

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MÉMOIRE VISUELLE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE :  
FORCES INVARIANTES DES  
CHAMPS DE VECTEURS ÉLÉMENTAIRES

THÈSE  
PRÉSENTÉE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN PSYCHOLOGIE

PAR  
CHRISTIAN THÉRIAULT

AOUT 2006

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Je tiens à souligner mon appréciation à l'égard de Robert Proulx, mon directeur, pour la confiance qu'il m'a témoignée et pour avoir su me donner l'appui et la liberté nécessaires à ma démarche. Pour ces mêmes raisons, je remercie tout spécialement mes parents. Parmi ceux et celles qui m'ont conseillé, je remercie particulièrement ces gens de discernement : Sylvain Chartier (laboratoire LEINA, UQAM), Bruno Gauthier (laboratoire LEINA, UQAM), Suzanne Mackay (laboratoire LEINA, UQAM), Richard Lepage (professeur d'ingénierie, ETS), Serge Robert (professeur de philosophie, UQAM) et Robert Bédard (professeur de mathématiques, UQAM).

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES.....	vi
LISTE DES TABLEAUX.....	xv
LISTE DES SYMBOLES.....	xvi
RÉSUMÉ.....	xvii
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I	
MÉMOIRE VISUELLE ET PRINCIPES DE MÉMOIRE NEURONALE.....	7
1.1 Introduction .....	7
1.2 Filtre, transformations et mémoires .....	8
1.3 Principes et modèles de mémoire neuronale .....	13
1.3.1 Mémoire associative .....	17
1.3.2 Mémoire autoassociative .....	19
1.3.3 Mémoire et plasticité différentielle .....	22
1.4 Mémoire visuelle .....	27
1.4.1 L'approche <i>computationale</i> .....	27
1.4.2 L'approche holistique .....	31
CHAPITRE II	
MÉMOIRE VISUELLE : GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ET CHAMPS DE VECTEURS .....	42
2.1 Introduction .....	42
2.2 La dérivée partielle sur le cortex visuel .....	43

2.3	Mémoire visuelle et déformations .....	50
2.4	Quelques notions de topologie .....	55
2.5	Champs de vecteurs et géométrie différentielle .....	58
2.5.1	Gradient et champs de vecteurs .....	58
2.5.2	Le vecteur tangentiel .....	61
2.5.3	Groupes de transformations continues (groupes de Lie) .....	63
2.5.4	Intégration d'un champ de vecteurs le long d'une courbe .....	65
2.5.5	Principe de mémoire visuelle invariante .....	67
2.5.6	Dérivée de Lie .....	68
2.6	Algèbre de Lie appliquée à la perception.....	71
2.7	Champs de vecteurs sur le cortex : champs de forces .....	76
2.8	Discussion .....	81

### CHAPITRE III

#### L'IMPORTANCE DE LA TRANSFORMATION :

UN MODÈLE DE TRANSFORMATION CONTINUE.....	83
---	----

3.1	Introduction.....	83
3.2	L'importance de la transformation.....	84
3.3	Transformation linéaire des champs de vecteurs élémentaires.....	89
3.4	Champs de vecteurs à résolution multiple.....	92
3.5	Simulation numérique.....	101
3.5.1	Méthodologie.....	101
3.5.2	Résultats.....	103
3.6	Discussion .....	104

### CHAPITRE IV

#### CHAMPS DE VECTEURS ÉLÉMENTAIRES DANS L'ESPACE-TEMPS :

FORCES ET INTÉGRATIONS INVARIANTES SUR LE CORTEX VISUEL....	106
---	-----

4.1	Introduction.....	106
-----	-------------------	-----

4.2	Notions sur l'espace-temps des contours visuels.....	108
4.3	Représentation locale de l'espace-temps sur les contours visuels.....	112
4.4	Représentation vectorielle.....	114
4.5	Forces et propriétés différentielles des champs de vecteurs élémentaires...	117
4.6	Théorème de Stokes et théorème de divergence.....	125
4.7	Une application du théorème de Stokes et du théorème de divergence.....	127
4.8	Généralisations .....	133
4.9	Intégration de polygones à partir des coins.....	134
4.10	Action des forces générées lors du mouvement.....	149
4.11	Exemples numériques.....	154
4.12	Exemples numériques avec opérateurs de dérivée partielle.....	157
4.13	Continuum de résolutions temporelles et équilibre des champs de forces....	160
4.14	Invariance à l'échelle.....	163
4.15	Champs de vecteurs polaires et spirale logarithmique :	
	génération spontanée et transformations molles.....	165
	4.15.1 Spirale logarithmique.....	166
	4.15.2 Intégration des segments de spirale logarithmique à partir des vecteurs aux extrémités.....	169
	4.15.3 Génération spontanée des contours et invariance aux transformations molles.....	173
4.16	Discussion.....	179
	CONCLUSION.....	181
	RÉFÉRENCES.....	184

## LISTE DE FIGURES

Figure		Page
1.1	a) Bruit et images incomplètes b) Transformations molles (déformations) et transformations rigides c) Génération spontanée des contours d) Importance des points de courbure critique.....	11
1.2	Image lumineuse ou image neuronale statique?.....	14
1.3	Le neurone intégrateur : le neurone décharge un flux électrique ( $y$ ) en fonction de la somme des stimulations ( $x_i$ ) qu'il reçoit, pondérée par sa sensibilité ( $w_i$ ).....	14
1.4	Croquis d'une mémoire associative à 5 neurones.....	18
1.5	Croquis d'une mémoire autoassociative à 5 neurones en boucle de résonance.....	20
1.6	Convergence d'états initiaux sur des états attracteurs stables dans un espace vectoriel tridimensionnel (tirée de Chartier, 2004).....	22
1.7	Croquis du modèle hiérarchique <i>computational</i> . Les neurones sur les couches supérieures du cortex visuel couvrent une région de plus en plus grande de la rétine b) Ceci permet le regroupement et l'apprentissage d'agencements complexes de primitives visuelles.....	28
1.8	La superposition des stimuli engendre une superposition des patrons d'activité neuronale dans une filtration hiérarchique.....	30

Figure		Page
1.9	Champs de vecteurs (champs de forces) de rotation et d'expansion. L'expression du plan visuel par certains types de champs de vecteurs est essentielle aux idées et principes présentés dans cette thèse.....	38
1.10	Transformations molles, génération spontanée et points critiques....	39
2.1	Convolution d'une image avec un opérateur gaussien selon quatre échelles de résolution $t$ .....	46
2.2	Convolution d'une image avec la dérivée partielle (par rapport à $x$ ) d'un opérateur gaussien selon quatre échelles de résolution. ....	47
2.3	Déformations (transformations molles).....	50
2.4	Points de courbure critique, maintenus dans la déformation de l'objet.....	52
2.5	Espaces homéomorphes.....	53
2.6	a) Champ de vecteurs gradients des courbes de niveau de la figure 2.6b.....	57
2.7	Champ de vecteurs en spirale.....	58
2.8	Les vecteurs locaux du champ sont fonction de leur position globale.....	58
2.9	a) Champ de rotation obtenu par les vecteurs tangentiels aux courbes de niveau de l'image illustrée en b. c) Champ d'expansion obtenu par les vecteurs gradients, perpendiculaires aux vecteurs tangentiels.....	60

Figure		Page
2.10	a) Action possible de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ b) action possible du cercle sur $\mathbb{R}^2$ .....	62
2.11	Champ de vecteurs conservatif $W(x, y) = \nabla \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$ . L'intégration du champ sur des trajectoires de mêmes bornes (mêmes extrémités) est invariante.....	65
2.12	Champ de rotation : Un groupe de transformations potentiellement actif sur le tissu du cortex visuel.....	66
2.13	Contour visuel.....	67
2.14	Dans la théorie de Hoffman, les contours visuels subissent l'action des forces de champs élémentaires, dont celle du champ de rotation.	67
2.15	Le cercle est laissé invariant sous l'action du champ de rotation.....	68
2.16	Trajectoires élémentaires associées aux champs de vecteurs (groupes de transformations) qui forment la base de l'algèbre de Lie visuelle dans la théorie de Hoffman.....	70
2.17	Composantes élémentaires du flux optique.....	73
2.18	Champ de vecteurs d'expansion. Comme le vecteur, l'opérateur de dérivée partielle indique la direction locale d'une transformation globale et permet l'expression neuronale d'un champ de vecteurs...	75
2.19	Exemple de sensibilité (champs de vecteurs) observée sur le cortex visuel.....	78

Figure		Page
3.1	Images entoptiques : l'ombrage laissé par les vaisseaux sanguins devant la rétine est normalement invisible en raison du fait que leur proximité cause une adaptation neuronale constante.....	82
3.2	Un différentiel linéaire de vitesse depuis le centre de la transformation caractérise les champs de vecteurs élémentaires.....	85
3.3	Champ de vecteurs d'expansion et son expression neuronale selon trois échelles de résolution.....	88
3.4	Une expansion $a$ de l'objet résulte en une expansion $a$ de l'échelle des dérivées partielles.....	90
3.5	Décalage constant pour une expansion des échelles.....	91
3.6	Champs de translation selon un axe d'échelle exponentielle et un axe d'orientation.....	92
3.7	Image neuronale formée de l'intégration des champs de translation sur l'image selon un axe d'orientation et un axe d'échelle exponentielle.....	93
3.8	Une première filtration des champs de translation résulte en des décalages linéaires. Une seconde filtration sur l'image neuronale obtenue (filtration itérative) élimine ces décalages.....	94
3.9	a) L'activation (intégration) d'un neurone est donnée par le produit scalaire entre un patron de lumière $I$ et un champ de vecteurs $W$ d'échelle $t$ et d'orientation $\theta$ . b) Les activations sont regroupées dans une même image neuronale selon un axe d'échelle et un axe d'orientation des champs.....	95
3.10	Images ayant subi des combinaisons d'expansion/contraction, de rotation et de translation.....	96

Figure		Page
3.11	Les pixels de l'image neuronale se composent du résultat de la filtration des champs de vecteurs de translation selon 64 orientations et 64 échelles de résolution.....	97
3.12	Corrélation entre les images neuronales a) 4 échelles de résolution b) 8 échelles de résolutions c) 12 échelles de résolution. La diagonale indique une mémoire invariante aux transformations de la forme. Les faibles corrélations à l'extérieur de la diagonale soulignent que cette mémoire est aussi catégorique.....	97
4.1	Représentation de l'espace-temps d'une droite en translation sur l'axe $x$ .....	103
4.2	Spectre de fréquence de l'espace-temps pour une droite en translation sur l'axe des $x$ .....	104
4.3	a) Spectre de fréquence idéal de l'espace-temps d'une droite en translation. b) un échantillonnage trop lent engendre des copies superflues du spectre à l'intérieur de la fenêtre de visibilité. c) un échantillonnage suffisamment rapide espace les copies superflues à l'extérieur de la fenêtre de visibilité, créant ainsi une perception claire et continue.....	105
4.4	Opérateur de dérivée partielle correspondant aux opérations locales observées sur le cortex visuel.....	107
4.5	Opérateur de dérivée partielle orienté dans l' <i>espace-temps</i> .....	107
4.6	Représentation locale du système espace-temps le long d'un contour visuel.....	109
4.7	La région MST intègre l'énergie d'un tapis d'opérateurs de dérivées partielles dans l'espace-temps, exprimant chacun la vélocité locale d'un mouvement.....	109

Figure		Page
4.8	Le neurone de la région V4 intègre l'énergie d'un tapis d'opérateurs de dérivées partielles exprimant chacun le gradient local d'un contour.....	110
4.9	Les vecteurs locaux du champ sont fonction de leur position globale.....	111
4.10	Produit vectoriel.....	113
4.11	Divergence à un point du plan.....	115
4.12	Champ spiralé $W_S = (4x - 7y, 3x + 1y)$ issu de la combinaison linéaire des champs de rotation $W_R = (-7y, 3x)$ et d'expansion $W_E = (4x, 1y)$ .....	117
4.13	Annulation des forces tangentielles (en rouge) sur la surface. En intégrant la force rotative sur la surface, seuls les vecteurs bleus ne s'annulent pas.....	119
4.14	Annulation des forces normales (en rouge) sur la surface. En intégrant la divergence sur la surface, seuls les vecteurs bleus ne s'annulent pas.....	120
4.15	Intégration d'une trajectoire de rotation sur un champ de vecteurs de rotation défini par $W_R = (-\beta y, \gamma x)$ .....	122
4.16	Compensation exacte des produits scalaires, confirmée mathématiquement par le théorème de Stokes.....	124
4.17	Intégration d'une trajectoire d'expansion sur un champ de vecteurs d'expansion $W_E = (\alpha x, \xi y)$ .....	125

Figure		Page
4.18	Vecteur général $\mathbf{u}$ , le long d'un contour.....	127
4.19	Contour d'un objet projeté sur un champ de rotation.....	129
4.20	Polygone de surface $s = 4$ composé de 6 segments dont les coordonnées cartésiennes des extrémités sont données selon $(a + n, b + m)$ .....	131
4.21	Les coins se décomposent en deux composantes, chacune associée à un des deux segments qui se rencontrent.....	134
4.22	Projection du champ sur le vecteur gradient du contour.....	135
4.23	Les produits scalaires du champ sur les côtés d'un polygone décrivent une droite.....	137
4.24	Vecteurs normaux aux coins dont la longueur est la moitié du segment dont ils sont l'extrémité.....	139
4.25	Système d'axe local sur un contour visuel.....	143
4.26	Le vecteur de torsion est tangentiel au contour et a toujours comme longueur un multiple $t$ de la longueur du vecteur de gradient.....	146
4.27	Triangle de surface $s = \frac{4 \times 1}{2} = 2$ illustré avec ses vecteurs gradients aux coins.....	147
4.28	Champs d'opérateurs de dérivée partielle locale. Les opérateurs sont orientés en fonction de la combinaison linéaire d'une dérivée partielle selon l'axe $x$ et selon l'axe $y$ .....	151

Figure		Page
4.29	Vecteurs gradients des coins d'un triangle représentés par des opérateurs de dérivée partielle. Notons la pondération des opérateurs par la demi-longueur du segment correspondant.....	152
4.30	Les opérateurs aux coins suite à l'addition de l'opérateur de torsion.	153
4.31	Continuum d'échelles des vecteurs $\mathbf{u}_{\text{vélocité}}$ dans l'espace-temps..	155
4.32	Champs hyperboliques $W_H = (y, x)$ et $W_H = (-x, y)$ .....	156
4.33	Deux types d'expansions.....	157
4.34	Champs de rotation et d'expansion/contraction selon un continuum respectif d'expansion et de forces rotatives.....	158
4.35	Une propriété de la mémoire visuelle est de générer spontanément le reste de la forme uniquement en présence des régions de courbure critique (grande courbure).....	159
4.36	Spirale logarithmique caractérisée par un angle tangentiel polaire invariant.....	160
4.37	Alors que la spirale en rouge tourne sur elle-même (illustrée par les copies vertes), elle se glisse progressivement sur une copie d'elle-même d'échelle supérieure (spirale noire).....	161
4.38	Une transformation de similitude s'exprime par un décalage linéaire sur les rayons de la spirale.....	162
4.39	Champ de spirales logarithmiques.....	162

Figure		Page
4.40	Segment de spirale logarithmique $r = r_0 e^{a\theta}$ .....	163
4.41	Concavité et convexité dans l'objet.....	167
4.42	Dans une certaine limite, la perception du même objet demeure si les déformations ne sont pas plus sévères que la courbure des coins.....	168
4.43	Génération spontanée de contours manquants.....	169
4.44	Transformations molles.....	170
4.45	Déformation qui perdure au travers les résolutions.....	171
4.46	Multiplés déformations.....	172

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
2.1	Dérivées de Lie associées aux perceptions visuelles par Hoffman....	68

## LISTE DES SYMBOLE

$\alpha$	Paramètre de force; paramètre de plasticité neuronale
$\beta$	Paramètre de force
$\xi$	Paramètre de force
$\gamma$	Paramètre de force
$W$	Champ de vecteurs; matrice synaptique
$\oint$	Intégrale de circulation
$\nabla$	Opérateur différentiel delta
$\mathbf{u}$	Vecteur de contour
$\mathbf{v}$	Vecteur tangentiel
$I$	Image
$a$	Activation neuronale
$t$	Échelle

## RÉSUMÉ

Par sa *souplesse* et son *élasticité*, la mémoire visuelle se trouve au cœur du raisonnement humain. Le degré de déformation que peut prendre un même objet donne lieu aux imageries et aux pensées les plus abstraites. Tel un caoutchouc ou une pâte à modeler, un objet visuel peut se transformer et changer d'apparence de façon radicale et pourtant toujours *animer* la même mémoire. À l'instar d'un film cinématographique, les patrons de lumière sur la pellicule de l'œil se transforment continuellement et la mémoire d'un même objet peut être réactivée par une myriade de patrons de lumière très différents en première apparence.

Curieusement, le flot de recherches sur la mémoire visuelle ne semble pas prendre note de cette *réalité* pourtant si frappante, où le défilement des patrons de lumière sur la rétine est continu, sans pause. Les modèles classiques de la perception semblent plutôt concevoir la transformation et le mouvement des objets comme un obstacle à la mémoire. Dans cette veine, les théories de la perception visuelle ont tendance à *crystalliser* la lumière dans une image fixe. Elles donnent aux objets une description statique selon la configuration de leurs composantes géométriques, telles les instructions d'un « modèle à coller ».

Par contraste, cette thèse suggère plutôt que la mémoire visuelle est gouvernée par la transformation des patrons de lumière. Dans une approche holistique, appuyée sur les principes de théoriciens remarquables, nous soutenons que la mémoire visuelle repose sur les *champs de forces* générés par le mouvement et non pas sur une image statique. Décrites par la géométrie différentielle sous la forme de *champs de vecteurs*, ces forces gouvernantes expriment la transformation des patrons de lumière générée par notre mouvement dans une scène visuelle. En considérant le monde visuel par celui de la transformation des patrons de lumière, nous offrons une conception simple et holistique de la mémoire visuelle.

Au-delà des approches classiques, un filon théorique nous incite à identifier une base de *champs de vecteurs élémentaires* dans laquelle réside le sous-espace de la mémoire visuelle. Ces champs sont évidemment impliqués dans la perception du mouvement. Nous suggérons qu'ils sont aussi impliqués dans la perception des formes ; formes et mouvements possèdent le même espace de représentation.

En étudiant les *forces invariantes* des champs de vecteurs élémentaires, nous offrons des explications sur plusieurs processus associés à la mémoire visuelle, dont l'invariance aux transformations rigides, l'invariance aux transformations molles (déformations), ainsi que la génération spontanée de la forme, uniquement à partir de ses *régions de grande courbure*.

Qu'il s'agisse de *forces physiques* ou de *forces perceptives*, un vecteur géométrique indique l'amplitude, la direction et le point d'application d'une force dans l'*espace-temps*. En traitant ainsi la perception par la géométrie de vecteurs, nous ouvrons une fenêtre sur la psychologie gestaltiste selon laquelle l'organisation des perceptions repose sur un équilibre de forces. Inspiré par la nature physique de la lumière, qui est aussi celle de l'activité neuronale, nous traitons des champs de vecteurs de la même façon que l'on traite les *champs de forces électromagnétiques*. Par ce fait, nous faisons usage des *forces de couplage* et des *forces de torsion* générées lors du mouvement et qui s'exercent entre les champs sur les dimensions de l'espace-temps. La mémoire visuelle et la perception qui en découle trouvent alors les pistes d'une explication à l'intérieur de principes bien établis par la physique et les mathématiques. L'aspect majeur de notre contribution consiste à ancrer ces principes dans une architecture neuronale dont les opérations invariantes sont rigoureusement définies par la géométrie différentielle.

Mémoire visuelle — Transformations — Géométrie différentielle — Champs de vecteurs —  
Gestalt — Invariance

## INTRODUCTION

«Un rapport n'est rien en dehors de l'intelligence qui rapporte. L'univers ne peut donc être un système de lois que si les phénomènes passent à travers le *filtre* d'une intelligence.» (Bergson, *Évol. créatr.*, 1907, p. 356).

Cette citation du philosophe Bergson, tirée du dictionnaire sous la définition de *filtre*, ne pourrait mieux résumer l'essence de cette thèse sur la mémoire visuelle. Nous pouvons parcourir les dictionnaires étymologiques dans une quête sur la nature d'un filtre. Toutefois, comme pour toute chose, nous ne pouvons définir une nature précise du mot filtre autre que celle qui émerge de l'invariant qui unit toutes ses formes d'expression. Dans cette dernière phrase réside non seulement l'essence profonde d'un filtre, mais aussi l'idée qui sous-tend et englobe le discours qui prend forme dans cette thèse.

Un tissu cellulaire sensible tapisse l'architecture du cerveau. Comme un fer sur une pâte, les phénomènes *s'impriment* sur le tissu du cerveau. On dit du cerveau qu'il filtre ou qu'il soustrait une tranche des phénomènes dans lesquels il baigne et qu'il se laisse *imprégner* de la résultante. Au passage, les phénomènes filtrés laissent une *impression* sur le tissu : ils lui confèrent une mémoire. Ce qui fascine les plus curieux est que cette mémoire cellulaire, ce processus sélectif d'impression et de rappel des phénomènes, donne lieu à une perception stable malgré l'*embrouillement* incessant des phénomènes, malgré leurs transformations perpétuelles.

La mémorisation des patrons de lumière projetés sur la pellicule photosensible de l'œil est certainement la plus déroutante d'entre toutes. L'*image* qui se trouve sur cette pellicule ne ressemble en rien à la description langagière ou géométrique que nous donnons à l'objet qui la crée. Ce que nous décrivons comme une ligne droite a plutôt l'apparence d'une

minuscule *tache* de lumière très irrégulière. En raison des transformations causées par le mouvement et les vibrations de l'œil, les patrons de lumière subissent continuellement de fortes déformations. Le défilement des images est continu, sans pause, et jamais un objet ne pourra créer deux fois le même patron de lumière sur la pellicule de l'œil. Les formes visuelles sont sans cesse en mouvement, la lumière qui en émane est toujours changeante et pourtant, malgré la déformation et les distorsions, nous reconnaissons ce que nous *voyons* à chaque instant.

La littérature sur la façon dont le cerveau parvient à filtrer la transformation des patrons de lumière pour en imprimer une mémoire sur son tissu est vaste et les modèles proposés, innombrables. L'intensité des recherches découle naturellement de la place qu'occupe l'*image* dans la pensée humaine. Entre autres, nous disons qu'en raison de l'étendue des connexions d'origine visuelle sur les aires corticales, l'imagerie est essentielle au raisonnement humain et que le degré de déformation ou d'*articulation* que peut prendre un même objet visuel engendre l'articulation des mémoires les plus abstraites.

La première question que pose la recherche sur la mémoire visuelle concerne les processus par lesquels le cerveau parvient à générer une perception stable malgré une infinité d'images apparemment très différentes, sans cesse transformées, toujours changeantes. La question nous semble être mal posée. La mémoire n'est-elle pas générée par la transformation des patrons de lumière et non pas malgré celle-ci ? N'est-ce pas la transformation, le changement des patrons de lumière, qui forme la mémoire ? Nous tâchons dans cette thèse de soutenir cette suggestion qui s'accorde difficilement avec la conception classique de la mémoire où la transformation représente plutôt un obstacle.

Malgré plus d'un siècle de recherches et en dépit des évidences qui indiquent le contraire, les théories classiques demeurent dominantes et persistent à discuter de la mémoire visuelle et de la perception en général par des définitions rigides et des images statiques, immobiles. Dans cette veine, la description classique d'une forme visuelle est celle d'un agencement de composantes géométriques dont la configuration est définie par des règles fixes, comme les instructions d'une maquette. Ceci explique probablement pourquoi, en

robotique, les modèles de vision artificielle, basés sur les théories classiques, ne fonctionnent uniquement que pour une application bien particulière, dans un espace prédéfini et spécifique. Dans un espace instable et riche en complexité, ces modèles sont voués à subir une explosion combinatoire des règles utilisées pour leur fonctionnement. Aucun modèle, aucun système de perception visuelle proposé à ce jour, même dans le plus grand optimisme, ne s'approche vaguement des capacités de reconnaissance visuelle du cortex humain.

En réponse aux difficultés pratiques et théoriques qui entourent la conception classique de la mémoire visuelle, le discours de cette thèse se situe sur deux plans : philosophique et mathématique. Sans en faire la preuve, ce qui serait à tout le moins prétentieux, l'intention première est de suggérer qu'une erreur fondamentale persiste dans l'élan de recherche sur la mémoire visuelle. Nous disons que cette erreur est de persévérer à croire que la nature d'une chose peut être définie dans un état statique. Un état que nous pouvons mémoriser et représenter par une description commune à un maximum de situations similaires. Reconnaître un objet visuel, saisir son identité, donne *l'illusion d'une image statique*. Bien que le maintien d'une chose en mémoire puisse donner l'impression qu'elle soit immobile, cela n'implique pas qu'elle le soit.

J.J Gibson (1950, 1968) fut probablement l'un des premiers à suggérer que la transformation des patrons de lumière ne constitue pas un obstacle à la formation des mémoires visuelles et qu'elle lui est plutôt nécessaire. En s'appuyant sur les idées de théoriciens pionniers, notre discours philosophique suggère que l'espace visuel est celui du mouvement et du changement des patrons de lumière, et non pas celui de l'image statique.

Nous croyons que la nature d'une chose, la mémoire que nous en avons, se trouve entre ses différents visages. Elle ne se trouve pas dans un état fixe et définitif mais plutôt dans son mouvement, dans sa transformation. Aucune approche ni aucun modèle ne semble prendre pleinement en considération l'hypothèse que la transformation de lumière engendrée par le mouvement des formes est toujours présente et qu'une immobilité est un artéfact de laboratoire. Il semble que sans mouvement, dans l'immobilité totale, le monde s'efface de la

perception (Copolla et Purves, 1996). Il semble qu'une chose ne soit perceptible que si elle change, que si elle bouge.

Cette thèse suggère que notre fenêtre d'observation sur l'univers est fondamentalement reliée à la transformation. Implicitement, il y est dit que l'essence d'une mémoire se trouve dans la *transformation* qui unit le *local* au *global*. Il serait certainement présomptueux d'affirmer avoir une preuve inéluctable sur une telle *vision* des choses. Cependant, plusieurs indices et démonstrations mathématiques nous permettront de croire que l'espace de la mémoire visuelle est celui de la transformation globale des patrons de lumière et que cette dernière s'exprime par un seul opérateur local.

Dans la philosophie gestaltiste, connaître l'organisation du cerveau c'est aussi connaître l'organisation des forces qui le stimulent (Brown et Volt, 1937). La philosophie gestaltiste discute d'une géométrie de la forme et d'une géométrie du cerveau qui la perçoit (Hoffman et Dodwell, 1985). En ce sens, nous disons qu'une discussion sur la transformation des patrons de lumière est aussi une discussion sur la mémoire visuelle.

Certaines avenues théoriques suggèrent que la transformation des patrons de lumière est *imprimée* sur le tissu du cerveau sous la forme de *champs de vecteurs* (*champs de forces*). En accord avec *l'algèbre de Lie* des perceptions visuelles (Hoffman, 1966), ces champs de vecteurs composent les *forces* gouvernantes de la mémoire. Ils représentent les variations de lumière générées lors du mouvement entre l'observateur et la scène visuelle. Dans l'analyse de leurs propriétés invariantes, nous offrons une autre façon de concevoir ces champs comme le sous-espace de la mémoire visuelle.

Ces champs de vecteurs sont évidemment impliqués dans la perception du mouvement. Nous suggérons qu'ils sont aussi essentiels à la perception des formes. L'expression *physique et perceptive* des champs de vecteurs sur les dimensions de *l'espace-temps* nous permet d'évaluer les effets du *couplage* de leurs forces sur l'intégration de contours visuels. Plusieurs propriétés de la mémoire visuelle trouvent alors les pistes d'une explication dans un seul principe : l'intégration de champs de vecteurs.

En notant que le vecteur géométrique exprime un gradient de lumière comme il exprime une force appliquée sur un point dans l'*espace-temps*, la physique et les théories de la perception forment une même fenêtre d'observation sur la mémoire visuelle. Spécifiquement, les arguments et démonstrations établis dans cette thèse donnent un appui mathématique et biologique aux théories d'organisation et de forces perceptives de la psychologie gestaltiste. Par le fait même, nos démonstrations suggèrent que le mouvement et la transformation des patrons de lumière qui en découle sont essentiels aux processus de la mémoire visuelle.

Imprimés sur le tissu neuronal du cerveau, les champs de vecteurs traités dans cette thèse s'identifient aux principes généraux de mémoire neuronale. Le chapitre qui suit traite en premier lieu de ces principes. Une revue de certains modèles de mémoires neuronales y est exposée afin de présenter les principes que nous croyons nécessaires à l'organisation de toute forme de mémoire sur un tissu cellulaire. La section finale du chapitre donne une introduction aux notions de mémoire visuelle. Nous y établissons les prémisses de notre hypothèse sur l'importance, voire la nécessité, de la transformation des patrons de lumière dans la formation de mémoires visuelles.

Le deuxième chapitre précise davantage les prémisses établies au premier chapitre. Spécifiquement, on y fait état des opérations élémentaires de géométrie différentielle permettant de traiter la forme visuelle comme on traite une transformation. La relation entre la géométrie différentielle et la mémoire visuelle est confirmée par la présence de champs de vecteurs (*champs de forces*) sur le cortex visuel. Les *champs de vecteurs élémentaires* y sont présentés comme les forces gouvernantes de la mémoire : les changements de lumière causés par le mouvement.

Le troisième chapitre sert entre autres de synthèse aux deux premiers. Il résume et réitère l'importance de considérer le mouvement et la transformation des patrons de lumière dans tout processus de mémoire visuelle. L'application de transformations de géométrie différentielle sur un patron de lumière nécessite une continuité mathématique et donc un continuum de résolutions physiques dans l'*espace-temps*. Conséquemment, à l'aide d'une

simulation numérique, un modèle de champs de vecteurs à résolutions multiples est présenté afin de valider l'application de transformations de géométrie différentielle comme modèle du cortex visuel.

Au quatrième chapitre, les propriétés invariantes des champs de vecteurs élémentaires font l'objet d'analyses. En s'appuyant en partie sur le théorème de Stokes et sur le théorème de divergence, l'ensemble des démonstrations offre une explication sur plusieurs processus de la mémoire visuelle. En particulier, on y démontre qu'une intégration globale et invariante des contours visuels est possible en intégrant localement, sur les coins de polygones.

En nous inspirant de la nature électromagnétique de la lumière et de l'activité neuronale, nous traitons les champs de vecteurs comme des *champs de forces*. Ceci nous permet de faire usage des *forces de couplage* et des *forces de torsion* générées lors du mouvement sur les dimensions de l'*espace-temps*. Ainsi, dans un esprit gestaltiste, les lois de la physique sont aussi les lois de la perception.

Le quatrième chapitre illustre aussi comment l'intégration des champs de vecteurs élémentaires est applicable à deux propriétés fondamentales de la mémoire visuelle : l'invariance à la déformation des objets ainsi que la génération spontanée de leurs contours. La démonstration indique que, lorsqu'on représente les contours par des arcs de spirale, une intégration globale est possible en intégrant localement sur les régions de grande courbure du contour.

En conclusion, un retour est fait sur l'essence de la mémoire visuelle, telle qu'elle est présentée dans cette thèse, et sur les avenues à suivre dans cette façon de *voir*. Il y est souligné que l'ensemble des principes soulevés impose de considérer la nécessité du mouvement des formes dans la stabilité des perceptions. En opposition aux théories et modèles classiques qui dominent la littérature sur la vision, notre argumentation indique que le mouvement et l'instabilité des formes ne constituent pas un obstacle à la formation d'une perception stable, mais qu'ils en sont la raison même.

## CHAPITRE I

### MÉMOIRE VISUELLE ET PRINCIPES DE MÉMOIRE NEURONALE

#### 1.1 Introduction

La littérature sur la vision est très vaste. Des milliers d'études et de modèles peuvent être répertoriés et il semble difficile de trouver un consensus global sur la nature des mémoires visuelles dans un élan d'approches aussi fondamentales que contradictoires. L'accessibilité à l'étude des sciences accélère le processus de partage des connaissances. Cependant, l'augmentation exorbitante du nombre de recherches engendre une source importante de bruit dans la littérature et pousse les chercheurs à construire trop rapidement sur des résultats souvent très incertains. Ceci ne peut que nous détourner d'un questionnement simple et profond sur l'essence de la mémoire visuelle.

Si les assises de notre compréhension de la mémoire et de la perception humaine étaient de grandes vérités, la science ne serait-elle pas en mesure d'offrir de meilleures réponses suite à tant de recherches ? Nous croyons que les bases sur lesquelles s'appuient les recherches doivent sans cesse être questionnées, jamais tenues pour acquises, et qu'il importe grandement de revoir la simplicité des idées premières, loin des interférences engendrées par l'engouement précipité des recherches actuelles.

En s'appuyant sur la simplicité de principes de physique et sur la puissance de théories pionnières en psychologie, cette thèse présente une conception de la vision, basée sur la mémoire visuelle, qui demeure encore trop peu étudiée en comparaison avec les théories

courantes. Nous suggérons que la transformation des patrons de lumière causée par le mouvement est essentielle à la mémoire visuelle et à la formation de perceptions visuelles invariantes. La majeure partie de nos démonstrations mathématiques fait usage de principes de géométrie différentielle associés à l'intégration de champs de vecteurs (champs de forces). Émergeant du mouvement des formes, les *champs de vecteurs élémentaires* y sont présentés comme les *forces physiques et perceptives* qui gouvernent la mémoire visuelle.

Ces champs de vecteurs expriment la transformation des patrons de lumière causée par le mouvement. Bien qu'ils soient évidemment impliqués dans la perception du mouvement, nous illustrons comment ils peuvent aussi s'appliquer à la mémoire des formes. L'étude de leurs *forces rotatives* et de leurs *forces d'expansion* nous permet de concevoir ces champs comme l'espace de représentation de la mémoire visuelle.

Les notions introductives que nous présentons dans ce chapitre ne concernent pas directement les champs de vecteurs. Elles sont cependant fondamentales à l'organisation de toute forme de patrons d'activité cellulaire sur le cortex. Les champs de vecteurs sont des patrons d'activité cellulaire (et des patrons de lumière) dont l'organisation est bien particulière.

En dernière partie de chapitre, les deux avenues théoriques qui englobent la littérature sur la mémoire visuelle sont mises en relation. Nous pourrions alors diriger notre discussion sur les bases de nos hypothèses et analyses concernant la mémoire visuelle : la transformation et les champs de vecteurs.

## 1.2 Filtre, transformations et mémoires.

L'expression courante d'un *filtre* renvoie à celle d'un dispositif ayant la propriété de *clarifier* un liquide qui coule à travers son tissu. De façon plus générale, un filtre agit comme un dispositif dont les opérations ont pour effet de *transformer* toute chose qui le traverse. Techniquement, un filtre est simplement une *fonction* dont les valeurs d'entrées et de sorties

permettent d'en déduire les opérations. Dans le domaine des communications, on utilise le terme « filtre de fréquences » pour désigner un dispositif ayant la propriété de transformer un signal en amplifiant certaines fréquences du spectre énergétique et en bloquant le reste des fréquences. En ne laissant passer qu'une partie d'une chose autrement plus vaste, à tout le moins, plus évasive, la transformation faite par un filtre a souvent un effet de sélection et de soustraction.

En ce sens, la mémoire humaine est l'expression absolue d'un filtre. Qu'il s'agisse d'intensités lumineuses, sonores, tactiles, gustatives ou olfactives, la mesure des phénomènes qui frappent nos sens n'est jamais la même, elle est en perpétuelle transformation. L'activité cérébrale qui donne naissance aux mémoires n'est jamais stable, elle est constamment *brouillée* par le bruit *électrochimique* provenant de patrons d'activité neuronale voisins, ou encore, par l'étanchéité imparfaite du neurone en tant que conduit électrique (Malmivuo et Plonsey, 1995). À l'intérieur d'une même poussière de seconde, la pensée n'est pas toujours claire, les souvenirs semblent parfois lointains ou mal définis. Le signal neuronal est parsemé de distorsions et le cortex est non seulement en constant processus de filtration des phénomènes externes, mais aussi constamment en processus d'autofiltration de son propre bruit. Dans un effort de métaconscience, on remarque que la pensée oscille toujours entre le *flou* et le *clair*.

La mémoire doit constamment faire face à l'instabilité des phénomènes, à leurs transformations. Et tel un filtre, elle doit être en mesure *d'éliminer* cette instabilité afin d'en extraire une constante, une nature implicite, sous-jacente aux apparences. En questionnant les gens sur la nature d'une chose, nous remarquons immédiatement qu'il semble exister une infinité de variations de celle-ci et qu'il est impossible d'en identifier de manière précise la nature. Peut-être est-ce parce que la nature des choses reste bien au-delà des mots, ou bien au-delà d'une définition statique.

À chaque instant, alors que tout bouge, alors que tout se présente sous un visage sans cesse changeant, nous reconnaissons ce qui se présente à nos yeux. Semble-t-il, nous

reconnaissons l'invariant, la constante qui se cache sous les millions d'aspects différents d'une même chose et qui nous permet d'en inférer sa nature.

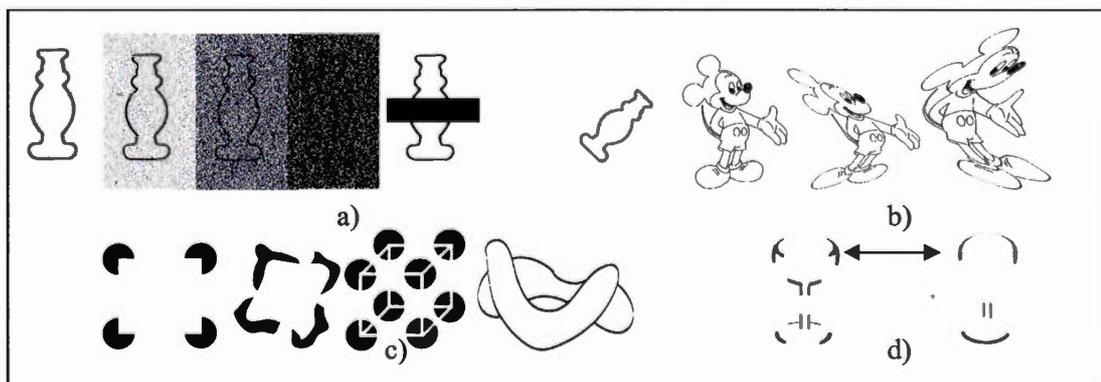
La recherche sur la façon dont le cerveau est en mesure de développer des mémoires malgré l'instabilité des phénomènes a certainement connu sa plus grande effervescence dans le domaine de la vision. L'image occupe une place incontournable dans la pensée humaine. Derrière l'idée qu'une image vaut mille mots se cache la déroutante capacité de représentation d'une image. La forme visuelle rejoint tous les types de raisonnements et permet souvent la mémorisation des notions les plus abstraites. Un regard sur la façon dont la vision parvient à être ce qu'elle est, dans un monde aussi instable, offre une bien grande fenêtre sur le raisonnement humain.

Décrit géométriquement sur la surface de la rétine, un objet n'est jamais exactement le même. Il suffit de penser au visage d'un proche dessiné en milliers d'exemplaires. Jamais la mesure du tracé de crayon ne sera exactement la même d'un dessin à l'autre. De la même façon, jamais les rayons de lumière qui émanent d'un objet ne peuvent former, au cours d'une vie, deux fois la même image sur la rétine. Ceci implique que la mémoire doit nécessairement développer des états attracteurs afin d'associer à un même concept une infinité d'entrées similaires. Sans une force d'attraction qui dirige les phénomènes similaires vers un même concept, une mémoire serait très peu efficace dans un environnement aussi riche et instable que le nôtre.

La liste des déformations que peuvent subir les patrons de lumière qui forment l'image rétinienne est plutôt intimidante. Avant d'atteindre la rétine, la lumière qui émerge d'un objet doit traverser toutes les imperfections du cristallin. Elle doit ensuite traverser le milieu aqueux à l'intérieur de l'œil pour finalement passer à travers une couche de cellules superposées devant la rétine. L'analogie est celle d'un rayon de lumière qui doit traverser une vieille loupe abîmée, ensuite traverser un bocal d'eau pour finalement passer à travers des coussins de plage. Il n'est alors pas difficile de croire que, depuis l'extérieur avant d'atteindre la rétine, la lumière qui émane d'un objet subit des distorsions sévères et, surtout, que celles-ci sont loin d'être stables. Mais là n'est qu'une partie du problème. Suite au mouvement

relatif entre l'objet et l'observateur, un objet peut être vu et reconnu depuis une infinité d'angles différents. De plus, la majorité des objets qui composent ce monde ne sont pas rigides. Telle une pâte à modeler, la plupart des objets subissent d'importantes déformations. En tenant compte des distorsions de la lumière, des mouvements rigides et mous d'un objet, la mémorisation et la reconnaissance de ce dernier en quelques millièmes de secondes semblent tenir du miracle.

Les images ci-dessous offrent une illustration de la filtration qu'effectue le cortex sur les transformations de l'image rétinienne. Entre autres, ces images font état du pouvoir de reconstruction du cortex visuel et du déterminisme que sa filtration impose aux phénomènes externes. La figure 1.1a fait état de la capacité à reconnaître et à mémoriser les formes malgré des conditions visuelles bruitées ou incomplètes. La figure 1.1b donne une illustration des transformations molles et rigides que peut subir un objet sans toutefois empêcher l'activation de sa mémoire. La figure 1.1c démontre une capacité remarquable et sans cesse en opération de la mémoire visuelle, celle de la *génération spontanée* de la forme alors qu'elle est partiellement cachée ou même physiquement absente. Enfin, la figure 1.1d illustre l'importance pour la mémoire visuelle des régions appelées *points de courbure critique* (grande courbure). La même quantité de traits de crayon a été effacée et pourtant, rien n'indique qu'il s'agit d'une coupe de vin dans le cas où les régions de haute courbure ont été effacées.



**Figure 1.1** a) Bruit et images incomplètes b) Transformations molles (déformations) et transformations rigides c) Génération spontanée des contours d) Importance des points de courbure critique.

En considérant le tissu cellulaire du cortex comme un filtre, une notion semble échapper aux tendances dominantes des recherches sur la mémoire visuelle et sur la perception en général. Un filtre transforme une variété d'états différents d'une même substance. Il ne transforme pas une substance mais plutôt un aspect de celle-ci, une transformation de celle-ci. Il est alors question d'une transformation de transformations.

De la même façon, au cœur de la théorie de Donald Hebb (1949) sur les ensembles cellulaires se trouve cette notion de boucles d'activités neuronales en constante résonance, toujours en recherche d'équilibre en réponse aux perturbations. Les boucles de résonance sur le tissu du cortex n'atteignent pas d'états statiques, elles sont en perpétuelle transformation, constamment en séquences temporelles avec les boucles de résonance voisines. Le flux d'activité sur le cortex est un véritable courant électrique dont la dynamique se fait en temps continu, sans interruption (Treves, Rolls et Tovee, 1996).

Contrairement à cela, la tendance des recherches sur la mémoire visuelle est de considérer que l'objet externe est statique, que le patron de lumière qui forme l'image rétinienne est statique. Classiquement, l'objet visuel est représenté comme un état stable où la transformation (le mouvement) qui lui donne cet état est temporairement mise en pause, fixée dans le temps. Dans cette approche, c'est un instant de la transformation qui forme la mémoire visuelle. Pourtant, l'image rétinienne est toujours une transformation de celle qui la précède. Nous exposons au troisième chapitre qu'une image parfaitement stable a pour conséquence un *effacement* instantané de la vision. Nous croyons qu'il est plus approprié, voire nécessaire, de discuter non pas d'une image rétinienne, mais plutôt du défilement d'images, du *film rétinien*.

Dans l'espoir de comprendre les mécanismes élémentaires de la perception visuelle, est-ce correct de mettre le défilement d'images en pause et de dénuder l'image rétinienne de sa transformation, de la fixer dans le temps? En s'appuyant sur l'algèbre de Lie et la théorie des groupes de transformations, Hoffman (1966) propose une théorie de la perception où la forme visuelle et les forces qui causent sa transformation possèdent la même structure. L'idée centrale de cette théorie est que les objets visuels eux-mêmes sont composés des

transformations auxquelles la mémoire est invariante. Par l'expression mathématique des principes gestaltistes, la théorie de Hoffman décrit la forme visuelle par l'intégration de *champs de vecteurs* dont la présence est nécessaire à l'équilibre des perceptions. La forme et sa transformation ont la même structure, elles sont complémentaires : la mémoire se trouve dans la transformation (dans le changement) et non pas en dépit de celle-ci.

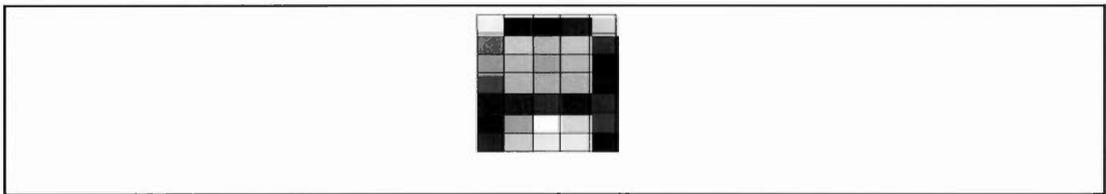
Ceci correspond aux principes et théories de Gibson (1950, 1957, 1968), qui avait aussi une notion profonde du rôle que joue le mouvement dans nos perceptions. Sans assise mathématique, il élaborait une théorie selon laquelle la transformation des patrons de lumière causée par le mouvement relatif entre l'observateur et la lumière ambiante contient toutes les propriétés nécessaires à une perception visuelle invariante.

Dans la prochaine section, sans discuter directement de la perception visuelle, nous passons d'abord en revue les principes fondamentaux de mémoire et de plasticité neuronale et plus particulièrement ceux de la plasticité différentielle. Les principes présentés sont nécessaires à l'organisation et la stabilisation des champs de vecteurs sur le tissu du cortex.

### 1.3 Principes et modèles de mémoire neuronale

La reconstruction des images bruitées et incomplètes comme celles illustrées par la figure 1.1a rend compte d'un phénomène qui va au-delà de la mémoire et de la perception visuelle, celui de la reconstruction d'une information incomplète ou bruitée. Sur son tissu cellulaire, le cortex doit constamment faire usage de ce type de reconstruction. Tout comme un patron d'intensités lumineuses, un patron d'intensités neuronales peut aussi être décrit par une image. En ce sens, on peut discuter d'une *image neuronale*. Comme une image lumineuse, une image neuronale peut aussi être *embrouillée*. La représentation de l'activité neuronale par une image ouvre la porte à une algèbre vaste et puissante : l'*algèbre d'image* (Ritter, 1999). L'analogie entre l'algèbre d'image et l'activité cellulaire est incontournable puisque dans les deux cas, il s'agit de représenter des images par l'intermédiaire d'opérations locales permettant de *voyager* d'une image à une autre (tel un film). Nous ne pouvons en

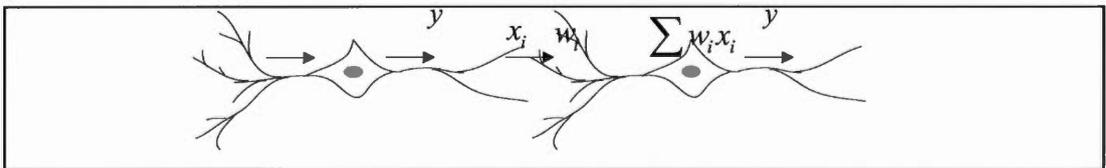
faire une preuve, mais, tout comme il importe de discuter de la transformation de l'image rétinienne (du défilement des images rétiniennes), nous croyons qu'il importe de discuter de la transformation des images neuronales. Ainsi, l'image neuronale telle que discutée dans cette thèse n'est pas nécessairement statique. Il est donc important de conserver à l'esprit que la formation des mémoires puisse se trouver dans le défilement des images et non pas dans une seule image statique comme l'illustre la figure 1.2.



**Figure 1.2** Image lumineuse ou image neuronale statique?

Tout comme l'image visuelle, l'image neuronale qui donne naissance aux mémoires est elle aussi sujette à être incomplète, bruitée ou embrouillée. Et tout comme l'image visuelle, aucune des composantes locales n'est nécessaire ni suffisante pour activer une mémoire. En effet, le neurone est sujet à de fortes instabilités, inhérentes à tout système biologique, et la perte de quelques neurones n'entraîne aucunement la perte de mémoire.

Le rôle du neurone est traditionnellement exprimé par l'intégration (l'addition) des stimulations ( $x_i$ ) provenant des neurones avec lesquels il forme des synapses ( $w_i$ ), des liens sensibles que l'on peut représenter dans une *matrice synaptique*.



**Figure 1.3** Le neurone intégrateur : le neurone décharge un flux électrique ( $y$ ) en fonction de la somme des stimulations ( $x_i$ ) qu'il reçoit, pondérée par sa sensibilité ( $w_i$ ).

Par intégration des stimulations, on entend exactement la définition mathématique de l'intégrale. Simplement, on dit du neurone qu'il fait le produit des stimulations ( $x_i$ ) avec les synapses ( $w_i$ ) et qu'il intègre (additionne) ce produit sur la totalité de ses synapses.

$$a = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N w_i x_i .$$

L'activation ( $a$ ) du neurone est donc fonction de la somme des stimulations ( $x_i$ ) reçues, pondérées par la sensibilité de ses synapses ( $w_i$ ). En transformant ainsi l'intensité des stimulations reçues par un neurone, la matrice synaptique joue alors le rôle d'un filtre dans la transmission neuronale.

Selon les stimulations filtrées par la matrice synaptique, le neurone décharge à son tour un flux électrique ( $y$ ) lui permettant de propager le signal vers d'autres neurones, où le même processus de filtration se poursuit. L'intensité de la décharge électrique étant limitée par la structure biologique du neurone (canaux d'ions), une fonction de saturation ( $f$ ) est traditionnellement appliquée à l'activation du neurone afin de limiter son activité à l'intérieur de limites naturelles. L'activité du neurone est alors donnée par

$$y = f(a) ,$$

où  $f$  est une fonction non linéaire.

Cette séquence d'intégration et de décharge qui compose la propagation du signal, telle la vague d'un jeu de domino, se produit dans une fenêtre temporelle de quelques millièmes de seconde. Cette fenêtre temporelle étant variable, on peut y concevoir une origine de la variabilité de notre perception du temps. Mais aussi, contrairement au processeur informatique, les neurones sont reliés parallèlement par milliers, ce qui leur permet de transmettre une quantité d'information à l'intérieur d'une seconde dont l'ampleur est démesurée lorsque mise en rapport avec la capacité d'un processeur informatique.

Depuis les travaux de Hebb (Hebb 1949), on sait que la filtration effectuée par une matrice synaptique varie selon les changements moléculaires qui ont lieu au niveau des synapses. Il est alors question d'une filtration adaptative, où la matrice modifie la filtration qu'elle effectue selon ses propres états. Spécifiquement, le postulat d'Hebb stipule que la sensibilité entre deux neurones s'intensifie par l'activation simultanée et répétitive de ceux-ci. En d'autres termes, lorsque deux neurones sont activés simultanément et de manière répétitive, les changements moléculaires au niveau des synapses  $w_i$  facilitent le transfert d'énergie entre ceux-ci. On dit que les neurones ont développé une relation à long terme, ils ont développé une mémoire de l'autre. On peut donc faire la distinction entre la notion d'un simple filtre et celle d'un filtre adaptatif. Un simple filtre opère toujours la même transformation dans l'espace et le temps. Dans le cas d'un filtre adaptatif, telle une matrice synaptique, la sensibilité du filtre est plastique, elle évolue en fonction des stimulations qui le traversent. C'est de cette caractéristique qu'émergent les propriétés spéciales des transformations opérées par un filtre adaptatif.

