

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

COMBINATOIRE DES OPÉRATEURS PROPRES DE MACDONALD

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

NANCY WALLACE

AOÛT 2017

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

J'aimerais, tout d'abord, remercier mon directeur de recherche François Bergeron pour son soutien moral et financier, pour les longues discussions qui ont permis de mûrir ma pensée mathématique. J'aimerais également remercier François Bergeron, Christophe Reutenauer, Franco Saliola et Hugh Thomas d'avoir parfait mon éducation en algèbre et combinatoire. Un petit merci spécial aux deux premiers pour les nombreuses lettres de recommandation. Merci à la fondation de l'UQAM et à la Faculté des sciences pour les nombreuses bourses m'ayant permis de mener ce projet à terme. Merci à Herman Goulet-Ouellet, Mathieu Goudreau, Mélodie Lapointe, Mohamed Nouidha et Stéphanie Schank, d'avoir écouté patiemment tandis que je m'enthousiasmais en expliquant mes idées. En particulier, merci à Mélodie Lapointe pour la conciliation entre moi et l'ordinateur et à Dalila Boussetta, Florence Mass-Gariépy et Pauline Hubert pour les corrections orthographiques. Merci à Jonathan Lemaire-Beaucage pour les nombreux contrats d'auxiliaire d'enseignement et à Johanne Pantoine pour le café hebdomadaire. Merci au LaCIM de m'avoir pris sous son aile depuis le baccalauréat.

Un énorme merci à ma grande fille Sara Boutalib, qui a fait de moi une meilleure personne et pour avoir compris que je devais parfois «jouer aux maths». Un grand merci à Béatrice pour son écoute lors de moments difficiles. Merci à mon père, décédé en septembre, pour m'avoir démontré qu'il n'y a pas d'âge pour retourner à l'école. Merci à ma mère, ma soeur et mes deux frères de comprendre que je n'ai pas toujours le temps pour les visiter et à tous les autres que j'ai pu oublier.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	vii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	ix
LISTE DES SYMBOLES ET DES UNITÉS . . . . .	xiv
RÉSUMÉ . . . . .	xv
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
COMBINATOIRE, FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET OPÉRATEURS . . . . .	5
1.1 Partages, diagrammes et tableaux . . . . .	5
1.2 Théorie des fonctions symétriques . . . . .	12
1.3 Schur positivité . . . . .	24
1.4 Transformée de Frobenius . . . . .	27
1.5 Polynômes de Macdonald . . . . .	32
1.6 Propriétés des polynômes $(q, t)$ -Kostka . . . . .	43
1.7 Opérateur $\nabla$ : propriété et interprétation combinatoire . . . . .	47
1.8 Opérateurs $\Delta$ . . . . .	54
CHAPITRE II	
CARACTÉRISATION DES OPÉRATEURS PROPRES DE MACDONALD . . . . .	57
2.1 Caractérisation générale . . . . .	57
2.2 Caractérisation des opérateurs monomiaux et interprétation combinatoire . . . . .	69
2.3 Caractérisation de $\nabla$ . . . . .	82
2.4 Généralisation . . . . .	93
CHAPITRE III	

SPÉCIALISATION . . . . .	97
3.1 Spécialisation $q^a = t^b$ , où $a, b \in \mathbb{N}$ , $q = t = 1$ et singularité . . . . .	97
3.2 Structure de Jordan de $\nabla_{1,1}$ . . . . .	100
CONCLUSION . . . . .	113
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	115

## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Un diagramme et son conjugué . . . . .	7
1.2 Coins intérieurs, coins extérieurs et diagramme gauche . . . . .	8
1.3 Bras et jambes d'un diagramme . . . . .	8
1.4 Tableaux . . . . .	9
1.5 Remplissage correspondant au nombre de Kostka $K_{32,221}$ . . . . .	10
1.6 Chemin de Dyck . . . . .	51
1.7 Aire d'un chemin de Dyck . . . . .	52
1.8 Contremarches . . . . .	52
1.9 Pics d'un chemin de Dyck . . . . .	53
2.1 Opérateur MMS associé à la suite $(a, b, c, d, e, \dots)$ . . . . .	75
2.2 Opérateur interprétable . . . . .	75
3.1 Chemins de Dyck carré, dont la somme des pics est 4 . . . . .	109
3.2 Correspondance entre les blocs de Jordan et les chemins de Dyck . . .	111

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
2.1 Caractérisation des opérateurs propres de Macdonald . . . . .	95

## LISTE DES SYMBOLES ET DES UNITÉS

- $\chi^\mu$  Caractère irréductible de  $\mathbb{S}_n$  ... , page 21
- $\ell(\mu)$  Longueur du partage  $\mu$  ... , page 6
- $\iota(\mu)$  ... , page 50
- $\lambda \triangleleft \mu$   $\mu$  couvre  $\lambda$  ... , page 7
- $\lambda \trianglelefteq \mu$  Ordre du raffinement ... , page 10
- $\Lambda^d$  Composante homogène de degré  $d$  de  $\Lambda$  ... , page 14
- $\Lambda_n$  Anneau des fonctions symétriques à  $n$  variables ... , page 13
- $\Lambda_{\mathbb{K},n}$  Anneau des fonctions symétriques à  $n$  variables sur le corps  $\mathbb{K}$  ... , page 13
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  Produit scalaire de Hall ... , page 23
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,t}$  Produit scalaire de Macdonald ... , page 32
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  Produit scalaire de Macdonald combinatoire ... , page 37
- $\mathbb{S}_n$  Groupe symétrique ... , page 12
- $\mathcal{C}$  L'ensemble des opérateurs monomiaux constant par degré... , page 61
- $\mathcal{D}$  Ensemble des chemins de Dyck ... , page 51
- $\mathcal{E}_\mu(q, t), \mathcal{E}'_\mu(q, t)$  ... , page 37
- $\mathcal{F}$  Transformée de Frobenius... , page 29

- $\mathcal{M}$  L'ensemble des opérateurs monomiaux... , page 70
- $\mathcal{O}$  L'ensemble des opérateurs propres de Macdonald inversibles ... , page 61
- $\mathcal{P}$  L'ensemble des opérateurs propres de Macdonald qui sont Schur polynomiaux... , page 62
- $\mathcal{S}$  L'ensemble des opérateurs propres de Macdonald qui sont Schur positifs... , page 62
- $\mathcal{V}$  L'ensemble des opérateurs propres de Macdonald qui sont virtuellement Schur positifs... , page 63
- $|\mu|$  Taille de  $\mu$ ... , page 6
- $|_{q \leftrightarrow t}$  ... , page 48
- $\mu'$  Partage conjuguée du partage  $\mu$  ... , page 7
- $\mu/\lambda$  Diagramme gauche ... , page 7
- $\mu \prec \lambda$  Ordre de la dominance ... , page 10
- $\mu \vdash n$   $\mu$  est un partage de  $n$  ... , page 5
- $\nabla$  ... , page 47
- $\nabla_F$  ... , page 54
- $\nabla_q$  ... , page 99
- $\nabla_{1,1}$  ... , page 99
- $\omega$  ... , page 22
- $\omega^*$  ... , page 39
- $\rho(\gamma)$  Partage associé à la grandeur des contremarches de  $\gamma$  ... , page 51

- $\simeq$  classe d'équivalence dans  $\mathcal{O}/\mathcal{C}$  ... , page 61
- aire* Aire d'un chemin de Dyck ... , page 51
- $a(c)$  Longueur du bras de la case  $c$  ... , page 8
- $B(N)$  Symétriseur... , page 71
- $B_\mu$  ... , page 54
- $D$  ... , page 58
- $e_\mu$  Fonction symétrique élémentaire ... , page 18
- $f[X]$  Pléthysme ... , page 35
- $h_\mu$  Fonction symétrique homogène complète ... , page 19
- $H_\mu$  Polynôme de Macdonald (combinatoire) ... , page 37
- $J_\mu$  ... , page 32
- $K(n)$  Matrice  $(q, t)$ -Kostka... , page 39
- $K_{\mu, \lambda}$  Nombre de Kostka ... , page 9
- $l(c)$  Longueur de la jambe de la case  $c$  ... , page 8
- $M(g)$  Monôme dominant de  $g$ , page 24
- $m_\mu$  Fonction symétrique monomiale... , page 14
- $n(\mu)$  La somme des ordonnées de  $\mu$  ... , page 8
- $p(n)$  Nombre de partages de  $n$ ... , page 6
- $p(n, j)$  Nombre de partages de  $n$  de longueur  $j$ ... , page 6
- $P_\mu$  Polynômes de Macdonald originaux... , page 33

- $p_\mu$  Fonction symétrique des sommes de puissances ... , page 19
- $Q'$  ... , page 71
- $Q_N$   $q$ -opérateur associé à  $N$ ... , page 71
- $s_\mu$  Fonction de Schur ... , page 17
- $T'$  ... , page 71
- $T_N$   $t$ -opérateur associé à  $N$ ... , page 71
- $U$  ... , page 58
- $v_\mu, w_\mu$  Valeurs propres ... , page 60
- $W^{(i,j)}$  ... , page 78
- $X, Y$  ... , page 34
- $z_\mu$  ... , page 13
- $\text{Part}(\mu)$  Ensemble des partage de  $n$ ... , page 6

## RÉSUMÉ

Cette recherche porte sur les opérateurs propres de Macdonald. Le premier chapitre est une revue de littérature, afin de rendre les chapitres suivants accessibles. On y introduit les notions classiques de combinatoire, les notions de base sur les fonctions symétriques et les objets qui sont au coeur de notre propos : les polynômes de Macdonald. On peut alors introduire la notion d'opérateurs «propres» de Macdonald, tels que l'opérateur  $\nabla$  qui joue un rôle fondamental dans l'étude de nombreuses questions en lien avec les espaces de polynômes diagonaux harmonique. Dans le chapitre 2, on introduit une généralisation de  $\nabla$ , les opérateurs monomiaux. Cette généralisation contient un sous-ensemble d'opérateurs dont on montre une interprétation combinatoire. Le fruit de cette recherche sur les opérateurs monomiaux permet une caractérisation de  $\nabla$  en terme de propriétés algébriques. Elle permet également une caractérisation des opérateurs monomiaux multiplicatifs, ayant une «symétrie conjuguée» et qui sont «Schur polynomiaux». Sous l'hypothèse que la conjecture 1 de (Bergeron *et al.*, 1999) soit valide cela correspond à la Schur positivité. À la fin de la section 2.3, on formule cinq questions. La première entrainerait la résolution de la conjecture de Bergeron et al. déjà mentionnée. Tandis qu'une réponse à une seule des quatre dernières questions permet une caractérisation minimale de  $\nabla$ . On utilise également les opérateurs monomiaux pour généraliser la notion d'opérateurs définis par substitution pléthystique. On termine le chapitre avec une classification partielle des opérateurs propres de Macdonald. Le chapitre 3 porte sur la structure de l'opérateur  $\nabla$  en la spécialisation  $q = t = 1$ . On met en évidence qu'il y a là une singularité et on explique pourquoi celle-ci empêche les opérateurs monomiaux d'y'être bien définis. On termine le chapitre en spéculant sur une interprétation combinatoire potentielle pour la structure en bloc de Jordan de la spécialisation de l'opérateur  $\nabla$  en  $q = t = 1$ .

Mots clés : Fonctions symétriques, opérateurs propres de Macdonald, nabla, Schur positif, chemins de Dyck.

## INTRODUCTION

Ce travail est situé à l'intersection de la combinatoire et de la théorie des fonctions symétriques. L'interaction entre ces deux sujets s'est montrée très fertile ces dernières années. D'une part, on étudie les propriétés des structures discrètes, d'autre part on étudie celles des polynômes invariants pour le groupe symétrique. L'étude de ces invariants est fondamentale pour la physique théorique, la chimie, la cristallographie, et, bien entendu, pour un grand nombre de domaines des mathématiques.

Plus spécifiquement, mon travail porte sur des aspects combinatoires de l'étude d'opérateurs «propres» de Macdonald. Introduits en 1988, les polynômes de Macdonald sont une généralisation des fonctions de Schur, des polynômes de Hall-Littlewood, des polynômes de Jack et de plusieurs autres. Les opérateurs propres de Macdonald sont des opérateurs linéaires ayant les polynômes de Macdonald comme fonction propre. Cela en fait des outils capitaux dans la détermination des propriétés centrales des polynômes de Macdonald.

Par le biais d'exploration via le calcul formel, on entreprend l'étude de la structure fine de l'opérateur  $\nabla$ , un opérateur propre de Macdonald introduit par F. Bergeron et A. Garsia. On caractérise également cet opérateur. On en étudie les aspects qui sont généralisables à d'autres opérateurs de même nature. Le chapitre 1 est une revue de littérature tandis que les chapitres 2 et 3 sont issus de recherche originale.

Le premier chapitre est une introduction aux notions de base nécessaire au développement des chapitres suivants. Dans la section 1.1 partages, diagrammes et tableaux

sont présentés. La théorie de base des fonctions symétriques est introduite à la section 1.2. Les deux sections suivantes élaborent les notions de Schur positivité et de transformée de Frobenius. Puis, les polynômes de Macdonald et les propriétés des polynômes  $(q, t)$ -Kostka sont exposés en 1.5 et 1.6. On termine enfin avec certains opérateurs propres de Macdonald, tels que  $\nabla$ , et les opérateurs définis par substitution pléthystiques aux sections 1.7 et 1.8.

Dans le chapitre 2, on caractérise les opérateurs propres de Macdonald. Les aspects déjà connus de la théorie y sont présentés ainsi que des éléments originaux permettant une caractérisation plus fine. La section 2.1 établit une caractérisation générale des opérateurs propres de Macdonald. On y définit des propriétés de caractérisation et on établit des conditions qui assurent qu'un opérateur  $N$  soit tel que  $N^{-1} = \omega^* N \omega^*$ . L'opérateur  $\omega^*$  est une involution sur l'anneau des fonctions symétriques à coefficients dans le corps des fractions  $\mathbb{Q}(q, t)$ . Dans la section 2.2, on présente une généralisation de  $\nabla$  : la notion d'opérateurs monomiaux. Cette généralisation contient un sous-ensemble d'opérateurs qu'on montre pouvoir s'interpréter combinatoirement. Les opérateurs monomiaux, monomiaux interprétables ainsi que les opérateurs monomiaux multiplicatifs et ayant la symétrie conjuguée (MMS) sont caractérisés dans cette section. Cette recherche sur les opérateurs monomiaux permet une caractérisation de  $\nabla$  énoncée, dans le théorème 2, à la section 2.3. Elle permet également une caractérisation des opérateurs MMS qui sont Schur polynomiaux via le théorème 1. Sous l'hypothèse que la conjecture 1 de (Bergeron *et al.*, 1999) soit valide cela correspond à la Schur positivité plutôt que la Schur polynomialité. À la fin de la section 2.3, on formule cinq questions. Une réponse positive à la première entraîne la résolution de la conjecture de (Bergeron *et al.*, 1999) déjà mentionnée. Une autre approche est mentionnée à la suite des cinq questions. Tandis qu'une ré-

ponse à une seule des quatre dernières questions permet une caractérisation minimale de  $\nabla$ . C'est-à-dire qu'aucun affaiblissement des conditions n'amène également à une caractérisation de  $\nabla$ . Dans la section 2.4, on utilise les opérateurs monomiaux pour généraliser la notion d'opérateurs définis par substitution pléthystique. Le chapitre se termine avec un tableau donnant l'état des lieux sur les questions principales concernant les opérateurs propres de Macdonald.

Les résultats et réflexions du chapitre 3 sont le fruit d'une recherche originale. Il porte sur la structure de l'opérateur  $\nabla$  pour sa spécialisation en  $q = t = 1$ . On met en évidence qu'il y a là une singularité et on explique pourquoi celle-ci empêche les opérateurs monomiaux d'être bien définis en cette singularité. On termine le chapitre en spéculant sur une interprétation combinatoire potentielle pour la structure en bloc de Jordan de la spécialisation de l'opérateur  $\nabla$  en  $q = t = 1$ . Plus précisément, celle-ci établit un lien entre les chemins de Dyck carré et la taille ainsi que le nombre de blocs de Jordan de  $\nabla(e_n)$  dans la base des fonctions symétriques élémentaires et évalué en  $q = t = 1$ .



## CHAPITRE I

### COMBINATOIRE, FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET OPÉRATEURS

Ce chapitre est dédié aux notions de base de combinatoire nécessaire à la compréhension de cet ouvrage. On y introduit les notions combinatoires nécessaires à la description des (fonctions) Polynômes symétriques : partages, tableaux de Young, etc. Les résultats connus reliés aux fonctions symétriques et aux polynômes de Macdonald sont également introduits. Les références principales pour ce chapitre sont (Bergeron, 2009) et (Macdonald, 1995), les autres références sont mentionnées à même le texte.

#### 1.1 Partages, diagrammes et tableaux

À la fin du 19<sup>e</sup> siècle, les partages sont représentés par des diagrammes par Norman Macleod Ferrers, pour la première fois. Peu de temps après, Alfred Young, introduit la notion de tableaux. C'est, cependant, à Ferdinand Georg Frobenius que l'on doit leur utilisation dans le contexte des fonctions symétriques. On commence donc cette histoire avec un peu de combinatoire.

On dit que  $c$  est une *composition* de  $n$ , noté  $c \vDash n$ , si  $c = (c_1, \dots, c_k)$  est une suite de nombres entiers positifs, dont la somme est  $n$ . Un *partage* de  $n$ , noté  $\mu =$

$(\mu_1, \dots, \mu_k) \vdash n$  est une suite décroissante de nombres entiers strictement positifs, dont la somme est  $n$ . Les  $\mu_i$  sont les *Parts* de  $\mu$ . Les parenthèses sont généralement omises. Il est d'usage d'omettre aussi les virgules si les nombres sont inférieurs à 10. La *taille* de  $\mu$ , notée  $|\mu|$ , est la somme des parts de  $\mu$  et le nombre de parts de  $\mu$  est sa *longueur*, notée  $\ell(\mu)$ . On dénote parfois par  $1^{d_1}2^{d_2}\dots n^{d_n}$  un partage s'il a  $\mu$  à  $d_k$  parts de grandeur  $k$ . De plus, l'*ensemble des partages* de  $n$  est noté  $\text{Part}(n)$  et le *nombre de partages* de  $n$  par  $p(n)$ . Enfin, la notation  $p(n, j)$  sera utile dans le chapitre 3, elle désigne le nombre de partages de  $n$  de longueur  $j$ .

*Exemple 1 :*

$$(3, 2, 2, 1) = 3221 = 1^1 2^2 3^1$$

$$3221 \vdash 8, \text{ car } 2 + 1 + 2 + 3 = 8$$

$$|3221| = 8 \text{ et } \ell(3221) = 4$$

Ce qui se lit : « 3221 est un partage de 8. La taille de 3221 est 8 et la longueur de 3221 est 4 ».

Un *diagramme*,  $D$ , est un sous-ensemble (fini) de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , dont les éléments sont nommés *cases*. La case  $(i, j)$  est représentée par le carré  $1 \times 1$  dont les coordonnées sont :  $(i, j)$ ,  $(i + 1, j)$ ,  $(i, j + 1)$  et  $(i + 1, j + 1)$ . Un *diagramme de Ferrers*,  $\mu$ , est un diagramme satisfaisant la condition suivante :

$$\text{Si } (i, j) \in \mu \text{ alors } \forall a \leq i \text{ et } \forall b \leq j, (a, b) \in \mu.$$

Cette condition implique qu'un diagramme de Ferrers a un nombre décroissant de cases par lignes, lorsqu'on les énumère du bas vers le haut. Il lui correspond donc un partage et cette correspondance est bijective. On désigne par  $\mu$  autant le diagramme de Ferrers que le partage.

Le *diagramme conjugué* d'un diagramme  $D$  est le diagramme :

$$D' = \{(j, i) | (i, j) \in D\}.$$

Le *conjugué d'un partage*  $\mu$ , noté  $\mu'$ , est le partage associé au conjugué du diagramme de Ferrers associé.

*Exemple 2 :* La figure 1.1 le diagramme associé au partage  $221 \vdash 5$  (à gauche) et son conjugué  $32$  (à droite).

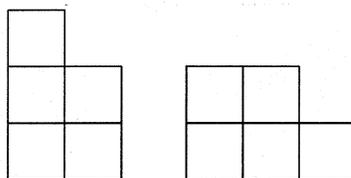


Figure 1.1 Un diagramme et son conjugué

Il peut s'avérer utile de considérer un sous-ensemble de cases d'un diagramme. Ainsi, pour  $\mu$  et  $\lambda$  deux diagrammes tels que  $\lambda \subseteq \mu$ , le *diagramme gauche*  $\mu/\lambda$  est le diagramme obtenu en enlevant à  $\mu$  l'ensemble des cases de  $\lambda$ . De plus, si  $\mu$  et  $\lambda$  sont des diagrammes de Ferrers, tels que  $\lambda \subseteq \mu$  et que  $|\mu/\lambda| = 1$ , on dit que  $\mu$  *couvre*  $\lambda$ . Ceci est noté  $\lambda < \mu$ , et on dit que  $\mu/\lambda$  est un *coin intérieur* de  $\mu$  ou encore que c'est un *coin extérieur* de  $\lambda$ .

*Exemple 3 :* Pour  $\lambda = 22$  et  $\mu = 32$ , la figure 1.2 montre que  $(2, 0)$  est un coin intérieur de  $32$  et un coin extérieur de  $22$ .

Soient  $\mu$  un diagramme et  $c$  une case de  $\mu$ . Le *bras* de  $c$  est l'ensemble des cases situées sur la même ligne et strictement à droite de la case  $c$ . La cardinalité de cet

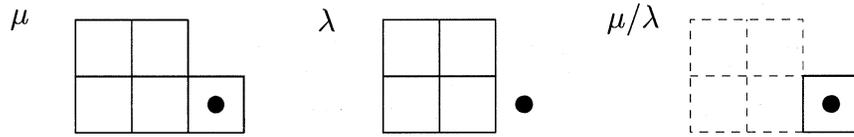


Figure 1.2 Coins intérieurs, coins extérieurs et diagramme gauche

ensemble est *la longueur du bras* de la case  $c$  et est notée  $a_\mu(c) = a(c)$ . De façon similaire on a que *la jambe* de  $c$  est l'ensemble des cases situées sur la même colonne et strictement en haut de la case  $c$ . La cardinalité de cet ensemble, dite *la longueur de la jambe* de  $c$ , est notée  $l_\mu(c) = l(c)$ .

*Exemple 4 :* Dans la figure 1.3, on voit que la case  $(2, 1)$  du diagramme 77443 a un bras de longueur  $a(2, 1) = 4$  et une jambe de longueur  $l(2, 1) = 3$

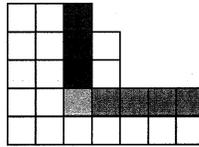


Figure 1.3 Bras et jambes d'un diagramme

Pour un diagramme  $\mu$  on pose  $n(\mu) := \sum_{c \in \mu} l(c)$ . Puisque les jambes d'un diagramme sont les bras de son diagramme conjugué alors  $n(\mu') = \sum_{c \in \mu} a(c)$ . De plus, pour  $c = (i, j)$ , on a  $a(c) = \mu_{j+1} - (i + 1)$  et  $l(c) = \mu'_{i+1} - (j + 1)$ , et donc :

$$n(\mu') = \sum_{k=1}^{\ell(\mu)} \sum_{i=0}^{\mu_k-1} \mu_k - i - 1 = \sum_{k=1}^{\ell(\mu)} \sum_{i=0}^{\mu_k-1} i = \sum_{(i,j) \in \mu} i. \quad (1.1)$$

De façon analogue, on voit que  $n(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} j$ .

Pour  $D$  un diagramme et  $V$  un ensemble de valeurs, on dit d'une fonction  $\tau : D \rightarrow V$  que c'est un *tableau* de forme  $D$ . Habituellement,  $V$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ . Si les entrées du tableau sont strictement croissantes le long des colonnes et croissantes le long des lignes, alors on dit que c'est un *tableau semi-standard*. De plus, si  $\tau$  est une bijection telle que :

$$\tau : D \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}, \text{ avec } n = \#D$$

on dit qu'on a un *tableau standard*.

*Exemple 5 :* La figure 1.4 montre différents types de tableaux de forme  $221 \vdash 5$ . Un tableau (à gauche), un tableau semi-standard (au centre) et un tableau standard (à droite) :

5		5		5	
3	63	2	3	2	4
111	9	1	1	1	3

Figure 1.4 Tableaux

On dit que  $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_k$  est le *remplissage* de  $\tau$  si, pour tout  $j$ , on a  $\lambda_j$  cases dont le contenu est  $j$ . Le remplissage d'un tableau est, en général, donné par une composition, mais on n'aura besoin que des remplissages qui correspondent à des partages dans la définition qui suit. Pour deux partages  $\mu$  et  $\lambda$ , le nombre de tableaux de forme  $\mu$  et de remplissage  $\lambda$  est donné par le *nombre de Kostka*, noté  $K_{\mu, \lambda}$ .

*Exemple 6 :* La figure 1.5 montre tous les tableaux de forme  $32$  et de remplissage  $221$ . Ces tableaux contiennent deux 1, deux 2 et un 3. Donc  $K_{32, 221} = 2$ .

2	2	
1	1	3

2	3	
1	1	2

Figure 1.5 Remplissage correspondant au nombre de Kostka  $K_{32,221}$ 

L'ordre de la dominance est un ordre partiel important sur les partages de  $n$ . On le note  $\mu \preceq \lambda$  et cela correspond à dire que :

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k, \text{ où } \lambda_k = 0 \text{ si } \ell(\lambda) < k,$$

pour tout  $k$ .

Un autre ordre partiel sur les partages de  $n$  est *l'ordre du raffinement*. Pour les partages  $\mu = \mu_1 \cdots \mu_m$  et  $\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_k$  on dit que  $\lambda$  est plus petit que  $\mu$  pour l'ordre du raffinement, noté  $\lambda \trianglelefteq \mu$ , s'il existe,  $A_1, \cdots, A_m$ ,  $m$  sous ensembles non vides disjoints de  $\{1, \cdots, k\}$  tels que pour tous  $j$  on a :

$$\sum_{l \in A_j} \lambda_l = \mu_j.$$

On remarque que, par définition, si  $\lambda \trianglelefteq \mu$  on doit avoir  $|\lambda| = |\mu|$ .

*Exemple 7 :* Pour l'ordre de la dominance,  $321 \prec 42$ , car :

$$3 \leq 4, 3 + 2 < 4 + 2 \text{ et } 3 + 2 + 1 \leq 4 + 2 + 0$$

Pour l'ordre du raffinement, on a  $3321 \triangleleft 54$ , car  $3 + 2 = 5$  et  $3 + 1 = 4$

Le lemme qui suit démontre que ces deux ordres partiels peuvent être complétés en un même ordre total. Soient  $\mu = \mu_1 \cdots \mu_m$  et  $\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_l$  des partages de  $n$ . On dit

que  $\lambda$  est plus petit que  $\mu$  pour l'ordre lexicographique, noté  $\lambda <_{\text{lex}} \mu$ , s'il existe  $k$  tel que  $\lambda_j = \mu_j$ , pour tout  $j < k$  et  $\lambda_k < \mu_k$ .

*Lemme 1 :* Soient  $\mu = \mu_1 \cdots \mu_m$  et  $\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_l$  des partages. On a :

(i) Si  $\mu \preceq \lambda$  alors  $\mu \leq_{\text{lex}} \lambda$ .

(ii) Si  $\mu \preceq \lambda$  alors  $\mu \preceq \lambda$ .

*Démonstration.* On montre d'abord (i). Le cas  $\mu = \lambda$  est évident. On peut donc supposer que  $\mu \prec \lambda$ . On prend alors le plus petit  $k$  tel que :

$$(\forall j < k) \mu_1 + \cdots + \mu_j = \lambda_1 + \cdots + \lambda_j \text{ et} \quad (1.2)$$

$$\mu_1 + \cdots + \mu_k < \lambda_1 + \cdots + \lambda_k.$$

En prenant  $j = k - 1$  et en soustrayant 1.2 de chaque côté de l'inégalité, on obtient alors  $\mu_k < \lambda_k$ . En considérant les partages  $\tilde{\mu} = \mu_1, \dots, \mu_{k-1}$  et  $\tilde{\lambda} = \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$  on trouve  $\tilde{\mu} = \tilde{\lambda}$ . On a ainsi  $\mu_j = \lambda_j$  pour tout  $j < k$  et donc  $\mu <_{\text{lex}} \lambda$ .

Pour (ii) on procède par contradiction. On suppose qu'il existe  $\mu$  et  $\lambda$  tels que  $\mu \preceq \lambda$  et  $\mu \not\preceq \lambda$  et soit  $k$  le plus petit entier tel que :

$$\mu_1 + \cdots + \mu_{k-1} \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \text{ et}$$

$$\mu_1 + \cdots + \mu_k > \lambda_1 + \cdots + \lambda_k.$$

Un tel  $k$  existe puisque  $\mu \not\preceq \lambda$  et  $\mu_1 \leq \lambda_1$  par définition de l'ordre du raffinement.

On a donc :

$$\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{k-1} \geq \mu_k > \lambda_k \geq \lambda_{k+1} \geq \cdots \geq \lambda_l.$$

Par définition de l'ordre du raffinement, il existe,  $A_1, \dots, A_l$ ,  $l$  sous ensembles non vides disjoints de  $\{1, \dots, m\}$  tels que pour tout  $j$ , on a :  $\sum_{i \in A_j} \mu_i = \lambda_j$ . Donc

pour tout  $r \leq k$ , il existe  $j < k$  tel que  $r \in A_j$ , car  $\mu_r > \lambda_k$ . On a alors que  $\{1, \dots, k\} \subseteq \cup_{i=1}^{k-1} A_i$ . Donc :

$$\mu_1 + \dots + \mu_k \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_k.$$

D'où la contradiction. ■

La réciproque des deux assertions est fautive en générale. En effet, on a que  $33 <_{\text{lex}} 411$  et  $33 \not\prec 411$ . Ainsi que  $33 \prec 42$  et  $33 \not\triangleleft 42$ .

À la fin de la section suivante, on propose un ordre monomial sur les fonctions symétriques élémentaires. Pour l'instant, le lien entre les partages et le groupe symétrique est présenté.

## 1.2 Théorie des fonctions symétriques

Il semblerait que les polynômes symétriques furent introduits en 1629 par Albert Girard dans «Invention nouvelle en l'algèbre». Le théorème fondamental des polynômes symétriques fut d'abord prouvé par Albert Girard, bien qu'il soit habituellement associé à Isaac Newton qui ne connaissait pas les travaux d'Albert Girard (Funkhouser, 1930).

