conception empirique de l'élaboration des objets mathématiques. L'abstraction n'est pas ainsi un processus de recontextualisation successive, mais de décontextualisation. Cependant, la possibilité d'évaluer la « puissance » de ce processus requiert toujours un contexte d'usage.

De surcroît, la centration sur le « sujet » est remarquable. Dans la progression des apprentissages, on fait référence à la constitution de la pensée mathématique des élèves en termes d'une progression graduelle constituée notamment d'expériences « personnelles » et d'échanges entre les pairs. La nature des expériences, le rôle de l'enseignant et l'apport de la culture ne sont nullement mentionnés. Tout est décrit en termes de tâches génériques : réfléchir, manipuler, explorer, construire, etc.

b) Le développement de l'abstraction comme étant inhérent aux composantes des situations d'apprentissage

Outre la caractérisation de l'abstraction, il y a, dans les discours institutionnels, une thématique très présente selon laquelle *l'abstraction serait inhérente aux composantes des situations d'apprentissage*. En effet, lorsqu'il est question d'apprentissage, de conceptualisation ou d'abstraction, les institutions vont mettre de l'avant que les situations d'apprentissage sont un moyen judicieux pour accélérer le développement cognitif des élèves. Il semble important de clarifier ce qui est entendu lorsque le terme *situation d'apprentissage* est utilisé. En effet, celui-ci réfère en grande majorité à des situations qui amènent l'élève à mobiliser ses connaissances et compétences dans un contexte particulier qui émane d'une situation problématique, de préférence, quotidienne.

Cette conception des situations d'apprentissage n'est pas surprenante considérant le fait que ces mêmes institutions conçoivent les mathématiques comme étant étroitement liées à des usages courants. Notons que c'est l'élève qui doit s'adapter à cette situation et employer un raisonnement convenable et qu'en de rares cas, l'enseignant est désigné comme jouant un rôle dans la mise en place et dans le déroulement de ces situations. Beaucoup d'importance est accordée aux composantes des situations telles que le matériel utilisé, les modes de représentation choisis et leur diversité ainsi que la progression de celles-ci allant du concret vers l'abstrait. Ce qui semble primordial, pour l'ensemble des discours, est que les situations permettent de faire le lien entre l'application, la procédure et le concept mathématique en jeu par rapport à un usage quotidien.

Tout d'abord, sept des huit discours étudiés considèrent que *l'appui sur le concret est plus efficace pour la conceptualisation*. Il est ainsi précisé qu'il est préférable que les situations soient en lien avec le quotidien des élèves, de segmenter les tâches, de passer par le concret pour ensuite abstraire et de miser sur la manipulation d'objets concrets. Ces mentions sont fortement présentes dans ces discours et certaines sont répétées intégralement à de nombreuses reprises au sein d'un même discours. Il convient de spécifier que la signification attribuée au mot « concret » n'est pas précisée et que l'accent est mis surtout sur une certaine manipulation d'objets matériels sans se soucier de la nature spécifique de ladite manipulation.

Il semblerait ainsi que l'abstraction soit un processus qui requiert de l'expérience ; pourtant, ce qui est mis de l'avant c'est davantage la nature matérielle des objets impliqués que la spécificité même de l'expérience. Ce réalisme (Reymond, 1943) qui caractérise l'abstraction comme un processus d'extraction des informations à partir du concret (d'où l'accent sur « le concret » en soi-même plutôt que sur les « actions » faites sur ce concret) est très prégnant.

De plus, il paraît que ce processus peut être décrit et explicité, alors prédéfini et applicable à tout objet mathématique :

> Présenter les problèmes par étapes simples ; Enseigner les étapes et les gestes ; Pratiquer le modelage (montrer à l'élève la démarche à voix haute) [...] Favoriser l'expérimentation concrète et la manipulation [...] **Partir du concret vers l'abstrait (et non l'inverse).** (CS de Laval, p. 50)

Ce dernier passage fait encore une fois ressortir cette idée de niveaux d'abstraction (plusieurs étapes, départ du concret vers quelque chose de plus complexe, etc.) dans lesquels l'expérimentation concrète est le moteur permettant les apprentissages. En admettant qu'une seule couche d'actes ne suffise pas à la constitution des objets mathématiques, ceux-ci ne dépendent pas exclusivement de l'expérience sensorielle (Bonnay et Dubucs, 2011).

Si l'abstraction est perçue comme étant « quelque chose » constitué de plusieurs niveaux ou degrés qui sont de plus en plus abstraits et détachés du concret, l'enseignement qui favoriserait le passage d'un niveau à l'autre s'effectuerait, par contre, toujours par l'entremise du passage au concret.

> De plus, si la spécificité de la mathématique, comme langage et comme outil d'abstraction, exige de traiter de façon abstraite les relations entre les objets ou les éléments de situations, **son enseignement au secondaire est plus efficace lorsqu'il prend appui sur des objets concrets ou des éléments de situations tirées de la réalité.** (PFEQ, 1[er] cycle, p. 232)

Malgré le fait que *la spécificité de la mathématique exige de traiter de façon abstraite les relations entre les objets*, le MEES va tout de même miser sur les objets concrets, eux-mêmes, évacuant la question de relations.

> Néanmoins, **son enseignement au secondaire est plus efficace lorsqu'il prend appui sur des objets concrets ou sur des situations tirées de la réalité**. (PFEQ, 2[e] cycle, p. 1)

À contrario, un des discours institutionnels s'éloigne drastiquement de cette posture qui est adoptée en majorité (il semble important de mentionner que ce document a été réalisé en collaboration avec des consultants-pédagogues externes à la commission scolaire). Selon ses auteurs, *le constant passage au concret aurait plutôt tendance à alourdir les apprentissages* :

> Faute de temps et peut-être de réflexion, on a souvent tendance à choisir la voie de l'exemple. Mais si l'on n'en donne qu'un seul, on fait violence au concept : on encourage l'élève à prendre l'illustration pour l'idée, la partie pour le tout, le témoignage pour l'argument. Pour respecter le concept, il faut recourir à plusieurs exemples et contre-exemples et les comparer. **Et c'est là que l'enseignement s'alourdit et se complique à n'en plus finir.** (CS de la Capitale, p. 2)

Observons que cette opposition ne porte pas sur la spécificité des mathématiques, mais sur une question de gestion didactique. Ainsi, le rôle de l'exemple est associé à un alourdissement de l'enseignement, délaissant ainsi le processus dialectique entre « le particulier » et le « général », inhérent à la constitution des objets mathématiques.

La référence au « concret » semble suffire au développement des processus d'abstraction.

> Dans cette séquence, **c'est à partir de situations concrètes que l'élève est amené à modéliser, à forger sa capacité d'abstraction** et à **transférer ses apprentissages** dans de nouvelles situations, concrètes ou non. (PFEQ, 2[e] cycle, p. 106)

> Ces apprentissages s'appuient sur des **situations concrètes souvent liées à la vie quotidienne.** (Progression des apprentissages, p. 5)

On voit bien que la référence aux situations porte strictement sur leur caractère de « concrétude » (le lien entre les caractéristiques des situations et la nature des savoirs n'est aucunement mentionné) et que le processus d'abstraction qui se « déclencherait » à partir de l'interaction avec ce type de situations n'est nullement décrit. Les processus de contextualisation et décontextualisation des connaissances, d'institutionnalisation de savoirs, le rôle des phases de réinvestissement favorisant la conceptualisation et l'usage des objets appris ne sont pas mentionnés (le « transfert » des apprentissages semble aussi être une « conséquence » du travail sur le concret et non pas une partie constitutive des processus d'abstraction).

De plus, ces guides misent en grande majorité sur *l'utilisation du matériel de manipulation pour favoriser et soutenir les apprentissages*, et ce, même à des stades avancés comme le deuxième cycle du secondaire. Ce matériel devrait être varié, véhiculant ainsi la conception que les concepts mathématiques ont toujours une représentation matérielle et que l'interaction (qui n'est pas caractérisée) avec différentes représentations physiques d'un concept permettent la conceptualisation.

> Au quotidien, l'enseignant de mathématique doit être à l'affût et **il doit exploiter le matériel de manipulation disponible**, les ressources, les situations, les contextes, les données et les occasions qui se présentent. (Agir autrement en mathématiques, p. 26)
>
> D'autres auteurs insistent sur le fait que « les élèves doivent être exposés à une multitude de représentations pour être en mesure de faire des liens entre elles et consolider leur apprentissage »*, **d'où l'importance de varier le matériel de manipulation***. En fait, le matériel de manipulation devrait soutenir l'apprentissage de tous les nouveaux concepts à l'étude. (CS Beauce Etchemin, p. 21, **en référence au Ministère de l'Éducation de l'Ontario*)

Selon le MEES, l'apport de la manipulation pour l'apprentissage des mathématiques est une évidence.

> **Nul ne peut nier l'importance de la manipulation** dans la construction des concepts mathématiques. Même si l'utilisation fréquente de matériel constitue un soutien important à l'apprentissage de cette discipline au primaire et au premier cycle du secondaire, elle conserve encore son importance à des stades plus avancés. (PFEQ, 2e cycle, p. 16)

Il est important d'insister sur le fait que la « manipulation » par elle-même semble être l'activité essentielle permettant d'accéder aux objets mathématiques, ce qui suppose, d'une part, que l'objet mathématique « est contenu » dans sa représentation et qu'il suffit de « manipuler » cette représentation pour l'atteindre, et, d'autre part, qu'il s'agirait de trouver « la bonne » représentation physique pour favoriser l'apprentissage des élèves.

Pourtant, la conceptualisation en mathématiques dépasse la manipulation physique (Barallobres, 2017 ; Bardini, 2003 ; Chevallard, 1989 ; D'amore et Fandiño Pinilla, 2001 ; Dreyfus, Hershkowitz et Schwarz, 2001 ; Hazzan et Zazkis, 2005 ; Mercier, 2012 ; Winsløw, 2008).

Il semble important d'ajouter que les références des discours institutionnels mentionnées dans le cadre des affirmations précédentes proviennent, en très grande partie, des associations professionnelles, des institutions comme le ministère de l'Éducation de l'Ontario, de l'OCDE ou l'UNESCO et des ouvrages pédagogiques provenant de maisons d'édition populaires ; très peu d'écrits provenant du milieu de la recherche sont mentionnés.

Parmi les composantes des situations considérées comme étant inhérentes au développement de l'abstraction, *la diversité des modes de représentation* semble être primordiale pour amener les élèves à conceptualiser et à abstraire. En effet, dans les différents éléments du corpus et plus particulièrement ceux du MEES, il est mis de l'avant que pour s'approprier des concepts, l'élève doit être amené à utiliser plusieurs registres et que la diversité ainsi que le passage entre les différents registres de représentation sont importants au sein des situations d'apprentissage.

> Si les différents modes de représentation, qui se trouvent dans tous les champs de la mathématique, sont primordiaux pour l'appropriation des concepts, **le passage d'un mode à un autre facilite la compréhension** des situations auxquelles l'élève doit faire face. (PFEQ, 1er cycle, p. 238)

Dans d'autres cas, les différents registres de représentation sont nommés (et non explicités), et ils semblent « découler » de la nature du matériel concret utilisé, donnant ainsi l'idée que ce matériel serait porteur des différentes représentations.

> **L'exploitation du matériel en classe implique aussi pour l'enseignant la mise en relation du matériel avec les différents modes de représentation** utilisés en mathématique (expressions verbales [oral/écrit], expressions symboliques, dessins, graphiques et tables de valeurs). (Agir autrement en mathématiques, p. 26)

Le choix des registres de représentation apparaît, dans certaines occasions, plutôt lié à la possibilité de « réduire » la complexité des objets mathématiques que de les enrichir (et ainsi, favoriser la conceptualisation). Le discours du PFEQ, récemment mentionné, fait référence à la « facilitation » de la compréhension et, postérieurement, à une forme de différenciation pédagogique.

> Voici quelques pistes favorisant une pratique de la différenciation : [...] **Proposer des situations d'apprentissage qui peuvent être exploitées dans** différents champs de la mathématique ou **à l'aide de différents registres de représentation sémiotique.** (PFEQ, 2e cycle, p. 14)

Certains chercheurs montrent bien que le passage d'un mode de représentation à un autre est un élément essentiel de l'activité mathématique permettant l'accès à un certain niveau de généralité. Il est néanmoins important de mentionner que, si ces chercheurs mettent en évidence que cette généralisation se produit au profit du détachement de l'objet concret, de la construction d'objets mentaux ainsi que de structures de références (Radford, 2001 ; Radford et Grenier, 1996 ; Steindbring, 2006), dans le cadre des discours institutionnels visant le primaire, le premier cycle du secondaire et les élèves en difficulté, ce travail de généralisation est toujours mis en rapport avec un « retour » aux objets de départ, en général des objets matériels et leur manipulation.

Si la diversité des modes de représentation est perçue comme importante pour permettre les apprentissages, certains modes de représentation peuvent aussi engendrer des difficultés. En effet, il est mentionné que les élèves en difficulté d'apprentissage ou ayant un trouble d'apprentissage ont des difficultés avec les symboles mathématiques.

> **Le fait de distinguer le symbole de l'idée qu'il représente** est une autre source de confusion en mathématiques. (CS Beauce Etchemin, p. 15, *en référence à Small, 2008, Éditions DUVAL*)
>
> Dyscalculie : Quelques manifestions possibles : Difficulté avec : Les concepts abstraits ; **Les symboles mathématiques.** (CS de Laval, p. 12)

Il semble toutefois important d'ajouter que ces difficultés sont majoritairement attribuées à une condition particulière de l'élève et non à la nature spécifique des objets mathématiques ou à la spécificité de certains modes de représentation sémiotique, malgré le fait que les concepts mathématiques eux-mêmes peuvent être à la source des difficultés (obstacles épistémologiques). Le rôle du symbolisme mathématique dans la constitution même des objets mathématiques n'est presque pas mentionné.

Un autre élément inhérent aux composantes des situations d'apprentissage, *le but visé par les situations ou les situations problèmes*, est identifié comme un facteur qui favorise la conceptualisation chez les élèves. Ces mentions se retrouvent dans la moitié des discours institutionnels. Le but visé par les situations est perçu comme permettant le développement cognitif et orientant les stratégies et le raisonnement de l'élève. L'apport des situations-problèmes pour favoriser les apprentissages en mathématiques est largement promu par le MEES afin de permettre de mieux appréhender la réalité.

> **Placé dans des situations qui le conduisent à interpréter la réalité, à généraliser, à anticiper et à prendre des décisions**, l'élève a l'occasion de mettre en œuvre ou de développer son aptitude à observer, à concevoir, à gérer, à optimiser, à faire des choix, à convaincre, etc. (PFEQ, 2e cycle, p. 66)

Pour certains théoriciens, c'est en interaction avec une situation permettant de donner du sens à un concept que l'élève développe et met en place des stratégies pour répondre à une demande et résoudre une situation (Bruner, 1993 ; Vergnaud, 1990). Si toute une théorie s'est développée au sein du courant de la didactique des mathématiques française à propos de l'élaboration de situations ainsi que de ses principales composantes (Brousseau, 1998), les discours institutionnels ne vont guère expliciter et exemplifier ce qu'ils entendent par situation-problème, mais vont largement répéter qu'elle est *l'essence même de l'activité mathématique*.

> **La résolution de situations-problèmes constitue l'essence même de l'activité mathématique.** Dans ce programme, elle est présentée sous deux angles. D'une part, elle est considérée comme un processus, d'où la compétence Résoudre une situation-problème. Elle revêt une importance toute particulière du fait **que la conceptualisation des objets mathématiques nécessite un raisonnement appliqué à des situations-problèmes.** (PFEQ, 2e cycle, p. 1)

De surcroît, une des mentions concernant l'environnement d'apprentissage n'ayant pas été anticipée lors de l'identification des catégories concerne *l'utilisation d'outils technologiques*. En effet, ces mentions présentes dans les discours du MEES considèrent l'utilisation d'outils technologiques comme un facteur favorisant la conceptualisation et particulièrement en milieux défavorisés. L'utilisation de ces outils (logiciels, tableaux numériques interactifs, calculatrices, appareils photo numériques, etc.) permettrait aux élèves de mieux comprendre et approfondir certains concepts mathématiques, mais également d'être plus efficace.

> Une importance est accordée **aux outils technologiques, qui favorisent l'émergence et la compréhension de concepts et de processus mathématiques** tout en augmentant **l'efficacité des élèves** dans le traitement de situations diverses. (Progression des apprentissages, p. 5)

Les outils technologiques sont également perçus comme des facilitateurs dans l'enseignement puisqu'ils permettent de réduire la difficulté de certains calculs et d'effectuer des démonstrations, des manipulations de concepts abstraits. Ainsi, il ne s'agit pas des outils avec lesquels on peut « faire » des mathématiques, mais plutôt des éléments permettant d'illustrer ou de fournir une certaine « visibilité » aux objets abstraits. Ces mentions peuvent être rattachées à la grande importance qui est accordée, encore une fois, à la manipulation d'objets sensibles puisque les outils technologiques sont perçus au même titre que le matériel concret.

> Au 21e siècle, l'utilisation de la technologie est un outil précieux pour appuyer la démarche de résolution de situations-problèmes, favoriser l'émergence et la compréhension des concepts et processus, faciliter la communication des élèves et augmenter **l'efficacité des élèves** dans la réalisation des tâches. Au secondaire, elle permet aux élèves de faire des apprentissages en mathématique, d'explorer des situations plus complexes, de manipuler un grand nombre de données, d'utiliser une diversité de modes de représentation, de simuler et de **faciliter des calculs fastidieux.** (Agir autrement en mathématiques, p.26)

L'apport de la technologie permettrait ainsi d'augmenter l'intérêt, l'efficacité et la compréhension des élèves. Il faut noter que l'efficacité des élèves semble être associée à la lourdeur des calculs à effectuer. D'ailleurs, le discours sur l'outil technologique prend une forme « générique » comme si par lui-même, il faciliterait « l'exploration » d'une situation ou la simulation, pour n'importe quel contenu de savoir.