Mathématiquement, nous disons que le processus de mémorisation, *l'imprimé* qui se forme sur le tissu neuronal, se décrit par la dérivée  $\partial w_i$  de la sensibilité neuronale  $w_i$ . Spécifiquement, on indique que le changement moléculaire d'une synapse  $w_i$  qui relie les neurones  $x$  et  $y$  est proportionnel à leur décharge selon l'équation

$$\partial w_i = \alpha(x y).$$

Ceci a pour effet d'intensifier l'association entre les deux neurones.

Il est maintenant bien reconnu que *l'imprimé* d'une mémoire sur l'architecture du cortex ne peut être localisé par l'identification précise de quelques synapses (Rolls, 2002). On dit qu'il est impossible de localiser les synapses nécessaires à la mémorisation d'un phénomène particulier. Plutôt, une mémoire est massivement distribuée de manière parallèle sur les synapses d'une large collectivité de neurones et aucune d'entre elles n'est nécessaire,

ni suffisante pour la mémorisation complète d'un phénomène. Ainsi, la trace mnésique d'un *imprimé* neuronal n'est pas localisée en un endroit précis mais distribuée à travers l'ensemble des synapses d'une collectivité de neurones, ce qui permet une représentation riche et stable des phénomènes. Ce type de représentation des mémoires fait l'objet des prochaines sections.

Spécifiquement, les deux prochaines sections présentent les principes de mémoire neuronale nécessaires à l'organisation et à la stabilité de l'activité sur le tissu cellulaire du cerveau. Les champs de vecteurs dont nous traitons abondamment au cours des prochains chapitres sont une organisation bien particulière de l'activité cellulaire. Il demeure qu'ils représentent un patron d'activité *parallèle et massivement distribuée* sur des millions de neurones. L'activation et la stabilité des champs de vecteurs sur le tissu cellulaire touchent alors aux principes illustrés dans ce qui suit sur les mémoires associatives et autoassociatives.

### 1.3.1 Mémoire associative

Le modèle de mémoire associative (Proulx, 1986) offre une excellente expression des principes de mémoire neuronale distribuée sur un large ensemble de synapses, sans adresse précise. Le modèle de mémoire associative (aussi appelée mémoire corrélationnelle) ne constitue pas à proprement parler un modèle de mémoire visuelle, le sujet d'analyse de cette thèse. Cependant, par des opérations matricielles simples, il indique comment une première mémoire peut activer une seconde mémoire. Il rend compte de la puissance et de la flexibilité de représentation que possède un tissu cellulaire composé de millions de neurones.

Comme l'illustre la figure 1.4, dans ces modèles, une mémoire est distribuée sur une collectivité de neurones. Les patrons d'activités cellulaires (deux images neuronales), s'expriment respectivement par des vecteurs  $X$  et  $Y$  dont les éléments  $x_i$  et  $y_j$  correspondent à l'activité individuelle des neurones. La matrice  $W$  exprime la sensibilité synaptique, le filtre qui unit chaque élément de l'image  $X$  avec ceux de l'image  $Y$ .

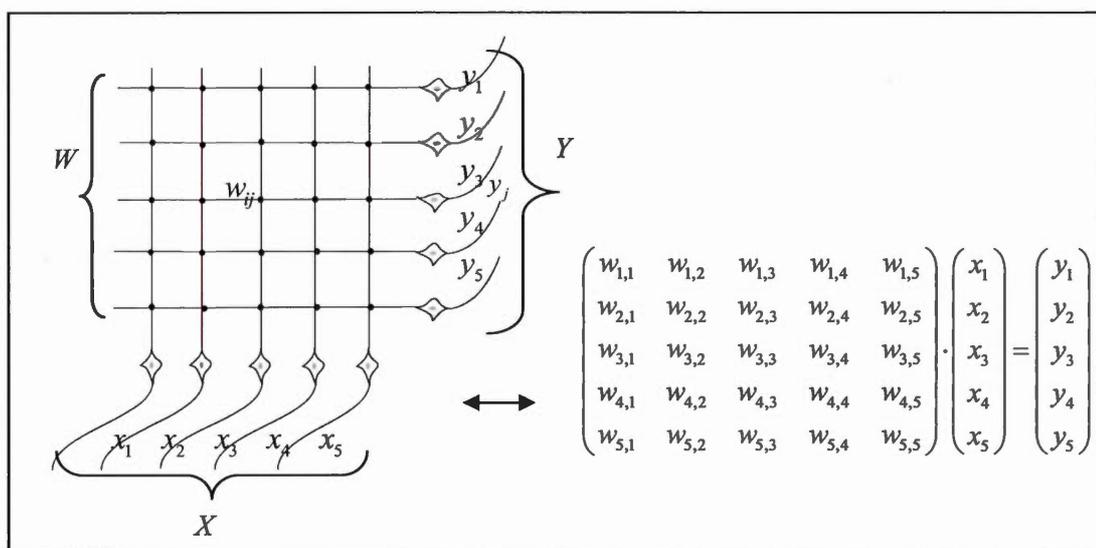


Figure 1.4 Croquis d'une mémoire associative à 5 neurones.

Le produit matriciel

$$Y = W \cdot X^T$$

indique l'activation de l'image  $Y$  par l'image  $X$ . La matrice synaptique a comme raison d'être la filtration de l'influx neuronal  $X$  qui la traverse, ou encore, la transformation de l'influx neuronal  $X$  en l'influx neuronal  $Y$ .

Comme tout filtre, la transformation qu'effectue  $W$  sur les images qui lui sont appliquées est fonction de son relief, de la structure profonde de son *moule*. La structure profonde d'une matrice s'exprime par ses vecteurs propres. Les vecteurs propres d'une matrice définissent des *droites de résonance*, ou encore des directions dans l'espace pour lesquelles la matrice *vibre* fortement. On peut imaginer les vecteurs propres comme l'idée profonde qui sous-tend et dirige une communication. Dans l'observation de la figure 1.6, les plus imaginatifs peuvent concevoir les vecteurs propres d'une matrice comme le vent qui gouverne le vol des feuilles en suspension dans l'air. Mathématiquement, un vecteur propre

( $v$ ) est défini par  $\lambda v = Wv$  où  $\lambda \neq 0$  et est un scalaire appelé valeur propre, exprimant l'intensité de la résonance dans la direction de  $v$ .

La matrice synaptique  $W$  est adaptative, elle possède la capacité de développer des nouvelles mémoires. Par principe d'apprentissage hebbien, le patron d'activité  $X$  renforce ses liens synaptiques avec le patron  $Y$ . Spécifiquement, à la suite d'une présentation répétitive et simultanée des patrons  $X$  et  $Y$ , la matrice  $W$  *moule* sa sensibilité de manière proportionnelle au produit des patrons  $X$  et  $Y$ . La mémorisation, le changement synaptique, prend alors la forme générale d'une opération de corrélation

$$\partial W = \alpha(XY^T).$$

La matrice  $W$  *mémorise* l'espace corrélationnel (l'espace associatif) entre les patrons  $X$  et  $Y$ . Ainsi, cette dernière filtre l'influx neuronal  $X$  qui la traverse de telle sorte que le patron d'activité  $Y$  qui en résulte est une fonction directe de sa corrélation avec  $X$ . Lorsqu'on lui présente une image qui ressemble à  $X$ , on dira que la matrice  $W$  se *souvient* de l'image  $Y$ . La matrice permet alors le rappel d'une image par la présentation d'une autre image avec laquelle une association a été créée et *imprimée* dans la matrice.

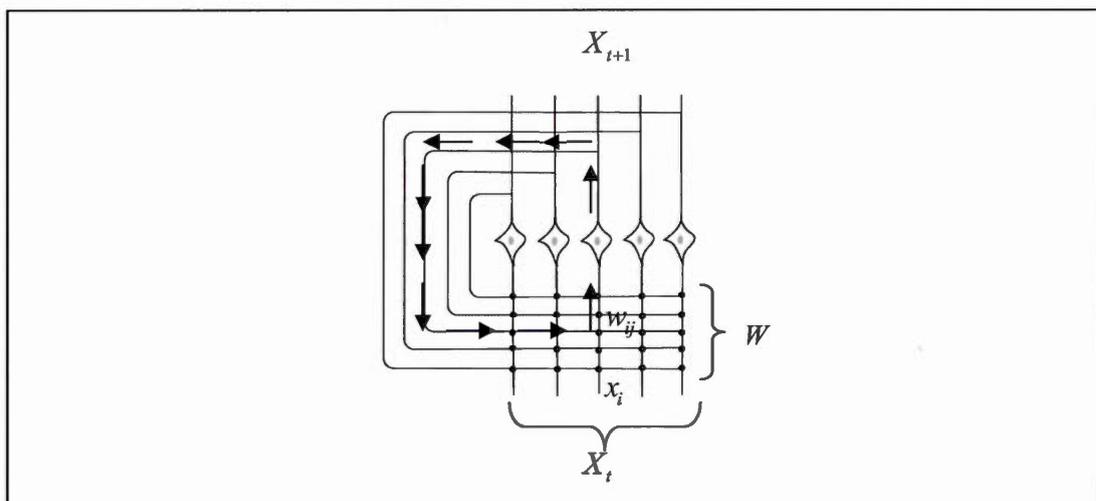
Cependant, en l'absence d'une dynamique gouvernante, ces modèles ne permettent pas la formation d'états attracteurs. Dans un environnement instable et riche en similarités, la formation d'états attracteurs est nécessaire, sans quoi aucune catégorisation ne serait possible ; l'association de phénomènes similaires serait profondément limitée.

### 1.3.2 Mémoire autoassociative

Le modèle de mémoire autoassociative (aussi appelée mémoire autocorrélationnelle) fonctionne selon des principes similaires à celui du modèle de mémoire associative. De plus, la dynamique de son fonctionnement lui permet la formation d'états attracteurs, nécessaires à

la catégorisation. Entre autres, il exprime comment une image neuronale peut se clarifier elle-même lorsqu'elle se trouve incomplète ou *embrouillée* par une source de bruit. En effet, les images  $X$  et  $Y$  ne sont pas uniquement reliées l'une à l'autre. Une image peut aussi former des liens sur elle-même créant ainsi une *boucle de résonance*. Cette boucle de résonance (aussi appelée boucle de rétroaction) assure le *nettoyage* d'une image embrouillée (elle soustrait le bruit, elle la clarifie).

Tout comme notre capacité à compléter les images bruitées, illustrées par les figures 1.1a, la stimulation incomplète d'une collectivité de neurones  $X$  peut tout de même engendrer la reconstruction complète de l'image neuronale. Les modèles de mémoire autoassociative, aussi appelés réseaux attracteurs, offrent une excellente expression des principes de reconstruction d'une information incomplète ou mal définie par la présence de bruit aléatoire (Proulx et Bégin, 1996). La figure 1.5 illustre l'architecture neuronale de ces modèles.



**Figure 1.5** Croquis d'une mémoire autoassociative à 5 neurones en boucle de résonance.

De la même façon que le modèle associatif, une image neuronale s'exprime par un vecteur  $X$  dont les éléments correspondent un à un à l'activité individuelle des neurones  $x_i$ . En plus de rendre leur activité disponible à une autre collectivité de neurones  $Y$  (comme dans le cas du modèle corrélational), les neurones sont reliés à eux-même par une boucle de

rétroaction via la matrice synaptique  $W$ . Cette boucle de rétroaction correspond directement aux idées d'Hebb (1949) avancées au milieu du siècle dernier lorsqu'il suggère dans sa théorie que les ensembles cellulaires s'organisent selon leur propre activation par le biais d'une boucle de résonance. La boucle de rétroaction peut être mise en analogie avec l'effet de résonance qui a lieu lorsqu'un son de fréquence appropriée fait vibrer et jouer les instruments de musique qui se trouvent à proximité.

Sur le tissu neuronal, une telle boucle a pour effet de créer une réverbération, une résonance dans le réseau qui retourne constamment l'activité neuronale  $X$  sur elle-même. La boucle de rétroaction apporte une nature dynamique à la filtration en faisant en sorte que les états présents du système influencent ses états futurs. Autrement dit, la décharge du vecteur  $X$  au temps présent devient alors sa stimulation au temps prochain selon

$$X_{t+1} = WX_t.$$

Dans ces modèles, la mémorisation prend alors la forme d'une opération *d'autocorrélation* et la matrice  $W$  mémorise l'espace corrélational entre le patron  $X$  et lui-même selon

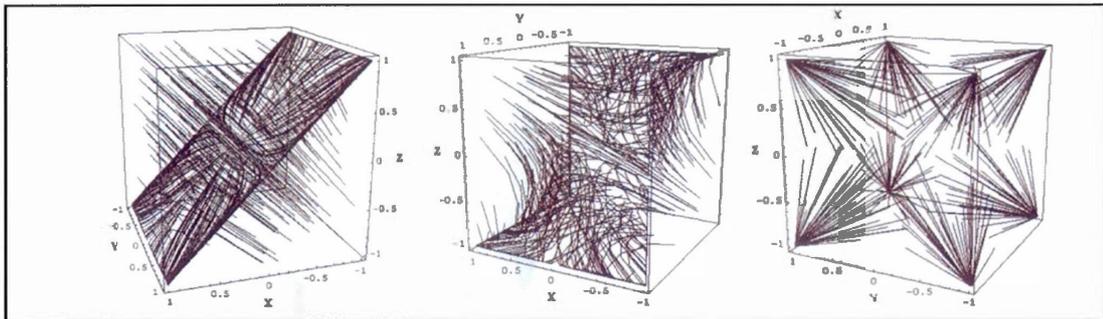
$$\partial W = \alpha(XX^T).$$

Le rôle de la matrice  $W$  consiste alors à favoriser le rappel associatif d'une image neuronale par elle-même. En laissant l'activité neuronale circuler dans la boucle de rétroaction, une image neuronale stable (image claire) est obtenue en appliquant une fonction de saturation sur les états du système selon

$$X_{t+1} = f(WX_t).$$

Géométriquement, ceci a comme effet d'enfermer les états du réseau à l'intérieur d'un ensemble compact (*hypercube*) d'un espace vectoriel dont les limites sont des états

stables, dits attracteurs. Plus précisément, la boucle de rétroaction a pour conséquence une amplification des droites de résonance (*vents gouvernants*) de la matrice  $W$  et donc, une amplification de l'activité qui y circule. Ceci a pour cause de projeter sur un même point de convergence une infinité d'images différentes mais similaires. La figure 1.6 illustre ce processus dans le cas d'un réseau à trois neurones.



**Figure 1.6** Convergence d'états initiaux sur des états attracteurs stables dans un espace vectoriel tridimensionnel (tirée de Chartier, 2004).

Lorsque, sous l'effet du bruit, une image se présente embrouillée ou incomplète, le système tente de la reconstruire dans sa totalité au fur et à mesure qu'elle circule dans la boucle de rétroaction. Ce processus de reconstruction de l'image à partir d'une image incomplète ou bruitée est un phénomène fréquemment observé en perception.

### 1.3.3 Mémoire et plasticité différentielle

Un des dangers potentiels d'une filtration neuronale excessive est d'éliminer trop d'informations pertinentes, ce qui a pour effet d'activer une même mémoire, alors que des mémoires différentes devraient être activées. Une filtration excessive peut pousser un filtre à une incapacité de différencier deux objets similaires mais évidemment différents. Un exemple simpliste est celui du filtre qui ne laisse passer à travers sa structure que de l'eau. Ce qui émerge du filtre ne permet pas de différencier un jus de pomme d'un jus d'orange.

En utilisant la même boucle de rétroaction présentée plus haut, Proulx et Begin (1996) proposent un apprentissage autoassociatif qui permet aussi de filtrer l'*embrouillement* d'une image neuronale, sans toutefois filtrer les différences entre deux images différentes. Ce modèle permet de différencier deux objets malgré une forte ressemblance (objets corrélés). Dans ce modèle, la matrice de connexions synaptiques se modifie tant et aussi longtemps que l'activité qui circule dans la boucle engendre une activation différente d'un instant à l'autre. Mathématiquement, les synapses sont modifiées en fonction des différences (la dérivée) entre les états successifs engendrés par la boucle de rétroaction selon

$$\partial W = \alpha X_t \cdot X_t^T - \beta X_{t+n} \cdot X_{t+n}^T \quad (1)$$

Comme dans tout système naturel en recherche d'équilibre, un décalage temporel entre l'amplification négative et positive force la formation d'un équilibre dynamique et, dans ce cas-ci, une stabilisation de la matrice synaptique  $W$  lorsque la dérivée temporelle est nulle. La règle de plasticité décrite par l'équation 1 assure un contrôle de l'amplification causée par la boucle de résonance. Ceci assure que les différences entre les entrées ne seront pas considérées comme du bruit. Elle seront mémorisées et non pas filtrées.

Chartier (2004) propose une simplification du modèle de Proulx et Bégin (1996). La matrice synaptique  $W$  est modifiée selon

$$\partial W = \alpha(f(X_0) \cdot f(X_0^T) - f(X_t) \cdot f(X_t^T)). \quad (2)$$

Une des différences de ce modèle avec celui de Proulx et Begin est que la non-linéarité ( $f$ ) qui assure la saturation et la convergence du système sur des images neuronales stables est directement incluse dans l'apprentissage. Ceci permet un apprentissage instantané « en ligne », alors que l'activité circule dans le réseau.

Ce processus d'apprentissage par dérivée temporelle s'apparente aussi à un algorithme proposé par Sutton (1988). À l'image des modèles présentés plus haut, la

sensibilité synaptique de  $W$  est modifiée selon la dérivée du vecteur de sortie  $Y$  en conjonction avec l'entrée  $X$ .

$$\partial W = \alpha(\beta Y^{t-1} - Y^t)X^t \quad (3)$$

Autrement dit, la matrice  $W$  est modifiée selon une série de prédictions des états futurs à partir des états passés. On peut également dire que les changements synaptiques sont une fonction de la dérivée temporelle  $\partial_t Y$  de l'activité neuronale  $Y$ . L'apprentissage converge lorsque l'erreur de prédiction est nulle, ou encore lorsque la dérivée temporelle de l'activité neuronale est nulle. Cet ajustement progressif et autonome de la cible fait en sorte que la charge du calcul de l'erreur est répartie sur toute la séquence d'observations au lieu d'être calculée directement à partir d'une cible finale déjà déterminée, ce qui est le cas pour l'algorithme de *descente de gradient* largement utilisé en optimisation pour l'industrie. L'avantage d'une minimisation *autonome et progressive* de l'erreur est que l'apprentissage accumulé dans  $W$  ne doit pas être refait lorsqu'une nouvelle image est mémorisée (Sutton, 1988).

Quelques auteurs font aussi usage des corrélations temporelles et des dérivées temporelles afin d'exprimer la filtration accomplie dans le développement de mémoires visuelles (Foldiak, 1991; Wallis et Rolls, 1997). Ces modèles utilisent les contraintes spatiotemporelles qui caractérisent les objets visuels afin d'apprendre leurs transformations naturelles. Statistiquement parlant, les différentes prises de vues d'un même objet en mouvement sont toujours très près l'une de l'autre. On dit qu'elles sont temporellement corrélées. Ceci est particulièrement vrai lorsqu'on observe un objet se déplacer. Il suffit d'observer le mouvement de sa main dans l'espace pour apprécier ce fait.

Ces règles d'apprentissage incorporent une trace  $\bar{Y}^{t-1}$  de l'activité des neurones qui représente en quelque sorte une moyenne de l'activité neuronale récente. Ceci permet de regrouper sous un même attracteur les différents instants d'un mouvement. La forme générale de ces règles de plasticité différentielle est la suivante

$$\partial W = \alpha(\beta \bar{Y}^{t-1} - Y^t) X^t, \quad (4)$$

où le patron d'activité  $Y$  est comparé à une trace  $\bar{Y}^{t-1}$  des filtrations précédentes. La fenêtre temporelle de modification synaptique étant ainsi élargie, elle permet alors de transformer des corrélations temporelles en des corrélations spatiales (Griniasty, Tosdyks et Amit, 1993). Une telle règle d'apprentissage élimine les variations temporelles d'un objet alors qu'il se transforme.

Par des principes similaires, Mitchison (1991) propose une synapse différentielle permettant d'éliminer les effets des variations temporelles dans l'activité neuronale. La modification de la sensibilité des synapses de  $W$  est effectuée de sorte qu'elle minimise la dérivée temporelle des activités postsynaptiques selon

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \beta X \cdot Y - \alpha \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad (5)$$

ce qui assure, comme toutes les règles d'apprentissage présentées plus haut, la convergence dynamique vers un équilibre.

Sans traiter de mémoire visuelle proprement dite, les modèles présentés dans cette section indiquent que des images neuronales stables sont obtenues lorsque la plasticité synaptique change selon la dérivée des transformations en présence. Ces modèles soulignent la présence d'une sensibilité neuronale qui dépend de la dérivée spatio-temporelle d'une transformation, et non pas d'un état statique de celle-ci. L'accumulation des données neurophysiologiques, en correspondance avec ces modèles, indique que les neurones du cortex ont comme nature la prédiction de séquences temporelles et donc la reconstruction de transformations (Rao et Sejnowski, 2001). Les neurones du cortex cherchent sans cesse à connaître ce qui suivra dans les prochaines millisecondes.

Nous avons souligné plus tôt que, classiquement, la tendance des modèles de mémoire visuelle est de considérer que l'objet externe est momentanément statique et que c'est un instant de la transformation qui *moule* la mémoire. L'objet visuel est traité comme un état stable où la transformation de l'image rétinienne est temporairement mise en pause, fixée dans le temps. En revanche, nous croyons que les modèles de mémoire neuronale faisant usage d'une plasticité différentielle, tels que nous venons de les présenter, nous rappellent l'essentiel à propos du cortex : la transformation gouverne la plasticité neuronale et le cortex *moule* sa mémoire en fonction des transformations en présence et non pas en fonction d'un état statique projeté sur sa structure. Qu'il s'agisse de la rétine ou du cortex visuel, l'activité cellulaire est toujours changeante, toujours en transformation.

Se pourrait-il que l'objet visuel externe ne soit jamais traité de manière statique ? Nous verrons qu'en considérant les études les plus récentes sur les mouvements oculaires, il semble difficile de discuter d'une forme statique, parfaitement immobile. Semble-t-il que la perception du monde visuel soit gouvernée par le mouvement entre la lumière ambiante et l'observateur. Dans une certaine limite, il semble que, sans mouvement, le monde visuel disparaît (Copolla et Purves, 1996).

Tel que suggéré par quelques auteurs plus que notables (Gibson, 1968; Dodwell, 1983), les patrons de lumière engendrés par le mouvement contiennent des propriétés d'organisation essentielles à une mémoire visuelle. Nous soulignons au prochain chapitre des études neurophysiologiques qui indiquent que les transformations élémentaires des patrons de lumière sont *imprimées* sur le tissu du cortex visuel. Nous verrons aussi que la mémoire des formes et la mémoire du mouvement semblent être régies par les mêmes principes. Mais d'abord, qu'en est-il des approches théoriques principales sur la mémoire visuelle ? C'est ce que couvre la prochaine section.

## 1.4 Mémoire visuelle

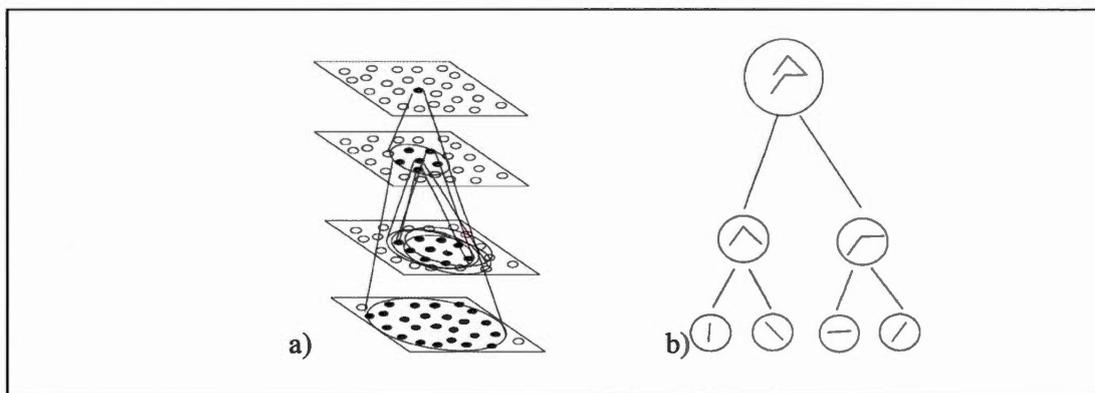
Deux lignes de pensée principales divergent sur la nature de la mémoire visuelle. Sans attacher d'importance à l'ordre, la première est celle de *l'analyse computationnelle des composantes locales*, alors que la deuxième est celle de *la mémoire holistique*. Plus précisément, la question qui sépare ces deux approches concerne la façon dont le tissu cellulaire parvient à intégrer les signaux de lumière locale en une image globale. Comment des influx de lumière locaux (ex : pixels) forment-ils une mémoire globale ? L'approche *computationnelle* prétend que le cerveau utilise des règles et une grammaire afin de regrouper les composantes locales d'un même objet. Dans le cas de l'approche holistique, les dites composantes locales sont déjà unies ensemble par un principe global et le cerveau mémorise ce principe.

### 1.4.1 L'approche *computationnelle*

L'approche *computationnelle* considère la mémorisation de l'image rétinienne comme une filtration hiérarchique de composantes à travers les couches de tissu du cortex. À chaque étape, les neurones *voient* et regroupent une région de plus en plus grande de l'espace visuel.

La théorie ayant le plus influencé l'approche *computationnelle* est celle de David Marr (Marr, 1982). L'essence de cette théorie repose sur l'extraction et le regroupement hiérarchique de composantes primitives comme les contrastes, les lignes et les orientations. Un *alphabet géométrique* permet alors d'identifier les relations spatiales entre les composantes. De la même façon qu'on définit symboliquement les composantes d'un *modèle à coller*, on définit les composantes locales de l'approche *computationnelle* comme des « arêtes visuelles », aussi appelées *primitives visuelles*. L'approche *computationnelle* résume, en partie, le rôle du cortex visuel à celui d'un algorithme (*instructions*) visant à identifier,

regrouper et mémoriser les agencements complexes de primitives visuelles que forment les objets.



**Figure 1.7** a) Croquis du modèle hiérarchique *computational*. Les neurones sur les couches supérieures du cortex visuel couvrent une région de plus en plus grande de la rétine b) Ceci permet le regroupement et l'apprentissage d'agencements complexes de primitives visuelles.

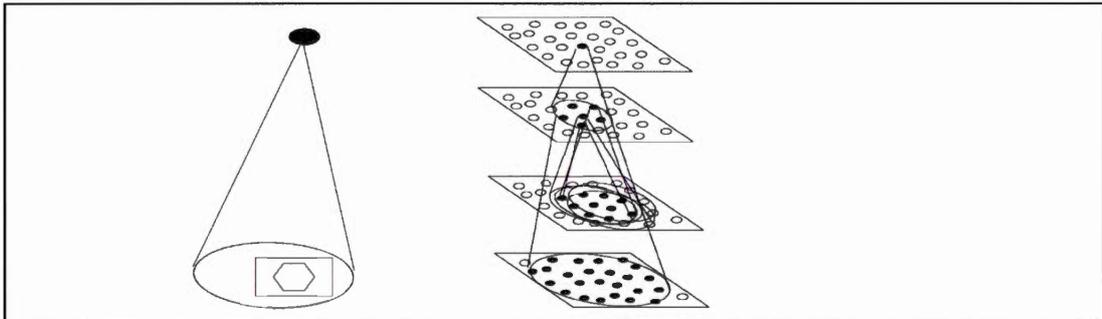
Spécifiquement, on trouve les racines de l'approche *computationale* au niveau des travaux de Hubel et Wiesel (1968) sur la mesure de l'activité neuronale par microélectrodes. La mesure par microélectrodes a mené les chercheurs à conclure que les neurones à travers la hiérarchie corticale ont la propriété de réagir fortement et donc de *détecter* certaines primitives visuelles bien spécifiques. On identifie tôt dans le traitement visuel des neurones *détecteurs* de contrastes lumineux. Ensuite, on identifie des neurones *détecteurs* d'orientations, des neurones détecteurs de barres ou de fréquences spatiales particulières. Particulièrement, la mesure semble indiquer la présence de neurones spatialement organisés selon des axes d'orientations et de fréquences spatiales (Maffei et Fiorentini, 1977). Plus on monte dans la hiérarchie, plus les neurones ont la propriété de réagir fortement à des formes visuelles complexes, donc, à des combinaisons complexes de primitives visuelles.

Ainsi, du point de vue de cette approche, le traitement des perceptions visuelles se fait par la décomposition des objets en primitives visuelles. Comme une maquette, les objets visuels sont initialement décomposés en propriétés et composantes séparables. C'est

seulement plus tard, au cours de la hiérarchie, que l'objet est identifié sur la base des primitives visuelles initialement séparées. En accordant une valeur symbolique aux composantes locales, une telle filtration hiérarchique impose d'importantes difficultés aux modèles qui en font l'utilisation. Leurs difficultés sont particulièrement mises en évidence lorsque la question d'invariance est abordée par ces modèles. En effet, l'imposante variation qui compose le monde visuel rend les modèles de composantes hiérarchiques sujets à une explosion combinatoire des primitives visuelles. Le nombre de primitives visuelles et le nombre de règles utilisées pour exprimer leurs relations prennent des proportions catastrophiques lorsqu'une scène visuelle se complexifie.

Il suffit de décrire symboliquement un simple objet visuel pour apprécier les problèmes que peut potentiellement rencontrer une filtration hiérarchique de composantes. Observons l'objet visuel représenté par la figure 1.7. Une filtration hiérarchique identifiera d'abord la présence de quatre primitives visuelles droites d'une certaine longueur et d'une certaine orientation. La filtration identifiera progressivement l'agencement relatif des primitives jusqu'à la dernière étape dans la hiérarchie, où les positions relatives de toutes les primitives visuelles doivent être regroupées en une seule représentation, une seule mémoire. Cette dernière étape est bien importante puisque plusieurs objets visuels ont la propriété de satisfaire les premières étapes de filtration. C'est-à-dire qu'il existe une infinité d'objets pouvant être composés uniquement de ces mêmes quatre primitives. En considérant une silhouette humaine en plein mouvement ou un arbre dans le vent, on imagine facilement l'ampleur des difficultés rencontrées par une filtration hiérarchique de composantes symboliques: le nombre de primitives visuelles et de règles pour les regrouper explosent en proportion.

En observant la figure 1.8, un autre problème se pose. Comment l'image neuronale engendrée par le rectangle n'interfère pas avec celle de l'image neuronale causée par l'hexagone dans une mémoire hiérarchique ? Ces deux objets étant localisés dans la même région du champ visuel, ils engendrent la superposition des images neuronales au haut de la hiérarchie. Comment alors différencier ces deux images neuronales une fois superposées l'une sur l'autre ?



**Figure 1.8** La superposition des stimuli engendre une superposition des patrons d'activité neuronale dans une filtration hiérarchique.

Le défi de l'approche *computationnelle* est donc le suivant : spécifiquement, peu importe la façon dont un objet est décomposé en primitives visuelles, il est peu probable que ces dernières suffisent à la reconnaissance de l'objet. Une simple énumération des composantes fait référence à une infinité d'objets. On doit alors décrire la façon dont les primitives visuelles sont positionnées les unes par rapport aux autres. Autrement dit, étant donné une séparation hâtive des primitives visuelles, il doit y avoir un traitement subséquent qui rattache ces dernières ensemble afin d'obtenir une mémoire globale de la forme. La question à laquelle doit répondre l'approche hiérarchique *computationnelle* est la suivante : comment des composantes primitives ayant été séparées dès le départ peuvent-elles être regroupées ensemble afin de percevoir un objet ? Mais aussi, comment la superposition des images neuronales, causées par deux objets dans une même région visuelle, peut-elle permettre de différencier les deux objets ?

Malgré les problèmes inhérents de l'approche *computationnelle*, les supporteurs de cette approche ont eu jusqu'à présent beaucoup de succès dans le regroupement de données physiologiques, anatomiques et comportementales (Rolls & Deco, 2002). Ainsi, cette approche a reçu l'appui de plusieurs domaines tels que la psychologie, la physiologie, l'informatique et l'ingénierie, ce qui lui offre une grande place dans la recherche sur la mémoire visuelle. Il n'en demeure pas moins que l'avancement de notre compréhension de la mémoire visuelle par cette approche est stagnant et les modèles proposés sont de plus en plus restreints aux applications spécifiques de la robotique.

Depuis les premiers travaux de Hubel et Wiesel, les fondations de l'approche *computationnelle* reposent sur la mesure par microélectrodes et sur le rôle individuel du neurone qu'impose cette mesure. Toutefois, et trop souvent, cette approche ne prend pas en considération le contexte, la transformation qui englobe la mesure, et cette dernière devient alors un artéfact de laboratoire. À défaut de pouvoir mesurer précisément l'activité de millions de neurones à l'intérieur d'une même fenêtre temporelle, trop d'importance semble avoir été mise sur le rôle individuel du neurone à un instant précis, *arraché* de son contexte. Peu d'importance a été accordée à la transformation qui unit une image neuronale.

Sans y adhérer, nous ne pouvons entièrement rejeter l'aspect hiérarchique de l'approche *computationnelle* puisqu'il existe sans contredit une filtration en couches sur le tissu neuronal. Cependant, il nous semble que le rôle des couches de filtration du cortex visuel ne soit pas celui de la détection et du regroupement de primitives visuelles. Nous croyons que le rôle des couches de filtration est d'intégrer les transformations globales des patrons de lumière. Par cette intégration, le cortex n'a pas à décomposer et à recomposer les objets en primitives visuelles pour les identifier, car les objets sont directement définis comme les invariants de l'intégration. Ainsi, dans une vision holistique, nous suggérons que les objets visuels ne sont pas mémorisés comme des agencements de primitives mais comme les invariants de l'intégration des transformations du plan visuel.

Dans ce qui suit, il est démontré que l'approche holistique diverge fortement de l'approche *computationnelle*. Selon l'approche holistique, les patrons de lumière engendrés par la transformation du plan visuel contiennent des propriétés d'organisation globale essentielles à une mémoire visuelle.

#### 1.4.2 L'approche holistique

Selon l'approche *computationnelle*, l'objet visuel est défini et perçu comme une entité indépendante des transformations du plan visuel. En revanche, dans l'approche holistique que nous proposons, l'objet visuel n'est pas perçu indépendamment des

transformations du plan visuel. Celles-ci sont plutôt nécessaires à la perception de l'objet puisqu'il est défini comme un invariant de leur l'intégration.

La notion d'une perception holistique nous ramène aux idées gestaltistes et à certaines intuitions de Gibson (1950) au milieu du siècle dernier. L'approche holistique forme un contraste marqué avec l'approche *computationnelle*. De manière générale, une approche *holistique* consiste à considérer les phénomènes comme des totalités. Les divers aspects d'un objet forment un ensemble solidaire, dont les parties ne peuvent se comprendre que par le tout, qui lui donne une signification. Dans les fondements de son argument, elle prétend que la forme n'a pas à être décomposée en primitives visuelles pour être perçue et reconnue. La forme est une entité cohérente qui s'éveille et disparaît comme un tout. Une mémoire *holistique* implique que le traitement perceptif se fait de manière directe, que les composantes d'un objet sont regroupées dès le départ, dès la rétine. Selon cette approche, il existe, dans notre espace visuel, des principes d'organisation globale qui unissent dynamiquement les composantes locales. Un système qui intègre la géométrie de ces principes ne perçoit pas l'objet comme un assemblage de primitives visuelles, mais comme une organisation saillante et c'est cette dernière qui est directement perçue.

Les psychologues gestaltistes, au début du siècle dernier, ont formalisé les principes d'organisation de l'approche *holistique*. Ces principes sont connus sous le nom « *d'organisation perceptuelle* ». Ci-dessous, les principaux principes Gestaltistes sont énumérés (Bruter, 1976).

1- À certains égards, la forme est la propriété la plus importante que peut avoir une configuration.

2- Les formes visuelles sont de nature *dynamique* ou bien le résultat de processus dynamiques sous-jacents. Les formes peuvent subir des déformations, mais ceci n'altère en rien les qualités dynamiques qui ont donné naissance aux formes. *L'organisation physique et dynamique du système perceptif impose à la figure des forces contraignantes (géométriques) sur le stimulus, assurant une perception stable malgré les déformations.*

3- Toute forme visuelle possède au moins deux aspects apparents, sa *figure* qui se détache de l'arrière plan appelé *fond*.

4- Sans rien perdre de son identité, une forme visuelle peut être modifiée dans sa localisation, sa dimension et son orientation.

5- Les éléments visuels de même forme, placés côte à côte, ont tendance à donner une nouvelle forme (*Loi de similarité*) :

6- Et cela, d'autant plus que les éléments sont près l'un de l'autre (*Loi de proximité*)

7- Cette forme sera la plus régulière et la plus douce d'entre toutes les formes qui définissent le groupement des éléments (*Loi de bonne continuation*).

8- Les éléments ayant un même mouvement apparent ou réel ont tendance à être perçus comme une seule entité (*Loi du destin commun*).

9- Plus une forme est symétrique, plus elle tend à être perçue comme une seule entité.

10- Les formes visuelles tentent de résister aux changements en essayant de maintenir leur structure à l'encontre des forces de dislocation.

11- Les formes visuelles ont tendance à apparaître et à disparaître comme des « tous ».

12- Tout changement d'une partie d'une forme affecte d'autres parties de cette forme.

Il est à noter que ces principes holistiques n'impliquent aucunement que les dites primitives visuelles d'un objet ne soient jamais perçues par le système visuel. Bien au contraire, nul ne peut prétendre que nous ne soyons pas conscients de l'orientation, de la luminosité, et d'autres caractéristiques locales d'un objet. Dans l'approche holistique, ces composantes sont elles aussi des totalités, des entités cohérentes d'échelles différentes. Ce sont les principes d'organisations globales qui sont mémorisés, et, dépendamment de la résolution de l'*œil*, différentes échelles d'organisation sont perçues.

En n'assignant aucun rôle particulier au neurone, lequel est ni suffisant ni nécessaire à la mémorisation globale de l'image, les modèles autoassociatifs que nous avons présentés en première section ont une forte saveur holistique et n'ont pas à se soucier du problème du regroupement des primitives visuelles comme le fait l'approche *computationnelle*. De par la nature distribuée de leur apprentissage, l'objet de la mémorisation est global et aucun

neurone ne joue un rôle symbolique particulier. Il n'en demeure pas moins qu'en définitive, l'approche purement *holistique* d'une mémoire autoassociative de l'objet visuel est jusqu'à présent demeurée en dehors des balises conventionnelles adoptées par la communauté scientifique sur la vision.

La difficulté à honorer les principes holistiques dans un modèle de mémoire autoassociative découle du fait que l'apprentissage repose directement sur le produit matriciel ( $A \cdot X$ ) des vecteurs d'activité globale et de la matrice synaptique. Ces modèles de mémoires sont donc fortement affectés par la corrélation des vecteurs et une simple transformation peut alors causer une forte variation du produit matricielle ( $A \cdot X$ ). Ceci rend difficile la considération d'une représentation holistique et invariante aux transformations radicales des patrons de lumière. C'est d'ailleurs ce problème rencontré par les modèles de mémoire autoassociative qui alimente l'argumentation en faveur d'une approche *computationnelle*, laquelle évite le problème par une filtration hiérarchique.

Le modèle de mémoire autoassociative demeure toutefois au cœur des principes holistiques et est certainement central à l'organisation globale des patrons d'activité sur le tissu cellulaire. Étant donné la distribution de l'image neuronale, l'instabilité qui affecte tout processus de mémorisation ne peut ultimement se réduire à autre chose qu'une variabilité du neurone et donc à un *embrouillement* de l'image neuronale par un bruit aléatoire. Pour ces raisons, les principes du modèle de mémoire autoassociative sont selon nous essentiels et nécessaires à toute forme de mémoire sur le tissu neuronal (incluant l'organisation de champs de vecteurs). Cependant, dans l'état actuel de choses, ce modèle ne peut être directement appliqué aux transformations globales de l'image rétinienne.

Aussi, comme le modèle *computationnel*, le modèle de mémoire autoassociative doit faire face au problème de la superposition des images neuronales, causée par deux objets visuels superposés dans le champ de vision. Pour pallier ce problème, une approche purement holistique proposée par Malsburg (1981) est de ne donner aucun rôle particulier au neurone autre que celui d'un *détecteur de coïncidences*. Basé sur l'observation d'*oscillations rythmiques* dans le cortex, ce modèle stipule que la décharge du neurone ne dépend pas de

l'intégration des influx électriques mais plutôt de la *synchronisation* de ceux-ci. Ceci permet à une image neuronale de décharger en synchronie avec la structure temporelle des entrées qu'elle reçoit (Fujii et al 1996).

Cette approche offre une solution au problème de la superposition des images neuronales en stipulant que les composantes d'une même image sont unies ensemble par la synchronisation ou l'oscillation temporelle des décharges. Étant temporellement décorréliées, temporellement déphasées, deux images neuronales peuvent coexister à l'intérieur d'une même collectivité de neurones sans se superposer, sans interférer l'une contre l'autre. En considérant le contexte temporel qui peut potentiellement unir une collectivité de neurones, ce modèle revêt une saveur fortement holistique. Cependant, les études neurophysiologiques, sans réfuter ce modèle, portent un doute sur la présence d'oscillation sur les aires du cortex visuel (Rolls, 2002).

En incluant une forte composante temporelle à la perception de la forme, cette thèse se garde de ne pas considérer le modèle du *neurone détecteur de coïncidences* de Malsburg (1981), lequel s'appuie entièrement sur le contexte temporel de la décharge neuronale. Toutefois, elle souligne que le *neurone intégrateur*, lorsque pris dans le contexte de la transformation des patrons de lumière, permet lui aussi d'éviter le problème de la superposition des images neuronales. En considérant la structure différentielle des transformations globales *imprimées* sur le tissu neuronal, le neurone intégrateur n'aura pas à être soumis au problème de la superposition des images neuronales.

Il sera suggéré dans les chapitres qui suivent que le principe d'une perception holistique prend ancrage dans la transformation de l'objet visuel. Selon Malsburg, la synchronie et l'oscillation temporelle sont ce qui unit les décharges neuronales, ce qui forme la mémoire. Dans une philosophie similaire, nous disons que la transformation globale de la lumière est ce qui unit les décharges neuronales.

Il semble que l'étude profonde des objets, celle de leur genèse et de leur devenir, se situe au-delà d'une étude statique de leur organisation stabilisée (Bruter, 1976). Ne serait-il

pas que l'objet visuel ne soit jamais statique, toujours en transformation? En s'appuyant sur des données mathématiques et neurophysiologiques, cette thèse stipule que la structure de l'objet visuel est aussi celle d'une transformation et qu'une invariance ne peut prendre naissance qu'en considérant l'objet dans sa transformation.

Dans le but de traiter la mémoire visuelle par la transformation globale des patrons de lumière, nous reprenons au prochain chapitre les principes de théoriciens tels que Gibson (1950), Hoffman (1966) et Koenderink (1984, 1987).

Hoffman (1966) fut probablement le premier à présenter une théorie mathématique complète où l'objet visuel est traité comme une combinaison des transformations élémentaires dans le plan. Sa théorie repose sur celle des *groupes de transformations continues* développée par le mathématicien Sophus Lie à la fin du XIX siècle, reprise par Hoffman dans le cadre des phénomènes perceptifs.

Selon l'école gestaltiste, la forme visuelle s'exprime sur le tissu neuronal par l'action de *champs de forces*. La théorie de Hoffman, qui repose sur la présence de *champs de vecteurs* (groupes de transformations) activés sur le cortex visuel, permet un ancrage mathématique aux idées et intuitions gestaltistes.

Cet ancrage mathématique est celui de la géométrie différentielle. Par l'intégration de champs de vecteurs, cette branche des mathématiques permet une description cinématique de la forme visuelle, telle une transformation, tel un mouvement. On dit, par exemple, qu'un cercle est plutôt un mouvement de rotation et une droite, un mouvement de translation. En exprimant la forme visuelle par les déplacements qu'on peut accomplir sur celle-ci, elle devient de la même nature qu'un mouvement et son expression n'est plus celle de la mesure métrique mais celle des directions et des trajectoires possibles.

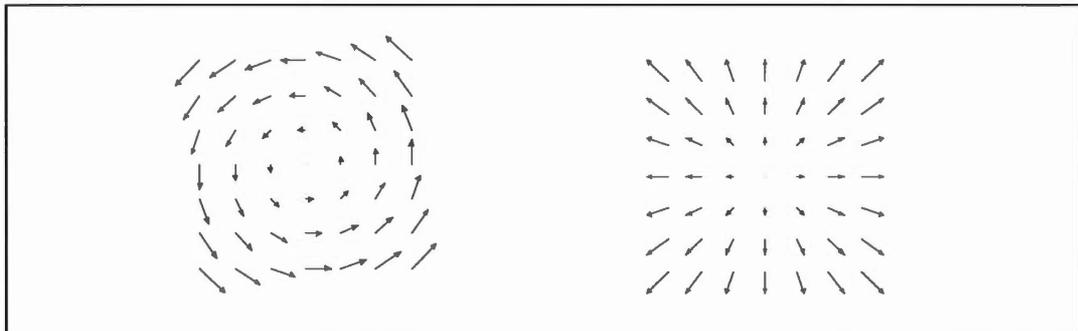
Koenderink (1984, 1988, 1992) démontre comment les filtres de la mémoire visuelle peuvent se résumer à des transformations de géométrie différentielle. Dans cette approche, le

cortex visuel agit comme un *moteur de géométrie différentielle* sur lequel s'expriment des groupes de transformations par le raccordement de vecteurs.

La géométrie différentielle telle qu'utilisée par la théorie de Hoffman permet de réunir dans une même opération la transformation ainsi que la structure locale et globale de la forme. Dans cette approche holistique, l'objet est lui-même traité comme une transformation et sa *rencontre* avec d'autres transformations ne change pas sa nature : nul besoin de décomposer l'objet en primitives visuelles. La théorie d'Hoffman correspond en grande partie à une expression mathématique et plus élaborée des intuitions et hypothèses posées par Gibson (1968) à la même époque. L'idée dans les travaux de Gibson est que la transformation des patrons de lumière alors que l'observateur se déplace dans une scène visuelle contient une organisation globale qui permet d'inférer les invariants des formes visuelles en présence. Autrement dit, c'est dans les propriétés globales du mouvement entre l'observateur et la lumière ambiante qu'une représentation invariante se trouve.

En approfondissant les idées de Gibson, nous verrons que la théorie de Hoffman identifie trois groupes de transformations élémentaires du plan visuel pour lesquels notre perception demeure stable. Ces groupes agissent comme les champs de forces contraignantes suggérées par la psychologie gestaltiste (Brown et Volt, 1937). Il s'agit précisément des groupes de transformations cartésiens, polaires et hyperboliques, lesquels décrivent les transformations élémentaires engendrées par le mouvement des formes. La combinaison de ces trois transformations permet l'expression d'objets visuels de complexités variables tout en demeurant invariante à l'action des trois groupes.

En accord avec les idées pionnières de Gibson, d'Hoffman et de Koendenrink, des études neurophysiologiques (Duffy, 1991; Gallant, 1993; Orban, 1992) suggèrent que les transformations élémentaires (groupes de transformations) sont imprimées sur les aires visuelles.



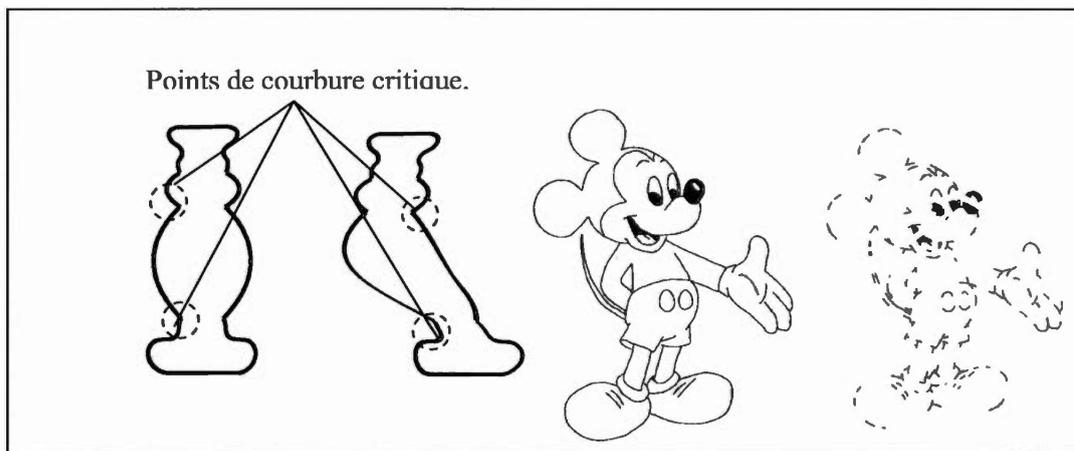
**Figure 1.9** Champs de vecteurs (champs de forces) de rotation et d'expansion. L'expression du plan visuel par certains types de champs de vecteurs est essentielle aux idées et principes présentés dans cette thèse.

Inspiré par le génie de ces pionniers, nous étudions lors de nos démonstrations certaines propriétés invariantes des champs de vecteurs élémentaires en appuyant l'hypothèse que l'espace de la mémoire visuelle est celui de la transformation des patrons de lumière générée par le mouvement. L'idée est de vérifier dans quelle mesure les principes de mémoire visuelle peuvent être reproduits par les propriétés spéciales des champs de vecteurs élémentaires. Il est intéressant de voir comment les processus de mémoire visuelle trouvent potentiellement une expression dans une structure holistique et écologiquement fondamentale.

Nous croyons qu'un modèle de mémoire visuelle ne doit pas sacrifier simplicité et holisme dans le but d'obtenir des résultats spécifiques. La simplicité des notions de physique associées aux champs de vecteurs élémentaires nous permet d'offrir des explications sur plusieurs processus de mémoire visuelle à partir d'un seul principe : l'intégration de champs de vecteurs.

Une propriété de la mémoire visuelle est celle de la *génération spontanée* du reste d'un contour, uniquement en présence des régions de grande courbure. Tel que le suggèrent les évidences psychophysiques (D.D. Hoffman, 2000), la mémoire de l'objet semble reposer principalement sur ses régions de courbure critique (régions de grande courbure). Aussi, dans une approche basée en partie sur la vision humaine, Lowe (1999) propose un algorithme de

détection multirésolution de certains types de régions de grande courbure afin d'assurer une invariance. Dans l'étude des champs de vecteurs élémentaires, le quatrième chapitre démontre qu'en l'absence de contours visuels complets, une intégration globale et invariante du contour est possible en intégrant localement sur les régions de grande courbure (*les coins*). Ceci nous permet aussi d'offrir des explications sur l'invariance à la déformation des objets (transformations molles).



**Figure 1.10** Transformations molles, génération spontanée et points critiques.

La transformation globale des patrons de lumière engendrée par le mouvement contient des propriétés de forces invariantes. En effet, les forces rotatives et l'expansion des champs élémentaires sont invariantes aux coordonnées globales dans le plan visuel. Cette propriété nous permet d'intégrer des contours visuels de façon invariante à leurs coordonnées dans l'espace. En considérant la nature physique des champs de vecteurs (électromagnétiques), nous étudions l'interaction de leurs forces dans l'*espace-temps*. Les *forces de couplage* et les *forces de torsion* qu'exercent les champs l'un sur l'autre nous permettent d'élargir leurs propriétés invariantes. Nous pouvons alors ouvrir des pistes qui nous rapprochent davantage des principes gestaltistes et de l'expression d'une mémoire visuelle.

Cette introduction théorique, qui se poursuit au prochain chapitre, nous a permis d'établir ce que nous considérons essentiel à la formation de mémoires sur le tissu cellulaire :

la transformation. Nous avons présenté des principes de plasticité différentielle, sensibles à la réalité de l'environnement instable dans lequel nous baignons.

Ces principes soulignent que le tissu cellulaire développe des mémoires en fonction des transformations qui le stimulent. Il semble difficile de nier que le monde visuel soit toujours en mouvement, toujours en transformation. Il semble encore plus difficile de concevoir que la transformation soit la base de nos perceptions et non un pas un obstacle à celles-ci. L'efficacité des modèles faisant usage d'une plasticité différentielle ne peut que nous concilier davantage avec l'importance de considérer la transformation des patrons de lumière dans la formation de mémoires visuelles.