Dans cette section, les polynômes symétriques ainsi que les fonctions symétriques seront définis. Certaines bases, certains changements de base ainsi que des outils liés à la théorie seront présentés.

Les fonctions symétriques sont liées de près au groupe symétrique,  $\mathbb{S}_n$ , qui est le groupe des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ . Une permutation,  $\sigma$ , peut s'écrire comme

une composition de cycles à support disjoint :

$$\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_p) \cdots (s_1, s_2, \dots, s_k) \in \mathbb{S}_n.$$

On associe alors à  $\sigma$  un partage de  $n$ ,  $\mu = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ , pour représenter sa structure cyclique, c'est-à-dire que pour tout  $k$ ,  $\sigma$  a  $d_k$  cycles de longueur  $k$ . On se rappelle aussi que la structure cyclique d'un élément du groupe symétrique est stable pour l'action par conjugaison. À savoir que pour tout  $\tau \in \mathbb{S}_n$ , on a :

$$\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(a_1), \tau(a_2), \dots, \tau(a_p)) \cdots (\tau(s_1), \tau(s_2), \dots, \tau(s_k)).$$

Les classes de conjugaisons sont entièrement caractérisées par la structure, on peut donc les indexer par les partages. Le nombre d'éléments de la classe de  $\mu$  est  $\frac{n!}{z_\mu}$  où :

$$z_\mu = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n} d_1! d_2! \dots d_n!.$$

Pour le vérifier, il suffit de constater qu'il y a  $\binom{n}{\mu} = \frac{n!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_\ell(\mu)!}$  façons de choisir les éléments pour chaque cycle. Les cycles étant équivalents par rotation cyclique, il suffit de fixer le premier élément du cycle pour trouver  $(k-1)!$  façons différentes de disposer des éléments d'un  $k$ -cycle. Finalement, comme l'ordre des cycles n'est pas important il reste à diviser par  $d_1! d_2! \dots d_n!$ .

Les polynômes symétriques peuvent maintenant être définis.

*Définition 1 :* Soit  $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  un polynôme à plusieurs variables sur le corps commutatif  $\mathbb{K}$  de caractéristique 0. On considère l'action de groupe du groupe symétrique  $\mathbb{S}_n$  sur l'anneau  $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  définie par :

$$\sigma.f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

On dit que  $f$  est un *polynôme symétrique* si, pour tout élément  $\sigma$  du groupe symétrique  $\mathbb{S}_n$ , on a  $\sigma.f = f$ . On dénote cet ensemble  $\Lambda_{\mathbb{K}}$ . S'il est important de souligner le nombre de variables, on écrit  $\Lambda_{\mathbb{K}, n}$  ou simplement  $\Lambda_n$ , si  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ .

Cette théorie fonctionne également si le corps est remplacé par un anneau commutatif de caractéristique quelconque. Une personne curieuse à ce sujet peut se référer au livre de Macdonald (Macdonald, 1995).

*Définition 2 :* On dit d'un polynôme, dont tous les termes sont de degré  $d$ , qu'il est *homogène* de degré  $d$ . Une *composante homogène* de  $\Lambda_{\mathbb{K},n}$ , de degré  $d$ , notée  $\Lambda_{\mathbb{K},n}^d$ , est l'ensemble de tous les polynômes homogènes de degré  $d$  contenus dans  $\Lambda_{\mathbb{K},n}$ .

Il est clair que tout polynôme dans  $\Lambda_{\mathbb{K},n}$  peut s'écrire comme une somme de polynômes homogènes. De plus, il est évident, par définition, que les différentes composantes homogènes de  $\Lambda_{\mathbb{K},n}$  n'ont aucun élément en commun. L'ensemble des polynômes symétriques à  $n$  variables sur le corps  $\mathbb{K}$  est donc un anneau gradué. C'est-à-dire que :

$$\Lambda_{\mathbb{K},n} = \bigoplus_{0 \leq d} \Lambda_{\mathbb{K},n}^d.$$

La proposition qui suit donne une base pour chaque composante homogène de  $\Lambda_{\mathbb{K}}$ . Pour alléger la notation, dorénavant, on utilisera le corps  $\mathbb{Q}$ , mais ceci vaut pour tout anneau.

*Définition 3 :* Pour  $X = (x_1, x_2, \dots)$ , on dit que les éléments de  $\{m_\mu(X)\}_{\mu \vdash d, d \in \mathbb{N}}$  sont des fonctions symétriques *monomiales*, où pour  $\mu = \mu_1, \dots, \mu_k$  on pose :

$$m_\mu(X) := \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \\ \text{distinct}}} x_{i_1}^{\mu_1} x_{i_2}^{\mu_2} \cdots x_{i_k}^{\mu_k}.$$

La somme est prise sur l'ensemble des choix de  $k$  éléments distincts de  $\mathbb{N}^*$ . De plus, on fait référence à cet ensemble comme étant la *base monomiale*.

*Exemple 8 :*

$$m_{21}(X) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + \cdots + x_2^2 x_3 + x_2^2 x_4 + \cdots + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + \cdots + x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2 + \cdots$$

$$m_2(\cdots, x, y, z, \cdots) m_1(\cdots, x, y, z, \cdots) = (\cdots + x^2 + y^2 + z^2 + \cdots)(\cdots + x + y + z + \cdots)$$

donc

$$m_2(\cdots, x, y, z, \cdots) m_1(\cdots, x, y, z, \cdots) \neq m_{21}(\cdots, x, y, z, \cdots)$$

*Proposition 1 :* La composante homogène  $\Lambda_n^d$  admet pour base  $\{m_\mu(X)\}_{\mu \vdash d, \ell(\mu) \leq n}$ .

*Démonstration.* Tous les éléments de  $\{m_\mu(X)\}_{\mu \vdash d, \ell(\mu) \leq n}$  sont symétrique par construction donc ils sont inclus dans  $\Lambda_n$ . D'autre part, le théorème fondamental de l'algèbre a pour conséquence que l'ensemble des monômes forme une base linéaire de l'espace vectoriel  $\mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ . De plus,  $\mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]$  est un espace gradué dont la composante homogène de degré  $d$  a pour base les monômes en les variables  $x_1, \cdots, x_n$  de degré  $d$ . Les éléments de  $\{m_\mu(X)\}_{\mu \vdash d, \ell(\mu) \leq n}$  sont donc linéairement indépendants puisque les monômes le sont et aucun monôme ne se trouve dans deux éléments distincts de  $\{m_\mu(X)\}_{\mu \vdash d, \ell(\mu) \leq n}$ . Il reste alors à montrer que l'ensemble des monômes  $\{m_\mu(X)\}_{\mu \vdash d, \ell(\mu) \leq n}$  engendre  $\Lambda_n^d$ .

Soit  $f \in \Lambda_n^d$ . On considère le premier terme de  $f$ ,  $c x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ , où pour tout  $i$ ,  $a_i \in \mathbb{N}$  et  $c \in \mathbb{Q}$ . Puisque  $f$  est symétrique alors pour tout  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  le terme  $c x_{\sigma(1)}^{a_1} x_{\sigma(2)}^{a_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{a_n}$  est un terme de  $f$ . Soit  $\mu = \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$  le partage représentant les termes strictement positifs de  $(a_1, \cdots, a_n)$  réordonnés en ordre décroissant. On a donc, par ce qui précède, que tous les termes de  $c m_\mu$  sont dans  $f$  et donc  $f - c m_\mu$  a un nombre de termes strictement inférieur à  $f$ . Après un nombre fini d'étapes, puisque  $\Lambda_n^d$  est de dimension finie, on arrive finalement à  $\tilde{f} = 0$ . On a donc que  $f$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $\{m_\mu(X)\}_{\mu \vdash d, \ell(\mu) \leq n}$ , ce qui prouve le résultat. ■

Pour la théorie générale, un argument de limite inverse permet de passer à une infinité dénombrable de variables  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ . L'utilisation d'une infinité de variables fait en sorte que l'on a plus, techniquement, des polynômes. On dira plutôt que ce sont des *fonctions symétriques*. On aborde, plus loin, à l'aide du deuxième exemple de la définition 5, en quoi ce passage à la limite inverse est simplificateur.

Le passage à la limite inverse procède comme suit. On considère les restrictions aux  $\Lambda_n$  des projections  $\pi_{n,k} : \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k]$  avec  $k \leq n$ , définie par :

$$\pi_{n,k}(m_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n)) = m_\mu(x_1, x_2, \dots, x_k), \text{ si } \ell(\mu) \leq k \text{ et } 0 \text{ si } \ell(\mu) > k$$

Il est facile de vérifier que ce sont des morphismes. De plus, ces morphismes sont injectifs dès que le degré  $d$  est plus petit que le nombre de variables, et surjectifs dès que  $n \geq k$ . On a donc que la restriction au degré  $d$  du morphisme  $\pi_{n,k}^d$  est bijective dès que  $n \geq k \geq d$ .

Il en résulte un système projectif d'ensemble, car pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $\pi_{n,n}^d = \text{id}_{\Lambda_n}$  ; et si  $n \geq k \geq l$  alors  $\pi_{k,l}^d \circ \pi_{n,k}^d = \pi_{n,l}^d$ .

On considère alors la composante homogène obtenue par la limite inverse qui sera notée :

$$\Lambda^d = \varprojlim \Lambda_n^d$$

Ainsi les éléments de  $\Lambda^d$  sont des suites de polynômes homogènes de degré  $d$ .

On pose alors  $\pi_n^d$  la projection qui donne le  $n^e$  terme de cette suite. On a donc une base,  $\{m_\mu\}_{\mu \vdash d}$ , de  $\Lambda^d$ , définie par  $\pi_n^d(m_\mu) = m_\mu(x_1, \dots, x_n)$  pour  $n \geq d$ . Ainsi  $\Lambda^d$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension  $p(d)$ , le nombre de partages de  $d$  (ou un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $p(d)$  si on prend  $\mathbb{Z}$  plutôt que  $\mathbb{Q}$ ).

On peut maintenant définir l'anneau des fonctions symétriques  $\Lambda = \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda^d$ . On remarque que c'est un anneau gradué par construction et qu'il admet pour base  $\{m_\mu\}_{\mu \vdash d, d \in \mathbb{N}}$ , définie par  $\pi_n(m_\mu) = m_\mu(x_1, \dots, x_n)$  où  $\pi_n = \bigoplus_{d \geq 0} \pi_n^d$ . Il importe aussi de remarquer que les éléments de  $\Lambda$  peuvent tous s'écrire comme une somme finie de  $m_\mu$ . Il est donc important de faire la limite inverse sur les composantes homogènes, car  $\tilde{\Lambda} = \varprojlim \Lambda_n$  possède des sommes infinies de  $m_\mu$ , contrairement à  $\bigoplus_{d \geq 0} \varprojlim \Lambda_n^d$ . Pour plus de détails se référer au livre de Macdonald (Macdonald, 1995).

De façon générale, bien que plusieurs des résultats soient vrais pour tout anneau, dans ce mémoire, on utilise principalement l'anneau des fonctions symétriques avec coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , noté  $\Lambda$ , ainsi que les fonctions symétriques avec coefficients dans  $\mathbb{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$  qui seront noté  $\Lambda_{[q,t,1/q,1/t]}$ . On aura surtout besoin de travailler avec le corps des fractions rationnelles  $\mathbb{Q}(q, t)$ , que l'on dénote  $\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)}$ .

L'anneau de fonctions symétriques a plusieurs bases qui ne dépendent pas du choix de l'anneau. On présente ici les quatre plus connues. On ne montrera pas que ce sont des bases. Pour plus de détails voir (Macdonald, 1995) ou (Sagan, 2001). La première base est d'une grande importance dans ce mémoire.

*Définition 4 :* La base des fonctions de Schur est l'ensemble  $\{s_\mu(X)\}_{\mu \vdash n, n \in \mathbb{N}}$ , où pour  $\mu$  tel que  $|\mu| = n$ , on pose :

$$s_\mu(X) := \sum_{\tau} x_{\tau},$$

la somme ayant lieu sur l'ensemble des tableaux semi-standard  $\tau : \mu \rightarrow X$  pour lequel on pose  $x_\tau = \prod_{c \in D(\mu)} x_{\tau(c)}$ .

*Exemple 9 :* Pour  $x < y < z$ , on a :

$$\begin{aligned}
 s_{21}(\cdots, xy, z, \cdots) &= \cdots + \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline x \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline x \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline x \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline x \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline y \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline x \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline x \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline \end{array} + \cdots \\
 &= \cdots + x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz + \cdots \\
 &= m_{21}(X) + 2m_{111}(X)
 \end{aligned}$$

Il n'est cependant pas clair par cette définition que ces polynômes sont symétriques quelque soit  $\mu$ . Il existe une définition équivalente qui rend la symétrie évidente, mais la définition énoncée sera plus utile pour la suite.

Les bases suivantes sont *multiplicatives*, c'est-à-dire qu'on a  $f_\mu = f_{\mu_1} f_{\mu_2} \cdots f_{\mu_k}$  pour  $\mu = \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ . Les exemples précédents montrent que la base monomiale n'est pas multiplicative. C'est aussi vrai pour la base des fonctions de Schur.

*Définition 5 :* La base des fonctions symétriques *élémentaires*,  $\{e_\mu(X)\}_{\mu \vdash n, n \in \mathbb{N}}$ , obtenue en posant, pour  $\mu = \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ , que :

$$e_n(X) := m_{\underbrace{11 \cdots 1}_n} = m_{1^n},$$

$$e_\mu(X) := e_{\mu_1}(X) \cdots e_{\mu_k}(X) \text{ et } e_0 := 1$$

*Exemple 10 :*

$$e_1(\cdots, x, y, z, \cdots) = \cdots + x + y + z + \cdots$$

$$e_2(\cdots, x, y, z, \cdots) = \cdots + xy + xz + yz + \cdots$$

$$e_{21} = e_2 e_1$$

$$= (\cdots + xy + xz + yz + \cdots)(\cdots + x + y + z + \cdots)$$

$$= \cdots + x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz + \cdots$$

L'exemple qui suit met en relief l'intérêt de passer à une infinité de variables. Un nombre insuffisant de variables donnerait une somme vide et obligerait à distinguer plusieurs cas.

*Exemple 11 :*  $e_4(x, y, z, w) = xyzw$  et  $e_4(x, y, z) = 0 = e_4(x, y, z, 0)$ .

La prochaine base est la somme de tous les monômes d'un degré donné

*Définition 6 :* La base des fonctions symétriques *homogènes complètes* est l'ensemble  $\{h_\mu(X)\}_{\mu \vdash n, n \in \mathbb{N}}$ , où pour  $\mu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  on définit :

$$h_n(X) := \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(X) \text{ et}$$

$$h_\mu(X) := h_{\mu_1}(X) \cdots h_{\mu_k}(X).$$

Il importe de remarquer qu'il est d'usage d'omettre le mot «complète». On réfère donc aux éléments de cette base en les nommant fonctions symétriques homogènes.

*Exemple 12 :* Pour  $X = \{x, y, z, \dots\}$  :

$$\begin{aligned} h_{21}(X) &= m_2(X)m_1(X) + m_{11}(X)m_1(X) \\ &= x^3 + 2x^2y + 2x^2z + 2xy^2 + 2xz^2 + y^3 + 2y^2z + 2yz^2 + z^3 + 3xyz + \dots \end{aligned}$$

La base qui suit dépend du choix de l'anneau. Cependant, elle est une base pour tout anneau contenant un sous-anneau isomorphe à  $\mathbb{Q}$ .

*Définition 7 :* La base des *sommes de puissance* est l'ensemble  $\{p_\mu(X)\}_{\mu \vdash n, n \in \mathbb{N}}$ , où pour  $\mu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  on définit :

$$p_n(X) := \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^n \text{ et } p_\mu(X) := p_{\mu_1}(X) \cdots p_{\mu_k}(X).$$

*Exemple 13 :*

$$p_{2,1}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) = x^3 + x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^3 + y^2z + yz^2 + z^3$$

L'exemple qui suit montre que ce n'est pas une base de  $\Lambda_{\mathbb{Z}}$ .

*Exemple 14 :*

$$x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 + xyz = \frac{p_3}{3} + \frac{p_{21}}{2} + \frac{p_{111}}{6}$$

En général, lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion, on dénote  $f_{\mu}(X)$  par  $f_{\mu}$  (avec les variables sous-entendues).

Dans le dernier exemple, la partie de gauche de l'égalité est, en fait,  $s_3$ . Plusieurs résultats classiques permettent le passage d'une base à une autre. Ainsi, le changement de la base des fonctions de Schur à la base des fonctions symétriques homogènes,  $h_{\mu}$ , découle de l'identité de Jacobi-Trudi :

$$s_{\mu} = \det((h_{\mu_i - i + j})_{i,j}),$$

où  $h_0 = 1$  et  $h_k = 0$  pour tout  $k < 0$ .

De façon analogue l'identité de Jacobi-Trudi duale permet le passage de la base des fonctions de Schur à la base des fonctions symétriques élémentaires. Cette identité se formule comme suit :

$$s_{\mu'} = \det((e_{\mu_i - i + j})_{i,j}),$$

où  $e_0 = 1$  et  $e_k = 0$  pour tout  $k < 0$ .

Dans (Sagan, 2001) on apprend que le résultat est dû à Charles Gustave Jacob Jacobi qui l'a prouvé en 1841. Une belle preuve combinatoire introduite par Lindström en 1973 et Gessel-Viennot en 1985 se trouve dans (Bergeron, 2009) et (Sagan, 2001).

*Exemple 15 :* Pour  $\lambda = \lambda' = 21$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} e_2 & e_3 \\ e_0 & e_1 \end{pmatrix} &= e_2 e_1 - e_3 e_0 \\
 &= e_{21} - e_3 \\
 &= (m_{21} + 3m_{111}) - m_{111} \\
 &= m_{21} + 2m_{111} \\
 &= s_{21}
 \end{aligned}$$

Le prochain changement de base est lié aux nombres de Kostka. On se rappelle que les nombres de Kostka,  $K_{\mu,\lambda}$ , donnent le nombre de tableaux de forme  $\mu$  et de remplissage  $\lambda$ . En se basant sur les définitions 3 et 4, on obtient le passage de la base de Schur à la base monomiale :

$$s_{\mu} = \sum_{\lambda \vdash n} K_{\mu,\lambda} m_{\lambda}.$$

Il est fréquent que des objets combinatoires permettent de décrire un changement de base. En utilisant les tableaux de rubans (ceci est une traduction libre du terme «border-strip tableau» utilisé par Richard Stanley), l'auteur de (Stanley, 1999) montre que le passage des fonctions de Schur aux sommes de puissance est donné par :

$$s_{\mu} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_{\mu}} \chi^{\mu}(\lambda) p_{\lambda}, \quad (1.3)$$

où  $\chi^{\mu}(\lambda)$  est le nombre de tableaux de rubans de forme  $\mu$  et de remplissage  $\lambda$ . Bien que les tableaux de rubans n'ont pas été présentés, dans la section 1.4 on verra que les  $\chi^{\mu}$  sont les caractères irréductibles de  $S_n$ .

Pour les deux changements de base suivants, les preuves sont généralement faites à l'aide des fonctions génératrices. Dont l'utilisation est justifiée par un argument

qu'on peut trouver dans (Macdonald, 1995). Le passage de la base des fonctions symétriques homogènes aux sommes de puissances est donné par :

$$h_n(X) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{p_\mu(X)}{z_\mu}, \quad (1.4)$$

qu'on étend ensuite à  $h_\mu$  par multiplicativité.

L'écriture des fonctions symétriques élémentaires dans la base des sommes de puissances s'obtient de façon analogue via la formule :

$$e_n(X) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{(-1)^{n-\ell(\mu)} p_\mu(X)}{z_\mu}. \quad (1.5)$$

La similitude entre les deux dernières égalités provient de l'existence de l'endomorphisme involutif suivant.

L'application  $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$  est définie sur les éléments de la base des fonctions symétriques homogènes de  $\Lambda$  par  $\omega(h_\mu[X]) = e_\mu[X]$ . C'est un automorphisme d'anneau qui est involutif. Il est facile d'étendre  $\omega$  en un automorphisme de  $\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)}$  ou  $\Lambda_{[q,t,1/q,1/t]}$ , ceci sera abordé juste avant le lemme 3.

Cette application permet de passer de la base des fonctions symétriques homogènes à la base des fonctions symétriques élémentaires. Le lemme qui suit montre que l'application de  $\omega$  à une fonction développée dans la base de Schur correspond à conjuguer les indices des fonctions de Schur.

*Lemme 2 :* Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mu \vdash n$  alors  $\omega(s_\mu) = s_{\mu'}$  et  $\omega(p_\mu) = (-1)^{n-\ell(\mu)} p_\mu$ .

*Démonstration.* Pour les sommes de puissances, par l'équation 1.4 on a :

$$e_n(X) = \omega(h_n(X)) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{\omega(p_\mu(X))}{z_\mu}$$

et par l'équation 1.5 :

$$e_n(X) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{(-1)^{n-\ell(\mu)} p_\mu(X)}{z_\mu}.$$

Une petite récurrence facile montre bien que par l'unicité de l'écriture dans une base, on a bien  $\omega(p_\mu) = (-1)^{n-\ell(\mu)} p_\mu$ .

Pour  $\omega(s_\mu) = s_{\mu'}$ , le résultat découle des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \omega(s_\mu) &= \omega(\det((h_{\mu_i-i+j})_{i,j})) \\ &= \det((\omega(h_{\mu_i-i+j}))_{i,j}), \text{ par linéarité,} \\ &= \det((e_{\mu_i-i+j})_{i,j}) \\ &= s_{\mu'} \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve ■

Le produit scalaire de Hall est défini en posant :

$$\langle p_\mu, p_\lambda \rangle = z_\mu \delta_{\lambda, \mu},$$

où  $\delta_{\lambda, \mu}$  est le symbole de Kronecker valant 1 si  $\lambda = \mu$  et 0 sinon.

Dans la section 1.3, on verra que la matrice de passage des fonctions de Schur aux sommes de puissances est la table de caractères du groupe symétrique. Comme les caractères irréductibles sont orthonormaux, il s'en suit que :

$$\langle s_\mu, s_\lambda \rangle = \delta_{\lambda, \mu}.$$

Il est facile de vérifier que  $\omega$  est une isométrie pour ce produit scalaire.

Afin d'alléger les preuves, il pourrait s'avérer utile d'avoir une notion de monôme dominant dans l'algèbre  $\mathbb{Q}[e_1, e_2, e_3, \dots]$ . Ceci s'avérera particulièrement utile dans le chapitre 3.

*Définition 8 :* Soit  $g$  un polynôme symétrique écrit dans la base des fonctions symétriques élémentaires. On dit que  $e_\mu$  est le *monôme dominant* de  $g$ , noté  $M(g) = e_\mu$ , si pour tout terme à coefficient non nul l'indice du monôme  $e_\lambda$  a l'une des trois propriétés suivantes :

$$|\lambda| < |\mu| \tag{1.6}$$

$$|\lambda| = |\mu| \text{ et } \ell(\lambda) > \ell(\mu) \tag{1.7}$$

$$|\lambda| = |\mu| \text{ et } \ell(\lambda) = \ell(\mu) \text{ et } \lambda <_{lex} \mu \tag{1.8}$$

Ces propriétés sont mutuellement exclusives. Il est, également, clair qu'il ne s'agit pas ici de monômes au sens usuel dans l'anneau  $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, \dots]$ , mais d'une généralisation du concept de monôme dominant dans l'algèbre  $\mathbb{Q}[e_1, e_2, e_3, \dots]$ . On dit que cet ordre est l'*ordre des fonctions symétriques élémentaires*.

Comme on le verra plus tard, les fonctions de Schur permettent d'encoder les représentations irréductibles du groupe symétrique. Plus généralement, ce codage associe à toute représentation de  $\mathbb{S}_n$  une fonction symétrique de façon compatible avec la somme. Il en résulte un intérêt particulier pour les fonctions symétriques dont le développement est positif dans cette base, puisque cela traduit le résultat fondamental de la théorie de la représentation qui affirme que toute représentation est une somme d'irréductibles.

### 1.3 Schur positivité

La Schur positivité est une propriété difficile à obtenir. François Bergeron a calculé que la probabilité qu'une fonction symétrique à coefficients positifs dans son développement dans la base des fonctions symétriques monomiales ait également des coefficients positifs dans la base des fonctions de Schur est donnée par la suite

de fractions  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{9}, \frac{1}{560}, \frac{1}{480480}, \frac{1}{1027458432000}, \dots)$ . Bien entendu, la probabilité diffère pour des coefficients dans  $\mathbb{N}[q, t]$ , mais ceci donne une idée de la rareté des fonctions symétriques Schur positives. Pourtant, les opérateurs qui génèrent des expressions à coefficients dans  $\mathbb{N}[q, t]$  dans la base des fonctions de Schur sont recherchées, car elles sont liées à la théorie de la représentation et aux variétés de Schubert.

La Schur positivité est définie avec la même terminologie que (Bergeron *et al.*, 1999).

*Définition 9 :* Une expression est *Schur positive* si son développement dans la base des fonctions de Schur n'a que des coefficients dans  $\mathbb{N}[q, t]$ . De façon analogue, elle est *virtuellement Schur positive* si son développement dans la base des fonctions de Schur n'a que des coefficients qui sont soit *tous négatifs* ou *tous positifs* dans l'anneau des polynômes de Laurent  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ .

Il est possible d'étendre cette notion à des opérateurs de la façon suivante :

*Définition 10 :* Un opérateur,  $N$ , est *Schur positif* pour la base  $B = \{b_\mu\}_{\mu \vdash n}$  si  $N(b_\mu)$  est une expression Schur positive, pour tout  $\mu$  partage de  $n$  et pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . De façon analogue, on dit que  $N$  est *virtuellement Schur positif* pour la base  $B = \{b_\mu\}_{\mu \vdash n}$  si  $N(b_\mu)$  est une expression virtuellement Schur positive, pour tout  $\mu \vdash n$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Autrement dit, un opérateur  $N$  est virtuellement Schur positif pour  $B$  s'il existe des facteurs de correction qui dépendent de  $\mu$  et qui rendent  $N(b_\mu)$  Schur positif.

*Exemple 16 :* Soit  $N$  tel que  $N(s_{11}) = \frac{-4q^2}{t}s_{11} + \frac{-t}{q}s_2$  et  $N(s_2) = qs_{11} + ts_2$  est virtuellement Schur positif pour  $n = 2$ , car  $(-qt)N(s_{11})$  et  $N(s_2)$  sont Schur positifs.

Par extension, on peut définir la Schur polynomialité qui sera utile pour caractériser les opérateurs propres de Macdonald dans le chapitre suivant.

*Définition 11 :* Un opérateur,  $N$ , est dit *Schur polynomial*, pour la base  $\{b_\mu\}_{\mu \vdash n}$ , si pour tout  $\mu \vdash n$  les coefficients de  $N(b_\mu)$  dans la base des fonctions de Schur sont tous des polynômes de Laurent dans  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ .

La Schur positivité virtuelle implique la Schur polynomialité. Ainsi un opérateur qui n'est pas Schur polynomial n'est pas virtuellement Schur positif. Ceci est en général plus facile à démontrer.

À moins d'avis contraire, dans ce mémoire on prend la base  $\{s_\mu\}_{\mu \vdash n}$ . On dit alors simplement virtuellement Schur positif, Schur positif ou Schur polynomial, dans ce cas.

Les notions d'être positif pour le développement dans la base des fonctions symétriques élémentaires ou la base des fonctions symétriques homogènes sont plus fortes, car leurs matrices de passages vers les fonctions de Schur sont positives. Cependant, on ne discutera pas de ces propriétés dans ce mémoire.

Il existe plusieurs problèmes ouverts liés à la Schur positivité. Une des méthodes généralement utilisées pour démontrer la Schur positivité consiste à montrer que l'expression correspond à la transformée de Frobenius ou au caractère de Frobenius d'un certain espace.

## 1.4 Transformée de Frobenius

La théorie de la représentation des groupes linéaires ainsi que la théorie des caractères ont été introduites par Ferdinand Georg Frobenius à la toute fin du 19<sup>e</sup> siècle. Ces théories se sont montrées essentielles dans l'analyse et la compréhension des groupes, des espaces vectoriels et des modules. La transformée de Frobenius provient de ces théories. Dans le cas où le groupe considéré est  $\mathbb{S}_n$ , elle est la porte qui sépare la théorie de la représentation et la théorie des fonctions symétriques (Bourbaki, 2007).

Dans cette section, les notions essentielles à la compréhension de ce qu'est la transformée de Frobenius seront abordées. Le lien avec la Schur positivité est aussi expliqué.

Soient  $G$  un groupe fini et  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Une *représentation*  $\rho$  de  $G$  est un morphisme de  $G$  dans  $GL(V)$ . Le *caractère* d'une représentation  $\chi^V$  est une fonction de  $G$  dans  $\mathbb{K}$  définie par  $\chi^V(g) = \text{trace}(\rho(g))$ .

Soit  $W$  un sous-espace de  $V$ . S'il existe un morphisme,  $\hat{\rho}$ , de  $G$  dans  $GL(W)$  tel que pour tout  $w$  dans  $W$  et pour tout  $g$  dans  $G$  on a  $\hat{\rho}(g)w = \rho(g)w$  on dit alors que  $\hat{\rho}$  est une *sous-représentation* de  $\rho$ . Si pour tout sous-espace propre,  $W$ , de  $V$ , il n'existe pas de sous-représentation de  $\rho$ , on dit que  $\rho$  est une *représentation irréductible* et que le caractère  $\chi^V$  associé  $\rho$  est un *caractère irréductible*.