En bref, parmi les différents usages de la notion d'abstraction, la grande majorité aborde les composantes des situations d'apprentissage comme étant indissociables de la conceptualisation, mais ces composantes sont toujours rattachées à la nature concrète qu'elles doivent comporter. Encore une fois, le rôle du sujet est remarquable dans le sens qu'il semble être de son ressort de tirer du sens des objets qu'il manipule ainsi que les finalités de l'activité mathématique (construire, élaborer, etc.) lui sont dévolues et l'enseignant, en tant que représentant d'une culture mathématique, est évacué de ce processus.

c) L'abstraction et la conceptualisation inhérentes aux capacités de l'élève

L'analyse des documents, concernant la notion d'abstraction, fait ressortir en grande majorité que cette activité est inhérente à l'élève. En effet, il émerge de ces discours que certaines « conditions cognitives » seraient préalables afin de conceptualiser.

Au sein de ces diverses mentions, le rôle de l'élève (en particulier, sa responsabilité dans la construction du sens) apparaît comme incontournable. Comme il a été soulevé précédemment, les processus d'abstraction et conceptualisation semblent être du ressort de l'élève et ils semblent plus particulièrement liés à ses capacités cognitives, métacognitives ainsi qu'à son engagement actif.

> [...] **l'élève construit et s'approprie les concepts et processus suivants** [...] (PFEQ, 2e cycle, p. 54, 57, 59, 61, 69, 72, 74, 76, 87, 91, 94, 104, 107, 108, 122, 122, 122, 122 et 122)

Certaines propositions permettant d'introduire une liste de concepts mathématiques se retrouvent à de multiples endroits dans ces discours et laissent toutefois en suspens la nature de cette *construction* (ce qu'elle implique et met en œuvre).

> Puisque l'objectif premier du Programme de formation est le développement de compétences, **la plupart des concepts et des processus doivent être construits par l'élève** et réinvestis dans des contextes diversifiés. (PFEQ, 1[er] cycle, p. 248)

Le recours fréquent au « constructivisme », tout au long de tous les discours institutionnels, contribue à entériner l'idée selon laquelle *l'abstraction serait inhérente aux actions intrinsèques de l'élève et de son engagement actif.*

L'apprentissage semble ainsi prendre le dessus sur l'enseignement :

> Dans une perspective pédagogique, il s'agit là d'une contribution fondamentale à sa formation intellectuelle. **Elle [la répétition systématique] mise, comme l'école elle-même, sur la capacité de l'élève de généraliser ses apprentissages en les dégageant du contexte concret dans lequel il les a faits et, par application des abstractions à un nouveau contexte pertinent, de les transférer.** (CS de la Capitale, p. 6)

Dans le passage précédent, c'est *l'école elle-même* qui dévolue l'activité de généralisation, de décontextualisation, de recontextualisation ainsi que de réutilisation de connaissances qui seraient ainsi des « capacités » intrinsèques aux élèves.

Cette conception conduit les tenants de ces discours à considérer *l'autonomie de l'élève (en termes de capacités intrinsèques) comme une condition préalable à la conceptualisation.* Plusieurs passages du PFEQ (2[e] cycle) mentionnent d'ailleurs que « le degré d'autonomie de l'élève » (p. 15, 24, 33, 43) est nécessaire pour qu'il acquière les différentes compétences liées au domaine des mathématiques :

> Puisque les élèves doivent construire leur répertoire personnel de stratégies, **il importe de les amener à développer leur autonomie** à cet égard et de leur apprendre à utiliser les stratégies dans différents contextes* [...] (Agir autrement en mathématiques, p.29, en référence au PFEQ)

Bien que certains auteurs s'entendent sur le fait que la modification fonctionnelle de la pensée (Vygotski, 2012), les modes de représentation du monde (Bruner, 1966) et la prise de conscience dans l'activité (Piaget et Inhelder, 1966) sont constitutifs des processus d'abstraction et de généralisation, celles-ci ne sont pas des « conditions préalables, mais elles se développent au sein d'une activité orientée par un contexte, une finalité et qui se constitue dans un cadre social de praxis humaine (Chevallard, 1994).

La centration sur l'élève et, par conséquent, la minimisation de la place de l'action d'enseignement est soutenue par des références à la psychologie génétique :

> On sait, depuis Piaget (et les travaux ultérieurs des psychologues cognitivistes l'ont confirmé), que l'accession de l'intelligence au stade opératoire formel n'est vraiment complétée, chez la plupart des sujets, que vers 14 ans. **En première secondaire, l'élève est donc, sauf exception, incapable d'effectuer seul**, spontanément, systématiquement et consciemment, **les conceptualisations et les généralisations** qui lui seront si précieuses par la suite pour étendre à l'ensemble de son développement l'échantillon, somme toute fort modeste, des apprentissages que lui a proposés l'école. (CS de la Capitale, p.6)

L'accès au stade opératoire formel semble être ainsi une *condition* pour les conceptualisations et les généralisations. Cette affirmation est particulièrement importante puisqu'elle se situe au centre du débat concernant les rapports entre développement naturel, apprentissage et enseignement. En effet, les travaux en didactiques des mathématiques (Bessot, 2003 ; Brousseau, 1998 ; Butlen et Pezard, 2003 ; Chevallard et Bosch, 1999 ; Sarrazy, 2001, 2006) ont bien montré que ce débat doit se placer au sein de la relation didactique où la spécificité du savoir ainsi que le rôle de l'enseignant occupent une place fondamentale.

Dans le cadre de cette construction autonome, apparaît également l'idée selon laquelle *la conceptualisation serait la résultante de l'activation et de l'approfondissement des concepts appris antérieurement par l'élève ainsi que de son intuition.* En ce sens, les anciens apprentissages serviraient de tremplin aux nouveaux qui seraient plus élaborés. Bien que la question de la réorganisation des apprentissages antérieurs soit particulièrement mentionnée en didactique des mathématiques (Dreyfus, Hershkowitz et Schwarz, 2001), elle fait partie d'une responsabilité partagée à l'intérieur du processus d'enseignement/apprentissage, ce qui ne semble pas être le cas pour le MEES qui fait strictement appel à des concepts appartenant au constructivisme :

> L'apprentissage, c'est l'adaptation des anciennes connaissances. **En en construisant des nouvelles ou en modifiant les anciennes**, ces nouvelles connaissances deviennent viables dans de nouvelles situations. (Agir autrement en mathématiques, p.18)

La métacognition apparaît implicitement, par le biais des anticipations, comme une ressource pour le traitement des tâches :

> **C'est avec son intuition**, son expérience, sa capacité à comparer et à généraliser des situations que l'individu **peut efficacement anticiper le fruit de sa démarche**. L'anticipation permet de planifier, de visualiser des impacts et des retombées, d'orienter les actions à entreprendre, et cela, tout au long du processus accompagnant le traitement d'une situation donnée. (PFEQ, 2e cycle, p. 114)

Anticipation et validation font partie de l'analyse proposée par la théorie de situations didactiques (Brousseau, 1989), mais elles s'inscrivent dans un processus dialectique où le rôle de l'enseignant et les processus d'institutionnalisation occupent une place prépondérante.

Parmi les spécificités de l'élève, nommées comme étant associées à l'abstraction, *la maîtrise et au développement de stratégies cognitives et métacognitives* prend une importance considérable considérant le nombre élevé de mentions retrouvées dans les discours institutionnels. Ces stratégies auraient l'avantage de soutenir les apprentissages et auraient comme effet d'améliorer le développement cognitif de l'élève.

> C'est la répétition et l'exploitation systématique de tels exercices qui permettront **d'accélérer le développement cognitif de l'élève** et consolideront chez lui des habitudes de pensée qu'il exploitera ensuite spontanément et systématiquement lorsque sa maturité cognitive le permettra. (CS de la Capitale, p. 6)

> **Les stratégies affectives, cognitives et métacognitives**, qui soutiennent le processus d'apprentissage, sont de la responsabilité de l'élève. (PFEQ, 2e cycle, p. 17)

Ces différentes stratégies devraient être présentes en nombre suffisant pour permettre à l'élève d'être conscient lors de ses apprentissages.

> **En s'appropriant des processus mathématiques et des stratégies**, l'élève peut établir des liens entre les méthodes de travail qu'il doit acquérir en mathématique et certains aspects de la compétence transversale. Il importe également **qu'il prenne conscience de sa façon personnelle de comprendre et d'apprendre** pour adopter des méthodes de

> travail adaptées à ses propres besoins et à son mode de fonctionnement. (PFEQ, 2e cycle, p. 8)

Cette prise de conscience permettrait à l'élève d'« adopter des méthodes de travail adaptées à ses propres besoins et à son mode de fonctionnement » ; l'organisation spécifique des savoirs semble ne pas intervenir et les finalités de la conceptualisation semblent ainsi découler de besoins individuels.

Si l'abstraction est largement considérée comme étant inhérente à la cognition, *les difficultés d'abstraction sont évidemment liées à des défauts cognitifs des élèves.*

> La dyscalculie est un trouble de l'apprentissage du calcul lié au raisonnement logicomathématique. **Ce trouble nuit à la compréhension des concepts, à l'utilisation des nombres ainsi qu'à la mémorisation des faits numériques.** Il s'associe souvent à d'autres troubles tels que le TDA/H, la dyslexie, la dyspraxie ou la dysorthographie. (CS de Laval, p. 12)
>
> [Manifestations possibles de la dysphasie] **Comprendre l'abstraction** (besoin de mots concrets)/**Généraliser ou catégoriser**/Transférer dans un contexte différent (CS de Laval, p. 13)

Les difficultés de généralisation et d'abstraction semblent même être liées à une certaine rigidité cognitive de l'élève ainsi qu'à des troubles de langage :

> **Il aura de la difficulté à saisir et manier des concepts abstraits** (concepts relatifs à l'espace et au temps) et des phrases complexes. Il est capable d'intégrer de nouveaux concepts, mais lorsqu'il doit les utiliser, il aura de la difficulté à les récupérer et à les utiliser dans un contexte différent. (CS de la Seigneurie-des-milles-îles, p. 17)
>
> Difficultés associées : Déficit de la mémoire et/ou autres fonctions exécutives ; Difficultés de perception du temps ; **Rigidité/Difficultés de généralisation ; Difficultés d'abstraction.** (CS de la Seigneurie-des-milles-îles, p. 19)

Dans les documents analysés, les difficultés en mathématiques s'expliquent majoritairement par l'entremise de défauts du fonctionnement cognitif ; le rôle qu'y jouent les savoirs spécifiques et les interactions didactiques (les effets de contrat didactique, par exemple) sont rarement mentionnés.

Somme toute, il y a une centration sur l'élève, sous une bannière constructiviste s'effaçant dans un discours cognitiviste, qui minimise les aspects contextuels, langagiers, interactionnels et propres aux savoirs. Les capacités cognitives de l'élève semblent être à la source de ses apprentissages, mais également de ses difficultés.

d) L'abstraction et la conceptualisation inhérentes aux objets de savoir

Comme il est déjà possible de le constater, les références aux spécificités des savoirs mathématiques à enseigner, lorsqu'il s'agit d'abstraction, sont quasi-absentes. En effet, parmi les huit discours institutionnels analysés, ces références se retrouvent dans les trois discours du MEES et sont absentes des discours des commissions scolaires. Ainsi, selon le MEES, *la mathématique entraine certains types de raisonnements et implique de traiter ses objets de façon abstraite afin de généraliser.*

> La mathématique permet d'observer et de dégager des régularités, des tendances ou des lois aussi bien par l'analyse de suites numériques, de données, de procédures algorithmiques ou de relations entre des variables que par le calcul de mesures. De plus, elle permet d'élaborer des preuves et des démonstrations. **Elle sollicite également les raisonnements inductif et déductif, qui sont intimement liés à l'aptitude à généraliser une situation.** (PFEQ, 2e cycle, p. 114)

La plupart de ces mentions sont introduites de façon générique et font rarement référence à la constitution des objets spécifiques. Par contre, il semble pertinent d'ajouter que ce type de mention précède, en grande majorité, des affirmations selon lesquelles l'usage de matériel de manipulation est nécessaire pour favoriser les apprentissages de ces objets de savoirs. La centration sur l'élève (à ses aptitudes) réapparait ici sous l'angle des matérialisations qui favoriseraient le déploiement des caractéristiques cognitives à mettre en œuvre.

Bien que la référence à des objets de savoir n'est pas complètement évacuée des documents institutionnels, les problèmes épistémologiques inhérents à la constitution de ces objets au sein d'une communauté de référence se diluent à l'intérieur des spécificités cognitives des sujets et des moyens (en général matériels) ; sources premières d'accès à « leur essence » ainsi qu'à leur sens.

e) Le rôle de l'enseignant dans le développement de l'abstraction et de la conceptualisation

L'enseignant semble occuper un rôle de second ordre vu le peu de place qui lui est accordée dans le processus de conceptualisation. D'ailleurs, selon l'instance produisant le discours (ministère et commissions scolaires), l'enseignant n'adopte pas toujours le même rôle et parfois même, au sein d'un même discours.

Tout d'abord, *l'enseignant est perçu comme le spécialiste des mathématiques* par une minorité des discours. D'une part, il est de son ressort de connaître les liens entre les concepts et les processus mathématiques alors que d'autre part, il doit effectuer une analyse des concepts et des difficultés possibles afin de planifier son enseignement.

> Pour l'enseignant, une meilleure connaissance de la construction des différents concepts de même que **la compréhension des liens entre ces différents concepts et les processus mathématiques sont des atouts pour planifier efficacement l'enseignement**. (Agir autrement en mathématiques, p.23)

La rareté des mentions concernant le rôle des enseignants n'est pas surprenante, compte tenu des analyses précédentes (discours centrés sur l'élève, en particulier à caractère constructiviste, minimisation de la place des institutions, etc.).

Certaines mentions font référence à des « conditions préalables » qui concernent cette fois-ci l'enseignant :

> De même, **l'enseignant, avant d'enseigner des concepts** (même ceux qui sont spécifiques à sa matière), **doit faire un traitement intellectuel de l'objet** : se donner une **définition claire et univoque** des termes essentiels, disposer **d'exemples et de contre-exemples** et en **connaître leurs limites, prévoir les confusions possibles** avec des concepts voisins, connaître les liens logiques avec d'autres concepts nécessaires à l'utilisation du premier, et ainsi de suite. (CS de la Capitale, p. 7)

Dans le cadre de certains discours, c'est par l'entremise de trois interventions que l'enseignant peut s'assurer que les apprentissages sont retenus pas les élèves et pourront être transférés. Ces interventions (*contextualisation, décontextualisation et recontextualisation*) auraient également l'avantage de rendre explicites certains concepts.

> Trois types d'intervention sont susceptibles d'assurer la rétention et le transfert des apprentissages. Dans un premier temps, **la contextualisation** permet de donner aux élèves un sens aux apprentissages et de créer des liens entre les connaissances antérieures et les

> nouvelles. Ensuite intervient **la décontextualisation**, qui permet de dégager les connaissances de leur contexte d'acquisition pour abstraire et généraliser. Enfin, **la recontextualisation** permet de réutiliser des connaissances construites et de les adapter à d'autres contextes. (PFEQ, 2e cycle, p.49)

Il est intéressant d'observer que l'abstraction apparaît au sein d'un processus de contextualisation/décontextualisassions/recontextualisation commandé par l'action de l'enseignant, ce qui va à l'encontre de certaines positions adoptées au sein du même document et mentionnées précédemment concernant l'activité cognitive de l'élève. Paradoxalement, le même document situe le rôle de l'enseignant sur *la gestion des processus mentaux des élèves* (stratégies cognitives et métacognitives), accordant une importance considérable au fait que l'enseignant est en premier lieu responsable du bon développement intellectuel de l'élève (son efficacité, la rapidité d'exécution, les stratégies cognitives, etc.) et qu'en ce sens, il est primordial qu'il veille à amener les élèves à se rendre compte de la façon dont ils apprennent afin qu'ils puissent évaluer l'efficience des stratégies utilisées.

> Pour amener l'élève à réussir dans ses activités mathématiques, **l'enseignant doit l'aider à gérer ses processus mentaux** et lui donner fréquemment l'occasion de s'interroger sur ce qu'il apprend et sur la manière dont il apprend. (PFEQ, 2e cycle, p.16)

La métacognition apparaît aussi comme stratégie, gérable par l'enseignant, pour surmonter les difficultés d'apprentissage :

> **L'orthopédagogue, à travers ses activités quotidiennes, accompagnera l'apprenant dans le développement de sa métacognition.** Comme médiateur, « il faut amener l'élève à acquérir une capacité métacognitive appropriée à son niveau de développement intellectuel ».* (CS Beauce Etchemin, p.8, * en référence à un guide pédagogique de l'Ontario)

Cette idée est, somme toute, très importante puisque certains passages sont réutilisés de façon intégrale d'un document à l'autre.