Telles que nous les avons présentées, les notions de mémoire associative et de mémoire autoassociative illustrent les propriétés nécessaires à l'organisation globale des patrons d'activité sur le tissu cellulaire. Les champs de vecteurs que nous traitons dans nos analyses sont des patrons d'activité globale particuliers et sont donc directement affectés par ces notions.

En fin de chapitre, nous avons illustré la problématique des approches théoriques qui englobent l'étude de la mémoire visuelle. En opposition aux théories *computationnelles*, nous avons suggéré que la forme visuelle est de nature holistique et qu'elle s'exprime par la transformation des patrons de lumière. L'avenue théorique que nous avons introduite souligne que les patrons de lumières, les formes visuelles, s'expriment à l'intérieur du même domaine de représentation que celui de leurs transformations et de leurs mouvements.

Dans cette voie, la géométrie différentielle offre un cadre mathématique rigoureux qui permet de traiter de la forme et de sa transformation dans un même langage. Le prochain chapitre fait état des transformations de géométrie différentielle qui sont applicables au cortex visuel et, par le fait même, à la mémoire visuelle. Nous y indiquons que le cortex visuel possède toutes les propriétés nécessaires à l'expression de la transformation des patrons de lumière sous la forme de champs de vecteurs. Ces champs de vecteurs possèdent

des propriétés d'invariance remarquables qui ne font que confirmer la nécessité naturelle, écologique, de leur *impression* sur le tissu du cortex.

## CHAPITRE II

### MÉMOIRE VISUELLE : GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ET CHAMPS DE VECTEURS

#### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous poursuivons sur les bases théoriques introduites au chapitre précédent. L'hypothèse qui émerge de cette introduction théorique est une conception des processus de la mémoire visuelle par le biais de la transformation, par le mouvement. La géométrie différentielle permet de traiter les courbes et les surfaces de la même façon que l'on traite un mouvement. Nous illustrons dans ce chapitre le fait que le tissu qui tapisse le cortex visuel possède la *mécanique* nécessaire à l'expression des transformations de géométrie différentielle, applicables aux patrons de lumière.

Dans un premier temps, ce chapitre identifie l'analogie neuronale de l'opération primitive en géométrie différentielle : la *dérivée partielle*. L'opération effectuée par les cellules du cortex visuel se résume à une dérivée partielle selon plusieurs échelles de résolution des patrons de lumière. Ceci assure l'expression infinitésimale des patrons de lumière sur la rétine et donc l'application d'opérations de géométrie différentielle au flux visuel. Une courte introduction des principes fondamentaux de géométrie différentielle en relation avec les opérations de la mémoire visuelle est d'abord présentée.

Les liens entre la mémoire visuelle et la géométrie différentielle sont corroborés par certaines études neurophysiologiques qui suggèrent la présence de champs de vecteurs sur le cortex. Dans un esprit gestaltiste, nous soulignons que ces champs de vecteurs sont de réels

champs de forces. En effet, une dérivée partielle exprime, par un vecteur géométrique, l'amplitude, la direction et le point d'application d'une force dans l'*espace-temps*. Le vecteur ainsi traité est donc la force locale d'une transformation globale.

Ce chapitre illustre que les champs de vecteurs offrent une expression des patrons de lumière engendrés naturellement par le mouvement et que certains champs de vecteurs possèdent des propriétés invariantes et écologiquement pertinentes aux opérations de la mémoire visuelle. Les champs de vecteurs y expriment non seulement la transformation des patrons de lumière, mais aussi la sensibilité du tissu cellulaire.

## 2.2 La dérivée partielle sur le cortex visuel

Les notions générales de géométrie différentielle reposent sur un principe commun : l'intégration ( $\int \partial x$ ) de dérivées partielles locales ( $\partial x$ ) le long d'une courbe ou d'une surface. En lien avec la perception visuelle, une dérivée partielle permet d'exprimer, par un vecteur, la variation (la pente) des patrons de lumière à chaque point d'une scène visuelle.

L'intégration de dérivées partielles le long d'une courbe peut être mise en analogie avec la mémoire que nous formons en parcourant pas à pas les sentiers dans un parc : l'intégration représente l'accumulation de nos pas lors du parcours, alors que chacune des dérivées partielles représente individuellement chacun des pas que nous avons faits.

En vous imaginant dans un parc les yeux bandés, en tâtonnant avec vos pieds, vous trouverez autour de vous la direction où la pente du relief est la plus forte (à pic), là où le mouvement est le plus rapide. Cette direction est celle du *gradient* du relief à ce point dans le parc. Toujours les yeux bandés, en effectuant le même tâtonnement avec vos pieds, *pas à pas*, partout dans le parc, vous construirez une image mentale de son relief, un film de votre mouvement sur celui-ci.

Comme pour le relief du parc, la lumière sur une image décrit aussi un relief. Et à chaque point de l'image, la dérivée partielle indique le mouvement de la lumière, la variation du relief lumineux. Comme pour le tâtonnement de vos pieds dans le parc, la dérivée partielle maximale indique la direction pour laquelle la variation de lumière est la plus forte. De façon générale on dit qu'une dérivée partielle permet l'expression d'un mouvement autour d'un point dans l'espace. Sur une image, ce mouvement est celui des directions prises par le relief de lumière. Tels les petits pas d'une fourmi, une dérivée partielle permet donc une description locale des lieux aux alentours d'un point de lumière.

Par le raccordement de dérivées partielles (tel un petit sentier), la géométrie différentielle offre une expression *pas à pas* des courbes et des surfaces. Dans la même analogie que celle du parc, il semble bien que la nature du cortex visuel est de représenter la structure différentielle des patrons de lumière qui défilent sur la rétine. Avec ces récepteurs, le cortex visuel prend la dérivée partielle de la lumière sur la rétine et la sonde *pas à pas* pour en établir la forme. Young (1985) démontre dans une étude neurophysiologique que la courbe de sensibilité des neurones des aires visuelles du cortex se résume à une dérivée partielle d'échelle de résolution variable. Le cortex visuel aurait selon cette approche la propriété de traiter la lumière sur la rétine par le calcul infinitésimal en y appliquant des opérations de dérivée partielle selon plusieurs échelles de résolution. La notion d'une représentation selon plusieurs échelles de résolution est aussi appuyée par des études psychophysiques qui indiquent que le système visuel traite simultanément les images selon plusieurs canaux de fréquences (Richards et Polit, 1974; Wilson et Giese, 1977; Wilson et Bergen, 1979; Grimson, 1981). Voyons d'abord ce qu'on entend par la notion d'échelle de résolution.

L'opération de dérivée partielle appliquée à une image visuelle n'est pas une abstraction mathématique. Une image visuelle n'est pas un objet mathématique, mais un objet physique. Les mathématiques sont souvent une utopie, un imaginaire du monde physique dans lequel plusieurs contraintes physiques n'existent pas. Physiquement, une image doit se soumettre à la *loi universelle d'invariance à l'échelle* qui gouverne toutes les lois de la physique (Koenderink 1984, 1992). Exprimée par l'intermédiaire du *théorème de  $\pi$* , cette loi stipule que toutes les lois de la physique doivent être indépendantes de l'échelle

des paramètres fondamentaux. Ceci implique que la dérivée partielle qui exprime la structure locale des courbes sur une image doit exister indépendamment de l'échelle de l'image. Les entités purement mathématiques n'ont pas à se soumettre à la loi universelle d'invariance à l'échelle et à choisir une échelle afin d'appliquer des opérations de dérivée partielle sur un espace parfaitement continu (Florack, Romeny, Koenderink et Viergever, 1992).

En revanche, sur une image, on ne peut pas supposer automatiquement une telle continuité de l'espace et il ne fait aucun sens de définir une opération de différentiation au sens strictement mathématique. Cela implique une image parfaitement *douce*, caractérisée par des voisinages infiniment petits et infiniment près. Ceci nous amène inévitablement à faire face au problème du choix d'une échelle d'observation (échelle de résolution) à laquelle on suppose que la résolution est suffisamment douce et contient les structures pertinentes de l'objet (Witkin, 1983). Par exemple, il ne fait aucun sens pour l'humain de discuter d'une plante à l'échelle du kilomètre. De manière générale, on dit que l'échelle d'une image est définie par une limite inférieure, déterminée par la résolution de la lentille d'observation et une limite supérieure déterminée par l'enveloppe du champ de vision (l'étendue de la lentille).

Le choix d'une échelle de résolution fixe implique alors que toute l'information géométrique d'échelle inférieure à la résolution choisie est perdue et irrécupérable. Aussi, tout près des limites de résolution, la géométrie des objets visuels devient discrète et des distorsions géométriques sont nécessairement présentes (Koenderink, 1984).

Pour éliminer ce problème de distorsions, l'échelle d'intérêt des patrons de lumière observés doit être considérablement plus large que la résolution inférieure de la lentille. De cette façon on assure une description douce, sans distorsion, des objets dans l'image. C'est ainsi que la dérivée partielle effectuée par les neurones du cortex visuel doit se faire sur des images *adoucies*. Il suffit d'observer ce qui se passe suite à la décharge des cônes et des bâtonnets sur la rétine. Ce ne sont pas les sorties individuelles des cônes et des bâtonnets qui sont transmises pour un traitement subséquent, mais l'intégration de plusieurs centaines, voire plusieurs milliers de ceux-ci.

L'intégration de milliers de points de lumière sur la rétine assure un adoucissement et ainsi une échelle de dérivée qui approche le continu. L'analogie est de dire que, dans le parc, les yeux bandés, nous faisons une *moyenne* de nos tâtonnements dans un rayon relativement grand. Nous *mémorisons* la pente moyenne du relief dans ce rayon et non pas la pente à chaque petit pas. De même, on note que les dérivées partielles effectuées par le cortex visuel sont concentrées sur une échelle considérablement plus grande que l'échelle de la résolution interne de l'œil.

Ce type de raisonnement amène Koenderink (1984) à démontrer que pour appliquer des opérations de dérivée partielle sur une image, comme le ferait le cortex visuel, il est nécessaire que la dérivée partielle se fasse selon un continuum de résolutions afin de ne pas se commettre à une échelle particulière et ainsi éviter la perte d'information et la distorsion causée par le choix fixe d'une échelle. Cependant, il importe qu'aucune nouvelle structure visuelle ne soit créée alors qu'on *parcourt* les résolutions (Witkin, 1983).

En somme, la dérivée partielle d'une image selon plusieurs résolutions doit prévenir l'apparition *catastrophique* (soudaine) de nouvelles structures visuelles qui seraient autrement absentes aux résolutions précédentes. L'augmentation de l'échelle de résolution doit avoir comme effet de « moyenniser » les régions lumineuses de manière continue (douce) afin de ne pas changer les relations de voisinage entre les différentes régions de l'image. Cette condition spécifie que les changements d'échelles de résolution ne doivent pas faire apparaître de nouvelles courbes de niveau dans l'image (Witkin, 1983; Koenderink, 1984; Lindeberg, 1996).

Ces conditions s'appliquent aux caractéristiques d'un phénomène largement étudié en physique, la *diffusion de la chaleur*. Dans un matériau, la chaleur se diffuse d'un point à un autre, de proche en proche, et tend ainsi à se répartir uniformément au fur et à mesure que le temps s'écoule. De la même façon, on peut aussi faire *diffuser* progressivement les niveaux d'éclairement lumineux (les pixels) dans une image. *L'image s'embrouille doucement*. Ainsi, les contrastes élevés d'éclairement lumineux diminueront, et on retrouvera un niveau plus

uniforme: on gommara en quelque sorte, de façon douce et progressive, les petites structures locales.

Koenderinck (1984) fut le premier à démontrer que les conditions pour une représentation à échelles multiples de l'image ne peuvent être remplies que par un opérateur qui obéit à l'équation de diffusion de la chaleur, établie par Fourier au XIX siècle. L'équation de diffusion de la chaleur de Fourier va comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Une solution à cette équation consiste donc à trouver une fonction pour laquelle la dérivée première par rapport au temps est égale à sa dérivée seconde par rapport à l'espace. Comme solution, l'opérateur gaussien

$$\varphi(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \quad (6)$$

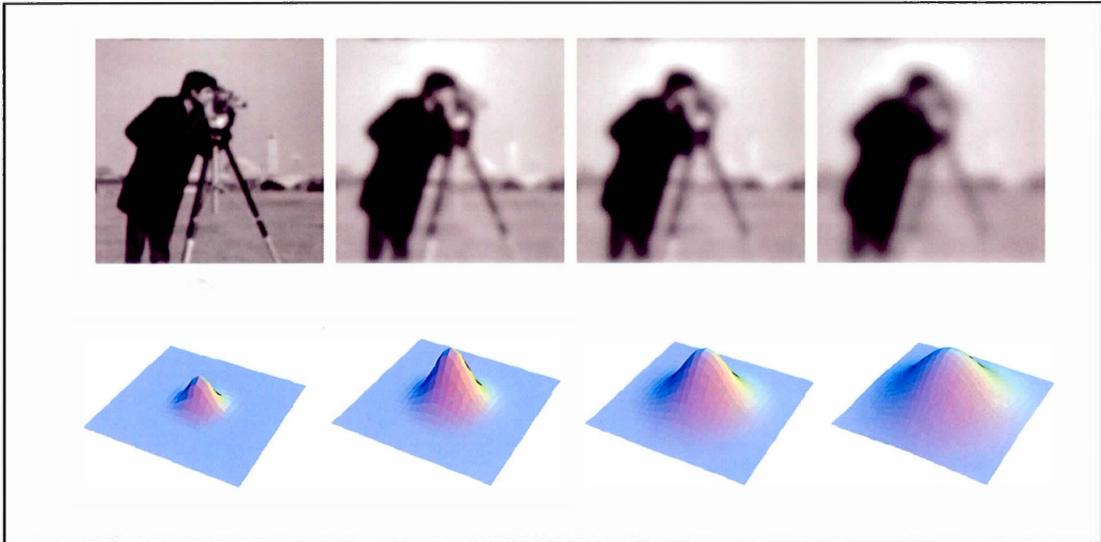
permet la représentation d'une image selon plusieurs échelles de résolution tout en respectant la condition selon laquelle un changement d'échelle ne doit pas faire apparaître de nouvelles courbes de niveau dans l'image.

Pour mieux comprendre la notion d'échelle de résolution, considérons comme signal une image  $f(x, y)$  ainsi que son produit de convolution avec l'opérateur gaussien

$$f(x, y) \otimes \varphi(x, y, t).$$

Localement, à chaque point de l'image, le produit de convolution correspond à l'opération des neurones du cortex visuel. Comme l'illustre la figure 2.1, le produit de convolution transforme l'image en une image adoucie selon l'échelle de résolution  $t$  de

l'opérateur gaussien (la variance de l'opérateur gaussien). Physiquement, l'échelle de résolution correspond à l'étendue des connexions synaptiques du neurone sur le plan visuel.



**Figure 2.1** Convolution d'une image avec un opérateur gaussien selon quatre échelles de résolution  $t$ .

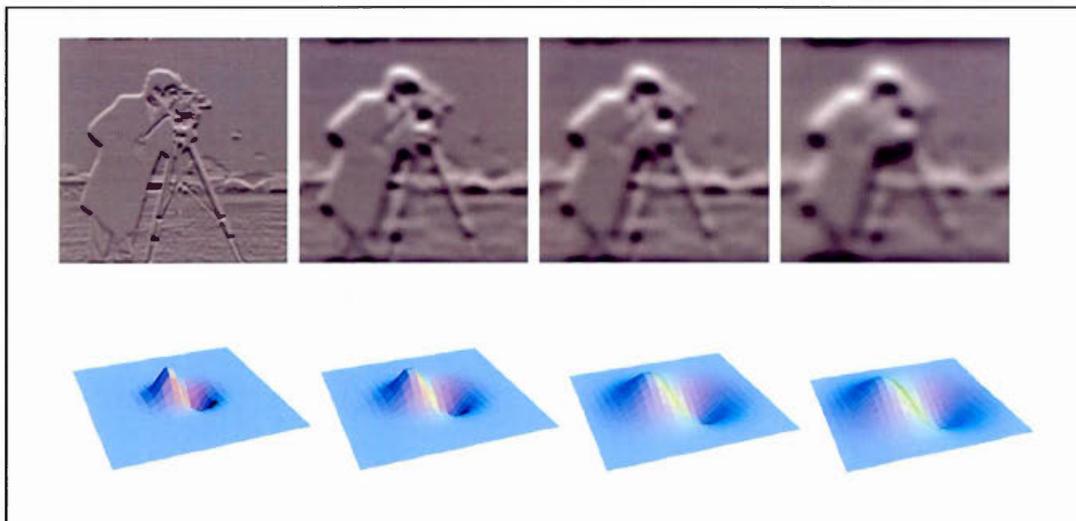
Considérons maintenant les dérivées partielles de l'opérateur gaussien

$$\varphi_{k,n-k}(x, y, t) = \frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{(n-k)}} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \right] \quad \text{où } 0 \leq k \leq n \text{ et } n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Puisque

$$\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{(n-k)}} [f(x, y) \otimes \varphi(x, y, t)] = \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{(n-k)}} \otimes \varphi(x, y, t) = f(x, y) \otimes \varphi_{n,n-k}(x, y, t),$$

on note alors que la dérivée partielle de l'image adoucie (à l'échelle  $t$ ) est aussi égale à la convolution de l'image avec l'opérateur de dérivée  $\varphi_{k,n-k}(x, y, t)$ .



**Figure 2.2** Convolution d'une image avec la dérivée partielle (par rapport à  $x$ ) d'un opérateur gaussien selon quatre échelles de résolution.

Puisque les dérivées partielles de l'opérateur gaussien décrivent les courbes de sensibilité des neurones sur le cortex visuel (Young 1985), les opérations locales du cortex visuel correspondent alors aux dérivées partielles des patrons de lumière selon une direction (dérivée directionnelle) et une échelle de résolution ( $t$ ). En effet, par la combinaison linéaire des dérivées partielles selon  $x$  et  $y$ , on peut exprimer une dérivée directionnelle selon une direction  $\theta$  et une échelle  $t$  par l'équation

$$\cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \right] + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \right]. \quad (8)$$

La présence sur les aires du cortex visuel d'opérations de dérivée partielle ouvre la porte à un univers d'opérations invariantes offertes par la géométrie différentielle. Entre autres, la géométrie différentielle trouve non seulement une *mécanique* sur le cortex visuel, mais elle permet l'expression de la forme visuelle de façon holistique où une même opération décrit à la fois une transformation, une structure locale et une forme globale. Elle permet du même coup de servir de modèle à la mémoire visuelle par la possibilité d'une intégration

invariante aux transformations que subit l'image rétinienne. Particulièrement, la géométrie différentielle permet l'expression d'invariants aux déformations (transformations molles). La déformation de l'objet visuel, tel un caoutchouc, est sans contredit la plus répandue des transformations que subit l'image rétinienne. Pourtant, elle est trop souvent laissée en marge d'une solution à la transformation d'homothétie (transformation rigide).

### 2.3 Mémoire visuelle et déformations

Imaginons une pâte à modeler dont tous les grains de pâte sont d'une couleur différente. Sans *déchirer* ni *coller* la pâte, on peut lui donner une infinité de formes géométriques différentes. Sans déchirement ni collage, la pâte molle sera tantôt un cube et plus tard une cuillère. Malgré les déformations, quelque chose demeurera invariant (inchangé) à travers toutes ces configurations géométriques. Les grains de pâte auront toujours les mêmes voisins, sans déchirement et sans recollement, un grain de couleur sera toujours relié aux mêmes couleurs sur la pâte. La description de ce qui ne change pas au sujet de la pâte malgré une déformation appartient à la *topologie*, une très vaste et fondamentale branche des mathématiques dont la géométrie différentielle en est l'expression. Topologie signifie en grec: *discours des lieux*. Elle fait l'étude des espaces par l'intermédiaire des relations de voisinage et des invariants qui demeurent à la suite d'une transformation élastique. Elle ne se préoccupe pas des mesures géométriques fixes (angles, distances, etc.). Seules les relations de voisinage, c'est-à-dire la façon ou l'ordre dans lequel les grains de pâtes sont reliés à leurs voisins, suffisent pour établir une correspondance entre deux formes différentes. D'une certaine façon, on peut identifier la topologie comme une géométrie qualitative. De manière générale, on pense à la géométrie en termes de mesures, de surfaces, de volumes, de longueurs et d'angles, d'où l'origine du mot géométrie (mesure de l'espace). Par contre, la topologie pose les questions suivantes à propos d'un objet (Brutter, 1974) :

- Quelles sont ses limites? S'étend-il à l'infini ?
- L'objet est-il continu ou est-il fait de plusieurs parties discontinues ?
- Y a-t-il des trous dans l'objet ?

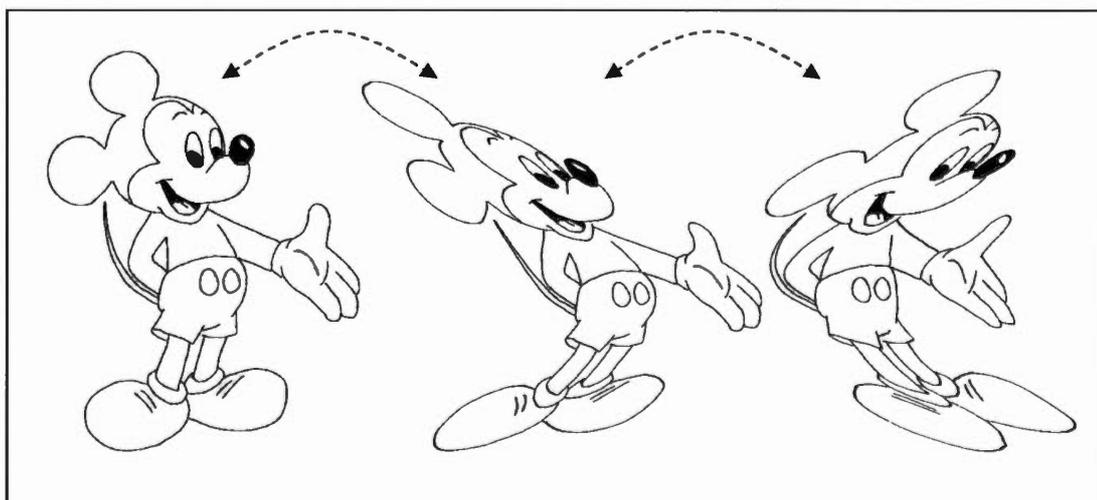
-Sa transformation est-elle douce et continue, ou observe-t-on des changements brusques?

Aussi, on peut dire que la topologie est l'étude de la continuité de l'espace. En topologie, la ligne droite n'a pas à rester droite, mais elle conserve la qualité d'être continûment connexe le long d'elle-même. On peut prendre un fil, le tourner, le courber, faire des nœuds et lui donner toutes les ondulations voulues, les relations de proximités des points sur le fil demeurent. Si l'on pouvait compter les points sur le fil, ils demeureraient dans le même ordre. Le maintien de la connexité par le biais de la continuité des transformations est l'essence des invariants topologiques. Cette relation entre la continuité de l'espace et ces transformations passe par l'expression des relations de voisinage entre les points du fil, et la géométrie différentielle permet d'exprimer exactement cela.

Le tâtonnement de nos pieds dans le parc, *pas à pas*, permet une description topologique de ce dernier. Sans nous soucier des distances précises que nous avons parcourues les yeux bandés, nous formerons une image mentale du parc, une mémoire dans laquelle nous savons ce qui est près et loin d'une chose, à gauche ou à droite d'une autre.

De même, une *chaîne* des dérivées partielles locales sur image permet de nous déplacer sur celle-ci comme nous le ferions si nous avions la taille d'une fourmi. Les dérivées partielles représentent le tâtonnement des pieds de la fourmi sur le relief de lumière afin d'en identifier la structure, comme nous le ferions pour le parc. En identifiant la vitesse de changement du relief de lumière autour d'un point, une dérivée partielle donne une expression de la façon dont les points lumineux de l'image sont reliés aux points lumineux voisins (la variation du relief). En reliant et en additionnant (intégration) des chaînes de dérivées partielles sur une image, la géométrie différentielle permet l'expression d'invariants qui suggèrent que la mémoire visuelle fonctionne selon des principes topologiques. En effet, la mécanique du cortex visuel permet l'intégration de chaînes de dérivées partielles (déplacements *pas à pas*) et donc d'opérations de géométrie différentielle.

L'importance de discuter de géométrie différentielle survient lorsque l'on considère les transformations molles d'un objet (figure 1.10 et 2.3). Quels sont les éléments d'un objet à un temps donné qui correspondent aux éléments du même objet à un temps subséquent lors de sa transformation? Dans le cadre de l'approche *computationnelle*, les éléments de correspondance lors de la transformation d'un objet sont identifiés par les *arêtes visuelles*, des segments de droites, des lignes, des angles, etc. Ce type de correspondance offre des explications concrètes en ce qui a trait aux mouvements rigides de l'objet comme la translation et la rotation. Par contre, comme une pâte à modeler ou un caoutchouc, la majorité des transformations subies par un objet sont de nature élastique. Il est difficile d'imaginer que les éléments rigides, les *arêtes visuelles* de l'approche computationnelle, soient l'unité de correspondance utilisée par la mémoire puisque ces dernières perdent leur identité lors d'une déformation de l'objet.

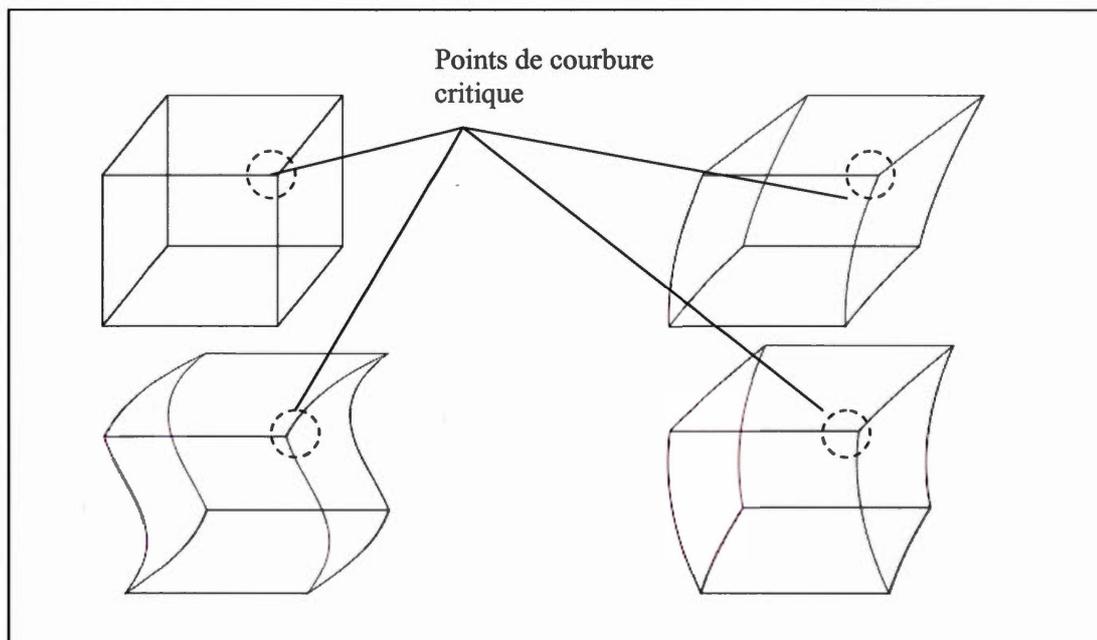


**Figure 2.3** Déformations (transformations molles).

Les opérations de géométrie différentielle étudiées dans cette thèse offrent non seulement une invariance à la déformation des objets, mais elles se trouvent en correspondance directe avec les opérations potentiellement effectuées sur le tissu du cortex visuel. En revanche, les opérations mathématiques que nous illustrons sont souvent trop permissives, trop flexibles pour représenter ce que doivent être les opérations d'une mémoire visuelle adaptée à notre environnement.

De façon générale, ces opérations supportent des déformations de l'objet qui sont illimitées, et une mémoire qui fonctionnerait uniquement par ces principes ne posséderait que très peu de catégories. Par exemple, topologiquement, un triangle est la même chose qu'un carré : une pâte à modeler en forme de carré peut être déformée en un triangle de façon continue, sans la déchirer. Si la mémoire visuelle devait être purement topologique, elle serait très peu efficace. Trop de choses que nous considérons différentes seraient alors pareilles.

Nous estimons que les *régions de courbure critique*, les régions de grande courbure d'une forme visuelle sont les contraintes nécessaires à une mémoire topologique trop flexible. De nombreux auteurs suggèrent l'importance des régions critiques de courbure dans la mémoire visuelle (Hoffman, 2000; Lowe, 1999; Hoffman et Richard, 1985; Richard et Hoffman, 1984; Hebb, 1949). Entre autres, dans sa théorie, Hebb (1949) suggère que le balayage rapide des yeux, en *sautant* d'une région critique à une autre, engendre l'activation de boucles de rétroaction sur les ensembles cellulaires d'une façon unique à la géométrie de l'objet. D.D Hoffman (2000) élabore de nombreuses règles de perception visuelle, lesquelles reposent sur la présence et le comportement des régions de courbure critique. Au quatrième chapitre, dans la convergence de nos démonstrations mathématiques, nous illustrons certains processus de mémoire visuelle reposant sur les régions de courbure critique.



**Figure 2.4** Points de courbure critique, maintenus dans la déformation de l'objet.

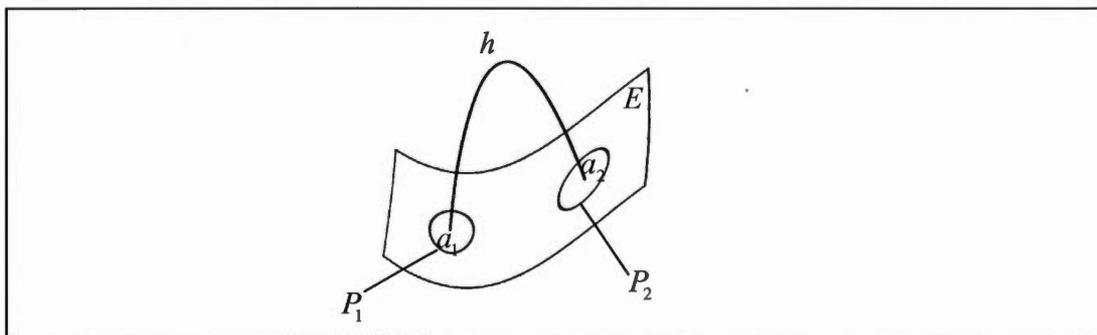
En géométrie différentielle, les points de courbure critique ont un rôle de premier plan dans l'étude géométrique des systèmes dynamiques. Géométriquement, les points critiques (concavité et convexité) sont les points de bifurcation, où la dérivée est parfois mal définie, où elle change brusquement vers l'infini ou vers zéro. C'est autour de ces points que repose l'expression géométrique de la stabilité d'un système dynamique (Bruter, 1974).

La mémoire visuelle semble s'approcher grandement de ces abstractions mathématiques. Nous posons que la mémoire visuelle est topologique et que la rigidité (nécessaire) des coins offre une contrainte géométrique. En effet, un objet visuel peut subir des déformations très sévères, et s'il conserve la géométrie de ses régions de grande courbure (c-à-d. isomorphisme), il activera fort probablement la même mémoire. Le fait que les déformations de l'objet n'affectent pas l'identité que nous lui donnons suggère une mémorisation de type topologique alors que les régions de courbure critique imposent des limites sur les déformations possibles.

## 2.4 Quelques notions de topologie

La topologie est basée sur des notions spatiales très naturelles et très flexibles. Spécifiquement, c'est sur la notion de voisinage que repose la topologie. Le voisinage d'un grain de pâte est décrit par les points de pâte qui l'entourent. Plus précisément, on définit le voisinage d'un point par l'ensemble des points se situant à l'intérieur d'un rayon centré sur lui. Lorsque les relations de voisinage sont les mêmes pour deux formes, on dit qu'elles sont topologiquement identiques. Par exemple, si vous et tous vos voisins deviez changer de quartier et que chacun conservait les mêmes voisins dans la même configuration, même si l'allure des rues était différente, nous dirions que les deux quartiers ont la même topologie.

Prenons un caoutchouc ondulé (figure 2.5) que nous définissons comme notre espace topologique  $E$ .



**Figure 2.5** Espaces homéomorphes.

Pour que deux parties ( $P_1$  et  $P_2$ ) du caoutchouc soient dites identiques malgré les plis et les ondulations différentes qui les affectent, il faut simplement qu'elles soient identiques si on les *déplie* bien à plat sur une table. Autrement dit, deux formes visuelles sont topologiquement identiques s'il est possible de prendre la première et, sans déchirure ni collage, de la transformer en la deuxième.

D'une façon plus rigoureuse, il faut que les deux conditions suivantes soient remplies (Bruter, 1974) :

1- À tout point  $a_1$  de la région  $P_1$ , il est possible de faire correspondre, par une fonction  $h$ , un point  $a_2$  de la région  $P_2$ . Et inversement, à tout point  $a_2$  de  $P_2$ , il est possible de faire correspondre par une fonction  $h^{-1}$  un point  $a_1$  de  $P_1$ . Dans ce cas, on dit de la fonction  $h$  qu'elle est une *bijection*. On peut alors dire que les parties  $P_1$  et  $P_2$  ont autant de points l'une que l'autre et que la fonction qui permet de passer d'une partie à l'autre est définie sans ambiguïté par une correspondance *un à un*.

2- La même chose doit s'appliquer aux voisinages, à des groupes de points. Il faut que la projection (par  $h$ ) des points du voisinage de  $a_1$  dans  $P_1$  forme un voisinage du point  $h(a_1) = a_2$  dans  $P_2$ . Autrement, pour tout point de  $P_1$  correspond par  $h$  un point sur  $P_2$ , et les voisinages de ces deux points sont également en correspondance par  $h$ . Dans un tel cas, on peut alors dire que la fonction  $h$  est une fonction continue.

Lorsque ces deux conditions sont réunies, on dit alors que la fonction  $h$  est un *homéomorphisme* et que les parties  $P_1$  et  $P_2$  sont *homéomorphes*, qu'elles sont équivalentes topologiquement. Puisqu'il s'agit d'une feuille ondulée, si on déplierait les deux régions  $P_1$  et  $P_2$ , elles seraient identiques (une fourmi pourrait inspecter les lieux et nous confirmer qu'en dépliant la feuille, elle serait identique à une feuille autrement plate).

On appelle une *variété topologique* de dimension  $n$  un espace (une pâte à modeler) dont tous les points possèdent un voisinage, aussi petit soit-il, homéomorphe (identique) à un voisinage de l'espace euclidien  $R^n$  (un petit morceau de papier). Un exemple incontournable est celui de notre planète. Localement, de près, elle nous paraît plate et nous pouvons effectuer des opérations sur sa surface en supposant qu'elle est plate. Cependant, une autre échelle de mesure nous indiquent que celle-ci n'est pas plate et que les opérations doivent s'effectuer sur une sphère. Dans la perception d'une autre dimension, nous pourrions dire que celle-ci n'est pas sphérique non plus.

Une autre expression intuitive est de dire qu'une variété topologique de dimension 2 est un espace qui, localement, c'est-à-dire si on ne regarde pas de trop loin, ressemble à un petit morceau de papier qu'on aurait pu découper avec des ciseaux et déplier bien plat. La structure globale de l'espace (l'objet visuel) peut être très différente puisqu'elle est obtenue par recollement de plusieurs petits morceaux de papier. Par exemple, en observant votre main, vous imaginerez qu'il est toujours possible de trouver un petit morceau de papier qui se marie parfaitement à sa surface, aussi petit soit-il.

Tous les objets visuels qui composent notre monde peuvent alors être considérés comme des *variétés topologiques* de dimension 2. Il s'agit d'objets qui baignent dans l'espace euclidien à trois dimensions  $R^3$  qui peuvent être représentés localement par un morceau de plan, un petit morceau de papier, homéomorphe à  $R^2$ .

Les variétés topologiques les plus intéressantes sont les variétés différentiables. Pour celles-ci, la jonction entre les petits morceaux de papier est douce, les raccordements des voisinages avec lesquels on construit l'espace sont lisses, sans discontinuité. On peut donc passer d'un morceau à l'autre de manière continue, par différentiation, *avec de très petits pas*. C'est sur de telles variétés d'objets que la géométrie différentielle permet de se déplacer à l'aide de dérivées partielles. Il est très intéressant de considérer les espaces en lien avec les déplacements que l'on peut accomplir sur ceux-ci.

Cette façon de concevoir l'espace par le mouvement et la transformation passe par la géométrie différentielle et les champs de vecteurs (groupes de transformations). En exprimant la forme visuelle par les déplacements qu'on peut accomplir sur celle-ci, elle devient en quelque sorte de la même nature qu'un mouvement et alors son expression n'est plus celle de la mesure métrique, mais celle des directions et des trajectoires possibles. Les notions mathématiques qui suivent établissent les bases qui nous permettent de traiter de la mémoire visuelle par la géométrie différentielle et les champs de vecteurs.

## 2.5 Champs de vecteurs et géométrie différentielle

Définissons d'abord l'opérateur de dérivée partielle suivant

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (9)$$

Cet opérateur de dérivée partielle nous permet d'exprimer, par un vecteur infinitésimal, la variation de la lumière à un point dans l'image. Dans une autre terminologie, cet opérateur fait référence à la vitesse d'un mouvement local, la vitesse des petits pas que prendrait une fourmi sur le relief de lumière. Rappelons que les termes  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial}{\partial y}$  font aussi, et surtout, référence à l'opération accomplie par les neurones du cortex visuel sur les patrons de lumière. Voyons comment l'application de cet opérateur nous permet de nous déplacer sur l'image, comment il nous permet de sonder la variation du relief de lumière.

### 2.5.1 Gradient et champs de vecteurs

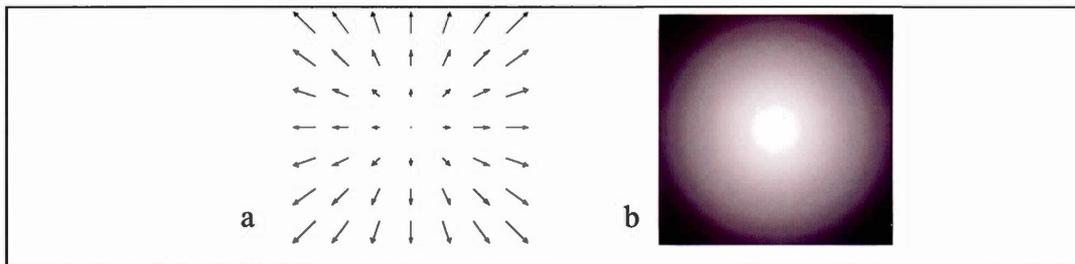
Le gradient d'une fonction est un vecteur dont la direction et la longueur indiquent la pente maximale du relief décrit par la fonction. Sur une image, le gradient est défini comme un vecteur dont l'amplitude et la direction indiquent la pente maximale du relief visuel. Il correspond donc dans l'analogie du parc à la direction où la pente ressentie par le tâtonnement de nos pieds est le plus à pic, *la plus forte*.

De façon générale, le gradient d'une fonction  $f$  est donné par l'application de l'opérateur  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  sur cette dernière. Dans le cas où  $f$  décrit une image, l'application de  $\nabla$  indique la direction où le relief de lumière change le plus rapidement (le contraste). Par

exemple, pour l'image définie par la fonction  $f(x, y) = x^2 + y^2$  (le relief de lumière illustré sur la figure 2.6b), le gradient est donné par

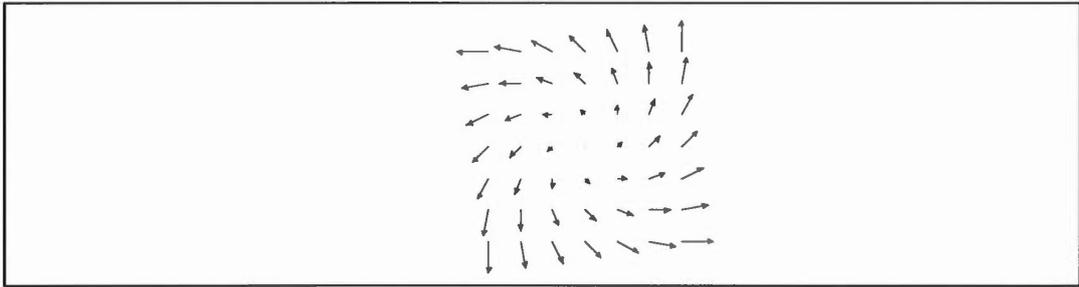
$$\begin{aligned}\nabla f &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 + y^2) \\ &= 2(x, y).\end{aligned}$$

Si l'on trace à chaque point de l'image le vecteur gradient défini par  $2(x, y)$ , on obtient alors le *champ de vecteurs* sur la figure 2.6a. La longueur de chaque vecteur indique l'amplitude de la pente du relief visuel à ce point. L'augmentation de la longueur des vecteurs vers la périphérie de l'image indique que le relief visuel s'accroît en périphérie. Visuellement, ce champ de vecteurs décrit aussi un mouvement d'expansion. Il décrit la transformation des patrons de lumière lors d'un mouvement vers l'avant.



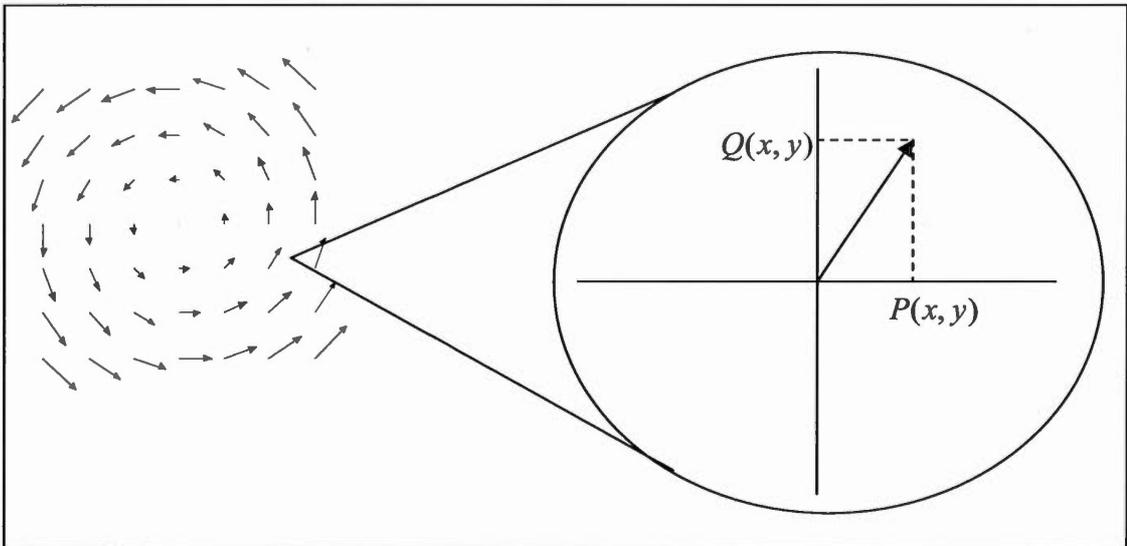
**Figure 2.6** a) Champ de vecteurs gradients des courbes de niveau de la figure 2.6b.

Une façon bien intuitive de saisir la nature d'un champ de vecteurs est celle d'un champ de blé dont les tiges sont pliées sous l'action d'un coup de vent. Lorsque vue en élévation, l'inclinaison et l'orientation des tiges indiquent la force et l'orientation du vent à ce point dans le champ. Imaginez un champ de blé sur lequel un vent tourbillonnant devait passer. En pliant les tiges de blé sous l'action de sa force, le vent laisserait probablement une trace qui ressemblerait à celle illustrée ci-dessous.



**Figure 2.7** Champ de vecteurs en spirale.

Mathématiquement, un champ de vecteurs est une fonction  $W(x,y)$  qui associe à chaque position  $(x,y)$  un vecteur  $W(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ . Il s'agit donc d'un vecteur dont les coefficients  $(P(x,y), Q(x,y))$  sont fonction de sa position  $(x,y)$ .



**Figure 2.8** Les vecteurs locaux du champ sont fonction de leur position globale.

Le vecteur local donne l'amplitude ou encore la force du mouvement à ce point. Un champ de vecteurs permet donc d'exprimer l'action *pas à pas* (tige par tige) d'un mouvement dans l'espace. Sur la figure 2.6, il s'agit d'un mouvement d'expansion, alors que sur la figure 2.8 il s'agit d'un mouvement de rotation.

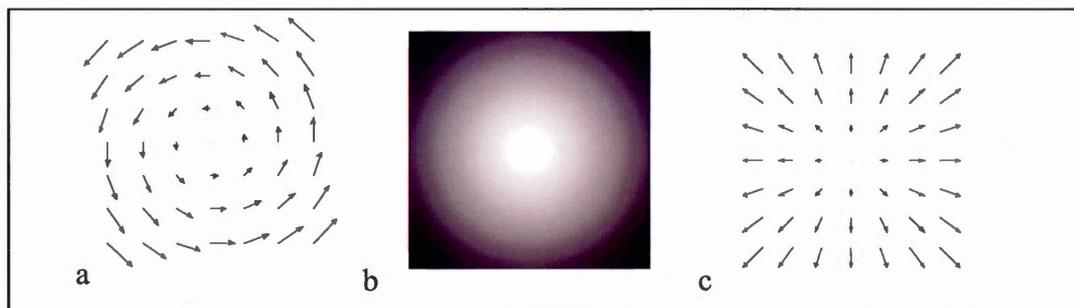
### 2.5.2 Le vecteur tangentiel

Comme le font les vecteurs gradients, les vecteurs tangentiels permettent aussi de définir des champs de vecteurs. Comme nous venons de l'indiquer, le vecteur gradient (le contraste) indique la direction où le relief visuel est le plus fort. En revanche, la direction où la pente du relief visuel est nulle est donnée par le vecteur tangentiel. Le vecteur tangentiel est donc un vecteur *perpendiculaire* au vecteur gradient et il décrit les courbes *nivelées* d'une image, c'est-à-dire les régions le long desquelles le contraste est nul.

Par exemple, reprenons le relief de lumière décrit par  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Les régions où le relief est constant (contraste nul) sont appelées *courbes de niveau* et elles décrivent des trajectoires de cercles ( $f(x, y) = x^2 + y^2 = r$ ) que l'on peut paramétrer par  $t \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$ . Si, pour chacune des courbes de niveau, on tire la dérivée par rapport à  $t$ , on obtient ce qu'on appelle le vecteur tangentiel ( $v$ ) à la courbe. Ce vecteur, aussi appelé vecteur de vitesse, est donné par

$$\begin{aligned} v &= f'(t)dt = (x'(t), y'(t)) \\ &= (\cos'(t), \sin'(t)) = (-\sin(t), \cos(t)) \\ &= (-y, x). \end{aligned}$$

Ce vecteur décrit l'amplitude et la direction du mouvement circulaire le long des courbes nivelées de l'image (le long des cercles). En prenant le vecteur tangentiel  $(-y, x)$  à toutes les positions  $(x, y)$  du relief, on obtient alors un champ de vecteurs de rotation, lequel est à tous les points perpendiculaire au champ d'expansion donné, lui, par le gradient du relief visuel.



**Figure 2.9** a) Champ de rotation obtenu par les vecteurs tangentiels aux courbes de niveau de l'image illustrée en b. c) Champ d'expansion obtenu par les vecteurs gradients, perpendiculaires aux vecteurs tangentiels.

Comme nous l'avons mentionné, les vecteurs gradients sont perpendiculaires aux vecteurs tangentiels. En effet, la paramétrisation du cercle donnée par  $t \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$  satisfait l'équation  $f(x, y) = (x(t))^2 + (y(t))^2 = r$ , et, en dérivant des deux côtés selon  $t$ , nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) = -2x(t)\sin(t) + 2y(t)\cos(t) = -2\cos(t)\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t) = 0,$$

et ainsi, le vecteur gradient  $\nabla f = (2x, 2y)$  de la courbe de niveau  $f(x, y) = x^2 + y^2 = r$  est orthogonal au vecteur tangentiel  $(x'(t), y'(t)) = (-y(t), x(t))$ .

Les champs de vecteurs sont présentés jusqu'à présent comme l'expression *pas à pas* d'un mouvement global sur une surface. En référence aux processus de mémoire visuelle, ils représentent l'expression *pas à pas* des trajectoires qui forment les patrons de lumière sur la rétine. Jusqu'ici, nous avons illustré deux cas particuliers sur lesquels nous reviendrons largement : le champ de d'expansion et le champ de rotation.

En reprenant l'exemple du champ de blé, nous rappelons ici que les vecteurs qui composent un champ de vecteurs sont le résultat d'une seule transformation; les trajectoires

décrites par l'inclinaison et l'orientation des tiges de blé sont le résultat d'un seul et même coup de vent. Cette façon de concevoir les champs de vecteurs, où les vecteurs locaux sont unis par une seule transformation globale (un seul coup de vent), appartient au cadre théorique des *groupes de transformations continues* aussi appelés *groupes de Lie*. Les groupes de transformations continues sont définis dans ce qui suit.

### 2.5.3 Groupes de transformations continues (groupes de Lie)

Les groupes de transformations permettent de décrire les espaces en lien avec les déplacements que l'on peut accomplir sur ceux-ci. Par exemple, pour un objet visuel, il n'est pas question de mesures, mais plutôt des mouvements que l'on peut accomplir sur sa surface.

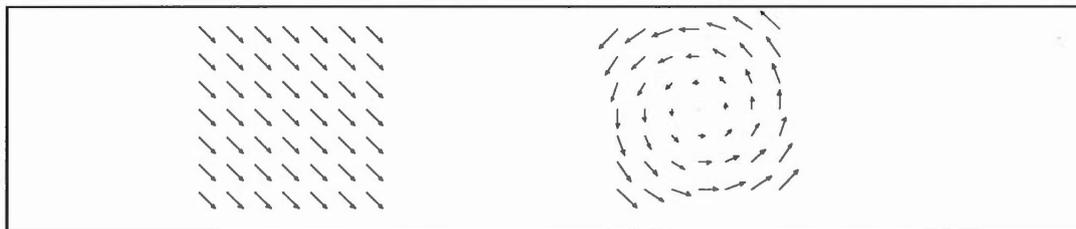
En prenant la droite géométrique qui décrit l'ensemble des nombres réels ( $\mathbb{R}$ ), tel que sur un fil de caoutchouc infini, on peut imaginer s'y promener d'une valeur à l'autre en effectuant des bonds. Pour qu'un ensemble soit considéré comme un groupe (et la droite  $\mathbb{R}$  en est un exemple), il faut que les trois propriétés suivantes soient respectées :

- Associativité : il revient au même d'accomplir le bond  $(x + y)$  suivi du bond  $z$  que de faire un premier bond de longueur  $x$  suivi d'un bond de longueur  $(y + z)$
- Élément neutre : il existe un bond nul  $0$  tel que  $(0 + x) = (x + 0) = 0$
- Inverse : à tout bond  $x$  est associé un unique bond  $-x$  qui nous ramène à notre point de départ.

Si la somme de deux bonds varie continuellement, nous avons alors affaire à un groupe continu. De plus, si le groupe est continu et différentiable (une fourmi peut s'y promener), nous avons alors un groupe de Lie. Le fil de caoutchouc décrit par la droite  $\mathbb{R}$  est donc non seulement une variété topologique, mais aussi un groupe de Lie, également appelé groupe de transformations. Le groupe de rotations du plan est aussi un exemple de groupe de

Lie. Les mouvements (les bonds) le long d'un cercle répondent à tous les critères d'un groupe continu différentiable.

Avec cette notion de groupe, on pose alors la question suivante : quelle est la nature de son action, où peut-il agir? Par exemple, que fait  $\mathbb{R}$  ?  $\mathbb{R}$  prend une chose et lui fait faire des bonds de longueur  $x$ . Que fait le cercle ? De la même façon, le cercle prend quelque chose et lui fait faire des rotations. Ainsi, un groupe de transformations peut aussi agir sur différents espaces. Par exemple,  $\mathbb{R}$  peut agir de manière à déplacer tous les points du plan  $\mathbb{R}^2$  (tous les points d'une feuille). Ou encore, le cercle peut agir de manière à faire tourner tous les points sur la feuille.