Par définition de représentation on doit avoir  $\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1}$ . La trace de  $\rho(g)$  (respectivement  $(\rho(h))^{-1}\rho(g)\rho(h)$ ) est le coefficient de  $\lambda^{\dim(V)-1}$  du polynôme caractéristique de  $\rho(g)$  (respectivement de  $(\rho(h))^{-1}\rho(g)\rho(h)$ ). Le polynôme caractéristique

est invariant par conjugaison car :

$$\begin{aligned}
 \det(\rho(g) - \lambda \text{id}) &= \det(\rho(h))^{-1}(\det(\rho(g) - \lambda \text{id})\det(\rho(h))) \\
 &= \det((\rho(h))^{-1})(\det(\rho(g) - \lambda \text{id})\det(\rho(h))) \\
 &= \det((\rho(h))^{-1}(\rho(g) - \lambda \text{id})\rho(h)) \\
 &= \det((\rho(h))^{-1}\rho(g)\rho(h) - \rho(h)^{-1}\lambda \text{id}\rho(h)) \\
 &= \det((\rho(h))^{-1}\rho(g)\rho(h) - \lambda \text{id})
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \chi(h^{-1}gh) &= \text{trace}(\rho(h^{-1}gh)) \\
 &= \text{trace}((\rho(h))^{-1}\rho(g)\rho(h)) \\
 &= \text{trace}(\rho(g)) \\
 &= \chi(g)
 \end{aligned}$$

Donc les caractères sont contenus dans l'ensemble des fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{K}$ , stables par conjugaison. Ces fonctions se nomment *fonctions centrales*, notées  $R(G)$ , et il est facile de vérifier qu'elles forment un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Une base pour  $R(G)$  est l'ensemble des fonctions caractéristiques qui pour une classe de conjugaison  $\mathcal{C}$  sont données par :

$$f_{\mathcal{C}}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in \mathcal{C} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc la dimension de  $R(G)$  est égale aux nombres de classes de conjugaisons.

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , une simple vérification montre que cette base des fonctions centrales

est orthogonale pour le produit scalaire suivant :

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}. \quad (1.9)$$

Il est également possible de montrer que les caractères irréductibles forment une base de  $R(G)$ . Une personne curieuse à ce sujet pourrait consulter (Sagan, 2001). Par ce qui précède,  $R(G)$  contient donc l'ensemble des caractères. De plus, la table de caractères est, en fait, une matrice orthogonale de passage, dans  $R(G)$ , entre les fonctions centrales indexées par les classes de conjugaison et les caractères.

On considère, maintenant, le groupe symétrique. Pour  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  si la structure cyclique de  $\sigma$  est  $\lambda$  alors  $p_\sigma$  est la somme de puissance  $p_\lambda$ . De plus, on dénote  $\sigma_\lambda$  un représentant de la classe de conjugaison de structure cyclique  $\lambda$ .

La *transformée de Frobenius* est la transformation linéaire définie en posant :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : R(\mathbb{S}_n) &\rightarrow \Lambda^n \\ f &\mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} f(\sigma) p_\sigma \end{aligned}$$

Pour une représentation  $\rho$  de  $\mathbb{S}_n$  dans  $GL(V)$  de caractère  $\chi^V$ , il est possible, par abus, d'écrire  $\mathcal{F}(V)$  pour  $\mathcal{F}(\chi^V)$ .

Au début de la section 1.2, on a vu que les classes de conjugaisons de  $\mathbb{S}_n$  sont indexées par les partages et chaque classe possède  $\frac{n!}{z_\mu}$  éléments, où  $\mu$  est le type cyclique de la classe de conjugaison. On a donc que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f) &= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{n!}{z_\lambda} f(\sigma_\lambda) p_{\sigma_\lambda} \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} f(\sigma_\lambda) p_\lambda \end{aligned}$$

En particulier, par 1.3, si  $f$  est un caractère irréductible  $\chi^\mu$ , on peut montrer que :

$$\mathcal{F}(\chi^\mu) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \chi^\mu(\sigma_\lambda) p_\lambda = s_\mu.$$

Ainsi, les fonctions de Schur en codent naturellement les caractères des représentations irréductibles de  $\mathbb{S}_n$ . De plus, le produit scalaire donné par l'équation 1.9 est équivalent au produit scalaire de Hall. La transformée de Frobenius est donc une traduction entre le monde des représentations et le monde des fonctions symétriques, puisque  $\mathcal{F}(V \oplus W) = \mathcal{F}(V) + \mathcal{F}(W)$  et donc :

$$\mathcal{F}(V) = \sum_{\mu} a_{\mu} s_{\mu}, a_{\mu} \in \mathbb{N},$$

si et seulement si :

$$V = \bigoplus_{\mu} a_{\mu} V^{\mu}, \text{ où } a_{\mu} \text{ est la multiplicité de } V^{\mu},$$

est la décomposition unique de  $V$  en irréductibles.

Il est temps d'établir le lien entre la transformée de Frobenius et la Schur positivité. Il est à noter que ce qui suit et le théorème de Maschke sont aussi vrais pour tout groupe fini.

Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Une représentation,  $\rho$ , induit une structure de  $\mathbb{S}_n$ -module sur  $V$ . Un sous  $\mathbb{S}_n$ -module,  $W$ , est alors un sous-espace de  $V$  tel que  $\rho(\sigma)w \in W$ , pour tout  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  et  $w \in W$ . Un module est dit irréductible s'il n'existe aucun espace propre  $W$  de  $V$  tel que  $W$  soit un sous-module de  $V$ . On peut maintenant énoncer un théorème bien connu dont on trouve une preuve dans (Sagan, 2001).

*Théorème (Maschke) :* Soient  $\mathbb{K}$  un corps dont la caractéristique est nulle ou ne divise pas la cardinalité de  $\mathbb{S}_n$  et  $V$  un  $\mathbb{S}_n$ -module, non trivial, de dimension finie. Alors  $V$  se décompose en une unique somme de sous-modules irréductibles, à isomorphisme près.

Le caractère associé au  $\mathbb{S}_n$ -module  $V$  est alors la somme des caractères des composantes irréductibles.

De ce qui précède et par linéarité de la transformée de Frobenius, on déduit qu'une expression Schur positive (ici les coefficients sont dans  $\mathbb{N}$ ) est en fait une somme positive de caractères irréductibles de  $\mathbb{S}_n$ . Il est donc possible de lui associer une représentation décomposée en sous-modules irréductibles. Avec la définition suivante, on pourra comprendre ce qu'il advient des expressions Schur positives au sens défini dans la section précédente.

À un  $\mathbb{S}_n$ -module gradué,  $V = \bigoplus_{n \geq 1} V_n$ , on associe la *transformée de Frobenius de son caractère gradué* :

$$\text{Frob}_q(V) = \sum_{n \geq 1} \mathcal{F}(V_n) q^n.$$

On dit plus simplement que c'est la caractéristique de Frobenius graduée de  $V$ . De façon analogue, pour un module bigradué  $V = \bigoplus_{n,k \geq 1} V_{n,k}$ , on a la *caractéristique de Frobenius bigraduée* :

$$\text{Frob}_{q,t}(V) = \sum_{n \geq 1} \mathcal{F}(V_{n,k}) q^n t^k.$$

Les expressions Schur positives correspondent aux caractéristiques de Frobenius bigraduées (ou la caractéristique de Frobenius si  $t$  n'apparaît pas dans l'expression).

Pour montrer qu'une expression est Schur positive, on devrait, idéalement, l'obtenir

comme caractéristique de Frobenius bigraduée d'un certain espace. C'est d'ailleurs ce qui est arrivé dans le cas des polynômes de Macdonald qui sont le caractère de Frobenius bigradué des modules Garsia-Haiman.

### 1.5 Polynômes de Macdonald

Introduits par Ian G. Macdonald en 1988 lors du 20<sup>e</sup> Séminaire Lotharingien, les polynômes de Macdonald,  $\{P_\mu\}$ , sont des fonctions symétriques à coefficients dans  $\mathbb{Q}(q, t)$ . Lors du même séminaire, il présenta un facteur de correction et identifia les nouveaux polynômes  $\{J_\mu\}$ .

Ce passage historique des polynômes  $\{P_\mu\}$  à  $\{J_\mu\}$  pour finir avec  $\{H_\mu\}$ , fait en sorte qu'il existe peu de preuves directes des travaux de Macdonald sur les polynômes  $\{P_\mu\}$  vers les  $\{H_\mu\}$ . Puisque l'objet de ce mémoire n'est pas les variantes des polynômes de Macdonald, mais bien les opérateurs propres, on a refait la majorité des preuves pour éviter ce détour. Dans cette section, on considère une renormalisation «combinatoire»  $\{H_\mu\}$  des polynômes de Macdonald originaux,  $\{P_\mu\}$ . On en donne également certaines propriétés essentielles.

Le produit scalaire original de Macdonald se trouve en introduisant, à l'aide de paramètres formels  $q$  et  $t$ , une extension du produit scalaire de Hall. Ce nouveau produit scalaire est donné par :

$$\langle p_\mu, p_\lambda \rangle_{q,t} = z_\mu \delta_{\lambda,\mu} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{1 - q^{\mu_i}}{1 - t^{\mu_i}}$$

Avec le produit scalaire de Macdonald, les *polynômes de Macdonald originaux* dénotés  $\{P_\mu\}$  sont les fonctions symétriques avec coefficients dans  $\mathbb{Q}(q, t)$  obtenues en

appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base monomiale ordonnée selon l'ordre lexicographique. Ils sont renormalisés pour avoir :

$$P_\mu(X; q, t) = m_\mu + \sum_{\gamma \prec \mu} u_\gamma(q, t) m_\gamma. \quad (1.10)$$

Macdonald montre en fait que ces polynômes symétriques à deux paramètres s'obtiennent ainsi via tout ordre total compatible avec l'ordre de la dominance. Il montre cette indépendance en produisant un opérateur autodual pour le produit scalaire pour lequel ses polynômes sont des vecteurs propres.

Le produit scalaire induit également des propriétés remarquables aux polynômes de Macdonald originaux. La proposition suivante, montrée à la page 141 de (Macdonald, 1988), en est un exemple.

*Proposition 2 :* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu \vdash n$  :

$$P_\mu(X; q, t) = P_\mu(X; q^{-1}, t^{-1}).$$

*Démonstration.* On a :

$$\langle p_\mu, p_\lambda \rangle_{q,t} = q^{|\mu|} t^{-|\mu|} \langle p_\mu, p_\lambda \rangle_{q^{-1}, t^{-1}} \quad (1.11)$$

Donc pour tout  $f, g$  dans  $\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)}^d$  :

$$\langle f, g \rangle_{q,t} = q^{|\mu|} t^{-|\mu|} \langle f, g \rangle_{q^{-1}, t^{-1}}$$

On pose alors :

$$P_\mu(X; q, t) = m_\mu + \sum_{\lambda \prec \mu} a_{\lambda, \mu}(q, t) m_\lambda.$$

Puisque les  $P_\mu(X; q^{-1}, t^{-1})$  peuvent être obtenus en orthogonalisant la base  $\{m_\lambda\}$  selon le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q^{-1}, t^{-1}}$  et en renormalisant pour avoir 1 comme coefficient

de  $m_\mu$ . Alors, par l'égalité 1.11, pour tout  $\lambda$  et  $\mu$ , on a :

$$a_{\lambda,\mu}(q^{-1}, t^{-1}) = \frac{q^{-|\mu|} t^{|\mu|} a_{\lambda,\mu}(q, t)}{q^{-|\mu|} t^{|\mu|}} = a_{\lambda,\mu}(q, t)$$

Ce qui complète la preuve puisque  $P_\mu(X; q^{-1}, t^{-1}) = m_\mu + \sum_{\lambda \prec \mu} a_{\lambda,\mu}(q^{-1}, t^{-1}) m_\lambda$ . ■

Pour certaines spécialisations, sur les polynômes de Macdonald originaux on retrouve des bases des polynômes symétriques bien connus. En particulier, la spécialisation  $P_\mu(X; 1, t) = e_\mu(X)$ , pour tout  $t$ , est montrée dans (Macdonald, 1995) à la page 324. On ne s'attardera pas sur ces spécialisations en général, puisque, dans ce mémoire, on ne travaille pas avec les polynômes de Macdonald originaux.

Afin de pouvoir définir les polynômes de Macdonald combinatoires, on définit d'abord l'opération de pléthysme, introduite pour la première fois par Ernest Dudley Littlewood.

Soient  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$  des ensembles possiblement infinis de variables. On définit  $qX = \{qx_1, qx_2, qx_3, \dots\}$  et  $X + Y$  est la somme d'ensembles disjoints. Soit  $A$  un anneau commutatif. Pour  $f \in A(X)$ , c'est-à-dire  $f = f(x_1, x_2, \dots)$ , On pose :

$$p_n[f] = f|_{x_1=x_1^n, x_2=x_2^n, \dots, x_i=x_i^n, \dots}$$

Pour simplifier les expressions, on écrit :

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots, Y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots \text{ et } X \cdot Y = \sum_{i,j} x_i y_j.$$

Il s'ensuit que :

$$p_n[X + Y] = p_n[X] + p_n[Y],$$

$$p_n[XY] = p_n[X]p_n[Y],$$

$$p_n[qX] = q^n p_n(X), \quad p_n[tX] = t^n p_n(X),$$

$$p_n[x] = x^n \text{ et}$$

$$p_n[c] = c, \text{ si } c \text{ est une constante.}$$

$$p_n[p_1(X)] = p_n(X) \text{ et } p_n[p_k(X)] = p_{nk}(X)$$

Pour une fonction symétrique,  $f$ , développé dans la base des  $p_k$ ,  $f = \sum_{\mu \vdash n} a_\mu p_\mu$ ,  $a_\mu \in A$  on pose :

$$f[X] := \sum_{\mu \vdash n} a_\mu \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} p_{\mu_i}[X]. \quad (1.12)$$

Il en résulte une opération  $\Lambda \times A(X, Y) \rightarrow A(X, Y)$  dont la restriction à  $\Lambda \times \Lambda \rightarrow \Lambda$  correspond au *pléthysme* original de Littlewood.

*Exemple 17 :* On pose  $f = (q + t)p_k$ , donc :

$$f \left[ \frac{5qX}{1-t} \right] = (q+t)p_k \left[ \frac{5qX}{1-t} \right] = (q+t) \frac{5q^k}{1-t^k} p_k(X).$$

Les propriétés  $p_n[p_1(X)] = p_n(X)$  et  $p_n[p_k(X)] = p_{nk}(X)$  découlent de la définition.

En effet :

$$p_n(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^n = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_n[x_i] = p_n[x_1 + x_2 + \dots] = p_n[p_1(X)]$$

De plus,

$$p_n[p_k(X)] = p_n \left[ \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^k \right] = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_n[x_i^k] = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^{kn} = p_{nk}(X)$$

Ainsi :

$$p_n[p_k(X)] = p_k[p_n(X)].$$

En particulier :

$$p_n[f(X)] = \sum_{\mu \vdash n} a_\mu p_n[p_\mu(X)] = \sum_{\mu \vdash n} a_\mu \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} p_{\mu_i}[p_n(X)] = f[p_n(X)]$$

Il faut faire attention ici, car la dernière égalité est propre aux sommes de puissances et est fausse en général.

*Exemple 18 :* En posant  $f = p_{11} + p_2$  et  $g = p_3 + p_{111}$  on trouve :

$$\begin{aligned} g[f(X)] &= (p_3 + p_{111})[f(X)] \\ &= p_3[p_{11}(X) + p_2(X)] + p_{111}[p_{11}(X) + p_2(X)] \\ &= p_3[p_{11}(X)] + p_3[p_2(X)] + (p_1[p_{11}(X) + p_2(X)])^3 \\ &= p_3[p_1(X)]p_3[p_1(X)] + p_6(X) + (p_{11}(X) + p_2(X))^3 \\ &= p_6(X) + p_{33}(X) + p_{222}(X) + 3p_{2211}(X) + 3p_{21111}(X) + p_{1^6}(X) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f[g(X)] &= (p_{11} + p_2)[g(X)] \\ &= (p_1[p_3(X) + p_{111}(X)])^2 + p_2[p_3(X) + p_{111}(X)] \\ &= p_6(X) + p_{33}(X) + 2p_{3111}(X) + p_{222}(X) + p_{1^6}(X) \end{aligned}$$

Donc  $g[f(X)] \neq f[g(X)]$ .

Il est facile de vérifier que le pléthysme est associatif lorsqu'on se restreint aux fonctions symétriques. Puisque le pléthysme  $f[\cdot]$  s'interprète comme un opérateur, il est normal de s'attendre qu'il ne commute pas avec d'autres opérateurs. C'est en particulier le cas avec l'opérateur d'évaluation.

Il est maintenant possible de définir les polynômes de Macdonald combinatoires.

*Définition 12 :* Les polynômes de Macdonald combinatoires notés  $H_\mu(X; q, t)$  ou  $H_\mu$  lorsqu'il n'y a pas de confusion sur  $q, t$  et  $X$ , sont définis par :

$$H_\mu(X; q, t) = P_\mu \left[ \frac{X}{1-t}; q, t^{-1} \right] \prod_{c \in \mu} (q^{a(c)} - t^{l(c)+1})$$

(Dans certaines publications, on retrouve plutôt  $\tilde{H}_\mu(X; q, t)$ ). Par abus, on dit simplement polynôme de Macdonald plutôt que polynôme de Macdonald combinatoire.

Parfois, on dénotera  $\mathcal{E}_\mu(q, t) = \prod_{c \in \mu} (q^{a(c)} - t^{l(c)+1})$  et  $\mathcal{E}'_\mu(q, t) = \prod_{c \in \mu} (t^{l(c)} - q^{a(c)+1})$ . (Dans certains articles ils sont notés respectivement  $h_\mu(q, t)$  et  $h'_\mu(q, t)$ . Ceci est malheureux, puisqu'on a aussi les fonctions symétriques homogènes complètes qui sont dénotées  $h_\mu$ .)

De nombreux résultats sur les polynômes de Macdonald originaux sont présentés dans (Macdonald, 1995). Le mécanisme vu dans la prochaine preuve est une des façons directes de les traduire en résultats sur les polynômes de Macdonald combinatoires.

*Proposition 3 :* Soient  $q$  et  $t$  des paramètres formels abstraits. Les polynômes de Macdonald combinatoires forment une base pour  $\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)}$  et sont orthogonaux pour le produit scalaire :

$$\langle p_\mu, p_\lambda \rangle_* = (-1)^{|\mu| - \ell(\mu)} z_\mu \delta_{\lambda, \mu} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} (1 - q^{\mu_i})(1 - t^{\mu_i}).$$

*Démonstration.* On montre d'abord l'orthogonalité. On pose  $P_\mu(X; q, t) = \sum_{\lambda \vdash n} a_{\lambda, \mu}(q, t) p_\lambda(X)$ . Pour  $\mu$  et  $\lambda$  partages de  $n$ , il suffit de remarquer que  $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \frac{(-1)^{|\mu| - \ell(\mu)}}{(1-t^{\mu_i})^2} \langle p_\lambda, p_\mu \rangle_*$ .

L'orthogonalité découle alors de la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{H_\mu}{\mathcal{E}_\mu(q, t)}, \frac{H_\gamma}{\mathcal{E}_\gamma(q, t)} \right\rangle_* &= \left\langle P_\mu \left[ \frac{X}{1-t}; q, t^{-1} \right], P_\gamma \left[ \frac{X}{1-t}; q, t^{-1} \right] \right\rangle_* \\
&= \left\langle P_\mu \left[ \frac{X}{1-t^{-1}}; q^{-1}, t \right], P_\gamma \left[ \frac{X}{1-t}; q, t^{-1} \right] \right\rangle_* , \text{ proposition 2,} \\
&= \left\langle \sum_{\lambda \vdash n} a_{\lambda, \mu}(q^{-1}, t) p_\lambda \left[ \frac{tX}{t-1} \right] \sum_{\lambda \vdash n} a_{\lambda, \gamma}(q, t^{-1}) p_\lambda \left[ \frac{X}{1-t} \right] \right\rangle_* \\
&= \sum_{\lambda \vdash n} a_{\lambda, \mu}(q^{-1}, t) a_{\lambda, \gamma}(q, t^{-1}) \left\langle p_\lambda \left[ \frac{tX}{t-1} \right], p_\lambda \left[ \frac{X}{1-t} \right] \right\rangle_* \\
&= \sum_{\lambda \vdash n} a_{\lambda, \mu}(q^{-1}, t) a_{\lambda, \gamma}(q, t^{-1}) \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{(-1)^{t\lambda_i}}{(1-t^{\lambda_i})^2} \langle p_\lambda[X], p_\lambda(X) \rangle_* \\
&= \sum_{\lambda \vdash n} a_{\lambda, \mu}(q^{-1}, t) a_{\lambda, \gamma}(q, t^{-1}) (-1)^{n t^n} \langle p_\lambda(X), p_\lambda(X) \rangle_{q, t} \\
&= (-1)^{n t^n} \langle P_\mu(X; q^{-1}, t), P_\gamma(X; q, t^{-1}) \rangle_{q, t} \\
&= (-1)^{n t^n} \langle P_\mu(X; q, t^{-1}), P_\gamma(X; q, t^{-1}) \rangle_{q, t}
\end{aligned}$$

On a bien l'orthogonalité, puisque les polynômes de Macdonald originaux sont orthogonaux pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q, t}$  par construction.

Les polynômes de Macdonald combinatoires sont indexés par des partages, il suffit, alors, de montrer qu'ils sont linéairement indépendants, car il a été vu au chapitre 1 que les bases de  $\Lambda_A$  contiennent  $p(n)$  éléments.

De plus, l'algorithme Gram-Schmit préserve l'indépendance linéaire donc les polynômes de Macdonald originaux,  $\{P_\mu\}$ , sont linéairement indépendants. Les paramètres formels  $q$  et  $t$  ne peuvent annuler le coefficient  $\prod_{c \in \mu} (q^{a(c)} - t^{l(c)+1})$ . Enfin, le pléthysme préserve l'indépendance linéaire, car les sommes de puissances forment une base et l'effet du pléthysme est d'ajouter un coefficient en  $t$  devant les  $\{p_\mu\}$ . En

effet :

$$p_\mu \left[ \frac{X}{1-t} \right] = p_\mu(X) \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{1}{1-t^{\mu_i}}.$$

Les polynômes de Macdonald sont donc linéairement indépendants ce qui en fait une base pour  $\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)}$ . ■

De façon plus précise, le théorème 1.1 de (Garsia et Tesler, 1996) montre que :

$$\langle H_\mu, H_\lambda \rangle_* = \mathcal{E}_\mu(q, t) \mathcal{E}'_\mu(q, t) \delta_{\lambda, \mu}. \quad (1.13)$$

Dans (Haiman, 2001) le théorème 3.2 montre que les polynômes de Macdonald, forment base pour  $\Lambda_{\mathbb{Z}[q,t]}$  admettent le développement suivant dans la base des fonctions de Schur :

$$H_\mu(X; q, t) = \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\lambda, \mu}(q, t) s_\lambda(X), \quad (1.14)$$

où les polynômes  $(q, t)$ -Kostka, notés  $\{K_{\lambda, \mu}(q, t)\}$  sont des polynômes dans  $\mathbb{N}[q, t]$ . (Dans certains ouvrages ils sont nommés polynômes  $(q, t)$ -Kostka modifiés et notés  $\tilde{K}_{\lambda, \mu}(q, t)$ , et les  $K_{\lambda, \mu}(q, t)$  sont les polynômes obtenus en décomposant les  $\{J_\mu\}$  dans la base  $\{S_\mu(X; t)\}$ .)

La *matrice*  $(q, t)$ -Kostka, notée  $K(n)$ , est donc la matrice de passage entre la base des polynômes de Macdonald combinatoires et la base des fonctions de Schur. Les *polynômes*  $(q, t)$ -Kostka sont les coefficients de cette matrice. Ceci sera abordé plus en détail dans la section 1.6.

On dénote  $\omega^*$  l'involution qui pour tout  $F \in \Lambda_{[q,t,1/q,1/t]}$  est donnée par :

$$\omega^*(F(X; q, t)) = \omega(F(X; q^{-1}, t^{-1})).$$

Il est facile de vérifier que la restriction à  $\Lambda$  est  $\omega$ . Cependant,  $\omega^*$  est linéaire sur  $\mathbb{Q}$ , mais pas linéaire sur  $\mathbb{Q}(q, t)$ . Par abus, on dénote  $\omega$  l'extension de  $\omega$  linéaire sur  $\mathbb{Q}(q, t)$ . (Dans certains articles,  $\omega^*$  est noté  $\downarrow$ .)

Dans le lemme qui suit, les deux applications agissent sur les polynômes de Macdonald combinatoires de façons différentes. Le prochains lemme a d'abord été montré dans (Garsia et Tesler, 1996) via le théorème 1.5. Cependant les preuves ont été refaites afin de n'utiliser que des outils présentés dans ce mémoire.

*Lemme 3 :* Pour tout  $n$  et pour tout  $\mu \vdash n$ , on a :

$$\omega(H_\mu(X; q, t)) = q^{n(\mu')} t^{n(\mu)} H_\mu(X; q^{-1}, t^{-1}) \text{ et}$$

$$\omega^*(H_\mu(X; q, t)) = q^{-n(\mu')} t^{-n(\mu)} H_\mu(X; q, t).$$

*Démonstration.* On remarque d'abord que le premier résultat implique trivialement le deuxième. En effet,  $\omega$  est une involution linéaire sur  $\mathbb{Q}(q, t)$  et par définition :

$$\omega^*(H_\lambda(X; q, t)) = \omega(H_\lambda(X; q^{-1}, t^{-1})).$$

Il suffit alors de montrer la première assertion. Pour  $\mu$  et  $\lambda$  partages de  $n$ , on pose :

$$P_\mu(X; q, t) = \sum_{\lambda \vdash n} a_{\lambda, \mu}(q, t) p_\lambda(x).$$

Alors  $a_{\lambda,\mu}(q, t) = a_{\lambda,\mu}(q^{-1}, t^{-1})$ . par la proposition 2. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\omega(H_\lambda(X; q^{-1}, t^{-1})) &= \omega\left(P_\lambda\left[\frac{tX}{t-1}; q^{-1}, t\right]\right) \mathcal{E}_\lambda(q^{-1}, t^{-1}) \\
&= \sum_{\mu \vdash n} a_{\mu,\lambda}(q^{-1}, t) \omega\left(p_\mu\left[\frac{tX}{t-1}\right]\right) \mathcal{E}_\lambda(q^{-1}, t^{-1}) \\
&= (-t)^n \sum_{\mu \vdash n} a_{\mu,\lambda}(q, t^{-1}) p_\mu\left[\frac{X}{1-t}\right] \mathcal{E}_\lambda(q^{-1}, t^{-1}) \\
&= (-t)^n P_\lambda\left[\frac{X}{1-t}; q, t^{-1}\right] \mathcal{E}_\lambda(q^{-1}, t^{-1}) \\
&= H_\mu(X; q, t) \frac{(-t)^n \prod_{c \in \lambda} q^{-a(c)} t^{-l(c)-1} (t^{l(c)+1} - q^{a(c)})}{\prod_{c \in \lambda} (q^{a(c)} - t^{l(c)+1})} \\
&= H_\mu(X; q, t) q^{-n(\lambda')} t^{-n(\lambda)}, \text{ par 1.1.}
\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat annoncé. ■

Le lemme qui suit est une autre identité remarquable des polynômes de Macdonald. La preuve n'en sera pas faite puisqu'elle utilise plusieurs outils qui n'ont pas été introduits ici, mais qui sont présentés dans (Macdonald, 1995) pour les polynômes de Macdonald originaux. Le théorème 1.6 de (Garsia et Tesler, 1996) est une preuve pour les polynômes de Macdonald combinatoires.

*Lemme 4 :* Pour tout  $\mu \vdash n$  on a :

$$H_\mu(X; q, t) = H_{\mu'}(X; t, q) \quad (1.15)$$

Bien que ce soit une propriété remarquable, le lemme qui suit est une simple déduction faite à partir des propriétés des polynômes de Macdonald originaux. Puisqu'ils ont cette propriété on dit que les polynômes de Macdonald sont *multiplicatif* pour  $t = 1$ , ou simplement multiplicatif. À ma connaissance, aucune publication n'en fait la preuve formelle.

*Lemme 5 :* Pour tout  $\mu \vdash n$ , on a :

$$H_\mu(X; q, 1) = H_{\mu_1}(X; q, 1)H_{\mu_2}(X; q, 1) \cdots H_{\mu_k}(X; q, 1) \quad (1.16)$$

$$\text{et } H_n(X; q, 1) = e_n \left[ \frac{X}{1-q} \right] \prod_{i=1}^n (1 - q^i). \quad (1.17)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} H_\mu(X; q, 1) &= H_{\mu'}(X; 1, q) = P_{\mu'} \left[ \frac{X}{1-q}; 1, q^{-1} \right] \prod_{c \in \mu'} (1 - q^{\ell(c)+1}) \\ &= P_{\mu'} \left[ \frac{X}{1-r^{-1}}; 1, r \right] \prod_{c \in \mu} (1 - r^{-a(c)-1}), \text{ en posant } q = r^{-1} \\ &= e_\mu \left[ \frac{X}{1-r^{-1}} \right] \prod_{c \in \mu} (1 - r^{-a(c)-1}) (*) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} e_{\mu_i} \left[ \frac{X}{1-r^{-1}} \right] \prod_{c \in \mu_i} (1 - r^{-a(c)-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} P_{1^{\mu_i}} \left[ \frac{X}{1-r^{-1}}; 1, r \right] \prod_{c \in \mu_i} (1 - r^{-a(c)-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} P_{1^{\mu_i}} \left[ \frac{X}{1-q}; 1, q^{-1} \right] \prod_{c \in 1^{\mu_i}} (1 - q^{\ell(c)+1}) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} H_{1^{\mu_i}}(X; 1, q) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} H_{\mu_i}(X; q, 1). \end{aligned}$$

En particulier, par (\*),  $H_n(X; q, 1) = e_n \left[ \frac{X}{1-q} \right] \prod_{i=1}^n (1 - q^i)$ . ■

Dans la section suivante, on verra que le lemme 4 a également des conséquences sur les coefficients du développement en fonctions de Schur. On rappelle que ces coefficients se nomment polynômes  $(q, t)$ -Kostka.

## 1.6 Propriétés des polynômes $(q, t)$ -Kostka

C'est aussi lors du 20<sup>e</sup> Séminaire Lotharingien que Macdonald conjecture que les polynômes  $\{J_\mu\}$  développés dans la base duale aux fonctions de Schur pour le produit scalaire de Hall-Littlewood, noté  $S_\mu(X; t)$ , étaient à coefficients dans  $\mathbb{N}[q, t]$ . Un peu plus tard, Garsia et Haiman proposent une formulation explicite de ceci en terme de la théorie de la représentation. En effet, ils décrivent des modules bigradués explicites, dénotés  $M_\mu$ , pour lesquels ils conjecturent que  $\mathcal{F}(M_\mu) = H_\mu(X; q, t)$ . Haiman montre aussi que la  $\dim(M_\mu) = n!$  entraîne l'égalité précédente. Montrer que la dimension de  $M_\mu$  est  $n!$  a été connu sous le nom de conjecture  $n!$ . En 2001, Haiman, dans [Hai2001], prouva la conjecture  $n!$  en montrant que les polynômes  $(q, t)$ -Kostka admettent une interprétation issue de la théorie de la représentation.