> Dès le préscolaire, l'élaboration de stratégies d'apprentissage est bénéfique pour l'ensemble des élèves. **L'enseignant veillera à développer des attitudes, des comportements, des démarches, des stratégies tant cognitives que métacognitives** qui au préscolaire jetteront les bases de la scolarisation et inciteront l'enfant à apprendre tout au long de sa vie. (Agir autrement en mathématiques, p. 29)

Le rôle de l'enseignant en tant que gestionnaire de processus mentaux afin d'aider les élèves à abstraire et conceptualiser s'accorde bien avec les propos précédents, en particulier ceux concernant l'abstraction conçue comme étant inhérent aux capacités cognitives de l'élève.

f) Le rôle du symbolisme et de la formalisation pour abstraire

En ce qui a trait au rôle du symbolisme et de la formalisation, ces sujets sont peu présents au sein du corpus. En effet, le rôle du symbolisme dans les processus d'abstraction n'est presque pas abordé ou seulement en termes génériques ; c'est-à-dire qu'il est mentionné qu'il est important que l'élève travaille avec les symboles mathématiques. Le symbolisme est particulièrement mis en relation avec les différents registres de représentation ayant déjà été traités au point b). La formalisation, quant à elle, est davantage traitée comme une activité langagière. En ce sens, c'est *la définition des concepts et objets mathématiques qui permet de formaliser les apprentissages* :

> Il importe de familiariser les élèves avec l'utilisation de ces différentes composantes du langage mathématique au fur et à mesure que le besoin s'en fait sentir et de s'assurer qu'ils en comprennent bien le sens. **La formalisation de la mathématique revêt une importance particulière au sein des séquences Technico-sciences et Sciences naturelles.** (PFEQ, 2e cycle, p. 49)

Cette formalisation semble relever d'une activité contrôlée par l'élève qui formule une définition à partir de ses expériences personnelles :

> On placera donc alternativement l'élève en situation : **de dégager un concept à partir de définitions ou d'exemples :** c'est l'approche centrée sur le concept et visant la découverte ; **de formuler une définition à partir de l'énoncé d'un concept ou d'exemples d'application :** c'est l'approche centrée sur la définition et visant la formalisation ; **de fournir des exemples d'application d'un concept à partir de son énoncé ou de sa définition :** c'est l'approche centrée sur l'exemple et visant la généralisation. (CS de la Capitale, p. 9)

Ainsi, pour les institutions, la formulation d'une définition par l'élève (seul, encore une fois) est garante de formalisation liant ainsi ce processus au langage.

g) Le rôle du langage pour abstraire

Finalement, les analyses font également ressortir que si le langage est important au sein des processus de conceptualisation, cela peut également devenir un obstacle aux apprentissages et particulièrement chez des élèves issus de milieux défavorisés. À de multiples reprises, les institutions vont promouvoir les discussions, les questions, la collaboration ainsi que l'usage de la terminologie appropriée pour favoriser les apprentissages en mathématique. À certains égards, le développement des compétences en communication permettrait à l'élève d'améliorer ses capacités métacognitives.

Plusieurs propositions véhiculent l'idée que *la discussion est indissociable du raisonnement mathématique*. Ainsi, une difficulté langagière pourrait causer des difficultés d'abstraction en mathématique et donc ce sont les interactions entre les élèves qui favoriseraient la compréhension des élèves, particulièrement en milieux défavorisés. Celles-ci permettent alors de consolider les apprentissages sans distinction entre les disciplines.

> Le travail d'équipe et en dyade permet des échanges qui pourraient aider à diminuer les difficultés rattachées au langage. **On reconnaît la nécessité pour les élèves issus de milieux défavorisés de s'engager dans un processus réduisant la distance entre la langue parlée et la langue écrite, ainsi que la nécessité d'enrichir les deux.** Or, l'interaction entre élèves, qu'il s'agisse de discussions en classe ou d'autres activités axées sur la participation, **est un des fondements de l'assimilation des connaissances et de la réussite scolaire.** L'importance de structurer le travail d'équipe et en dyade de manière à orienter les interactions verbales est soulignée*. **Ces interactions verbales sur la discussion, le débat et l'expression d'idées permettent de créer des occasions d'évaluer le raisonnement et les solutions acceptables ou non, conduisant ainsi à enrichir la compréhension des concepts mathématiques.** (Agir autrement en mathématiques, p. 45, * en référence à Frempong, 2005)

L'activité raisonnée étant dépendante du langage et de la culture produisant les savoirs (Bronckart, 2007), les institutions vont toutefois prioriser *le langage écrit au sein de l'activité individuelle du sujet afin de favoriser le développement de fonctions cognitives utiles à la mathématique.*

> **Puisqu'elle permet de réagir dans l'action et d'agir sur l'action, la communication orale devrait se situer au premier plan.** Cependant, la communication écrite offre aussi de nombreux avantages. En effet, le recours à des activités d'écriture diversifiées **contribue au développement de fonctions cognitives** qui interviennent, par exemple, dans l'imitation d'un modèle, la transformation de la pensée, la mémorisation, l'analyse

> et le contrôle des actions menées. **Ainsi, lorsque l'élève rédige des preuves, certaines règles de rédaction lui permettent de mieux structurer sa démarche et d'expliciter plus clairement le raisonnement déployé.** (PFEQ, 2e cycle, p. 39)

Ainsi, le langage contribue plutôt au développement cognitif et donc à celui des stratégies d'apprentissage qu'à un mécanisme d'entente au sein de l'activité mathématique en soi. Paradoxalement, si le langage oral doit être au premier plan dans les apprentissages, la majorité des mentions effectuées, abordées tout au long de cette analyse, nous informent que, principalement, l'élève construit ses apprentissages seul. Les interactions et discussions se produisant en situation sont nommées comme étant essentielles, mais dans les explicitations des institutions elles sont bien rapidement délaissées pour se centrer sur le travail cognitif de l'élève.

4.2 Le discours pédagogique

4.2.1 Les principales thématiques relatives à la notion d'abstraction

Deux discours ont été sélectionnés afin de traiter la problématique qui nous concerne. Le premier est un livre portant sur la didactique et les apprentissages publié par Chenelière Éducation ayant pour titre *Un cerveau pour apprendre les mathématiques* (David A-Sousa). Le second est un livre portant sur l'éducation qui est publié par Retz et Chenelière Éducation ayant pour titre *L'apprentissage de l'abstraction* (Britt-Mari Barth). Ces discours ont été choisis d'abord, car ils répondent aux critères définis dans le cadre de la méthodologie, mais également puisque ces auteurs sont souvent cités dans le cadre des discours institutionnels ainsi que dans les guides et ouvrages qui ont permis de poser la problématique de ce mémoire.

Bien que les deux ouvrages, sélectionnés pour les analyses, soient différents sous plusieurs aspects (la posture adoptée, par exemple), il n'en reste pas moins qu'un grand nombre de thématiques sont similaires. Toutefois, certaines divergences entre les significations attribuées à la notion d'abstraction par les auteurs seront abordées plus en détail aux points suivants. Dans le cadre de ce type de discours, les références à des études scientifiques ainsi qu'à des chercheurs reconnus sont très présentes ; néanmoins, la façon d'articuler le discours aux références théoriques se distingue entre les ouvrages. Effectivement, au sein de celui de A.Sousa, les associations à des groupes d'individus (par exemple, des chercheurs experts dans leur domaine) sont surtout utilisées comme arguments d'autorité pour convaincre le lecteur tandis qu'au sein de celui de Barth, les références semblent plutôt servir comme appui ou élément de généralisation à la suite d'explications.

L'analyse de contenu a permis d'encoder plus de 222[18] passages à partir des thématiques définies préalablement ainsi que parmi des significations émergentes.

Tableau 4.2 Thématiques et significations en lien avec la notion d'abstraction repérées au sein des discours pédagogiques (n=2) (Annexe F)

Thématiques liées à l'abstraction	**Significations accordées à la notion d'abstraction**	**n**
a) L'abstraction inhérente aux capacités de l'élève	**L'abstraction est inhérente à la cognition du sujet (son développement, la maturation du cerveau, etc.).**	**2**
	L'abstraction est dépendante de la maîtrise de certains préalables par l'élève (connaissances, capacités, savoir-faire) et de leur profil d'apprenant.	2
	La conceptualisation est dépendante de l'encodage en mémoire, encodage qui relève de la pertinence et du sens perçus par le cerveau.	2
	L'abstraction est dépendante de la volonté de l'élève, de sa motivation, de son attitude envers les mathématiques ainsi que de son implication intellectuelle.	2
	L'abstraction est possible si l'élève a une intention, une visée dans le cadre de son action consciente (classification, discrimination, comparaison, manipulation, etc.)	1
	L'abstraction est inhérente aux stratégies cognitives et métacognitives de l'élève.	2
	Afin de conceptualiser, l'élève doit franchir plusieurs degrés de maîtrise des apprentissages ou paliers de progression mentale.	2
b) L'abstraction inhérente aux composantes des	La pertinence des situations (en lien avec le quotidien) favorise l'encodage en mémoire et donc, la conceptualisation.	1
	Le matériel de manipulation et le passage du concret vers l'abstrait favorisent la conceptualisation.	**1**

[18] Les fréquences d'encodage des mentions de l'abstraction selon les thématiques et les catégories au sein du discours pédagogique sont présentées en Annexe G et H.

situations d'apprentissage	Les situations doivent amener les élèves à développer leurs stratégies mentales menant à l'abstraction.	1
c) Le rôle de l'enseignant dans le développement de l'abstraction	L'enseignant joue un rôle fondamental dans la gestion de certains processus mentaux.	1
	Afin d'amener les élèves à abstraire, l'enseignant doit fonder son enseignement sur leur profil.	2
	Le rôle de l'enseignant est de guider les élèves (montrer la bonne façon de faire) pour ensuite les rendre autonomes dans la constitution des apprentissages.	2
	L'enseignant aide les élèves à mobiliser leurs capacités cognitives et métacognitives qui sont nécessaires à la conceptualisation.	**1**
d) L'abstraction et la conceptualisation inhérentes aux objets de savoir	Afin d'abstraire, il importe de considérer et d'analyser la structure des concepts.	1
e) Le rôle du langage dans le processus d'abstraction	Les interactions de l'enseignant permettent d'induire l'action des élèves.	1

Le tableau 5 permet de constater que l'abstraction est en majeure partie liée à l'élève et ses caractéristiques. Les autres composantes (actions de l'enseignant, le langage, les situations d'apprentissage, les spécificités du savoir), nettement moins présentes, sont articulées de façon à répondre à des caractéristiques et des besoins des élèves. Par exemple, lorsque A. Sousa mentionne le rôle de l'enseignant dans le processus de conceptualisation, ces actions sont toujours mises en relation avec le fonctionnement du cerveau de l'enfant. Du côté de Barth, bien que celle-ci accorde une grande importance aux travaux provenant du courant constructiviste, elle considère également les résultats provenant de la neuropsychologie pour expliquer les questions concernant l'apprentissage de l'abstraction, en liant certaines des composantes de l'abstraction aux opérations mentales que doit acquérir l'élève. Par exemple, lorsque le concept (sa structure et ses spécificités) est abordé comme une constituante importante de l'abstraction, celui-ci est traité au regard des opérations mentales que l'élève doit effectuer pour l'acquérir.

Il est intéressant de spécifier qu'aucune caractérisation de la notion d'abstraction n'est donnée par les deux auteurs mentionnés.

Bien que pour ceux-ci, le sujet est au centre des processus d'abstraction et de conceptualisation, ce sont strictement des aspects liés à ses capacités cognitives qui sont retenus. Cela révèle, d'une part, un traitement partiel de l'abstraction et de la nature des objets mathématiques et, d'autre part, certaines hypothèses explicites, pour la plupart, sur la cognition et le sujet.

4.2.2 Quelle conception des mathématiques ?

Selon certains pédagogues, il importe que l'enseignant se questionne quant à la conception qu'il a des mathématiques puisque cela oriente sa façon d'enseigner (A. Sousa, 2010). Cet auteur mentionne qu'il existerait trois perspectives pour appréhender les mathématiques : platonicienne, formaliste et intuitionniste. Pour la première conception, les mathématiques existeraient de façon abstraite, et ce, en dehors de l'esprit de l'homme dont la fonction serait de les découvrir et/ou de les observer. La deuxième conception des mathématiques renvoie à un usage plus formel de ses objets : « les mathématiques ne sont qu'un jeu où l'on manipule des symboles en suivant des règles formelles et précises » (A. Sousa, p. 64). Finalement, la troisième conception est considérée par l'auteur comme étant la plus appropriée pour caractériser la relation qui unit l'arithmétique et le cerveau :

> Les intuitionnistes croient que **les objets mathématiques sont simplement des constructions de l'esprit humain.** Les mathématiques n'existent pas dans la vie courante et **se trouvent seulement dans le cerveau du mathématicien qui les invente**. (A.Sousa, p.64)

À ce propos, il semble y avoir une confusion entre la question ontologique, renvoyant à la nature des objets, et la question épistémologique, portant sur l'accès aux savoirs mathématiques. En effet, l'auteur réfère à trois perspectives pour « appréhender » les mathématiques, mais lors de la description de ces perspectives, qui est d'ailleurs assez réductrice, il est question d'existence et de nature des mathématiques.

Au sein de la troisième perspective mentionnée, les intuitions seraient « profondément enracinées dans le cerveau » (A.Sousa, p.65) du mathématicien qui naîtrait, par exemple, avec des mécanismes permettant de déterminer la numérosité d'un ensemble, mécanismes qui auraient la particularité d'être indépendants du langage. Que l'activité mathématique soit dépendante du mathématicien et de ses constructions est une idée partagée par plusieurs (Bkouche, 2012 ; Delauney, 2016 ; Dubucs, 2010 ; Patras, 1996). Toutefois, l'affirmation selon laquelle les mathématiques ne seraient qu'une invention de l'esprit l'humain renvoie à un certain « idéalisme » naïf qui n'est pas exempt de difficultés (Dondeyne, 1938a).

Cette conception des mathématiques permet déjà d'expliquer la prégnance des références concernant le rôle des capacités cognitives du sujet pour abstraire et conceptualiser (Tableau 5, point a). L'ouvrage de Barth, se voulant plus général, n'aborde pas la question spécifique de l'enseignement des mathématiques ; dans ce sens, la question concernant la nature des mathématiques n'est pas un objet de discussion.

4.2.3 Différentes significations attribuées à l'abstraction dans le discours pédagogique

a) L'abstraction inhérente aux capacités de l'élève

Au sein du corpus analysé, l'élève semble être le point de départ des processus d'abstraction, de conceptualisation et d'apprentissage ; plus particulièrement, ce sont ses capacités cognitives qui déterminent les conditions de possibilité (ou d'impossibilité) à abstraire. Ne délaissant pas nécessairement les gestes de l'enseignant, l'apport des situations d'apprentissage ou du langage, ces pédagogues vont, de façon marquée, articuler ces questions avec la cognition de l'élève, comme il est possible de le constater dans la présente analyse.

Tout d'abord, l'idée la plus récurrente au sein de ces ouvrages est que *l'abstraction et la capacité de conceptualiser en mathématiques ou en général seraient principalement* *dues à la maturation du cerveau ainsi qu'à certains caractères innés chez l'être humain qui sont indépendants du langage.*

> **L'être humain naît avec des mécanismes innés pour distinguer les objets et déterminer la numérosité de petits ensembles.** [...] Chez les enfants, la capacité d'effectuer des estimations et des comparaisons numériques, de compter sur les doigts et de faire des additions et des soustractions simples **se développe spontanément sans véritable enseignement direct.** (A.Sousa, p. 65)

De plus, l'acquisition de concepts se transformerait selon la maturation de certaines parties du cerveau et d'ailleurs chaque hémisphère y jouerait un rôle particulier. Il est mentionné dans l'ouvrage de Barth et de A.Sousa que ce processus s'effectue en alternance d'un hémisphère (gauche : travail de vérification et droit : travail d'inférence) à l'autre.

> C'est donc d'abord par rapport à la structure cognitive de chacun que se réalise la formation spontanée de concepts. (Barth, p. 45)

L'accent est mis ainsi sur un développement « naturel » dans lequel le rôle des aspects culturels (Bronckart, 2007 ; Vygotski, 2012) n'est pas mentionné.

D'ailleurs, selon A.Sousa, certaines caractéristiques neurologiques (trouble d'apprentissage) et biologiques (anxiété, mathophobie) entraineraient des difficultés d'abstraction.

> **Habituellement, les élèves qui présentent cette phobie ont une compréhension limitée des concepts mathématiques** [...] La phobie des mathématiques peut être un obstacle aussi difficile à surmonter qu'un trouble d'apprentissage, mais il faut se rappeler que le système neurologique des élèves mathophobes est normal. (A.Sousa, p. 156)

Il est important d'ajouter que la mathophobie n'est pas proprement articulée aux mathématiques, hormis quelques passages affirmant qu'il s'agit de la peur des nombres, mais à des échecs répétés ou à une mauvaise estime de soi qui résultent d'une condition préalable de l'élève (l'anxiété, par exemple).

> Peu importe la source de l'anxiété, les conséquences les plus courantes de la mathophobie sont des échecs en mathématiques. L'une des raisons qui expliquent le faible rendement scolaire est donc biologique. (A.Sousa, p.156)

De plus, certains troubles comme la dyslexie, le TDAH, le trouble visuo-spatial, la dyscalculie, etc., constitueraient un frein important à la conceptualisation en mathématiques, particulièrement en lien avec la compréhension des quatre opérations arithmétiques de base, en comparaison à d'autres facteurs tels que les stratégies de l'enseignant ou le savoir en lui-même.

Barth, quant à elle, se situe autrement en ce qui concerne les origines des difficultés d'abstraction, elle va plutôt déclarer au tout début de son livre que ce sont les leçons qui sont la cause des difficultés d'abstraction. Bien rapidement, ce sujet est toutefois mis de côté pour centrer le propos sur l'élève et ses capacités à acquérir des concepts de plus en plus abstraits.

En effet, une idée importante de son livre est que *l'abstraction dépend de la maîtrise de certains préalables (connaissances, capacités, savoir-faire) par l'élève.* Pour Barth, la première étape de la démarche cognitive d'abstraction est *la perception* et c'est à ce moment que les connaissances antérieures prennent toute leur importance :

> **Le processus de la perception est le même pour tout individu, enfant ou adulte, mais l'individu ne perçoit pas nécessairement la même chose à partir de la même source. Notre perception est limitée par notre expérience individuelle.** Même si nos cinq sens sont actifs dans tout acte de perception, c'est notre cerveau qui sélectionne ce que nous pouvons percevoir à travers eux. Il est aujourd'hui établi que nos connaissances antérieures, nos valeurs, notre affectivité, nos styles cognitifs, notre âge et sans doute notre sexe jouent sur notre manière d'appréhender et d'interpréter notre environnement. (Barth, p. 112)

Selon son âge et de son expérience, l'élève ne percevrait pas les mêmes « caractéristiques » ou « attributs » d'un objet qu'une autre personne. Ces attributs perçus permettent à l'élève de se faire une image mentale de « l'objet » en question selon les décisions prises (la sélection des attributs à retenir) par les structures mentales. Ce bagage d'expériences et de connaissances serait un des éléments constitutifs dans la conceptualisation et une des causes de plusieurs difficultés chez les élèves qui n'ont pas accumulé suffisamment d'expériences pour résoudre des problèmes. En ce qui concerne les mathématiques, cette description est pourtant très délicate : l'objet en question n'est pas un objet matériel et il se modifie et s'enrichit par de nouvelles questions qui émergent au sein de la communauté (et non pas au niveau individuel) (Bloch, 2014 ; Desanti, 2008 ; Dubucs, 2010). Si tout est question d'expérience préalable et des mécanismes internes aux sujets, comment est-il possible d'appréhender quelque chose de nouveau ? L'auteur semble oublier que les attributs à retenir d'un objet sont intimement liés aux questions que l'on se pose et que celles-ci ne sont pas que de l'ordre de l'individuel.