**Figure 2.10** a) Action possible de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^2$  b) action possible du cercle sur  $\mathbb{R}^2$ .

Les vecteurs qui composent les champs de vecteurs indiquent donc l'action locale d'une transformation globale sur un espace, comme l'action d'un coup de vent sur un champ de blé.

Toujours dans l'exemple du champ de blé, le travail exercé par le vent sur le champ est maximal dans la direction où les tiges se sont inclinées. Comme nous en faisons usage lors des derniers chapitres, on peut toutefois évaluer le travail effectué par le vent le long de trajectoires qui ne sont pas nécessairement décrites par l'inclinaison des tiges. Dans ces directions, le travail n'est pas maximal, il contient cependant des propriétés bien intéressantes. En effet, en intégrant le travail fait par le vent sur les tiges de blé le long de différentes trajectoires, plusieurs propriétés invariantes sont exprimables. Dans cette thèse, nous disons que ces propriétés sont en lien direct avec les opérations du cortex visuel sur les patrons de lumière.

Plusieurs opérations invariantes applicables à la mémoire visuelle découlent de l'intégration de la force d'un champ de vecteurs le long d'une courbe. Le cortex visuel possède non seulement la mécanique pour exprimer et intégrer des champs de vecteurs, mais aussi la sensibilité de ces filtres correspond à des champs de vecteurs bien particuliers. Ces champs ne représentent pas l'action d'un coup de vent, mais plutôt l'action du filtre visuel sur les patrons de lumière. Les patrons de lumière sont également décrits comme des champs de vecteurs. Il est donc question de la rencontre entre deux champs de forces : ceux du cortex et ceux de la lumière ambiante.

Ainsi, dans cette thèse, un champ de vecteurs exprime non seulement la transformation des patrons de lumière, mais aussi la sensibilité du tissu cellulaire. Il en découle que la notation  $W$ , en référence à la matrice synaptique présentée au premier chapitre, est aussi utilisée pour la notation d'un champ de vecteurs. Observons d'abord de façon générale certaines propriétés particulières de l'intégration des champs de vecteurs le long de trajets.

#### 2.5.4 Intégration d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

En projetant la force d'un champ de vecteurs le long d'une courbe, on obtient le travail effectué par le champ sur la courbe. Le travail est maximal lorsque le vecteur du champ est dans la même direction que la courbe, alors qu'il est minimal lorsqu'ils sont perpendiculaires. De manière générale, la direction des vecteurs du champ n'est pas nécessairement la même que celle des vecteurs tangentiels à la courbe. La projection du champ sur la courbe est donnée par le produit interne du vecteur de champ ( $W$ ) avec un vecteur ( $v$ ) indiquant la direction de la courbe.

En intégrant cette projection sur toute la courbe, on obtient alors le travail total du champ de vecteurs le long de la courbe

$$\int_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Des propriétés intéressantes découlent de l'intégration d'un champ de vecteurs lorsqu'il s'agit d'un champ de vecteurs qui est aussi le gradient d'une fonction. On nomme ce type de champs les *champs de vecteurs conservatifs*. Pour ceux-ci, lorsque les bornes d'intégration demeurent les mêmes, une courbe peut être déformée à volonté sans changer le résultat de l'intégration. Ces propriétés découlent du théorème fondamental du calcul différentiel.

En termes simples, le théorème fondamental du calcul différentiel indique que la dérivée de l'intégrale d'une fonction résulte en cette même fonction.

Si 
$$W(t) = \int_a^t f(x) dx,$$

alors

$$\frac{dW}{dt} = f(t).$$

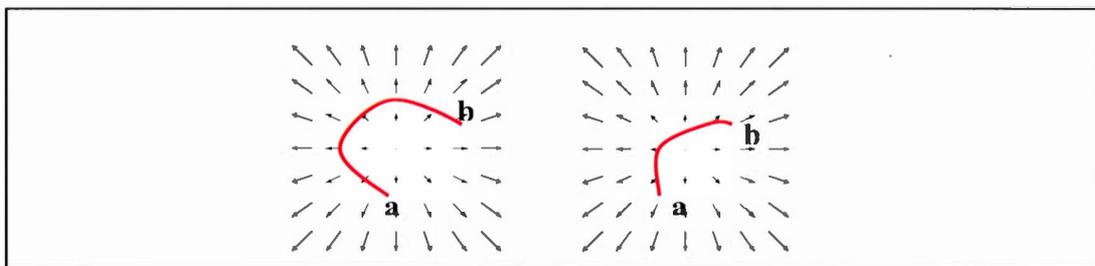
Lorsqu'appliqué à l'intégration d'un champ de vecteurs, ceci implique que, si un champ de vecteurs  $\mathbf{W}$  est aussi le gradient d'une fonction  $f(x, y)$ , alors on obtient

$$\int_a^b \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} dt = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)), \quad (10)$$

ce qui veut dire que l'intégration d'un champ de vecteurs conservatif ne dépend pas de la forme de la courbe, mais uniquement des bornes d'intégration. L'analogie est de dire que la fourmi qui se déplace sur la courbe mémorise uniquement son point de départ et son point d'arrivée, elle ne forme aucune mémoire du trajet qu'elle a emprunté.

### 2.5.5 Principe de mémoire visuelle invariante

Le fait que l'intégration d'un champ de vecteurs conservatif ne dépende pas de la forme de la courbe, mais uniquement de ces extrémités suggère une invariance applicable à la déformation de contours visuels. La figure ci-dessous illustre deux trajets d'intégration différents sous l'influence d'un même champ de vecteurs.



**Figure 2.11** Champ de vecteurs conservatif  $W(x, y) = \nabla \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$ . L'intégration du champ sur des trajectoires de mêmes bornes (mêmes extrémités) est invariante.

Si les bornes d'intégration  $a$  et  $b$  sont aux mêmes endroits pour les deux courbes illustrées sur la figure 2.11, alors l'intégration définie par l'équation 10 donne le même résultat dans les deux cas. Une mémoire visuelle fonctionnant selon ce principe d'intégration ne ferait que mémoriser les points de départ et d'arrivée d'une courbe. Une telle mémoire serait toutefois très peu catégorique puisqu'elle supporterait un degré de déformation illimité.

Les mêmes principes peuvent être généralisés à l'intégration de surfaces. Dans ce cas, nous démontrons, au dernier chapitre, qu'il est possible d'établir des conditions pour lesquelles le degré de déformation supportée n'est pas illimité.

Un autre principe d'invariance qui découle de ce qui précède est le suivant: l'intégration d'un champ de vecteurs gradients (conservatif) le long d'une *courbe fermée*

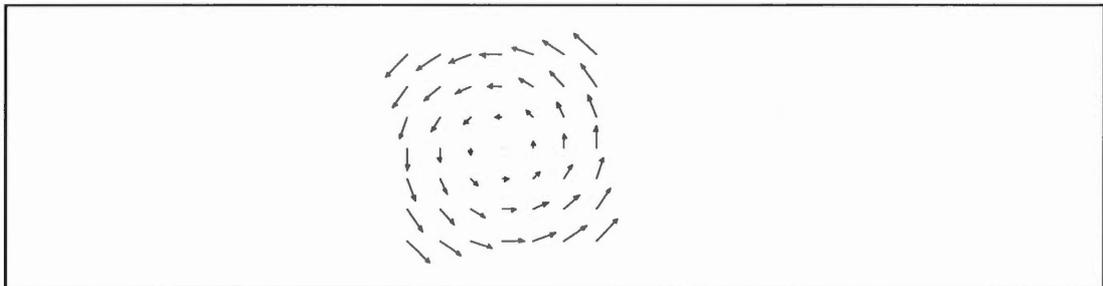
donne toujours un résultat nul. En effet, si la courbe est fermée, les bornes d'intégration  $a$  et  $b$  dans l'équation 7 sont égales, ce qui implique automatiquement une intégration nulle.

$$\oint_C W \cdot v \, dt = 0$$

### 2.5.6 Dérivée de Lie

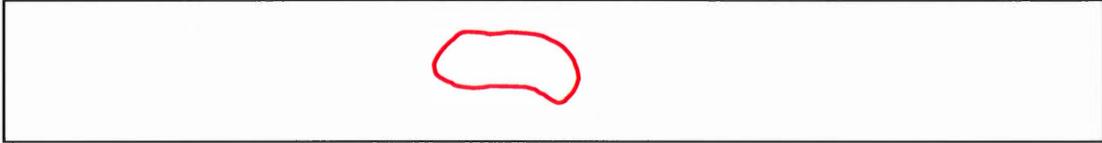
La dérivée de Lie, utilisée par Hoffman (1966) dans sa théorie sur les groupes de transformations des perceptions visuelles, permet aussi l'expression d'invariants applicables à la mémoire visuelle.

La notion de dérivée de Lie découle directement de ce qui a été exprimé sur les vecteurs gradients et les vecteurs tangentiels. Prenons un champ de vecteurs  $W$  exprimant l'action du groupe de transformations décrit par une rotation. Les vecteurs de rotation à chaque position  $(x, y)$  dans le champ sont donc donnés par  $(-y, x)$  et définissent une famille de cercles.



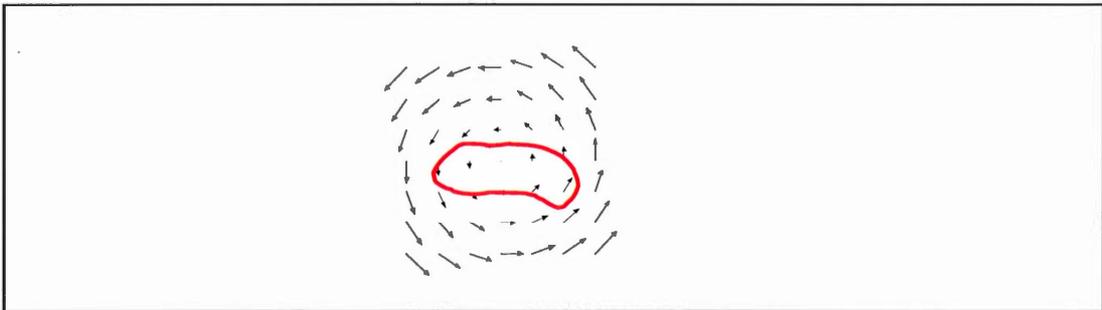
**Figure 2.12** Champ de rotation : Un groupe de transformations potentiellement actif sur le tissu du cortex visuel.

Prenons également une courbe arbitraire  $f$ .



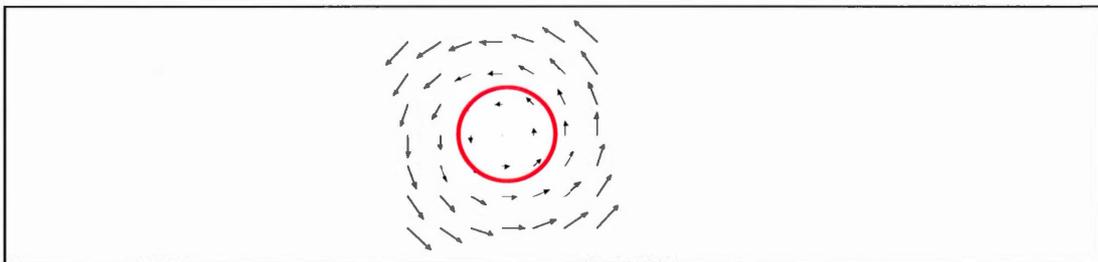
**Figure 2.13** Contour visuel.

Une question se pose alors : les points de la courbe  $f$  vont-ils demeurer sur la courbe si on leur applique l'action du groupe de transformations du cercle (un vent circulaire), exprimée par les vecteurs de  $\mathcal{W}$ ? Autrement dit, si la courbe  $f$  se compose de tiges de blé, les tiges vont-elles se plier dans le sens de la courbe sous l'action du vent  $\mathcal{W}$ ?



**Figure 2.14** Dans la théorie de Hoffman, les contours visuels subissent l'action des forces de champs élémentaires, dont celle du champ de rotation.

La réponse est simple : si, à tous les points de la courbe  $f$ , le déplacement  $(-y, x)$  engendré par le champ  $\mathcal{W}$  est tangentiel à la courbe  $f$ , alors l'action de  $\mathcal{W}$  ne déplacera jamais les points à l'extérieur de la courbe. On dit dans ce cas que la courbe  $f$  est globalement invariante à l'action du champ  $\mathcal{W}$ . Pour qu'il en soit ainsi dans notre exemple, il faut évidemment que la courbe  $f$  soit un cercle.



**Figure 2.15** Le cercle est laissé invariant sous l'action du champ de rotation.

Nous l'avons exprimé plus haut, sur une courbe de niveau d'une fonction, le vecteur gradient est perpendiculaire au vecteur tangentiel à la courbe. Alors, le fait qu'une courbe  $f$  soit globalement invariante à l'action du champ de vecteurs  $W = (-y, x)$  équivaut à dire que son gradient  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$  est perpendiculaire au champ et donc que

$$(-y, x) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0.$$

On définit l'opérateur de Lie comme ceci :

$$\left( W_x \frac{\partial}{\partial x} + W_y \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

L'application itérative de l'opérateur de Lie, telle une succession de petits pas, génère un champ de vecteurs qui laissera invariante la famille de courbes qu'il représente. Plus précisément, l'opérateur de Lie laisse invariantes les courbes  $f$  dont le gradient est orthogonal à  $W$ .

Par exemple, l'opérateur de Lie  $\left( -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , qui génère un champ de vecteurs de

rotation, laisse invariant le cercle décrit par l'équation générale  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ .

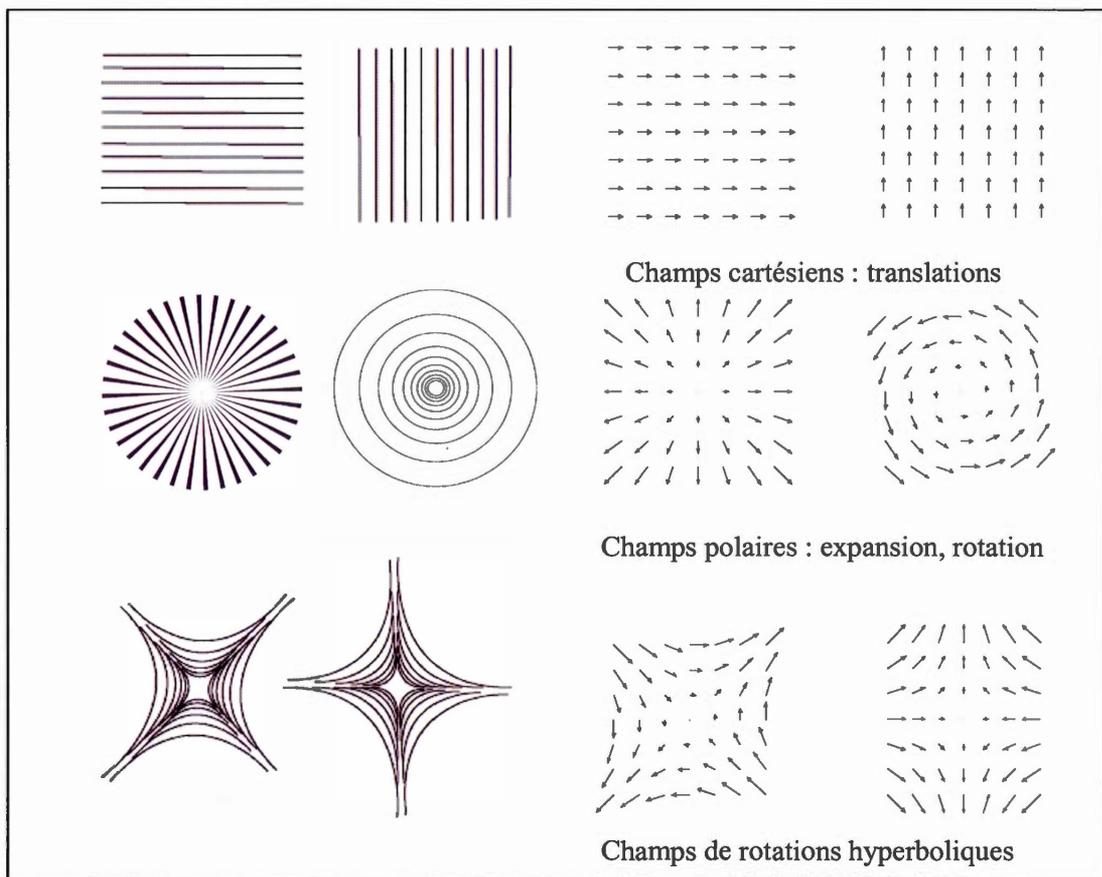
En effet, l'application de l'opérateur donnera toujours zéro, et ce, peu importe le rayon du cercle

$$\begin{aligned} & \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 + y^2 - r^2) \\ &= -2yx + 2xy \\ &= 0. \end{aligned}$$

En termes de l'intégrale  $\oint_C W \cdot v \, dt$ , cela implique que l'action du champ défini par l'opérateur de Lie sur la courbe est nul en tout point.

## 2.6 Algèbre de Lie appliquée à la perception

Dans sa théorie sur la perception visuelle, Hoffman (1966) utilise une base de dérivées de Lie, lesquelles décrivent *pas à pas*, sous forme de champs de vecteurs, les transformations cartésiennes (translations), polaires (rotations et expansions) et hyperboliques (figure 2.16). En combinant les trajectoires de ces transformations élémentaires du plan (cartésiennes, polaires et hyperboliques), il exprime la forme visuelle de façon invariante aux mêmes transformations qui la composent. La théorie utilise le fait qu'une forme visuelle composée de la combinaison de transformations élémentaires s'exprime aussi par une équation de degré  $n$ . L'application itérative ( $n$  fois) d'une dérivée de Lie permet alors de réduire la forme visuelle (réduire le degré de l'équation) à un invariant, tel que nous l'avons donné en simple exemple pour le cercle.



**Figure 2.16** Trajectoires élémentaires associées aux champs de vecteurs (groupes de transformations) qui forment la base de l'algèbre de Lie visuelle dans la théorie de Hoffman (1966).

Par l'algèbre de Lie, Hoffman (1966) combine les transformations élémentaires de la figure 2.16 pour former une *algèbre de la perception visuelle*. Il identifie une série de groupes de transformations qu'il croit appropriés et essentiels à la perception visuelle. Le tableau ci-dessous dresse la liste des transformations identifiées par Hoffman. Entre parenthèses est indiquée l'invariance visuelle associée.

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ Translations (position)	$(t\frac{\partial}{\partial t} - y\frac{\partial}{\partial y}), (t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x})$ Perception binoculaire efférente (rotations espace-temps)	$(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}),$ $(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y})$ Perception binoculaire (rotations hyperboliques)
$\frac{\partial}{\partial t}$ Décalage temporel (forme)	$(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}), (x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t}),$ $(y\frac{\partial}{\partial y} + t\frac{\partial}{\partial t})$ Expansions (invariance à l'échelle)	$(x\frac{\partial}{\partial t} - t\frac{\partial}{\partial x}), (y\frac{\partial}{\partial t} - t\frac{\partial}{\partial y})$ Rotation espace-temps (Perception égocentrique)
$(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})$ Rotations (orientation)	$(t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}), (t\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t})$ Groupes de Lorentz (invariance au mouvement)	

**Tableau 2.1** Dérivées de Lie associées aux perceptions visuelles par Hoffman.

Le principe qui soutient les démonstrations d'Hoffman (1966) est que les objets visuels eux-mêmes sont composés des trajectoires qu'engendrent les transformations élémentaires du plan et que la stabilité des perceptions en dépend. En effet, les champs de vecteurs qui composent la forme ont une double nature. Ils représentent le contour des formes, mais aussi ils agissent comme des forces contraignantes (de la théorie gestaltiste) qui permettent aux formes de résister aux changements, de demeurer stables en dépit des transformations. Par exemple, l'opérateur de rotation présenté ci-dessus permet non seulement l'identification du contour circulaire, mais aussi il assure du même coup la stabilité des perceptions par l'*annulation* des forces rotatives en présence.

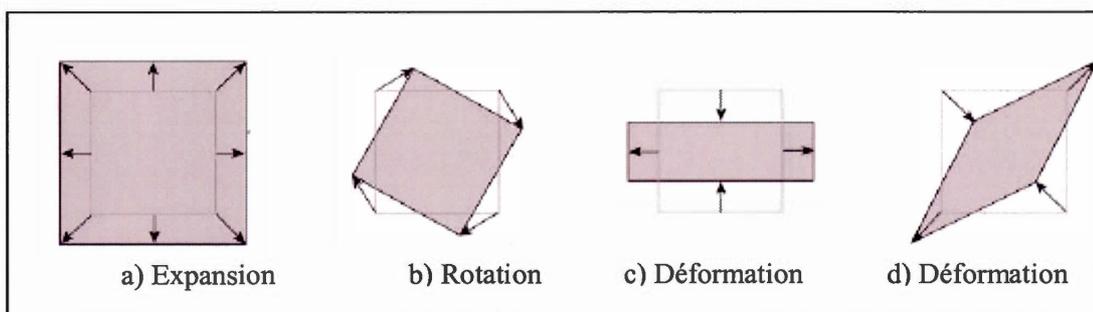
Les champs de vecteurs utilisés par la théorie d'Hoffman (1966) ont une pertinence écologique fondamentale. En effet, les mouvements cartésiens, polaires et les mouvements hyperboliques sont des transformations sans cesse rencontrées par l'œil. Elles sont

omniprésentes dans le monde visuel lorsque nous balayons du regard une scène ou encore lorsque nous nous déplaçons par rapport aux objets et vice versa. Ensemble, par leur combinaison, ces champs de vecteurs expriment la totalité des transformations possibles du plan visuel. Il est donc naturel de croire que le cortex ait développé des mécanismes pour *annuler* ces transformations afin qu'elles n'interfèrent pas avec notre perception des objets (Dodwell, 1983). Ce qui est intéressant, c'est de concevoir que le système utilise ces mêmes transformations pour représenter les objets.

Il existe quelques études et théories parallèles à celle d'Hoffman (1966) qui suggèrent directement ou implicitement l'importance de considérer les champs de vecteurs comme modèles de la perception. Avant les premiers travaux de Hoffman, Gibson (1950, 1968) avait déjà formulé des hypothèses similaires, non mathématiques, sur l'importance du mouvement dans notre perception. Dans sa théorie sur la perception visuelle, il connaissait bien l'importance du mouvement *apparent* de la lumière sur la rétine causé par notre déplacement dans l'environnement. Selon Gibson, les transformations du flux de lumière causées par le mouvement contiennent des propriétés d'organisation qui sont intégrées par le cortex et sur lesquelles notre perception repose (Gibson, 1968). En étudiant les propriétés du mouvement entre l'objet et l'observateur, l'idée dans les travaux de Gibson est que des processus invariants s'y trouvent et que ceux-ci permettent une perception stable de l'objet. Cependant, Gibson ne mit aucune emphase sur les processus neuronaux associés aux transformations de lumière et n'a pas utilisé les notions mathématiques reliées aux champs de vecteurs afin de les décrire. Les champs de vecteurs permettent non seulement une expression naturelle des idées et principes suggérés avec génie par Gibson, mais aussi ils donnent un ancrage mathématique aux principes de perception gestaltiste (Hoffman et Dowell, 1985).

Depuis les premières idées de Gibson (1950), plusieurs modèles mathématiques utilisant la notion de champ de vecteurs ont permis l'expression du mouvement relatif entre l'observateur et l'environnement (Koenderink et Van doorn, 1984, 1986, 1987; Ullman, 1979). Le mouvement apparent de la lumière sur l'image rétinienne décrit ce qu'on appelle le *flux optique*. Les variations du *flux optique* créées par notre mouvement peuvent être décomposées en quatre composantes élémentaires : la *translation*, la *rotation*,

*l'expansion/contraction* ainsi que la *déformation* (hyperbolisme). Les trois dernières de ces quatre composantes sont illustrées par la figure 2.17 dans leur action sur une surface carrée. Il est démontré que les changements de forme d'un objet, causés par notre mouvement, sont une conséquence de ces trois composantes, la translation n'apportant aucun changement de forme.



**Figure 2.17** Composantes élémentaires du flux optique.

En naviguant sur le contour d'un objet, le changement de forme de ce dernier engendre des variations dans certaines de ces trois composantes, alors que d'autres sont laissées invariantes. Les systèmes de vision artificielle et de robotique utilisent ce fait afin de permettre la navigation de machines dans l'environnement tout en conservant une certaine mesure de l'identité des objets malgré leur changement apparent (Koenderink, 1984). Notons que les composantes du flux optique illustrent les mêmes groupes de transformations élémentaires utilisés dans l'algèbre de Lie d'Hoffman (1966).

Les champs de vecteurs élémentaires associés aux théories sur le flux optique et aux groupes de transformations exprimés par Hoffman (1966) semblent trouver une existence sur le tissu du cortex visuel. Des études suggèrent que la sensibilité de certaines régions du cortex visuel, la *lentille visuelle*, est *sculptée* selon les champs de vecteurs élémentaires correspondant aux champs de vecteurs utilisés dans la théorie d'Hoffman ainsi que dans celle du flux optique (Duffy et Wurtz, 1991; Gallant et al, 1993, 1996).

Un fait qui semble plus ou moins passer inaperçu auprès des recherches sur la perception visuelle est le suivant : les mêmes champs de vecteurs élémentaires associés à la

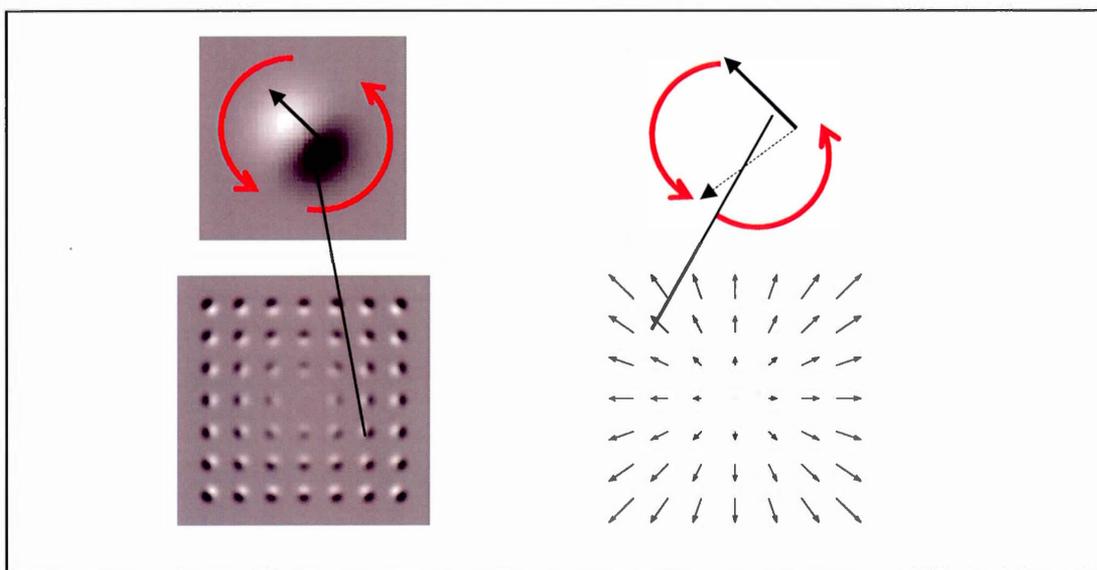
théorie d'Hoffman (1966) semblent circuler non seulement dans une région du cortex reconnue pour la perception du mouvement, mais aussi dans une région considérée essentielle à la mémorisation des objets. Les études présentées dans la prochaine section soulignent ce fait qui mérite d'être considéré davantage. À l'image des principes de la théorie d'Hoffman, se pourrait-il que la perception du mouvement soit complémentaire à la perception des objets, que les champs de vecteurs activés par le mouvement engendrent les forces contraignantes qui assurent la stabilité des perceptions ?

Dans ce qui suit, nous indiquons que le cortex visuel possède la *structure* nécessaire à l'expression de champs de vecteurs. Quelques études neurophysiologiques suggèrent que les champs de vecteurs élémentaires qui expriment la transformation des patrons de lumière sont directement impliqués dans la mémorisation des objets visuels et que les théories d'Hoffman (1966) et de Gibson (1950, 1968) touchent alors à d'importantes questions.

## 2.7 Champs de vecteurs sur le cortex : champs de forces

En observant la neurophysiologie du tissu cellulaire sur le cortex visuel, il est difficile de ne pas considérer le tissu qui s'y trouve comme une variété topologique sur laquelle peuvent s'y exprimer des champs de vecteurs. En effet, le tapis neuronal, de la rétine jusqu'au cortex préfrontal, est *tissé* de neurones dont les champs récepteurs expriment les dérivées partielles des patrons de lumière (Young, 1985). Les travaux réalisés sur le sujet suggèrent la présence, à toutes les positions du plan visuel, d'opérateurs de dérivée partielle selon toutes les orientations et toutes les échelles (Koenderink, 1984). Un tel *tapis* de dérivées partielles permet l'expression *pas à pas*, par des petits vecteurs, des patrons de lumière sur l'image rétinienne. Il permet d'exprimer la variation de la lumière à chaque point du plan visuel. Un tissu de dérivées partielles permet donc l'expression de toute forme de champs de vecteurs. L'analogie entre le tissu neuronal du système visuel et celui d'une variété topologique différentiable (une pâte à modeler) sur lequel on se déplace par des opérations de dérivée partielle est alors plus qu'évidente.

Les champs de vecteurs sont une expression géométrique d'un phénomène physique. Nul ne prétendra que de réels petits vecteurs géométriques se trouvent sur la surface du cortex. L'expression d'un champ de vecteurs sur le tissu du cortex visuel est un champ d'opérateurs de dérivée partielle. Comme l'illustre la figure 2.18, l'opérateur de dérivée partielle possède toutes les propriétés d'un vecteur géométrique (orientation, amplitude, point d'application) et il permet l'expression d'un champ de vecteurs de la même façon que nous en avons traité jusqu'à présent.



**Figure 2.18** Champ de vecteurs d'expansion. Comme le vecteur, l'opérateur de dérivée partielle indique la direction locale d'une transformation globale et permet l'expression neuronale d'un champ de vecteurs.

En physique, dans sa forme la plus générale, sans discuter de mouvement ni de dérivée partielle, un vecteur indique une force selon une amplitude et une orientation. L'expression physique d'un champ de vecteurs est alors celle d'un champ de forces. La physique moderne indique trois types de forces fondamentales, à partir desquelles peuvent être dérivées toutes les autres : forces électromagnétiques, forces nucléaires (fortes et faibles) et forces gravitationnelles (Reitz et Milford, 1967). La totalité des phénomènes rencontrés au quotidien, à l'échelle humaine, se résument à l'action des forces électromagnétiques. L'électricité et le magnétisme sont le produit l'un de l'autre, ils sont deux aspects (une

dualité) du même phénomène électromagnétique : un champ électrique induit un champ magnétique et vice versa.

En considérant d'abord que la lumière est un phénomène électromagnétique, il ne faudrait surtout pas oublier ces notions dans l'étude des cellules vivantes et particulièrement en ce qui nous concerne, dans l'étude des neurones du cortex visuel. Le courant de charges électriques qui se propage le long des chaînes de neurones se fait selon les lois électromagnétiques (McFadden, 2002; Malmivuo et Plonsey, 1995). L'activation d'un champ de vecteurs sur le cortex visuel est en fait l'activation d'un champ de forces électromagnétiques. Lorsqu'on *mesure* la sensibilité du tissu neuronal, on mesure l'action d'un courant électrique et les forces électromagnétiques qu'il engendre.

L'activité cérébrale induit les champs électromagnétiques nécessaires à l'activation des scanners médicaux. Par contre, au niveau des processus de la mémoire et de la transmission neuronale, l'importance des forces électromagnétiques générées par le courant électrique du cortex demeure encore bien controversée (Pockett, 2002). Jusqu'à présent, les modèles de représentation des mémoires neuronales ont limité celles-ci à des décharges électriques (champs statiques), sans y inclure les forces fondamentales de physique qui surviennent en présence de champs électriques et de courant électrique. Pourtant, l'analyse dynamique de la transmission sur le cortex indique qu'elle se comporte comme un courant en temps continu (Treves, Rolls et Tovee, 1996). De nombreuses études indiquent que les champs électriques et magnétiques ont un rôle fonctionnel sur les mécanismes de l'activité corticale (voir McFadden, 2002 pour une revue).

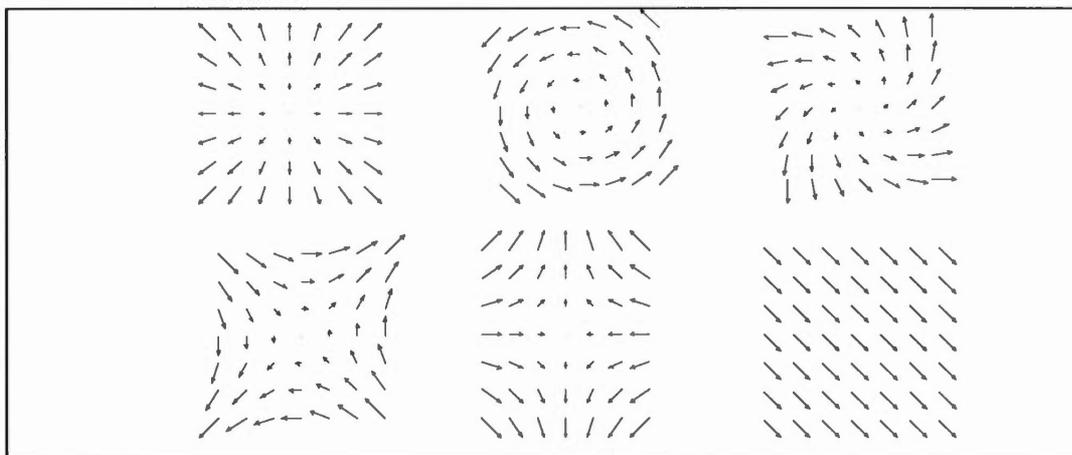
L'hésitation à concevoir l'importance des forces électriques et magnétiques générées par le courant de décharge neuronale au niveau des processus de perception provient probablement de la dépendance des études neurophysiologiques sur la mesure locale. Une telle mesure ne prend pas en considération que le courant électrique est massivement distribué. La vague d'activité d'une large population de neurones peut potentiellement engendrer des *forces de couplage* et de *forces de torsion* importantes entre les champs actifs

sur le cortex. Les forces de couplage et de torsion expriment le transfert de forces qui a lieu entre des champs qui partagent le même espace.

Nous faisons usage de cette notion des champs de vecteurs, comme des champs de forces électriques et magnétiques, dans nos démonstrations au quatrième chapitre. Nous y présentons une façon dont les champs générés par la transformation des patrons de lumière imposent des forces l'un sur l'autre.

Soulignons ici une autre façon de concevoir la force des champs de vecteurs. La force d'un champ pourrait très bien être *perceptive*. C'est-à-dire, à défaut d'être physiquement actifs en termes de charges et de courants électriques, les vecteurs pourraient simplement représenter des forces perceptives, qui comme une force *physique* au sens classique, possèdent une amplitude, une direction et un point d'application. Un psychologue gestaltiste, Lewin (1936), suggère, dans une théorie sur la *psychologie géométrique*, la notion de *vecteurs psychologiques*. Après tout, ne percevons-nous pas les forces et les lois de la physique à travers le cortex? Si la perception est un équilibre de forces, comment faire la différence entre une force physique mesurée entre les neurones et une force perceptive; la perception d'une force? Notons pour l'instant que, de façon générale, l'étude des phénomènes perceptifs par l'organisation de forces est typique de la philosophie gestaltiste (Brown et Volt, 1937; Orbison, 1939).

Indépendamment de la nature physique de l'activité neuronale, en cohérence avec la théorie sur le *flux optique* et celle de Hoffman (1966), des études neurophysiologiques soulignent la présence d'une sensibilité particulière sur deux régions différentes du cortex visuel (Duffy et Wurtz, 1991; Orban et al, 1992; Gallant et al, 1993, 1996). Ces études indiquent que le cortex visuel moteur (MST) et la région du cortex visuel primaire (V4) possèdent une sensibilité aux champs de vecteurs élémentaires, lesquels expriment la transformation des patrons de lumière générée lors du mouvement. Spécifiquement, la sensibilité de ces neurones est décrite par la transformation des patrons de lumière causée par des mouvements de translation, de rotation, d'expansion/contraction, d'hyperbolisme ainsi que leurs combinaisons linéaires.



**Figure 2.19** Exemple de sensibilité (champs de vecteurs) observée sur le cortex visuel.

La région V4 du cortex visuel constitue une zone d'embranchement, ou de conjonction, des aires visuelles depuis la rétine. Aussi, la région V4 est l'entrée principale du cortex visuel temporal, où l'on croit observer une activité invariante en présence d'objets visuels. Elle constitue, selon les données neurophysiologiques, une zone neuronale maîtresse où le flot des représentations visuelles y trouve chemin depuis la rétine (Pasupathy et Connor, 1999; Rolls, 2002). La région MST du cortex visuel moteur est quant à elle considérée comme essentielle à la perception des mouvements relatifs entre la scène visuelle et l'observateur (Rolls, 2002). Notons aussi que la région V4 et la région MST établissent entre elles des liens synaptiques directs (Rolls, 2002).

Nous croyons que cette évidente similarité entre la sensibilité de la région V4 et celle de la région MST indique que la forme est traitée par des principes similaires ou même complémentaires à ceux du mouvement : la représentation neuronale de la forme visuelle semble se faire par une projection sur les axes du mouvement, et non pas par une décomposition en *arêtes visuelles*, tel qu'indiqué par l'approche *computationale*.

Non loin de la théorie d'Hoffman (1966) sur les groupes de transformations, le mouvement et la mémorisation de la forme visuelle seraient donc fondamentalement reliés, complémentaires, et de manière beaucoup plus profonde que ce qu'indiquent les théories classiques sur la perception visuelle.

## 2.8 Discussion

Ce chapitre a permis de suggérer que le rôle du cortex visuel est celui de l'expression de la transformation des patrons de lumière causée par le mouvement. En ce sens, la mémoire visuelle est de nature holistique et ses processus peuvent s'exprimer par des opérations de géométrie différentielle. Ces opérations *tissent* dans une même transformation (opérateur de dérivée) le passage du local à la forme globale. Les champs de vecteurs offrent l'expression de la saillance et de l'organisation holistique des formes si bien suggérées par la psychologie gestaltiste. De plus, les champs de vecteurs élémentaires semblent constituer les *contraintes organisationnelles* du tissu neuronal et apportent l'invariance et la prégnance des formes dans la transformation.

Les études neurophysiologiques semblent appuyer les théories sur la perception visuelle faisant usage de la notion de champ de vecteurs. Entre autres, quelques études soulignent implicitement un mécanisme complémentaire, à tout le moins similaire, entre la mémorisation des formes et la perception du mouvement, toutes deux exprimables par les mêmes champs de vecteurs. Le fait que ces derniers décrivent la transformation des patrons de lumière causée par le mouvement, et qu'ils soient observés sur une région du cortex visuel qui est nécessaire à la perception des formes semble très révélateur.

Également, nous avons souligné qu'il importe de prendre note de la nature physique de la lumière et de l'activité neuronale et de ne pas en faire uniquement des abstractions mathématiques. En ce sens, les champs de vecteurs sont traités comme des *champs de forces* : un vecteur géométrique exprime l'application d'une force sur un point dans l'espace-temps. De nature gestaltiste, cette façon de concevoir la perception se trouve au cœur de nos démonstrations mathématiques lors des prochains chapitres.

En particulier, au quatrième chapitre, nous étudions les propriétés de *forces invariantes* des champs de vecteurs en relation avec la mémoire visuelle. Nous n'offrons cependant aucune tentative de prolongement de la théorie sur les groupes de transformations.

En revanche, nous présentons une autre façon de faire usage des propriétés spéciales des champs de vecteurs élémentaires. Nous y étudions les propriétés d'intégration invariantes qui émergent de neurones dont la matrice dendritique est celle des champs de vecteurs élémentaires. Nous donnons du même coup des pistes sur le rôle de ces champs de vecteurs dans plusieurs processus de mémoire visuelle.

Mais d'abord, au prochain chapitre, nous poursuivons notre argumentation sur l'importance de la transformation dans la formation et le rappel des mémoires visuelles. En reprenant l'essentiel des deux premiers chapitres, nous regroupons les idées de plusieurs auteurs sur l'importance de la transformation. Il est suggéré que les patrons de lumière doivent sans cesse se transformer, sans quoi l'activité neuronale et la perception s'estompent instantanément. Or, une étude sur la stabilisation de l'image rétinienne suggère cela de façon très explicite en indiquant que dans l'immobilité parfaite, un objet est invisible.

Également, nous y présentons un modèle de champ de vecteurs à résolutions multiples ainsi qu'une simulation numérique. L'application de transformations de géométrie différentielle sur un patron de lumière, comme le ferait le cortex visuel, nécessite un continuum de résolutions. Ce modèle permettra alors de valider l'application de transformations de géométrie différentielle sur le cortex visuel. Le modèle permet du même coup de souligner d'autres propriétés d'un continuum de résolutions.

## CHAPITRE III

### L'IMPORTANCE DE LA TRANSFORMATION : UN MODÈLE DE TRANSFORMATION CONTINUE

#### 3.1 Introduction

La réflexion des deux premiers chapitres est motivée par des théories qui stipulent que les opérations de la mémoire visuelle reposent spécifiquement sur la transformation des patrons de lumière et donc sur le mouvement des formes. Ces théories s'accordent avec l'observation de champs de vecteurs sur des régions du cortex qui sont propres à la mémoire visuelle. La présence de ces champs témoigne directement du fait que c'est le mouvement des objets, leur transformation, et non pas leur état statique, qui forme les opérations de la mémoire.

D'autres avenues théoriques mènent aussi à croire que la transformation est indispensable à la perception. Pour cause, dans ce chapitre, nous appuyons davantage la nécessité de considérer la transformation des patrons de lumière comme l'espace fonctionnel de la mémoire visuelle.

Inspiré par plusieurs théoriciens qui ont marqué leur domaine, nous considérons comme évident le fait que la transformation de la forme visuelle ne doit pas être perçue comme un obstacle aux opérations de la mémoire, mais qu'elle est plutôt nécessaire à celles-ci. En particulier, une étude démontre que l'adaptation neuronale (*fatigue* neuronale) constitue la pierre angulaire du fonctionnement du cortex visuel et que l'absence de transformation engendre un effacement quasi instantané de la vision (Copolla et Purves,

1996). Il en découle que l'activation du cortex visuel dépend directement de la transformation des patrons de lumière.

Conséquemment, nous posons un simple principe :

*Un imprimé neuronal a lieu si et seulement si il y a présence d'une transformation. Et puisque la transformation d'un patron de lumière se traduit par un champ de vecteurs, ce sont des champs de vecteurs qui sont imprimés sur le cortex visuel.*

Par ce principe, nous indiquons quelles sont les propriétés des transformations qui s'impriment sur le cortex. En particulier, la transformation linéaire des champs vecteurs élémentaires leur confère des propriétés invariantes qui sont de première nécessité pour toute mémoire visuelle.

Pour faire usage de ces propriétés invariantes, nous faisons appel à la géométrie différentielle. Nous savons que cette dernière nécessite la présence d'un espace parfaitement continu. Dans ces conditions, pour agir comme un opérateur de géométrie différentielle, le cortex visuel effectue des dérivées partielles selon un continuum d'échelles de résolution, tel que présenté au deuxième chapitre. En accord avec les opérations du cortex, nous présentons un modèle de dérivées partielles à résolutions multiples. Ce modèle confirme que les dérivées partielles d'un patron de lumière demeurent continues et invariantes le long de l'axe de résolution, et donc que le cortex visuel est effectivement un opérateur de géométrie différentielle.

### 3.2 L'importance de la transformation

Plusieurs théoriciens ont affirmé l'importance du rôle que joue la transformation dans notre perception. Cependant, il demeure que les modèles classiques de la perception visuelle considèrent la transformation comme un obstacle aux opérations de la mémoire.

Pourtant, un des auteurs les plus influents du dernier siècle, le neuropsychologue Donald Hebb (1949), a bien suggéré dans sa théorie sur l'organisation des ensembles cellulaires que la perception repose sur la transformation. Les mémoires visuelles sont selon lui formées par l'apprentissage de séquences de transformations entre les ensembles neuronaux : Hebb suggère que le balayage rapide des yeux entre les régions critiques d'une forme (les *coins*) engendre l'association de séquences temporelles entre les boucles de résonance du système moteur et celles du système visuel. La mémoire de la forme est selon lui engendrée par la réactivation (*l'imagerie*) de cette séquence.

Gibson (1968) a certainement beaucoup insisté sur la notion de transformation dans la perception visuelle. Selon lui, il importe de ne pas discuter d'une image statique dans la description du monde visuel. Il perçoit ce dernier comme une lumière ambiante dans laquelle nous baignons et que nous *découvrons*, tel le visionnement d'un film, par l'ensemble de nos mouvements. Notre déplacement ainsi que les vibrations et mouvements de la rétine déplacent sans cesse celle-ci en relation avec la lumière ambiante. Dans son approche, la transformation de la *texture de lumière* sur la rétine causée par le défilement des images, contient l'information nécessaire à l'identification des formes. Ce n'est pas une image fixe qui est envoyée au cortex, mais un *film*, une transformation.

La théorie sur les groupes de transformations continues de la perception visuelle (Hoffman, 1966) apporte un appui mathématique aux intuitions de Gibson et aux théories gestaltistes. Selon Hoffman, notre mouvement dans l'environnement engendre l'action de trois groupes de transformations primitives (champs de vecteurs). Ces champs de vecteurs ont une dualité : en assurant l'intégration invariante des courbures visuelles, ils assurent la présence de champs de forces contraignantes qui permettent aux formes de survivre aux déformations. Précurseurs d'Hoffman, les théoriciens gestaltistes ont donné une description de la stabilité des perceptions visuelles par le dynamisme entre des *forces de cohésion* et des *forces de résistance* : l'équilibre entre ces deux forces donne une configuration perceptuelle stable (Borwn et Vol, 1937; Orbison, 1939).

Le mathématicien Henri Poincaré, auteur de nombreux traités sur la géométrie différentielle et les groupes de transformations, avait déjà suggéré, tout comme l'a fait Hebb, que l'activation du système moteur, et donc le mouvement, est intrinsèquement relié à nos perceptions visuelles (Bruter, 1974).

Platt (1960), dans un article innovateur, souligne comment les mouvements oculaires engendrent ce qu'il nomme une *géométrie fonctionnelle*. Étant donné l'irrégularité de la mosaïque de récepteurs sur la rétine, il stipule que seul le mouvement des yeux permet de conclure sur la forme d'une chose. Comme Hebb, il soupçonne un rôle indispensable du système moteur dans nos perceptions visuelles. Simplement, il dira que si un mouvement rectiligne des yeux ne change pas la lumière, alors une ligne droite est en présence. De même, si un mouvement circulaire ne change pas la lumière, il s'agit d'un cercle.

Bruter (1974) suggère que les mouvements oculaires sont imprimés le long de *chaînes de neurones* sur le tissu du cortex visuel. L'anticipation d'un mouvement oculaire engendre la réactivation complète de ces chaînes, et donc la visualisation des trajectoires associées.

Les études neurophysiologiques suggèrent que les boucles de résonance du cortex ont comme rôle la reconstruction de séquences temporelles (Rao et Sejnowski, 2001). Ces études indiquent que la plasticité différentielle des neurones du cortex se prête parfaitement à la prédiction de séquences temporelle dans une fenêtre aussi petite que quelques millièmes de secondes.

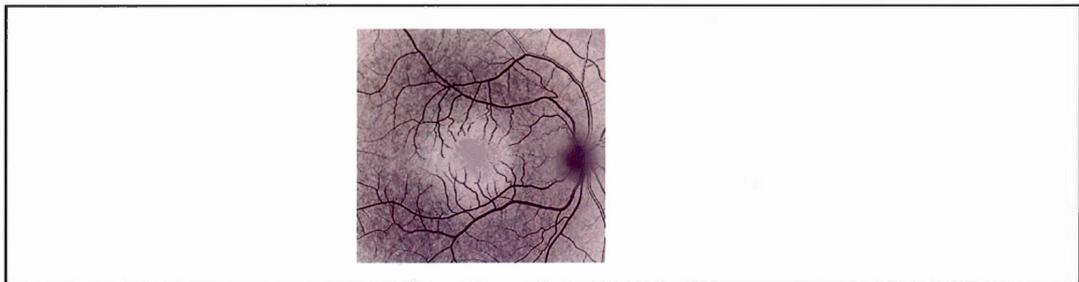
Malsburg suggère dans sa théorie que les mémoires sont le résultat de l'oscillation temporelle des décharges d'un ensemble neuronal en résonance avec la temporalité des stimulations (Malsburg, 1981).

Dans une théorie moins répandue, Blum (1973) suggère que la réfraction du cristallin engendre un retard dans la propagation des ondes lumineuses à chaque point de la rétine. À l'instar des ondulations circulaires que crée la pluie dans une flaque d'eau, la propagation des

ondes lumineuses à l'intérieur de l'œil engendre un équilibre dynamique propre à l'objet visuel.

Un autre domaine expérimental souligne aussi le rôle indispensable de la transformation dans nos perceptions visuelles. Depuis le milieu du siècle dernier, plusieurs chercheurs se sont penchés sur les effets que peut avoir la *stabilisation de l'image rétinienne* (voir Martinez et al, 2004 pour une revue). Les différentes techniques de stabilisation ont longtemps consisté en des jeux de miroirs et de lentilles attachés à l'œil, permettant aux mouvements des yeux et de la tête d'être annulés; or ceci a pour effet de rendre immobile la lumière sur la rétine. Au cours des années 1950-60, les premières études ont rapporté que la perception visuelle avait tendance à se détériorer ou même à *disparaître* de manière soudaine après quelques secondes de stabilisation de l'image. Cependant, des études plus récentes soulignent l'inefficacité des premières méthodes de stabilisation, en indiquant leur difficulté à maintenir une résonance parfaite entre les images présentées et le mouvement des yeux. Il est maintenant clair qu'une image parfaitement stabilisée sur la rétine se détériore et tend à *disparaître* en deçà de quelques millièmes de secondes (Coppola et Purves, 1996).

En effet, une étude a forcé une reconsidération totale de la dynamique sur l'adaptation neuronale et la perception qui en résulte suite à la stabilisation de l'image rétinienne. Coppola et Purves (1996) ont démontré à l'aide d'un laser que les images entoptiques (figure 3.1) tendent à apparaître et à disparaître dans une fenêtre temporelle de quelques millièmes de secondes. Les images entoptiques sont les ombrages créés par les vaisseaux sanguins qui se trouvent à l'intérieur de l'œil, devant la rétine.



**Figure 3.1** Images entoptiques : l'ombrage laissé par les vaisseaux sanguins devant la rétine est normalement invisible en raison du fait que leur proximité cause une adaptation neuronale constante.

Ces vaisseaux sanguins (arbre de Purkinje) suivent parfaitement les mouvements et les vibrations oculaires. Ainsi, leurs ombres créent une adaptation neuronale permanente, les rendant alors invisibles. Toutefois, il est possible de modifier l'angle d'incidence de la lumière et ainsi déplacer l'ombrage qu'elles créent sur la rétine. Si cela est fait de manière suffisamment rapide, l'ombrage des vaisseaux sanguins devient temporairement visible. Coppola et Purves démontrent que les ombres rendus visibles par le mouvement d'un laser tendent à apparaître et disparaître en deçà de 80 millièmes de seconde. L'étude suggère que ce phénomène de disparition des images est une fonction du nombre de nouveaux récepteurs stimulés par unité de temps. Autrement dit, cette étude suggère que le maintien de la vision est une fonction de la vitesse et de l'étendue des transformations de lumière qui frappent la rétine. Les structures entoptiques étant extrêmement près de la rétine, l'étendue de leur ombrage est très petite. L'angle d'incidence du laser doit alors être très prononcé et son mouvement extrêmement rapide afin qu'un nombre suffisant de nouveaux récepteurs soient momentanément stimulés pour engendrer l'apparition des images entoptiques.