Les polynômes  $(q, t)$ -Kostka, introduits dans la section 1.14, ont plusieurs propriétés qui seront utiles pour la suite. Lors de l'évaluation en  $q = 0$  et  $t = 1$ , ils représentent les nombres de Kostka. De plus, l'évaluation de  $K_{\lambda, \mu}(1, 1)$  donne le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ . Ils ont également une sorte de symétrie lorsque les indices sont conjugués. Les lemmes qui suivent précisent ce lien. Les preuves sont déduites des lemmes 3 et 4 de la même façon qu'au pages 175 et 212 de (Garsia et Tesler, 1996).

*Lemme 6 :* Pour tout  $\lambda$  et  $\mu$  partages de  $n$ , on a :

$$K_{\lambda, \mu}(q, t) = q^{n(\mu')} t^{n(\mu)} K_{\lambda', \mu}(q^{-1}, t^{-1}).$$

*Démonstration.* On a :

$$q^{n(\mu')} t^{n(\mu)} H_\mu(X; q^{-1}, t^{-1}) = q^{n(\mu')} t^{n(\mu)} \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\lambda, \mu}(q^{-1}, t^{-1}) s_\lambda(X).$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
q^{n(\mu')}t^{n(\mu)}H_\mu(X; q^{-1}, t^{-1}) &= \omega(H_\mu(X; q, t)) \\
&= \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\lambda, \mu}(q, t)\omega(s_\lambda(X)) \\
&= \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\lambda, \mu}(q, t)s_\lambda(X) \\
&= \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\lambda', \mu}(q, t)s_\lambda(X).
\end{aligned}$$

Les fonctions de Schur forment une base de  $\Lambda_{[q, t, 1/q, 1/t]}$ , l'écriture est donc unique. Alors par le lemme 3 on a bien le résultat voulu. ■

Puisque  $\omega$  est une isométrie son application induit toutes sortes d'égalités. Le lemme suivant en est un autre exemple.

*Lemme 7 :* Pour tout  $\lambda$  et  $\mu$  partages de  $n$ , on a :

$$K_{\lambda, \mu}(q, t) = K_{\lambda, \mu'}(t, q).$$

*Démonstration.* Par le lemme 4, on a :

$$\begin{aligned}
H_{\mu'}(X; t, q) &= H_\mu(X; q, t) \\
&= \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\lambda, \mu}(q, t)s_\lambda(X)
\end{aligned}$$

Ainsi que :

$$H_{\mu'}(X; t, q) = \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\lambda, \mu'}(t, q)s_\lambda(X).$$

Les fonctions de Schur forment une base de  $\Lambda_{[q, t, 1/q, 1/t]}$ , l'écriture est donc unique. Ce qui complète la preuve. ■

Le lemme précédent montre que la matrice  $q, t$ -Kostka, vue dans la section 1.5, est une permutation des lignes de la matrice  $K(n)|_{q \leftrightarrow t}$ , où  $q \leftrightarrow t$  est l'échange de variable  $q$  pour  $t$  et  $t$  pour  $q$ . Pour plus de détails voir les explication en haut de l'exemple 19. On a alors que  $\det(K(n)) = \pm \det(K(n)_{q \leftrightarrow t})$ .

Le lemme qui suit montre que la matrice inverse de la matrice  $q, t$ -Kostka, notée  $K(n)^{-1}$ , est une permutation des colonnes de la matrice  $K(n)^{-1}|_{q \leftrightarrow t}$ .

*Lemme 8 :* Pour tout  $\lambda \vdash n$ , on a :

$$K_{\lambda, \mu}^{-1}(t, q) = K_{\lambda', \mu}^{-1}(q, t).$$

*Démonstration.* On a :

$$s_{\mu}(X) = \sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda, \mu}^{-1}(q, t) H_{\lambda}(X; q, t).$$

Donc :

$$\begin{aligned} s_{\mu}(X) &= s_{\mu}(X)|_{q \leftrightarrow t} \\ &= \left( \sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda, \mu}^{-1}(q, t) H_{\lambda}(X; q, t) \right) \Big|_{q \leftrightarrow t} \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda, \mu}^{-1}(t, q) H_{\lambda}(X; t, q) \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda, \mu}^{-1}(t, q) H_{\lambda'}(X; q, t). \end{aligned}$$

D'où  $K_{\lambda, \mu}^{-1}(t, q) = K_{\lambda', \mu}^{-1}(q, t)$ . ■

Si la matrice est indexée par l'ordre lexicographique vu dans la section 1.1, il serait tentant de s'imaginer que la permutation des colonnes (respectivement lignes) est

simplement une réflexion de la matrice sur sa colonne centrale (respectivement ligne centrale), ceci est pourtant faux. En effet,  $3111 >_{\text{lex}} 222$ , mais en conjuguant on obtient  $(3111)' = 411 \not<_{\text{lex}} (222)' = 33$ .

Le problème survient seulement pour certains partages incomparables pour l'ordre de la dominance. L'ordre lexicographique est une extension de l'ordre de la dominance et on peut montrer que  $\mu \prec \lambda$  si et seulement si  $\lambda' \prec \mu'$ .

Cette section se termine avec quelques de matrices  $(q, t)$ -Kostka et leurs inverses pour  $n = 2$ ,  $n = 3$  et  $n = 4$  :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & q \\ 1 & t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{t}{q-t} & \frac{q}{q-t} \\ \frac{1}{q-t} & \frac{-1}{q-t} \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 1 & q(q+1) & q^3 \\ 1 & q+t & qt \\ 1 & t(t+1) & t^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{t^2}{(q^2-t)(q-t)} & -\frac{(qt+q+t)qt}{(q^2-t)(-t^2+q)} & \frac{q^2}{(q-t)(-t^2+q)} \\ -\frac{t}{(q^2-t)(q-t)} & \frac{q^2+qt+t^2}{(q^2-t)(-t^2+q)} & -\frac{q}{(q-t)(-t^2+q)} \\ \frac{1}{(q^2-t)(q-t)} & -\frac{q+t+1}{(q^2-t)(-t^2+q)} & \frac{1}{(q-t)(-t^2+q)} \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 1 & q(q^2+q+1) & q^2(q^2+1) & q^3(q^2+q+1) & q^6 \\ 1 & q^2+q+t & q(q+t) & q(q^2+qt+t) & q^3t \\ 1 & qt+q+t & q^2+t^2 & qt(q+t+1) & q^2t^2 \\ 1 & t^2+q+t & t(q+t) & t(qt+t^2+q) & qt^3 \\ 1 & t(t^2+t+1) & t^2(t^2+1) & t^3(t^2+t+1) & t^6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc} -\frac{t^3}{(q-t)(q^2-t)(q^3-t)} & \frac{t^2q(q^2t+q^2+qt+t)}{(q-t)^2(q+t)(q^3-t)} & \frac{(qt-1)t^2q^2}{(q-t)^2(-t^2+q)(q^2-t)} & -\frac{tq^2(qt^2+qt+t^2+q)}{(q-t)^2(-t^3+q)(q+t)} & \frac{q^3}{(-t^2+q)(-t^3+q)(q-t)} \\ \frac{t^2}{(q-t)(q^2-t)(q^3-t)} & -\frac{(q^2+t)t}{(q-t)^2(q^3-t)} & -\frac{tq(q^2+t^2-q-t)}{(q-t)^2(-t^2+q)(q^2-t)} & \frac{(t^2+q)q}{(-t^3+q)(q-t)^2} & -\frac{q^2}{(-t^2+q)(-t^3+q)(q-t)} \\ 0 & -\frac{t}{(q-t)^2(q+t)} & \frac{1}{(q-t)^2} & -\frac{q}{(q-t)^2(q+t)} & 0 \\ -\frac{t}{(q-t)(q^2-t)(q^3-t)} & \frac{q^2+t}{(q-t)^2(q^3-t)} & \frac{q^2t+qt^2-q^2-t^2}{(q-t)^2(-t^2+q)(q^2-t)} & -\frac{t^2+q}{(-t^3+q)(q-t)^2} & \frac{q}{(-t^2+q)(-t^3+q)(q-t)} \\ \frac{1}{(q-t)(q^2-t)(q^3-t)} & -\frac{q^2+q+t+1}{(q-t)^2(q+t)(q^3-t)} & -\frac{qt-1}{(q-t)^2(-t^2+q)(q^2-t)} & \frac{t^2+q+t+1}{(q-t)^2(-t^3+q)(q+t)} & -\frac{1}{(-t^2+q)(-t^3+q)(q-t)} \end{array} \right]$$

### 1.7 Opérateur $\nabla$ : propriété et interprétation combinatoire

Introduit en 1994 par François Bergeron, l'opérateur  $\nabla$  est paru dans une première publication en 1999 dans (Bergeron et Garsia, 1999). L'opérateur a originalement été introduit dans une lettre adressé à Andriano Garsia afin d'obtenir une formulation simple pour la transformée de Frobenius du caractère gradué de l'espace diagonal harmonique. Il s'avère être intéressant sous bien d'autres aspects en combinatoire algébrique.

L'opérateur  $\nabla$  est un opérateur  $\mathbb{Q}(q, t)$ -linéaire dont les polynômes de Macdonald sont les fonctions propres. Il est défini par :

$$\nabla(H_\mu) = q^{n(\mu')}t^{n(\mu)}H_\mu.$$

Des opérateurs plus généraux seront abordés dans la section 2.1. Les résultats suivants seront alors généralisés. Ces résultats ont d'abord été démontrés pour  $\nabla$  dans (Garsia et Haiman, 1996b). Cependant, les preuves sont différentes étant donné la nature de  $\nabla$ .

*Lemme 9 :* L'opérateur  $\nabla$  est tel que  $\omega^*\nabla\omega^* = \nabla^{-1}$ .

*Démonstration.* Par le lemme 3, on a :

$$\begin{aligned}\omega^*(H_\mu(X; q, t)) &= q^{-n(\mu')}t^{-n(\mu)}H_\mu(X; q, t) \\ &= \nabla^{-1}H_\mu(X; q, t)\end{aligned}$$

Donc  $\nabla\omega^* = \text{id}$ , Ce qui donne le résultat. ■

On considère, maintenant, l'application  $|_{q \leftrightarrow t}$  qui interchange  $q$  et  $t$ .

$$\begin{array}{ccc}\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)} & \xrightarrow{q \leftrightarrow t} & \Lambda_{\mathbb{Q}(t,q)} \\ F \downarrow & & \downarrow F|_{q \leftrightarrow t} \\ \Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)} & \xrightarrow{q \leftrightarrow t} & \Lambda_{\mathbb{Q}(t,q)}\end{array}$$

Il importe de remarquer ici que  $\nabla$  est, en fait,  $\nabla_{(q,t)}$ , car il est défini sur la base  $\{H_\mu(X; q, t)\}$ . À l'inverse  $\nabla_{(t,q)}$  est définie sur la base  $\{H_\mu(X; t, q)\}$ .

Dans ce mémoire, les opérateurs sont tous définis dans  $\text{End}_{\mathbb{Q}(q,t)}(\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)})$ . Lorsque l'on utilise  $|_{q \leftrightarrow t}$ , on peut considérer le nouvel opérateur dans  $\text{End}_{\mathbb{Q}(q,t)}(\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)})$ , par le lemme 4. Si on pose l'opérateur  $\mathbb{Q}(q, t)$ -linéaire  $\varphi : \Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{Q}(t,q)}$ , définie par  $\varphi(H_\mu(X; q, t)) = H_{\mu'}(X; t, q)$  le nouvel opérateur associé à  $F|_{q \leftrightarrow t}$  dans  $\text{End}_{\mathbb{Q}(q,t)}(\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)})$  est en réalité  $\varphi^{-1}F|_{q \leftrightarrow t}\varphi$ , mais pour éviter la lourdeur on écrit simplement  $F|_{q \leftrightarrow t}$  et les sous-indices sont omis. À moins que des parenthèses soient utilisées, l'opérateur  $|_{q \leftrightarrow t}$  s'applique uniquement à l'objet qui se situe immédiatement à sa gauche.

*Exemple 19 :*

$$H_\mu(X; q, t)|_{q \leftrightarrow t} = H_\mu(X; t, q) = H_{\mu'}(X; q, t), \text{ par le lemme 4} \quad (1.18)$$

*Exemple 20 :*

$$\begin{aligned}
\nabla_{(q,t)}|_{q \leftrightarrow t} H_\mu(X; q, t) &= (\nabla_{(q,t)} H_\mu(X; t, q))|_{q \leftrightarrow t} \\
&= (\nabla_{(q,t)} H_{\mu'}(X; q, t))|_{q \leftrightarrow t} \\
&= (q^{n(\mu)} t^{n(\mu')} H_{\mu'}(X; q, t))|_{q \leftrightarrow t} \\
&= t^{n(\mu)} q^{n(\mu')} H_{\mu'}(X; t, q) \\
&= q^{n(\mu')} t^{n(\mu)} H_\mu(X; q, t)
\end{aligned}$$

Il a été montré dans (Bergeron *et al.*, 1999), à la page 402, que l'opérateur  $\nabla$  est tel que :

$$\nabla|_{q \leftrightarrow t} = \nabla$$

Cette propriété sera définie plus loin comme étant la symétrie conjuguée. La preuve n'est pas faite ici puisque le lemme 13 de la section 2.1 en est une généralisation. Plus précisément, il s'agit de la même preuve appliquée à des valeurs propres différentes.

Cependant, le théorème 1.1 de (Bergeron *et al.*, 1999), qui suit, n'est pas généralisable à tous les opérateurs dont les valeurs propres sont toutes des monômes.

*Théorème (Bergeron-Garsia-Haiman-Tesler) :*

$$\nabla(\Lambda_{\mathbb{Z}[q,t]}) \subseteq \Lambda_{\mathbb{Z}[q,t]} \text{ et } \nabla^{-1}(\Lambda_{\mathbb{Z}[q,t]}) \subseteq \Lambda_{\mathbb{Z}[q,t,1/q,1/t]}.$$

D'ailleurs, dans la section 2.3, on montre que ceci caractérise en partie  $\nabla$ . Dans la proposition 3.11 de (Haiman, 2002), Haiman a raffiné ce théorème en montrant que  $\nabla(e_n)$  est Schur positif. De façon plus précise, il a montré que  $\nabla(e_n)$  était le caractère de Frobenius bigradué de l'espace diagonal harmonique. De façon similaire une généralisation aux puissances de  $\nabla$  a été montrée via la proposition 6.1.1 de

(Haglund *et al.*, 2005), donc  $\nabla^m(e_n)$  est Schur positif. Cependant, la conjecture 1 de (Bergeron *et al.*, 1999) est toujours ouverte.

*Conjecture 1 (Bergeron-Garsia-Haiman-Tesler)* : Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  et pour tout  $\lambda, \mu \vdash n$ , on a :

$$(-1)^{\iota(\mu)} \langle \nabla^m(s_\mu), s_\lambda \rangle \in \mathbb{N}[q, t],$$

où  $\iota(\mu) = \sum_{i=1}^{\ell(\mu)} \mu_i - i$ .

Une version légèrement plus fine de cette conjecture, généralement attribué à (Bergeron *et al.*, 1999), se lit comme suit.

*Conjecture 2* : Pour tous  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda, \mu \vdash n$  et  $m \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\left( \frac{-1}{qt} \right)^{\frac{\iota(\mu)m}{|m|}} \langle \nabla^m(s_\mu), s_\lambda \rangle \in \mathbb{N}[q, t].$$

On discutera d'une approche pour résoudre en partie cette conjecture à la fin de la section 2.3.

Le cas spécial de cette conjecture, où  $\mu = 1^n$ , a été prouvé via la proposition 3.5 dans (Haiman, 2002) pour  $m = 1$  et via la proposition 6.1.1 dans (Haglund *et al.*, 2005) pour  $m \in \mathbb{N}$ . En réalité, les deux preuves montrent que  $\nabla^m(e_n)$  est la caractéristique de Frobenius bigraduée d'un espace, ce qui implique la Schur positivité. Le cas spécial  $m = 1$  et  $t = 1$  est prouvé par Lenart dans le théorème 4.4 de (Lenart, 2000). Cet article présente également des configurations combinatoires donnant une interprétation de  $\nabla(s_\mu)|_{t=1}$ . Il existe plusieurs interprétations combinatoires de  $\nabla(f_\mu)$ , où  $\{f_\mu\}$  est une base des fonctions symétriques. Les personnes intéressées peuvent consulter (Loehr et Warrington, 2008) qui en fait un recensement. Il est à noter que la conjecture schuffle, pour  $\nabla(e_n)$  a été prouvée dans (Carlson et Mellit, 2015).

Une autre jolie interprétation combinatoire de  $\nabla(e_n)|_{t=1}$  est utile dans la section 3.1. À cette fin, on introduit la notion de chemins de Dyck.

Dans la grille  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , un *pas-est*, noté  $E$ , est un «déplacement» de  $(a, b)$  vers  $(a+1, b)$  et un *pas-nord*, noté  $N$ , un «déplacement» de  $(a, b)$  vers  $(a, b+1)$ . Un *chemin de Dyck* est une séquence de pas-nord ou de pas-est partant de  $(0, 0)$  et terminant à  $(n, n)$ , tout en demeurant au-dessus de la *diagonale principale*  $x = y$ . Cela correspond donc à un «mot» :  $\gamma = r_1 r_2 \cdots r_{2n}$ , où  $r_i \in \{E, N\}$ . Le nombre total de pas-nord et de pas-est sont égaux et dans chaque préfixe,  $r_1 r_2 \cdots r_k$ , le nombre de pas-nord est plus grand ou égal au nombre de pas-est. On dénote cet ensemble de chemins  $\mathcal{D}_{n,n} = \mathcal{D}_n$  et on pose  $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{n,n}$ .

*Exemple 21* : La figure 1.6 montre une représentation géométrique du chemin  $NNENNEEENE$  :

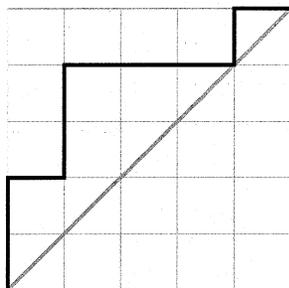


Figure 1.6 Chemin de Dyck

L'*aire* d'un chemin est le nombre de cases qui sont sous le chemin et strictement au-dessus de la diagonale principale. On dénote  $aire : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}$  l'application qui donne l'aire d'un chemin. On ne s'attarde pas sur la notion d'aire puisqu'elle est utile que pour introduire l'équation 1.19 qui est utilisé, dans ce mémoire, en la spécialisation



vont de  $(a, b)$  vers  $(a + 1, b + 1)$  et les pas-est vont de  $(a, b)$  vers  $(a + 1, b - 1)$ . Les «mots» correspondants à ces chemins sont les mêmes que dans la définition précédente. C'est la représentation géométrique qui est différente. Pour  $\gamma = r_1 r_2 \cdots r_{2n}$ , si la représentation géométrique de  $r_k$  va de  $(a, b)$  vers  $(c, d)$ , on dit que la coordonnée de  $r_k$  est  $(c, d)$ . On nomme *pic* les endroits où  $r_k r_{k+1} = NE$  et la *coordonnée du pic* est la coordonnée de  $r_k$ . La *hauteur d'un pic* est l'ordonnée de  $r_k$  et la *somme des pics* est alors la somme des abscisses des coordonnées des pics. Cette représentation est utilisée à la fin de la section 3.2 dans les exemples 34 et 35.

*Exemple :* La figure 1.9 montre la représentation géométrique des pics du chemin  $\gamma = N N E N N E E E N E$  vu dans l'exemple précédent.

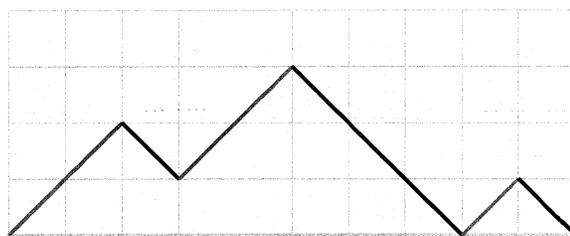


Figure 1.9 Pics d'un chemin de Dyck

Les pics sont en  $(2, 2)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(9, 1)$  et la somme des pics de  $\gamma$  est  $2 + 5 + 9 = 16$ .

On a préféré introduire deux interprétations géométriques puisque la première simplifie énormément les preuves du chapitre 3 et la deuxième simplifie l'énoncée de la question posée à la fin du chapitre 3. De plus, ce choix met en relief le fait que les chemins de Dyck peuvent être utilisés de deux façons distinctes pour interpréter combinatoirement  $\nabla(e_n)|_{q=t=1}$ .

Il peut arriver que l'image d'un opérateur coïncide avec celle de  $\nabla$  sur une composante homogène. On en présente quelques-unes dans la section qui suit.

### 1.8 Opérateurs $\Delta$ .

Depuis l'avènement des polynômes de Macdonald, plusieurs autres opérateurs ayant les polynômes de Macdonald comme fonctions propres ont été étudiés, notamment les opérateurs définis par substitution pléthystiques définis dans cette section. Cette famille d'opérateurs propres de Macdonald a été introduite dans (Garsia et Haiman, 1996a). Le temps a montré que certains de ces opérateurs ont une interprétation liée à la théorie de la représentation.

La notation suivante permet d'alléger les formules :

$$B_\mu = \sum_{(i,j) \in \mu} q^i t^j. \quad (1.20)$$

Soit  $F \in \Lambda$ , alors  $\nabla_F$  est un opérateur  $\mathbb{Q}(q, t)$ -linéaire défini sur la base des polynômes de Macdonald par :

$$\nabla_F H_\mu(X; q, t) = F[B_\mu] H_\mu(X; q, t). \quad (1.21)$$

(Beaucoup de publications utilisent la notation  $\Delta_F$  plutôt que  $\nabla_F$ . Ce choix sera justifié dans la section 2.4.)

Ces opérateurs coïncident parfois avec  $\nabla$ . En effet, si  $G \in \Lambda$  est homogène de degré  $n$  alors  $\nabla(G) = \nabla_{e_n}(G)$ . Attention! Ceci n'est pas toujours vrai : si  $G$  est homogène de degré  $k \neq n$  alors  $\nabla(G) \neq \nabla_{e_n}(G)$ .

Ces opérateurs ont la propriété suivante  $\nabla_{aF+bGH} = a\nabla_F + b\nabla_G \circ \nabla_H$ , où  $a, b$  sont des éléments de  $\mathbb{Q}(q, t)$  et  $F, G$  et  $H$  des fonctions symétriques. Cette dernière provient

de la définition du pléthysme 1.12. De plus, si on considère les fractions rationnelles de fonctions symétriques plutôt que  $\Lambda$  on trouve que  $(\nabla_F)^{-1} = \nabla_{\frac{1}{F}}$ . Ceci permet de déduire que  $\nabla_{F+G}$  est Schur positif si  $\nabla_F$  et  $\nabla_G$  le sont, car la somme d'expressions Schur positives est Schur positive. Il faut cependant faire attention ceci n'est pas vrai pour la propriété d'être virtuellement Schur positif.

Une autre approche est de remarquer que les valeurs propres de  $\nabla_{e_1}$  sont toutes distinctes, car  $e_1[B_\mu] = B_\mu$ . Il s'ensuit, par l'interpolation de Lagrange, que tout opérateur peut s'écrire comme un polynôme en  $\nabla_{e_1}$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}(q, t)$ .

*Exemple 23 :*

$$\nabla_{e_2} = \sum_{\mu} \frac{e_2[B_\mu] \nabla_{e_1}}{B_\mu} \prod_{\lambda \neq \mu} \frac{\nabla_{e_1} - B_\lambda}{B_\mu - B_\lambda}$$

Cependant, si on cherche à mettre en évidence que les coefficients polynomiaux, il faut travailler autrement. C'est la motivation derrière la section 2.4.

Ce qui précède rend le résultat qui suit étonnant. Tout comme pour  $\nabla$ , le théorème 1.3 de (Bergeron *et al.*, 1999) montre que :

*Théorème (Bergeron-Garsia-Haiman-Tesler) :* Pour tout  $F \in \Lambda$  on a :

$$\nabla_F(\Lambda_{\mathbb{Z}[q,t]}) \subseteq \Lambda_{\mathbb{Z}[q,t]}.$$

En particulier, ceci implique que les opérateurs ainsi définis sont Schur polynomiaux, tel qu'énoncé dans la définition 10. Il existe plusieurs conjectures liées à la Schur positivité de certains de ces opérateurs. La première est la conjecture 3.20 de (Haiman, 2002).

*Conjecture 3 (Bergeron-Garsia-Haiman-Tesler) :* Pour tout  $k$  et  $\mu \vdash n$ , l'expression

$\nabla_{s_\mu}(e_k)$  est Schur positive.

Dans le même article, il est montré que  $\nabla_{s_\mu} \left( h_n \left[ \frac{X}{(1-q)(1-t)} \right] \right)$  et  $\nabla_{e_n s_\mu}(e_k)$  sont des expressions Schur positives. Ceci est accompli en leur associant un caractère de Frobenius. Le cas spécial  $\mu = 1^k$  et  $t = 1/q$  est prouvé dans le corollaire 5.1 de (Haglund *et al.*, 2016). Plus généralement, il est possible de se questionner sur quelle fonction symétrique donne des expressions Schur positives pour  $\nabla_f(e_k)$  ou même  $\nabla_f(s_\lambda)$ . Ainsi que, se questionner sur lesquelles parmi ces expressions Schur positives sont le Frobenius d'un espace de polynômes.

Ce chapitre termine avec une application de  $\omega$  qui donne un lien entre les coefficients d'expressions qui ne sont pas liées, à première vue. Le corollaire 2.9 de (Haglund, 2004) montre que pour tout  $F \in \Lambda^n$  :

$$\langle \nabla_{e_{d-1}}(e_n), F \rangle = \langle \nabla_{\omega F}(e_d), s_d \rangle.$$

En particulier, pour tout  $\mu \vdash n$ , on a les égalités  $\langle \nabla_{e_{d-1}}(e_n), s_\mu \rangle = \langle \nabla_{s_{\mu'}}(e_d), s_d \rangle$  et  $\langle \nabla_{e_{d-1}}(e_n), s_n \rangle = \langle \nabla_{e_n}(e_d), s_d \rangle$ .

Pour mieux étudier la Schur positivité, il serait utile de caractériser plus en profondeur les opérateurs ayant les polynômes de Macdonald comme fonctions propres.

## CHAPITRE II

### CARACTÉRISATION DES OPÉRATEURS PROPRES DE MACDONALD

La majeure partie de ce chapitre découle d'une recherche originale. Lorsque ce n'est pas le cas, les références sont indiquées. Dans un premier temps, on discute de caractérisation générale des opérateurs propres de Macdonald. On introduit, ensuite, des nouvelles catégories d'opérateurs dits monomiaux que l'on caractérise également. Dans la troisième section, on utilise les outils introduits dans les sections précédentes pour caractériser l'opérateur  $\nabla$ . Enfin, on termine cette partie par l'introduction d'une généralisation d'opérateurs définis par substitution pléthystiques considérés au chapitre 1.

#### 2.1 Caractérisation générale

L'étude de la structure des opérateurs linéaires ayant des polynômes orthogonaux comme fonctions propres est de grande importance dans la résolution d'équations aux dérivées partielles. Il est mentionné à la fin de la section 1.4 que les polynômes de Macdonald (combinatoires) peuvent s'obtenir comme transformées de Frobenius du caractère bigradué des modules de Garsia-Haiman. Il est donc naturel de chercher à caractériser les opérateurs ayant les polynômes de Macdonald comme fonction propre afin de mieux comprendre ces modules. Il faut, cependant, remarquer que

la motivation originale de cette étude est liée à certains opérateurs en physique qui ont les polynômes de Macdonald comme fonction propre. La représentation par les modules de Garsia-Haiman est venue suite à l'étude de ces polynômes.

Avant d'introduire les opérateurs propres de Macdonald, on définit des opérateurs plus généraux. Soit  $A$  un anneau contenant les variables  $q$  et  $t$ . On dit que  $N$  est un *opérateur homogène de Macdonald de degré  $k$*  si on a, pour toute composante homogène :

$$N : \Lambda_A^d \rightarrow \Lambda_A^{d+k}$$

$$H_\mu \mapsto \sum_{\lambda \vdash d+k} a_{\lambda, \mu} H_\lambda.$$

Ce sont des opérateurs  $A$ -linéaire homogènes de degré  $k$  dont les fonctions propres sont des polynômes de Macdonald. Les opérateurs de l'exemple qui suit sont utilisés dans les lemmes 18 et 19.

*Exemple 24 :* L'opérateur  $U$  définit par  $U(H_\mu) = \sum_{\mu < \lambda} H_\lambda$  est un opérateur homogène de degré 1. C'est-à-dire, pour  $\mu = 321$ , on a :

$$U(H_{321}) = \sum_{321 < \lambda} H_\lambda = H_{421} + H_{331} + H_{322} + H_{3211}.$$

L'opérateur  $D$  défini par  $D(H_\mu) = \sum_{\lambda < \mu} H_\lambda$  est homogène de degré  $-1$ . Donc, pour  $\mu = 321$ , on a :

$$D(H_{321}) = \sum_{\lambda < 321} H_\lambda = H_{32} + H_{311} + H_{221}.$$

*Exemple 25 :* Soit  $\underline{e}_1$  l'opérateur qui multiplie une fonction symétrique par  $e_1$ . Il

est montré, par la proposition 1.3 et le théorème 1.4 de (Garsia et Tesler, 1996) que :

$$\begin{aligned} \underline{e}_1 : \Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)}^d &\rightarrow \Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)}^{d+1} \\ H_\mu &\mapsto \sum_{\mu \triangleleft \lambda} d_{\lambda,\mu}(q,t) H_\lambda \end{aligned}$$

où  $\mathcal{R}_{\lambda,\mu}$  représente l'ensemble des cases du diagramme  $\mu$  dans la même ligne que l'unique case du diagramme  $\lambda/\mu$ ,  $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$  représente l'ensemble des cases du diagramme  $\mu$  dans la même colonne que  $\lambda/\mu$  et :

$$d_{\lambda,\mu}(q,t) = \prod_{c \in \mathcal{R}_{\lambda,\mu}} \frac{q^{a_\mu(c)} - t^{l_\mu(c)+1}}{q^{a_\lambda(c)} - t^{l_\lambda(c)+1}} \prod_{c \in \mathcal{C}_{\lambda,\mu}} \frac{t^{l_\mu(c)} - q^{a_\mu(c)+1}}{t^{l_\lambda(c)} - q^{a_\lambda(c)+1}}$$

Pour  $\mu = 21$  on a :

$$\underline{e}_1(H_{21}) = e_1 H_{21} = \frac{(t-q^2)(1-q)}{(t^2-q^2)(t-q)} H_{31} + \frac{(1-t)(1-q)}{(1-t^2)(1-q^2)} H_{22} + \frac{(q-t^2)(1-t)}{(q^2-t^2)(q-t)} H_{211}$$

La proposition 1.2 de (Garsia et Tesler, 1996) montre que  $\underline{e}_1 \left[ \frac{X}{(1-q)(1-t)} \right]$  est l'opérateur adjoint à  $\delta_{e_1} = \sum_{i \geq 1} \frac{\delta}{\delta x_i}$ , pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ . Ce dernier est un opérateur homogène de degré  $-1$ . Alors pour :

$$c_{\lambda,\mu}(q,t) = \prod_{c \in \mathcal{R}_{\mu,\lambda}} \frac{t^{l_\mu(c)} - q^{a_\mu(c)+1}}{t^{l_\lambda(c)} - q^{a_\lambda(c)+1}} \prod_{c \in \mathcal{C}_{\mu,\lambda}} \frac{q^{a_\mu(c)} - t^{l_\mu(c)+1}}{q^{a_\lambda(c)} - t^{l_\lambda(c)+1}}$$

Ainsi :

$$\delta_{e_1}(H_\mu) = \sum_{\lambda \triangleleft \mu} c_{\lambda,\mu}(q,t) H_\lambda$$

Ce qui donne pour  $\mu = 21$  :

$$\delta_{e_1}(H_{21}) = \frac{t-q^2}{t-q} H_{11} + \frac{q-t^2}{q-t} H_2$$

La plupart des opérateurs considérés dans la suite de ce travail sont de degré 0.