Au sein du livre de A.Sousa, un nouvel élément qui contribue à la conceptualisation en mathématique est ajouté. Celui-ci distingue, à l'aide de recherches effectuées en sciences cognitives, deux styles d'apprentissages particuliers aux mathématiques : le style quantitatif et qualitatif. Ainsi, chaque élève aurait son style d'apprentissage qui lui est propre et ces différences individuelles influenceraient leur façon d'apprendre et de conceptualiser cette discipline. Il faudrait ainsi que ces styles soient pris en compte par l'enseignant lors des apprentissages.

> **Les élèves qui ont un style d'apprentissage quantitatif abordent les mathématiques d'une façon linéaire et routinière.** Ils préfèrent travailler avec les nombres plutôt qu'avec des modèles concrets et peuvent avoir de la difficulté à trouver des solutions aux problèmes lorsqu'ils ne connaissent pas les étapes à suivre. **À l'inverse, les élèves qui ont un style qualitatif aiment mieux travailler avec des concepts que suivre des étapes routinières et préfèrent les modèles concrets aux nombres.** (A.Sousa, p. 129)

Ces styles seraient propres à l'élève et dépendants de son développement cognitif. D'ailleurs, les actions des élèves sont interprétées en termes de « préférences » individuelles et non pas en termes de « conditions » (didactiques ou non didactiques) caractérisant la situation d'apprentissage (Roiné, 2009 ; Sarrazy, 2006).

Remarquons que dans le cadre de ces discours, la conceptualisation est dépendante, en premier lieu, des processus mis en place par l'élève et est décrite indépendamment du contexte au sein duquel elle se développe, en particulier la spécificité des savoirs impliqués.

Idée récurrente dans l'ouvrage de A.Sousa, la conceptualisation serait un processus lié à une certaine individualité et *serait dépendante de l'encodage en mémoire, encodage qui relève de la pertinence et du sens perçus par le cerveau.* Afin de conceptualiser, le cerveau de l'élève doit accorder du sens (en lien avec les apprentissages antérieurs) et de la pertinence (en lien avec des éléments de survie) à ce qu'il fait, ce qu'il voit et apprend en classe. Une fois le sens perçu, ces notions peuvent être encodées dans la mémoire à long terme :

> **Chaque fois que la mémoire de travail de l'apprenant détermine qu'une information n'a pas de sens ou n'est pas pertinente, la probabilité qu'elle soit stockée à long terme est très faible** (si bien sûr cette information n'est pas importante pour la survie ou dotée d'un fort contenu émotionnel). (A.Sousa, p.49)
>
> Des questions telles que : « Pourquoi dois-je savoir ça ? » et « Quand est-ce que ça va me servir ? » indiquent que l'élève n'a pas trouvé de pertinence à l'apprentissage pour une raison ou une autre. (A.Sousa, p.49)

Le sens et la pertinence d'une information sembleraient déterminés par un certain mécanisme interne au cerveau (qui n'est nullement décrit) ; ainsi, les modes de validation sont internes et individuels. En effet, s'il advenait que les connaissances ne soient pas perçues comme utiles ou pertinentes, ceci serait dû à l'incapacité de l'élève à dégager le sens des objets qu'il rencontre plutôt qu'au rapport de celles-ci aux situations pour lesquelles ces connaissances seraient une solution. (Brousseau, 1998 ; Chevallard, Bosch, 1999).

Il s'avère pertinent de soulever le fait qu'il y a une prégnance du sens volitif associé aux apprentissages « si tu veux, tu peux » (Sarrazy, 2002b) au sein des deux ouvrages analysés.

À ce propos, *l'abstraction est considérée par les deux auteurs comme dépendante de la volonté de l'élève, de sa motivation, de son attitude envers les mathématiques ainsi que de son implication intellectuelle* : proposition nuancée par Barth et défendue par A.Sousa.

À cet effet, la motivation serait un facteur important à prendre en considération :

> La motivation, bien sûr, a beaucoup d'incidence sur cette attitude [sentiment d'incompétence en mathématiques], et **de nombreuses études ont démontré qu'une faible motivation entraîne de faibles résultats en mathématiques,** ainsi que dans les autres matières. (A.Sousa, p. 131)

La motivation est encore une condition préalable au travail mathématique et non une construction collective au sein d'une communauté d'apprentissage (Chevallard et Bosch, 1999).

A.Sousa associe grandement la compréhension en mathématique avec la réussite à des examens et son discours sous-tend que la compréhension et la réussite des quatre opérations arithmétiques de base conditionne la réussite dans tous les domaines des mathématiques.

Pour sa part, Barth n'adhère pas à cette idée et, même si elle considère la motivation de l'élève comme un élément clé de conceptualisation, elle ne le place pas comme une condition nécessaire :

> Les facteurs affectifs restent primordiaux, leur importance est immense. Ils n'ont pas été négligés, loin de là ; mais, dans cette optique [discuter le rôle de l'enseignant], **ils ne sont plus les seules conditions de l'apprentissage et peuvent en être la conséquence.** (Barth, 31)
>
> Ma pratique pédagogique m'a convaincue que **c'est par le cognitif, par l'apprentissage complet et réussi, par la motivation intrinsèque, que l'on arrive à impliquer les élèves** [dans la construction de leur savoir]. (Barth, p. 32)

Elle va même inclure l'enseignant comme guide pour aider l'élève à développer sa motivation, ses processus mentaux ainsi que sa conscience intellectuelle pour qu'il parvienne à abstraire. Notons, cependant, que la fonction de l'enseignant est bien celle de gérer les processus mentaux des élèves et non la situation au sein de laquelle ces processus se développent (Brousseau, 1998).

En s'appuyant sur les travaux de Bruner, Barth considère que *l'abstraction est possible si l'élève a une intention, une visée dans le cadre de son action consciente (perception, classification, discrimination, comparaison, manipulation, etc.)*, alors que pour Bruner (1966, 1993), c'est la nature de la tâche et le langage qui influencent les actions du sujet dans une visée conceptualisante, Barth affirme que c'est l'intention, le but de l'élève qui conduit ses actions puisque la conceptualisation est possible dès « le berceau » (p.44) et est un processus inventif. L'action consciente du sujet semble prendre de l'ampleur dans l'ouvrage de Barth :

> De cette façon, **l'élève deviendrait conscient** - avec le temps - **de ses stratégies mentales** et apprendrait à *mobiliser volontairement ses « outils intellectuels »*[19] devant une tâche donnée. (Barth, p.30)

Ces opérations mentales « perception, comparaison, inférence, vérification de l'inférence » (p.121) sont définies en termes génériques et se veulent transférables pour tous les concepts. Si la conceptualisation est principalement décrite en vertu d'opérations mentales, les rapports entre abstrait et concret semblent y collaborer. En effet, ce même livre fait appel au besoin sensoriel qui est lié à l'apprentissage particulièrement pour un élève en bas âge, mais qui demeure toujours actif, peu importe l'âge, et cela pour n'importe quelle sorte d'objet d'apprentissage.

> Pour apprendre, on a besoin de manipuler les données, **de les percevoir par les sens. Un apprentissage psychomoteur se fait par l'intermédiaire de l'action et sa représentation est sensori-motrice,** « inscrite dans les muscles ». (Barth, p.114)

Dans une moindre mesure, pour Barth, *les capacités métacognitives ainsi que les stratégies cognitives sont mentionnées comme faisant partie du processus de conceptualisation,* mais également dans la résolution des situations problèmes.

> Dans un premier temps, **l'objectif de la métacognition a été d'amener les élèves à prendre conscience de la succession des opérations mentales qui conduisent à l'abstraction et à la généralisation.** Il s'agissait en quelque sorte de dégager pour eux la méthode de pensée qu'ils venaient d'appliquer inconsciemment, guidés par l'enseignant, et leur montrer comment elle leur avait permis un apprentissage complet et « réussi ». (Bath, p. 141)

Ainsi, si l'enseignant a un rôle de guide à jouer en début d'apprentissage, il est plus efficace que les élèves prennent conscience de leur raisonnement et de leurs « méthodes

---

[19] Mise en forme (italique) de l'auteur et non la nôtre.

de pensée » (Barth, p. 139) afin d'avoir la bonne procédure pour abstraire, généraliser et donc, conceptualiser.

> **Ce sont eux qui peuvent maîtriser leur propre pensée.** Il est important pour chacun d'en être conscient- et convaincu ! [...] Ce qui est nouveau, **c'est d'admettre que la façon dont on apprend est plus formatrice que ce qu'on apprend** et donc systématiquement enseigner « des façons d'apprendre » susceptibles d'être réinvesties dans tout apprentissage. (Barth, p. 140)

À ce sujet, dans le discours pédagogique, une des significations (beaucoup moins présente) attribuées à l'abstraction est *qu'afin de conceptualiser, l'élève doit franchir plusieurs degrés de maîtrise des apprentissages ou paliers de progression mentale.* L'abstraction apparaît ainsi comme une activité mentale qui se constitue en franchissant des étapes successives, allant du « perceptible » vers une forme plus « abstraite » et « généralisée » :

> [...] l'abstraction est une opération mentale **qui considère à part un ou plusieurs éléments d'une perception en négligeant les autres.** La généralisation est une opération mentale par laquelle on **étend à une classe entière ce qui a été observé sur un nombre limité de cas singuliers** appartenant à cette classe. (Barth, p. 125)

En ce qui concerne A.Sousa, il y a six degrés qui mèneraient à la maîtrise d'un concept en mathématiques :

> Degré 1 : l'élève **établit des liens** entre les nouvelles connaissances, celles qu'il avait déjà et ses expériences [...] Degré 2 : l'élève **cherche à utiliser du matériel** pour construire un modèle ou illustrer un concept [...] Degré 3 : l'élève **illustre le problème** à l'aide d'un diagramme dans lequel il associe chaque élément concret à une image ou à une autre représentation schématique [...] Degré 4 : l'élève **traduit le concept en notation mathématique** à l'aide de symboles [...] Degré 5 : l'élève **applique le concept correctement** à des situations, des manifestations et des problèmes du monde réel [...] Degré 6 : l'élève **peut enseigner adéquatement le concept** à d'autres ou l'exprimer dans une preuve écrite. (A.Sousa, p. 155)

Au sein de cette évolution, le langage apparait comme acte final d'expression de la pensée et non comme un élément constitutif de celle-ci et l'enseignant comme évaluateur pour déterminer le degré de maîtrise de l'élève qui, quant à lui, est responsable de plusieurs tâches, décrites en termes génériques, pour s'assurer la maîtrise des concepts.

b) L'abstraction inhérente aux composantes des situations d'apprentissage

Les différents ouvrages analysés n'abordent que de façon très succincte la question du contexte et des situations comme étant des facteurs contribuant au processus d'abstraction. Ces processus étant principalement attribués à la cognition de l'élève, il n'est alors pas surprenant que l'apport du contexte y soit moins traité. Toutefois, certaines prescriptions sont effectuées à propos des caractéristiques que devraient adopter les situations d'apprentissage pour favoriser un travail intellectuel de plus haut niveau. De façon générale, les composantes des situations ou les situations en elles-mêmes doivent être pensées, en premier lieu, en fonction des processus mentaux qui doivent être activés.

Par exemple, dans le livre de A.Sousa, puisqu'afin de conceptualiser, l'élève doit percevoir le sens et la pertinence de ses apprentissages, *il importe que les situations qui lui sont présentées soient en lien avec leur quotidien* et qu'en même temps, lui permettent de se référer à des expériences passées.

> Recourir à des simulations ou à des problèmes **liés à la vie des élèves** pour montrer qu'un concept peut s'appliquer à différentes situations. (A.Sousa, p. 130)

Si ces affirmations sont présentes en nombre restreint de façon explicite, l'idée selon laquelle les situations devraient être, en elles-mêmes, pertinentes aux yeux de l'élève apparait de façon implicite au long de tout le texte. Dans une certaine mesure, la diversité des contextes quotidiens favorise la généralisation. Dans ce cas, la concrétude des situations est associée à des critères de « pertinence » qui ne sont pas en lien avec le savoir en question, mais avec un usage, une utilité qui permettra au cerveau d'encoder le concept dans sa mémoire à long terme.

D'ailleurs, *le matériel de manipulation et le passage du concret vers l'abstrait favorisent la conceptualisation*, et ce, particulièrement pour les élèves atteints de troubles non verbaux (A.Sousa, 2010). Ce matériel, décrit comme un matériel manipulable et contenant la représentation du concept, est considéré comme un moyen efficace qui devrait « être utilisé à *tous*[20] les niveaux scolaires » (A.Sousa, p. 172).

> Donner aux élèves **l'occasion d'utiliser du matériel concret** qui leur servira à trouver des manifestations du lien qui existe entre le principe ou la loi et le concept. (A.Sousa, p. 131)

Pour l'auteur, il s'agirait aussi d'un excellent moyen de permettre aux élèves en difficulté de se faire une image mentale de certains concepts.

L'action de l'enseignant apparaît d'ailleurs liée à des gestes présentés sous forme de liste d'étapes génériques (montrer, expliquer, présenter...).

L'ouvrage de Barth, quant à lui, n'aborde que très peu la question des composantes des situations d'apprentissage. Ainsi, lorsque les situations sont mentionnées, l'important est que celles-ci *contribuent à développer les stratégies mentales des élèves (particulièrement la métacognition)* :

> **Quelles que soient les activités choisies**, le but est de faire prendre conscience aux élèves de « l'organisation interne » et de la généralisation des concepts. Cette première compréhension facilitera énormément leur tâche par la suite ; quand on a compris qu'il faut chercher et valider les attributs essentiels d'un concept, la démarche pour y arriver se conçoit sans difficulté. La représentation qu'on se fait du « problème » facilite sa « résolution ». (Barth, p.142)

La métacognition apparaît comme condition préalable à l'action et collaborant à la représentation et à la solution d'un problème. Il n'est pas expliqué comment les élèves accèdent à une prise de conscience de l'organisation interne des concepts : cela ne semble pas émerger de l'action sur l'ensemble d'activités, mais plutôt d'un enseignement direct.

L'absence (ou presque) de mentions concernant l'apport des composantes des situations pour abstraire est révélatrice des postures adoptées par les auteurs. Si, d'une part, Barth s'inspire des travaux de Bruner pour élaborer à propos de l'apprentissage

---

[20] Mise en forme (italique) de l'auteur et non la nôtre.

de l'abstraction, celle-ci se centre particulièrement sur les processus cognitifs que les élèves doivent mettre en place tout comme sur le rôle que l'enseignant doit jouer dans cet apprentissage (en tant que guide pour la mise en acte de ces processus internes).

c) Le rôle de l'enseignant dans le développement de l'abstraction et de la conceptualisation

L'enseignant occupe une place importante afin de soutenir et de guider les élèves dans le développement de diverses composantes perçues comme fondamentales pour la conceptualisation (motivation, autonomie, métacognition, etc.). Son rôle est ainsi articulé autour de ce que les auteurs considèrent être les besoins de l'élève inhérents aux processus d'abstraction et conceptualisation.

En ce sens, pour A.Sousa *l'enseignant joue un rôle fondamental dans la gestion de certains processus mentaux :*

> Parfois, lorsque les élèves demandent pourquoi ils doivent apprendre quelque chose, l'enseignant répond : « Parce que ce sera à l'examen. » Cette réponse accroît peut-être l'anxiété des élèves, mais n'apporte aucune pertinence à l'apprentissage. Les élèves écrivent alors ce qu'ils doivent savoir dans leur cahier pour le conserver par écrit au lieu de le stocker dans leur mémoire. [...] Les enseignants passent près de 90 % de leur temps de planification à concevoir des cours de manière à ce que les élèves saisissent le sens des objectifs d'apprentissage. **Mais ils devraient passer plus de temps à aider les élèves à y trouver de la pertinence** [...]. (A.Sousa, p.50)

« La pertinence » de l'apprentissage, au sens de l'établissement des liens entre les concepts enseignés et leur utilité au quotidien, semble être une variable fondamentale dans l'organisation de l'enseignement permettant l'encodage en mémoire. En ce sens, c'est l'hypothèse cognitiviste déjà mentionnée (on ne retient que ce qui est considéré « utile ») qui devrait guider la tâche de l'enseignant.

De surcroît, et comme nous l'avons déjà anticipé, la motivation étant pour A. Sousa une condition préalable à l'apprentissage, une partie importante de la tâche de l'enseignant est ainsi en lien avec cette problématique :

> Par conséquent, les enseignants de mathématiques devraient chercher à créer des classes où les élèves sont motivés, **car les apprenants motivés traitent activement**

> **l'information**, ont une meilleure compréhension de la matière et ont de meilleures aptitudes en résolution de problèmes. **Une telle approche répond aussi au besoin des élèves de participer activement à leur apprentissage ***. (A.Sousa, p. 133, ** en référence à A.Sousa, 2002*)

Soulevons également le fait que, dans ce cas, la nécessité de la « participation active aux apprentissages » est entièrement attribuée à un besoin intrinsèque des élèves et non à une caractéristique propre à un modèle pédagogique ou didactique qui pourrait gérer les conditions favorables à l'engagement des élèves dans une situation d'apprentissage.

Les différents passages concernant l'importance de la motivation font ressortir que l'enseignant a essentiellement un rôle d'arrière-plan (motivateur) dans les apprentissages. Les conditions didactiques favorisant un processus d'engagement cognitif des élèves dans les tâches ne sont nullement mentionnées. L'enseignement doit être *fondé sur le profil de ses élèves, surtout pour favoriser les processus d'abstraction ;* ainsi, il est fréquent de retrouver, dans cet ouvrage, des listes d'étapes, de stratégies à suivre par l'enseignant basées sur le style d'apprentissage, le profil cognitif et des troubles neurologiques ou biologiques associés.