Les mouvements de l'œil sont trop lents pour reproduire les effets du laser et ainsi faire apparaître et disparaître l'image des structures entoptiques. Heureusement, car, s'ils étaient assez rapides, ils feraient en sorte que nous verrions constamment apparaître et disparaître les vaisseaux sanguins qui se trouvent devant la rétine. Qu'en est-il de la vision *normale*, créée par la lumière des objets externes à l'œil?

Toute proportion gardée, la source de lumière qui frappe la rétine depuis l'extérieur de l'œil est très loin par rapport aux vaisseaux sanguins qui se trouvent collés sur la rétine. Comme le souligne l'étude de Coppola et Purves, pour une source de lumière loin de la rétine, un très petit mouvement oculaire engendre tout de même un grand balayage de la lumière sur la rétine. Ainsi, le mouvement et la vibration des yeux assurent une transformation de l'image rétinienne suffisamment importante et rapide pour prévenir la disparition des objets externes à l'œil lors d'une vision normale.

Notons que même dans le cas où les mouvements oculaires ne parviendraient pas à constamment éviter l'adaptation neuronale et l'effacement de la vision, il se pourrait très bien

que nous n'en soyons jamais conscients. En effet, les neurones du cortex ont la propriété d'*apprendre* et de reproduire la séquence temporelle d'une transformation. Ainsi, même lorsqu'une adaptation neuronale survient, il se peut que les neurones du cortex parviennent instantanément à reconstruire l'information visuelle manquante qui suivrait normalement dans les prochaines millisecondes. Quelques millièmes de seconde plus tard, le mouvement des yeux élimine l'adaptation neuronale et la perception se poursuit sans que cette compensation soit même venue à notre conscience.

Les arguments qui précèdent ne font que rajouter à notre discours, lequel veut que la transformation soit l'eau et le pain de tout système perceptif. Dans un simple effort d'introspection, il paraît évident que le mouvement des yeux, le mouvement de notre tête, de notre corps ainsi que le mouvement des objets sont toujours présents ; en fixant un objet, nos yeux bougent (*vibrent*) même si nous n'en sommes pas conscients. C'est certainement faire fausse route de ne pas pleinement considérer le mouvement dans toute approche théorique sur la mémoire visuelle. L'étude de Coppola et Purves indique de façon assez radicale l'importance que joue la transformation des patrons de lumière dans notre perception du monde visuel.

L'étude de Coppola et Purves motive aussi le principe suivant : la mémorisation des patrons de lumière ne peut avoir lieu que si et seulement si une transformation est en présence. La question est alors de déterminer quelles sont les propriétés des transformations apprises par le cortex. La section qui suit illustre ces propriétés.

### 3.3 Transformation linéaire des champs de vecteurs élémentaires

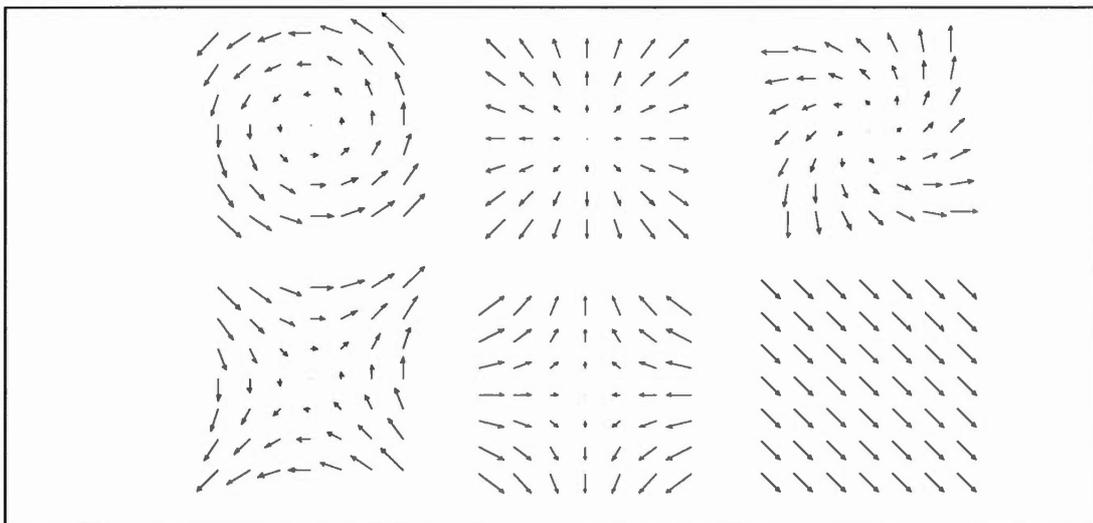
Comme le suggère Dodwell (1983), les transformations globales de la texture de la lumière sur la rétine, causées par le mouvement relatif entre l'œil et la lumière ambiante, ont une profonde importance écologique et il est naturel de croire que leur présence sur le cortex découle de pressions évolutives. Dans un même ordre d'idées, nous indiquons ci-dessous que

la structure linéaire des champs de vecteurs élémentaires mène inévitablement à l'apprentissage de forces invariantes.

Spécifiquement, les champs de vecteurs élémentaires décrivent les transformations linéaires des patrons de lumière générées par les mouvements relatifs entre l'œil et la lumière ambiante et ils s'expriment selon

$$W = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \xi y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (11)$$

L'équation 11 indique une augmentation linéaire de l'amplitude des vecteurs de vitesse depuis le centre de la transformation. Visuellement, ceci s'observe par des vecteurs de plus en plus longs depuis le centre du champ. Selon les valeurs accordées à la matrice de coefficients, un continuum de champs polaires, hyperboliques et cartésiens est exprimé.



**Figure 3.2** Un différentiel linéaire de vitesse depuis le centre de la transformation caractérise les champs de vecteurs élémentaires.

Selon le modèle classique du neurone intégrateur, l'activité neuronale est donnée par  $y = f(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})$ , c'est-à-dire une fonction du produit scalaire du vecteur de poids synaptiques et du vecteur de stimulations. Cependant, les études sur l'adaptation (*fatigue*) neuronale nous permettent de considérer une alternative au modèle classique dans laquelle l'activité neuronale est donnée par  $y = f(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t})$ , soit une fonction du produit scalaire du vecteur de poids synaptiques avec le vecteur de dérivée temporelle des stimulations.

Ainsi, par les principes de plasticité différentielle (chap. 1, équations 1-5), les changements synaptiques sont alors de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{w} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$$

Si la transformation  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$  atteint un plateau (maximum ou minimum), on a  $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$  et donc aucun changement synaptique. Si la transformation des patrons est nulle ( $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{0}$ ), on a une activité neuronale nulle et, évidemment, aucun changement synaptique. Ceci formalise notre principe selon lequel la mémorisation des patrons de lumière ne peut avoir lieu que si et seulement si une transformation est présente.

Les transformations globales du plan visuel, telles que celles décrites par les champs de vecteurs sur la figure 3.2, sont caractérisées par une variation linéaire de l'amplitude des vecteurs de vitesse locale. Cette variation linéaire de la vitesse des transformations engendre une variation de l'adaptation neuronale et donc une variation proportionnelle des stimulations  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$ . Dans ce cas, un neurone dont la modification synaptique est donnée par

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$$

renforcera ses liens synaptiques avec les opérateurs de dérivée partielle qui correspondent à la direction et à l'amplitude des vecteurs du champ. La transformation globale du plan visuel se trouve alors *imprimée* sur ses synapses.

Ce qui découle aussi de la linéarité des champs de vecteurs élémentaires, c'est l'expression d'une force rotative et d'une expansion invariante. En effet, ces forces sont une fonction de la matrice de coefficients (équation 11) et ne dépendent pas des coordonnées globales dans le plan visuel. L'intégration de ces forces par le cortex est une propriété très importante que nous développons au prochain chapitre. Entre autres, cela nous permet d'utiliser la géométrie différentielle comme modèle des opérations de la mémoire visuelle.

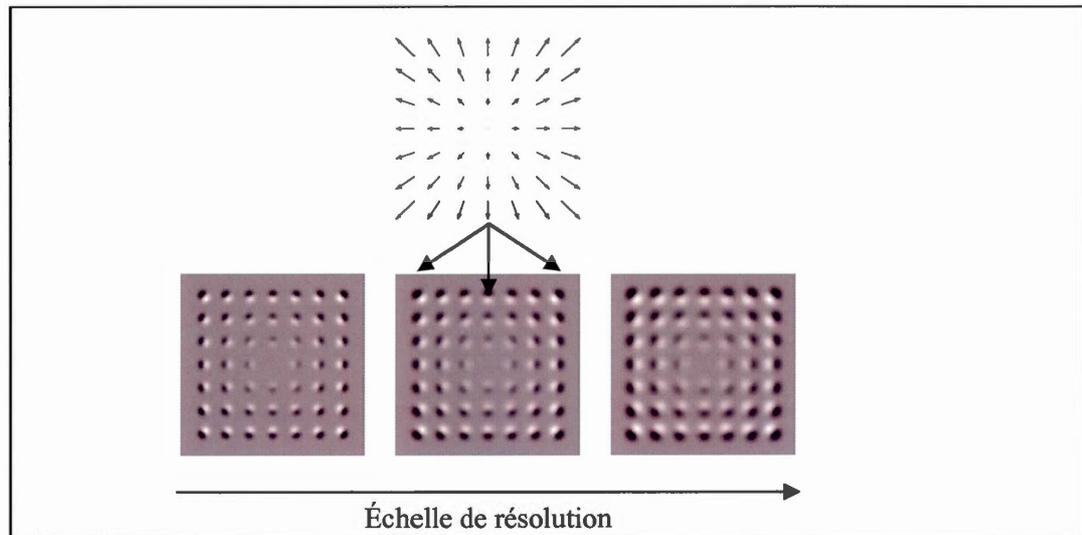
Pour faire usage de la géométrie différentielle comme modèle du cortex visuel, on sait qu'il est nécessaire que les dérivées partielles puissent s'exprimer selon un continuum de résolutions. Sans cela, la continuité de l'espace et les propriétés mathématiques invariantes qui en découlent sont perdues.

Pour cause, nous présentons ci-dessous un modèle et une simulation numérique qui permettent de confirmer que les opérations du cortex visuel sont bien celles de la géométrie différentielle. Du même coup, le modèle met en valeur les propriétés d'un continuum de résolutions.

### 3.4 Champs de vecteurs à résolution multiple

Le tissu d'opérateurs de dérivée partielle qui tapisse le cortex présente tout le substrat nécessaire à l'expression de champs de vecteurs. Toutefois, l'opérateur de dérivée partielle, en tant qu'opérateur physique, possède une caractéristique supplémentaire au vecteur mathématique : l'échelle de résolution.

La figure 3.3 illustre l'expression d'un champ d'expansion selon trois échelles de résolution.



**Figure 3.3** Champ de vecteurs d'expansion et son expression neuronale selon trois échelles de résolution.

Comme nous en avons fait état au deuxième chapitre, théoriquement, la structure différentielle d'un phénomène doit être indépendante de l'échelle des paramètres : le signal d'amplitude des dérivées partielles le long du continuum de résolutions doit demeurer indépendant de l'échelle de l'image. Le modèle présenté dans cette section permet de démontrer cela.

Aussi, nous illustrons par ce modèle qu'une représentation des dérivées partielles selon plusieurs échelles de résolutions assure une représentation de la position relative des structures dans l'image. En effet, les opérateurs à plus grande échelle de résolution *voient plus loin* dans l'image, ce qui permet de représenter une information plus riche de l'image. La richesse d'une représentation des images selon plusieurs résolutions a déjà été suggérée par des mesures neurophysiologiques et psychophysiques selon lesquelles quatre canaux de fréquences permettent à l'œil humain de faire la discrimination entre des patrons de stimulation sinusoïdaux (Richards et Polit, 1974; Wilson et Giese, 1977; Wilson et Bergen, 1979; Grimson, 1981).

Notre modèle fait usage de la notion d'échelle logarithmique des perceptions. Dans le cadre des perceptions visuelles, quelques auteurs ont déjà offert une explication sur les mécanismes neuronaux d'une échelle logarithmique (Maffei et Fiorentini, 1977; Cavanagh, 1978, Schwartz, 1977; Chaikin et Weiman, 1979). Notamment un modèle présenté par Cavanagh (1985) tire profit de la présence d'axes de sensibilité locale selon deux dimensions : un continuum d'échelle logarithmique de fréquences locales et un continuum d'orientations de fréquences locales. Spécifiquement, le modèle de Cavanagh permet de transformer toute combinaison de translations, rotations et d'expansions/contractions de l'image en de simples décalages linéaires pouvant ensuite être éliminés par une décomposition spectrale globale.

Notre modèle place ce type d'explication dans le contexte de champs de vecteurs à résolution et orientation multiples. Bien qu'il offre une explication sur des mécanismes de mémoire visuelle, le modèle se veut d'abord une démonstration sur la validité d'opérations mathématiques de dérivée partielle sur une image, c'est-à-dire une structure différentielle qui ne dépend pas du choix d'échelle de résolution.

Les études psychophysiques indiquent que l'échelle des perceptions visuelles suit une échelle logarithmique (loi de Weber ou loi de Fechner). Ceci implique qu'une multiplication de l'intensité d'une stimulation est traduite par une simple addition au niveau des sensations. Autrement dit, la sensation de différence entre un objet d'un mètre carré et un objet de 10 mètres carrés est la même qu'entre un objet de 100 mètres carrés et un objet de 1000 mètres carrés. Mathématiquement, ceci découle de la simple relation

$$\text{Log}(ax) = \text{Log}(x) + \text{Log}(a).$$

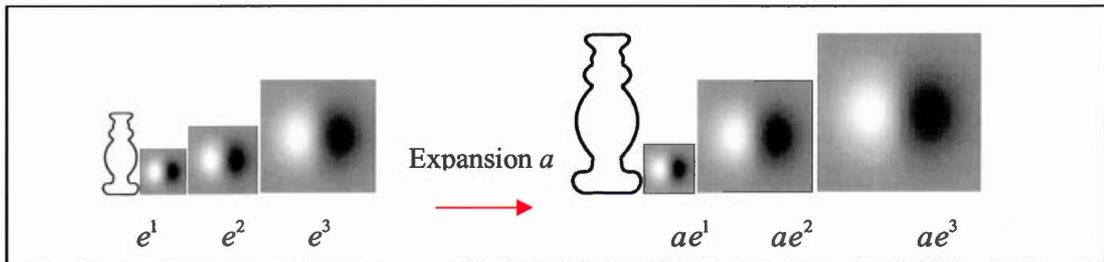
En supposant ce qui semble difficile à nier, c'est-à-dire que la perception découle de l'activité du tissu neuronal, comment alors l'activité neuronale peut-elle suivre une échelle logarithmique ? Dans le cas de l'opérateur de dérivée partielle qui sert de modèle aux

neurones du cortex visuel, la réponse est simple. L'opérateur de dérivée partielle s'exprime par une exponentielle de type

$$\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{(n-k)}} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \right], \quad 0 \leq k \leq n \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

où  $t$  indique l'échelle de résolution.

Selon l'échelle d'une forme visuelle, les dérivées partielles (le gradient) de son contour s'expriment à une résolution propre à l'échelle de la forme. Une expansion de la forme résulte alors en une expansion des échelles de dérivées partielles qui suivent son contour. Par exemple, pour une forme visuelle dont le contour est décrit par des dérivées partielles d'échelles  $e^1, e^2$  et  $e^3$ , une expansion par un facteur  $a$  sera alors décrite par des dérivées partielles d'échelles correspondantes :  $ae^1, ae^2$  et  $ae^3$ .

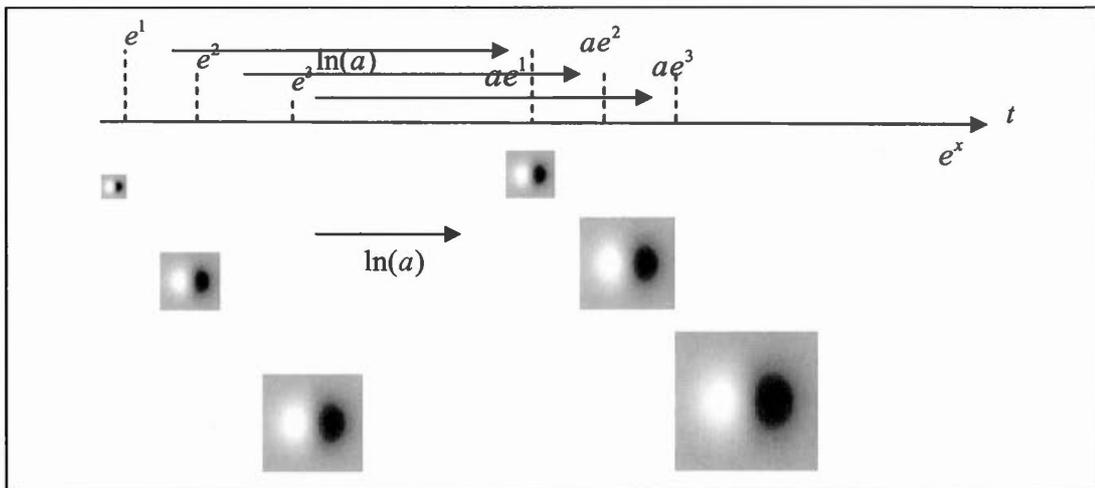


**Figure 3.4** Une expansion  $a$  de l'objet résulte en une expansion  $a$  de l'échelle des dérivées partielles.

Puisque

$$ae^x = e^{\ln(a)} e^x = e^{\ln(a)+x},$$

si l'échelle ( $t$ ) des dérivées partielles suit un axe exponentiel, une expansion  $a$  des échelles se traduit par un décalage linéaire ( $\ln(a)$ ).



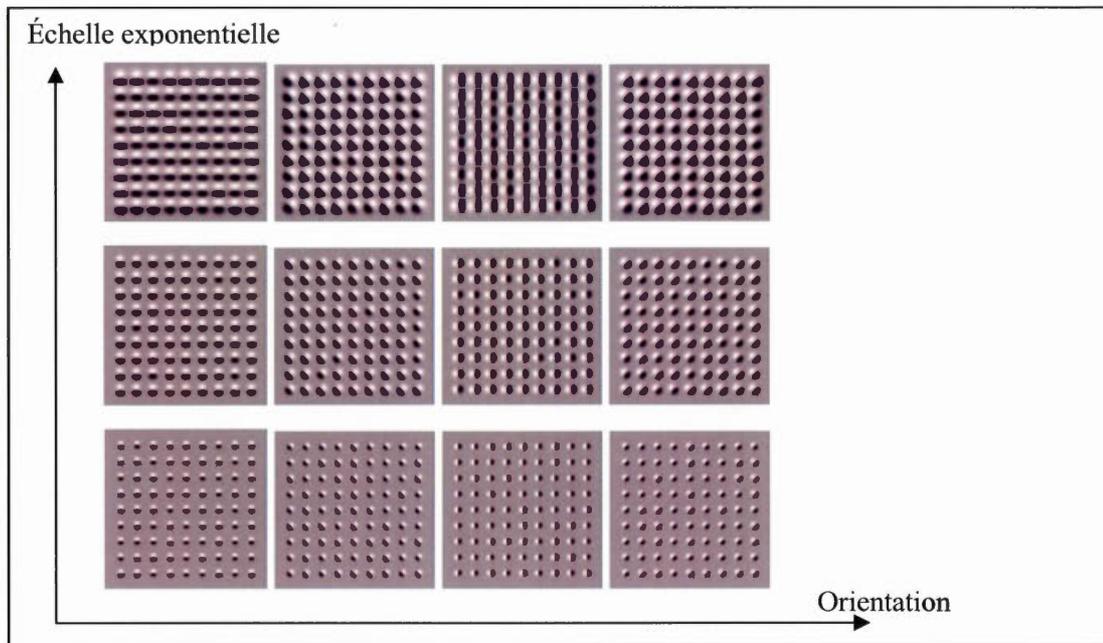
**Figure 3.5** Décalage constant pour une expansion des échelles.

Une telle représentation sur le tissu neuronal transforme donc une expansion/contraction de la forme visuelle en un simple décalage linéaire.

Afin d'illustrer ce principe, prenons un ensemble de champs de vecteurs de translation (groupes cartésiens) selon un continuum d'orientations et un continuum d'échelles, tel qu'illustré par la figure 3.6. Disposons ces champs selon deux axes : un axe d'orientation et un axe d'échelle. Les opérateurs locaux qui composent les champs sont donnés par

$$\cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \right] + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \right],$$

soit la combinaison linéaire des dérivées partielles selon  $x$  et  $y$ , où  $\theta$  indique la direction et  $t$  l'échelle.



**Figure 3.6** Champs de translation selon un axe d'échelle exponentielle et un axe d'orientation.

Spécifiquement, le modèle consiste à prendre le produit scalaire d'une image numérique ( patrons de lumière) ( $I$ ) avec chacun des champs de vecteurs ( $W_{\theta}^t$ ), où  $t$  indique l'échelle du champ et  $\theta$  indique son orientation :

$$a_{\theta}^t = W_{\theta}^t \cdot I$$

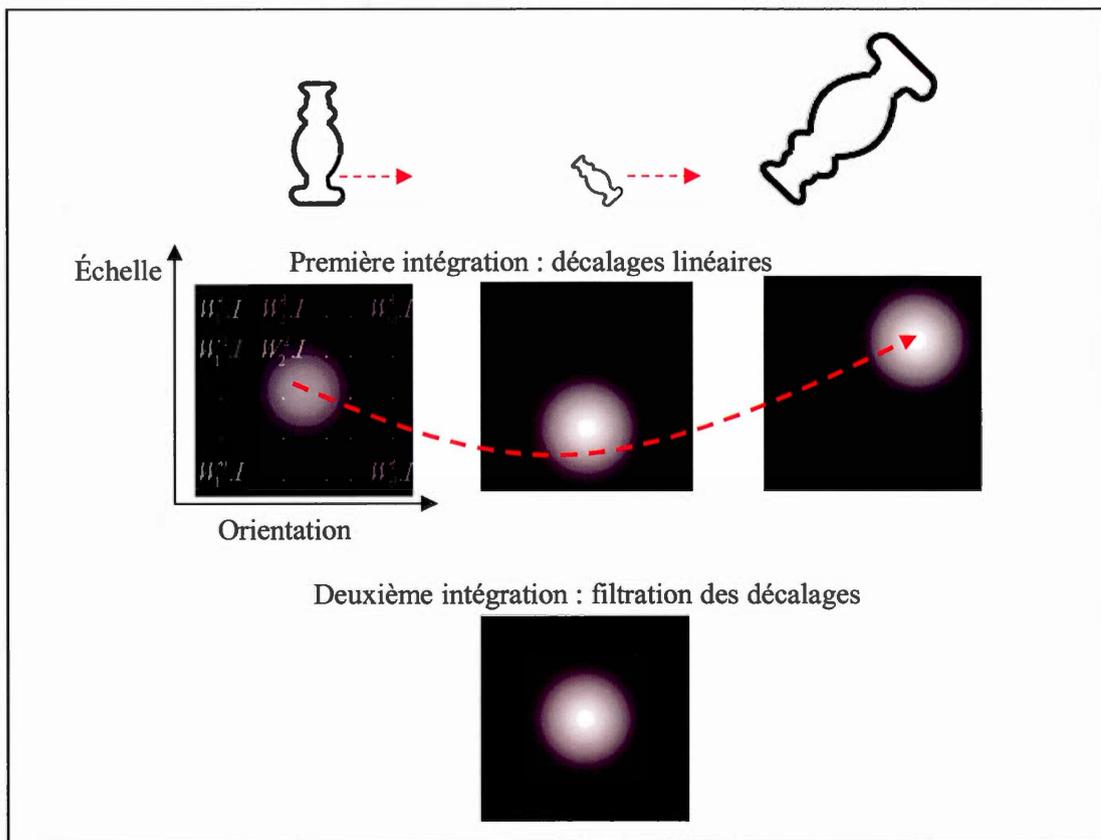
La filtration de chacun des champs (chaque produit scalaire) s'exprime dans *l'image neuronale* (la matrice) illustrée sur la figure 3.7. Les lignes de la matrice correspondent à l'orientation ( $\theta$ ) du champ alors que les colonnes correspondent à l'échelle de résolution ( $t$ ) du champ. Chaque élément ( $\theta, t$ ) de la matrice indique donc la filtration faite par un des champs de vecteurs selon l'orientation et la résolution correspondantes.

$$\text{Image Neuronale} = \begin{bmatrix} W_1^1 \cdot I & W_2^1 \cdot I & \dots & W_m^1 \cdot I \\ W_1^2 \cdot I & W_2^2 \cdot I & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ W_1^n \cdot I & \cdot & \dots & W_\theta^t \cdot I \end{bmatrix}$$

**Figure 3.7** Image neuronale formée de l'intégration des champs de translation sur l'image selon un axe d'orientation et un axe d'échelle exponentielle.

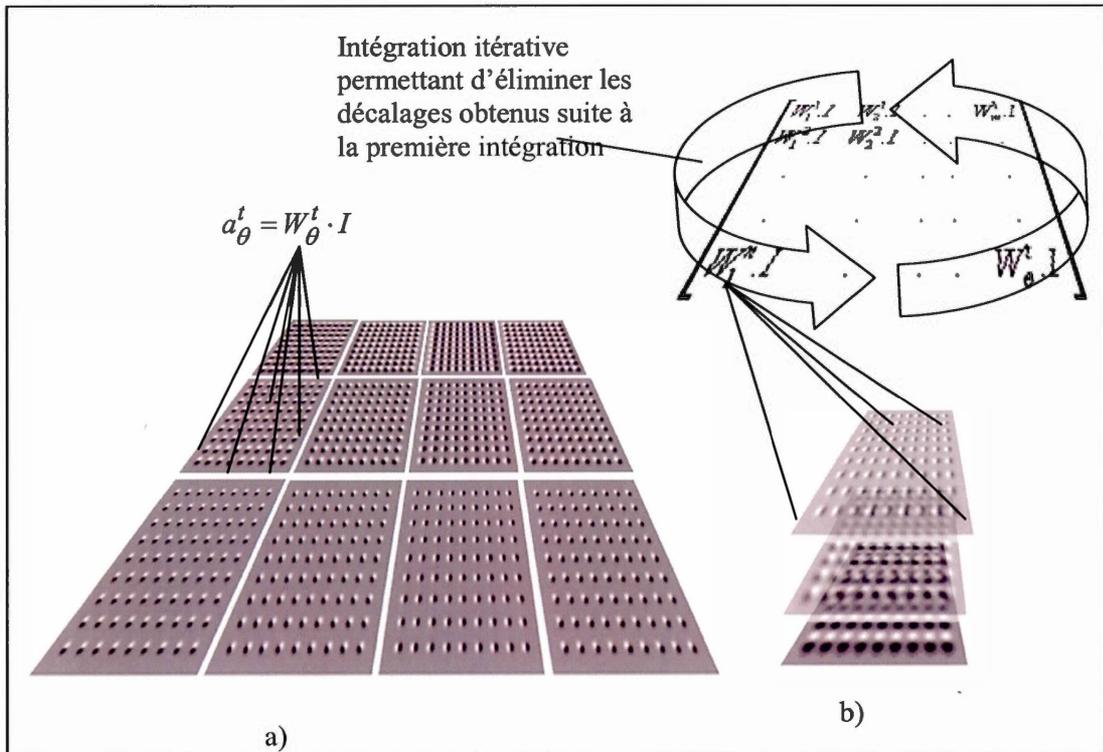
En raison des principes illustrés plus haut, toute transformation de rotation ou d'expansion/contraction de l'image numérique se traduit par des décalages linéaires le long des lignes et colonnes de la matrice (l'image neuronale).

Cette image neuronale est ensuite soumise une seconde fois à la même opération (opération itérative). Autrement dit, l'image neuronale est filtrée de la même façon que l'image rétinienne. La première filtration transpose les transformations du patron de lumière en des décalages linéaires le long des axes d'échelle et d'orientation de l'image neuronale. Et puisque le processus de filtration des champs de translation est lui-même invariant aux décalages linéaires, une deuxième filtration élimine ces décalages. L'image neuronale finale représente alors le rappel d'une mémoire visuelle, invariante aux transformations de rotation, d'échelle et de position.



**Figure 3.8** Une première filtration des champs de translation résulte en des décalages linéaires. Une seconde filtration sur l'image neuronale obtenue (filtration itérative) élimine ces décalages.

La figure 3.9 offre un croquis de l'architecture neuronale permettant une telle filtration. Notons que chacun des champs de la figure 3.9a couvre la totalité du champ visuel et qu'ils sont illustrés côte à côte uniquement pour des raisons de présentation. L'étendue spatiale de ces champs est plutôt superposée comme l'illustre la figure 3.9b.



**Figure 3.9** a) L'activation (intégration) d'un neurone est donnée par le produit scalaire entre un patron de lumière  $I$  et un champ de vecteurs  $W$  d'échelle  $t$  et d'orientation  $\theta$ . b) Les activations sont regroupées dans une même image neuronale selon un axe d'échelle et un axe d'orientation des champs.

Une telle opération neuronale transforme toute combinaison de translation, de rotation et de changement d'échelle du patron de lumière en une image neuronale invariante. Mise à part l'image neuronale invariante, deux résultats importants découlent de ce modèle.

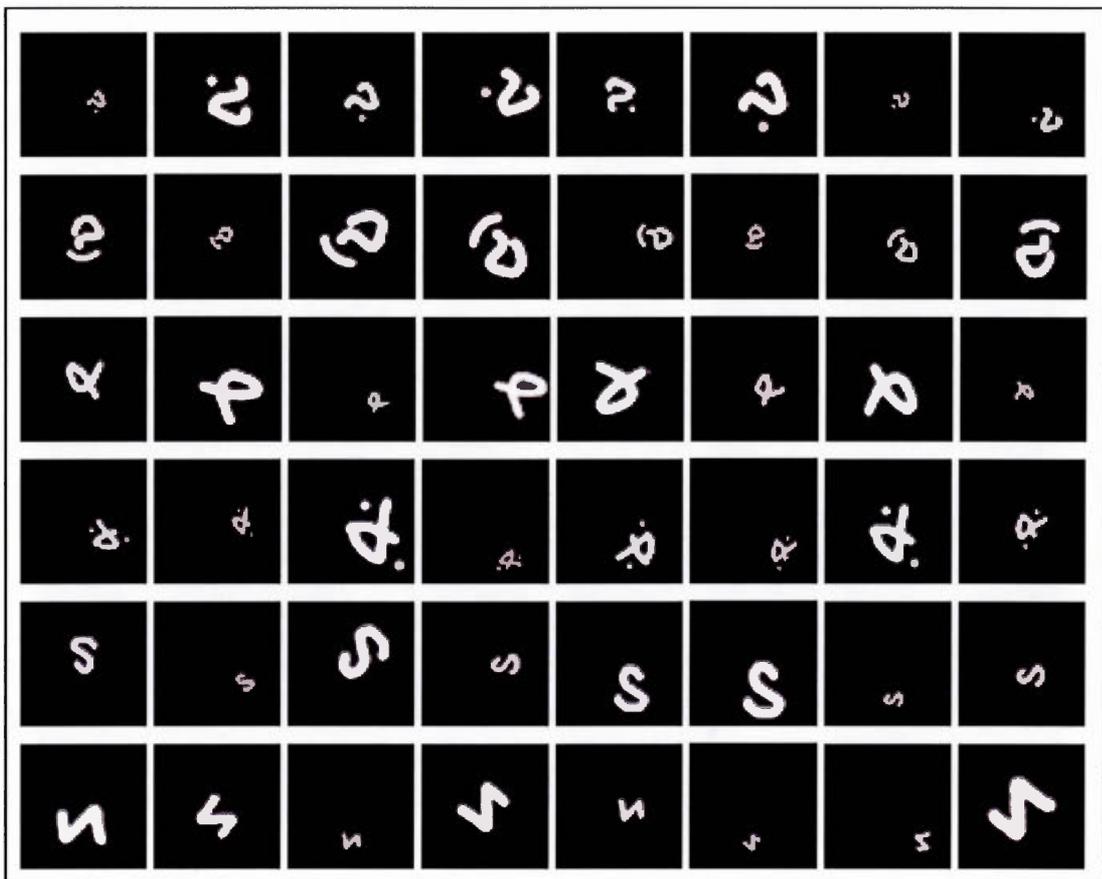
1) Les dérivées partielles le long de l'axe de résolution demeurent continues et invariantes : le signal d'amplitude des dérivées partielles à travers le continuum de résolutions est le même, peu importe l'échelle de l'image. Ceci valide l'application mathématique de dérivée partielle par le cortex visuel.

2) Une représentation selon plusieurs résolutions assure une mémoire riche et spécifique au patron de lumière. La simulation numérique qui suit confirme ces deux énoncés.

### 3.5 Simulation numérique

#### 3.5.1 Méthodologie

Des images numériques de  $256 \times 256$  pixels ayant subi des rotations (45, 90, 135, 180 degrés), des changements d'échelle (50%, 75%, 100%, 125%, 150%) ainsi que des translations aléatoires ont été soumises à la filtration itérative de champs de vecteurs de translation.

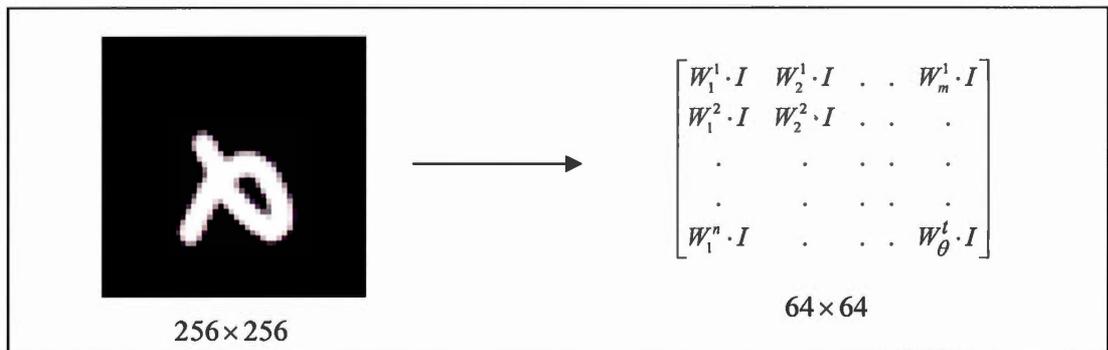


**Figure 3.10** Images ayant subi des combinaisons d'expansion/contraction, de rotation et de translation.

Les champs de vecteurs ( $W_\theta^t$ ) utilisés pour la filtration sont composés d'opérateurs de dérivée partielle

$$\cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \right] + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \right].$$

Ceux-ci varient selon 64 orientations ( $\theta$ ) et 64 échelles de résolutions  $t$  (2 à 64 pixels). En fonction des produits scalaires  $W_\theta^t \cdot I$ , les images numériques sont donc transformées en des images neuronales de dimensions 64x64, lesquelles constituent la variable dépendante.



**Figure 3.11** Les pixels de l'image neuronale se composent du résultat de la filtration des champs de vecteurs de translation selon 64 orientations et 64 échelles de résolution.

Il est connu que l'amplitude des dérivées partielles diminue avec l'augmentation de l'échelle de résolution (Lindeberg, 1996). En pondérant la sortie des opérateurs par leur échelle respective ( $t$ ), on compense pour cet effet, ce qui assure de ne favoriser aucune échelle de résolution.

Afin de clarifier les résultats et prévenir le bruit causé par l'imprécision du calcul numérique, une fonction de seuil<sup>1</sup> est appliquée à chaque image neuronale. Ceci a pour effet d'éliminer les résolutions où le produit scalaire ( $W_{\theta}^t \cdot I$ ) est faible et ainsi conserver uniquement que les résolutions fortement activées par l'image. Moins le seuil est sévère, plus grand est le nombre de résolutions qui sont représentées sur l'image neuronale. Les images neuronales obtenues (variables dépendantes) sont converties en vecteurs (4096 dimensions). Une simple corrélation des vecteurs est calculée afin d'évaluer le degré d'invariance et de spécificité de la filtration.

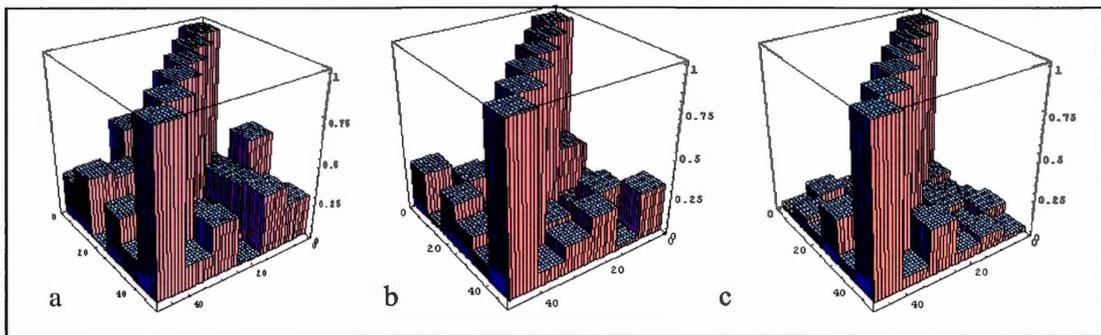
### 3.5.2 Résultats

La figure 3.12 indique la corrélation entre les images neuronales obtenues par une filtration selon 4, 8 et 12 échelles de résolution. La diagonale indique la corrélation entre les images neuronales obtenues d'une même forme visuelle alors que les autres termes indiquent la corrélation entre les images neuronales obtenues de formes visuelles différentes.

On note une corrélation parfaite pour les images neuronales obtenues des transformations (rotation, expansion/contraction et translation) d'une même forme visuelle. En revanche, la corrélation entre les images neuronales obtenues de formes différentes est nettement inférieure. En réduisant la sévérité de la fonction de seuil, on augmente le nombre d'échelles de résolution. Les figures 3.12b et 3.12c indiquent la corrélation des images neuronales lorsque le nombre d'échelles de résolution est augmenté à 8 et puis 12 échelles. L'augmentation du nombre d'échelles de résolution conserve une corrélation parfaite pour les transformations d'une même forme (diagonale) et diminue très fortement la corrélation (déjà faible) entre les images obtenues de différentes formes.

---

<sup>1</sup> Une fonction inhibitrice, où les résolutions qui ne dépassent pas 50% de l'amplitude de la résolution maximale sont écrasées.



**Figure 3.12** Corrélation entre les images neuronales a) 4 échelles de résolution b) 8 échelles de résolution c) 12 échelles de résolution. La diagonale indique une mémoire invariante aux transformations de la forme. Les faibles corrélations à l'extérieur de la diagonale soulignent que cette mémoire est aussi catégorique.

Les corrélations parfaites pour les transformations d'une même forme visuelle indiquent que la séquence de transformation du modèle est invariante à la translation, la rotation et l'expansion/contraction des patrons de lumière. Bien que là ne soit pas le but du modèle, les corrélations très faibles des éléments à l'extérieur de la diagonale indiquent que le rappel est catégorique, c'est-à-dire que la filtration différencie clairement deux images différentes. On ne pourrait s'attendre à une corrélation nulle (vecteurs orthogonaux) car les images utilisées pour la simulation sont tout de même très similaires.

### 3.6 Discussion

La simulation numérique illustre notamment qu'une représentation selon un continuum d'échelles de dérivées partielles conserve la structure différentielle de l'image à toutes les échelles. Ceci se note par les corrélations parfaites entre les images neuronales obtenues de mêmes formes visuelles mais d'échelles différentes. Tel que démontré par Koendenrink (1984), ceci assure la validité de l'opérateur de dérivée partielle gaussien comme opérateur mathématique : la structure différentielle est indépendante du choix d'échelle de résolution.

De plus, la simulation confirme qu'une représentation selon plusieurs résolutions exprime de façon plus précise la structure du patron de lumière. Ceci est clairement illustré

par une forte baisse des corrélations entre les images neuronales de différentes formes lorsque le nombre de résolutions est augmenté.

En effet, rien ne garantit qu'une seule résolution contiendra l'information pertinente à l'identité du patron de lumière. Une représentation à résolution multiple permet une représentation plus riche et plus spécifique. Les opérateurs d'échelles supérieures couvrent une grande surface du champ visuel (*ils voient plus loin*) et leur activation est alors affectée par la position relative des composantes de l'image.

Ce chapitre nous a permis d'accentuer l'importance de considérer le mouvement et la transformation des patrons de lumière comme l'espace de la mémoire visuelle. Plusieurs auteurs ont depuis longtemps suggéré cela de façon plus ou moins explicite. Nous croyons qu'un modèle de mémoire visuelle se doit de tenir compte des transformations de lumière, sans quoi la réalité physique du monde visuel est ignorée.

En tant qu'opérateur de géométrie différentielle, le cortex visuel utilise un continuum de résolutions afin d'éviter la perte de continuité et d'invariance causées par une résolution fixe. Le modèle présenté dans ce chapitre soutient cette stratégie du cortex et, du même coup, il valide les analyses qui suivent au prochain chapitre.

En particulier, nous étudions au prochain chapitre les propriétés de *forces invariantes* des champs de vecteurs élémentaires. À l'instar des intuitions de Gibson (1950, 1968) et des travaux de Hoffman (1966), nous présentons une façon d'utiliser les champs de vecteurs comme modèle des opérations de la mémoire visuelle. Par des principes gestaltistes, nous démontrons que les champs de vecteurs peuvent jouer un rôle prédominant, non pas uniquement dans la perception du mouvement, mais aussi dans la perception des formes.

## CHAPITRE IV

### CHAMPS DE VECTEURS ÉLÉMENTAIRES DANS L'ESPACE-TEMPS : FORCES ET INTÉGRATIONS INVARIANTES SUR LE CORTEX VISUEL

#### 4.1 Introduction

La physique a pour objet d'étudier les propriétés générales de la matière, de l'espace et du temps, et d'établir les lois qui rendent compte des phénomènes naturels. C'est par le formalisme mathématique des champs de vecteurs qu'elle décrit l'organisation des forces qui composent les phénomènes naturels.

Il s'agit bien là d'une définition et d'un cadre d'analyse qui sont tout autant applicables à l'étude des phénomènes perceptifs; en effet, l'étude de la perception visuelle est aussi l'étude de la matière, de l'espace et du temps. La lumière qui atteint la rétine se compose de champs de vecteurs (champs électromagnétiques) et l'activité neuronale qu'elle stimule prend elle aussi la forme de champs de vecteurs. Il est alors question d'établir les lois d'intégration de champs de vecteurs qui rendent compte des opérations de la mémoire visuelle sur une source lumineuse dans l'espace et le temps.

L'intégration d'un champ de vecteurs sur une surface donne lieu à des valeurs globales invariantes, indépendantes de la déformation et de la position de la surface dans l'espace et le temps. Ainsi, si on prend comme domaine d'intégration la surface d'un objet visuel, on obtient alors des résultats qui se rapprochent grandement de ce que doivent être les opérations élémentaires de toute forme de mémoire visuelle. En effet, une mémoire visuelle

doit développer des états attracteurs qui sont indépendants des déformations et de la position globale des objets dans l'espace-temps.

Nous étudions dans ce chapitre les propriétés invariantes des champs de vecteurs élémentaires qui leur permettent de servir de modèle aux opérations de la mémoire visuelle. En particulier, nous étudions les *forces rotatives* et l'*expansion* qui caractérisent ces champs. Bien qu'ils soient impliqués dans la perception du mouvement, nous croyons qu'ils sont directement impliqués dans la mémorisation des formes.

Quatre résultats principaux composent ce chapitre :

Premièrement, par les opérations locales du cortex visuel, l'intégration de champs de vecteurs sur des polygones donne des valeurs qui ne dépendent pas de la position globale dans l'espace. Il s'agit d'une propriété nécessaire à toute forme de mémoire visuelle.

En second lieu, nous démontrons qu'une intégration globale et invariante est obtenue en intégrant localement sur les coins des polygones. Ceci correspond à une propriété fondamentale du système visuel : il est bien connu qu'en l'absence d'une forme complète, le système visuel génère le reste de la forme uniquement en présence des régions de haute courbure.

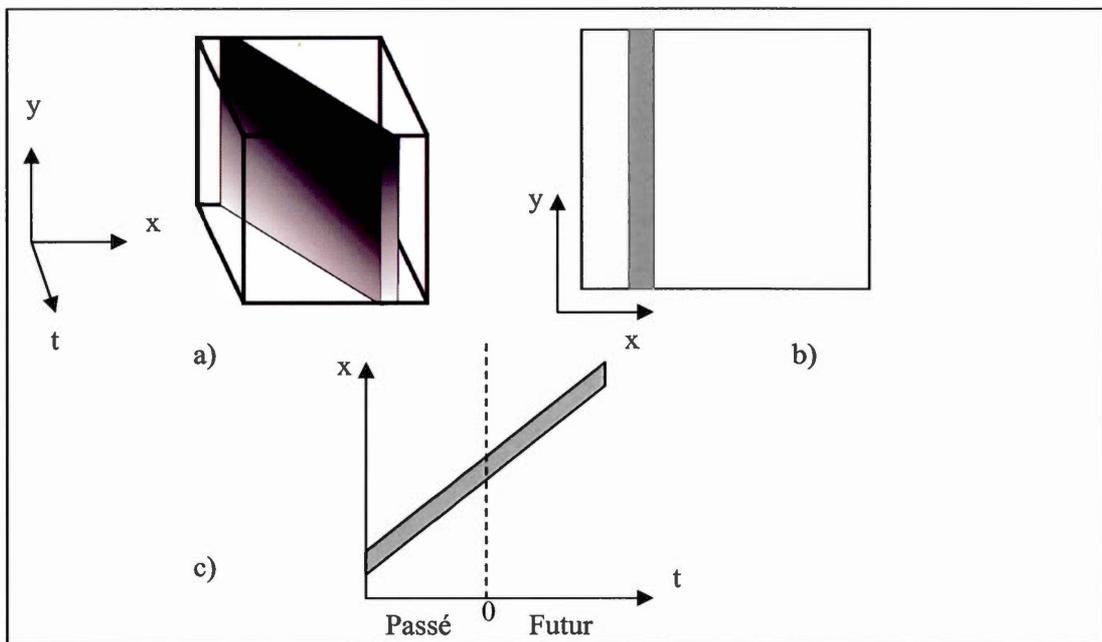
Troisièmement, on note que l'invariance à la position globale conduit à une invariance à la déformation. Puisque cette invariance découle d'une relation d'homéomorphisme, elle est trop permissive. En effet, le résultat d'intégration dépend uniquement de l'aire de surface du polygone : tous les polygones de même surface donnent une même intégration, peu importe la configuration de leurs coins. Cependant, en intégrant la force des vecteurs de vitesse, on trouve que ceux-ci ajoutent un degré de liberté aux valeurs d'intégration tout en conservant l'invariance aux coordonnées globales du polygone dans l'espace. Ce résultat nous permet d'établir les conditions pour lesquelles l'intégration n'est pas uniquement une fonction de l'aire de surface, mais aussi une fonction de la configuration des coins.

Finalement, en représentant les contours courbés par la jonction d'arcs de spirales, une intégration globale est possible en intégrant localement sur les extrémités des segments. Cette démonstration illustre comment l'intégration des champs de vecteurs élémentaires est applicable à deux propriétés fondamentales de la mémoire visuelle : l'invariance à la déformation des objets ainsi que la génération spontanée des contours.

#### 4.2 Notions sur l'espace-temps des contours visuels

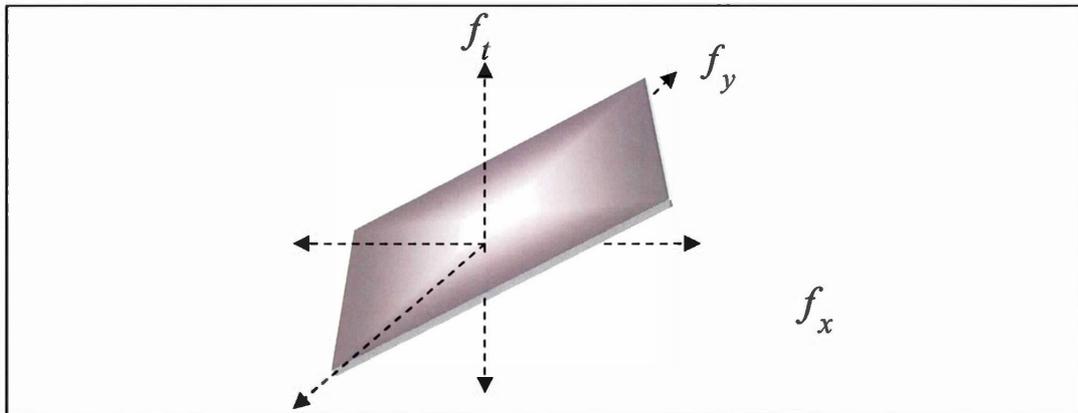
Cette section résume brièvement les bases théoriques de la décomposition spectrale des formes dans l'espace-temps. Celles-ci servent d'inspiration et d'appui théorique aux démonstrations faites dans ce chapitre.

Les patrons de lumière évoluent simultanément dans l'espace et le temps. Une représentation de l'objet visuel dans l'espace-temps est non seulement essentielle à une expression de son mouvement, mais elle permet également d'établir la *connexité* (la relation) qui existe entre sa structure temporelle et sa structure spatiale. La figure 4.1 illustre par un système d'axes  $(x, y, t)$  la représentation dans l'espace-temps d'un patron de lumière en mouvement. Il s'agit dans ce cas d'une droite en translation horizontale (axe  $x$ ). Le mouvement décrit alors des lignes obliques sur la face  $(x, t)$  de l'espace-temps alors que l'inclinaison de ces lignes indique la vitesse de l'objet. N'ayant aucune vitesse verticale, le mouvement de l'objet ne cause aucun changement sur la face  $(y, t)$  du cube.



**Figure 4.1** Représentation de l'espace-temps d'une droite en translation sur l'axe  $x$ .

Les séries chronologiques, plus souvent connues sous le terme de décompositions spectrales, permettent la description des *fréquences temporelles* et des *fréquences spatiales* d'un phénomène visuel dans l'espace-temps (Wandell, 1995). La figure 4.2 représente un croquis de la décomposition spectrale du patron de lumière (la droite) en translation. L'intensité des points indique l'énergie associée à une fréquence spatiale ( $f_x, f_y$ ) et une fréquence temporelle ( $f_t$ ). Pour une telle représentation, l'objet en translation rectiligne crée des fréquences temporelles et des fréquences spatiales formant un plan dont l'inclinaison dépend de la vitesse de l'objet.