Un opérateur  $\mathbb{Q}(q, t)$ -linéaire,  $N : \Lambda_{\mathbb{Q}(q, t)} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{Q}(q, t)}$ , est un *opérateur propre de Macdonald* si pour les valeurs propres  $v_\mu = v_\mu(q, t)$  l'opérateur est défini par :

$$N(H_\mu) = v_\mu H_\mu.$$

Bien que  $H_\mu$  soit un vecteur propre de l'opérateur, il est d'usage de dire que  $H_\mu$  est une *fonction propre*. S'il n'y a pas risque de confusion, la valeur propre associée à  $H_\mu$  est noté  $v_\mu$ . De plus, on dénote la composition d'opérateurs  $F \circ G$  par  $FG$ .

Ces opérateurs sont bien définis puisque les polynômes de Macdonald combinatoires forment une base des polynômes symétriques et qu'il est suffisant de donner l'image pour une base afin de définir un opérateur. Bien entendu, ces opérateurs commutent pour la composition, puisqu'ils partagent la même base de vecteurs propres. Le lemme qui suit montre ce résultat classique.

*Lemme 10 :* Deux opérateurs ayant une même base de vecteurs propre commutent.

*Démonstration.* Soit  $B, D$  deux opérateurs ayant la base de vecteurs propres  $\{H_\mu\}$  et de valeurs propres respectives  $\{v_\mu(q, t)\}, \{w_\mu(q, t)\} \subseteq \mathbb{Q}(q, t)$ . Soit  $f \in \Lambda_{\mathbb{Q}(q, t)}$  telle que  $f = \sum a_\mu(q, t)H_\mu$ . Alors :

$$\begin{aligned} (B \circ D)(f) &= (B \circ D) \left( \sum a_\mu(q, t)H_\mu \right) \\ &= \sum a_\mu(q, t)B(D(H_\mu)) \\ &= \sum a_\mu(q, t)B(w_\mu H_\mu) \\ &= \sum a_\mu(q, t)w_\mu B(H_\mu) \\ &= \sum a_\mu(q, t)w_\mu v_\mu H_\mu \\ &= \sum a_\mu(q, t)D(v_\mu H_\mu) \\ &= \sum a_\mu(q, t)D(B(H_\mu)) \end{aligned}$$

Donc les opérateurs commutent. ■

Dans le chapitre 3, on voit qu'il peut y avoir des obstructions à ce que les opérateurs commutent si les paramètres  $q$  et  $t$  ne sont plus abstraits.

Il est maintenant facile de vérifier que l'ensemble des opérateurs propres de Macdonald inversibles,  $\mathcal{O}$ , à coefficients dans  $\mathbb{Q}(q, t)$  forme un groupe abélien pour la composition. Il est représenté par l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans  $\mathbb{Q}(q, t)$  ayant un déterminant non nul.

Le groupe  $\mathcal{O}$  admet le sous-groupe suivant :

$$\mathcal{C} = \{N \in \mathcal{O} \mid N(H_\mu) = q^{k_n} t^{l_n} H_\mu \text{ pour tout } \mu \vdash n\}. \quad (2.1)$$

Autrement dit, les valeurs propres ne dépendent que de la taille de  $\mu$ . Ce sous-groupe est normal, puisque  $\mathcal{O}$  est abélien. On peut donc considérer le groupe quotient  $\mathcal{O}/\mathcal{C}$ . La relation d'équivalence associée à ce groupe quotient est notée  $\simeq$ .

Ainsi, si un opérateur  $N$  peut être transformé en un opérateur  $F$  à l'aide d'un monôme dans l'anneau des polynômes de Laurent en  $\mathbb{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$  et que ce facteur de correction ne dépend que du degré de la fonction symétrique à laquelle on applique  $N$  et  $F$  on note  $N \simeq F$ .

*Exemple 26 :* Soit  $N$  défini par  $N(H_\mu) = q^n H_\mu$  pour tout  $\mu \vdash n$ , alors  $N \simeq \text{id}$ .

*Exemple 27 :* Soit  $N$  défini par  $N(H_\mu) = qt \nabla(H_\mu)$ , alors  $N \simeq \nabla$ .

Les lemmes suivants montrent que cette construction est utile pour l'étude d'opérateurs Schur polynomiaux et Schur positifs, telles que vues dans la définition 10.

*Lemme 11 :* Soit  $F \in \mathcal{C}$ , alors  $F$  est Schur positif.

*Démonstration.* Pour une composante homogène de degré  $n$ , les valeurs propres de  $F$  sont de la forme  $q^{c_n} t^{d_n}$ , par définition. Alors, pour tout  $\mu \vdash n$ , on a :

$$F(s_\mu) = q^{c_n} t^{d_n} s_\mu.$$

C'est donc bien Schur positif. ■

Il est intéressant de remarquer que si un opérateur propre de Macdonald a la propriété d'être Schur polynomial ou Schur positif alors tous les éléments de sa classe d'équivalence ont la même propriété.

*Lemme 12 :* Soient  $F$  et  $G$  deux opérateurs propres de Macdonald tel que  $F \simeq G$ . Alors  $F$  est Schur polynomial (respectivement Schur positif) si et seulement si  $G$  est Schur polynomial (respectivement Schur positif).

*Démonstration.* Si  $F \simeq G$  alors par définition il existe  $N \in \mathcal{C}$  tels que  $F = NG$ . Par le lemme 11  $N$  est Schur positif. De plus,  $\mathcal{C}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{O}$  donc  $N$  est inversible. Puisque la composition de deux opérateurs Schur polynomiaux (respectivement Schur positif) est Schur polynomial (respectivement Schur positif) le résultat suit. ■

Attention! Bien que le résultat précédent reste vrai pour les opérateurs Schur positifs, il ne l'est pas pour les opérateurs virtuellement Schur positifs. En effet, il est facile de vérifier que l'ensemble des opérateurs propres de Macdonald qui sont Schur polynomiaux,  $\mathcal{P}$ , et l'ensemble des opérateurs propres de Macdonald qui sont Schur positifs,  $\mathcal{S}$ , sont des sous-groupes de  $\mathcal{O}$ . Cependant, l'ensemble des opérateurs

propres de Macdonald qui sont virtuellement Schur positif,  $\mathcal{V}$ , n'est pas un sous-groupe, car la composition de deux opérateurs virtuellement Schur positifs ne l'est pas nécessairement, comme le montre l'exemple qui suit.

*Exemple 28 :* Soit  $N$  un opérateur propre de Macdonald ayant les valeurs propres :

$$v_{11}(q, t) = (2t - q) \text{ et } v_2(q, t) = q.$$

Alors, en utilisant les matrices de transition  $K(n)$  et  $K(n)^{-1}$ , on trouve :

$$N(s_{11}) = 2s_2 + (q + 2t)s_{11} \text{ et } N(s_2) = -qs_2 - 2qts_{11},$$

qui sont virtuellement Schur positif. Cependant :

$$N^2(s_2) = N(-qs_2 - 2qts_{11}) = (q^2 - 4qt)s_2 - 4qt^2s_{11},$$

n'est pas virtuellement Schur positif.

D'autres outils permettent de faciliter la détermination de la Schur positivité d'un opérateur propre de Macdonald. Le lemme 1.7 énoncé que l'opérateur  $\nabla$  vu dans la section 1.7 est tel que  $\nabla^{-1} = \omega^* \nabla \omega^*$ . On va montrer dans quelles conditions cette propriété est vraie. Pour un opérateur propre de Macdonald, la proposition qui suit donne cette caractérisation qui dépend uniquement des valeurs propres.

*Proposition 4 :* Soit  $N$  un opérateur propre de Macdonald inversible ayant les valeurs propres  $v_\mu(q, t) \in \mathbb{Q}(q, t)$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $v_\mu(q, t) = \frac{P(q, t)q^{c(\mu)}t^{d(\mu')}}{P(1/q, 1/t)}$  et  $P \in \mathbb{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ ,  $P \neq 0$ ,  $c(\mu), d(\mu') \in \mathbb{Z}$
- (ii)  $\omega^* N \omega^* = N^{-1}$

*Démonstration.* Si  $v_\mu(q, t) = \frac{P(q, t)q^{c(\mu)}t^{d(\mu')}}{P(1/q, 1/t)}$  alors :

$$v_\mu(1/q, 1/t) = \frac{P(1/q, 1/t)q^{-c(\mu)}t^{-d(\mu')}}{P(q, t)} = \frac{1}{v_\mu(q, t)}.$$

D'où,  $\omega^*N\omega^* = N^{-1}$ .

Réciproquement, si  $\omega^*N\omega^* = N^{-1}$ , alors, pour tout  $\mu$ ,  $\frac{1}{v_\mu(q, t)} = v_\mu(1/q, 1/t)$ . Puisque  $v_\mu(q, t) \in \mathbb{Q}(q, t)$ , on pose  $v_\mu(q, t) = \frac{P(q, t)}{Q(q, t)}$ , où  $P, Q \in \mathbb{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ . Sans perte de généralité, on suppose  $P$  et  $Q$  réduits au sens où il n'existe pas de  $R \in \mathbb{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$  tel que  $R|P$  et  $R|Q$ . On a alors :

$$P(1/q, 1/t)P(q, t) = Q(1/q, 1/t)Q(q, t). \quad (2.2)$$

Donc  $P(q, t) \mid Q(q, t)Q(1/q, 1/t)$ . Or,  $P$  et  $Q$  sont réduits, ainsi  $P(q, t) \mid Q(1/q, 1/t)$ .

D'où :

$$Q(1/q, 1/t) = M(q, t)P(q, t), M(q, t) \in \mathbb{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$$

En remplaçant dans l'équation 2.2 on trouve :

$$P(1/q, 1/t)P(q, t) = M(q, t)P(q, t)M(1/q, 1/t)P(1/q, 1/t).$$

Donc :

$$M(q, t)M(1/q, 1/t) = 1$$

Par conséquent,  $M$  est un monôme, car  $M(q, t) \in \mathbb{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ . Si bien que :

$$v_\mu(q, t) = \frac{P(q, t)}{Q(q, t)} = \frac{P(q, t)}{M(1/q, 1/t)P(1/q, 1/t)}.$$

Il s'en suit que  $v_\mu(q, t) = \frac{P(q, t)q^{c(\mu)}t^{d(\mu')}}{P(1/q, 1/t)}$ , tel que voulu. ■

Il est maintenant facile de déterminer si l'inverse d'un opérateur ayant la propriété que  $\omega^*N\omega^* = N^{-1}$  est virtuellement Schur positif.

*Corollaire 1 :* Soit  $N$  un opérateur, alors  $N$  est Schur polynomial (respectivement virtuellement Schur positif) si et seulement si  $\omega^* N \omega^*$  est Schur polynomial (respectivement virtuellement Schur positif).

*Démonstration.* On remarque d'abord que  $\omega^*$  est une involution. Il suffit donc de montrer que la conjugaison par  $\omega^*$  préserve la propriété d'être Schur polynomial (respectivement virtuellement Schur positif). Par le lemme 2,  $\omega^*(s_\mu) = \omega(s_\mu) = s_{\mu'}$ . De plus, pour tout polynôme de Laurent  $P(q, t) = \sum a_{k,l} q^k t^l$ , il existe  $N$  et  $M$  tels que, pour tout  $a_{k,l} \neq 0$ , on a  $k \leq N$  et  $l \leq M$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} P(1/q, 1/t) &= \sum a_{k,l} (1/q)^k (1/t)^l \\ &= q^{-N} t^{-M} \sum a_{k,l} q^{N-k} t^{M-l} \in \mathbb{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}] \end{aligned}$$

De plus, les signes des coefficients sont préservés. Ainsi pour tout  $\mu$  :

$$\begin{aligned} \omega^* N \omega^*(s_\mu) &= \omega^* N(s_{\mu'}) \\ &= \omega^* \left( \sum_{\lambda} P_{\lambda}(q, t) s_{\lambda} \right) \\ &= \sum_{\lambda} \omega^*(P_{\lambda}(q, t)) s_{\lambda} \\ &= \sum_{\lambda} P_{\lambda}(1/q, 1/t) s_{\lambda} \end{aligned}$$

Par ce qui précède, les coefficients sont tous dans  $\mathbb{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$  et le signe est préservé. L'application  $\omega$  préserve donc la propriété d'être Schur polynomial (respectivement virtuellement Schur positif), ce qui complète la preuve. ■

Avec les deux derniers résultats, il est donc suffisant de montrer que la conjecture 2 est vraie pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

On utilise maintenant des propriétés des polynômes de Macdonald pour caractériser certains opérateurs propres. Dans le lemme 5, on a montré que les polynômes de Macdonald sont multiplicatifs en  $t = 1$ . Certains opérateurs propres peuvent également avoir une propriété similaire. On dit que  $N$  est un *opérateur multiplicatif pour  $t = 1$* , ou  *$q$ -multiplicatif*, si pour tout  $\mu$  on a :

$$N(H_\mu(X; q, 1)) = N(H_{\mu_1}(X; q, 1))N(H_{\mu_2}(X; q, 1)) \cdots N(H_{\mu_k}(X; q, 1))$$

La propriété peut également être défini par les valeurs propres de  $N$ . Par définition on a :

$$N(H_\mu(X; q, 1)) = v_\mu(q, 1)H_\mu(X; q, 1).$$

On a également, par l'égalité 1.16 :

$$\begin{aligned} N(H_\mu(X; q, 1)) &= N(H_{\mu_1}(X; q, 1))N(H_{\mu_2}(X; q, 1)) \cdots N(H_{\mu_k}(X; q, 1)) \\ &= v_{\mu_1}(q, 1)v_{\mu_2}(q, 1) \cdots v_{\mu_k}(q, 1)H_\mu(X; q, 1). \end{aligned}$$

Donc :

$$v_\mu(q, 1) = v_{\mu_1}(q, 1)v_{\mu_2}(q, 1) \cdots v_{\mu_k}(q, 1). \quad (2.3)$$

Si un opérateur satisfait cette caractérisation pour tout  $\mu$  on dit simplement que  $N$  est *multiplicatif*.

Attention ! Ceci n'est vrai que pour  $t = 1$ . Comme le montre l'exemple qui suit :

*Exemple 29 :* Soit  $N$  l'opérateur défini par  $v_\mu(q, t) = q^{|\mu|}t$ , on a alors pour  $\mu = \mu_1, \dots, \mu_k$  :

$$q^{|\mu|} = v_\mu(q, 1) = v_{\mu_1}(q, 1) \cdots v_{\mu_k}(q, 1) = q^{\mu_1} \cdots q^{\mu_k}$$

Cependant :

$$q^{|\mu|}t = v_\mu(q, t) \neq v_{\mu_1}(q, t) \cdots v_{\mu_k}(q, t) = q^{\mu_1}t \cdots q^{\mu_k}t = q^{|\mu|}t^k$$

Un opérateur,  $N$ , est dit *opérateur multiplicatif pour  $q = 1$* , ou  *$t$ -multiplicatif*, si pour tout  $\mu$  :

$$v_{\mu'}(1, t) = v_{1^{\mu_1}}(1, t)v_{1^{\mu_2}}(1, t) \cdots v_{1^{\mu_k}}(1, t). \quad (2.4)$$

*Exemple 30* : Soit  $N$ , un opérateur, avec les valeurs propres  $v_{\mu}(q, t) = q(qt + 1)^{\mu_1}$ . Alors pour  $\mu = \mu_1, \dots, \mu_k$  on a :

$$(t + 1)^{\ell(\mu)} = v_{\mu'}(1, t) = v_{1^{\mu_1}}(1, t) \cdots v_{1^{\mu_k}}(1, t) = (t + 1) \cdots (t + 1) = (t + 1)^k.$$

Il est facile de vérifier que l'opérateur  $\nabla$  vu dans la section 1.7 est un opérateur  $t$ -multiplicatif et  $q$ -multiplicatif.

La prochaine définition est inspirée de la propriété des polynômes de Macdonald  $H_{\mu}(X; q, t) = H_{\mu'}(X; t, q)$  vu au lemme 4. Dans ce qui suit, on établit une condition nécessaire et suffisante pour que ceci soit vrai pour toutes les valeurs propres d'un opérateur.

*Définition 13* : Soit  $N$ , un opérateur, propre de Macdonald défini par les valeurs propres  $\{v_{\mu}(q, t)\}$ . Si  $v_{\mu}(q, t) = v_{\mu'}(t, q)$  pour tout  $\mu$ , on dit que  $N$  a la *symétrie conjuguée*.

Avec cette condition pour les opérateurs  $t$ -multiplicatifs, l'équation 2.5 est équivalente à :

$$v_{\mu}(t, 1) = v_{\mu_1}(t, 1)v_{\mu_2}(t, 1) \cdots v_{\mu_k}(t, 1). \quad (2.5)$$

Le lemme qui suit est une généralisation directe d'une preuve qui se trouve à la page 402 de (Bergeron *et al.*, 1999) faite pour le cas  $\nabla$ .

*Lemme 13 :* Soit  $N$  un opérateur propre de Macdonald. Alors  $N$  a la symétrie conjuguée si et seulement si  $N|_{q \leftrightarrow t} = N$ .

*Démonstration.* Soit  $\{v_\mu(q, t)\}$  l'ensemble des valeurs propres de  $N$ , alors :

$$\begin{aligned} N|_{q \leftrightarrow t}(H_\mu(X; q, t)) &= N|_{q \leftrightarrow t}(H_{\mu'}(X; t, q)), \text{ par 1.15,} \\ &= v_{\mu'}(t, q)H_{\mu'}(X; t, q) \\ &= v_{\mu'}(t, q)H_\mu(X; q, t), \text{ par 1.15.} \end{aligned}$$

De plus :

$$N(H_\mu(X; q, t)) = v_\mu(q, t)H_\mu(X; q, t).$$

D'où,  $N|_{q \leftrightarrow t} = N$  si et seulement si  $N$  a la symétrie conjuguée. ■

De ce lemme on remarque également que si la valeur propre de  $N$  pour  $H_\mu(X; q, t)$  est  $v_\mu(q, t)$  alors la valeur propre de  $N|_{q \leftrightarrow t}$  pour  $H_\mu(X; q, t)$  est  $v_{\mu'}(t, q)$ .

*Lemme 14 :* Soit  $N$  un opérateur propre de Macdonald. Alors  $N$  est  $q$ -multiplicatif si et seulement si  $N|_{q \leftrightarrow t}$  est  $t$ -multiplicatif.

*Démonstration.* La preuve se déduit de la définition. Si  $N$  est  $q$ -multiplicatif, on a :

$$v_\mu(q, 1) = v_{\mu_1}(q, 1)v_{\mu_2}(q, 1) \cdots v_{\mu_{\ell(\mu)}}(q, 1)$$

Donc, pour  $N|_{q \leftrightarrow t}$ , ceci donne :

$$\begin{aligned} v_{\mu'}(1, q) &= v_\mu(q, 1)_{q \leftrightarrow t} \\ &= (v_{\mu_1}(q, 1)v_{\mu_2}(q, 1) \cdots v_{\mu_{\ell(\mu)}}(q, 1))_{q \leftrightarrow t} \\ &= v_{1\mu_1}(1, q)v_{1\mu_2}(1, q) \cdots v_{1\mu_k}(1, q) \end{aligned}$$

D'où  $v_{\mu'}(1, t) = v_{1^{\mu_1}}(1, t)v_{1^{\mu_2}}(1, t) \cdots v_{1^{\mu_k}}(1, t)$ . Ainsi  $N|_{q \leftrightarrow t}$  est bien  $t$ -multiplicatif. La réciproque se montre de la même façon. ■

*Corollaire 2 :* Soit  $N$  un opérateur ayant la symétrie conjuguée. Alors  $N$  est multiplicatif en  $t = 1$  si et seulement si  $N$  est multiplicatif en  $q = 1$ .

*Démonstration.* Puisque  $N$  a la symétrie conjuguée, on a, par le lemme 13, que  $N = N|_{q \leftrightarrow t}$ . Le résultat découle donc du lemme précédent. ■

On introduit maintenant à une sous-famille particulière d'opérateurs propres de Macdonald.

## 2.2 Caractérisation des opérateurs monomiaux et interprétation combinatoire

La notion d'opérateurs monomiaux est une généralisation de  $\nabla$  en une famille d'opérateurs propres de Macdonald. On étudie ici leurs propriétés. L'auteure a trouvé une interprétation combinatoire aux opérateurs de cette famille qui ont un minimum de structure. On aborde d'abord des opérateurs plus généraux pour ensuite montrer l'intérêt de l'interprétation combinatoire. On finit la section par la caractérisation des opérateurs monomiaux.

*Définition 14 :* Un opérateur propre de Macdonald est dit *monomial* si toutes ses valeurs propres sont des monômes de la forme  $q^{c(\mu)}t^{d(\mu')}$ , où  $c(\mu), d(\mu') \in \mathbb{Z}$ .

Dans la section 2.1, on a remarqué que les opérateurs propres de Macdonald inversibles forment le groupe abélien  $\mathcal{O}$ . Le lemme suivant traite des opérateurs monomiaux.

*Lemme 15 :* L'ensemble des opérateurs monomiaux,  $\mathcal{M}$ , forme un groupe abélien pour la composition.

*Démonstration.* Il suffit de montrer que c'est un sous-groupe de  $\mathcal{O}$ . Soient  $F$  et  $G$ , deux opérateurs monomiaux. Alors toutes les valeurs propres de  $F$  sont de la forme  $q^{c(\mu)}t^{d(\mu')}$ , où  $c(\mu), d(\mu') \in \mathbb{Z}$  et les valeurs propres de  $G$  sont de la forme  $q^{e(\mu)}t^{f(\mu')}$ , où  $e(\mu), f(\mu') \in \mathbb{Z}$ . Clairement la valeur propre 1 peut s'écrire  $q^0t^0$  donc l'identité est bien monomiale. L'inverse de  $F$  est une vérification tout aussi évidente :

$$F^{-1}(H_\mu) = q^{-c(\mu)}t^{-d(\mu')}H_\mu.$$

Donc  $F^{-1}$  est bien monomial. Évidemment, pour tout  $\mu$ , on a :

$$\begin{aligned} F \circ G(H_\mu) &= F(G(H_\mu)) \\ &= F(q^{e(\mu)}t^{f(\mu')}H_\mu) \\ &= q^{e(\mu)}t^{f(\mu')}F(H_\mu) \\ &= q^{c(\mu)+e(\mu)}t^{d(\mu')+f(\mu')}H_\mu. \end{aligned}$$

Alors  $F \circ G \in \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}$  est fermé pour la composition, ce qui complète la preuve  $\blacksquare$

Une simple observation permet de constater que le sous-groupe  $\mathcal{C}$  de la section 2.1 est un sous-groupe de  $\mathcal{M}$ . Il est normal, car  $\mathcal{M}$  est abélien. On peut donc considérer le groupe quotient  $\mathcal{M}/\mathcal{C}$ , lorsque ceci est utile.

Certaines circonstances requièrent une autre méthode qui peut s'avérer efficace : la décomposition d'un opérateur monomial comme produit d'un  $q$ -opérateur,  $Q$ , et d'un  $t$ -opérateur,  $T$ . Un  $q$ -opérateur est un opérateur propre de Macdonald monomial avec des valeurs propres de la forme  $q^{c(\mu)}$ . La notion de  $t$ -opérateur est analogue. Avec

cette terminologie, pour tout opérateur monomial,  $N$ , on a  $N = QT$ . Le  $q$ -opérateur associé à  $N$  est noté  $Q_N$  et le  $t$ -opérateur associé à  $N$  est noté  $T_N$ . Tout opérateur monomial se décompose naturellement de cette façon. De plus, pour un  $q$ -opérateur défini par  $Q(H_\mu) = q^{c(\mu)}$ , on note  $Q'$  l'opérateur tel que  $Q'(H_\mu) = q^{c(\mu')}$ . L'opérateur  $T'$  est construit de façon analogue.

On introduit maintenant un outil qui est aux opérateurs monomiaux, ce que les fonctions paires et impaires sont aux fonctions analytiques.

*Définition 15 :* Soit  $N = QT$  un opérateur monomial. Le *symétriseur* est l'application  $B : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  telle que  $B(N) = QQ|_{q \leftrightarrow t}$ .

Par construction, on a donc que  $B(N)|_{t=1} = N|_{t=1}$  et  $B(N)$  est un opérateur ayant la symétrie conjuguée.

*Exemple 31 :* Soit  $N$  l'opérateur monomial défini par les valeurs propres  $\{q^{c(\mu)}t^{d(\mu)}\}$ , alors :

$$\begin{aligned}
 B(N)(H_\mu(X; q, t)) &= Q_N Q_N|_{q \leftrightarrow t}(H_\mu(X; q, t)) \\
 &= Q_N(Q_N(H_\mu(X; t, q)))|_{q \leftrightarrow t} \\
 &= Q_N(Q_N(H_{\mu'}(X; q, t)))|_{q \leftrightarrow t} \\
 &= Q_N(q^{c(\mu')} H_{\mu'}(X; q, t))|_{q \leftrightarrow t} \\
 &= Q_N(t^{c(\mu')} H_\mu(X; q, t)) \\
 &= q^{c(\mu)} t^{c(\mu')} H_\mu(X; q, t)
 \end{aligned}$$

Une petite mise en garde s'impose ici, l'opérateur  $|_{q \leftrightarrow t}$  vu en haut de l'exemple 19 est tel que  $Q|_{q \leftrightarrow t} = Q'|_{q=t}$ , il ne s'agit donc pas simplement d'échanger  $q$  et  $t$  dans les valeurs propres, mais aussi dans les fonctions auxquels les opérateurs s'appliquent

tel que remarqué suit au lemme 13.

*Lemme 16 :* Soit  $N$  un opérateur monomial, alors il existe  $F$ , un unique opérateur ayant la symétrie conjuguée, et  $G$ , un unique  $t$ -opérateur, tels que  $N = FG$ . Plus précisément,  $F = B(N)$ .

*Démonstration.* Pour l'existence, on considère,  $N = QT$ . Alors, par définition de symétriseur,  $B(N) = QQ|_{q \leftrightarrow t}$ . Donc  $G = NB(N)^{-1} = QT(QQ|_{q \leftrightarrow t})^{-1} = T(Q|_{q \leftrightarrow t})^{-1}$  est un  $t$ -opérateur et on obtient bien l'existence, puisque les opérateurs monomiaux forment un groupe abélien et sont donc inversibles.

Pour l'unicité, considérons  $F_1$  et  $F_2$  deux opérateurs ayant la symétrie conjuguée ainsi que  $G_1$  et  $G_2$  deux  $t$ -opérateurs tels que  $N = F_1G_1 = F_2G_2$ . On trouve alors  $F_1(F_2)^{-1} = (G_1)^{-1}G_2$ . Donc  $G_1(G_2)^{-1}$  est un opérateur ayant la symétrie conjuguée, car ceux-ci sont stables pour la composition. Or, les  $t$ -opérateurs sont stables par composition, donc  $G_1(G_2)^{-1}$  est un  $t$ -opérateur qui a la symétrie conjuguée. Ainsi,  $G_1(G_2)^{-1} = \text{id}$ . D'où,  $F_1 = F_2$  et  $G_1 = G_2$ . ■

Il est facile de vérifier que ceci fait en sorte que, pour  $N = FG$  et  $F = B(N)$ , on a  $N|_{q \leftrightarrow t} = HG^{-1}$ , où  $H = FGG|_{q \leftrightarrow t}$  a la symétrie conjuguée. De plus, on déduit de l'exemple 31 que pour  $N$  défini par les valeurs propres  $\{q^{c(\mu)}t^{d(\mu)}\}$  on trouve  $F(H_\mu) = q^{c(\mu)}t^{c(\mu')}H_\mu$  et  $G(H_\mu) = t^{d(\mu)-c(\mu')}H_\mu$ .

Le symétriseur permet d'obtenir de l'information sur les valeurs propres de certains opérateurs.

*Proposition 5 :* Soit  $N$  un opérateur monomial tel que  $N = B(N)T$  où  $T$  est un  $t$ -opérateur. Alors,  $T = T'$  si et seulement si les valeurs propres de  $N$  sont telles que

$$(q - t) \mid (v_\mu(q, t) - v_{\mu'}(t, q)).$$

*Démonstration.* Soient  $\{w_\mu(q, t)\}$  les valeurs propres de  $B(N)$  et  $\{v_\mu(q, t)\}$  les valeurs propres de  $N$ . Pour tout  $n$ , il existe  $c : \text{Part}(n) \rightarrow \mathbb{N}$  tel que  $\{t^{c(\mu)}\}$  sont les valeurs propres de  $T$ . Ainsi les valeurs propres de  $N$  sont données par  $v_\mu(q, t) = t^{c(\mu)}w_\mu(q, t)$ . Par le lemme 13, pour tout  $\mu$  on a  $w_\mu(q, t) = w_{\mu'}(t, q)$ , donc :

$$\begin{aligned} v_\mu(q, t) - v_{\mu'}(t, q) &= t^{c(\mu)}w_\mu(q, t) - q^{c(\mu')}w_{\mu'}(t, q) \\ &= t^{c(\mu)}w_\mu(q, t) - q^{c(\mu')}w_\mu(q, t) \\ &= (t^{c(\mu)} - q^{c(\mu')})w_\mu(q, t). \end{aligned}$$

Ainsi  $(q - t) \mid (v_\mu(q, t) - v_{\mu'}(t, q))$  si et seulement si  $c(\mu) = c(\mu')$  pour tout  $\mu \vdash n$ , car  $w_\mu(q, t)$  est un monôme. Or dire que  $c(\mu) = c(\mu')$  pour tout  $\mu \vdash n$  est équivalent à dire que  $T = T'$ , ce qui complète la preuve. ■

En particulier ceci donne une condition pour les valeurs propres si  $N \simeq B(N)$ . (L'équivalence  $\simeq$  a été définie à la page 61.) Attention ! Ceci n'est pas vrai en général. Il existe des opérateurs propres qui ne sont pas monomiaux tels que  $(q - t) \mid (v_\mu(q, t) - v_{\mu'}(t, q))$  et  $N \neq B(N)T$ ,  $T = T'$ .