> **Lorsque les enseignants comprennent les divers styles d'apprentissages des mathématiques,** ils sont plus susceptibles de choisir des stratégies d'enseignement qui favorisent l'apprentissage chez tous les élèves. (A.Sousa, p. 129)

Finalement, A.Sousa identifie un dernier rôle à l'enseignant, celui de guide, *afin de montrer la bonne façon de faire aux élèves pour ensuite les rendre autonomes dans la constitution des apprentissages.* C'est par l'entremise de l'enseignement explicite que l'enseignant pourra développer à la fois l'autonomie des élèves (composante non négligeable puisqu'ils doivent être autonomes pour construire eux-mêmes leurs apprentissages) et leur niveau de maîtrise des savoirs. C'est donc à lui de montrer, étape par étape le fonctionnement des techniques de calcul ou la méthode pour résoudre des problèmes afin que les élèves intègrent *la bonne façon de faire* dès le début pour ensuite poursuivre la construction de leurs apprentissages seuls.

> Les enseignants devraient éviter de proposer aux élèves une pratique autonome avant la pratique guidée. (A.Sousa, p.56)

En s'appuyant sur des résultats de certaines méta-analyses, l'auteur affirme que cette méthode d'enseignement « a une efficacité élevée constante » (p.170) pour les élèves en difficulté. La pratique guidée de l'enseignement explicite, telle qu'elle est présentée, n'est pas considérée comme une activité au sein de laquelle il y a une interaction entre enseignant et élèves, mais plutôt comme une démonstration.

Pour sa part, Barth considère elle aussi l'enseignant comme un guide afin d'aider les élèves à devenir actifs et autonomes dans leurs opérations mentales :

> *Le rôle de l'enseignant est donc d'abord d'assister l'élève dans la construction de son savoir, tâche que personne ne peut exécuter à sa place*[21]. **Cette assistance consisterait à analyser avec lui le savoir à acquérir et les opérations mentales à mettre en œuvre.** Ayant appris ce qui est généralisable, **l'élève pourrait à l'avenir agir de façon plus autonome dans toute situation d'apprentissage.** (Barth, p.31)

L'analyse du savoir en jeu, bien que soulevée comme importante pour les apprentissages, est développée, dans le livre de Barth, de façon assez générique selon différentes disciplines et prend peu d'importance en comparaison aux opérations mentales. Notons, de plus, que l'auteur parle de la construction de « son savoir » et non pas « du savoir ». C'est donc par l'entremise des interactions en classe que l'enseignant démontre aux élèves les différentes opérations menant à la conceptualisation telles que « perception, comparaison, inférence, vérification de l'inférence » (p.121) de façon à ce que l'élève puisse à son tour l'imiter. D'ailleurs, pour qu'un tel transfert ait lieu, l'enseignant aide à l'élève à être conscient des processus qu'il met en jeu (métacognition).

En ce sens, il importe que *l'enseignant aide les élèves à mobiliser leurs capacités cognitives et métacognitives qui sont nécessaires à la conceptualisation.* Pour Barth, « [c'est] la responsabilité de l'enseignant de veiller à ce que cette organisation du contenu- et donc l'organisation de la structure cognitive des apprentissages- se fasse correctement, » (p.86).

---

[21] Mise en forme (italique) de l'auteur et non la nôtre.

> [...] *pour assurer un apprentissage conceptuel, la méthode d'enseignement choisie doit nécessairement impliquer, chez l'apprenant,* ***les deux modes de traitement de l'information dont il dispose*** *(le mode analytique, linéaire, et le mode analogique, instantané)* en même temps, *par un processus quasi* « d'alternance simultanée », *c'est-à-dire où les deux phases se succèdent de façon très rapprochée dans le temps.* (Barth, p.133)

Le modèle cognitif de traitement de l'information est explicitement mentionné comme mode d'enseignement ; le rôle de l'enseignant devient ainsi celui de s'assurer que les élèves utilisent les processus cognitifs adéquats (gérer des processus).

d) L'abstraction et la conceptualisation inhérentes aux objets de savoir

D'importance moindre dans le livre de Barth et absent de celui de A.Sousa, le savoir et ses spécificités, lorsqu'il est inclus au sein du discours, est abordé comme un des deux éléments qui constituent la base de la conceptualisation, mais pouvant également engendrer des difficultés. En effet, « la structure du savoir » (p.28) ainsi que « la démarche intellectuelle » (p.29) font l'objet des deux premiers chapitres du livre de Barth et lui permettent d'illustrer les raisons pour lesquelles il faut enseigner à abstraire aux élèves. Bien rapidement toutefois, le sujet est entièrement dévoué à la démarche intellectuelle d'acquisition de concepts. Lorsque les objets de savoir sont identifiés, cela est effectué de façon générique (pour n'importe quel concept) et l'auteure les définit en fondant ses propos sur les différents « types de concepts » (Barth, p.40) élaborés par Bruner (Bruner, Goodnow et Austin, 1986) afin de soutenir l'idée selon laquelle : *Afin d'abstraire, il importe de considérer et d'analyser la structure des concepts.* Cherchant à déterminer une méthode pédagogique pour que l'enseignement favorise la conceptualisation, Barth affirme que les concepts sont tous constitués de la même façon :

> [...] si un concept est une combinaison d'attributs, une règle et un théorème sont des combinaisons de concepts. On pourrait aller plus loin et dire qu'une théorie est une combinaison de règles. **Quel que soit le niveau de complexité d'un contenu, on peut ainsi le traiter comme un concept et l'apprendre de la même façon, comme nous le verrons plus loin.** (p.37)

Ainsi, l'idée véhiculée par différents passages au sein de cet ouvrage est que les concepts, quels qu'ils soient, peuvent être appris d'une même façon si l'élève en connaît la structure (étiquette, attributs et exemples). Dès lors, une seule méthode pédagogique est suffisante.

En ce sens, un concept est déterminé par les attributs qui le constituent et le rapport entre ceux-ci. Cette organisation permet ensuite de faire un premier pas d'abstraction en nommant le concept (étiquette) et de l'appliquer par la suite à d'autres exemples (généraliser).

> On pourrait ainsi dire qu'un concept offre une règle de classification. Les attributs ont pour fonction de spécifier les êtres ou les objets appartenant à cette classe. (Barth, p.37)

Ces différentes explications sont souvent appuyées d'exemples en lien avec des concepts quotidiens (Vygotski, 2012) et de concepts mathématiques élémentaires (le rectangle). Si la question du niveau d'abstraction, de complexité et de validité des concepts est abordée, celle-ci est principalement décrite comme l'effort cognitif (*niveau d'abstraction dont l'élève est capable*) qui doit être mis en place afin d'effectuer l'acte de classification et de catégorisation des attributs alors que la mise en relation avec les concepts en eux-mêmes et leurs spécificités est estompée, bien que ces différentes composantes (*niveau de complexité, d'abstraction et de validité des concepts*) soient identifiées par l'auteure, tout comme plusieurs didacticiens (Hazzan et Zazkis, 2005), comme étant la cause de difficultés d'abstraction.

e) Le rôle du langage dans le processus d'abstraction

La dernière thématique relative à l'abstraction, au sein du discours pédagogique, est le langage. Il s'agit d'ailleurs de la thématique pour laquelle le moins de passages ont été repérés. Du côté de A.Sousa, cette composante apparait de façon sporadique et est présentée comme la finalité du processus d'abstraction (Voir *supra*, p. 136). Si parfois, le langage est abordé comme un obstacle à la conceptualisation, cela est principalement mis en relation avec un déficit langagier propre au développement de l'enfant.

Le langage est une composante qui est bien présente dans le cadre du discours de Barth comme étant un facteur clé de la conceptualisation. Cette auteure, qui insiste sur l'influence des travaux de Bruner sur son travail, affirme qu'il faut faire travailler les élèves en équipe et les faire discuter pour les aider à conceptualiser. Ces différentes proclamations qui visent à promouvoir les interactions entre élèves et entre enseignant et élèves peuvent être repérées à de multiples endroits, mais, dans les faits, le langage et les interactions verbales sont peu articulés avec le développement de l'abstraction. Il n'y a ainsi pas d'explications quant au rôle spécifique que joue le langage dans ce processus, hormis que *du côté des actions de l'enseignant, ses « interaction[s] verbale[s] indui[sent] les actions des élèves »* (Barth, p.64).

> [...] c'est l'enseignant qui prend la parole le premier et son intervention est assez longue. **Elle a pour but de structurer la tâche et de motiver l'élève en montrant qu'il y a un problème à résoudre, et en donnant les règles du « jeu »**. (p.65)

Le langage constituerait ainsi la mise en scène qui contribue à démarrer l'activité cognitive des élèves. À la suite de cela, les discussions des élèves sont considérées comme avantageuses pour préciser les abstractions effectuées (finalité d'un processus) et non pour contribuer à l'abstraction en soi.

CHAPITRE V

LES FONDEMENTS DU DISCOURS NOOSPHÉRIEN CONCERNANT L'ABSTRACTION

Dans le cadre de ce chapitre, l'objectif poursuivi est de mettre au jour certains aspects de la trame idéologique sous-jacente aux discours analysés concernant la notion d'abstraction en mathématique. Si, déjà, les analyses ont permis de faire ressortir des éléments de significations particulièrement évidents au sein du corpus (la prégnance d'un cadre cognitiviste, par exemple), certaines thématiques apparaissent de façon indirecte dans certaines mentions et leur analyse a permis de cerner le cadre de référence ainsi que les conceptions des auteurs.

5.1 Des fondements communs aux discours pédagogique et institutionnel

D'un premier abord, le fait que la catégorisation proposée au départ (Annexe B) se soit particulièrement transformée selon le type de discours analysé est un premier indicateur de la dissonance entre le discours scientifique portant sur l'abstraction (chapitre 2) et les discours institutionnel et pédagogique. D'autre part, les similitudes entre les thématiques émergeant des deux instances (Annexes C et D) sont très informatives et confirment l'influence qu'ont les injonctions gouvernementales (Giroux, 2014) sur les pratiques pédagogiques, dans ce cas-ci, les pratiques prescrites. En effet, bien qu'à l'origine les ouvrages de nature pédagogique et institutionnelle se présentent avec des postures différentes, leur analyse fait ressortir que plusieurs orientations semblent être communes. D'ailleurs, les commissions scolaires citent parfois les auteurs des ouvrages pédagogiques retenus et, au-delà de certaines références communes utilisées, les deux instances analysées utilisent un langage et des thèmes forts semblables.

Tout d'abord, les nombreuses références concernant les stratégies cognitives et métacognitives pour expliquer l'abstraction font en sorte qu'il est possible de repérer les ancrages très solides du cadre de la psychologie cognitive au sein des deux types de discours. Du côté des discours institutionnels, l'abstraction est abordée comme une construction de l'élève par le biais de ses actions (en lien avec un fondement constructiviste), mais bien rapidement, les enjeux fondamentaux portent sur les capacités cognitives nécessaires pour abstraire et la «*construction*» des savoirs spécifiques apparait, au sein du PFEQ, seulement pour introduire des listes de concepts. C'est plus particulièrement aux théories du traitement de l'information que semblent se référer les instances (de façon implicite et non déclarée dans le cas du discours institutionnel) pour expliquer les apprentissages. L'abstraction, la généralisation et la conceptualisation sont alors présentées comme des processus qui s'apprennent, qui se transmettent, qui se programment par le biais de stratégies cognitives et métacognitives, donc de règles à suivre. Ainsi, tout comme le remarquent plusieurs chercheurs (Giroux, 2014 ; Roiné, 2015 ; Sarrazy, 2002a, 2002b), le contenu mathématique devient secondaire et l'enseignement porte sur les formes de traitement de ce contenu.

> [...] pour apprendre des mathématiques, il ne s'agit plus de faire résoudre des problèmes à l'élève, mais de lui apprendre à les résoudre par l'enseignement de stratégies métacognitives afin que les élèves puissent mieux lire les énoncés (par exemple) ou, plus généralement, mieux traiter les informations. (Sarrazy, 2008, p. 6)

Si, comme il émerge des différents discours, pour abstraire, et ce, toutes disciplines confondues, il suffit principalement d'être en contrôle de certains processus cognitifs, le rôle de l'enseignant se résume donc à enseigner lesdits processus, leur mode d'utilisation et d'ensuite de les *gérer* jusqu'à une complète autonomie des élèves.

Ainsi, pour enseigner, il n'importerait pas fondamentalement d'être porteur du savoir dont on est spécialiste, mais plutôt d'avoir une connaissance étendue du développement cognitif et une maîtrise des stratégies cognitives et métacognitives. L'enseignant est donc le gestionnaire de ces processus mentaux.

Au final, la discipline enseignée semble peu prise en considération dans les processus d'abstraction minimisant et évacuant, même, l'importance que jouent les spécificités du savoir dans les processus d'abstraction. Les objets de savoir sont ainsi considérés, particulièrement par Barth et A.Sousa, comme des objets « transparents » prêts à être « transférés » à l'aide d'un enseignement méthodologique (Sarrazy, 2008).

La prégnance d'un cadre cognitiviste contribue à une évacuation du savoir, une « démathématisation de l'enseignement » pour reprendre les propos de Sarrazy (2008, p.6) ainsi qu'à une vision réductrice des processus d'apprentissage et d'enseignement. Faisant fi des travaux en didactique, des analyses philosophiques et épistémologiques montrant que l'abstraction et l'apprentissage des mathématiques dépassent largement les seules considérations cognitives (mais ne les exclut pas nécessairement), les discours institutionnels et pédagogiques analysés laissent pour compte les phénomènes liés à l'enseignement/apprentissage caractérisant la relation didactique (maître-savoir-élève) ainsi que les conditions didactiques et non-didactiques de la constitution des savoirs, ce qui constitue un arrière-plan à l'émergence des phénomènes de cécité didactique identifiés par Roiné (2009).

5.2 Les fondements du discours institutionnel

Du côté du corpus de discours institutionnels analysés, une vision intuitive de l'abstraction peut être repérée. Détachés d'un contexte particulier, de la nature des savoirs en jeu et de finalités contextuelles, les différents « paliers » d'abstraction semblent plutôt référer à des paliers de progression mentale de l'élève et à son développement.

Hormis la présence d'un fondement cognitiviste centré sur la métacognition très prégnant, la question de la « construction » des savoirs est très présente au sein du corpus analysé. Toutefois, cette construction de savoirs « abstraits » est toujours mise en relation avec des expériences sensibles qui se produisent avec le support d'objets manipulables. Un certain empirisme semble ainsi émerger du discours institutionnel, en ce qui concerne l'apprentissage de savoirs mathématiques. La conception même des mathématiques comme science traitant des objets du quotidien qui est mise de l'avant est imprégnée de ce fondement empiriste.

À ce sujet, le ministère de l'Éducation accorde une grande importance à la résolution de situations problèmes qui constituent une compétence importante dans le Programme de Formation de l'École Québécoise. Si les situations problèmes sont primordiales (*l'essence même des mathématiques*) pour que les élèves puissent abstraire et donc construire des connaissances de plus haut niveau, c'est particulièrement leur lien avec une réalité concrète ainsi que l'accès à un support manipulable qui semblent essentiels pour l'accès aux objets mathématiques, tout comme si ces objets de manipulation contenaient en eux-mêmes les caractéristiques du savoir à apprendre et celles-ci seraient toutes prêtes à être « lues » par l'élève lors de la manipulation. Il semble alors que, lorsqu'il est question d'action effective de l'élève et des composantes des situations problèmes, le recours au concret est inévitable et même, *plus efficace* pour permettre l'abstraction.

De plus, s'il est possible de constater qu'un grand nombre de mentions servent à promouvoir les échanges et le travail collaboratif, la plupart d'entre elles sont des phrases génériques qui semblent servir à remplir un contrat socioconstructiviste annoncé en début de programme (MELS, 2006b, 2006c) plutôt qu'à remarquer le rôle de l'interaction dans les processus d'abstraction. Si le langage est mentionné, celui-ci est abordé comme une activité solitaire de l'élève (tâche d'écriture) permettant le développement cognitif et non comme une activité sociale et culturelle constitutive des objets de savoirs (Bronckart, 2007 ; Bruner, 1966 ; Vygotski, 2012).

Bien que la majeure partie des discours institutionnels analysés porte sur les apprentissages en mathématiques, les spécificités du savoir ne font pas partie de la description des processus d'abstraction.

5.3 Les fondements du discours pédagogiques

En ce qui a trait au discours pédagogique, il importe de soulever l'importance qui est accordée au développement de l'enfant et particulièrement à son développement cognitif. Si le livre de A.Sousa est considéré comme un ouvrage didactique, il semble plus particulièrement traiter d'aspects neurologiques. En effet, les chapitres analysés sont consacrés à expliquer le fonctionnement du cerveau de l'élève selon différents âges et les mathématiques semblent finalement être un prétexte pour aborder des questions plutôt psychologiques. Quant au livre de Barth, si elle affirme baser son travail en continuité avec l'œuvre de Jérôme Bruner, en ce qui concerne spécifiquement l'abstraction, il semble curieux que la question du langage, des situations et des exigences contextuelles, éléments relativement importants au sein du travail de Bruner, ne soit pas plus développée et que ce soit plutôt des questions relatives à la cognition de l'élève qui occupent la place centrale du texte. C'est donc sous un fort fondement psychologique que ces discours, qui de prime abord semblent bien différents, abordent la question de l'abstraction et de la conceptualisation.

En effet, pour A.Sousa, la conception même des mathématiques qu'il priorise (intuitionnisme) sert à soutenir des hypothèses sur la nature des connaissances et leur mode d'accès. L'absence, chez Barth, de spécifications des savoirs concernés, dans le processus de conceptualisation, est particulièrement révélatrice de sa posture puisqu'elle promeut des méthodes pédagogiques possibles d'être transférables d'une discipline à une autre. L'ouvrage de Barth véhicule l'idée d'une certaine uniformité des concepts indépendamment de leur discipline d'appartenance.