**Figure 4.2** Spectre de fréquence de l'espace-temps pour une droite en translation sur l'axe des x.

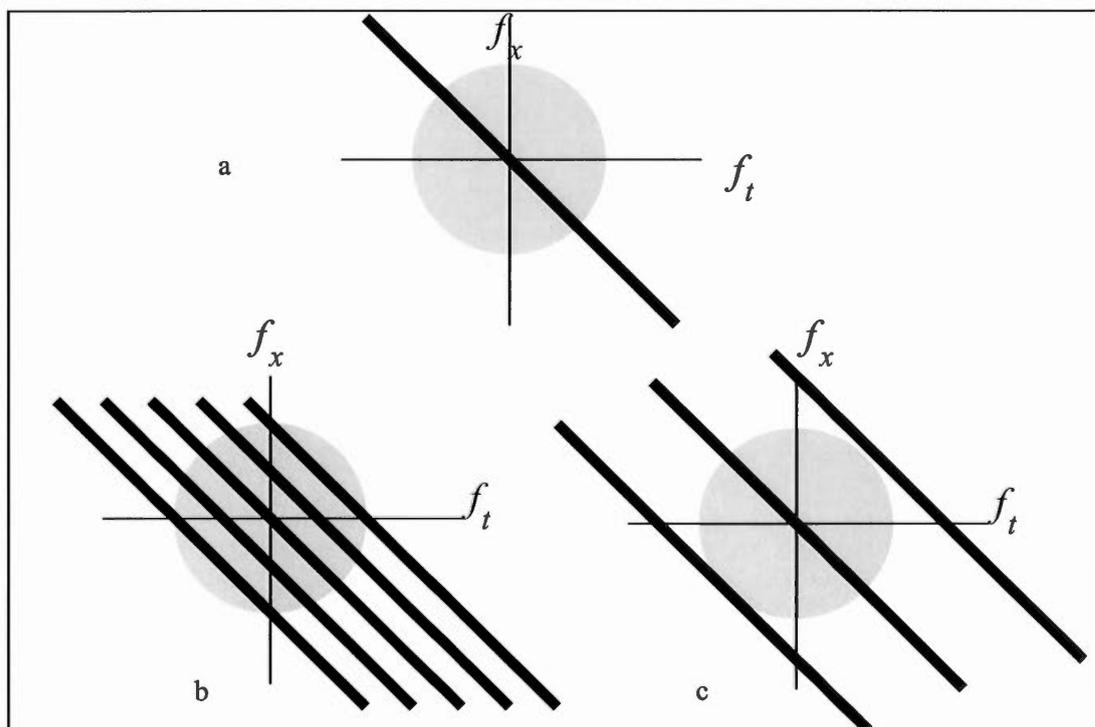
Les fréquences spatiales s'expriment en *cycles/distance* alors que les fréquences temporelles s'expriment en *cycles/temps*. La vitesse de l'objet s'exprime en *distance/temps*. Il découle alors que la vitesse  $v$  de l'objet relie ses fréquences temporelles  $f_{\text{temps}}$  à ses fréquences spatiales  $f_{\text{espace}}$  par la relation suivante (Wandell, 1995)

$$f_{\text{temps}} = v f_{\text{espace}} .$$

On dit alors qu'un objet qui se déplace à une vitesse  $v$  est représenté par une fréquence spatiale  $f_{\text{espace}}$  et une fréquence temporelle correspondante  $f_{\text{temps}} = v f_{\text{espace}}$ . Autrement dit, les fréquences temporelles d'un objet en mouvement sont une fonction de ses fréquences spatiales et de sa vitesse.

Cette relation de dépendance entre la représentation spatio-temporelle d'un patron de lumière et sa vitesse engendre des conséquences bien intéressantes en ce qui a trait aux effets du mouvement dans la perception des formes. En effet, les études sur la sensibilité du système visuel indiquent la présence d'une *fenêtre de visibilité* sur les fréquences spatiales et les fréquences temporelles ambiantes à l'extérieur de laquelle l'énergie est invisible pour l'humain (Wandell, 1995). Autrement dit, seuls les phénomènes dont l'énergie des fréquences spatiales et temporelles se trouve à l'intérieur de cette fenêtre sont perceptibles.

Théoriquement, à tout le moins, la vitesse du mouvement d'un objet semble jouer un rôle important sur la fenêtre de visibilité. La figure 4.3 illustre le spectre de fréquence de la figure 4.1c ainsi que la fenêtre de visibilité spatio-temporelle (cercle gris). Lorsque l'échantillonnage temporel d'un patron de lumière en mouvement est trop lent, des copies à haute fréquence du spectre viennent se replier sur le spectre original à l'intérieur de la fenêtre de visibilité (4.3b), le long de l'axe temporel. Le repliement du spectre a pour effet de créer une représentation *bruitée* du mouvement. Ce phénomène fait référence au théorème fondamental de l'échantillonnage (théorème de Nyquist), lequel stipule que le taux d'échantillonnage doit être au minimum deux fois plus élevé que la plus haute fréquence rencontrée dans le signal. Lorsque l'échantillonnage est suffisamment rapide, les copies repliées du spectre s'espacent et tombent à l'extérieur de la fenêtre de visibilité (4.3c), créant ainsi une représentation spatio-temporelle claire et continue (4.3a).



**Figure 4.3** a) Spectre de fréquence idéal de l'espace-temps d'une droite en translation. b) un échantillonnage trop lent engendre des copies superflues du spectre à l'intérieur de la fenêtre de visibilité. c) un échantillonnage suffisamment rapide espace les copies superflues à l'extérieur de la fenêtre de visibilité, créant ainsi une perception claire et continue.

Les données qui entourent la décomposition spectrale d'un objet aident certainement à une compréhension de l'interdépendance des dimensions de l'espace-temps en relation avec la vitesse du mouvement. Cependant, elles ne correspondent pas aux opérations locales qu'effectue le cortex visuel. Dans la section qui suit, nous illustrons une représentation locale de l'espace-temps qui correspond aux opérations du cortex visuel.

#### 4.3 Représentation locale de l'espace-temps sur les contours visuels

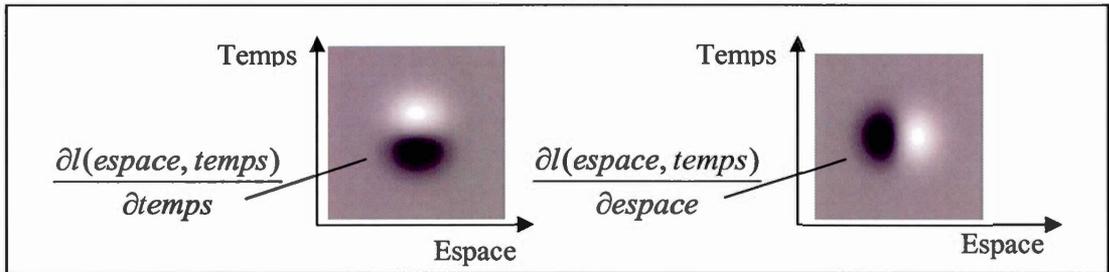
L'expression des opérations effectuées par les neurones du cortex visuel est celle d'une dérivée partielle. Selon l'avenue théorique utilisée, le terme fréquence est interchangeable avec celui d'une dérivée partielle. Ainsi, un objet dans l'espace-temps s'exprime en fréquences spatio-temporelles, mais aussi il s'exprime en termes de dérivées partielles sur l'espace-temps. Il est alors question de dérivée partielle du patron de lumière ( $l$ ) sur l'espace-temps. On peut alors réécrire l'équation  $f_{\text{temps}} = v f_{\text{espace}}$  en termes des dérivées partielles du patron de lumière selon

$$\frac{\partial l(\text{espace}, \text{temps})}{\partial \text{temps}} = v \frac{\partial l(\text{espace}, \text{temps})}{\partial \text{espace}}, \quad (12)$$

et dire qu'un objet en mouvement décrit une dérivée partielle temporelle  $\frac{\partial l(\text{espace}, \text{temps})}{\partial \text{temps}}$

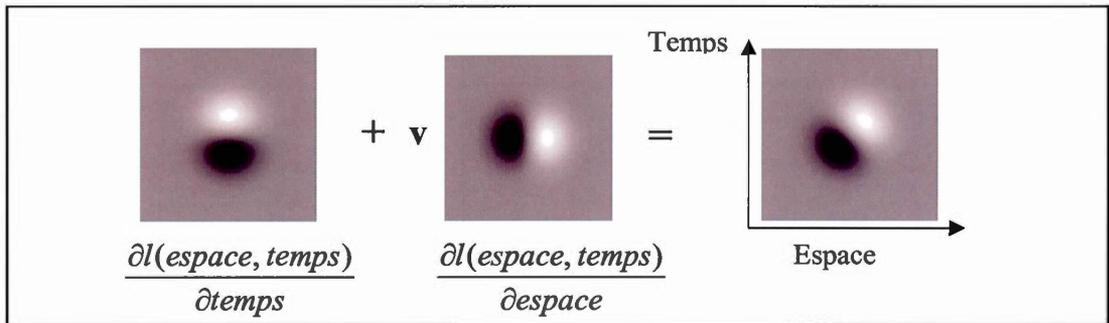
et une dérivée partielle spatiale  $\frac{\partial l(\text{espace}, \text{temps})}{\partial \text{espace}}$  pondérée par la vitesse  $v$  de l'objet.

Les dérivées partielles de l'équation 12 sont effectuées localement au niveau du cortex visuel par des opérateurs de dérivée gaussiens (figure 4.4). Pour l'équation 12, il s'agit d'un opérateur dont la dérivée s'effectue selon l'axe temporel et d'un opérateur dont la dérivée s'effectue selon l'axe spatial.



**Figure 4.4** Opérateur de dérivée partielle correspondant aux opérations locales observées sur le cortex visuel.

En combinant ces deux opérateurs, on obtient alors un opérateur local orienté dans le plan *espace-temps* et dont l'inclinaison est déterminée par la vitesse  $v$  (figure 4.5). Cet opérateur indique la vitesse locale d'un patron de lumière en mouvement.



**Figure 4.5** Opérateur de dérivée partielle orienté dans l'*espace-temps*.

Notons que l'*espace* sur la figure 4.5 est unidimensionnel et qu'il correspond à la direction exprimée par  $\frac{\partial l(\text{espace}, \text{temps})}{\partial \text{espace}}$ . Cette dérivée partielle peut théoriquement s'exprimer selon toutes les directions du plan  $xy$  par une dérivée directionnelle

$$\frac{\partial l(\text{espace}, \text{temps})}{\partial \text{espace}} = \cos(\theta) \left( \frac{\partial l(x, \text{temps})}{\partial x} \right) + \sin(\theta) \left( \frac{\partial l(y, \text{temps})}{\partial y} \right),$$

où  $\theta$  détermine la direction. Cependant, dans le cas d'un contour visuel, l'axe *espace* correspond à la direction du gradient de lumière, lequel est donné par la dérivée

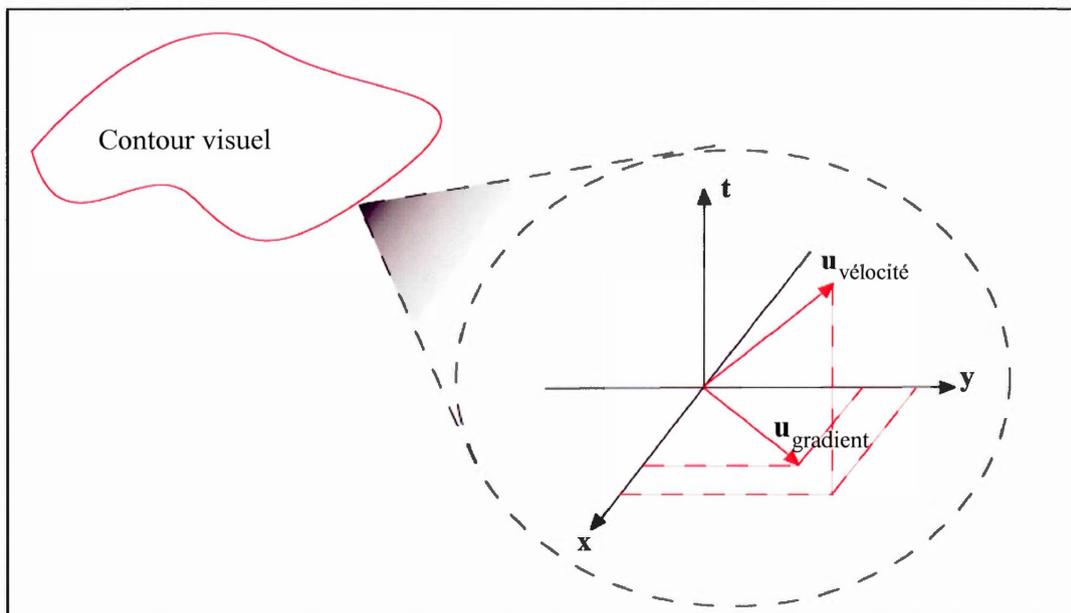
directionnelle maximale. En effet, les théories sur la vision, appuyées par les évidences psychophysiques (Hildreth, 1983), indiquent que localement seule la composante du mouvement qui est tangentielle au gradient visuel (perpendiculaire au contour) est perceptible, les autres composantes ne créent aucun changement d'intensité lumineuse. C'est pour cette raison que l'axe *espace* correspond à la direction du gradient de lumière.

Pour mieux comprendre, imaginez une droite horizontale infinie qui traverse le champ visuel à 1000 km/h vers la droite et seulement 5 km/h vers le haut. Seul le mouvement vers le haut sera perçu. Nous aurons l'impression que la droite se déplace à seulement 5 km/h à la verticale. Nous demeurons *aveugle* à son mouvement de 1000 km/h à l'horizontal.

Visualiser les dimensions de l'espace-temps et les dérivées partielles qui y sont effectuées n'est pas quelque chose qui se fait simplement. Une représentation vectorielle permet d'en étudier plus clairement les propriétés en termes d'opérations géométriques.

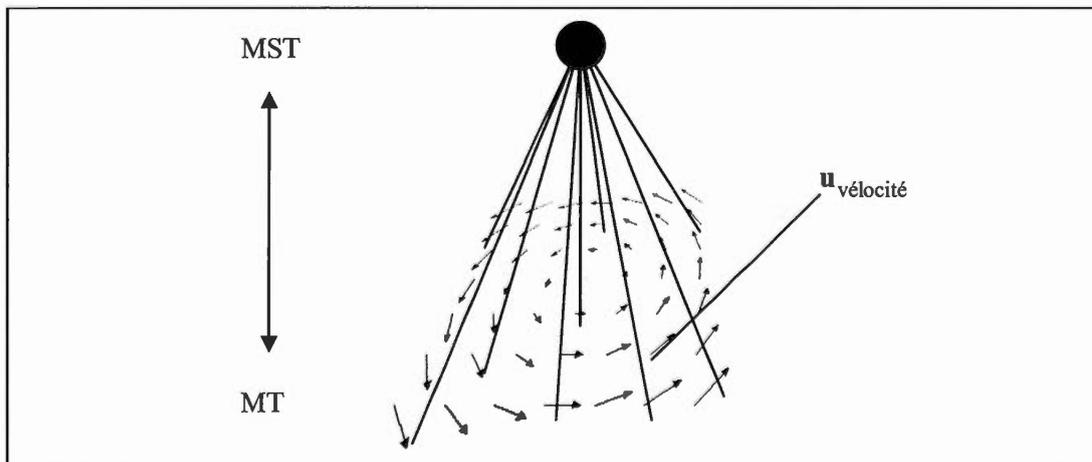
#### 4.4 Représentation vectorielle

Formellement, on représente une dérivée partielle par un vecteur. Ainsi, comme l'illustre la figure 4.6, à chaque point d'un contour visuel, on peut représenter les dérivées partielles sur l'espace-temps par un *vecteur de vitesse* local ( $\mathbf{u}_{\text{vitesse}}$ ) et un *vecteur de gradient* de lumière ( $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$ ). Ces deux vecteurs sont orientés perpendiculairement au contour.



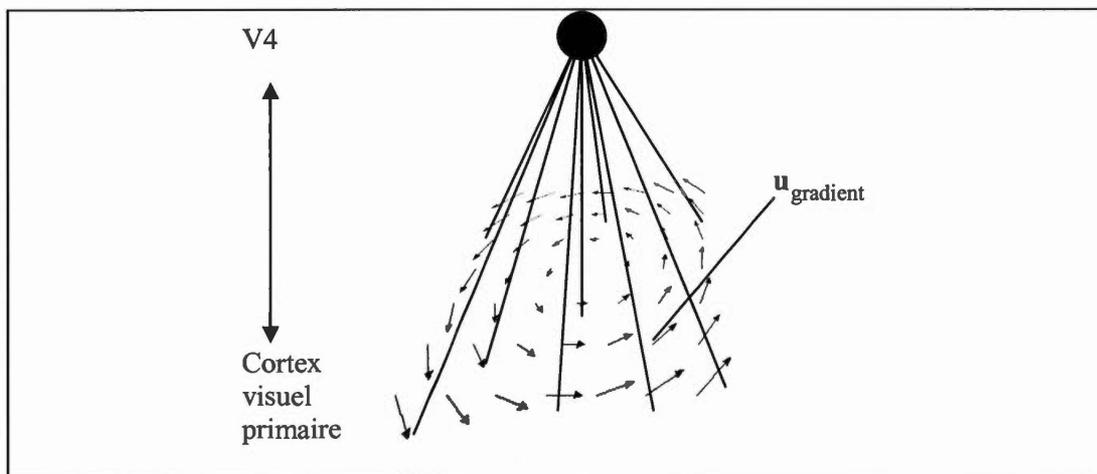
**Figure 4.6** Représentation locale du système espace-temps le long d'un contour visuel.

Des études neurophysiologiques (Duffy et Wurtz, 1991) indiquent que le cortex visuel moteur (MST) établit ses connexions avec des opérateurs de vitesse locale ( $\mathbf{u}_{\text{vitesse}}$ ). La région MST permet alors l'intégration de champs de vecteurs qui décrivent la transformation des patrons de lumière générée par le mouvement.



**Figure 4.7** La région MST intègre l'énergie d'un tapis d'opérateurs de dérivée partielle dans l'espace-temps, exprimant chacun la vitesse locale d'un mouvement.

Selon les mêmes études, le cortex visuel primaire (V4) établit ses connexions avec des opérateurs de gradient de lumière ( $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$ ). La région V4 permet donc l'intégration de champs de vecteurs qui décrivent un gradient de lumière.



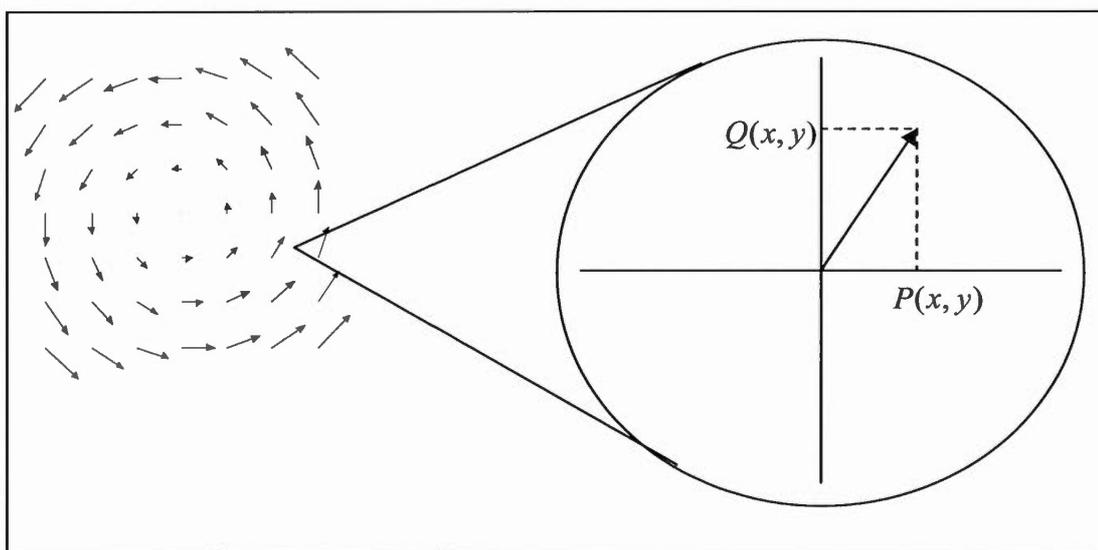
**Figure 4.8** Le neurone de la région V4 intègre l'énergie d'un tapis d'opérateurs de dérivée partielle exprimant chacun le gradient local d'un contour.

Bien que ces champs de vecteurs soient associés à deux régions différentes du cortex visuel, ils expriment localement et conjointement les  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  et les  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}}$  qui composent le système local d'espace-temps représenté par la figure 4.6.

Les champs de vecteurs élémentaires ont la propriété d'avoir une force locale qui demeure invariante, peu importe les coordonnées globales. La section qui suit illustre l'origine de ces propriétés.

#### 4.5 Forces et propriétés différentielles des champs de vecteurs élémentaires

Rappelons qu'un champ de vecteur exprime à toute position  $(x, y)$  dans le plan un vecteur local,  $(P(x, y), Q(x, y))$ . Il s'agit donc d'un vecteur dont les coefficients sont fonction de sa position  $(x, y)$ .



**Figure 4.9** Les vecteurs locaux du champ sont fonction de leur position globale.

Établissons une forme d'expression générale des champs de vecteurs élémentaires. À chaque position  $(x, y)$ , dans le plan, ces champs expriment un vecteur  $(P(x, y), Q(x, y))$  selon

$$W = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \xi y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc

$$W = (P(x, y), Q(x, y)),$$

où

$$P(x, y) = \alpha x + \beta y$$

$$Q(x, y) = \gamma x + \xi y.$$

Toute combinaison de valeurs associées aux coefficients  $(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$  donne l'expression d'un champ élémentaire.

Spécifiquement :

La forme générale des champs de rotation est donnée par

$$W_{\mathbf{R}} = (-\beta y, \gamma x), \text{ où } \beta\gamma > 0. \quad (12)$$

Le forme générale des champs d'expansion/contraction est donnée par

$$W_{\mathbf{E}} = (\alpha x, \xi y) \text{ où } \alpha\xi > 0. \quad (13)$$

La forme générale des champs hyperboliques est donnée par

$$W_{\mathbf{H}} = (-\alpha x, \xi y) \text{ où } \alpha\xi > 0 \quad (14)$$

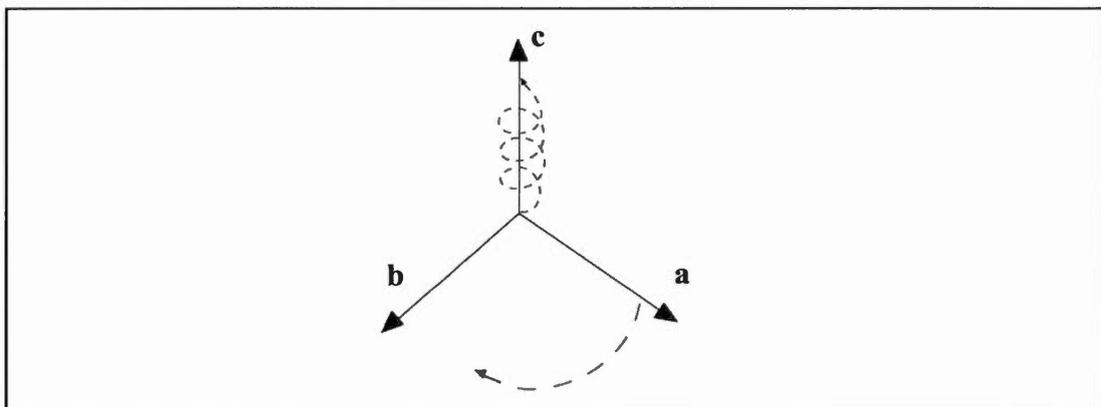
$$W_{\mathbf{H}} = (\beta y, \gamma x) \text{ où } \beta\gamma > 0. \quad (15)$$

Toute combinaison linéaire de ces champs exprime un champ de vecteurs potentiellement présent dans le continuum de sensibilité observé sur le cortex visuel. Particulièrement, la combinaison des champs de rotation et d'expansion/contraction exprime un continuum de champs de vecteurs spirales  $W_{\mathbf{S}} = (\alpha x - \beta y, \gamma x + \xi y)$ .

Un champ de vecteur est toujours caractérisé par la force locale qu'il exerce. Spécifiquement, pour tout champ de vecteurs, la force locale du champ se décompose en une composante de rotation (aussi appelée *rotationnel*) et une composante d'expansion (aussi appelée divergence).

Comme le nom le suggère, la force rotative d'un champ est une mesure de la force de rotation qui existe à un point dans le champ, ou plus précisément la force du champ qui est tangentielle à un cercle infinitésimal. En des termes plus intuitifs, la force rotative est une mesure de la force qui permettrait au champ de dévisser une vis qui serait enfoncée dans le plan.

La force rotative est directement liée à la notion du produit vectoriel entre deux vecteurs. Mathématiquement, le produit vectoriel de deux vecteurs **a** et **b** génère un troisième vecteur **c**, orthogonal aux deux premiers. L'amplitude de ce vecteur est donnée par  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\theta)$ , où  $\theta$  indique l'angle entre les vecteurs **a** et **b**. Physiquement, l'amplitude du vecteur généré exprime la *torsion*, ou encore la force du moment (force de rotation) du vecteur **a** dans sa rotation sur le vecteur **b**.



**Figure 4.10** Produit vectoriel.

Algébriquement, pour  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  et  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , le produit vectoriel s'exprime par

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ou encore plus simplement en prenant le déterminant de la matrice suivante

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Dans le plan, la force rotative d'un champ de vecteurs se définit par le produit vectoriel de l'opérateur (vecteur infinitésimal)  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0)$  avec le vecteur  $(P(x, y), Q(x, y), 0)$ .

Puisque que pour  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$ ,

$$P(x, y) = \alpha x + \beta y$$

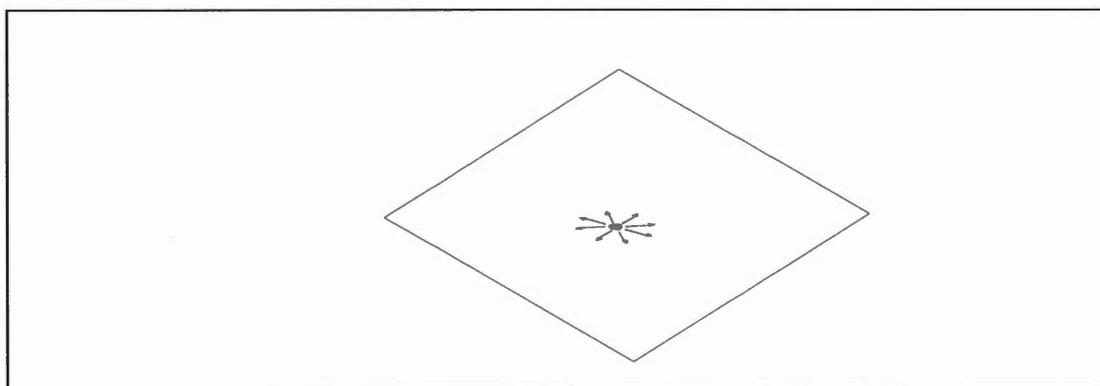
et

$$Q(x, y) = \gamma x + \xi y,$$

la force rotative du champ est donnée par le déterminant suivant

$$\nabla \times W = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left( 0, 0, \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right).$$

L'expansion (divergence) est une mesure de l'intensité avec laquelle le champ diverge d'un même point. Intuitivement, ceci équivaut à la force du champ qui *empêche* de s'approcher d'un point dans toutes les directions.



**Figure 4.11** Divergence à un point du plan.

Dans le plan, l'expansion (la divergence) s'obtient par le produit scalaire de l'opérateur  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0\right)$  avec le vecteur  $P((x, y), Q(x, y), 0)$ , soit :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot W \\ &= \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

L'expansion et la force rotative peuvent être variables ou constantes (nulles ou non nulles) en tout point.

Les champs de vecteurs élémentaires ont la propriété d'avoir une expansion et une force rotative locale constantes, peu importe la position globale dans le plan. Autrement dit, pour les champs  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$ , la force locale du champ ne dépend pas des coordonnées  $(x, y)$ .

En effet, pour tout champ élémentaire de forme générale  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$ , la force rotative est donnée par

$$\nabla \times W = \left( 0, 0, \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) = (0, 0, -\beta + \gamma) \quad (16)$$

alors que l'expansion est donnée par

$$\nabla \cdot W = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} = (\alpha + \xi), \quad (17)$$

soit deux constantes, indépendantes des coordonnées  $(x, y)$ .

On note que, peu importe le champ élémentaire, la force rotative du champ sera toujours déterminée par la somme des coefficients  $(-\beta + \gamma)$  associés au champ de rotation, alors que l'expansion sera toujours égale à la somme des coefficients  $(\alpha + \xi)$  associés au champ d'expansion/contraction.

Par exemple, le champ spiralé  $W_S = (4x - 7y, 3x + 1y)$  est la combinaison linéaire du champ de rotation  $W_R = (-7y, 3x)$  et du champ d'expansion  $W_E = (4x, 1y)$ . Il possède la même force rotative que le champ de rotation et la même expansion que le champ d'expansion.

En effet, l'expansion du champ spiralé et du champ d'expansion sont respectivement données par

$$\begin{aligned} \nabla \cdot W_S \\ = \nabla \cdot (4x - 7y, 3x + 1y) &= \frac{\partial(4x - 7y)}{\partial x} + \frac{\partial(3x + 1y)}{\partial y} = (4 + 1) = 5 \end{aligned}$$

et

$$\nabla \cdot W_E$$

$$\nabla \cdot (4x, 1y) = \frac{\partial 4x}{\partial x} + \frac{\partial 1y}{\partial y} = (4+1) = 5,$$

alors que les forces rotatives du champ spirale et du champ de rotation sont données par

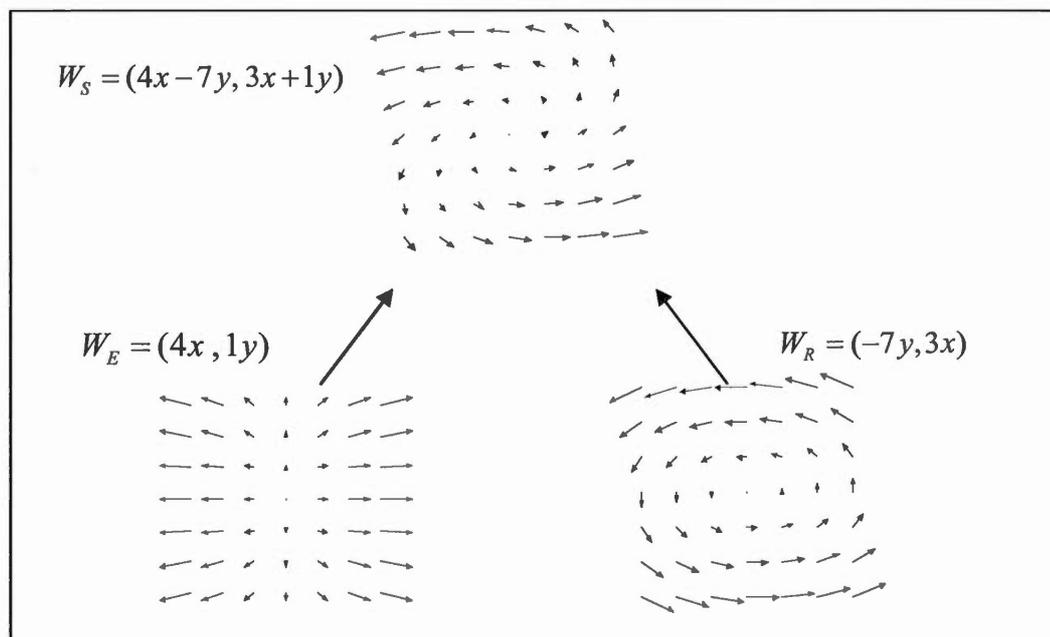
$$\nabla \times W_S$$

$$\nabla \times (4x - 7y, 3x + 1y, 0) = \left( 0, 0, \frac{\partial(3x+1y)}{\partial x} - \frac{\partial(4x-7y)}{\partial y} \right) = (0, 0, 3 - (-7)) = (0, 0, 10)$$

et

$$\nabla \times W_R$$

$$\nabla \times (-7y, 3x, 0) = \left( 0, 0, \frac{\partial(3x+1y)}{\partial x} - \frac{\partial(4x-7y)}{\partial y} \right) = (0, 0, 3 - (-7)) = (0, 0, 10).$$



**Figure 4.12** Champ spirale  $W_S = (4x - 7y, 3x + 1y)$  issu de la combinaison linéaire des champs de rotation  $W_R = (-7y, 3x)$  et d'expansion  $W_E = (4x, 1y)$ .

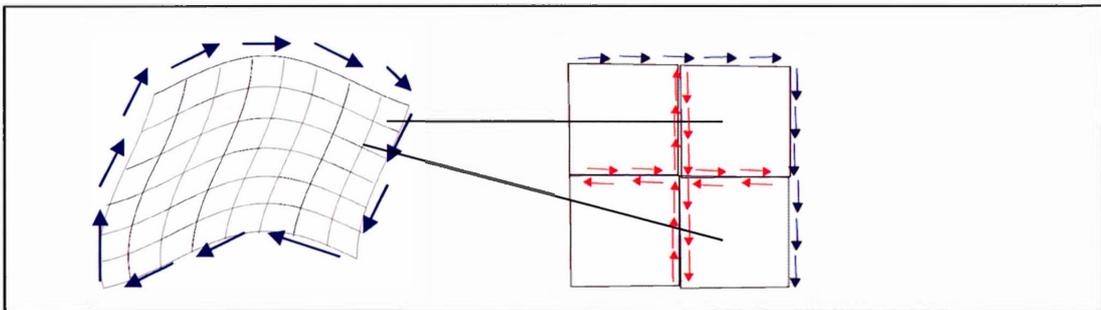
Les composantes locales de rotation et d'expansion d'un champ spiralé étant orthogonales, la présence d'une force rotative dans le champ spiralé n'affecte pas son expansion et vice versa. Ainsi, l'expansion du champ spiralé est la même que celle du champ d'expansion pure. De même, la force de rotation contenue dans le champ spiralé est la même que celle contenue dans le champ de rotation pure.

Il est important de ne pas se laisser illusionner par l'orientation des vecteurs locaux sur la figure 4.12. Par exemple, pour le champ de rotation et le champ spiralé, bien que les vecteurs au centre semblent *tourner* d'une façon plus prononcée qu'en périphérie, ils le font avec moins de force. Une vis enfoncée dans le champ serait dévissée par la force rotative du champ à la même vitesse, peu importe sa position.

Le fait d'avoir une force rotative constante et une expansion constante engendre des valeurs d'intégrations globales et invariantes qui sont directement applicables à une modélisation de la mémoire visuelle. Ces propriétés découlent de deux généralisations du théorème de Green: le théorème de Stokes et le théorème de divergence.

#### 4.6 Théorème de Stokes et théorème de divergence

Comme nous venons de l'indiquer, la force rotative d'un champ est une mesure de sa force qui est tangentielle à un contour infinitésimal. Tout contour s'obtient par la juxtaposition de contours infinitésimaux. Sur la figure 4.13, ce qu'exprime le *théorème de Stokes*, c'est que les forces du champ qui sont tangentielles aux contours infinitésimaux s'annulent (en rouge) sur la surface, à l'exception de celles qui se trouvent à l'extérieur (en bleu), sur le grand contour.



**Figure 4.13** Annulation des forces tangentielles (en rouge) sur la surface. En intégrant la force rotative sur la surface, seuls les vecteurs bleus ne s'annulent pas.

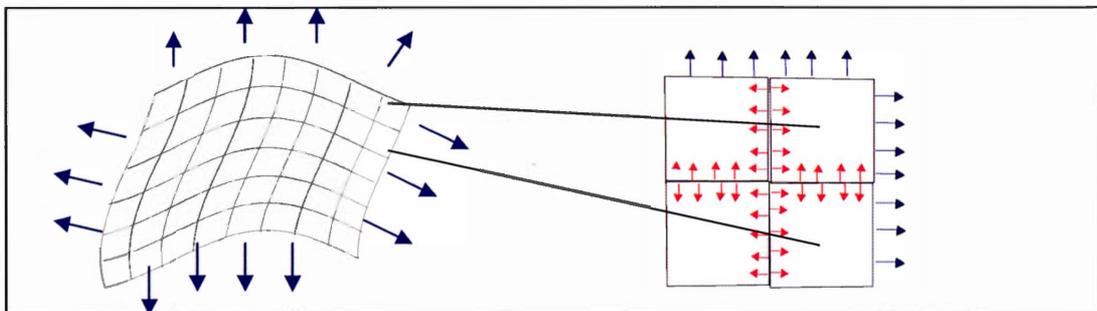
Tout ce qui reste suite à l'intégration des forces rotatives sur la surface, ce sont les composantes tangentielles du champ le long du grand contour. Celles-ci sont données par le produit scalaire  $\mathcal{W} \cdot \mathbf{v}$ , soit le produit du champ ( $\mathcal{W}$ ) avec les vecteurs tangentiels ( $\mathbf{v}$ ). Ainsi, pour tout contour, l'intégration du produit  $\mathcal{W} \cdot \mathbf{v}$  le long du contour s'obtient également en intégrant la force rotative du champ sur toute la surface. Spécifiquement, on écrit le théorème de Stokes par

$$\oint_C \mathcal{W} \cdot \mathbf{v} dl = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S (\nabla \times \mathcal{W}_R) \cdot \mathbf{k} ds, \quad (18)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur normal unitaire,  $C$  est une courbe simple et  $S$  la région intérieure de la courbe  $C$ .

Dans le cas où la force rotative ( $\nabla \times W$ ) est invariante, l'intégrale se résume à multiplier l'amplitude de la force rotative par l'aire de la surface.

Notons qu'exactement le même raisonnement s'applique au *théorème de divergence*. La divergence d'un champ est une mesure de l'intensité avec laquelle le champ diverge d'un contour infinitésimal. Encore une fois, tout contour s'obtient par la juxtaposition de contours infinitésimaux. Sur la figure 4.14, ce qu'exprime le *théorème de divergence*, c'est que les forces du champ qui sont perpendiculaires aux contours infinitésimaux s'annulent sur la surface, à l'exception de celles qui se trouvent à l'extérieur (en bleu), sur le grand contour.



**Figure 4.14** Annulation des forces normales (en rouge) sur la surface. En intégrant la divergence sur la surface, seuls les vecteurs bleus ne s'annulent pas.

Tout ce qui reste suite à l'intégration de la divergence sur toute la surface, ce sont les composantes normales du champ le long du grand contour. Celles-ci sont données par le produit scalaire  $W \cdot \mathbf{n}$ , soit le produit du champ ( $W$ ) avec le vecteur normal ( $\mathbf{n}$ ) au contour. Ainsi, comme dans le cas du théorème de Stokes, l'intégrale du produit  $W \cdot \mathbf{n}$  le long du contour s'obtient également en intégrant la divergence du champ sur la surface. Spécifiquement, on écrit le théorème de divergence par

$$\oint_C W \cdot \mathbf{n} dl = \oint_C P(x, y) dy - Q(x, y) dx = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S \nabla \cdot W ds \quad (19)$$

Dans le cas où l'expansion ( $\nabla \cdot W$ ) est invariante, l'intégrale se résume à multiplier l'expansion par l'aire de la surface.

La section qui suit illustre comment les propriétés qui découlent de ces deux théorèmes permettent d'intégrer une trajectoire de façon invariante à ses coordonnées globales (orientation et position).

#### 4.7 Une application du théorème de Stokes et du théorème de divergence

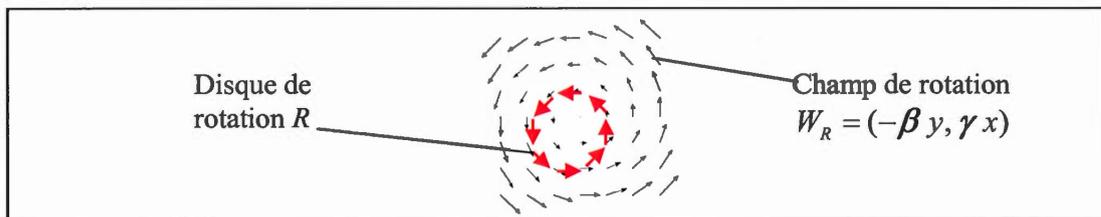
Une propriété du cortex visuel moteur (MST) est que sa sensibilité à la rotation et à l'expansion des formes demeure invariante à la position du centre de rotation ou d'expansion. Sereno, Sereno et Zhang (1993) et Poggio, Verri et Torre (1991) ont proposé une application du théorème de Stokes et du théorème de divergence comme modèle de cette propriété du cortex visuel.

Considérons le champ récepteur d'un neurone sensible à la rotation des patrons de lumière et exprimé par

$$W_R = (-\beta y, \gamma x) \text{ où } \beta\gamma > 0.$$

Rappelons qu'un champ  $W_R = (-\beta y, \gamma x)$  indique, pour toute position  $(x, y)$  dans le plan, un vecteur local  $(-\beta y, \gamma x)$ .

Intégrons ce champ le long d'une trajectoire de rotation comme l'illustre la figure 4.15. Les vecteurs en rouge indiquent la direction locale de la rotation. Leur longueur exprime la vitesse à chaque position de la rotation (l'inclinaison du vecteur de vitesse local dans l'espace-temps). Nommons ces vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vitesse}(t)}$ , où  $t$  indique qu'il s'agit de vecteurs tangentiels à la trajectoire intégrée.



**Figure 4.15** Intégration d'une trajectoire de rotation sur un champ de vecteurs de rotation défini par  $W_R = (-\beta y, \gamma x)$ .

L'intégrale du champ  $W_R$  sur la composante tangentielle s'exprime par

$$\oint_C W_R \cdot \mathbf{u}_{\text{vélocité}(t)} dl .$$

Il s'agit simplement de la sommation des produits scalaires entre les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}(t)}$  et les vecteurs du champ  $W_R$ .

Le théorème de Stokes nous permet d'exprimer cette intégration selon

$$\begin{aligned} & \oint_C W_R \cdot \mathbf{u}_{\text{vélocité}(t)} dl \\ &= \iint_S (\nabla \times W_R) \cdot \mathbf{k} ds . \end{aligned}$$

C'est-à-dire que l'intégrale du champ sur la composante tangentielle est égale à l'intégrale de l'amplitude de la force rotative du champ sur la surface délimitée par la trajectoire. Simplement dit, une intégrale de surface (intégrale double) devient une intégrale de contour (intégrale simple).

Le champ de rotation  $W_R = (-\beta y, \gamma x)$  possède la particularité d'avoir une force rotative invariante en tout point et donnée par :

$$\begin{aligned}\nabla \times W_R &= \left( 0, 0, \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) \\ &= (0, 0, -\beta + \gamma) .\end{aligned}$$

Puisque la force rotative du champ est constante, on peut alors grandement simplifier l'intégration par

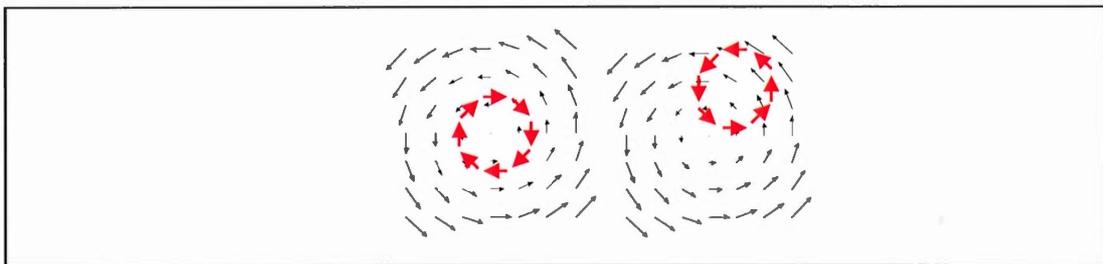
$$\begin{aligned}\oint_C W_R \cdot \mathbf{u}_{\text{vélocité}(t)} dl &= \iint_S (\nabla \times W_R) \cdot \mathbf{k} ds \\ &= \iint_S (-\beta + \gamma) ds \\ &= (-\beta + \gamma) \iint_S ds \\ &= (-\beta + \gamma) s .\end{aligned}$$

Ainsi, sans même avoir à effectuer  $\oint_C W_R \cdot \mathbf{u}_{\text{vélocité}(t)} dl$ , uniquement en connaissant l'aire de surface (s), on connaît le résultat, lequel est invariant aux coordonnées. L'intégration dépend uniquement de l'aire de surface multipliée par l'amplitude de la force rotative du champ, peu importe la position globale de la trajectoire.

Ainsi, bien que le neurone de la région MST possède un arbre dendritique dont la sensibilité  $W_R = (-\beta y, \gamma x)$  dépend de la position globale des synapses, son intégration le long d'une trajectoire de rotation demeure invariante aux coordonnées.

Ces résultats peuvent être visualisés de la manière suivante : observons la figure 4.16. Dans le cas où la trajectoire de rotation est centrée sur le champ récepteur du neurone (figure gauche), les vecteurs du champ sont toujours bien alignés avec les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}(t)}$ . Ainsi,

les produits scalaires sont tous positifs. Par contre, dans le cas où la rotation n'est pas centrée sur le champ récepteur du neurone (figure droite), on remarque par exemple que la direction des vecteurs du champ est opposée à celle des vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}(t)}$ , créant ainsi des produits scalaires négatifs. Ce que le théorème de Stokes permet de confirmer, sans même effectuer le calcul des produits scalaires, c'est que les différents signes et valeurs des produits scalaires sont toujours compensés de manière exacte, créant ainsi une intégration invariante aux coordonnées.



**Figure 4.16** Compensation exacte des produits scalaires, confirmée mathématiquement par le théorème de Stokes.

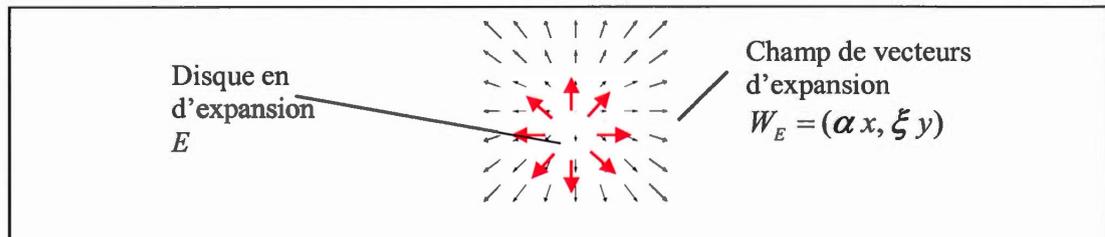
Voyons comment le même raisonnement s'applique, cette fois-ci pour une trajectoire en expansion, ce qui revient alors à intégrer le champ sur les vecteurs de vitesse qui sont orthogonaux à la trajectoire. Nommons ces vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}(n)}$ , où  $n$  indique qu'il s'agit de vecteurs normaux (orthogonaux) à la trajectoire intégrée.

Spécifiquement, nous verrons que le théorème de divergence permet d'obtenir les mêmes résultats que ceux établis par le théorème de Stokes sur la trajectoire de rotation, mais cette fois, en intégrant sur la composante normale.

Considérons un champ de vecteurs ayant une sensibilité à l'expansion des patrons de lumière et exprimé par

$$W_E = (\alpha x, \xi y), \quad \text{où} \quad \alpha\xi > 0.$$

Les vecteurs d'expansion  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}(n)}$  indiqués en rouge sur la figure 4.17 indiquent les composantes normales de la trajectoire sur laquelle le champ est intégré.



**Figure 4.17** Intégration d'une trajectoire d'expansion sur un champ de vecteurs d'expansion  $W_E = (\alpha x, \xi y)$ .

L'intégrale du champ  $W_E$ , sur la composante normale s'exprime par

$$\oint_C W_E \cdot \mathbf{u}_{\text{vélocité}(n)} dl ,$$

soit la sommation des produits scalaires entre  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}(n)}$  et  $W_E$ .

Le théorème de divergence nous permet d'écrire dans ce cas-ci

$$\begin{aligned} & \oint_C W_E \cdot \mathbf{u}_{\text{vélocité}(n)} dl \\ &= \iint_S \nabla \cdot W_E ds , \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'intégrale du champ d'expansion  $W_E$  sur la composante normale est égale à l'intégrale de l'expansion (divergence) du champ sur la surface. Encore une fois, une intégrale de surface (double) devient une intégrale de contour (simple).

Tout comme le champ de rotation possède une force rotative invariante, le champ d'expansion possède une expansion locale invariante donnée par :

$$\nabla \cdot W_E = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} = (\alpha + \xi) .$$

Puisque l'expansion du champ est une constante, on peut alors simplifier l'intégration par

$$\begin{aligned} \oint_C W_E \cdot \mathbf{u}_{\text{vélocité}(n)} dl &= \iint_s \nabla \cdot W_E ds \\ &= \iint_s (\alpha + \xi) ds \\ &= (\alpha + \xi) \iint_s ds \\ &= (\alpha + \xi) s . \end{aligned}$$

On a donc que l'intégrale du champ d'expansion sur la composante normale dépend uniquement de l'expansion du champ et de l'aire de surface, et non des coordonnées globales.

Ces résultats offrent un appui mathématique aux données psychophysiques et physiologiques sur la sensibilité des neurones du cortex visuel moteur, où des neurones sensibles à la rotation, à l'expansion/contraction sont observées, et ce, de manière invariante aux coordonnées.

Une sensibilité aux champs de vecteurs spiralés est aussi observée sur la région MST. Particulièrement, quelques études indiquent la présence d'une sensibilité à un continuum de champs spiralés (Graziano, Andersen et Snowdon, 1994). Un champ spiralé  $W_S = (\alpha x - \beta y, \gamma x + \xi y)$  étant la combinaison linéaire d'un champ de rotation  $W_R = (-\beta y, \gamma x)$  et d'un champ d'expansion  $W_E = (\alpha x, \xi x)$ , ils possèdent respectivement la même force rotative et la même expansion. Ainsi, les mêmes propriétés d'intégration invariantes décrites plus haut s'appliquent. En effet, l'intégration du champ spiralé sur le

disque en expansion et le disque en rotation donnera les mêmes résultats invariants. C'est-à-dire un multiple de la surface dont les coefficients de multiplication sont dans un cas ceux de la force rotative  $(-\beta + \gamma)$ , et dans l'autre, ceux de l'expansion  $(\alpha + \xi)$  du champ.

Dans la section qui suit, nous établissons une généralisation de ces principes.

#### 4.8 Généralisations

Ce qu'on déduit des énoncés qui précèdent, c'est que, pour un champ  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$  où  $\beta\gamma > 0$  et  $\alpha\xi > 0$ , l'amplitude de la force rotative  $(-\beta + \gamma)$  est ce qui émerge de son intégration sur la composante tangentielle ( $\mathbf{v}$ ) au contour. L'expansion  $(\alpha + \xi)$  est ce qui émerge de l'intégration du champ sur la composante normale ( $\mathbf{n}$ ) au contour. Dans les deux cas, l'aire de surface du contour est le facteur multiplicatif.

Cependant, les vecteurs le long du contour ne doivent pas nécessairement être tangentiels ou normaux pour obtenir une intégration globale invariante. Considérons un vecteur général donné par la combinaison linéaire des composantes tangentielles et normales, soit le vecteur  $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{n}$  illustré en rouge sur la figure 4.18.

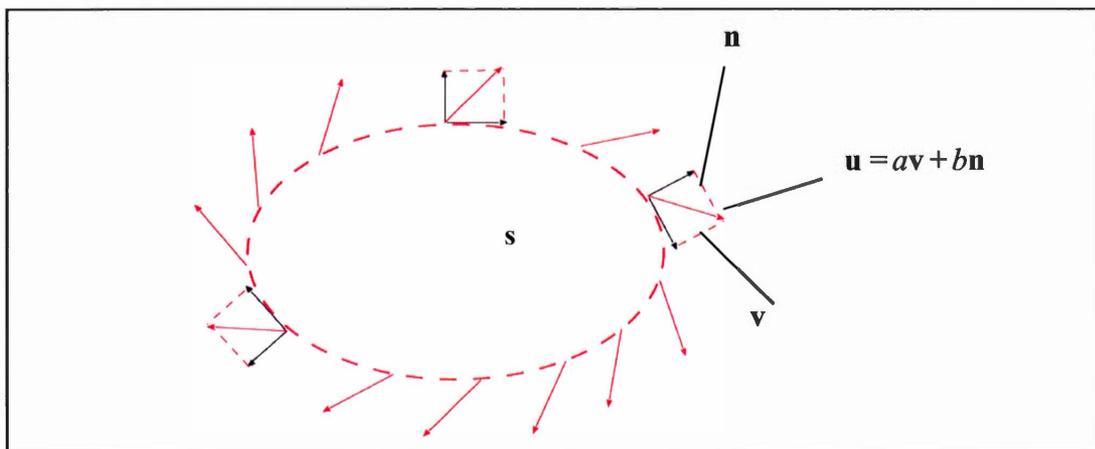


Figure 4.18 Vecteur général  $\mathbf{u}$ , le long d'un contour.