*Exemple 32 :* Soit  $N$  un opérateur ayant les valeurs propres  $v_\mu(q, t) = q + qt$  pour tout  $\mu$ . Alors  $N \neq GT$ , où  $G$  est un opérateur ayant la symétrie conjuguée. Cependant :

$$(q - t) \mid (v_\mu(q, t) - v_{\mu'}(t, q)) = (q + qt - t - qt) = (q - t)$$

On étudie, maintenant, des opérateurs monomiaux ayant des propriétés particulières. Afin d'alléger le texte, on dit qu'un opérateur est *MMS*, si c'est un opérateur propre de Macdonald monomial, qui a la symétrie conjuguée et qui est multiplicatif en  $t = 1$ .

*Proposition 6 :* Soit  $N$  un opérateur monomial. Alors  $N$  est un opérateur MMS si et seulement s'il existe une suite  $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $a(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} a_i$  et  $N(H_\mu) = q^{a(\mu)} t^{a(\mu')} H_\mu$ .

*Démonstration.* Si  $N$  est un opérateur MMS, alors, par la définition 13 pour les opérateurs ayant la symétrie conjuguée et par définition d'opérateurs monomiaux, on a  $N(H_\mu) = q^{a(\mu)} t^{a(\mu')} H_\mu$ . De plus, par multiplicativité :

$$q^{a(\mu)} t^{a(\mu')} = q^{a(\mu_1)} q^{a(\mu_2)} \dots q^{a(\mu_k)}, \text{ par 2.3.}$$

Il est donc suffisant de montrer qu'il existe une suite  $A$  qui décrit  $a(n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

On pose alors :

$$A = \{a(k) - a(k-1)\}_{k \in \mathbb{N}}, \text{ où } a(-1) = 0$$

D'où la suite recherchée.

La réciproque découle de la définition d'opérateur MMS. ■

On représente les opérateurs MMS pour  $a = a_0$ ,  $b = a_1$ ,  $c = a_2$  et  $\mu = 22111$  par la figure 2.1, où la puissance est la somme des entrées du tableau.

Cette représentation se généralise à des entrées  $a_{i,j}$  (respectivement  $b_{i,j}$ ) dans les cases  $(i, j)$  pour obtenir les puissances des valeurs propres pour  $q$  (respectivement  $t$ ). La figure 2.2 en est un exemple pour  $\mu = 22111$ .

Cette représentation s'avère pratique pour mieux comprendre. Par contre, elle n'est pas pratique pour faire des preuves, puisqu'elle implique un choix de  $\mu$ . Elle n'est donc pas visible par la suite.

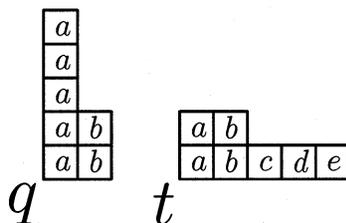
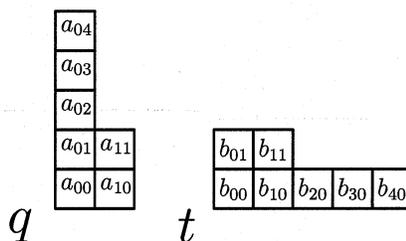
Figure 2.1 Opérateur MMS associé à la suite  $(a, b, c, d, e, \dots)$ 

Figure 2.2 Opérateur interprétable

*Définition 16 :* Un opérateur monomial est dit *interprétable* s'il existe des ensembles de valeurs  $\{a_{i,j}\}$ ,  $\{b_{i,j}\}$  tels que  $N(H_\mu) = q^{a(\mu)} t^{b(\mu)} H_\mu$ , où  $a(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} a_{i,j}$  et  $b(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} b_{i,j}$ .

De façon équivalente un opérateur monomial est interprétable si pour tout  $\mu$  et pour tout  $\lambda \subseteq \mu$  on a :

$$v_\mu(q, t) = v_{\mu/\lambda}(q, t) v_\lambda(q, t).$$

C'est-à-dire qu'il existe un  $v_{\mu/\lambda}$  bien défini, comme application sur les partages gauches.

Avec cette interprétation combinatoire, il devient facile d'identifier un opérateur multiplicatif. En effet, la proposition 6 et le lemme 16 disent que les opérateurs multiplicatifs en  $t = 1$  ont une interprétation pour l'opérateur  $Q_N$  qui est stable par colonne et que les opérateurs multiplicatifs en  $q = 1$  ont une interprétation pour l'opérateur  $T_N$  qui est stable par colonne. Une personne voulant se convaincre que c'est bien stable par colonne dans les deux cas peut se référer à la figure 2.1.

*Lemme 17 :* Soient  $N$  et  $M$  deux opérateurs monomiaux interprétables ayant, respectivement, les ensembles de valeurs associées  $\{a_{i,j}\}$ ,  $\{b_{i,j}\}$  et  $\{c_{i,j}\}$ ,  $\{d_{i,j}\}$ . Alors  $N \circ M$  est interprétable et les ensembles de valeurs associées sont  $\{a_{i,j} + c_{i,j}\}$  et  $\{b_{i,j} + d_{i,j}\}$ .

*Démonstration.* Soient  $\{v_\mu\}$  l'ensemble des valeurs propres pour  $N$  et  $\{w_\mu\}$  l'ensemble des valeurs propres pour  $M$ . Alors, pour tout  $\mu$  :

$$\begin{aligned} N(M(H_\mu)) &= v_\mu(q, t)w_\mu(q, t)H_\mu \\ &= v_{\mu/\lambda}v_\lambda w_{\mu/\lambda}w_\lambda H_\mu \end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned} N(M(H_\mu)) &= N\left(q^{\sum_{(i,j) \in \mu} c_{i,j}} t^{\sum_{(i,j) \in \mu} d_{j,i}} H_\mu\right) \\ &= q^{\sum_{(i,j) \in \mu} c_{i,j}} t^{\sum_{(i,j) \in \mu} d_{j,i}} N(H_\mu) \\ &= q^{\sum_{(i,j) \in \mu} c_{i,j}} t^{\sum_{(i,j) \in \mu} d_{j,i}} q^{\sum_{(i,j) \in \mu} a_{i,j}} t^{\sum_{(i,j) \in \mu} b_{j,i}} H_\mu \\ &= q^{\sum_{(i,j) \in \mu} a_{i,j} + c_{i,j}} t^{\sum_{(i,j) \in \mu} b_{j,i} + d_{j,i}} H_\mu \end{aligned}$$

Donc pour tout  $\mu \triangleleft \lambda$  on a :

$$\begin{aligned} N(M(H_\lambda)) &= v_{\lambda/\mu}v_\mu w_{\lambda/\mu}w_\mu H_\lambda \\ &= q^{a_{\lambda/\mu} + c_{\lambda/\mu}} t^{b_{\lambda'/\mu'} + d_{\lambda'/\mu'}} q^{\sum_{(i,j) \in \mu} a_{i,j} + c_{i,j}} t^{\sum_{(i,j) \in \mu} b_{j,i} + d_{j,i}} H_\lambda \end{aligned}$$

Alors pour tout  $\mu < \lambda$  les valeurs associées à la case  $\lambda/\mu$  sont  $a_{\lambda/\mu} + c_{\lambda/\mu}$  et  $b_{\lambda'/\mu'} + d_{\lambda'/\mu'}$ .

D'où le résultat ■

Avoir une structure de groupe est une propriété souvent utile comme on le verra plus loin.

*Proposition 7 :* Les opérateurs MMS et les opérateurs monomiaux interprétables forment chacun un groupe abélien.

*Démonstration.* Les deux ensembles sont des ensembles d'opérateurs monomiaux, donc il suffit de montrer que ce sont des sous-groupes de  $\mathcal{M}$  qui est abélien, par le lemme 15. Du lemme précédent, on sait que les opérateurs interprétables sont fermés pour la composition. L'identité est l'opérateur interprétable ayant les ensembles  $\{0\}$  et  $\{0\}$  comme valeurs associées. En utilisant la proposition précédente, il est donc facile de voir que l'inverse de l'opérateur interprétable ayant les valeurs associées  $\{a_{i,j}\}$  et  $\{b_{i,j}\}$  est l'opérateur ayant les valeurs associées  $\{-a_{i,j}\}$  et  $\{-b_{i,j}\}$ .

Les opérateurs MMS peuvent être vus comme l'ensemble des opérateurs interprétables tels que pour tout  $i, j$  et  $k$  on ait  $a_{i,j} = b_{i,j}$  et  $a_{i,j} = a_{k,j}$ . Le résultat découle alors d'une preuve analogue à la preuve précédente. ■

On a la caractérisation suivante des opérateurs interprétables.

Soit  $\{W^{(i,j)}\}$  une famille d'opérateurs linéaires définis par :

$$W^{(i,j)}(H_\mu) = \begin{cases} H_\mu & \text{si } (i,j) \in \mu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de remarquer que les  $W^{(i,j)}$  commutent avec les opérateurs propres de Macdonald. Alors, de la définition précédente, on déduit le lemme suivant.

*Lemme 18 :* Soit  $N$  un opérateur monomial. Alors pour tout  $\lambda, \lambda = \mu \cup \{(i, j)\}$  on a  $q^{a_{i,j}} t^{b_{j,i}} v_\mu = v_\lambda$  si et seulement si :

$$(W^{(i,j)} NU - q^{a_{i,j}} t^{b_{j,i}} W^{(i,j)} UN)(H_\mu) = 0,$$

où  $U$  est défini dans l'exemple 24.

*Démonstration.* Pour tout  $\lambda = \mu \cup \{(i, j)\}$ , on a :

$$W^{(i,j)} NU(H_\mu) = NW^{(i,j)} U(H_\mu) = N(H_\lambda) = v_\lambda H_\lambda,$$

car  $W^{(i,j)}$  commute avec  $N$ . De plus :

$$q^{a_{i,j}} t^{b_{j,i}} W^{(i,j)} UN(H_\mu) = q^{a_{i,j}} t^{b_{j,i}} v_\mu H_\lambda$$

En combinant les deux égalités, on obtient le résultat voulu. ■

Le lemme qui suit permet de faire des preuves par récurrence sur la relation de couverture pour tout opérateur monomial interprétable. On en déduit la possibilité de faire des preuves par récurrence sur  $\mathbb{N}$  pour tout opérateur MMS.

*Lemme 19 :* Soit  $N$  un opérateur monomial. Les assertions suivantes sont équiva-

lentes :

- (i)  $N$  est un opérateur monômial interprétable .  
(ii) Il existe des ensembles de valeurs  $\{a_{i,j}\}, \{b_{i,j}\}$  tels que  $\forall n, \forall \mu \vdash n$   
et  $\forall (i, j)$  coin extérieur de  $\mu$  on a :

$$W^{(i,j)}(NU - q^{a_{i,j}}t^{b_{j,i}}UN)(H_\mu) = 0.$$

- (iii) Il existe des ensembles de valeurs  $\{a_{i,j}\}, \{b_{i,j}\}$ , tels que  $\forall n, \forall \mu \vdash n$   
et  $\forall (i, j)$  coin intérieur de  $\mu$  on a :

$$\left( \prod_{\substack{(k,l) \text{ coin intérieur de } \mu \\ (k,l) \neq (i,j)}} W^{(k,l)} \right) (ND - q^{-a_{i,j}}t^{-b_{j,i}}DN)(H_\mu) = 0.$$

où le produit est la composition d'opérateurs et où  $D$  est défini dans l'exemple 24.

*Démonstration.* Par définition d'opérateur monomial interprétable et par le lemme 18, on a (i) est vrai si et seulement si (ii) est vrai.

On considère d'abord :

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{(k,l) \text{ coin intérieur de } \mu \\ (k,l) \neq (i,j)}} W^{(k,l)} ND(H_\mu) &= N \left( \prod_{\substack{(k,l) \text{ coin intérieur de } \mu \\ (k,l) \neq (i,j)}} W^{(k,l)} D(H_\mu) \right) \\ &= N \left( \prod_{\substack{(k,l) \text{ coin intérieur de } \mu \\ (k,l) \neq (i,j)}} W^{(k,l)} \left( \sum_{\substack{\gamma \subseteq \mu \\ |\mu/\gamma|=1}} H_\gamma \right) \right) \\ &= N(H_{\mu/(i,j)}) \end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned} \prod W^{(k,l)} q^{-a_{i,j}} t^{-b_{j,i}} DN(H_\mu) &= q^{-a_{i,j}} t^{-b_{j,i}} v_\mu \left( \prod W^{(k,l)} D(H_\mu) \right) \\ &= q^{-a_{i,j}} t^{-b_{j,i}} v_\mu H_{\mu/\{(i,j)\}}, \end{aligned}$$

où le produit est sur  $(k, l)$  coin intérieur de  $\mu$  avec  $(k, l) \neq (i, j)$ . Donc, par définition d'opérateur monomial interprétable on a bien que (i) est vrai si et seulement si (iii) est vrai. ■

Il est maintenant facile de déduire qu'un opérateur monomial interprétable a une unique représentation.

*Corollaire 3 :* Soit  $N$  un opérateur monomial interprétable. Il existe une unique paire d'ensembles de valeurs  $\{a_{i,j}\}$  et  $\{b_{i,j}\}$  qui définissent  $N$ .

*Démonstration.* Soit un opérateur interprétable  $N$  définie par la paire d'ensembles de valeurs  $\{a_{i,j}\}$  et  $\{b_{i,j}\}$  et la paire d'ensembles de valeurs  $\{c_{i,j}\}$  et  $\{d_{i,j}\}$ . Comme l'opérateur est monomial interprétable par le lemme précédent, on a pour tout  $\mu$  et pour tout  $(i, j)$  coin extérieur de  $\mu$  :

$$W^{(i,j)}(NU - q^{a_{i,j}} t^{b_{j,i}} UN)(H_\mu) = 0 \text{ et } W^{(i,j)}(NU - q^{c_{i,j}} t^{d_{j,i}} UN)(H_\mu) = 0.$$

Donc :

$$q^{a_{i,j}} t^{b_{j,i}} W^{(i,j)} UN(H_\mu) = q^{c_{i,j}} t^{d_{j,i}} W^{(i,j)} UN(H_\mu).$$

Ainsi :

$$q^{a_{i,j}} t^{b_{j,i}} v_\mu H_{\mu \cup \{(i,j)\}} = q^{c_{i,j}} t^{d_{j,i}} v_\mu H_{\mu \cup \{(i,j)\}}.$$

D'où  $a_{i,j} = c_{j,i}$  et  $b_{i,j} = d_{j,i}$  pour tout  $\mu$  et pour tout  $(i, j)$  coin extérieur de  $\mu$ . On a donc l'unicité de la paire d'ensembles de valeurs. ■

Les opérateurs monomiaux peuvent également être caractérisés.

*Proposition 8 :* Soit  $N$  un opérateur propre de Macdonald. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $N$  est monômial .
- (ii)  $\omega^* N \omega^* = N^{-1}$  et les valeurs propres de  $N$  sont dans  $\mathbb{Q}^+[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ .

*Démonstration.* Si  $N$  est monômial le résultat se déduit de la proposition 4. Si  $\omega^* N \omega^* = N^{-1}$  alors par la proposition 4, les valeurs propres sont de la formes  $\frac{P_\mu(q,t)}{P_\mu(1/q,1/t)} q^{c(\mu)} t^{d(\mu')}$ . Donc  $\frac{P_\mu(q,t)}{P_\mu(1/q,1/t)} \in \mathbb{Q}^+[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ . Ainsi, il existe  $Q_\mu \in \mathbb{Q}^+[q, t]$  tel que :

$$\frac{P_\mu(q,t)}{P_\mu(1/q,1/t)} = q^{g(\mu)} t^{h(\mu')} Q_\mu(q,t).$$

Donc :

$$\frac{P_\mu(1/q,1/t)}{P_\mu(q,t)} = q^{-g(\mu)} t^{-h(\mu')} Q_\mu(1/q,1/t).$$

D'où :

$$Q_\mu(q,t) = \frac{1}{Q_\mu(1/q,1/t)} \in \mathbb{Q}^+[q, t].$$

Posons  $Q_\mu(q,t) = \sum a_{i,j}^\mu q^i t^j$ ,  $e(\mu) = \deg_q(Q_\mu)$  et  $f(\mu) = \deg_t(Q_\mu)$ . Alors :

$$q^{e(\mu)} t^{f(\mu)} Q(q,t) = \frac{q^{e(\mu)} t^{f(\mu)}}{Q_\mu(1/q,1/t)} = \frac{q^{e(\mu)} t^{f(\mu)}}{\sum a_{i,j}^\mu q^{e(\mu)-i} t^{f(\mu)-j}}$$

est un polynôme et donc le seul  $a_{i,j}^\mu$  non nulle est  $a_{e,f}^\mu$ .

De plus,  $Q_\mu(q,t) = a_{e,f}^\mu q^e t^f = \frac{1}{a_{e,f}^\mu q^{-e} t^{-f}}$  donc  $a_{e,f}^\mu = 1$ , car  $a_{e,f}^\mu \in \mathbb{Q}^+$ . D'où les valeurs propres sont tous des monômes ■

Il est à noter que la preuve utilise seulement le fait que les valeurs propres de  $N$  sont dans  $\mathbb{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$  et que leur coefficient dominant est positif.

La section suivante est dédiée à la caractérisation d'un opérateur monomial très important : l'opérateur  $\nabla$ .

### 2.3 Caractérisation de $\nabla$

Dans la section 2.2, on a remarqué que la monomialité, la multiplicativité sont des propriétés assez fortes pour forcer un lien entre les valeurs propres associées à des polynômes de Macdonald de degrés différents. Il est surprenant de constater que l'ajout de la condition de la polynomialité dans la base des fonctions de Schur induit une caractérisation pour  $\nabla$ .

On a également constaté, dans la section 2.1, que si  $N$  peut être transformé en  $F$  en le composant par un opérateur constant par degré dont les valeurs propres sont des monômes dans l'anneau des polynômes de Laurent en  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ , alors  $N \simeq F$ . Voir les exemples 26 et 27.

De plus, dans le lemme 19, on a montré qu'il est possible de faire des preuves par récurrence sur des opérateurs MMS. Ceci est utilisé dans le théorème suivant et on y voit que la Schur polynomialité est en fait une propriété très restrictive.

*Théorème 1 :* Soit  $N$ , un opérateur. Alors  $N$  est dans la même classe d'équivalence qu'un opérateur MMS tel que les coefficients de  $N(s_{\mu}(X))$  sont dans l'anneau des polynômes de Laurent  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$  (Schur polynomial), si et seulement si  $N \simeq \nabla^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , et où  $\nabla^0 = \text{id}$ .

*Démonstration.* Par le lemme 13  $\nabla$  a la symétrie conjuguée. C'est également un

opérateur multiplicatif. Donc  $\nabla$  est un opérateur MMS. Les opérateurs MMS forment un groupe par le lemme 7, donc  $\nabla^m$  est un opérateur MMS pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ . Si  $N \simeq \nabla^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , et où  $\nabla^0 = \text{id}$  alors le résultat découle du corollaire 1.1 de (Bergeron et al., 1999) et de la stabilité par composition de la Schur polynomialité, par le lemme 12.

Soit  $N$ , un opérateur MMS tel que les coefficients de  $N(s_\mu(X))$  sont dans l'anneau des polynômes de Laurent  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$

Par la proposition 6 on a  $v_\mu(q, t) = q^{a(\mu)} t^{a(\mu')}$  où  $a(\mu)$  dépend d'une suite  $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Comme la suite  $A$  détermine entièrement les valeurs propres de l'opérateur et que les  $n$  premiers termes de  $A$  déterminent valeurs propres de tous les  $\mu$  pouvant être contenue dans le partage  $n^n$ , on fait la récurrence sur  $n$ .

On va montrer que les opérateurs qui ne sont pas associés à une suite de la forme  $A = \{k + mi\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  ont au moins un coefficient dans cette matrice qui n'est pas dans  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ . Comme  $(qt)^{k_n} \nabla^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  est associé à la suite  $A = \{k + mi\}_{i \in \mathbb{N}}$ , où pour une fonction symétrique de degré  $n$  on a  $k_n = kn$ . On obtient le résultat de cette façon.

Le cas  $n = 3$ , donne les trois premiers termes de la suite. On pose :

$$d = q^{a(3)} t^{a(1,1,1)}, e = q^{a(2,1)} t^{a(2,1)} \text{ et } f = q^{a(1,1,1)} t^{a(3)}.$$

Puisque  $N$  est multiplicative les colonnes de la grille associée à la suite  $A$  sont fixées. Alors, il existe  $k, m, \alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $k = a_0$ ,  $m = a_1 + k$  et  $\alpha = a_2 + k$ . On a donc que  $a(1, 1, 1) = 3k$ ,  $a(2, 1) = 3k + m$  et  $a(3) = 3k + m + \alpha$ . D'où :

$$d = (qt)^{3k} q^{m+\alpha}, e = (qt)^{3k} (qt)^m \text{ et } f = (qt)^{3k} t^{m+\alpha}.$$

On considère la matrice donnée par le produit :

$$M = K(3)^{-1} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} K(3).$$

Cette matrice est indexée horizontalement et verticalement par les fonctions de Schur, ou l'ordre choisi sur les fonctions de Schur est l'ordre lexicographique inversé des partages associé au Schur.

Il est possible de rendre toutes les puissances du numérateur positives en multipliant par  $(qt)^\gamma$  pour un gamma bien choisi. Ceci change la valeur de  $k$ , mais la preuve reste valide, par le lemme 12.

Le dénominateur commun à tous les termes de  $M$  est :

$$(q - t)(q^2 - t)(q - t^2).$$

En particulier, on a :

$$M_{3,1} = \frac{(-dt^2 - eq^2 + et^2 + fq^2 + dq - eq + et - ft)}{(q - t)(q - t^2)(q^2 - t)}$$

Donc :

$$(q - t)(q - t^2)(q^2 - t)M_{3,1} = (e - f)(t - q^2) + (d - e)(q - t^2).$$

Si :

$$t - q^2 \mid (e - f)(t - q^2) + (d - e)(q - t^2),$$

alors :

$$t - q^2 \mid (d - e) = (q^\alpha - t^m)q^m(qt)^{3k}. \quad (2.6)$$

Ce qui entraîne :

$$t - q^2 \mid q^\alpha - t^m = q^\alpha - q^{2m} + q^{2m} - t^m.$$

Ainsi :

$$t - q^2 \mid q^\alpha - q^{2m} \text{ ou } q^\alpha - q^{2m} = 0, \text{ car :}$$

$$t^m - q^{2m} = (t - q^2)(t^{m-1} + t^{m-2}q^2 + \dots + tq^{2m-4} + q^{2m-2}).$$

D'où  $\alpha = 2m$ , car un polynôme en  $q$  ne peut pas être divisible par un polynôme en  $q$  et  $t$ .

Les trois premiers termes de la suite satisfont la condition, car  $a_0 = k$ ,  $a_1 = k + m$  et  $a_2 = k + \alpha = k + 2m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Pour le cas général, par le lemme 12 on peut supposer que  $k = 0$ . Si la propriété est vraie jusqu'à  $n - 1$ , puisque les valeurs propres sont déterminées pour tout partage contenu dans le diagramme  $(n - 1)^{n-1}$ , alors pour tout  $\mu \vdash n$  tel que  $2 \leq \ell(\mu) \leq n - 1$  on a  $v_\mu(q, t) = q^{mn(\mu')} t^{mn(\mu)}$ , où  $n(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} j$ .

On pose alors  $\beta = a_{n-1}$ , ainsi  $v_{(n)}(q, t) = q^{m \binom{n-1}{2} + \beta}$  et  $v_{(1^n)}(q, t) = t^{m \binom{n-1}{2} + \beta}$ .

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
N - \nabla^m &= K(n)^{-1} \left( \begin{bmatrix} v_{(n)}(q,t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_{(n-1,1)}(q,t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{(2,1^{n-1})}(q,t) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v_{1^n}(q,t) \end{bmatrix} - \nabla^m \right) K(n) \\
&= K(n)^{-1} \begin{bmatrix} q^{m\binom{n-1}{2}}(q^\beta - q^{m(n-1)}) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t^{m\binom{n-1}{2}}(t^\beta - t^{m(n-1)}) \end{bmatrix} K(n)
\end{aligned}$$

Puisque la première colonne de  $K(n)$  n'a que des 1, voir théorème 1 de (Garsia et Haiman, 1993), on obtient :

$$(N - \nabla^m)_{p(n),1} = K(n)_{1,p(n)}^{-1} q^{m\binom{n-1}{2}}(q^\beta - q^{m(n-1)}) + K(n)_{p(n),p(n)}^{-1} t^{m\binom{n-1}{2}}(t^\beta - t^{m(n-1)}) \quad (2.7)$$

Où,  $p(n)$  est le nombre de partages de  $n$ .

De la même façon que pour le cas de base, il est possible de rendre toutes les puissances du numérateur positives en multipliant par  $(qt)^\gamma$  pour un  $\gamma$  bien choisi. Ceci ne changera pas la classe d'équivalence de  $N$ , la preuve restera donc valide.

De plus, l'équation 2.7 doit être vraie pour toutes valeurs de  $t$  et toutes valeurs de  $q$  en particulier pour  $t = 1$ . Puisque  $N$  est Schur polynomial, les coefficients de  $N$  dans la base de Schur sont dans l'anneau de Laurent en  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ , on obtient alors :

$$(N - \nabla_{t=1}^m)_{p(n),1} = K(n)_{1,p(n)}^{-1} q^{m\binom{n-1}{2}}(q^\beta - q^{m(n-1)}) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]. \quad (2.8)$$

Or, la proposition 1.1 et le théorème 1.1 de (Garsia et Tesler, 1996) montrent que :

$$H_\mu[(1-u); q, t] = \prod_{(i,j) \in \mu} (1 - q^i t^j u) \quad \text{et} \quad s_{1^n} \left[ \frac{XW}{(1-q)(1-t)} \right] = \sum_{\mu \vdash n} \frac{H_\mu(X)H_\mu(W)}{\mathcal{E}_\mu(q,t)\mathcal{E}'_\mu(q,t)}$$

En posant respectivement  $u = (q + t - qt)$  et  $W = (1 - q)(1 - t)$  on trouve :

$$H_n[(1 - q)(1 - t); q, t] = \prod_{(i,j) \in (n)} (1 - q^{i+1}t^j - q^i t^{j+1} + q^{i+1}t^{j+1}) \text{ et} \quad (2.9)$$

$$s_{1^n} [Z] = \sum_{\mu \vdash n} \frac{H_\mu(Z) H_\mu((1 - q)(1 - t))}{\mathcal{E}_\mu(q, t) \mathcal{E}'_\mu(q, t)} \quad (2.10)$$

Il s'ensuit que le coefficient de  $H_n$  dans la décomposition de  $s_{1^n}$  dans la base des polynômes de Macdonald est :

$$\frac{H_n(Z) H_n((1 - q)(1 - t))}{\mathcal{E}_n(q, t) \mathcal{E}'_n(q, t)} = \frac{H_n(Z) \prod_{i=0}^{n-1} (1 - q^{i+1} - q^i t + q^{i+1} t)}{\prod_{c \in (n)} (q^{a(c)} - t^{l(c)+1}) \prod_{c \in (n)} (t^{l(c)} - q^{a(c)+1})}, \text{ car } j = 0$$

Donc lorsque  $t = 1$ , on a :

$$K(n)_{1,p(n)}^{-1} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (1 - q^{i+1} - q^i + q^{i+1})}{\prod_{i=0}^{n-1} (q^i - 1) \prod_{i=0}^{n-1} (1 - q^{i+1})} = \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=0}^{n-1} (1 - q^{i+1})}$$

En posant cette dernière égalité dans 2.8 on obtient :

$$(N - \nabla_{t=1}^m)_{p(n),1} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} (q^{i+1} - 1)} q^{m \binom{n-1}{2}} (q^\beta - q^{m(n-1)}) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}].$$

Ce qui est absurde, car  $n > 3$  et  $q^\beta(1 - q^{m(n-1)-\beta})$  ne peut pas être divisible par  $\prod_{i=0}^{n-1} (q^{i+1} - 1)$ .

Donc  $\beta = m(n - 1)$ . Ainsi  $N = (qt)^{k_n} \nabla^m \simeq \nabla^m$ , avec  $k_n = kn$  pour les termes de degré  $n$ . ■

Le théorème qui suit généralise légèrement le théorème précédent.

*Théorème 2 :* Soit  $N$ , un opérateur. Alors  $N$  est un opérateur monomial dans la même classe d'équivalence qu'un opérateur multiplicatif en  $q = 1$  et en  $t = 1$  tel que pour tous  $\mu$  les coefficients de  $N(s_\mu)$  la base des fonctions de Schur sont des polynômes de Laurent (Schur polynomial) si et seulement si  $N \simeq \nabla^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , et où  $\nabla^0 = \text{id}$ .

*Démonstration.* On remarque d'abord que si  $N \simeq \nabla^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , et où  $\nabla^0 = \text{id}$  le résultat découle du corollaire 1.1 de (Bergeron *et al.*, 1999) et de la stabilité par composition de la Schur polynomialité, par le lemme 12.