Quant au rôle de l'enseignant et celui du langage, au sein des deux livres, ces problématiques ne sont pas considérées comme inhérentes à la production de savoirs, mais surtout liées à la communication de savoirs dans le cadre spécifique de l'enseignement explicite. Ces thématiques sont donc articulées autour de la transmission, de la régulation de stratégies cognitives et métacognitives.

Tel que mentionné, la nature des activités d'apprentissage semble prendre peu d'importance dans le discours pédagogique. À certains égards, pour Barth, elles seraient même superficielles dans le processus d'enseignement de l'abstraction : « **Quelles que soient les activités choisies**, le but est de faire prendre conscience aux élèves de "l'organisation interne" et de la généralisation des concepts. » (Barth, p.142). Comme nous l'avons déjà dit, le contenu semble secondaire par rapport à la structure qui lui est inhérente.

Chez A. Sousa, il est possible de retrouver, de façon moins saillante, la même orientation à caractère empiriste qu'au sein du discours institutionnel concernant le recours au quotidien et au matériel de manipulation, particulièrement pour les élèves en difficulté. Cependant, cette posture empiriste est en contradiction avec la conception intuitionniste des mathématiques qu'il défend dans laquelle les mathématiques n'émergent pas des objets que l'on manipule, mais d'une construction sensée, centrée sur l'utilité et la pertinence des objets de savoirs. Toujours perçus comme centrés sur les actions individuelles de l'élève, les processus d'abstraction sont particulièrement articulés à une vision utilitariste de l'apprentissage et la mémoire à long terme, dont les portes s'ouvriraient seulement si le cerveau accorde un sens ou une utilité aux informations reçues, en est la clé de voute. Le rôle de l'enseignant s'articule ainsi en fonction des besoins cognitifs de l'élève.

Les caractéristiques spécifiques des pratiques mathématiciennes et les contraintes autres que d'ordre individuel, comme celles imposées par la nature spécifique des savoirs et les besoins internes au champ mathématique (Caveing, 2004 ; Dubucs, 2010), semblent être moindrement considérées au sein du discours pédagogique.

5.4 Et les difficultés d'abstraction ?

Tout comme Roiné le remarque : « C'est en effet le cerveau de l'élève qui est mis au centre du système éducatif. » (2009, p.96). En cohésion avec l'idéologie mentaliste, les difficultés d'abstraction sont imputables à la cognition et, plus précisément, à des défauts cognitifs de l'élève. Écartant le fait que les objets de savoirs peuvent en eux-mêmes générer des difficultés (Fisher, 2009), les difficultés d'abstraction sont attribuées à des origines biologiques et neurologiques. Dans certains cas, elles sont la résultante d'un manque de motivation et de volonté de l'élève attestant, encore une fois, de la vision individualisante de l'apprentissage qui est priorisée dans l'ensemble des discours.

Il semble étonnant de remarquer que, si les difficultés d'abstraction sont parfois considérées comme une résultante d'un trouble du langage, le langage quant à lui est presque évacué des explications et des définitions des processus d'abstraction.

Dans les faits, les difficultés d'abstraction en mathématiques sont peu définies et principalement considérées comme la résultante ou une conséquence de troubles d'apprentissage. De façon implicite, une des idées véhiculées à ce sujet concerne le fait que ces difficultés ne semblent pas émerger des interactions didactiques, mais qu'au contraire, elles seraient intrinsèques à une condition cognitive et donc, indépendantes d'une pratique mathématicienne.

5.5 Quelles implications pour les apprentissages ?

Bien qu'il soit possible d'identifier des fondements à la base de ces discours, il importe de questionner les possibles implications que ceux-ci peuvent avoir sur les pratiques d'enseignement ainsi que sur les apprentissages des élèves. Il serait présomptueux d'affirmer que cette étude brosse un portrait complet du discours noosphérien du champ de l'adaptation scolaire concernant la notion d'abstraction ; toutefois, elle permet de cerner une partie de la trame idéologique qui concourt à transformer et à confirmer la vision du monde (Bourdieu, 1980). Les résultats de cette recherche se limitent ainsi au contexte québécois et gagneraient à être enrichis d'analyses d'autres discours composant la noosphère étudiée (discours syndical, des enseignants, par exemple). Néanmoins, la grande cohésion entre les dix discours analysés est révélatrice des orientations dominantes en éducation et annonciatrice de celles des discours qu'il faudrait analyser pour affirmer établir un portrait complet de la problématique étudiée.

De façon générale, les analyses permettent de constater qu'une vision théorique en lien avec un cadre cognitiviste ou ce que certains appellent des idéologies mentalistes (Roiné, 2015 ; Sarrazy, 2007) prédomine au sein de ces discours, mais également que certaines idées largement promues, guidant l'acte d'enseignement (associées à l'empirisme, par exemple), sont liées à des idéologies (Charaudeau, 2005). D'ailleurs, bien que des références soient quelques fois disponibles pour mieux cerner la provenance de ces injonctions, celles-ci sont bien souvent issues de documents ministériels, d'ouvrages pédagogiques populaires et de rapports d'organismes plutôt que des rapports issus du milieu de la recherche.

En ce qui concerne les aspects liés à la nature des savoirs, l'absence d'une analyse spécifique des objets mathématiques et la prégnance d'une approche psychologique conduisent à une uniformisation des processus d'abstraction en lien étroit avec des processus de décontextualisation (ceux qui nous permettent d'accéder à la « forme » ou à la « structure » de la connaissance). Cependant, nos analyses épistémologiques mettent en évidence que toute décontextualisation s'accompagne d'une nouvelle contextualisation et ainsi, que les processus d'abstraction, même s'ils impliquent des processus de décontextualisation, se caractérisent surtout par des re-contextualisations continuelles au sein d'une pratique mathématicienne qui produit de nouvelles significations.

Si les injonctions repérées dans le cadre de cette étude guident le travail de l'enseignant, il importe de souligner le rapprochement entre certaines d'entre elles et des phénomènes didactiques repérés dans le cadre de plusieurs recherches en milieu francophone tels que la prévalence de la règle, le morcèlement des tâches (Bloch et Salin, 2004 ; Bloch, 2008 ; Conne, 2003 ; Conne, Favre et Giroux, 2006 ; Giroux, 2013). En particulier, la prévalence accordée à la manipulation et au concret (la référence au quotidien), et ce, peu importe l'âge, semble être le principal point phare à suivre par les enseignants dans la constitution de situations problèmes pour amener les élèves à s'approprier des objets mathématiques et, par conséquent, à abstraire. Les implications de cette concrétisation des savoirs par rapport aux significations construites ont été partiellement identifiées par certains auteurs (Barallobres, 2009 ; Giroux, 2013 ; Roiné, 2010).

Il est également possible de remarquer que, à l'encontre du rôle fondamental attribué à l'action dans les processus de conceptualisation par la plupart des auteurs consultés, les discours analysés réduisent cette action à la répétition de processus explicités et montrés par l'enseignant, en référence à l'enseignement explicite.

Au final, les résultats de cette étude s'arriment aux recherches effectuées en didactiques des mathématiques dans le contexte québécois (Barallobres, 2017 ; Giroux, 2013, 2014), mais également en contexte français (Roiné, 2009, 2014 ; Sarrazy, 2015) qui remarquent sur d'autres plans de l'éducation, tels que le discours enseignant et les pratiques effectives en classe, la prégnance du cadre mentaliste en éducation.

CONCLUSION

La visée poursuivie, dans le cadre de ce mémoire, est de mieux comprendre les significations attribuées à la notion de difficulté d'abstraction qui émerge d'un discours très présent en éducation selon lequel : *les difficultés d'abstraction des élèves sont un obstacle majeur aux apprentissages en mathématiques.*

En effet, par l'entremise de ce projet, nous avons tenté de montrer que chaque orientation/prescription qui est effectuée en éducation est porteuse de fondements, qui ne sont pas toujours de nature théorique, mais qui influencent grandement le milieu de l'éducation et qui, par conséquent, ont une incidence sur le plan des apprentissages des élèves, particulièrement ceux étant identifiés en difficulté. Cette recherche s'inscrit en continuité avec des travaux présents en didactiques des mathématiques (Giroux, 2013, 2014 ; Roiné, 2009, 2014 ; Sarrazy, 2015) qui remarquent également la prégnance d'un cadre mentaliste en éducation et principalement en adaptation scolaire (éducation spécialisée).

En introduction de ce mémoire, nous interrogions les inégalités scolaires ainsi que la réussite et l'intégration des élèves dits HDAA en identifiant qu'un des facteurs à considérer concernait les pratiques enseignantes et plus particulièrement ce qui les oriente. Force est de constater que les cadres mentaliste et empiriste orientant les injonctions concernant l'enseignement et les apprentissages en mathématiques minimisent le rôle que la nature spécifique des savoirs et les aspects contextuels peuvent jouer dans l'interprétation des difficultés d'abstraction et semblent contribuer à ce que Roiné (2009) nomme la cécité didactique.

Cette centration sur les caractéristiques cognitives des élèves les conduit à proposer des interventions, en général de nature métacognitive, visant à répondre aux besoins cognitifs de ceux-ci, sans surveillance épistémologique en ce qui concerne l'impact des interventions sur les savoirs en jeu. L'analyse de ces injonctions permet d'expliquer, en partie, certains phénomènes didactiques, largement repérés par les chercheurs adoptant un cadre d'analyse systémique (Bloch, 2008 ; Bloch et Salin, 2004 ; Conne, 2003 et Conne, Favre et Giroux, 2006 ; Giroux, René de Cotret, 2001 ; Giroux, 2013 ; Roiné, 2010), qui contribuent au fait que les élèves de l'adaptation scolaire ne vivent pas le même historique scolaire que leurs pairs des classes dites ordinaires (Roiné, 2009, 2010, 2015, 2016).

Pour conclure, bien que cette étude soit loin d'être exhaustive, elle permet de soulever certains éléments qui semblent problématiques au regard des fondements de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire. Toutefois, certaines thématiques et questions restent en suspens.

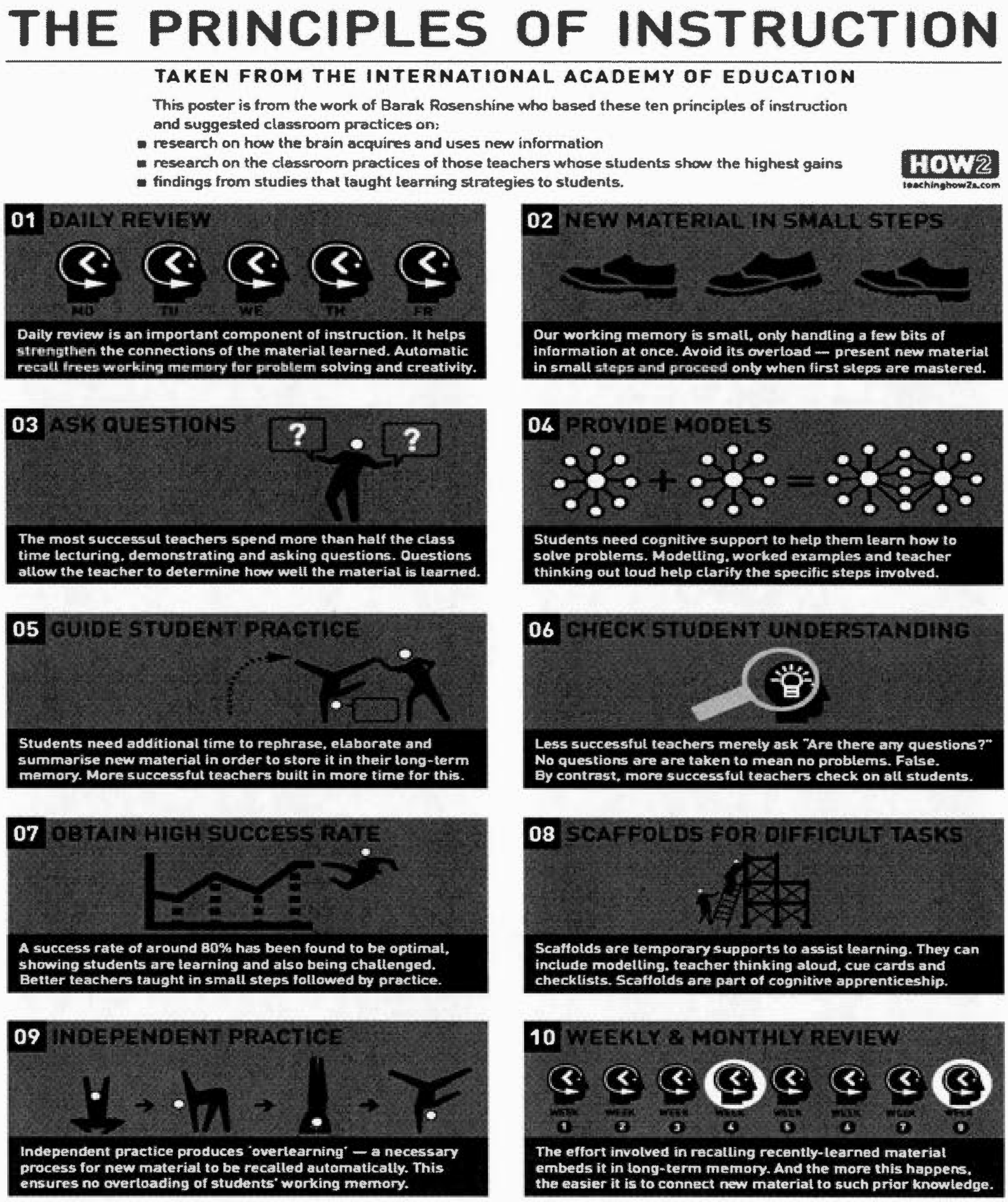
En effet, il est possible de repérer dans les différents discours que la conceptualisation est bien souvent en rapport à des conditions qui seraient spécifiques aux élèves. Ces conditions semblent liées à sa capacité d'autonomie ainsi qu'à sa motivation (volonté), considérées comme des conditions préalables à l'apprentissage dont il a la charge. Mais qu'entend-on donc par autonomie, motivation et volonté d'apprendre ?

D'ailleurs, certaines mentions semblent également faire référence à des façons plus « efficaces, efficientes » d'apprendre et à des critères qui guideraient le choix des méthodes d'enseignement. Cependant, les critères permettant de définir l'efficacité et l'efficience sont loin d'être transparents, objectifs et universels, comme l'on prétend faire croire.

ANNEXES

ANNEXE A

LES MODÈLES PÉDAGOGIQUES ADAPTÉS



Récupéré le 02 février 2016 de : http://www.formapex.com/telechargementpublic/rosenshine2016a.pdf?616d13afc6835dd26137b409becc9f87=8d6bf15aa5f77c47c7fb8d2dc9f955ec

ANNEXE B

LES THÉMATIQUES ET CATÉGORIES DE CLASSIFICATION INITIALES

Thématiques liées à l'abstraction	**Significations accordées à la notion d'abstraction**
La caractérisation des idées abstraites	- Ayant plusieurs niveaux ; - Étant extrait du concret ; - N'étant pas exclusivement extrait du concret.
L'abstraction en mathématiques comme un processus inhérent à l'élève	- À son intentionnalité ; - À sa pratique mathématicienne ; - À son historique, ses connaissances antérieures ; - À ses actions (schèmes).
L'abstraction en mathématiques comme un processus inhérent à l'environnement d'apprentissage	- Au but poursuivi ; - À la tâche et ses composantes ; - Au contexte institutionnel ; - À la collaboration et coopération entre l'enseignant et les élèves ; - À la culture, l'environnement de classe.
L'abstraction comme une caractéristique des objets de connaissance mathématiques	- Les objets de savoir sont porteurs de spécificités, d'obstacles épistémologiques ; - Les concepts mathématiques comportent différents paliers de structuration de données.
Le rôle du langage pour abstraire	- Le langage comme véhicule de la pensée ; - Le langage comme élément constitutif de la pensée ;

Le rôle du symbolisme et de la formalisation pour abstraire	- Les signes et symboles sont constitutifs de l'activité mathématique ; - L'acquisition du symbolisme implique des processus d'abstraction.