Dans ce cas, on obtient

$$\oint_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} \, dl = \oint_C \mathbf{W} \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{n}) \, dl = a \oint_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \, dl + b \oint_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dl = (a(-\beta + \gamma) + b(\alpha + \xi))s \quad (20)$$

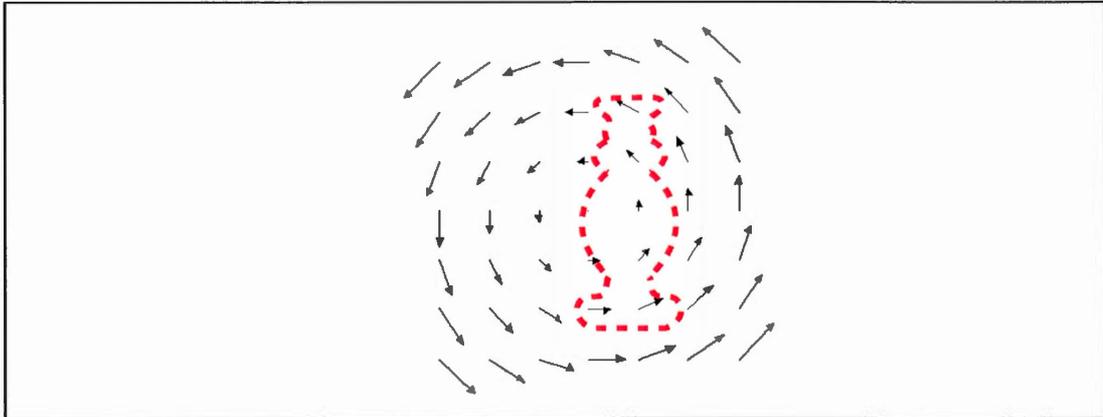
On note alors que l'intégration demeure invariante aux coordonnées du contour dans l'espace. Le résultat d'intégration est alors une fonction de l'aire de surface du contour multipliée par une combinaison linéaire des coefficients de la force rotative et de l'expansion du champ.

Donc, même si deux contours ont une aire de surface identique, leur intégration sera différentes lorsque la combinaison linéaire des composantes tangentielles et normales n'est pas la même pour les deux contours.

L'étude présentée dans la section 4.7 implique l'intégration de trajectoires de mouvements composés de vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}}$ . Les analyses n'avaient pas comme intention l'intégration des champs sur des trajectoires plus complexes comme la combinaison de mouvements ou comme des contours visuels. Dans ce qui suit, il est démontré qu'une intégration globale et invariante des champs de vecteurs élémentaires est possible en intégrant localement, uniquement sur le gradient de lumière qui se trouve aux coins d'un contour polygonal.

#### 4.8 Intégration de polygones à partir des coins

Les contours visuels sont rarement des disques circulaires comme ceux utilisés dans la section précédente. Ils sont composés de la combinaison de toutes sortes de trajectoires, souvent caractérisés par la présence de régions de courbure critique (grande courbure) tels que ceux illustrés sur la figure 4.19.



**Figure 4.19** Contour d'un objet projeté sur un champ de rotation.

Cette section est principalement dédiée à démontrer comment l'intégration globale des champs élémentaires ( $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$ ) sur un polygone peut se faire en intégrant localement sur les coins.

Prenons la forme générale de l'intégration d'un champ élémentaire sur les vecteurs tangentiels ( $\mathbf{v}$ ) à un segment de droite.

$$\oint W \cdot \mathbf{v} \, dl$$

L'intention est de décomposer paramétriquement cette équation en segments le long d'un polygone et ainsi obtenir une forme générale.

Prenons la forme générale des champs de vecteurs élémentaires

$$W = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \xi y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Établissons la forme paramétrique de l'intégration de ces champs le long d'un segment de droite entre les points  $(a, b)$  et  $(c, d)$ .

Ce segment de droite peut être paramétré selon  $l$  par

$$\begin{cases} x(l) = a + (c-a)l \\ y(l) = b + (d-b)l \end{cases} \quad 0 \leq l \leq 1.$$

La dérivée du segment  $(x(l), y(l))$  par rapport à  $l$  donne le vecteur tangentiel

$$\mathbf{v} = (c-a, d-b).$$

On obtient alors l'intégrale de la composante tangentielle  $\mathbf{v}$  du champ  $W$  le long du segment.

$$\oint_c W \cdot \mathbf{v} \, dl =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\alpha(a + (c-a)l) + \beta(b + (d-b)l), \gamma(a + (c-a)l) + \xi(b + (d-b)l)) \cdot (c-a, d-b) \, dl \\ &= \int_0^1 [\alpha(a + (c-a)l) + \beta(b + (d-b)l)](c-a) + [\gamma(a + (c-a)l) + \xi(b + (d-b)l)](d-b) \, dl \\ &= \alpha(c-a) \left[ a + \frac{(c-a)}{2} \right] + \beta(c-a) \left[ b + \frac{(d-b)}{2} \right] \\ &+ \gamma(d-b) \left[ a + \frac{(c-a)}{2} \right] + \xi(d-b) \left[ b + \frac{(d-b)}{2} \right] \\ &= \frac{(a+c)}{2} (\alpha(c-a) + \gamma(d-b)) + \frac{(b+d)}{2} (\beta(c-a) + \xi(d-b)) \end{aligned}$$

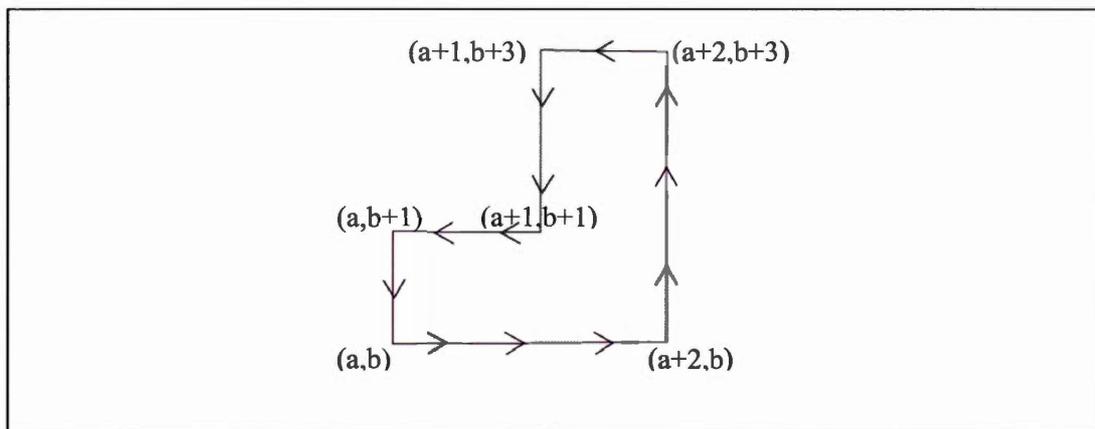
(21)

Malgré le développement quelque peu lourd, notons la simplicité du résultat. Ce dernier indique que l'intégrale du champ le long du segment est donnée par le produit scalaire de deux vecteurs

$$\left( \frac{(a+c)}{2}, \frac{(b+d)}{2} \right) \cdot (\alpha(c-a) + \gamma(d-b), \beta(c-a) + \xi(d-b)), \quad (22)$$

soit un vecteur indiquant le milieu du segment  $\left( \frac{(a+c)}{2}, \frac{(b+d)}{2} \right)$  et un vecteur regroupant les composantes (paramétriques)  $x$  et  $y$  du champ.

Maintenant, appliquons ce résultat non pas le long d'un segment mais le long d'un contour composé de coins. Prenons un polygone d'aire de surface  $s = 4$  (4 unité/carré). À partir d'un point  $(a, b)$ , établissons les coordonnées cartésiennes  $((a+n, b+m))$  des extrémités de chacun des segments.



**Figure 4.20** Polygone de surface  $s = 4$  composé de 6 segments dont les coordonnées cartésiennes des extrémités sont données selon  $(a+n, b+m)$ .

En prenant la forme générale établie en 21, l'intégration (sens anti-horaire) le long des six segments qui composent le contour donne :

$$\oint_{s_1} \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \, dl = 2(\alpha + a\alpha + b\beta)$$

$$\oint_{s_2} \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \, dl = 3(2+a)\gamma + \frac{3}{2}(3+2b)\xi$$

$$\oint_{s_3} \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \, dl = \frac{1}{2}(-3\alpha - 2a\alpha - 6\beta - 2b\beta)$$

$$\oint_{s_4} \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \, dl = -2((1+a)\gamma + (2+b)\xi)$$

$$\oint_{s_5} \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \, dl = \frac{1}{2}(-\alpha - 2a\alpha - 2\beta - 2b\beta)$$

$$\oint_{s_6} \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \, dl = \frac{1}{2}(-2a\gamma - \xi - 2b\xi)$$

L'intégration  $\oint_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \, dl$  le long du polygone se résume par la somme des six intégrations obtenues le long des segments

$$\begin{aligned} & \oint_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \, dl \\ &= \sum_i^6 \oint_{s_i} \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \, dl \\ &= 4(-\beta + \gamma) . \end{aligned}$$

Le résultat est donc l'amplitude de la force rotative du champ multipliée par l'aire de surface du contour, soit exactement le résultat garanti par le théorème de Stokes.

En intégrant cette-fois ci, sur les vecteurs perpendiculaires au contour

$$\mathbf{n} = (-d + b, c - a) .$$

Dans ce cas-ci, l'équation 22 devient

$$\oint_S \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dl = \left( \frac{(a+c)}{2} \right) (\alpha (d-b) + \gamma (c-a)) + \left( \frac{(b+d)}{2} \right) (\beta (d-b) + \xi (c-a))$$

et on obtient le long des six segments

$$\oint_{s_1} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dl = -2(\gamma + a\gamma + b\xi)$$

$$\oint_{s_2} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dl = 3(2+a)\alpha + \frac{3}{2}(3+2b)\beta$$

$$\oint_{s_3} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dl = \left( \frac{3}{2} + a \right) \gamma + (3+b)\xi$$

$$\oint_{s_4} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dl = -2((1+a)\alpha + (2+b)\beta)$$

$$\oint_{s_5} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dl = \left( \frac{1}{2} + a \right) \gamma + (1+b)\xi$$

$$\oint_{s_6} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dl = \frac{1}{2}(-2a\alpha - \beta - 2b\beta) .$$

Ce qui se simplifie à

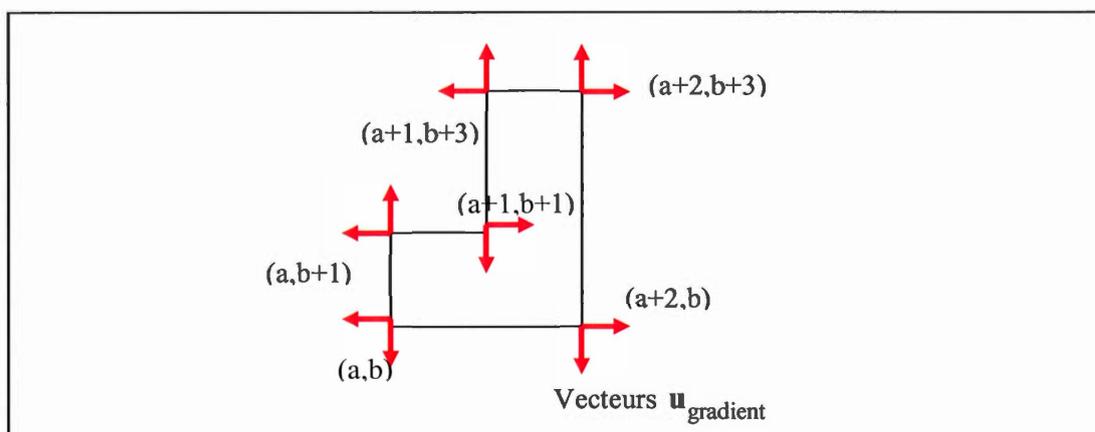
$$\begin{aligned} & \oint_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dl \\ &= \sum_i^6 \oint_{s_i} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dl \\ &= 4(\alpha + \xi) , \end{aligned}$$

ce qui nous donne l'expansion du champ multipliée par l'aire de surface du contour tel que prescrit par le théorème de divergence.

Dans le but de nous rapprocher des fonctions neuronales du cortex visuel, observons dans quelle mesure il est possible d'obtenir les mêmes résultats à partir d'opérations locales et plus précisément à partir des vecteurs représentant le gradient de lumière ( $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$ ) aux

coins du polygone. Dans le cas d'une courbe de niveau, telle que le contour d'un polygone, rappelons que les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  sont perpendiculaires au contour.

La figure 4.21 illustre les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  aux coins du polygone. Notons à nouveau les coordonnées des coins, représentées par  $(a+n, b+m)$ .



**Figure 4.21** Les coins se décomposent en deux composantes, chacune associée à un des deux segments qui se rencontrent.

Nous allons maintenant vérifier si les résultats d'intégration jusqu'à maintenant obtenus pour les champs élémentaires  $\mathcal{W} = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$  peuvent être obtenus en intégrant localement sur les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  qui se trouvent aux coins du polygone. Puisque les vecteurs gradients sont perpendiculaires (orthogonaux) au contour, le résultat théoriquement attendu est

$$\oint \mathcal{W} \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}} dl$$

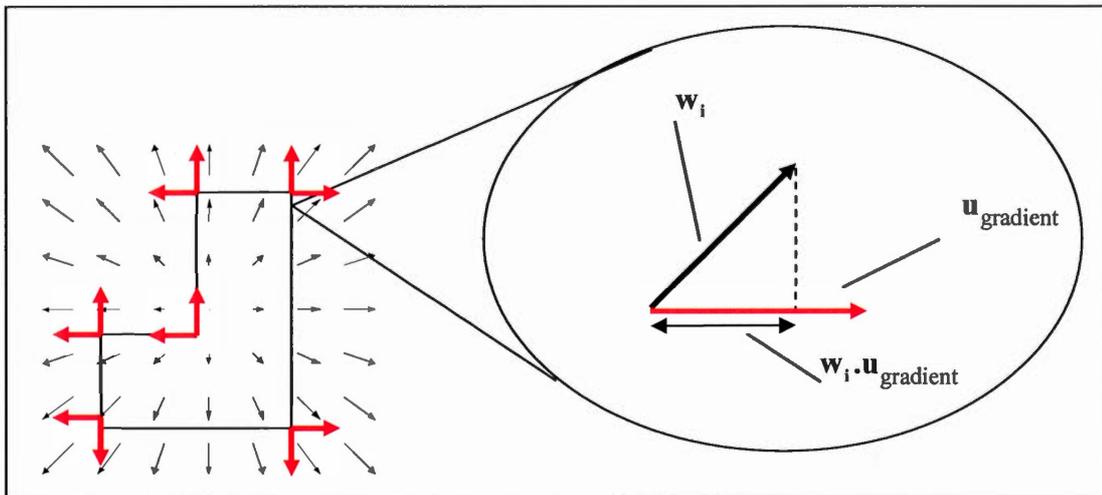
$$= (\alpha + \xi)s ,$$

c'est-à-dire l'expansion du champ multipliée par l'aire de surface.

La sommation des produits scalaires du champ avec les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  donne l'expression discrète d'une intégration continue

$$\oint W \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}} dl \approx \sum_i^N w_i \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}} , \quad (23)$$

où l'indice de sommation  $i$  indique la position sur le contour.



**Figure 4.22** Projection du champ sur le vecteur gradient du contour.

Observons le résultat de l'équation 23 lorsque les points de sommation le long du contour sont limités uniquement aux coins du polygone. L'équation 23 se résume alors à la sommation des six produits scalaires (associés aux six coins).

Les duos de vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  aux six coins peuvent être représentés comme suit :

$$\mathbf{u}_{\text{gradient } 1} = ((-1, 0) + (0, -1))$$

$$\mathbf{u}_{\text{gradient } 2} = ((1, 0) + (0, -1))$$

$$\mathbf{u}_{\text{gradient } 3} = ((1, 0) + (0, 1))$$

$$\mathbf{u}_{\text{gradient } 4} = ((-1, 0) + (0, 1))$$

$$\mathbf{u}_{\text{gradient } 5} = ((-1, 0) + (0, 1))$$

$$\mathbf{u}_{\text{gradient } 6} = ((-1, 0) + (0, 1))$$

Les vecteurs du champ  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$  aux six coins du polygone sont donnés par

$$\mathbf{w}_1 = (\alpha a + \beta b, \gamma a + \xi b)$$

$$\mathbf{w}_2 = (\alpha(a+2) + \beta b, \gamma(a+2) + \xi b)$$

$$\mathbf{w}_3 = (\alpha(a+2) + \beta(b+3), \gamma(a+2) + \xi(b+3))$$

$$\mathbf{w}_4 = (\alpha(a+1) + \beta(b+3), \gamma(a+1) + \xi(b+3))$$

$$\mathbf{w}_5 = (\alpha(a+1) + \beta(b+1), \gamma(a+1) + \xi(b+1))$$

$$\mathbf{w}_6 = (\alpha a + \beta(b+1), \gamma a + \xi(b+1)) .$$

En intégrant uniquement aux coins, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_i^6 \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } i} &= \\ & \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 1} + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 2} + \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 3} \\ & + \mathbf{w}_4 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 4} + \mathbf{w}_5 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 5} + \mathbf{w}_6 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 6} \\ & = \alpha(-2a+2) + \beta(-2b-2) + \gamma(2+2a) - \xi(8+2b) . \end{aligned}$$

La présence des coordonnées  $a$  et  $b$  dans le résultat indique que le résultat n'est pas invariant aux coordonnées du polygone dans l'espace. De plus, la présence des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  associés à la force rotative (et d'une composante tangentielle) nous éloigne davantage du résultat prescrit par

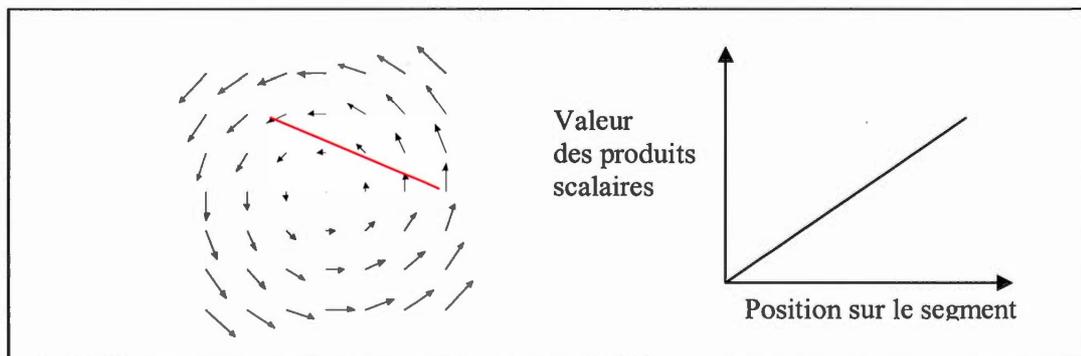
$$\oint W \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}} dl$$

$$= (\alpha + \xi)s .$$

En observant la forme établie par l'équation 21, un indice sur une intégration appropriée à partir des coins se présente. On note que le résultat d'intégration dépend du point milieu sur le segment. Rappelons aussi que les champs  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$  sont des champs linéaires, ce qui se traduit par la représentation des coefficients du champ dans une matrice  $A$ .

$$W = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \xi y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La linéarité du champ implique que les produits scalaires  $W \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}}$  le long d'une droite décrivent aussi une droite.



**Figure 4.23** Les produits scalaires du champ sur les côtés d'un polygone décrivent une droite.

Une droite peut s'exprimer selon une somme arithmétique

$$mx_i + b$$

où  $i$  appartient à  
 $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$  ,

soit

$$(mx_1 + b), (mx_2 + b), \dots, (mx_{n-1} + b), (mx_n + b) .$$

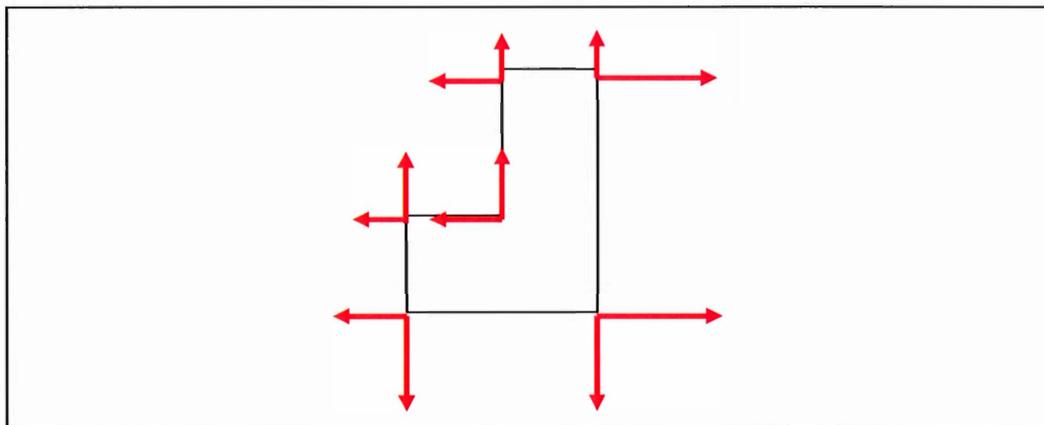
Pour une série arithmétique, où les écarts  $(x_{i+1} - x_i)$  sont constants, la somme des éléments de toute paire formée depuis les extrémités est toujours la même, peu importe la paire, soit

$$\begin{aligned} & (mx_1 + b) + (mx_n + b) \\ & = m(x_1 + x_n) + 2b , \end{aligned}$$

ce qui permet de dire que la somme totale est toujours égale à la somme d'une paire multipliée par le nombre de paires  $\frac{n}{2}$ .

Ainsi, puisque les produits scalaires  $W \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}}$  décrivent une somme arithmétique, l'intégration totale (la somme de Riemann) pour tout le segment est toujours égale à la somme des produits scalaires aux deux extrémités, multipliée par la demi-longueur du segment. Physiquement, ceci indique que le travail effectué par le champ le long du segment s'obtient aussi par le produit scalaire du champ sur des vecteurs aux deux extrémités du segment (des vecteurs égaux à la demi-longueur du segment).

Ainsi, les vecteurs de coin ne doivent pas être de longueur unitaire comme l'intuition le suggère, mais plutôt d'une longueur proportionnelle à la demi-longueur du segment dont ils sont les extrémités.



**Figure 4.24** Vecteurs normaux aux coins dont la longueur est la moitié du segment dont ils sont l'extrémité.

Les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  aux coins sont maintenant

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{gradient } 1} &= \left( \frac{1}{2}(-1, 0) + 1(0, -1) \right), & \mathbf{u}_{\text{gradient } 2} &= \left( \frac{3}{2}(1, 0) + 1(0, -1) \right) \\ \mathbf{u}_{\text{gradient } 3} &= \left( \frac{3}{2}(1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1) \right), & \mathbf{u}_{\text{gradient } 4} &= \left( 1(-1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1) \right) \\ \mathbf{u}_{\text{gradient } 5} &= \left( 1(-1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1) \right), & \mathbf{u}_{\text{gradient } 6} &= \left( \frac{1}{2}(-1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1) \right). \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_i^6 \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } i} &= \\ \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 1} + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 2} + \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 3} &+ \\ + \mathbf{w}_4 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 4} + \mathbf{w}_5 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 5} + \mathbf{w}_6 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient } 6} &= \\ &= 4(\alpha + \xi), \end{aligned}$$

soit le résultat théorique auquel nous aspirons.

Ces résultats démontrent donc que les propriétés invariantes globales des champs de vecteurs élémentaires demeurent théoriquement correctes en intégrant localement sur les coins des polygones. Sans en offrir une explication profonde, ceci est en correspondance avec les données psychophysiques selon lesquelles seules les régions de haute courbure sont suffisantes pour obtenir un percept équivalent à celui obtenu par la forme complète.

Notons également ceci : sans pondérer les vecteurs de coin par la demi-longueur du segment, un résultat théoriquement correct est aussi possible. Pour ce faire, il faut inverser le signe des vecteurs qui définissent un *coin concave*. Curieusement, l'importance des coins concaves (courbure négative) est bien documentée dans la littérature sur la perception des formes (D.D. Hoffman 2000).

Cependant, un point incontournable demeure. L'invariance des résultats est, jusqu'à présent, spécifique à l'aire de surface du contour et non à sa forme, ce qui est peu catégorique. Une infinité de contours visuels peuvent avoir la même aire de surface. Une intégration qui répond invariablement à l'aire de surface apporte peu de valeur pour une mémoire visuelle des formes. Cette invariance trop permissive découle du fait que l'intégration des champs exprime une invariance différentielle (homéomorphisme), laquelle se préoccupe uniquement de la connexité et de la continuité de l'espace sans se soucier de sa géométrie. Deux contours de mêmes surfaces qui ne contiennent aucune interruption possèdent exactement la même structure différentielle, les mêmes relations de voisinage. Ainsi, par le théorème de Stokes et le théorème de divergence, ceux-ci donnent la même valeur d'intégration.

Dans le but d'apporter une solution à ce problème, voyons comment deux contours qui ont la même aire de surface peuvent donner des résultats d'intégration différents.

Nous avons établi une généralisation pour un vecteur général  $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{n}$  et un champ  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$ , où  $\beta\gamma > 0$  et  $\alpha\xi > 0$ , pour laquelle on obtient le résultat suivant

$$\oint_C \mathcal{W} \cdot \mathbf{u} \, dl = \oint_C \mathcal{W} \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{n}) \, dl = a \oint_C \mathcal{W} \cdot \mathbf{v} \, dl + b \oint_C \mathcal{W} \cdot \mathbf{n} \, dl = (a(-\beta + \gamma) + b(\alpha + \xi))s,$$

c'est-à-dire une intégration qui est une fonction de l'aire de surface du contour, multipliée par une combinaison linéaire des coefficients de la force rotative et de l'expansion du champ. Vérifions numériquement cette généralisation en appliquant une transformation aux vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$ . Transformons les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  par l'addition d'un multiple du vecteur tangentiel  $\mathbf{v}$ .

Tout comme c'est le cas pour les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$ , la longueur des vecteurs tangentiels  $\mathbf{v}$  doit être la demi-longueur des segments dont ils sont l'extrémité. Les vecteurs tangentiels aux coins du polygone sont alors donnés par

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \left( 1(1,0) + \frac{1}{2}(0,-1) \right), & \mathbf{v}_2 &= \left( 1(1,0) + \frac{3}{2}(0,1) \right) \\ \mathbf{v}_3 &= \left( \frac{1}{2}(-1,0) + \frac{3}{2}(0,1) \right), & \mathbf{v}_4 &= \left( \frac{1}{2}(-1,0) + 1(0,-1) \right) \\ \mathbf{v}_5 &= \left( \frac{1}{2}(-1,0) + 1(0,-1) \right), & \mathbf{v}_6 &= \left( \frac{1}{2}(-1,0) + \frac{1}{2}(0,-1) \right). \end{aligned}$$

Considérons comme exemple la combinaison linéaire  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{gradient}} + 2\mathbf{v}$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_{\text{gradient}1} + 2\mathbf{v}_1 = \left( \frac{3}{2}, -2 \right), & \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_{\text{gradient}2} + 2\mathbf{v}_2 = \left( \frac{7}{2}, 2 \right) \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{u}_{\text{gradient}3} + 2\mathbf{v}_3 = \left( \frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right), & \mathbf{u}_4 &= \mathbf{u}_{\text{gradient}4} + 2\mathbf{v}_4 = \left( -2, -\frac{3}{2} \right) \\ \mathbf{u}_5 &= \mathbf{u}_{\text{gradient}5} + 2\mathbf{v}_5 = \left( -2, -\frac{3}{2} \right), & \mathbf{u}_6 &= \mathbf{u}_{\text{gradient}6} + 2\mathbf{v}_6 = \left( -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Contrairement aux vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  qui sont perpendiculaires au contour, les vecteurs  $\mathbf{u}$  ont une composante tangentielle, ce qui devrait engendrer l'intégration d'une force rotative.

On confirme cela en intégrant aux coins du polygone le champ  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$  où  $\beta\gamma > 0$  et  $\alpha\xi > 0$ . On obtient dans ce cas

$$\begin{aligned} \sum_i^6 \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{u}_i &= \\ \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{u}_3 \\ + \mathbf{w}_4 \cdot \mathbf{u}_4 + \mathbf{w}_5 \cdot \mathbf{u}_5 + \mathbf{w}_6 \cdot \mathbf{u}_6 \\ &= 4((\alpha + \xi) + 2(-\beta + \gamma)) . \end{aligned}$$

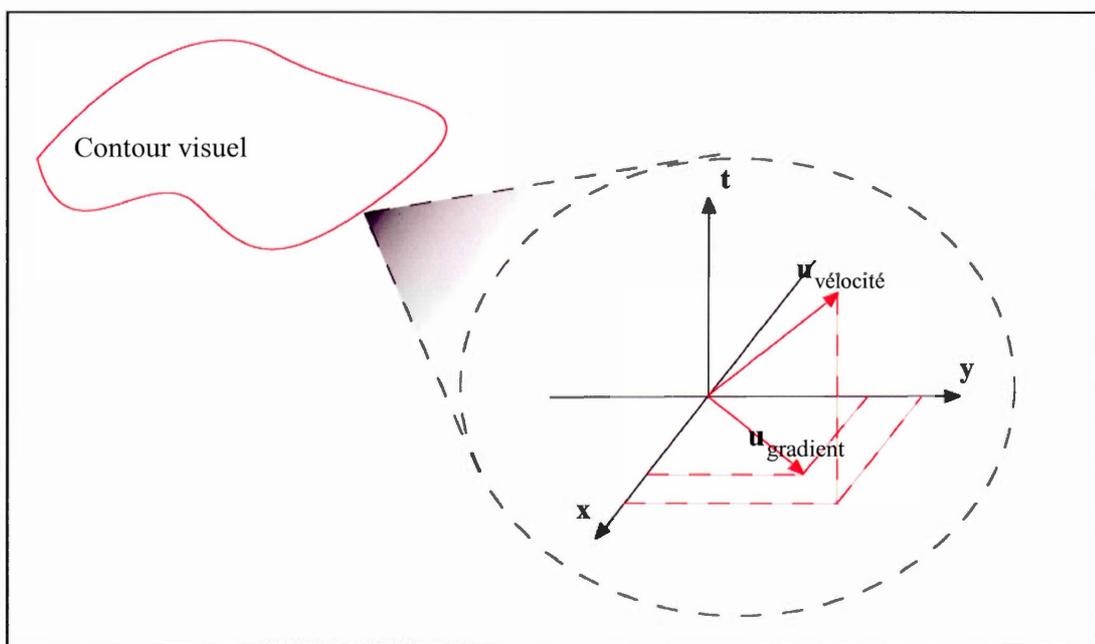
Tel que voulu, on obtient comme résultat l'aire de surface du contour multipliée par une combinaison linéaire des coefficients de la force rotative et de l'expansion du champ.

L'école gestaltiste a depuis longtemps considéré la perception visuelle par la présence de champs de forces dont la nature dynamique et géométrique agit sur le cortex (Bruter, 1974). Dans la section qui suit, nos résultats indiquent que, lorsque les effets du mouvement sont considérés, la *force* générée par les vecteurs de vitesse permet de reproduire les mêmes résultats que ceux obtenus par l'addition d'une composante tangentielle aux vecteurs de gradient.

#### 4.10 Action des forces générées lors du mouvement

Dans cette section, il s'agit de voir par quel principe le mouvement d'un objet peut engendrer l'addition d'une composante tangentielle aux vecteurs de gradient afin d'obtenir un résultat plus catégorique, c'est-à-dire un résultat qui n'est pas uniquement une fonction de l'aire de surface.

Illustrons à nouveau le système d'axe local *espace-temps* d'un contour visuel et voyons comment l'obtention d'une composante tangentielle est rendue possible par l'action des forces générées lors du mouvement.



**Figure 4.25** Système d'axe local sur un contour visuel.

Spécifiquement, voyons comment la force des vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}}$  appliquée sur les vecteurs de contour  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  génère la composante tangentielle que nous cherchons.

Pour ce faire, il importe de réitérer les principes physiques reliés au produit vectoriel de deux vecteurs. Tel qu'indiqué plus haut, le produit vectoriel d'un vecteur **a** sur un vecteur **b** génère un troisième vecteur dont la signification physique est une force de torsion, ou encore la force exercée par le vecteur **a** dans sa rotation sur le vecteur **b**. Cette force de torsion est toujours orthogonale aux vecteurs **a** et **b**. Spécifiquement, le produit vectoriel de deux vecteurs **a** et **b** génère un troisième vecteur, **c** (*vecteur de torsion*), orthogonal aux deux premiers et dont l'amplitude est donnée par  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\theta)$ , où  $\theta$  indique l'angle entre les vecteurs **a** et **b**.

En physique, les forces de couplage ou les forces de torsion engendrées par un champ électromagnétique sur les charges électriques d'un autre champ (*loi de Lorentz*) découlent du produit vectoriel des vecteurs locaux qui composent les deux champs (Reitz et Milford, 1967). Lorsque la force générée par un champ se combine dans une même direction à celle d'un autre champ, on dit qu'il y a *couplage des forces* entre les deux champs. Dans le cas où la force engendre une rotation des pôles, on dit qu'il s'agit d'une *force de torsion*. Dans notre exemple, il s'agira entre autres du couplage entre les vecteurs de torsion générés par le mouvement et les vecteurs de gradient de lumière (contours visuels).

Comme nous en avons discuté au deuxième chapitre, les forces générées par le courant électrique qui circule sur les neurones demeurent un sujet non étudié en ce qui a trait à leurs effets sur la perception. Les modèles neuronaux considèrent plutôt l'état d'un champ électrique (statique) comme la représentation neuronale des mémoires et non pas un courant électrique et les forces physiques (électromagnétiques) qu'il génère. Cependant, en considérant que les champs de vecteurs sont de réels courants électriques et qu'ils s'expriment sur des populations massives de neurones, il se pourrait bien que les *forces de couplage* et les *forces de torsion* soient suffisantes pour affecter directement la transmission et donc la perception.

Rappelons aussi la notion de forces *perceptives*. Une notion appuyée par Lewin (1936) dans une théorie géométrique sur la psychologie. Les vecteurs peuvent dans ce cas

être des forces perceptives qui, comme une force physique au sens classique, possèdent une amplitude, une direction et un point d'action.

Dans tous les cas, nous utilisons dans ce qui suit, comme le stipule la *Loi de Lorentz*, le produit vectoriel entre les vecteurs des champs afin d'exprimer la force qu'ils engendrent l'un sur l'autre.

Le vecteur gradient est orienté dans le plan ( $x$ - $y$ ) et possède donc une dimension temporelle nulle, établissons ce vecteur gradient comme

$$\mathbf{u}_{\text{gradient}} = (x_1, y_1, 0).$$

Le vecteur de vitesse orienté dans le plan *espace-temps* est donné par

$$\mathbf{u}_{\text{vitesse}} = (x_2, y_2, t).$$

La projection dans le plan du produit vectoriel du vecteur gradient avec le vecteur de vitesse ( $\mathbf{u}_{\text{vitesse}} \times \mathbf{u}_{\text{gradient}}$ ) donne un vecteur (vecteur de torsion) orthogonal aux deux premiers selon

$$\mathbf{u}_{\text{torsion}} = (y_2 \cdot 0 - t y_1, t x_1 - x_2 \cdot 0, 0) = (t y_1, t x_1, 0).$$

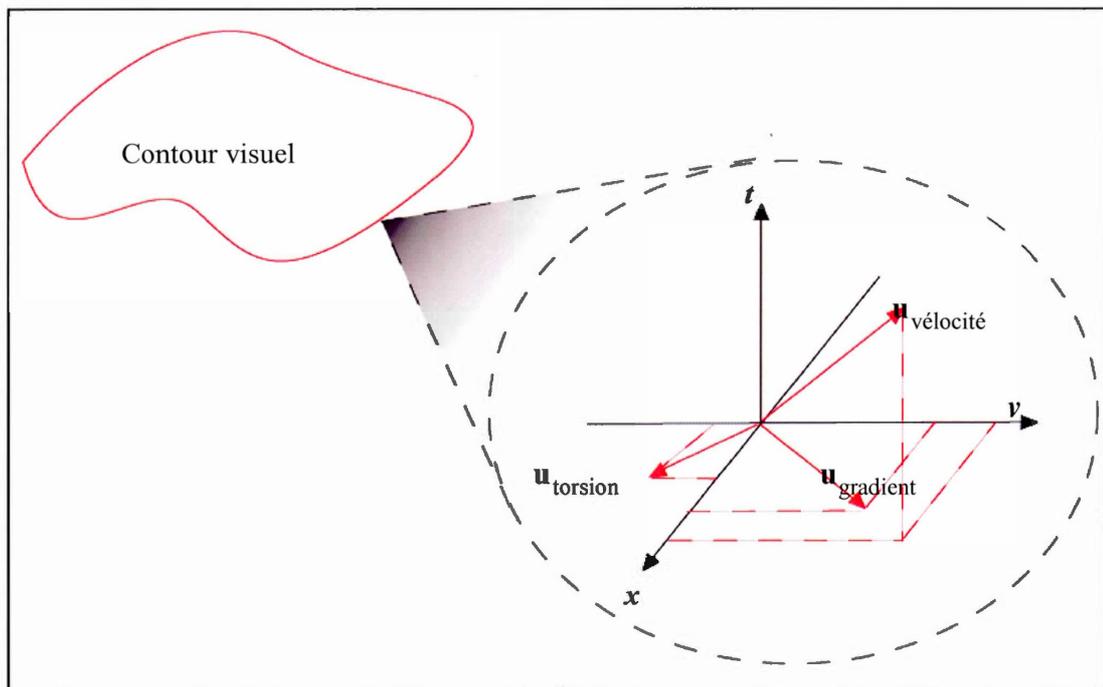
Physiquement, le vecteur  $\mathbf{u}_{\text{torsion}}$  exprime la force exercée par le vecteur  $\mathbf{u}_{\text{vitesse}}$  sur le vecteur  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$ . Nous nous intéressons aux propriétés qui découlent de l'addition (du couplage) de cette force sur le vecteur  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$ .

Une propriété bien intéressante découle du fait que le vecteur  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  possède une dimension temporelle nulle. En effet, le rapport entre la longueur de  $\mathbf{u}_{\text{torsion}}$  et celle de  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  donne le résultat suivant

$$\frac{|\mathbf{u}_{\text{torsion}}|}{|\mathbf{u}_{\text{gradient}}|} = \frac{\sqrt{(ty_1)^2 + (tx_1)^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{t^2 y_1^2 + t^2 x_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \sqrt{\frac{t^2 (y_1^2 + x_1^2)}{(x_1^2 + y_1^2)}} = t,$$

où  $t$  indique l'échelle de résolution temporelle à laquelle s'exprime le vecteur de vélocité.

Ce résultat indique que, peu importe l'orientation du vecteur  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}}$ , son produit vectoriel avec le vecteur  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  génère un vecteur  $\mathbf{u}_{\text{torsion}}$  qui est tangentiel au contour et dont la longueur est toujours un multiple  $t$  de la longueur de  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$ .



**Figure 4.26** Le vecteur de torsion est tangentiel au contour et a toujours comme longueur un multiple  $t$  de la longueur du vecteur de gradient.

Si la résolution temporelle  $t$  est la même pour tous les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}}$ , on obtient que le mouvement engendre l'addition d'un composante tangentielle de telle sorte que

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} \, dl &= \oint_C \mathbf{W} \cdot (t\mathbf{u}_{\text{torsion}} + \mathbf{u}_{\text{gradient}}) \, dl = t \oint_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}_{\text{torsion}} \, dl + \oint_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}} \, dl \\ &= (t(-\beta + \gamma) + (\alpha + \xi))s . \end{aligned}$$

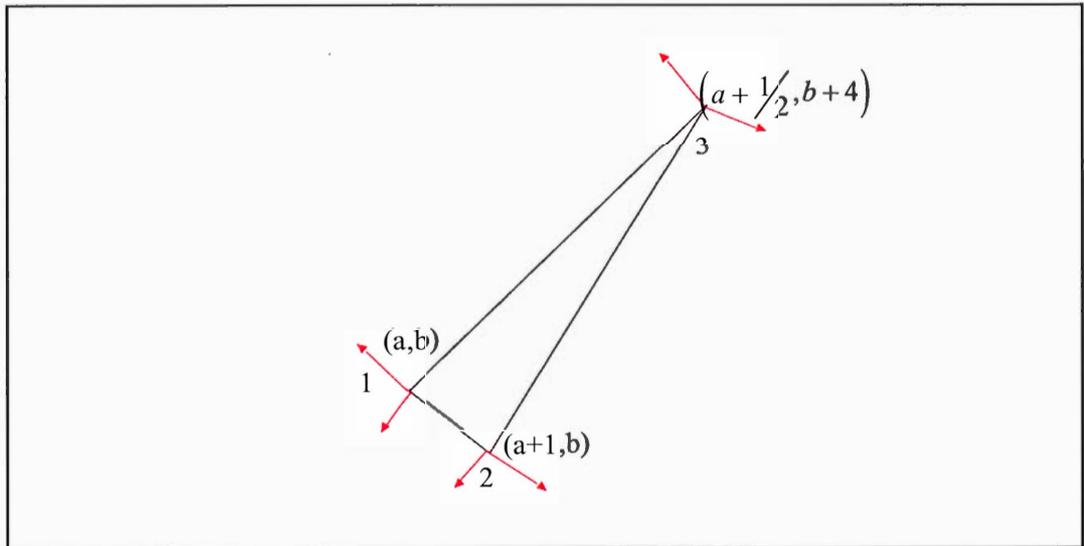
On obtient donc une intégration invariante qui ne dépend pas uniquement de l'aire de surface du contour mais qui dépend aussi de la combinaison linéaire des coefficients de l'expansion et de la force rotative du champ.

Ce résultat est intéressant puisque c'est l'échelle de résolution temporelle ( $t$ ) qui détermine la combinaison linéaire. La direction des vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}}$  ne change rien à l'intégration. Un modèle où la direction du mouvement relatif entre les yeux et les objets préviendrait une identification invariante serait très peu représentatif du système visuel.

Afin de rendre cette intégration catégorique, il nous reste à établir dans quelle condition l'échelle de résolution temporelle (la valeur de  $t$ ) est spécifique à la géométrie du contour. Dans cette condition, on aura alors une invariance qui n'est pas uniquement fonction de l'aire de surface, mais aussi une fonction de la forme du contour. D'abord, illustrons avec deux exemples numériques les résultats présentés jusqu'ici.

## 4.11 Exemples numériques

Prenons un triangle isocèle de base 1 et de hauteur 4. L'orientation du triangle nous rappelle que les résultats sont théoriquement invariants aux coordonnées.



**Figure 4.27** Triangle de surface  $s = \frac{4 \times 1}{2} = 2$  illustré avec ses vecteurs gradients aux coins.

Rappelons que les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  sont des vecteurs perpendiculaires au contour et que, si on intègre uniquement sur les coins, ils doivent être pondérés par la demi-longueur des côtés du triangle.

Les vecteurs gradients sont

$$\mathbf{u}_{\text{gradient 1}} : \left( \frac{1}{2}(-4, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(0, -1) \right)$$

$$\mathbf{u}_{\text{gradient 2}} : \left( \frac{1}{2}(0, -1) + \frac{1}{2}(4, \frac{1}{2}) \right)$$

$$\mathbf{u}_{\text{gradient 3}} : \left( \frac{1}{2}(-4, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(4, \frac{1}{2}) \right)$$

Intégrons sur le contour (aux coins) le champ de vecteurs  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$  où  $\beta\gamma > 0$  et  $\alpha\xi > 0$ .

Puisque les vecteurs gradients  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  sont perpendiculaires au contour, la composante tangentielle est nulle. On s'attend alors au résultat suivant :

$$\oint_C W \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}} dl = (\alpha + \xi)s$$

La valeur des vecteurs de champs aux trois coins du triangle est

$$w_1 = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$$

$$w_2 = (\alpha(x+1) + \beta y, \gamma(x+1) + \xi y)$$

$$w_3 = (\alpha(x + \frac{1}{2}) + \beta(y+4), \gamma(x + \frac{1}{2}) + \xi(y+4)) .$$

L'intégration donne

$$\begin{aligned} & \oint_C W \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}} dl \\ &= w_1 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient} 1} + w_2 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient} 2} + w_3 \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient} 3} \\ &= 2(\alpha + \xi) , \end{aligned}$$

soit le résultat théoriquement attendu.

Reprenons la même intégration en ajoutant les effets d'un vecteur de vitesse globale  $v = (0, 2, 0, 5, 0, 6)$  appliqué au triangle.

La projection du vecteur de vitesse globale  $v = (0, 2, 0, 5, 0, 6)$  sur les directions orthogonales aux coins indique les vitesses localement perçues

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\text{vélocité}1} &= (0,254, 0,032, 0,6) \\ \mathbf{u}_{\text{vélocité}2} &= (0,135, -0,16, 0,6) \\ \mathbf{u}_{\text{vélocité}3} &= (0,000, 0,500, 0,6) .\end{aligned}$$

Notons la résolution temporelle  $t$  (fixée à 0,6) soulignant que, même si les vitesses locales ont une orientation et une amplitude différentes, elles s'expriment à une même échelle de résolution temporelle.

Les projections, dans le plan  $xy$ , des produits vectoriels ( $\mathbf{u}_{\text{vélocité}} \times \mathbf{u}_{\text{gradient}}$ ) indiquent les forces de torsion  $\mathbf{u}_{\text{torsion}}$  aux coins du triangle.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\text{torsion}1} &= (0,15, -1,2, 0) \\ \mathbf{u}_{\text{torsion}2} &= (0,15, 1,2, 0) \\ \mathbf{u}_{\text{torsion}3} &= (-0,30, 0, 0) .\end{aligned}$$

L'addition des vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{torsion}}$  donne

$$\begin{aligned}& \oint_C \mathcal{W} \cdot (\mathbf{u}_{\text{gradient}} + \mathbf{u}_{\text{torsion}}) dl \\ &= \mathcal{W}_1 \cdot (\mathbf{u}_{\text{gradient}1} + \mathbf{u}_{\text{torsion}1}) + \mathcal{W}_2 \cdot (\mathbf{u}_{\text{gradient}2} + \mathbf{u}_{\text{torsion}2}) + \mathcal{W}_3 \cdot (\mathbf{u}_{\text{gradient}3} + \mathbf{u}_{\text{torsion}3}) \\ &= 2((\alpha + \xi) + 0,6(-\beta + \gamma)) .\end{aligned}$$

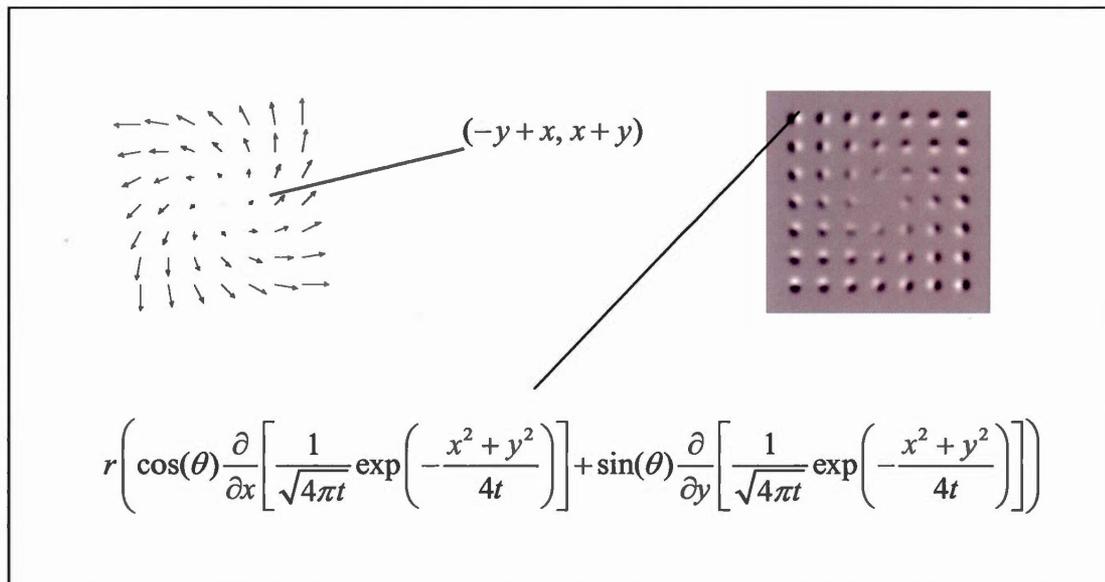
Ceci confirme que l'addition du vecteur de torsion sur le vecteur de gradient engendre l'apparition d'une composante tangentielle et donc l'intégration de la force rotative du champ. Tout aussi important, le résultat demeure invariant aux coordonnées dans l'espace ainsi qu'à la direction du mouvement.

#### 4.12 Exemples numériques avec opérateurs de dérivée partielle

Le cortex visuel se tapisse d'opérateurs de dérivée partielle locale et non de petits vecteurs géométriques. Bien que théoriquement ces deux expressions soient équivalentes, il demeure intéressant de vérifier dans quelle mesure les mêmes résultats sont obtenus sur des images numériques en utilisant les opérateurs de dérivée partielle locale qui servent de modèle aux opérations du cortex visuel.

Reprenons le même exemple. Il est alors question de substituer les vecteurs géométriques par des opérateurs de dérivée partielle.

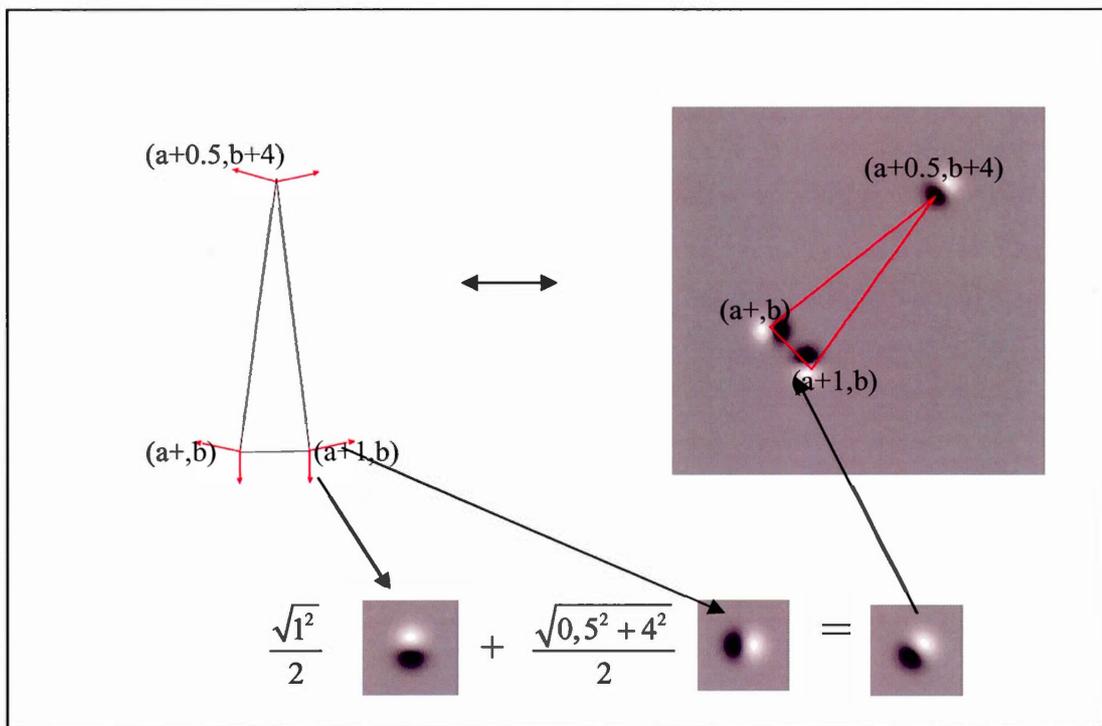
Ainsi, comme l'illustre en exemple la figure 4.28, le champs spiralé  $W = (-\beta y + \alpha x, \gamma x + \xi y)$ , où  $\alpha=1, \beta=-1, \gamma=1, \xi=1$ , est substitué par le champ d'opérateurs de dérivée partielle correspondants.



**Figure 4.28** Champs d'opérateurs de dérivée partielle locale. Les opérateurs sont orientés en fonction de la combinaison linéaire d'une dérivée partielle selon l'axe  $x$  et selon l'axe  $y$ .