Réciproquement, on peut se restreindre à  $N$ , un opérateur monomial multiplicatif en  $q = 1$  et en  $t = 1$  Schur polynomial, quitte à composer avec l'inverse d'un opérateur dans  $\mathcal{C}$  tel que défini par l'égalité 2.1. Par le lemme 16, on pose  $N = LF$ , avec  $L = B(N)$  et  $F$  un  $t$ -opérateur. Le théorème précédent doit être vrai pour  $L$ , car  $L$  est multiplicatif et a la symétrie conjuguée. En posant  $t = 1$ , on peut appliquer le même raisonnement que dans la preuve du théorème précédent. Il s'ensuit que  $N = q^{l_n} t^{k_n} \nabla^m F$ . Soit  $\{t^{b(\mu)}\}$  les valeurs propres de  $F$ . Puisque dans la base de Schur  $N$  est à coefficients dans  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ , il est facile de remarquer que pour tout  $\mu \vdash n$  on a que  $N|_{q \leftrightarrow t}(s_\mu)$  dans la base de Schur a des coefficients dans  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ . De la même façon, on trouve pour  $N$ , que  $N|_{q \leftrightarrow t} = q^{p_n} t^{r_n} \nabla^s G$ , où  $G$  est un opérateur monomial en  $t$  ayant l'ensemble de valeurs propres  $\{t^{c(\mu)}\}$ .

De plus,  $(qt)^{k_n}|_{q \leftrightarrow t} = (qt)^{k_n}$  et par le lemme 13  $\nabla^m|_{q \leftrightarrow t} = \nabla^m$ , d'où :

$$\begin{aligned} 0 &= N|_{q \leftrightarrow t} - N|_{q \leftrightarrow t} \\ &= q^{l_n} t^{k_n} \nabla^m F|_{q \leftrightarrow t} - q^{p_n} t^{r_n} \nabla^s G \\ &= q^{l_n} t^{k_n} \nabla^m \left( F|_{q \leftrightarrow t} - q^{p_n - l_n} t^{r_n - k_n} \nabla^{s-m} G \right). \end{aligned}$$

Donc :

$$0 = F|_{q \leftrightarrow t} - q^{p_n - l_n} t^{r_n - k_n} \nabla^{s-m} G.$$

Or  $F|_{q \leftrightarrow t}$  est un  $q$ -opérateur et  $G$  est un  $t$ -opérateur donc, pour tout  $\mu$ , on doit avoir  $c(\mu) = k_n - r_n + (m - s)n(\mu)$ . Il s'ensuit que  $F|_{q \leftrightarrow t} = q^{r_n - k_n + (s-m)n(\mu)}$  donc que  $F = t^{r_n - k_n + (s-m)n(\mu)}$ .

Donc :

$$N(s_\mu) = q^{l_n} t^{r_n + (s-m)n(\mu)} \nabla^m(s_\mu)$$

En reprenant les notations du théorème précédent ( $d = v_{(3)}, e = v_{21}$ ), on trouve pour  $n = 3$  que  $d = q^{l_3} t^{r_3} q^{mn(1,1,1)} t^{sn(3)} = q^{l_3} t^{r_3} q^{3m}$  et  $e = q^{l_3} t^{r_3} q^{mn(2,1)} t^{sn(2,1)} = q^{l_3} t^{r_3} q^m t^s$ .

De plus, par 2.6, on a :

$$t - q^2 | d - e = q^{l_3} t^{r_3} q^{3m} - q^{l_3} t^{r_3} q^m t^s = q^{l_3} t^{r_3} q^m (q^{2m} - t^s)$$

Donc :

$$t - q^2 | q^{2m} - t^s = q^{2m} - q^{2s} + q^{2s} - t^s.$$

Ainsi :

$$t - q^2 | q^{2m} - q^{2s} \text{ ou } q^{2m} - q^{2s} = 0, \text{ car } q^{2s} - t^s = (q^2 - t)(q^{2s-2} + q^{2s-4}t + \dots + q^2 t^{s-2} + t^{s-1}).$$

Donc  $m = s$ , car un polynôme en  $q$  ne peut pas être divisible par un polynôme en  $q$  et  $t$ . D'où  $N = q^{k_n} t^{r_n} \nabla^m \simeq \nabla^m$  tel que voulu. ■

Si la conjecture 2 est vraie alors  $\nabla^m$  est virtuellement Schur positif pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ . En se rappelant que  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des opérateurs monomiaux constant sur les composantes homogènes et que  $N = GF \simeq G$  si  $F \in \mathcal{C}$ , avec la véracité de la conjecture 2 on obtient la caractérisation suivante pour  $\nabla$  :

*Corollaire 4 (sur la base de la conjecture 2) :* Soit  $N$ , un opérateur propre de Macdonald monomial, multiplicatif en  $t = 1$ , en  $q = 1$ . Alors  $N$  est virtuellement Schur positif, si et seulement si  $N \simeq \nabla^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , où  $\nabla^0 = \text{id}$ .

*Démonstration.* Si un opérateur est virtuellement Schur positif, il est en particulier Schur polynomial. Par le théorème précédent il existe donc  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $N \simeq \nabla^m$ . Réciproquement, si  $N = \nabla^m F$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , par la conjecture,  $\nabla^m$  est virtuellement Schur positif et par le lemme 12 on obtient que  $N$  l'est également. ■

On a montré que tous les opérateurs monomiaux  $q$ -multiplicatifs et  $t$ -multiplicatif qui sont Schur polynomiaux sont fort probablement virtuellement Schur positifs. Ceci incite à poser la question qui suit.

*Question 1 :* Est-ce que  $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ ? Autrement dit, existe-t-il un opérateur monomial Schur polynomial qui n'est pas virtuellement Schur positif?

Il est certain que ceci n'est pas vrai pour les opérateurs propres en général. Comme  $N^2$  dans l'exemple 28. Une autre question naturelle est reliée à  $\nabla$ .

*Question 2 :* Est-ce que tous les opérateurs monomiaux virtuellement Schur positifs sont dans la même classe d'équivalence qu'un opérateur dont toute restriction à une composante homogène est équivalente à la restriction à une composante homogène d'une puissance de  $\nabla$  (voir exemple dans l'équation 2.11)?

Le théorème 2 donne une caractérisation pour  $\nabla$ . Cependant, cette caractérisation n'est peut-être pas minimale, au sens où les conditions peuvent être affaiblies. Si on montre que les opérateurs monomiaux,  $q$ -multiplicatifs qui ne sont pas  $t$ -multiplicatifs (respectivement  $t$ -multiplicatifs qui ne sont pas  $q$ -multiplicatifs) sont dans la même classe d'équivalence que  $\nabla$  on a une caractérisation minimale. En effet, si la propriété de la question 4 (qu'un opérateur monomial dans la même classe d'équivalence qu'un opérateur  $q$ -multiplicatif ou  $t$ -multiplicatif Schur polynomial) caractérise

$\nabla$ , les conditions ne peuvent plus être assoupli. Il existe des opérateurs propres de Macdonald multiplicatif qui ne sont pas monomiaux et qui sont polynomiaux dans la base de Schur. Par exemple, les opérateurs vus dans la section 1.8 :

$$\nabla_f(H_\mu) = f[B_\mu]H_\mu, \text{ où } B_\mu = \sum_{(i,j) \in \mu} q^i t^j.$$

Il existe également des opérateurs propres de Macdonald qui ne sont pas multiplicatifs, mais qui sont monomiaux et qui sont polynomiaux dans la base de Schur. Par exemple :

$$N(H_\mu) = \nabla^n(H_\mu), \text{ lorsque } \mu \vdash n. \quad (2.11)$$

On a déjà montré que si  $N$  est un opérateur Schur polynomial,  $q$ -multiplicatif et pas  $t$ -multiplicatif (respectivement  $t$ -multiplicatifs et pas  $q$ -multiplicatifs) alors  $B(N) \simeq \nabla^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  (respectivement  $B(N|_{q \leftrightarrow t}) \simeq \nabla^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ). Donc  $B(N)$  (respectivement  $B(N|_{q \leftrightarrow t})$ ) est Schur polynomial. Puisque la composition d'opérateurs Schur polynomiaux est Schur polynomial, alors  $N(B(N))^{-1}$  est un  $t$ -opérateur (respectivement  $N(B(N|_{q \leftrightarrow t}))^{-1}$  est un  $q$ -opérateur) Schur polynomial. Or l'étude des systèmes d'équations pour  $n = 2, 3, 4$  mène l'auteure à croire que l'affirmation suivante est vraie.

*Question 3 :* Soit  $T$  (respectivement  $Q$ ) un  $t$ -opérateur (respectivement  $q$ -opérateur) Schur polynomial alors  $T$  appartient-il à  $\mathcal{C}$  (respectivement  $Q \in \mathcal{C}$ ) ?

Il est possible de montrer cette dernière affirmation dans le cas où  $T$  est un opérateur interprétable. Une récurrence sur les coins extérieurs contenant une quantité phénoménale de calculs permet de le montrer. Montrer que cette dernière question est vraie en général permet de prouver l'affirmation suivante qui donne une caracté-

risation minimale de  $\nabla$ .

*Question 4 :* Soit  $N$  un opérateur monomial et  $t$ -multiplicatif (respectivement  $q$ -multiplicatif). Alors  $N$  est-il Schur polynomial si et seulement si  $N \simeq \nabla^m$  ?

Une autre approche pour résoudre la question 4, est de prouver la question suivante à l'aide de la proposition 5.

*Question 5 :* Soit  $N$  un opérateur monomial et  $t$ -multiplicatif (respectivement  $q$ -multiplicatif). Si  $N$  est Schur polynomial alors  $N \simeq B(N)$ .

Ainsi à l'aide du théorème 1 on peut prouver la question 4.

Le théorème 1 peut également être utilisé comme approche à la résolution de la conjecture 2. En effet, on pose  $d = \binom{k+1}{2}$ , si pour toutes composantes homogènes fixées  $n$ , et pour tous  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $k + \binom{d+2}{2}$  opérateurs MMS virtuellement Schur positif dont le degré des valeurs propres varie entre 0 et  $\binom{k+1}{2}$  alors la conjecture est vrai pour tout  $\nabla^s$ ,  $-k \leq s \leq k$ . Ou de façon équivalente en étudiant le système d'équations de  $K(n)^{-1}FK(n)$  montrer que la probabilité que  $F$  soit un tel opérateur est  $\frac{\binom{d+2}{2}+k}{\binom{d+2}{2}^{\text{part}(n)}}$ .

Ou encore, pour toute composante homogène  $n$  en posant  $m_n$  le plus grand entier tel que  $m_n^2 \leq n$ , s'il existe un opérateur MMS virtuellement Schur positif ayant des valeurs propres dont la différence  $D$  entre le degré de la valeur propre ayant le plus grand degré et le degré de la valeur propre ayant le plus petit degré varie entre :

$$\binom{n+1}{2} - (m_n + 1)m_n^2 \leq D < \binom{n+2}{2} - (m_{n+1} + 1)m_{n+1}^2, \quad (2.12)$$

alors la conjecture 2 est vraie.

En effet, pour une variation donnée par l'inégalité 2.12, on peut voir le théorème 1 comme l'unicité d'opérateurs MMS non constants par degré et virtuellement Schur positif. Il suffit alors de montrer l'existence.

Maintenant que  $\nabla$  est presque complètement caractérisé, il est naturel de se demander s'il est possible de généraliser la notion d'opérateur pléthystique, afin d'obtenir des résultats similaires.

## 2.4 Généralisation

Dans cette section, on généralise les notions vues pour les opérateurs monomiaux aux opérateurs définis par substitution pléthystiques. Bien que les résultats de cette section soient préliminaires, on voit qu'une caractérisation des opérateurs définis par substitution pléthystique est sûrement possible grâce à cette généralisation. De plus, cette méthode assure des coefficients polynomiaux dans la base des  $\{H_\mu\}$ .

On utilise maintenant les opérateurs monomiaux interprétables pour généraliser  $B_\mu$  vu en 1.20 et l'opérateur  $\Delta$  vu en 1.21.

Soit  $N$  un opérateur monomial interprétable défini par les ensembles de valeurs  $\{a_{i,j}\}$  et  $\{b_{i,j}\}$ . On dénote :

$$B_\mu^N(q, t) = \sum_{(i,j) \in \mu} q^{a_{i,j}} t^{b_{j,i}}$$

Soit  $f$  une fonction symétrique. On définit alors l'opérateur propre  $N_f$  par ses valeurs propres de la façon suivante :

$$N_f(H_\mu) = f[B_\mu^N(q, t)]H_\mu$$

On retrouve ainsi certains objets présentés au chapitre 1,  $B_\mu^\nabla(q, t) = B_\mu(q, t)$  et  $\nabla_f = \Delta_f$ , ainsi on est prêt à énoncer un premier résultat.

*Lemme 20 :* Soit  $N$  un opérateur monomial interprétable défini par les ensembles de valeurs  $\{a_{i,j}\}$  et  $\{b_{i,j}\}$  alors :

$$B_{\mu}^{N^k}(q, t) = B_{\mu}^N(q^k, t^k) = B_{\mu}^N(q, t)[p_k].$$

*Démonstration.* On peut déduire du lemme 17 que les valeurs associées à  $N^k$  sont  $\{ka_{i,j}\}$  et  $\{kb_{i,j}\}$ . Le résultat découle alors de la définition de  $B^N(q, t)$ . ■

*Proposition 9 :* Soit  $N$  un opérateur monomial  $t$ -multiplicatif et  $q$ -multiplicatif. Si  $N_{e_k[p_r]}$ ,  $k \geq 3$  est virtuellement Schur positif alors  $N = q^{k_n} t^{r_n} \nabla^m$  ou  $k_n$  et  $r_n$  dépendent de la composante homogène  $n$ .

*Démonstration.* Pour tout  $\mu \vdash k$ , on a :

$$\begin{aligned} N_{e_k[p_r]}(H_{\mu}) &= (e_k[p_r])[B_{\mu}^N(q, t)] \\ &= (p_r[e_k])[B_{\mu}^N(q, t)] \\ &= p_r[e_k[B_{\mu}^N(q, t)]] \\ &= p_r[q^{\sum_{(i,j) \in \mu} a_{i,j}} t^{\sum_{(i,j) \in \mu} b_{j,i}}] \\ &= q^r \sum_{(i,j) \in \mu} a_{i,j} t^r \sum_{(i,j) \in \mu} b_{j,i} \\ &= N^r(H_{\mu}) \end{aligned}$$

Or,  $N$  est  $t$ -multiplicatif et  $q$ -multiplicatif donc par le théorème 2  $N = q^{k_n} t^{r_n} \nabla^m$ . ■

Ce chapitre termine avec un tableau indiquant les caractérisations des opérateurs propres de Macdonald vu jusqu'à maintenant. Les «oui» et les «non» sont prouvés dans ce mémoire ou dans la littérature et les «?» sont des éléments dont on ne connaît aucune preuve.

Tableau 2.1 Caractérisation des opérateurs propres de Macdonald

Propriété Type	<sup>1</sup>	Mono- mial	Inter- prétable	MMS	$\nabla$	$\nabla^k$ $k \in \mathbb{Z}$	$\nabla_F$ $\forall F \in \Lambda$	<sup>2</sup>
Preuve par récurrence	?	?	Oui	Oui	Oui	Oui	?	Non
Groupe abélien	$\mathcal{O}$	$\mathcal{M}$	Oui	Oui	Non	Oui	Non <sup>3</sup>	Non
Symétrie conjugué	Non	Non	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Multiplicatif	Non	Non	Non	Oui	Oui	Oui	Non	?
$N = N _{q \leftrightarrow t}$	Non	Non	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
$N = Q_N T_N$	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Non	?
$N = B(N)G$	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Non	?
Virtuellement Schur positif, $\mathcal{V}$	Non	Non	Non	Non	Oui	?	?	?
Schur polynomial	Non	Non	Non	Non	Oui	Oui	Oui	?
$N \in \mathcal{V}$ ssi $N^{-1} \in \mathcal{V}$	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	?	?
$\omega^* N \omega^* = N^{-1}$	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Non	?

---

1. Opérateurs propre de Macdonald inversible

2. Sous-ensemble de  $\{N_F | F \in \Lambda\}$

3. Oui si on remplace  $\Lambda$  par les fractions rationnelles de fonctions symétriques



## CHAPITRE III

### SPÉCIALISATION

Dans ce chapitre, on étudie les points de singularité de  $\nabla$  et la forme de Jordan associé à la spécialisation en  $q = t = 1$ . On termine avec une conjecture sur une interprétation combinatoire de la forme de Jordan de  $\nabla_{1,1}$ .

#### 3.1 Spécialisation $q^a = t^b$ , où $a, b \in \mathbb{N}$ , $q = t = 1$ et singularité

L'ensemble des polynômes de Macdonald (combinatoire),  $\{H_\mu\}$ , forment une base de  $\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)}$  si  $q$  et  $t$  sont algébriquement indépendant (voir proposition 3). Ceci n'est pas toujours le cas si  $q$  et  $t$  sont algébriquement dépendant. Ainsi on a :

*Lemme 21 :* L'ensemble des polynômes de Macdonald  $\{H_\mu\}$  est linéairement dépendant lorsque  $q^a = t^b$ , pour  $a, b \in \mathbb{N}$  et  $t \neq 1$ .

*Démonstration.* Pour  $\mu = (a+1, 1^{b-1})$  on a  $(q^{a(0,0)} - t^{l(0,0)+1}) = 0$ , car  $q^a = t^b$  donc :

$$H_{(a+1, 1^{b-1})}(X; q, t) = P_{(a+1, 1^{b-1})} \left[ \frac{X}{1-t}; q, t^{-1} \right] \prod_{c \in \mu} (q^{a(c)} - t^{l(c)+1}) = 0.$$

Il n'y a donc pas suffisamment d'éléments pour avoir une base. ■

Le lemme 21 dit alors que  $\nabla$  n'est plus défini lorsque  $q^a = t^b$ , puisqu'il est défini selon

la base de polynômes de Macdonald. Ces points sont donc des singularités. Ainsi, la matrice associée à  $\nabla$  est diagonalisable que si  $q^a \neq t^b$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ , car par le lemme 5 on a une base de vecteurs propres si  $q^a \neq t^b$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ . C'est pourquoi on étudie la structure de Jordan de  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]$  dans la prochaine section.

Le cas  $t = 1$  est vu dans le lemme suivant, car il faut prendre plus de précautions étant donné la singularité issue du pléthysme qui définit les polynômes de Macdonald combinatoire. Le résultat qui suit détermine les valeurs de  $q$  pour lesquelles les polynômes de Macdonald, évalués en  $q$  et  $t = 1$ , forment une base.

*Lemme 22 :*  $\{H_\mu(X; q, 1) | \mu \vdash n, n \in \mathbb{N}\}$  forme une base pour les fonctions symétriques en  $q$ , noté  $\Lambda_{\mathbb{Q}(q)}$ , si et seulement si  $q$  n'est pas une racine de l'unité.

*Démonstration.* Si  $q$  n'est pas une racine de l'unité alors dans  $e_n \left[ \frac{X}{1-q} \right] \prod_{i=1}^n (1 - q^i)$  le dénominateur du pléthysme et le coefficient  $\prod_{i=1}^n (1 - q^i)$  ne s'annulent pas. Ainsi, par le lemme 5, on sait que  $\{H_\mu(X; q, 1) | \mu \vdash n, n \in \mathbb{N}\}$  est une base puisque les fonctions symétriques élémentaires forment une base.

Si  $q$  est une racine de l'unité, il existe  $n$  et  $k$  tel  $q = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ . Si  $q \neq 1$  alors :

$$H_n(X; q, 1) = (1 - q^n) e_n \left[ \frac{X}{1-q} \right] \prod_{i=1}^{n-1} (1 - q^i) = 0.$$

L'ensemble ne peut donc pas être une base puisqu'il ne contient pas assez d'éléments non nuls.

Si  $q = 1$  alors pour tout  $n$  on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{q \rightarrow 1} H_n(X; q, 1) &= \lim_{q \rightarrow 1} e_n \left[ \frac{X}{1-q} \right] \prod_{i=1}^n (1 - q^i), \\
&= \lim_{q \rightarrow 1} \sum_{\mu \vdash n} \frac{(-1)^{n-\ell(\mu)}}{z_\mu} p_\mu \left[ \frac{X}{1-q} \right] \prod_{i=1}^n (1 - q^i), \\
&= \lim_{q \rightarrow 1} \sum_{\mu \vdash n} \frac{(-1)^{n-\ell(\mu)}}{z_\mu} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{1}{1 - q^{\mu_i}} p_\mu(X) \prod_{i=1}^n (1 - q^i), \\
&= \lim_{q \rightarrow 1} \sum_{\mu \vdash n} \frac{(-1)^{n-\ell(\mu)}}{z_\mu} p_\mu(X) (1 - q)^{n-\ell(\mu)} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{1}{[\mu_i]_q} \prod_{i=1}^n [i]_q, \\
&= \frac{p_{1^n}(X)}{z_{1^n}} n!, \\
&= p_{1^n}(X).
\end{aligned}$$

Par le lemme 5  $H_\mu(X; q, 1) = \prod_{i=1}^k H_{\mu_i}(X; q, 1)$ , alors on a  $H_\mu(X; 1, 1) = p_{1^n}(X)$ , pour tout  $\mu \vdash n$ . L'ensemble n'est donc pas une base. Ce qui complète la preuve ■

De tout ceci, on remarque d'abord que  $\nabla$  et ses puissances sont les seuls opérateurs MMS qu'il est possible d'évaluer la limite en  $q = t = 1$  lorsqu'on est dans la base des fonctions symétriques élémentaires. Ceci découle du théorème 1 et de la récurrence sur les opérateurs MMS, mais on ne s'attardera pas sur ce sujet plutôt analytique.

On remarque également que pour les bases de  $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ , les changements de base ne dépendent pas de  $q$  et  $t$ . Alors, dans  $\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)}$  ces changements de base ne changent rien à la limite. Par exemple, que la limite soit prise dans la base de Schur ou la base des sommes de puissance ne change rien, puisque la division par zéro est dans le passage de la base des polynômes de Macdonald à une des bases de  $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ .

Afin d'alléger la notation on dénote  $\nabla(f)|_{t=1}$  par  $\nabla_q(f)$ . On dénote  $\nabla_{1,1}(f)$  pour

$\nabla(f)$  exprimé dans la base  $\{e_\mu\}$ , et ensuite évalué en  $q = t = 1$ . Par le lemme précédent, il importe de mentionner dans quelle base l'évaluation est effectuée. Pour éviter, la confusion dans ce mémoire la limite lorsque  $q = t = 1$  est toujours prise dans la base des fonctions symétriques élémentaires.

C'est en gardant tout ceci à l'esprit qu'on étudie la structure de Jordan de la matrice à coefficient entier  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]$ . Cette matrice est indexé par les partages de  $n$  dans l'ordre lexicographique inversé et l'on rappelle que  $\{f_\mu\}$  est la base duale de la base des fonctions symétriques élémentaires.

### 3.2 Structure de Jordan de $\nabla_{1,1}$

Dans la section 1.7, on a vu par l'équation 1.19 que  $\nabla(e_\mu)$  a une belle expression combinatoire lorsque  $t = 1$ . Celle-ci a toujours un sens lorsque  $q = 1$ . De plus, le changement des fonctions symétriques élémentaires vers les fonctions de Schur préserve la positivité. Malgré la singularité de  $\nabla$  lorsque  $q = t = 1$ , il est possible d'étudier la structure de Jordan de l'opérateur en cette singularité en utilisant l'expression combinatoire.

Il est facile de vérifier que l'évaluation en  $q = t = 1$  préserve un aspect important de cette structure : la multiplicativité de  $\nabla$ . Le résultat suivant montre que  $\nabla_{1,1}$  demeure un opérateur gradué. On utilise ici l'interprétation combinatoire de  $\nabla$  de la section 1.7 via l'équation 1.19 :

$$\nabla_q(e_n) = \sum_{\gamma \in \mathcal{D}_{n,n}} q^{\text{aire}(\gamma)} e_{\rho(\gamma)} \quad (3.1)$$

Il aurait été possible de faire une preuve plus directe, mais l'auteure voulait introduire

le genre de preuves combinatoires que l'on voit dans cette section.

*Lemme 23 :* Le coefficient de  $e_\lambda$  dans  $\nabla_{1,1}(e_n)$  est égale à zéro si et seulement si  $\lambda$  est un partage de  $k \neq n$ .

*Démonstration.* On montre d'abord que si  $\lambda$  est un partage de  $n$  alors le coefficient de  $e_\lambda$  dans  $\nabla_{1,1}(e_n)$  n'est pas égale à zéro. Soit  $\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_k$  partage de  $n$ . Le chemin qui a  $\lambda_1$  pas-nord puis un pas-est suivi de  $\lambda_2$  pas-nord puis un pas-est, etc. jusqu'à  $\lambda_k$  pas-nord et  $n - k + 1$  pas-est, est un chemin de Dyck dans la grille  $n \times n$  ayant évidemment  $\lambda$  comme composition de contremarches. En effet,  $\sum_{j=1}^i \lambda_j \geq i$  pour tout  $i$  donc le chemin ne descend jamais en bas de la diagonale principale et  $k \leq n$  par définition de partage donc le chemin est bien contenu dans la grille  $n \times n$ . Comme l'équation 1.19 oblige les coefficients à être positifs et qu'on a montré qu'il existe au moins un chemin ayant  $\lambda$  comme partage associé à la grandeur des contremarches, on a bien que si  $\lambda$  est un partage de  $n$ , alors le coefficient de  $e_\lambda$  dans  $\nabla_{1,1}(e_n)$  n'est pas égale à zéro.

Réciproquement si  $\lambda$  est un partage de  $k \neq n$ , comme un chemin dans  $n \times n$  doit contenir exactement  $n$  pas-nord, alors par définition la somme des contremarches qui est la somme des  $\lambda_i$  doit être égale à  $n$  s'il existe un chemin dans  $n \times n$  ayant  $\lambda$  comme contremarche. Or  $\lambda$  est un partage de  $k \neq n$  il n'existe donc pas de tel chemin. Alors par la formule de Garsia-Haglund le coefficient de  $e_\lambda$  dans  $\nabla_{1,1}(e_n)$  est égale à zéro, tel que voulu. ■

En utilisant ce résultat, on trouve une condition qui détermine les termes dont le coefficient est nul.

*Lemme 24 :* Le coefficient de  $e_\lambda$  dans  $\nabla_{1,1}(e_\mu)$  est non nul si et seulement si  $\lambda \trianglelefteq \mu$ .

*Démonstration.* Soit  $\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_k$  tel que le coefficient de  $e_\lambda$  dans  $\nabla_{1,1}(e_\mu)$  est non nul. Par multiplicativité de  $\nabla_{1,1}$  on a :

$$\nabla_{1,1}(e_\mu) = \nabla_{1,1}(e_{\mu_1}) \cdots \nabla_{1,1}(e_{\mu_m}).$$

Chacun des termes de  $\nabla_{1,1}(e_\mu)$  est un produit de  $m$  termes pris dans chacun des  $\nabla_{1,1}(e_{\mu_1}), \dots, \nabla_{1,1}(e_{\mu_m})$  il existe donc  $\lambda_{A_1}, \dots, \lambda_{A_m}$  tel que  $\lambda_{A_i}$  à un coefficient non nul dans  $\nabla_{1,1}(e_{\mu_i})$  et  $e_{\lambda_{A_1}} \cdots e_{\lambda_{A_m}} = e_\lambda$ . Alors par définition de produit des fonctions symétriques élémentaires, les  $A_i$  sont  $m$  sous ensembles disjoints de  $\{1, \dots, k\}$ . De plus, par le corollaire précédent  $\lambda_{A_i}$ , est un partage de  $\mu_i$  et donc, en particulier,  $\sum_{l \in A_i} \lambda_l = \mu_i$ . On a donc bien que  $\lambda \trianglelefteq \mu$ .

Réciproquement, soit  $\lambda \trianglelefteq \mu$ . On montre que le coefficient de  $e_\lambda$  dans  $\nabla_{1,1}(e_\mu)$  est non nul. Puisque  $\lambda$  est plus petit que  $\mu$ , par définition, il existe  $m$  sous ensembles disjoints,  $A_1, \dots, A_m$  de  $\{1, \dots, k\}$  tels que pour tous  $i$ , on ait  $\sum_{k \in A_i} \lambda_k = \mu_i$ . Mais alors, pour tout  $i$ , on a que  $\lambda_{A_i} = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{p_i}}$ ,  $i_j \in A_i$  est un partage de  $\mu_i$  et par le corollaire précédent on a alors que le coefficient,  $c_i$ , de  $\lambda_{A_i}$  dans  $\nabla_{1,1}(e_{\mu_i})$  est non nulle. De plus,  $\nabla_{1,1}(e_\mu) = \nabla_{1,1}(e_{\mu_1}) \cdots \nabla_{1,1}(e_{\mu_m})$  par multiplicativité de  $\nabla_{1,1}$ . Donc en effectuant le produit des termes  $c_i e_{\lambda_{A_i}}$  dans  $\nabla_{1,1}(e_{\mu_i})$ , on obtient un terme de  $\nabla_{1,1}(e_\mu)$ . Or ce terme est  $c_1 e_{\lambda_{A_1}} \cdots c_m e_{\lambda_{A_m}} = e_\lambda \prod_{i=1}^m c_i$ , par multiplicativité de la base des fonctions symétrique élémentaire. Comme  $c_i \neq 0$  pour tout  $i$ , on a que le coefficient de  $e_\lambda$  dans  $\nabla_{1,1}(e_\mu)$ ,  $\prod_{i=1}^m c_i$ , est non nulle tel que voulu. ■

En se rappelant la notion de monôme dominant de la définition 8, on peut maintenant montrer que le coefficient dominant de  $\nabla_{1,1}$  est toujours 1.

*Lemme 25 :* Le coefficient de  $e_\mu$  dans  $\nabla_{1,1}(e_\mu)$  est 1.

*Démonstration.* Dans  $\mathcal{D}_{n,n}$  il existe un unique chemin ayant  $(n)$  comme contremarche, car les chemins de Dyck commencent toujours par un pas-nord, donc si la seule contremarche est de grandeur  $n$ , on doit débiter par  $n$  pas-nord et comme le chemin doit être contenue dans une grille  $n \times n$  la seule possibilité est de faire  $n$  pas-est. Nous avons alors que le coefficient de  $e_n$  dans  $\nabla_{1,1}(e_n) = \sum_{\gamma \in \mathcal{D}_{n,n}} e_{\rho(\gamma)}$  est un.

De même, le coefficient de  $e_\mu$  dans  $\nabla_{1,1}(e_\mu)$  est un, car par ce qui précède nous avons :

$$\nabla_{1,1}(e_\mu) = \nabla_{1,1}(e_{\mu_1}) \cdots \nabla_{1,1}(e_{\mu_m}) = \prod_{i=1}^m \left( e_{\mu_i} + \sum_{\lambda \triangleleft \mu_i} c_\lambda e_\lambda \right), c_\lambda \in \mathbb{N}.$$

■

Les résultats précédents impliquent que la forme matricielle de  $\nabla_{1,1}$  (dans la base des fonctions symétriques élémentaires indexé par les partages de  $n$  dans l'ordre lexicographique inversé) est unitriangulaire supérieur. Une approche classique à l'étude de sa structure de Jordan est de soustraire l'identité pour trouver une matrice nilpotente dont on étudie les itérations. Ce qui nous amène au résultat suivant.