ANNEXE C

THÉMATIQUES ET SIGNIFICATIONS EN LIEN AVEC LA NOTION D'ABSTRACTION REPÉRÉES AU SEIN DES DISCOURS INSTITUTIONNELS (N=8)

Thématiques liées à l'abstraction	Significations accordées à la notion d'abstraction	n
a) La caractérisation des idées abstraites	**L'abstraction a plusieurs niveaux ou degrés.**	**3**
	L'abstraction n'est pas strictement extraite du concret.	1
	L'abstraction est une activité de simplification et de généralisation.	1
b) L'abstraction inhérente aux composantes des situations d'apprentissage	**L'appui sur le concret est plus efficace pour la conceptualisation (réalité quotidienne).**	**7**
	Le constant passage au concret aurait plutôt tendance à alourdir les apprentissages.	1
	L'utilisation du matériel de manipulation est efficace pour favoriser et soutenir les apprentissages.	**7**
	La diversité des modes de représentation est primordiale pour amener les élèves à conceptualiser et à abstraire.	5
	Le but visé par les situations ou les situations problèmes permet la conceptualisation.	4
	L'utilisation d'outils technologiques favorise la conceptualisation.	5
c) L'abstraction inhérente aux capacités de l'élève	**L'abstraction est inhérente aux actions intrinsèques de l'élève et de son engagement actif.**	**6**
	L'autonomie de l'élève serait préalable à la conceptualisation.	3
	La conceptualisation serait la résultante de l'activation et de l'approfondissement des concepts appris antérieurement par l'élève ainsi que de son intuition.	3
	La maîtrise et le développement de stratégies cognitives et métacognitives sont impératifs pour abstraire.	**5**
	Les difficultés d'abstraction sont liées à des défauts cognitifs des élèves.	4

d) L'abstraction et la conceptualisation inhérente aux objets de savoir	La mathématique entraine certains types de raisonnements et implique de traiter ses objets de façon abstraite afin de généraliser.	2
e) Le rôle de l'enseignant dans le développement de l'abstraction et de la conceptualisation	L'enseignant est perçu comme le spécialiste de la mathématique.	3
	L'enseignant a la responsabilité de planifier son enseignement afin de faire évoluer les connaissances actuelles des élèves en connaissances supérieures.	3
	L'enseignant a comme rôle la gestion des processus mentaux des élèves (stratégies cognitives et métacognitives).	**5**
f) Le rôle du symbolisme et de la formalisation pour abstraire	La définition des concepts et objets mathématiques permet de formaliser les apprentissages.	3
g) Le rôle du langage pour abstraire	La discussion est indissociable du raisonnement mathématique et peut causer des difficultés.	4
	Le langage permet le développement de fonctions cognitives utiles à la mathématique.	5

ANNEXE D

FRÉQUENCES D'ENCODAGE SELON LES THÉMATIQUES DU DISCOURS INSTITUTIONNEL CONCERNANT L'ABSTRACTION (N=8)

Thématiques liées à l'abstraction	Fréquences pour le ministère de l'Éducation (n=4)	Fréquences pour les commissions scolaire (n=4)	Total	%
a) La caractérisation des idées abstraites	8	14	22	7
b) L'abstraction inhérente aux composantes des situations d'apprentissage	76	17	93	31
c) L'abstraction inhérente aux capacités de l'élève	68	17	85	28
d) L'abstraction et la conceptualisation inhérente aux objets de savoir	18	1	19	6
e) Le rôle de l'enseignant dans le développement de l'abstraction et de la conceptualisation	19	15	34	11
f) Le rôle du symbolisme et de la formalisation pour abstraire	3	0	3	1

g) Le rôle du langage pour abstraire	39	6	45	15
Total	231	70	301	100

ANNEXE E

FRÉQUENCES D'ENCODAGE SELON LES CATÉGORIES DU DISCOURS INSTITUTIONNEL CONCERNANT L'ABSTRACTION (N=8)

Thématiques liées à l'abstraction	**Significations accordées à la notion d'abstraction**	**Fréquences pour le ministère de l'Éducation (n=4)**	**Fréquences pour les commissions scolaire (n=4)**	**Total**
a) La caractérisation des idées abstraites	**L'abstraction a plusieurs niveaux ou degrés.**	**8**	**8**	**16**
	L'abstraction n'est pas strictement extraite du concret.	0	3	3
	L'abstraction est une activité de simplification et de généralisation.	0	3	3
b) L'abstraction inhérente aux composantes des situations d'apprentissage	**L'appui sur le concret est plus efficace pour la conceptualisation (réalité quotidienne).**	**22**	**7**	**29**
	Le constant passage au concret aurait plutôt tendance à alourdir les apprentissages.	0	2	2
	L'utilisation du matériel de manipulation est efficace pour favoriser et soutenir les apprentissages.	**18**	**3**	**21**
	La diversité des modes de représentation est primordiale pour amener les élèves à conceptualiser et à abstraire.	13	1	14
	Le but visé par les situations ou les situations problèmes permet la conceptualisation.	14	4	18

	L'utilisation d'outils technologiques favorise la conceptualisation.	9	0	9
c) L'abstraction inhérente aux capacités de l'élève	**L'abstraction est inhérente aux actions intrinsèques de l'élève et de son engagement actif.**	**29**	**3**	**32**
	L'autonomie de l'élève serait préalable à la conceptualisation.	13	0	13
	La conceptualisation serait la résultante de l'activation et de l'approfondissement des concepts appris antérieurement par l'élève ainsi que de son intuition.	9	0	9
	La maîtrise et le développement de stratégies cognitives et métacognitives sont impératifs pour abstraire.	**17**	**3**	**20**
	Les difficultés d'abstraction sont liées à des défauts cognitifs des élèves.	0	11	11
d) L'abstraction et la conceptualisation inhérente aux objets de savoir	La mathématique entraine certains types de raisonnements et implique de traiter ses objets de façon abstraite afin de généraliser.	18	1	19
e) Le rôle de l'enseignant dans le développement de l'abstraction et de la conceptualisation	L'enseignant est perçu comme le spécialiste de la mathématique.	2	4	6
	L'enseignant a la responsabilité de planifier son enseignement afin de faire évoluer les connaissances actuelles des élèves en connaissances supérieures.	5	7	12
	L'enseignant a comme rôle la gestion des processus mentaux des élèves (stratégies cognitives et métacognitives).	**12**	**4**	**16**
f) Le rôle du symbolisme et de la formalisation pour abstraire	La définition des concepts et objets mathématiques permet de formaliser les apprentissages.	3	0	3
g) Le rôle du langage pour abstraire	La discussion est indissociable du raisonnement mathématique et peut causer des difficultés.	29	5	34
	Le langage permet le développement de fonctions cognitives utiles à la mathématique.	10	1	11

Total	-	231	70	301

ANNEXE F

THÉMATIQUES ET SIGNIFICATIONS EN LIEN AVEC LA NOTION D'ABSTRACTION REPÉRÉES AU SEIN DES DISCOURS PÉDAGOGIQUES (N=2)

Thématiques liées à l'abstraction	**Significations accordées à la notion d'abstraction**	**n**
a) L'abstraction inhérente aux capacités de l'élève	**L'abstraction est inhérente à la cognition du sujet (son développement, la maturation du cerveau, etc.).**	**2**
	L'abstraction est dépendante de la maîtrise de certains préalables par l'élève (connaissances, capacités, savoir-faire) et de leur profil d'apprenant.	2
	La conceptualisation est dépendante de l'encodage en mémoire, encodage qui relève de la pertinence et du sens perçus par le cerveau.	2
	L'abstraction est dépendante de la volonté de l'élève, de sa motivation, de son attitude envers les mathématiques ainsi que de son implication intellectuelle.	2
	L'abstraction est possible si l'élève a une intention, une visée dans le cadre de son action consciente (classification, discrimination, comparaison, manipulation, etc.)	1
	L'abstraction est inhérente aux stratégies cognitives et métacognitives de l'élève.	2
	Afin de conceptualiser, l'élève doit franchir plusieurs degrés de maîtrise des apprentissages ou paliers de progression mentale.	2
b) L'abstraction inhérente aux composantes des situations d'apprentissage	La pertinence des situations (en lien avec le quotidien) favorise l'encodage en mémoire et donc, la conceptualisation.	1
	Le matériel de manipulation et le passage du concret vers l'abstrait favorisent la conceptualisation.	**1**
	Les situations doivent amener les élèves à développer leurs stratégies mentales menant à l'abstraction.	1
c) Le rôle de l'enseignant dans	L'enseignant joue un rôle fondamental dans la gestion de certains processus mentaux.	1

le développement de l'abstraction	Afin d'amener les élèves à abstraire, l'enseignant doit fonder son enseignement sur leur profil.	2
	Le rôle de l'enseignant est de guider les élèves (montrer la bonne façon de faire) pour ensuite les rendre autonomes dans la constitution des apprentissages.	2
	L'enseignant aide les élèves à mobiliser leurs capacités cognitives et métacognitives qui sont nécessaires à la conceptualisation.	**1**
d) L'abstraction et la conceptualisation inhérentes aux objets de savoir	Afin d'abstraire, il importe de considérer et d'analyser la structure des concepts.	1
e) Le rôle du langage dans le processus d'abstraction	Les interactions de l'enseignant permettent d'induire l'action des élèves.	1

ANNEXE G

FRÉQUENCES D'ENCODAGE SELON LES THÉMATIQUES DU DISCOURS PÉDAGOGIQUE CONCERNANT L'ABSTRACTION (N=2)

Thématiques liées à l'abstraction	**Fréquences pour le livre de A.Sousa**	**Fréquences pour le livre de Barth**	**Total**	**%**
a) L'abstraction inhérente aux capacités de l'élève	59	60	119	54
b) L'abstraction inhérente aux composantes des situations d'apprentissage	13	4	17	8
c) Le rôle de l'enseignant dans le développement de l'abstraction	29	32	61	27
d) L'abstraction et la conceptualisation inhérentes aux objets de savoir	0	15	15	7
e) Le rôle du langage dans le processus d'abstraction	0	10	10	4
Total	101	121	222	100

ANNEXE H

FRÉQUENCES D'ENCODAGE SELON LES CATÉGORIES DU DISCOURS PÉDAGOGIQUE CONCERNANT L'ABSTRACTION (N=2)

Thématiques liées à l'abstraction	**Significations accordées à la notion d'abstraction**	**Fréquence pour A.Sousa**	**Fréquence pour Barth**	**Total**
a) L'abstraction inhérente aux capacités de l'élève	**L'abstraction est inhérente à la cognition du sujet (son développement, la maturation du cerveau, etc.).**	**20**	**10**	**30**
	L'abstraction est dépendante de la maîtrise de certains préalables par l'élève (connaissances, capacités, savoir-faire) et de leur profil d'apprenant.	12	10	22
	La conceptualisation est dépendante de l'encodage en mémoire, encodage qui relève de la pertinence et du sens perçus par le cerveau.	14	3	17
	L'abstraction est dépendante de la volonté de l'élève, de sa motivation, de son attitude envers les mathématiques ainsi que de son implication intellectuelle.	8	8	16
	L'abstraction est possible si l'élève a une intention, une visée dans le cadre de son action consciente (classification, discrimination, comparaison, manipulation, etc.)	0	15	15
	L'abstraction est inhérente aux stratégies cognitives et métacognitives de l'élève.	2	8	10
	Afin de conceptualiser, l'élève doit franchir plusieurs degrés de maîtrise des apprentissages ou paliers de progression mentale.	3	6	9
b) L'abstraction inhérente aux composantes des	La pertinence des situations (en lien avec le quotidien) favorise l'encodage en mémoire et donc, la conceptualisation.	5	0	5

situations d'apprentissage	**Le matériel de manipulation et le passage du concret vers l'abstrait favorisent la conceptualisation.**	**8**	**1**	**9**
	Les situations doivent amener les élèves à développer leurs stratégies mentales menant à l'abstraction.	0	3	3
c) Le rôle de l'enseignant dans le développement de l'abstraction	L'enseignant joue un rôle fondamental dans la gestion de certains processus mentaux.	15	2	17
	Afin d'amener les élèves à abstraire, l'enseignant doit fonder son enseignement sur leur profil.	7	2	9
	Le rôle de l'enseignant est de guider les élèves (montrer la bonne façon de faire) pour ensuite les rendre autonomes dans la constitution des apprentissages.	7	8	15
	L'enseignant aide les élèves à mobiliser leurs capacités cognitives et métacognitives qui sont nécessaires à la conceptualisation.	**0**	**20**	**20**
d) L'abstraction et la conceptualisation inhérentes aux objets de savoir	Afin d'abstraire, il importe de considérer et d'analyser la structure des concepts.	0	15	15
e) Le rôle du langage dans le processus d'abstraction	Les interactions de l'enseignant permettent d'induire l'action des élèves.	0	10	10
Total	-	101	121	222

RÉFÉRENCES

Abuhimed, D., Beheshti, J., Cole, C., AlGhamdi, M. J. et Lamoureux, I. (2013). Knowledge artefacts: Lessons learned and Stories as a means to transfer knowledge amongst cohorts of high school students working on an inquiry-based project. *Proceedings of the Association for Information Science and Technology, 50* (1), 1-4.

Association des orthopédagogues du Québec. (2003). L'acte orthopédagogique dans le contexte actuel. Québec : ADOQ.

Association des orthopédagogues du Québec. (2016). L'orthopédagogie réaffirmée pour déjouer les difficultés d'apprentissage. Récupéré le 20 septembre 2016 de https://www.conferium.com/Clients/adoq/ADOQ16_PROGRAMME.pdf

A. Sousa, D. (2010). *Un cerveau pour apprendre les mathématiques*. Montréal : Chenelière Éducation.

Ausubel, D. P. (1960). The use of advance organizers in the learning and retention of meaningful verbal materials. *Journal of Educational Psychology, 51*(5), 267-272.

Bakhtine, M. (1977). *Le marxisme et la philosophie du langage*. Paris : Éditions de Minuit.

Barallobres, G. (2009). Caractéristiques des pratiques algébriques dans les manuels scolaires québécois. *Petit x*, (80), 55-76.

Barallobres, G. (2017, sous presse). Difficultés en mathématiques, difficultés d'abstraction : des liens nécessaires entre enseignement et apprentissage. *Bulletins AMQ*.

Bardini, C. (2003). Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique. (Thèse de Doctorat). Université Paris-Diderot-Paris VII.

Barth, B. M. (2013). *L'apprentissage de l'abstraction* (2e éd.). Montréal : Chenelière Éducation.

Bélanger, A. (2008). *Analyse critique des valeurs explicites et implicites du discours de la réforme en éducation au Québec*. (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal. Récupéré d'*Archipel*, l'archive de publications électroniques de l'UQAM http://www.archipel.uqam.ca/1281/

Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques : Masteur « Mathématiques, Informatiques » de Grenoble 2003-2004. Cahier du laboratoire Leibniz, (91), 1-28.

Bissonnette, S., Richard, M., Gauthier, C., & Bouchard, C. (2010). Quelles sont les stratégies d'enseignement efficaces favorisant les apprentissages fondamentaux auprès des élèves en difficulté de niveau élémentaire ? Résultats d'une méga-analyse. *Revue de recherche appliquée sur l'apprentissage*, *3*(1), 1-35.

Bkouche, R. (2012). Abstrait vs concret, une opposition ambiguë : notes de cours. IREM de Lille.

Bloch, I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétative- Étude d'une progression sur la multiplication en SEGPA. *Les sciences de l'éducation pour l'Ère nouvelle, 41*(1), 90-111.

Bloch, I. (2014). Concepts, objets, symboles, enseignement de mathématiques...Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique. *Cahiers rationalistes,* (631), 1-8.

Bloch, I. et Salin, M-H. (2004). *Contrats, milieux, représentations : études des particularités de l'AIS.* Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM, Paris : Université de Paris 7.

Bonnay, D et Dubucs, J. (2011). La philosophie des mathématiques. <hal-00617305>

Bourdieu, P. (1980). *Question de sociologie.* Paris : Éditions de Minuit.

Bronckart, J.P. (2007). De l'activité collective à l'action et à la pensée individuelles pour une psychologie fermement vygotskienne. Dans M. Merri (dir.), *Activité humaine et conceptualisation : questions à Gérard Vergnaud* (121-141). Toulouse : Presses Universitaires du Mirail.

Brousseau, G. (1989). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x, 21*, 47-68.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990.* Grenoble : La pensée sauvage.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction.* Cambridge : Belkapp Press.

Bruner, J. S. (1993). *Le développement de l'enfant : savoir dire, savoir faire.* Paris : PUF.

Bruner, J. S., Goodnow, J. J. et Austin, G. A. (1986). *A study of thinking.* New Brunswick : Transaction Books.

Brunschvicg, L. (1993). *Les étapes de la philosophie mathématique.* Paris : A. Blanchard.

Butlen, D. et Pezard, M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(1), 41-78.

Caveing, M. (2004). Le problème des objets dans la pensée mathématique. Paris : Vrin.

Chabrol, C. (2004). Les tiers du discours dans l'espace idéologique. Dans P. Charaudeau et R. Montes (dir.). *La voix cachée du tiers* (p.43-51). Paris : L'Harmattan.

Charaudeau, P. (2005). De l'idéologie aux imaginaires sociodiscursifs, dans le discours politique. Dans P. Charaudeau (dir.), *Les masques du pouvoir* (p.145-161). Paris : Éditions Vuibert.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège (deuxième partie). *Petit x,* (19), 43-72.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique.* Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1994, février). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. Dans *séminaire de l'Associazione Mathesis.* Actes du Séminaire, 3 février 1994, Turin.

Chevallard, Y. (2009, mars). *Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée? Les mathématiques dans la cité.* Exposé présenté dans le cadre des conférences de la famille mathématique (IUFM) Académie d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques, 19* (1), 77-124.

Commission scolaire de la Beauce-Etchemin. (2013). *Cadre de référence en orthopédagogie.* Beauce-Etchemin : l'auteur. Récupéré de http://csbe.qc.ca/csbe/services_eleves/orthopedagogie/Cadre_de_r%C3%A9f%C3%A9rence_orthop%C3%A9dagogie_Mai_2013.pdf

Commission scolaire de la Capitale. (2006). *L'apprentissage de l'abstraction.* Récupéré dehttp://www.csrdn.qc.ca/discas/IntegrationConcepts/IntroApprentissageAbstract.html

Commission scolaire de Laval. (2013). *Vers des pratiques pédagogiques adaptées : guide d'accompagnement.* Laval : l'auteur. Récupéré de http://www.aqifga.com/spip/IMG/pdf/GUIDE_EBP_Nov2013.pdf

Commission scolaire de la Seigneurie-des-milles-Îles. (s.d). *Les difficultés d'apprentissage.* Saint-Eustache : CSSMI.

Conne, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées, *ACELF 31*(2), 82-102.

Conne F., Favre J-M., Giroux J. (2006). Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé. Dans P.A Doudin, L. Lafortune (dir.), *Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers : quelle formation à l'enseignement ?* (p.117-142). Québec : Presses Universitaires du Québec.

Cowley, P. (2014). *Bulletin des écoles secondaire du Québec 2014.* Repéré à https://www.fraserinstitute.org/sites/default/files/quebec-secondary-school-rankings-20140.pdf

D'Amore, B. et Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objets mathématiques. *Learning in Mathematics and Sciences and Educational Technology, 1*, 111-130.

Delauney, A. (2016). Abstraction. Dans *Universalis éducation.* Récupéré de http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/abstraction/

Desanti, J-T. (2008). *Les idéalités mathématiques.* Paris : Seuil.

Dondeyne, A. (1938a). L'abstraction. *Revue néo-scolastique de philosophie, 41*(57), 5-20.

Dondeyne, A. (1938b). L'abstraction (suite et fin). *Revue néo-scolastique de philosophie, 41*(59), 339-373.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2001, juillet). The construction of abstract knowledge in interaction. *PME Conference.* Actes du colloque, 12-17 juillet 2001, Université d'Utrecht : Freudenthal Inst., Faculté des mathématiques et des sciences informatiques.

Dubucs, J. (2010). L'« absence » des objets mathématiques. Dans J-T. Desanti, D. Pradelle et F-D. Sebah (dir.), *Sur l'aphilosophie des mathématiques* (160-173). Mauvezin : T.E.R.

Éducation Manitoba. (2004). *Services aux élèves.* Repéré à http://www.edu.gov.mb.ca/m12/enfdiff/pps/universelle.html

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 67-101.

Favre, J-M. (1997). *L'échec, le temps, la multiplication : étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication dans une classe spécialisée, par comparaison avec l'enseignement et l'apprentissage de la même opération dans une classe primaire.* (Mémoire de maîtrise). Université de Genève.

Favre, J-M. (2003, mars). Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé. *Séminaire national de didactique des mathématiques.* Actes du Séminaire national, ARDM. Paris : Université

Paris Diderot.

Fédération des syndicats de l'enseignement (CSQ). (2013). *Référentiel : Les élèves à risque et HDAA*. Québec : Fédération des syndicats de l'enseignement.

Fischer, J.-P. (2009). Six questions ou propositions pour cerner la notion de dyscalculie développementale. *ANAE Approche Neuropsychologique des Apprentissages chez l'Enfant, 21*(102), 117-133.

Gabel, J. (2017). Idéologie. Dans *Universalis éducation.* Récupéré de http://www.universalis.fr/encyclopedie/ideologie/

Giroux, J. (1999). La formation professionnelle à l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire : quel rôle peut jouer la didactique ? Dans A. Jeannel, J.P. Martinez et G. Boutin (dir.). *Les recherches enseignées en espaces francophones, Sciences en construction et enseignement universitaire* (p. 159–180). Montréal : Groupe Lire.

Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Education & didactique, 7*(1), 59-86.

Giroux, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. Dans C. Mary et L. Theis (éds), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques.* Presses de l'Université du Québec, p. 11-44.

Giroux, J. et René De Cotret, S. (2001). *Le temps didactique en classe de doubleurs.* Actes de l'AFDEC, 7 et 8 juin 1999, Montréal : Université de Montréal.

Goupil, G. (2014). *Les élèves en difficulté d'adaptation et d'apprentissage.* (4e éd.). Montréal : Chenelière Éducation.

Hazzan, O., & Zazkis, R. (2005). Reducing abstraction: The case of school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 58*(1), 101-119.

Hoffmann, M. H. (2006). What is a "semiotic perspective", and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 279-291.

Horth, R. (1998). *Historique de l'adaptation scolaire au Québec.* Repéré à http://www.adaptationscolaire.net/themes/adapsco/documents/histoas.pdf

Institut des troubles d'apprentissage. (2016). *Comprendre et accompagner l'apprenant.* Récupéré le 20 septembre 2016 de http://www.ameqenligne.com/event_doc/event_doc_10680.pdf

Ivie, S. D. (1998). Ausubel's learning theory: An approach to teaching higher order thinking skills. *The High School Journal, 82*(1), 35-42.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390-416). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. et Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: the case of equivalent expressions. *Focus on learning problems in mathematics, 21*(1), 1-17.

L'Écuyer, R. (1987). L'analyse de contenu : notion et étapes. Dans J-P. Deslauriers(dir.), *Les méthodes de la recherche qualitative* (p. 49-65). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Legrand, M. (1990). Du behaviorisme au cognitivisme. *L'Année psychologique, 90*(2), 247-286.

Leroux, G. (2016). De l'objet sensible à l'objet intelligible : les origines de la théorie de la connaissance chez Platon. Dans R. Nadeau (dir.), *Philosophie de la connaissance* (p.15-43). Montréal : Les presse de l'Université de Montréal.

Loiselle, J. et Harvey, S. (2007). La recherche développement en éducation : fondements, apports et limites. *Recherches qualitatives, 27*(1), 40-59.

MacGregor, M. et Stacey, K. (1997). Students'understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1-19.

Maingueneau, D. (2014). La notion de discours, Discours, texte et corpus et les disciplines du discours. Dans D. Maingueneau (dir.), *Discours et analyse du discours* (p.17-48). Paris : Armand Colin.

Martineau, S., Simard, D. et Gauthier, C. (2001). Recherches théoriques et spéculatives : considérations méthodologiques et épistémologiques. *Recherches qualitatives, 22*, 3-32.

Martinez, G. (1999). Les programmes universitaires en EASS, ASS ou en orthopédagogie : chronique annoncée d'une rupture entre les cycles. Dans A. Jeannel, J.P. Martinez et G. Boutin (dir.). *Les recherches enseignées en espaces francophones, Sciences en construction et enseignement universitaire* (p. 51-72). Montréal : Groupe Lire.

Marzano, R. J., Brandt, R. S., Hughes, C. S., Jones, B. F., Presseisen, B. Z., Rankin, S. C. et Suhor, C. (1988). *Dimensions of thinking : a framework for curriculum and instruction.* Alexandria, VA : Association for supervision and Curriculum Developpement.

Mercier, A. (2012). Vous avez dit algèbre ?. Dans L. Coulange, J. P. Drouhard, J.P. Dorier, A. Robert, (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (p.163-180). Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.

Merton, R.K. (1965). *Éléments de théorie et de méthode sociologique.* Paris : Plon.

Mill, J. S. (1843). *Système de logique déductive et inductive.* Paris : Pierre Mardaga.

Miller, G-A. (1956). The magical number seven, plus or minus two : some imits on our capacity ofor processing information. *Psychological review, 63*, 81-97.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (Sans date). À l'écoute de chaque élève grâce à la différenciation pédagogique. Repéré à http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/aecoutepartie1.pdf

Ministère de l'éducation du Québec. (1976). *L'éducation de l'enfance en difficulté d'adaptation et d'apprentissage au Québec.* Rapport du comité provincial de l'enfance inadapté (Copex). Québec : Service général des communications du ministère de l'Éducation.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (1999). *Une école adaptée à tous ces élèves : Politique de l'adaptation scolaire.* Québec : Les publications du Québec.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2001). *La formation à l'enseignement.* Québec : Les publications du Québec.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2006a). *Classe ordinaire et cheminement particulier de formation temporaire.* Analyse du cheminement scolaire des élèves en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage à leur arrivée au secondaire. Québec : Les publications du Québec.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2006b). *Programme de formation de l'école québécoise : Domaine de la mathématique et de la technologie, enseignement secondaire, 1er cycle.* Québec : Les publications du Québec. Récupéré de http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire1/pdf/chapitre061v2.pdf

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2006c). *Programme de formation de l'école québécoise : Domaine de la mathématique, enseignement secondaire, 2e cycle.* Québec : Les publications du Québec. Récupéré de http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire2/medias/6b-pfeq_math.pdf

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2007). *L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage.* Québec : Les publications du Québec.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2009). *À la même école : Les élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage.* Québec : Les publications du Québec.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2014). *Précisions sur la flexibilité pédagogique, les mesures d'adaptation et les modifications pour les élèves ayant des besoins particuliers.* Québec : Les publications du Québec.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2012). *Agir autrement en mathématiques : pour la réussite des élèves en milieux défavorisés.* Québec : Les publications du Québec.

Ministère de l'Éducation de l'Enseignement Supérieur et Recherche. (2016a). *Lutte contre le décrochage et réussite scolaire.* Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/dossiers-thematiques/lutte-contre-le-decrochage-et-reussite-scolaire/strategie-daction-visant-la-perseverance-et-la-reussite-scolaires/un-objectif-80/

Ministère de l'Éducation de l'Enseignement Supérieur et Recherche. (2016b). *Treize voies de la réussite.* Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/dossiers-thematiques/lutte-contre-le-decrochage-et-reussite-scolaire/strategie-daction-visant-la-perseverance-et-la-reussite-scolaires/treize-voies-de-la-reussite/

Ministère de l'Éducation de l'Enseignement Supérieur et Recherche. (2016c). *Voie 2- Établir des cibles de réussite pour chaque commission scolaire et en assurer le suivi.* Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/dossiers-thematiques/lutte-contre-le-decrochage-et-reussite-scolaire/strategie-daction-visant-la-perseverance-et-la-reussite-scolaires/treize-voies-de-la-reussite/2/

Ministère de l'Éducation de l'Enseignement Supérieur et Recherche. (2016d). *Progression des apprentissages au secondaire, Mathématique.* Récupéré de http://www1.education.gouv.qc.ca/progressionSecondaire/pdf/progrApprSec_Mathematique_fr.pdf

Mucchielli, R. (2006). *L'analyse de contenu des documents et des communications* (9e éd.). Issy-les-Moulineaux : Les éditions ESF.

Otte, M. (2005). Mathematics, sign and activity. Dans M. H. G. Hojfmann, J. Lenhard, F. Seeger (dir.), *Activity and Sign- Grounding mathematics* (p. 9-22). États-Unis : Springer.

Paillé, P. et Mucchielli, A. (2012). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales* (3e éd.). Paris : Armand Colin.

Patras, F. (1996). Phénoménologie de la connaissance mathématique. Dans J.F. Courtine (dir.), *Phénoménologie et logique* (109-121). Paris : Presses École Nationale Supérieure.

Patras, F. (2001). *La Pensée mathématique contemporaine.* Paris : PUF.

Pelletier, E. et Léger, C. (2004). *Les troubles d'apprentissage : Guide pour les enseignants.* Caraquet : École Marguerite-Bourgeoys.

Piaget, J. (1924). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant* (3e ed.). Paris : Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1955). Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence. Dans J. Piaget (dir.), *L'enseignement des mathématiques : Nouvelles perspectives* (p.11-33). Paris : Éditions Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1961). Les problèmes psychologiques de la pensée « pure ». [Chapitre de livre]. Dans *Épistémologie mathématique et psychologie : essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle* (p.242-276). Paris : PUF.

Piaget, J. (1977). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante : l'abstraction des relations logico-arithmétiques.* Paris : PUF.

Piaget, J. (1978). *La formation du symbole chez l'enfant* (8e ed.). Paris : Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. et Inhelder, B. (1966). *La psychologie de l'enfant.* Paris : PUF.

Pradelle, D. (2009) Sur le sens de l'idéalisme transcendantal : Husserl critique Kant. Dans F. Calori, M. Foessel et D. Pradelle (dir.), *De la sensibilité les esthétiques de Kant* (285-306). Rennes : PUR.

Pressley, M. et Harris, K. (1990). What we really know about strategy instruction. *Educational leadership, 48*(1), 31-35.

Radford, L. G. (2001). The historical origins of algebraic thinking. Dans R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, R. Lins (dir.), *Perspectives on school algebra* (p. 13-36). Netherlands : Springer.

Radford, L. G. (2004, septembre). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. Dans Atti del Convegno di didattica della matematica. Acte de colloque, les 24 et 25 septembre 2004 (p.11-28). Italie : Centro didattico cantonale.

Radford, L., Demers, S. et Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques : repères pratiques et conceptuels.* Ottawa : Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques.

Radford, L. et Grenier, M. (1996). Entre les choses, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation*, 22(*2*), 253-276.

Reboul, Olivier. (1984). *Le langage de l'éducation : Analyse du discours pédagogique.* Paris : Presses Universitaires de France.

Reymond, M. (1943). Études critiques : l'abstraction et la nécessité selon M. Laporte. *Revue de théologie et de philosophie, 31*(128), 174-181.

Roiné, C. (2005). *Étude des effets didactiques des idéologies pédagogiques* : Contribution à une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. (Mémoire de maîtrise). Université de Bordeaux 2.

Roiné, C. (2008, septembre). *Effets de cécité didactique créée par les idéologies néo-individualistes dans le cadre de l'enseignement spécialisé.* Actes du colloque international : Les didactiques et leurs rapports à l'enseignement et à la formation : Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats ? AFIRSE, 18-20 septembre 2008, Université de Bordeaux.

Roiné, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA : Une contribution à la question des inégalités* (Thèse de doctorat). Université de Bordeaux 2.

Roiné, C. (2010). Caractérisation des difficultés en mathématiques des élèves de SEGPA. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation,* (4), 73-87.

Roiné, C. (2014). Les paradoxes de l'aide aux « élèves en difficulté » dans l'enseignement des mathématiques. Dans C. Mary et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques* (p.45-62). Presses de l'Université du Québec.

Roiné, C. (2015). La fabrication de l'élève en difficulté. Postulats et méthodes pour l'analyse d'une catégorisation dans le champ scolaire. *Éducation et socialisation, Les cahiers du CERFEE,* (37). DOI : 10.4000/edso.1138

Roiné, C. (2016, février). *Élèves en difficulté, psychologisation de l'échec scolaire et épistémologie.* Conférence donnée au Cercle mathématique, éducation et épistémologie de Montréal, Université du Québec à Montréal.

Rosenshine, B. (2012). Principles of Instruction. *Education Digest, 78*(3), 30-40.

Sabatier, X. (2009). *Les formes du réalisme mathématique.* Paris : Vrin.

Sarrazy, B. (1997). Sens et situations : Une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(2), 135-166.

Sarrazy, B. (2001). Les interactions maître-élèves dans l'enseignement des mathématiques. Contribution à une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement. *Revue française de pédagogie*, *136*(1), 117-132.

Sarrazy, B. (2002a). *Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques* : Contribution à l'étude des inégalités scolaires à l'école élémentaire. (Habilitation à diriger des thèses). Université Victor Segalen Bordeaux 2.

Sarrazy B. (2002b). Didactique, Pédagogie et Enseignement : pour une clarification du débat dans la communauté des sciences de l'éducation. Dans J.F. Marcel (dir.), *Les Sciences de l'Éducation : des recherches, une discipline ? Actes de l'Université d'été : Éducation, Recherche et Société* (p.131-154). Paris : l'Harmattan.

Sarrazy, B. (2006, octobre). Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques : fondements épistémologiques et ancrages théoriques. Dans G. Gueudet et Y. Matheron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* Actes du colloque organisé par l'ARDM et l'IREM, à Paris 2006 (p.79-100). Paris : Université de Paris.

Sarrazy, B. (2007). Fondements épistémologiques et ancrages théoriques d'une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Dans G. Gueudet, Y. Matheron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* Actes du colloque organisé par l'ARDM et l'IREM, à Paris 2007 (p.79-99). Paris : Université de Paris

Sarrazy, B. (2008). De quelques effets de contrats et du rôle des situations didactiques dans la résolution des problèmes d'arithmétique au cycle 3. *Séminaire national : L'enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Actes du séminaire national, 13-14 novembre 2007, Paris. Paris : Ministère de l'Éducation Nationale, Direction générale de l'enseignement scolaire.

Sarrazy, B. (2015). *La résolution de problèmes dans le champ psychologique* : notes de cours, L3, Psychologie de l'enseignement. Université de Bordeaux 2.

Sarrazy, B. et Roiné, C. (2006, mai). Du déficient léger à l'élève en difficulté : Des effets de la différenciation structurelle sur différenciation didactique. *Colloque espace mathématique francophone.* Actes de colloque, Sherbrooke, 27-31 mai 2006. Sherbrooke : EMF.

Searle, J.R. (1985). *L'intentionnalité : essai de philosophie des états mentaux.* Paris : Éditions de minuit.

Searle, J.R. (1995). *La redécouverte de l'esprit.* Paris : Gallimard.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the learning of mathematics, 10*(3), 24-36.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students'thinking in linear algebra. Dans J.-L.Dorier (dir.), *On the Teaching of LinearAlgebra* (p.209-246). Kluwer Academic Publishers.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign?–An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 133-162.

Sylvand, B. (1999). *La querelle des idées abstraites entre Locke et Leibniz et ses prolongements dans le débat contemporain.* (Mémoire de maîtrise). Université Sorbonne Paris IV, Paris.

Tardif, J. (1992). Pour un enseignement stratégique. L'apport de la psychologie cognitive. Montréal, Québec : Logiques.

Toullec-Théry, M. (2006). *Aider les élèves « peu performants » en mathématiques à l'école primaire : quelles actions des professeurs ? Étude in situ des professeurs des écoles de classes ordinaires et de maîtres spécialisés à dominante pédagogique.* (Thèse de doctorat). Université de Rennes 2.

Université de Montréal. (2016). Cheminement type. Repéré à https://admission.umontreal.ca/programmes/baccalaureat-en-enseignement-en-adaptation-scolaire/structure-du-programme/

Université de Sherbrooke. (2016). Baccalauréat en adaptation scolaire et sociale. Repéré à http://www.usherbrooke.ca/programmes/?id=p246

Université du Québec à Montréal. (2016a). Baccalauréat en enseignement en adaptation scolaire et sociale. Récupéré de http://www.etudier.uqam.ca/programme?code=7088#Cours

Université du Québec à Montréal. (2016b). Baccalauréat en enseignement au secondaire. Récupéré de http://www.etudier.uqam.ca/tap/?noprog=7951&version=20131

Van der Maren, J-M. (2004). *Méthodes de recherche pour l'éducation* (2e éd.). Bruxelles : de Boeck.

Vergnaud, G. (1988). Question de représentation et formulation dans la résolution de problèmes mathématiques. *Annales de didactique et des sciences cognitives, 1*, 33-55.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10* (2.3), 133-170.

Vergnaud, G. (1991). Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue française de pédagogie,* (96), 79-86.

Vergnaud, G. (2002). L'explication est-elle autre chose que la conceptualisation ? Dans M. Saada-Robert et F. Leutenegger (dir.), *Expliquer et comprendre en sciences de l'éducation* (31- 44). Bruxelles : De Boeck Supérieur.

Vygotski, L. S. (1934/2012). *Pensée et langage* (4e éd.). (F. Sève, trad.) Paris : La Dispute.

Vygotski, L. S. (1930/2014). *Histoire du développement des fonctions psychiques supérieures.* (F. Sève, trad.). Paris : La Dispute.

Willett, G. (1996). Paradigme, théorie, modèle, schéma : qu'est-ce donc ? *Communication et organisation,* (10). DOI : 10.4000/communicationorganisation.1873

Winsløw, C. (2008). *Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle.* Dans R. Rouchier et al. (dir.), Actes de la XIIIème École d'Été de Didactique des Mathématiques, (p. 1-12). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Wittgenstein, L. (1994). *Remarques sur la philosophie de la psychologie II.* Mauvezin : Trans-Europ- Repress.

Wolfensberger, W. (1972). *Normalization: the principles of normalization in human services.* Toronto : Institute of Mental Retardation.