*Proposition 10 :* Soit  $\mu \vdash n$ . Alors  $(\nabla_{1,1} - \text{id})^k(e_\mu) = 0$  si et seulement si  $k \geq n - \ell(\mu) + 1$ . De plus l'indice du monôme dominant augmente d'exactly 1 en longueur à chaque itération de  $(\nabla_{1,1} - \text{id})$ .

*Démonstration.* On remarque d'abord que si  $\lambda \triangleleft \mu$  alors  $\ell(\lambda) > \ell(\mu)$ . En effet s'il existe  $\ell(\mu)$  sous ensembles non vides disjoints,  $A_1, \dots, A_{\ell(\mu)}$  de  $\{1, \dots, \ell(\lambda)\}$ , alors on doit avoir  $\ell(\lambda) \geq \ell(\mu)$ . De plus, si  $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$ , on a que chaque  $A_j$  contient un

seul élément. Or pour tout  $j$ , on a toujours  $\sum_{l \in A_j} \lambda_l = \mu_j$  donc  $\lambda_j = \mu_j$  pour tout  $j$  si bien que  $\lambda = \mu$  ce qui contredit l'inégalité stricte.

Ainsi, par les lemmes 24 et 25 on sait que  $(\nabla_{1,1} - \text{id})(e_\mu)$  est une somme sur  $\lambda \triangleleft \mu$ . Donc par la remarque précédente les termes de la somme sont indexés par des partages strictement plus longs. On trouve alors que le monôme dominant de  $(\nabla_{1,1} - \text{id})(e_\mu)$  est strictement plus petit que  $e_\mu$  dans l'ordre des fonctions symétriques élémentaires. Puisque  $\nabla$  et  $\text{id}$  sont linéaires, réappliquer  $(\nabla_{1,1} - \text{id})$  au résultat crée une suite décroissante stricte des monômes dominants dans l'ordre des fonctions symétriques élémentaire.

Il suffit maintenant d'observer que  $\mu_1 - 1, \mu_2, \dots, \mu_{\ell(\mu)}, 1 \triangleleft \mu$  donc par le lemme 24 on a que le coefficient de  $\mu_1 - 1, \mu_2, \dots, \mu_{\ell(\mu)}, 1$  dans  $(\nabla_{1,1} - \text{id})(e_\mu)$  est non nulle. Puisque  $\ell(\mu_1 - 1, \mu_2, \dots, \mu_{\ell(\mu)}, 1) = \ell(\mu) + 1$  l'indice du monôme dominant augmente d'exactly 1. Il est donc strictement plus petit que  $e_\mu$  dans l'ordre des fonctions symétriques élémentaire.

Alors en réitérant on trouve que l'indice du monôme dominant dans  $(\nabla_{1,1} - \text{id})^k(e_\mu)$  est de longueur  $\ell(\mu) + k$ . De plus, si  $\ell(\mu) + k > n$  comme le plus long partage de  $n$  est de longueur  $n$  on doit avoir  $(\nabla_{1,1} - \text{id})^k(e_\mu) = 0$ . De la même façon si  $\ell(\mu) + k \leq n$  alors le monôme dominant ayant cet indice existe et  $(\nabla_{1,1} - \text{id})^k(e_\mu)$  est non nul.

On a bien montré le résultat voulu. ■

Il est bien connu que la grandeur d'un bloc de Jordan est associée à l'itération de la forme nilpotente de sa décomposition de Dunford. Il est donc possible de déterminer la grandeur des deux plus grands blocs de Jordan.

Afin d'alléger la preuve on utilise la notation  $\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle$  pour donner le coefficient de  $e_\lambda$  dans  $\nabla_{1,1}(e_\mu)$ . Ceci provient de la base duale à la base des fonctions symétriques élémentaires,  $\{f_\lambda | \lambda \vdash n, n \in \mathbb{N}\}$ .

*Exemple 33 :*

$$[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]_{\mu \vdash 4, \lambda \vdash 4} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Corollaire 5 :* Le plus grand bloc de Jordan de la matrice  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]_{\mu, \lambda}$  est de taille  $n$  et il est unique. (Tous les autres blocs sont strictement plus petits.)

*Démonstration.* Les valeurs propres de  $\nabla$  sont  $q^{n(\mu')}t^{n(\mu)}$  par définition. Donc l'unique valeur propre est 1 en  $q = t = 1$ . Ainsi, par la proposition 10, le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 1 est lorsque  $\ell(\mu) = 1$ , c'est-à-dire  $\mu = (n)$ . De plus, par la proposition 10, on a besoin de  $n$  itérations de  $(\nabla_{1,1} - \text{id})(e_n)$  pour qu'il soit nul. Donc le bloc est de taille  $n$  et peut être engendré par  $e_n$ .

Soit  $B_1, B_2$ , deux blocs de Jordans de taille  $n$ . Soit  $f = \sum_{\mu \vdash n} a_\mu e_\mu, g = \sum_{\mu \vdash n} b_\mu e_\mu$  les 2 vecteurs qui engendrent ces blocs. Les  $2n$  vecteurs fruit des  $n$  itérations de  $f$ , et  $g$  sont linéairement indépendants. Or :

$$(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-1}(f) = \sum_{\mu \vdash n} a_\mu (\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-1}(e_\mu),$$

par linéarité. Alors par la proposition 10 si  $(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-1}(f) \neq 0$ , il existe  $a_\mu \neq 0$  tel que  $n-1 < n - \ell(\mu) + 1$ . Donc  $\ell(\mu) = 1$  et  $\mu = (n)$ . Donc :

$$(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-1}(f) = a_n (\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-1}(e_n).$$

De même pour  $g$ . Ainsi :

$$(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-1}(g) = b_n(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-1}(e_n).$$

Ce qui contredit l'indépendance linéaire des  $2n$  vecteurs. D'où l'unicité du bloc de grandeur  $n$ . ■

Il est possible de borner la taille des autres blocs de Jordan.

*Corollaire 6 :* Dans la matrice  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]_{\mu,\lambda}$ , il existe un unique bloc de Jordan de taille  $n$  et les autres son de taille plus petite ou égale à  $n - 3$ .

*Démonstration.* La première assertion découle du corollaire précédent. Maintenant soit  $B_1$  bloc de Joran de taille  $n$  engendré par  $e_n$  et  $B_2$  bloc de Jordans de taille  $k$ ,  $k \neq n$ , engendré par  $g$ . Puisque  $e_n$  et  $g$  engendrent des blocs distincts, les  $n + k$  vecteurs de l'ensemble  $\{(\nabla_{1,1} - \text{id})^i g\}_{j=0}^{k-1} \cup \{(\nabla_{1,1} - \text{id})^i e_n\}_{j=0}^{n-1}$  sont linéairement indépendants.

Soit  $\lambda$  tel que  $M(g) = e_\lambda$  et  $j = \ell(\lambda)$ . Par le corollaire précédent,  $\lambda \neq (n)$ .

On considère  $(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-1}(e_n)$ . Par la proposition 10, la longueur de l'indice du monôme dominant augmente d'exactly 1 à chaque itération, donc il est de longueur  $1 + n - 1 = n$ . D'où le monôme dominant de  $(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-1}(e_n)$  est  $e_{1^n}$ . Or c'est le plus petit dans l'ordre monomial des fonctions symétriques, donc  $(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-1}(e_n) = ce_{1^n}$ .

Maintenant, en considérant  $(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-2}(e_n)$ , par la proposition 10 la longueur de l'indice du monôme dominant est  $1 + n - 2 = n - 1$ . D'où le monôme dominant de  $(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-1}(e_n)$  est  $e_{(2,1^{n-2})}$ . Or c'est le deuxième plus petit dans l'ordre des fonctions symétriques élémentaires, donc  $(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-2}(e_n) = be_{1^n} + ce_{(2,1^{n-2})}$ ,  $b, c \in$

$\mathbb{Q}$ . Donc  $k - 1 < n - j - 1$ , car autrement, on contredit l'indépendance linéaire des  $k + n$  vecteurs engendrés par  $g$  et  $e_n$ , puisque :

$$(\nabla_{1,1} - \text{id})^{n-j-1}(g) = de_{1^n} + fe_{(2,1^{n-2})}, d, f \in \mathbb{Q},$$

par la proposition 10 serait une combinaison linéaire de vecteur obtenue de l'itération sur  $e_n$ .

Ainsi  $n - j - 1 \geq k$ . Puisque  $j \geq 2$ , car  $\lambda \neq (n)$ , alors  $n - 3 \geq k$ , tel que voulue. ■

La matrice associée à  $\nabla_{1,1} - \text{id}$  est strictement triangulaire supérieure par blocs. Ce qui donne envie de croire qu'il est possible de généraliser le résultat précédent et d'associer la grandeur du  $k$ -ième bloc aux nombres de mineurs de la forme  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]_{\ell(\mu)=m, \ell(\lambda) > m}$  de rang plus grande ou égale à  $k$ . Cependant une vérification faite à l'ordinateur donne un contre-exemple à  $n = 10$ . En effet, les blocs de Jordans sont de grandeur 10, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1 tandis que la généralisation donnerait 10, 7, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 1.

Une autre vérification faite à l'ordinateur, indique que le rang des mineurs  $A_m$  correspond à  $p(n, m)$  jusqu'à  $n = 10$ . Il n'est donc pas possible de généraliser le résultat précédent et d'associer la grandeur du  $k$ -ième blocs à  $n - \sum_j \chi(p(n-j, j) < k)$ , où  $\chi$  donne 1 si l'énoncé est vrai et 0 sinon. On peut donc conclure que la taille des blocs de Jordan n'est lié qu'indirectement aux partages par la proposition 10.

La liste qui suit donne la taille des blocs de Jordan pour  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]_{\mu \vdash n, \lambda \vdash n}$  :

$$n = 1 \quad 1 \quad (3.2)$$

$$n = 2 \quad 2 \quad (3.3)$$

$$n = 3 \quad 3 \quad (3.4)$$

$$n = 4 \quad 4, 1 \quad (3.5)$$

$$n = 5 \quad 5, 2 \quad (3.6)$$

$$n = 6 \quad 6, 3, 2 \quad (3.7)$$

$$n = 7 \quad 7, 4, 3, 1 \quad (3.8)$$

$$n = 8 \quad 8, 5, 4, 3, 2 \quad (3.9)$$

$$n = 9 \quad 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \quad (3.10)$$

$$n = 10 \quad 10, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1 \quad (3.11)$$

$$n = 11 \quad 11, 8, 7, 6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2 \quad (3.12)$$

Cette suite n'a aucune correspondance dans l'*Encyclopédie en ligne de suites de nombres entiers* (OEIS). On a néanmoins établi une interprétation combinatoire potentielle. Elle est présentée après la discussion sur le nombre de blocs de Jordan.

Combien de blocs de Jordan contient la forme de Jordan de  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]_{\mu \vdash n, \lambda \vdash n}$  ?

Pour  $n = 1, 2, \dots, 13$  l'exploration par ordinateur donne la séquence :

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 15, 19.$$

En comparant cette séquence à d'autres suites de nombres entiers via OEIS on apprend que cette suite est en apparence la même que A129528, donnant le nombre de chemins de Dyck, dont la somme des pics, tel que définit dans la section 1.7, est  $n$ .

*Exemple 34 :* La figure 3.1 montre les 2 chemins de Dyck carré, dont la somme des pics est 4.

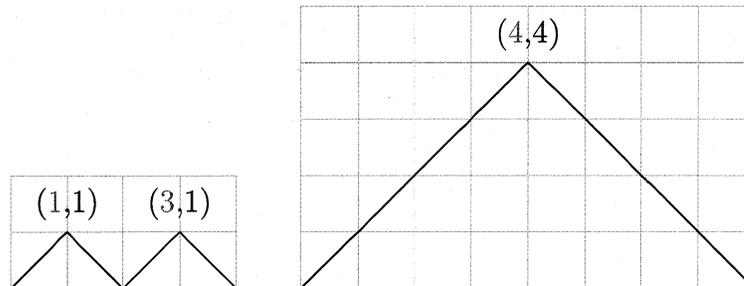


Figure 3.1 Chemins de Dyck carré, dont la somme des pics est 4

La forme de Jordan de  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]_{\mu \vdash 4, \lambda \vdash 4}$  est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On voit que cette forme de Jordan a deux blocs et qu'on a deux chemins dans la figure 3.1.

Après l'analyse des objets, l'auteure est portée à croire qu'il existe une correspondance exacte entre les chemins de Dyck et les blocs de Jordan de la matrice  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]_{\mu, \lambda}$ .

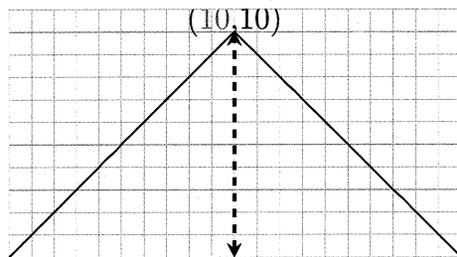
*Question 6 :* Peut-on montrer qu'un bloc de Jordan de  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]_{\mu \vdash n, \lambda \vdash n}$  corres-

pond à un unique chemin de Dyck carré tel que la hauteur du dernier pic correspond à la taille du bloc et que la somme des ces pics est  $n$ ? En d'autres termes existe-t-il une bijection entre les chemins de Dyck et les blocs de Jordan de  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]$  (quitte à numérotter les blocs d'une même taille dans  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]_{\mu \vdash n, \lambda \vdash n}$ )?

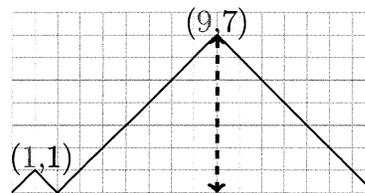
Ceci est vérifié jusqu'à  $n = 11$ . Pour  $n = 12$ , il faut calculer la forme de Jordan pour une matrice de taille  $77 \times 77$ , la complexité des calculs, a empêché la vérification pour des valeurs plus grandes. D'autre part, on rappelle que la hauteur du dernier pic coïncide avec l'ordonnée du dernier pic. Il y a donc qu'un chemin, dont la somme des pics est  $n$  et que la hauteur du dernier pic est  $n$ , par construction c'est celui qui a un seul pic de hauteur  $n$ . De surcroit, si un chemin à plus d'un pic, la hauteur maximale du pic le plus à droite est donnée par  $n - 2 - 1$ , car le plus petit pic possible est de hauteur 1 il nécessite un pas-nord ainsi qu'un pas-est donc l'abscisse du deuxième pic est augmenté de 2 et pour que la somme des pics soit  $n$  cette abscisse doit être de  $n - 1$ . Donc le corollaire 6 confirme en partie cette hypothèse. Enfin, il est curieux de constater que les chemins de Dyck refont leur apparition ici. À priori, il n'y a aucun lien entre la définition combinatoire de  $\nabla_q(e_n)$  vu à la section 1 et la hauteur du dernier pic.

Le chapitre termine sur un exemple de la correspondance pour la composante homogène  $n = 10$ .

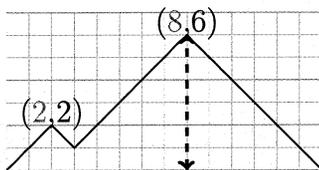
*Exemple 35 :* On rappelle que la suite des blocs pour  $n = 10$  vu à l'équation 3.11 est 10, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1. La figure 3.2 montre les chemins de Dyck, dont la somme des pics est 10.



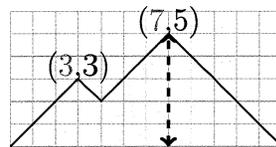
(a) bloc de taille 10



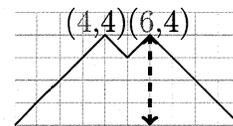
(b) bloc de taille 7



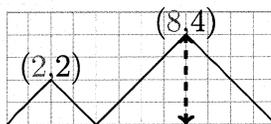
(c) bloc de taille 6



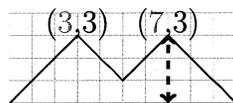
(d) bloc de taille 5



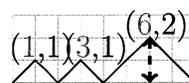
(e) bloc de taille 4



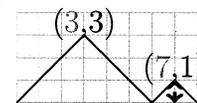
(f) bloc de taille 4



(g) bloc de taille 3



(h) bloc de taille 2



(i) bloc de taille 1

Figure 3.2 Correspondance entre les blocs de Jordan et les chemins de Dyck



## CONCLUSION

La recherche effectuée dans ce travail a pour objectif l'étude de la structure des opérateurs propres de Macdonald, à savoir les opérateurs qui ont les polynômes de Macdonald comme fonction propres. L'étude des aspects combinatoires de ces structures permettent une caractérisation partielle des opérateurs propres de Macdonald ainsi qu'une meilleure compréhension des polynômes de Macdonald sur lesquels ils agissent.

On montre que les opérateurs propres de Macdonald inversibles,  $\mathcal{O}$ , les opérateurs monomiaux  $\mathcal{M}$ , les opérateurs MMS, les opérateurs interprétables, les opérateurs constants par degré,  $\mathcal{C}$ , forment des groupes abéliens (équation 2.1, lemme 15 et proposition 7). Le quotient de ces groupes par le sous-groupe  $\mathcal{C}$  est stable pour les propriétés d'être Schur positif et Schur polynomiale (lemme 12). Ceci permet de caractériser les familles d'opérateurs propres : les monomiaux (proposition 6, proposition 8), les monomiaux interprétables (lemme 19), ceux qui sont dans la même classe qu'une puissance de  $\nabla$  (théorème 2) et ceux qui sont dans la même classe qu'un opérateur MMS Schur polynomial (théorème 1).

On montre également une interprétation combinatoire des opérateurs MMS et des opérateurs monomiaux interprétables. Cette interprétation rend aisée preuves par récurrence sur l'opérateur  $\nabla$ , les opérateurs MMS, et les opérateurs monomiaux interprétables. Cet outil est central à la preuve du théorème 1 qui est lui-même essentiel à la preuve du théorème 2. Le tableau 2.1 fait le point sur ce qui est déjà

démontré soit dans la littérature ou dans ce mémoire.

La caractérisation de la classe d'équivalence des puissances de  $\nabla$  n'est cependant pas minimale. C'est-à-dire qu'il est possible qu'une généralisation du résultat amène également à une caractérisation de  $\nabla$ . Une preuve de la question 4 entraînerait une caractérisation minimale. On parvient au même résultat en prouvant une des questions 2, 3 ou 5.

Ce travail donne aussi d'autres avenues possibles de la résolution de la conjecture 1 de (Bergeron *et al.*, 1999). La propriété d'être un opérateur monomial est très contraignante, il serait peut-être plus simple de trouver une preuve de la question 1 qui implique la conjecture 1 de (Bergeron *et al.*, 1999) puisque le théorème 1.1 de ce même article montre que les puissances de  $\nabla$  sont Schur polynomiales. En posant  $d = \binom{k+1}{2}$ , on peut également utiliser le théorème 1 et montrer que pour tout  $k$ , il existe  $k + \binom{d+2}{2}$  opérateurs MMS virtuellement Schur positif dont le degré des valeurs propres varie entre 0 et  $d$ . D'autres méthodes équivalentes sont également explorées à la fin de la section 2.3.

Enfin, il serait très intéressant d'établir la bijection proposée, dans la question 6, entre chemins de Dyck et blocs de Jordan de  $[\langle \nabla_{1,1}(e_\mu), f_\lambda \rangle]$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- Bergeron, F. (2009). *Algebraic combinatorics and coinvariant spaces*. CMS Treatises in Mathematics. Canadian Mathematical Society, Ottawa, ON ; A K Peters, Ltd., Wellesley, MA.
- Bergeron, F., Garsia, A., Leven, E. S. et Xin, G. (2016). Some remarkable new plethystic operators in the theory of Macdonald polynomials. *J. Comb.*, 7(4), 671–714.
- Bergeron, F. et Garsia, A. M. (1999). Science fiction and Macdonald’s polynomials. In *Algebraic methods and  $q$ -special functions (Montréal, QC, 1996)*, volume 22 de *CRM Proc. Lecture Notes* 1–52. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- Bergeron, F., Garsia, A. M., Haiman, M. et Tesler, G. (1999). Identities and positivity conjectures for some remarkable operators in the theory of symmetric functions. *Methods Appl. Anal.*, 6(3), 363–420. Dedicated to Richard A. Askey on the occasion of his 65th birthday, Part III, <http://dx.doi.org/10.4310/MAA.1999.v6.n3.a7>
- Bergeron, F. et Haiman, M. (2013). Tableaux formulas for Macdonald polynomials. *Internat. J. Algebra Comput.*, 23(4), 833–852.
- Bourbaki, N. (2007). *Éléments d’histoire des mathématiques*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Carlson, E. et Mellit, A. (2015). A proof of the schuffle conjecture. Récupéré le 26/06/2016 de <https://arxiv.org/pdf/1508.06239.pdf>
- Funkhouser, H. G. (1930). A short account of the history of symmetric functions of roots of equations. *The American Mathematical Monthly*, 37(7), 357–365. Récupéré le 6/05/2017 de <http://www.jstor.org/stable/2299273>
- Garsia, A. M. et Haglund, J. (2002). A proof of the  $q, t$ -Catalan positivity conjecture. *Discrete Math.*, 256(3), 677–717. LaCIM 2000 Conference on Combinatorics, Com-

- puter Science and Applications (Montreal, QC), [http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X\(02\)00343-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00343-6)
- Garsia, A. M. et Haiman, M. (1993). A graded representation model for Macdonald's polynomials. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 90(8), 3607–3610. <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.90.8.3607>
- Garsia, A. M. et Haiman, M. (1996a). A remarkable  $q, t$ -Catalan sequence and  $q$ -Lagrange inversion. *J. Algebraic Combin.*, 5(3), 191–244.
- Garsia, A. M. et Haiman, M. (1996b). Some natural bigraded  $S_n$ -modules and  $q, t$ -Kostka coefficients. *Electron. J. Combin.*, 3(2), Research Paper 24, approx. 60 pp. The Foata Festschrift. Récupéré le 26/06/2016 de [http://www.combinatorics.org/Volume\\_3/Abstracts/v3i2r24.html](http://www.combinatorics.org/Volume_3/Abstracts/v3i2r24.html)
- Garsia, A. M., Haiman, M. et Tesler, G. (1999). Explicit plethystic formulas for Macdonald  $q, t$ -Kostka coefficients. *Sém. Lothar. Combin.*, 42, Art. B42m, 45. The Andrews Festschrift (Maratea, 1998). Récupéré le 26/06/2016 de <http://www.mat.univie.ac.at/~slc/s/s42garsia.pdf>
- Garsia, A. M. et Tesler, G. (1996). Plethystic formulas for Macdonald  $q, t$ -Kostka coefficients. *Adv. Math.*, 123(2), 144–222. <http://dx.doi.org/10.1006/aima.1996.0071>
- Haglund, J. (2004). A proof of the  $q, t$ -Schröder conjecture. *Int. Math. Res. Not.*, 2004(11), 525–560. <http://dx.doi.org/10.1155/S1073792804132509>
- Haglund, J. (2008). *The  $q, t$ -Catalan numbers and the space of diagonal harmonics*, volume 41 de *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI. With an appendix on the combinatorics of Macdonald polynomials.
- Haglund, J., Haiman, M., Loehr, N., Remmel, J. B. et Ulyanov, A. (2005). A combinatorial formula for the character of the diagonal coinvariants. *Duke Math. J.*, 126(2), 195–232.
- Haglund, J., Remmel, J. et Wilson, A. T. (2016). The delta conjecture. Dans *FPSAC 2016 : Proceedings of the 28-th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 4-8 Jul 2016, Vancouver, British Columbia (Canada)*, Discrete mathematics and theoretical computer science, 611–622. DMTCS. Récupéré le 15/05/2017 de <https://books.google.ca/books?id=d7RpnQAACAAJ>
- Haiman, M. (2001). Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity

conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(4), 941–1006. <http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-01-00373-3>

Haiman, M. (2002). Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane. *Invent. Math.*, 149(2), 371–407. <http://dx.doi.org/10.1007/s002220200219>

Lenart, C. (2000). Lagrange inversion and Schur functions. *J. Algebraic Combin.*, 11(1), 69–78. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1008743720120>

Loehr, N. A. et Warrington, G. S. (2008). Nested quantum Dyck paths and  $\nabla(s_\lambda)$ . *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2008.

Macdonald, I. (1988). A new class of symmetric functions. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 20(B20a), 131–171. Récupéré le 28/02/2016 de <https://www.mat.univie.ac.at/~slc/>

Macdonald, I. G. (1995). *Symmetric functions and Hall polynomials* (second éd.). Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

Sagan, B. E. (2001). *The symmetric group* (second éd.), volume 203 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.

Stanley, R. P. (1999). *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.

## INDEX

- Aire
  - d'un chemin de Dyck, 51
- Base
  - élémentaire, 18
  - fonctions de Schur, 17
  - homogène complète, 19
  - monomiale, 14
  - multiplicative, 18
  - somme de puissance, 19
- Bras d'un diagramme, 7
- Caractère, 27
  - caractéristique de Frobenius bigraduée, 31
  - irréductible, 27
  - transformée de Frobenius d'un  $\mathbb{S}_n$ -module gradué, 31
- Caractéristique de Frobenius bigraduée, 31
- Cases, 6
- Chemin de Dyck, 51
  - aire, 51
  - contremarche, 51
  - coordonnée du pic, 53
  - diagonale principale, 51
  - hauteur d'un pic, 53
  - pas-est, 51
  - pas-nord, 51
  - pics, 53
  - représentation géométrique, 51
  - somme des pics, 53
- Coin d'un diagramme
  - extérieur, 7
  - intérieur, 7
- Composition, 5
- Conjuguée
  - diagramme, 7
  - partage, 7
  - symétrie conjuguée d'un opérateur, 67
- Contremarche d'un chemin de Dyck, 51
- Diagonale principale d'un chemin de Dyck, 51
- Diagramme, 6
  - bras, 7
  - cases, 6

- coin extérieur, 7
- coin intérieur, 7
- conjugué, 7
- de Ferrers, 6
- gauche, 7
- jambe, 8
- longueur de la jambe, 8
- longueur du bras, 8
- Élémentaire
  - fonction symétrique, 18
  - monôme dominant, 24
  - ordre, 24
- Fonction centrales, 28
- Fonction propre, 60
- Fonction symétrique, 16
  - de Schur, 17
  - élémentaire, 18
  - homogène complète, 19
  - monôme dominant, 24
  - monomiale, 14
  - multiplicative, 18
  - polynômes de Macdonald, 37
    - combinatoires, 37
    - originaux, 32
  - sommes de puissance, 19
- Frobenius
  - caractéristique de Frobenius bigraduée, 31
  - transformée, 29
  - transformée de Frobenius d'un  $\mathbb{S}_n$ -module gradué, 31
- Homogène
  - composante, 14
  - opérateur, 58
  - polynôme, 14
- Homogène complète
  - fonction symétrique, 19
- Interprétable, opérateur monomial, 75
- Jacobi-Trudi, 20
  - duale, 20
- Jambe d'un diagramme, 8
- Kostka
  - matrice  $(q, t)$ -Kostka, 39
  - nombres, 9
  - polynômes  $(q, t)$ -Kostka, 39
- Longueur
  - bras, 8
  - jambe, 8
  - partage, 6

- Macdonald
  - opérateur propre de, 60
  - polynômes de Macdonald, 37
    - combinatoires, 37
    - originaux, 32
- Matrice  $(q, t)$ -Kostka, 39
- MMS, opérateur, 73
- Monôme dominant, 24
- Monomial
  - interprétable, opérateur, 75
  - MMS, opérateur, 73
- Monomiale
  - fonction symétrique, 14
  - opérateur, 69
- Multiplicatif
  - fonction symétrique, 18
  - MMS, opérateur, 73
  - opérateur, 66
  - opérateur  $q$ -multiplicatif, 66
  - opérateur  $t$ -multiplicatif, 67
  - polynôme de Macdonald (propriété), 41
  - $t$ -multiplicatif, 67
  - homogène, 58
  - MMS, 73
  - monomial, 69
  - monomial interprétable, 75
  - multiplicatif, 66
  - multiplicatif pour  $q = 1$ , 67
  - multiplicatif pour  $t = 1$ , 66
  - propre de Macdonald, 60
  - $q$ -opérateur, 70
  - Schur polynômial, 26
  - Schur positif, 25
  - symétrie conjuguée (propriété), 67
  - symétriseur d'un, 71
  - $t$ -opérateur, 70
  - virtuellement Schur positif, 25
- Ordre
  - couvre, 7
  - du raffinement, 10
  - fonctions symétrique élémentaire, 24
  - lexicographique, 11
- Part d'un partage, 6
- Partage, 5
  - conjugué, 7
  - couvre, 7
- Nombres de Kostka, 9
- Opérateur
  - $q$ -multiplicatif, 66

- longueur, 6
- part, 6
- taille, 6
- Pas-est, 51
- Pas-nord, 51
- Pic
  - coordonnées, 53
  - d'un chemin de Dyck, 53
  - hauteur d'un pic, 53
  - somme des pics, 53
- Pléthysme, 35
- Polynôme
  - $(q, t)$ -Kostka, 39
  - homogène, 14
  - symétrique (voir fonction), 13
- Polynômes de Macdonald, 37
  - combinatoires, 37
  - originaux, 32
- Représentation, 27
  - irréductible, 27
  - sous-représentation, 27
- Schur
  - expression Schur positive, 25
  - expression virtuellement Schur positive, 25
- fonction symétrique, 17
- opérateur
  - Schur polynômial, 26
  - Schur positif, 25
  - virtuellement Schur positif, 25
- Sommes de puissance
  - fonction symétrique, 19
- Symétrie conjuguée, 67
- Symétrique
  - fonction, 16
  - polynôme, 13
- Symétriseur, 71
- Tableau, 9
  - remplissage, 9
  - semi-standard, 9
  - standard, 9
- Taille
  - partage, 6
- Théorie de la représentation
  - caractère, 27
  - caractère irréductible, 27
  - caractéristique de Frobenius bigraduée, 31
  - fonctions centrales, 28
  - représentation, 27

représentation irréductible, 27

sous-représentation, 27

transformée de Frobenius, 29

transformée de Frobenius d'un  $\mathbb{S}_n$ -module

gradué, 31

Transformée de Frobenius, 29

Transformée de Frobenius d'un  $\mathbb{S}_n$ -module

gradué, 31