Notons la pondération par  $r$  dans l'expression de l'opérateur de dérivée partielle sur la figure 4.28. La valeur de  $r$  indique la distance de l'opérateur depuis le centre du champ, ce qui correspond à la variation linéaire de la vitesse (aussi représentée par des vecteurs plus longs en périphérie). Le paramètre  $\theta$  détermine la direction spatiale de l'opérateur de dérivé (dérivée directionnelle). Le paramètre  $t$  donne l'échelle de l'opérateur. Exprimés ainsi, ces champs d'opérateurs gaussiens possèdent théoriquement les mêmes propriétés d'intégration que les champs de vecteurs géométriques.

Tel que l'illustre la figure 4.29, les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{gradient}}$  aux coins du triangle sont aussi représentés par des opérateurs de dérivée partielle.



**Figure 4.29** Vecteurs gradients des coins d'un triangle représentés par des opérateurs de dérivée partielle. Notons la pondération des opérateurs par la demi-longueur du segment correspondant.

Tout comme nous l'avons fait dans le cas de vecteurs géométrique, les opérateurs de dérivée partielle sont pondérés par la demi-longueur du segment correspondant.

L'intégration de chacun des champs sur les coins du triangle s'obtient simplement en prenant le produit scalaire des deux images numériques. En effet, tous les opérateurs se trouvent sur une même image  $I_W$  et tous les vecteurs gradients du triangle se trouvent aussi sur une même image  $I_{\text{gradient}}$ . En traitant ces images comme des vecteurs globaux, on peut exprimer l'intégration  $\oint W \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}} dl$  par un simple produit scalaire

$$\oint W \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}} dl = I_W \cdot I_{\text{gradient}}.$$

En prenant le produit scalaire de l'image du champ spiralé  $I_{W_S}$  illustré sur la figure 4.28 avec l'image gradient  $I_{\text{gradient}}$  illustrée sur la figure 4.29, on obtient

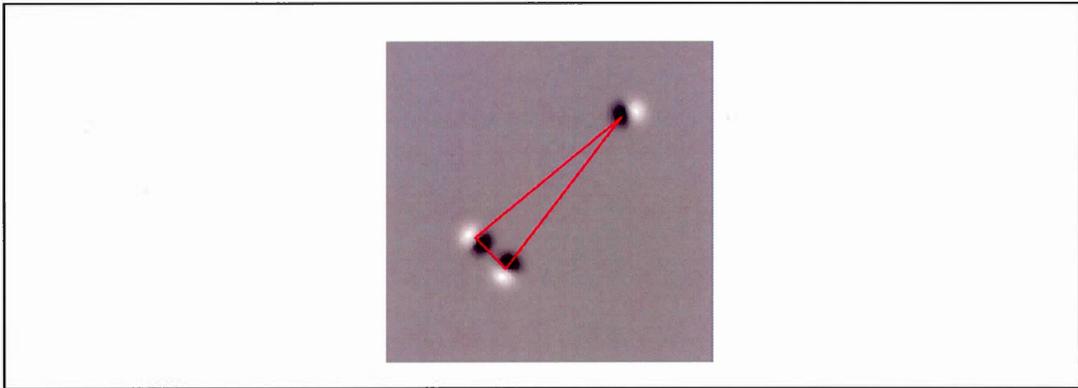
$$\oint W_S \cdot \mathbf{u}_{\text{gradient}} dl = I_{W_S} \cdot I_{\text{gradient}} = 4,012,$$

soit, à quelques imperfections numériques près, le même résultat obtenu en utilisant une représentation vectorielle.

Reprenons à nouveau l'intégration avec le même vecteur de vitesse globale utilisé dans notre premier exemple, soit  $v = (0,2, 0,5, 0,6)$ .

En notant que la valeur sur l'axe temporel est de  $t = 0,6$ , nous savons alors que les opérateurs de torsion  $\mathbf{u}_{\text{torsion}}$  générés à chaque coin seront un multiple  $t = 0,6$  des vecteurs gradients et orientés orthogonalement à ceux-ci.

En additionnant à chaque opérateur de dérivée au coin du triangle un même opérateur orienté à 90 degrés et pondéré par 0,6, on obtient alors l'image numérique suivante.



**Figure 4.30** Les opérateurs aux coins suite à l'addition de l'opérateur de torsion.

L'intégration donne dans ce cas

$$\begin{aligned} I_W \cdot I_{\text{gradient}} \\ = 6,4108 \end{aligned}$$

soit à quelques imperfections numériques près, le même résultat obtenu en utilisant une représentation vectorielle, c'est-à-dire,

$$2((\alpha + \xi) + t(-\beta + \gamma)) = 6,4, \text{ où } t = 0.6, \alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1, \xi = 1.$$

Dans la section qui suit, nous illustrons les conditions pour lesquelles la valeur de  $t$  serait spécifique à la géométrie du polygone. Dans ce cas, par le biais des vecteurs de vitesse, l'intégration n'est plus uniquement fonction de l'aire de surface, mais aussi une fonction de la forme du contour.

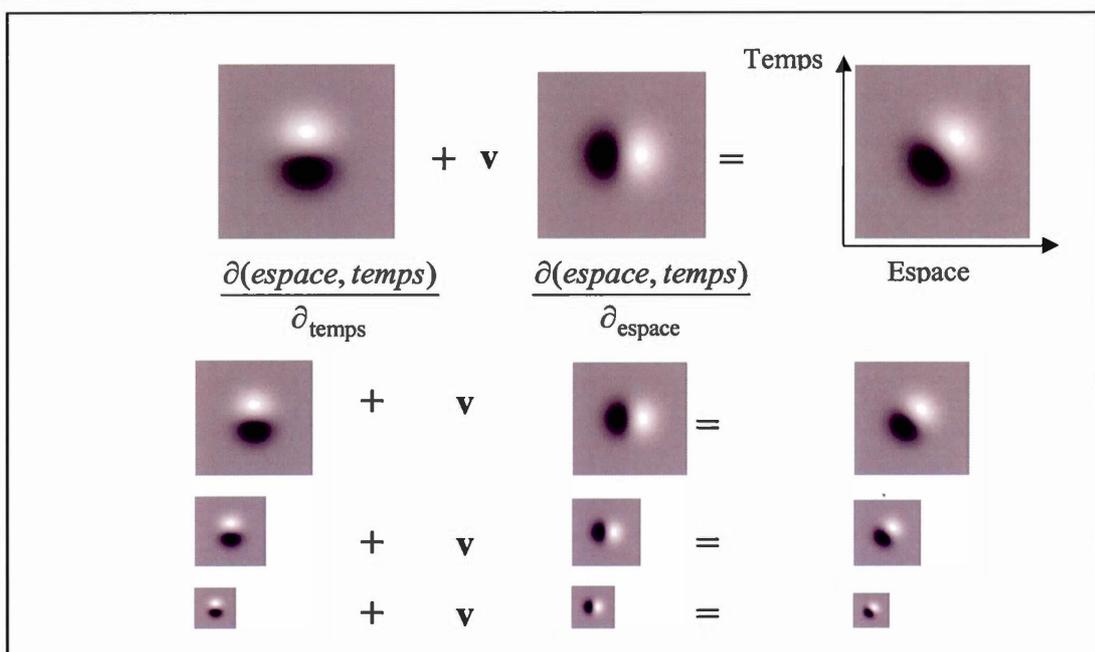
#### 4.13 Continuum de résolutions temporelles et équilibre des champs de forces

Le modèle présenté au troisième chapitre indique qu'un continuum de résolutions spatiales assure une représentation plus riche et donc spécifique au contour de la forme. En

effet, les opérateurs à grande échelle ont la propriété de *voir plus loin* dans l'image et sont donc sensibles à la structure globale du contour (figure 3.12 chapitre 3).

Exactement le même principe s'applique aux opérateurs orientés dans l'espace-temps (les vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}}$ ). Dans ce cas, les opérateurs ont la propriété de voir le mouvement du contour sur une plus grande distance, *ils voient plus loin* dans l'espace et le temps. Ils sont donc sensibles à la structure globale du contour lors de son mouvement. Un continuum de résolutions temporelles des vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}}$  assure donc une représentation du mouvement qui dépend de la position relative des coins du contour.

Dans notre représentation vectorielle, l'échelle de résolution temporelle correspond à l'élévation sur l'axe temporel, la valeur de  $t$ . Puisque c'est la valeur de  $t$  qui détermine la force appliquée, un continuum de résolutions temporelles génère un continuum de forces qui sont spécifiques à la structure globale du contour, spécifique à la position relative des coins. La suite logique des analyses serait alors de considérer la force exercée par les vecteurs de vélocité à travers toutes les échelles de résolution, et donc toutes les valeurs de  $t$ .



**Figure 4.31** Continuum d'échelles des vecteurs  $\mathbf{u}_{\text{vélocité}}$  dans l'espace-temps.

Il serait tout aussi pertinent de considérer l'interaction des champs  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$  non seulement entre les échelles de résolutions, mais aussi pour l'ensemble des valeurs des paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ . Chaque type de champs étant associé à une transformation particulière, la valeur d'intégration est alors différente selon la forme du contour et de la transformation qu'il subit. En particulier, les champs hyperboliques font référence aux déformations causées par le mouvement d'un objet en profondeur par rapport à l'observateur.

Champs hyperboliques :

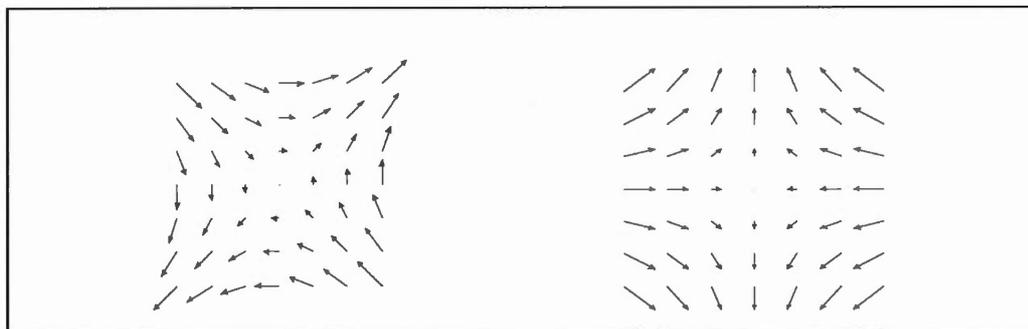
$$W_H = (\beta y, \gamma x)$$

où  $\beta$  est positif

et

$$W_H = (\alpha x, \xi y)$$

où  $\alpha$  est négatif



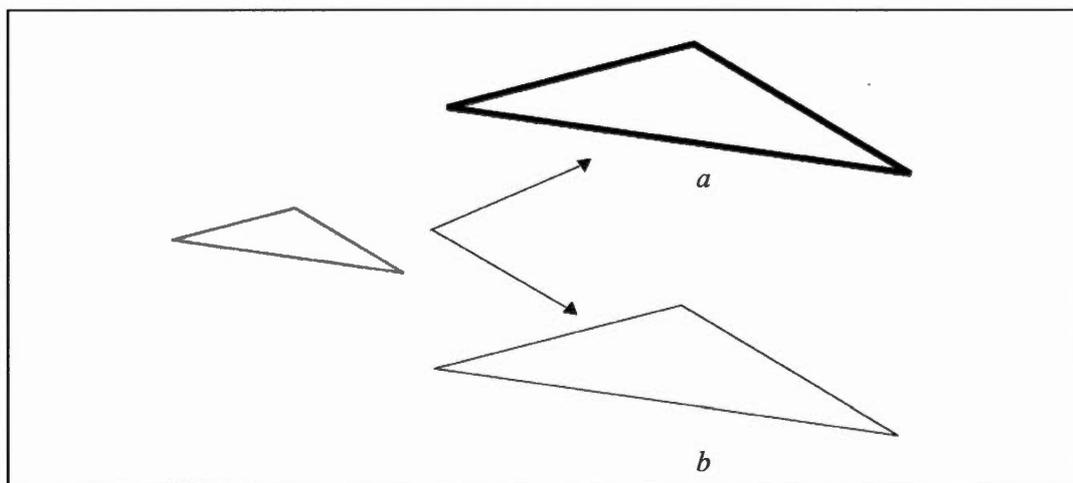
**Figure 4.32** Champs hyperboliques  $W_H = (y, x)$  et  $W_H = (-x, y)$ .

La section qui suit illustre une autre propriété qui découle des valeurs que peuvent prendre les paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ .

#### 4.14 Invariance à l'échelle

Nous avons indiqué au troisième chapitre comment une invariance à l'échelle découle des propriétés d'un continuum de résolutions. Spécifiquement, nous avons vu dans notre modèle comment une résolution multiple permet de traduire un changement d'échelle par un décalage linéaire.

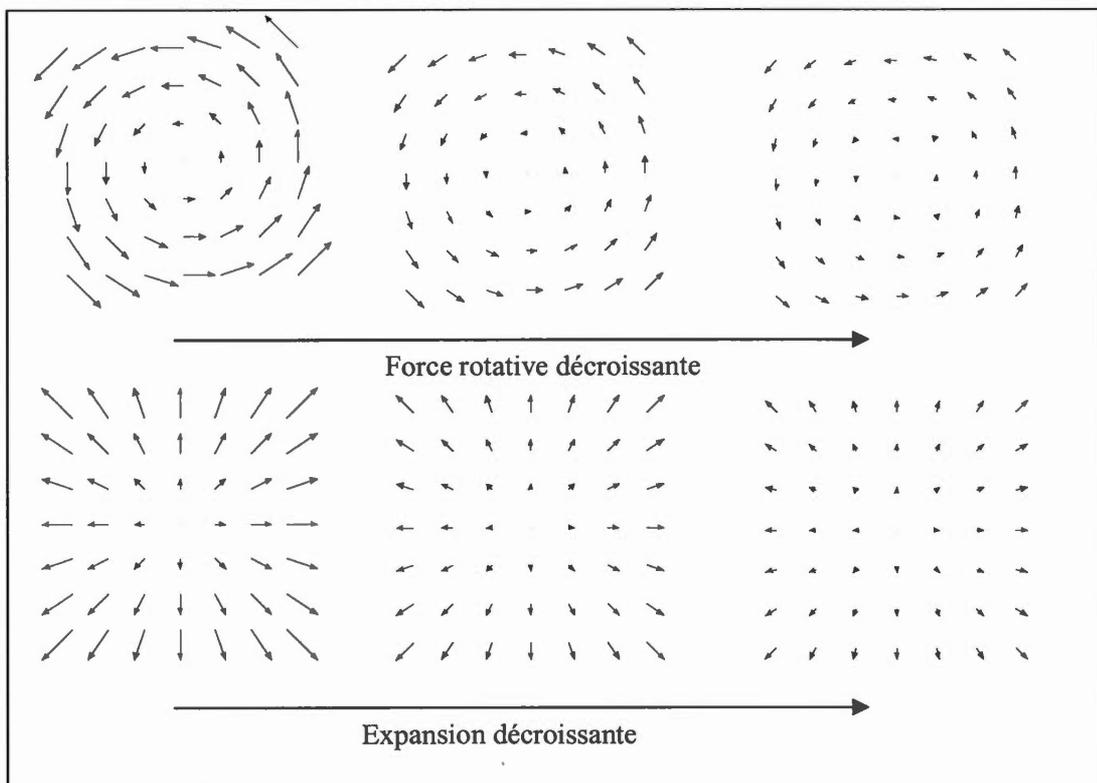
Il existe une subtilité qui doit être considérée lorsque l'on discute du changement d'échelle d'un contour visuel. Sur la figure 4.33, le triangle subit deux expansions différentes. Sur la figure 4.33a, il s'agit d'une expansion de son aire de surface ainsi qu'une expansion de la résolution de son contour. Il s'agit du type d'expansion rencontré lorsqu'on s'approche d'un objet. Cependant, sur la figure 4.33b, seule l'aire de surface du triangle subit une expansion et la résolution de son contour reste la même. Il s'agit toutefois dans les deux cas du même triangle défini par les mêmes angles que forment ses arêtes.



**Figure 4.33** Deux types d'expansions.

En pondérant les valeurs  $(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$  des champs  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$ , il est aussi possible de traduire par des décalages linéaires le changement d'échelle illustré en 4.33b. En effet, puisque les études neurophysiologiques suggèrent la présence d'un

continuum de sensibilité des champs de vecteurs  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$  sur le cortex visuel, on peut alors considérer la présence d'un continuum de forces rotatives et d'expansion (figure 4.34).



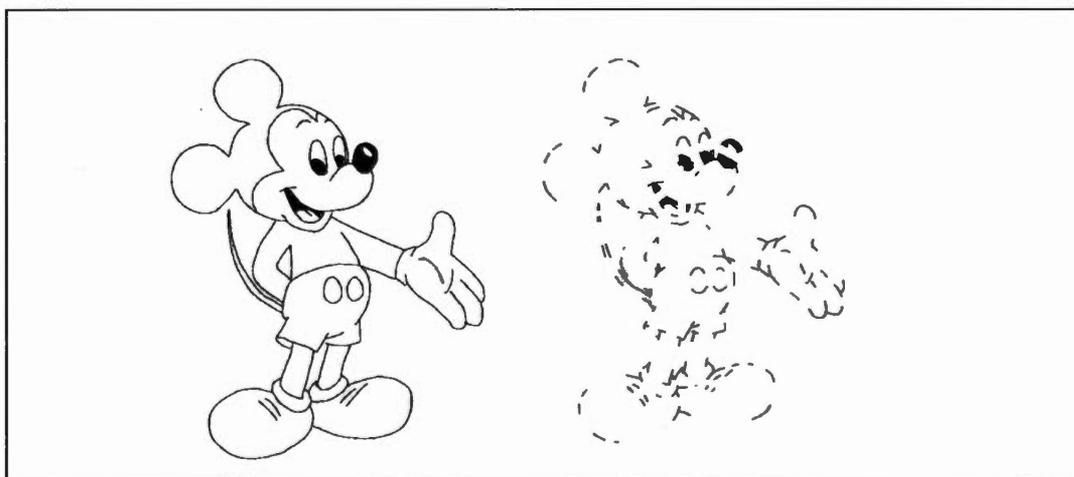
**Figure 4.34** Champs de rotation et d'expansion/contraction selon un continuum respectif d'expansion et de forces rotatives.

Par exemple, l'intégration d'un contour d'aire de surface  $a$  par le champ  $W_R = (-1y, 1x)$  (force rotative = 2), donnera la même intégration qu'un contour de surface  $2a$  intégré par le champ  $W_R = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$  (force rotative = 1). On peut alors exprimer des décalages linéaires non seulement le long des axes de résolutions, mais aussi des décalages linéaires le long des axes de forces rotatives et d'expansion.

Comme nous l'avons vu, les champs de vecteurs élémentaires permettent une intégration globale et invariante en intégrant localement sur les coins de polygones. Qu'en est-il des contours courbés comme l'illustre la figure 4.35 ? Est-il possible d'obtenir une intégration globale, uniquement à partir des coins? La dernière section de ce chapitre illustre que cela est possible lorsqu'on représente les contours par des arcs de spirales logarithmiques.

#### 4.15 Champs de vecteurs polaires et spirale logarithmique : génération spontanée et transformations molles

La possibilité d'obtenir une intégration globale en intégrant localement aux extrémités d'une courbe est très intéressante : elle nous permet d'offrir une explication sur la génération spontanée des contours ainsi que sur l'invariance aux déformations, deux caractéristiques fondamentales de la mémoire visuelle.



**Figure 4.35** Une propriété de la mémoire visuelle est de générer spontanément le reste de la forme uniquement en présence des régions de courbure critique (grande courbure).

La liberté d'intégrer uniquement sur les extrémités d'une spirale découle de la propriété d'autosimilarité de la spirale logarithmique, une spirale qui demeure identique à

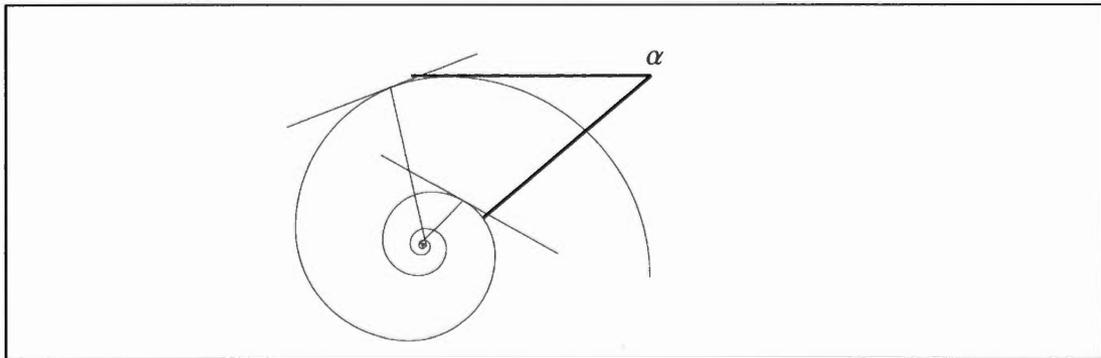
elle-même malgré une expansion ou une rotation. Cette propriété émerge du fait particulier que son vecteur tangentiel est toujours dans un même angle avec le rayon depuis l'extrémité d'un de ces segments.

#### 4.15.1 Spirale logarithmique

On définit la spirale logarithmique par l'équation polaire

$$r = r_0 e^{a\theta}, \quad (24)$$

où  $r_0$  indique l'échelle du rayon initial et  $a = \text{Cot}(\alpha)$ , la cotangente de l'angle tangentiel polaire  $\alpha$  : l'angle que forme le vecteur tangentiel avec les rayons. On peut aussi la définir comme une courbe dont l'angle  $\alpha$  est constant, ce qui s'applique également au cercle et à la droite (cas asymptotiques de la spirale).



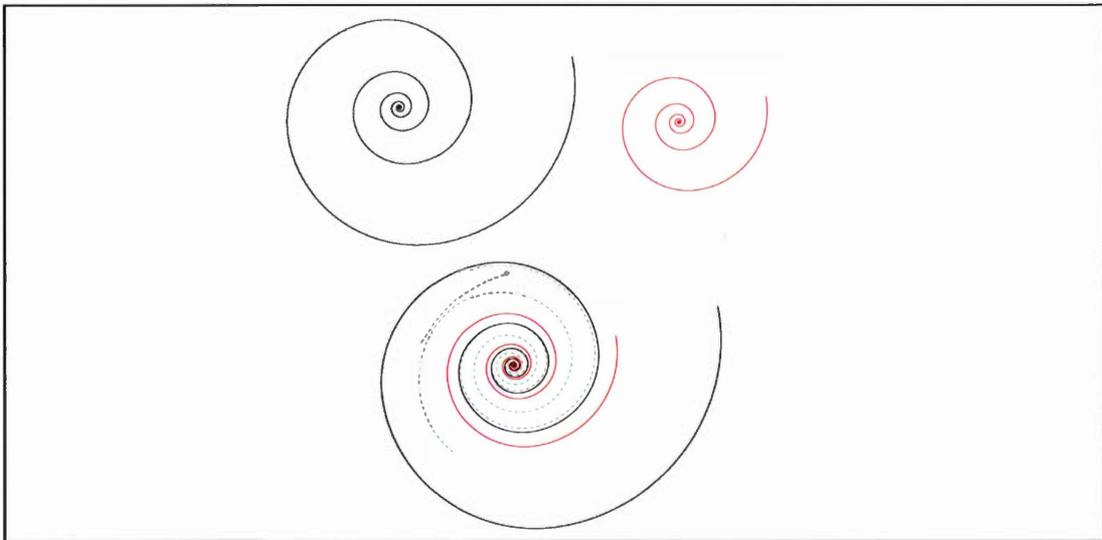
**Figure 4.36** Spirale logarithmique caractérisée par un angle tangentiel polaire invariant.

Puisque son taux de croissance est directement proportionnelle à son angle de croissance selon

$$\frac{dr}{d\theta} = r_0 a e^{a\theta},$$

elle demeure alors identique à elle-même à toutes les échelles. Le fait que le système visuel analyse très rapidement les scènes visuelles selon plusieurs échelles pour en comparer les résultats (Lindeberg, 1996) semble indiquer pourquoi cette courbe est si frappante pour l'œil et qu'elle crée autant d'*illusions*.

Cette spirale possède une propriété d'autocorrélation remarquable qui fascine les artistes et les scientifiques. Par une rotation, elle est parfaitement identique à toute copie d'elle-même à une échelle différente. Autrement dit, par une rotation sur son centre, elle glisse le long d'elle-même en changeant d'échelle, mais sans changer de forme.

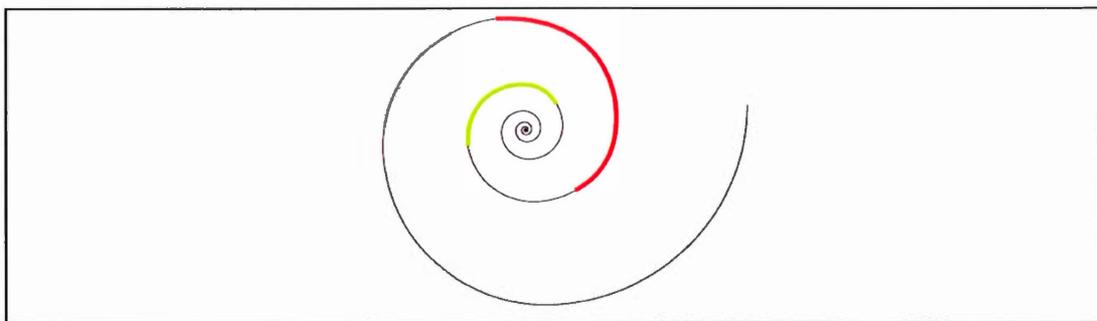


**Figure 4.37** Alors que la spirale en rouge tourne sur elle-même (illustrée par les copies vertes), elle se glisse progressivement sur une copie d'elle-même d'échelle supérieure (spirale noire).

Spécifiquement, toute rotation  $\theta$  de la spirale revient à une homothétie (changement d'échelle) de rapport  $r_0 e^{-a\theta}$ . Ainsi, pour créer une rotation  $\Delta\theta$ , il suffit de multiplier l'amplitude de ses rayons par une constante égale à  $r_0 e^{-a\Delta\theta}$ .

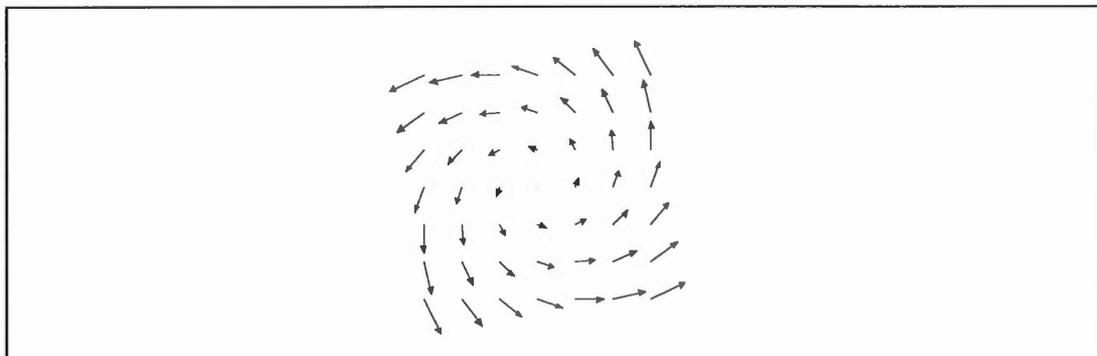
Cette propriété s'exprime aussi par le fait que le vecteur qui définit la longueur des rayons dans un intervalle d'angle  $\Delta\theta$  est parfaitement corrélé avec le vecteur définissant la

longueur des rayons dans tout autre intervalle de même angle. Sur la figure 4.38, ceci se traduit par le fait que le segment vert et le segment rouge ont exactement la même forme. Le segment rouge est simplement une rotation/expansion du segment vert.



**Figure 4.38** Une transformation de similitude s'exprime par un décalage linéaire sur les rayons de la spirale.

Un champ de vecteurs spiralé  $W_s = (\alpha x - \beta y, \gamma x + \xi y)$ , combinaison linéaire d'un champ de rotation  $W_R = (-\beta y, \gamma x)$  et d'un champ d'expansion  $W_E = (\alpha x, \xi x)$ , décrit les trajectoires d'une spirale logarithmique lorsque  $\alpha = \xi$  et  $\beta = \gamma$ .

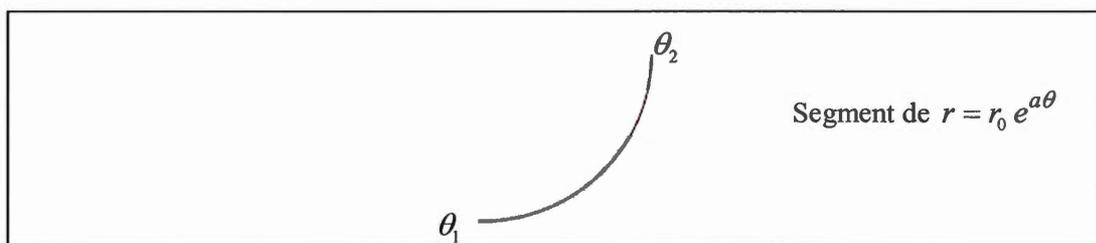


**Figure 4.39** Champ de spirales logarithmiques.

Dans ce qui suit, on constate qu'en intégrant les champs spiralés et leurs décompositions linéaires sur les extrémités d'un segment de spirale, on obtient le même résultat qu'une intégration sur la totalité du segment.

#### 4.15.2 Intégration de segments de spirale logarithmique à partir des vecteurs aux extrémités

Établissons la forme paramétrique de l'intégration des champs de type  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$  le long d'un segment de spirale logarithmique entre les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .



**Figure 4.40** Segment de spirale logarithmique  $r = r_0 e^{a\theta}$ .

Le vecteur de coordonnées d'une spirale logarithmique s'exprime en coordonnées polaires par

$$(x, y) = (r_0 e^{a\theta} \cos(\theta), r_0 e^{a\theta} \sin(\theta)).$$

En prenant la dérivée on obtient le vecteur tangentiel à la spirale

$$\mathbf{u}_v = (\cos(\theta)r_0 a e^{a\theta} - \sin(\theta)r_0 e^{a\theta}, \cos(\theta)r_0 e^{a\theta} + \sin(\theta)r_0 a e^{a\theta}).$$

La forme paramétrique du champ  $W = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y)$  est

$$\begin{aligned} W &= (\alpha x + \beta y, \gamma x + \xi y) \\ &= (\alpha r_0 e^{a\theta} \cos(\theta) + \beta r_0 e^{a\theta} \sin(\theta), \gamma r_0 e^{a\theta} \cos(\theta) + \xi r_0 e^{a\theta} \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Le produit scalaire du champ avec le vecteur tangentiel est donné par

$$W \cdot \mathbf{u}_v = r_0^2 e^{2a\theta} \left[ (a\alpha + \gamma) \cos^2(\theta) + (a\beta + a\gamma + \xi - \alpha) \sin(\theta) \cos(\theta) + (a\xi - \beta \sin^2(\theta)) \right].$$

En intégrant ce produit scalaire entre les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} W \cdot \mathbf{u}_v d\theta = & \\ & r_0^2 \left[ \frac{a(\alpha - \xi + \beta + \gamma) + (-\alpha + \xi + \beta + \gamma)}{8} + \left[ e^{2\theta_2} \sin(2\theta_2) - e^{2\theta_1} \sin(2\theta_1) \right] \right] \\ & + r_0^2 \left[ \frac{a(\alpha - \xi - \beta - \gamma) + (\alpha - \xi + \beta + \gamma)}{8} + \left[ e^{2\theta_2} \cos(2\theta_2) - e^{2\theta_1} \cos(2\theta_1) \right] \right] \\ & + r_0^2 \left[ \frac{a(\alpha + \xi) + (-\beta - \gamma)}{4} \left[ e^{2\theta_2} - e^{2\theta_1} \right] \right]. \end{aligned}$$

Cependant, pour les champs polaires, c'est-à-dire les champs d'expansion, les champs de rotation ainsi que leur combinaisons linéaires, les champs de spirales, on a toujours que

$$\alpha - \xi = 0 \quad , \quad \beta + \gamma = 0.$$

Ceci permet de simplifier l'intégration à

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} W \cdot \mathbf{u}_v d\theta = \left( e^{2\theta_2} - e^{2\theta_1} \right)$$

pour  $r_0 = 1, a = 1, \alpha = 1, \gamma = 1$ .

(25)

L'intérêt de cette démonstration réside dans le fait que le même résultat s'obtient aussi en additionnant les produits scalaires aux deux extrémités du segment, sans intégrer sur

la totalité du segment. Il suffit que la norme des vecteurs tangentiels  $\mathbf{u}_v$  soit la demi-longueur d'arc du segment de spirale.

La norme du vecteur tangentiel est

$$|\mathbf{u}_v| = \sqrt{\mathbf{u}_v \cdot \mathbf{u}_v} = r_0 e^{a\theta} \cdot (a^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour  $\alpha - \xi = 0, \beta + \gamma = 0$ , le produit scalaire du champ avec un vecteur tangentiel unitaire est donc

$$\begin{aligned} W \cdot \frac{\mathbf{u}_v}{|\mathbf{u}_v|} &= \frac{r_0^2 e^{2a\theta} (\alpha a + \gamma)}{r_0 e^{a\theta} (a^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = r_0 e^{a\theta} \frac{(\alpha a + \gamma)}{(a^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

La longueur d'arc entre les extrémités  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est obtenue par

$$\begin{aligned} L &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\mathbf{u}_v| \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_0 e^{a\theta} \cdot (a^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \, d\theta \\ &= \frac{r_0 (a^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{a} (e^{a\theta_2} - e^{a\theta_1}) \end{aligned}$$

En additionnant les produits scalaires  $W \cdot \frac{\mathbf{u}_v}{|\mathbf{u}_v|}$  aux extrémités  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , et en pondérant ceux-ci par la demi-longueur d'arc du segment, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{L}{2} W \cdot \frac{\mathbf{u}_v}{|\mathbf{u}_v|} \right)_{\theta_1} + \left( \frac{L}{2} W \cdot \frac{\mathbf{u}_v}{|\mathbf{u}_v|} \right)_{\theta_2} \\
&= \frac{r_0 (a^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{2a} \left( e^{a\theta_2} - e^{a\theta_1} \right) \frac{r_0 (\alpha a + \gamma)}{(a^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( e^{a\theta_1} + e^{a\theta_2} \right) \\
&= \frac{r_0^2 (\alpha a + \gamma)}{2a} \left( e^{2a\theta_2} - e^{2a\theta_1} \right) \\
&= \left( e^{2\theta_2} - e^{2\theta_1} \right)
\end{aligned} \tag{26}$$

pour  $r_0 = 1, a = 1, \alpha = 1, \gamma = 1$ , soit le même résultat obtenu à l'équation 25.

Il est donc possible d'intégrer les champs de vecteurs élémentaires sur un arc de spirale, uniquement en connaissant la direction que prend la courbe à ses deux extrémités.

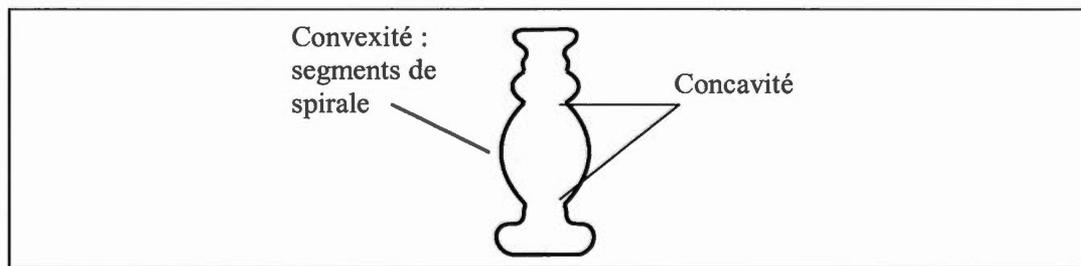
Notons un fait tout aussi intéressant. Si on ne centre pas le segment de spirale sur le champ de vecteurs, une constante s'ajoute lorsqu'on intègre uniquement sur les extrémités. Cette constante augmente linéairement plus on s'éloigne du centre du champ. Les études neurophysiologiques indiquent aussi que l'invariance à la position décroît depuis le centre du champ récepteur des neurones (Duffy et al, 1991; Gallant et al, 1993, 1996). Il n'est pas question ici de suggérer que nos résultats sont en correspondance directe avec ces études. Par contre, il demeure intéressant de noter qu'une particularité de la démonstration mathématique que nous avons faite trouve potentiellement une expression neuronale.

Dans la section qui suit, l'intégration globale d'un segment de spirale, uniquement en prenant les produits scalaires des vecteurs aux extrémités, nous permet d'offrir une explication sur deux propriétés de la mémoire visuelle : la génération spontanée des contours et l'invariance aux déformations.

#### 4.15. Génération spontanée des contours et invariance aux transformations molles

En premier lieu, mentionnons quelques études qui supportent notre démonstration.

Les études psychophysiques (D.D Hoffman, 2000) indiquent que la mémoire visuelle possède la propriété de segmenter les formes visuelles aux points de haute courbure négative, dits points de concavité ou *points critiques*, séparant ainsi les objets visuels en régions de contours convexes.



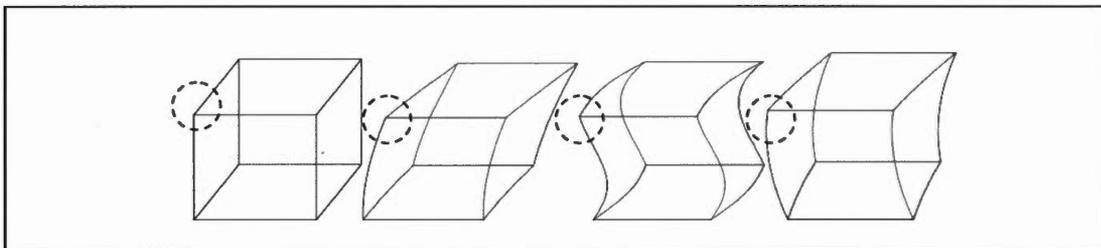
**Figure 4.41** Concavité et convexité dans l'objet.

En accord avec la psychophysique, les études sur le cortex visuel indiquent que celui-ci possède une sensibilité prononcée aux courbes convexes (Pasupathy et Connor, 1999). D'autres études indiquent plutôt que cette sensibilité est aux champs de spirales et à leurs décompositions linéaires (Gallant et al, 1996).

Le *théorème de dualité entre la courbure et la symétrie* (Leyton, 1987) permet de faire le lien logique entre ces études. En effet, ce théorème indique que, pour toute courbe les régions de convexité qui séparent les points de concavité ne peuvent être autre chose que des segments de spirales ou des rencontres tangentielles entre deux segments de spirales. En prenant note de ce fait, il semble difficile de ne pas considérer le rôle des champs spirales et leur décomposition linéaire dans l'intégration des contours par le système visuel.

Notons également une étude qui indique que les patrons d'*excitation spontanée* du cortex visuel génèrent des vagues d'activité neuronale sous la forme de spirales, de droites et de cercles concentriques (Fohlmeister, Gerstner, Ritz et Hemmen, 1995).

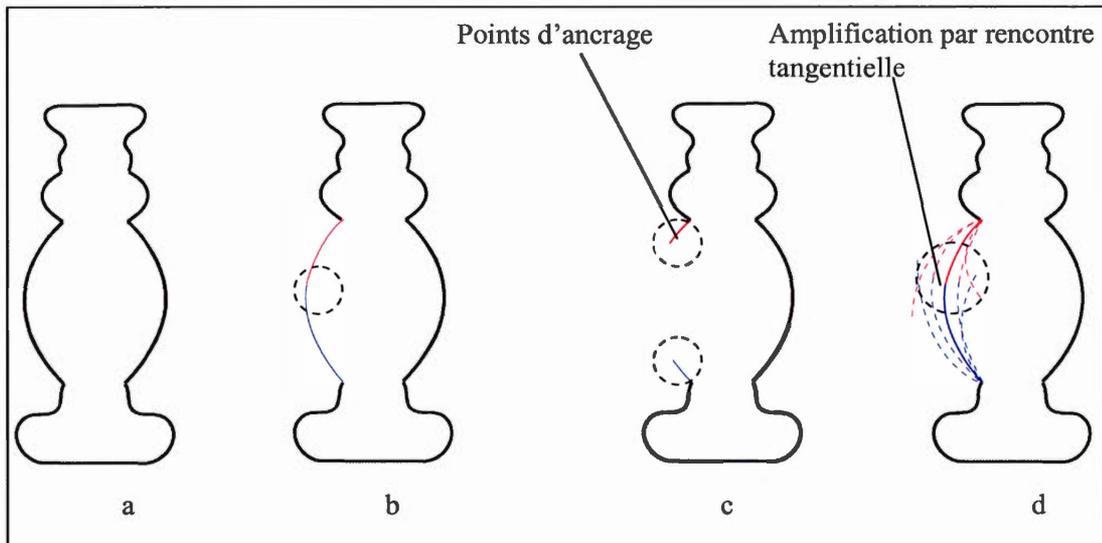
Une notion intuitive, appuyée par les données psychophysiques, est la suivante : le maintien de l'identité d'un objet visuel malgré une déformation découle de la prégnance relative entre la courbure des déformations et la courbure de ses coins. Par exemple, dans une certaine limite, un cube peut subir des déformations et *demeurer* un cube tant et aussi longtemps que les déformations ne sont pas plus prégnantes que ses coins.



**Figure 4.42** Dans une certaine limite, la perception du même objet demeure si les déformations ne sont pas plus sévères que la courbure des coins.

Voyons maintenant comment notre résultat sur l'intégration globale de segments de spirales, en intégrant seulement sur les extrémités, donne une explication sur les processus de génération spontanée des contours visuels ainsi que sur l'invariance à la déformation.

La figure 4.43b illustre, sur un contour visuel, une région de convexité représentée par la jonction *tangentielle* de deux segments de spirale (rouge et bleu). La figure 4.43c illustre la même région alors que seul le début des segments est présent. Nommons ces extrémités *les vecteurs d'ancrage*, en raison du fait que seule leur présence suffit pour générer le contour manquant. Ils sont en quelque sorte les vecteurs sur lesquels l'image neuronale prend ancrage, les vecteurs à partir desquels la forme peut s'effacer ou se déformer sans perdre son identité.



**Figure 4.43** Génération spontanée de contours manquants.

Nous savons que, par processus d'autocorrélation sur leurs connexions latérales (Bruter, 1974), les neurones sont en mesure de déclencher des chaînes d'activation sur le tissu du cortex visuel, tel l'effet d'un jeu de *Domino*. Par ce même principe, nous disons que le vecteur d'ancrage déclenche une onde de vecteurs (figure 4.43d). En l'absence d'un contour visuel, sans stimulation externe, les trajectoires générées demeurent sous le seuil d'intégration, elles ne demeurent que des hypothèses qui doivent être vérifiées par le cortex. Cependant, par autocorrélation, une rencontre tangentielle entre deux trajectoires permet aux vecteurs aux extrémités d'être amplifiés et de franchir le seuil d'intégration (figure 4.43d).

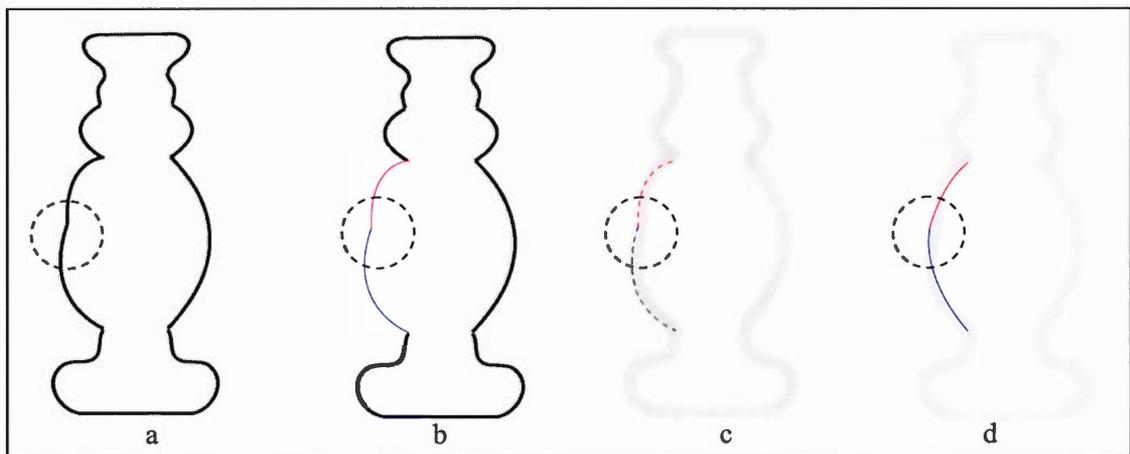
Selon les équations 25-26, puisque les vecteurs aux extrémités sont amplifiés au-delà du seuil d'intégration, on a alors des vecteurs aux deux extrémités, ce qui engendre une intégration globale du segment même en son absence visuelle : en partageant une de leurs deux extrémités, les deux trajectoires (bleu et rouge) sont simultanément intégrées malgré la présence visuelle d'une seule extrémité à leur point d'ancrage respectif (4.43c).

Ceci correspond aux principes gestaltistes qui indiquent que le système visuel *cherche* la continuité dans une courbe, et donc les segments dont la rencontre est tangentielle sur la figure 4.48. L'intégration d'une région de convexité, par la rencontre tangentielle entre

deux segments de spirale, est aussi en accord avec le théorème de Leyton (1987) sur la courbure et la symétrie.

Toutes les trajectoires *pointillées* sur la figure 4.43d sont candidates à une intégration globale. Toutefois, leur corrélation avec les vecteurs d'ancrage est plus faible que les trajectoires *non pointillées*. Elles sont alors inhibées ou encore elles ne franchissent pas le seuil d'intégration. Les trajectoires les moins fortes sont celles qui possèdent une faible corrélation avec les vecteurs d'ancrage et qui ne bénéficient pas de l'amplification qu'apporte une rencontre tangentielle.

Voyons comment ce principe s'applique aussi à l'invariance aux transformations molles (déformations).



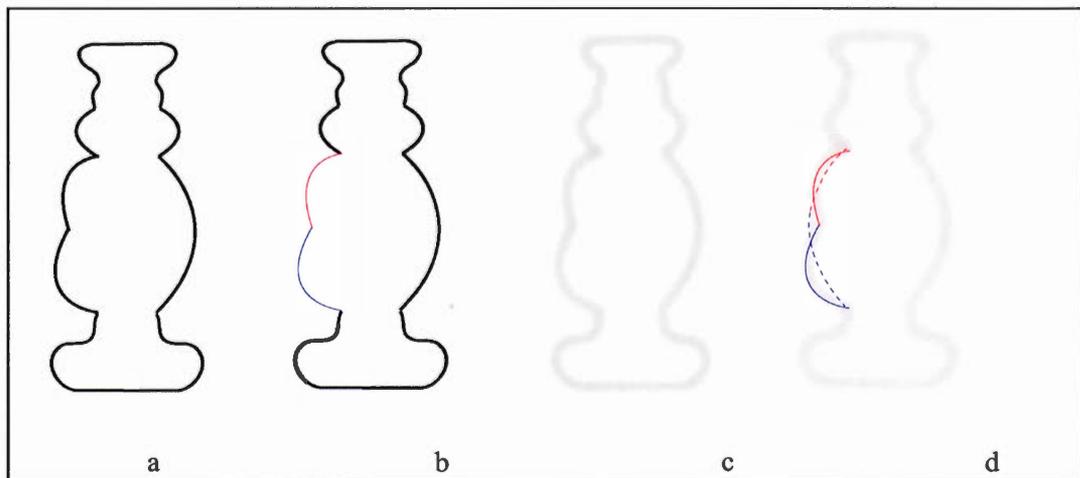
**Figure 4.44** Transformations molles.

Sur la figure 4.44, une déformation a été appliquée sur une des régions convexes. La déformation s'exprime par la formation de deux nouveaux segments de spirale. Postulons à nouveau le principe gestaltiste qui indique que le système visuel préfère et recherche la continuité (douceur) des contours, et donc les rencontres tangentielles.

On sait aussi que le système visuel représente les patrons de lumière selon un continuum d'échelles de résolutions. On remarque sur la figure 4.44d que la déformation ne survit pas à toutes les résolutions. En effet, pour de grandes échelles de résolution (4.44d), la

courbure des segments illustrés en 4.44b et 4.44c n'est plus corrélée avec celle du contour *embrouillé*. En notant le principe physique qui stipule que les hautes longueurs d'ondes (basses fréquences) transportent plus d'énergie (Wallis, 1997), la jonction obtenue en 4.44d l'emporte sur la jonction en 4.44b-c. Ainsi, malgré la déformation du contour, les basses fréquences favorisent une rencontre tangentielle des vecteurs aux extrémités. Et puisque seuls les vecteurs aux extrémités sont suffisants pour obtenir une intégration globale, l'intégration obtenue est alors invariante à la déformation.

Il se peut très bien que la déformation soit suffisamment prégnante pour perdurer à travers toutes les résolutions, telle que l'illustre la figure 4.45.



**Figure 4.45** Déformation qui perdure au travers les résolutions.

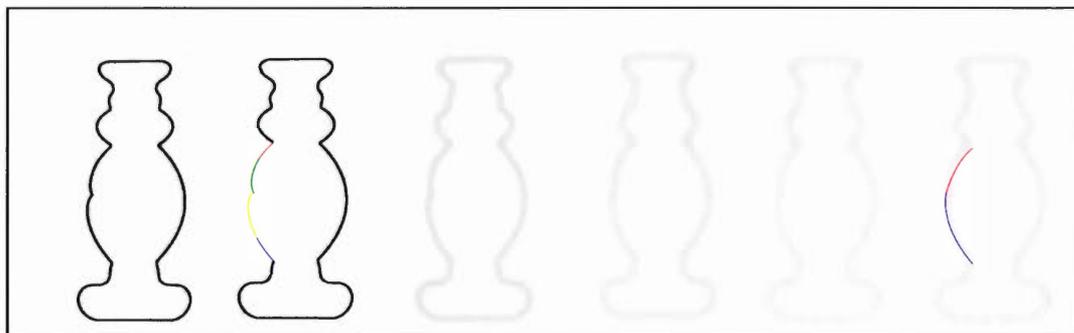
Dans ce cas, même au niveau des basses fréquences, les segments non pointillés (4.45d) demeurent corrélés avec le contour à toutes les résolutions. En effet, même s'ils ne bénéficient pas de l'amplification d'une rencontre tangentielle, ils sont malgré tout parfaitement corrélés (en résonance) avec la courbure du segment à toutes les échelles de résolution.

Notons que les trajectoires pointillées, qui correspondent au contour original avant la déformation, jouissent d'une rencontre tangentielle. Ceci leur confère une certaine

amplification et elles sont alors candidates à une intégration complète. Toutefois, elles sont peu corrélées avec le contour (peu de résonance), ce qui les empêche d'être suffisamment activées pour ne pas être inhibées par les trajectoires non pointillées. Ainsi, la déformation demeure : elle engendre l'apparition de nouvelles régions de haute courbure, de nouveaux coins.

Ce principe de rencontre tangentielle combinée à une intégration à travers les résolutions s'applique aussi à la déformation sur la figure 4.46. Cette déformation est différente de celle de la figure 4.45 par le fait qu'elle crée l'apparition de plusieurs régions de convexité et donc de plusieurs nouveaux segments de spirale (verts et jaunes).

Il se peut que les déformations ne soient pas suffisamment sévères pour prévenir la croissance de trajectoires qui se rencontrent tangentiellement au niveau des bases fréquences. Dans ce cas, les vecteurs aux extrémités sont amplifiés, ils franchissent le seuil d'intégration, et une intégration complète est obtenue depuis les extrémités, permettant par surcroît d'inhiber les faibles trajectoires générées par les multiples déformations.



**Figure 4.46** Multiples déformations.

Ces principes demeurent des spéculations théoriques. Cependant, la démonstration mathématique (équations 25-26) sur l'intégration globale de segments de spirale en utilisant uniquement les vecteurs aux extrémités incite à considérer des mécanismes similaires à ceux-ci. Sur le plan expérimental, cette section suggère qu'il pourrait être plus facile de générer spontanément les contours d'une figure dont la courbure est exactement celle d'un segment

de spirale logarithmique. En particulier, il serait intéressant d'établir une étude permettant d'évaluer la capacité des sujets à générer les contours d'une figure pour divers types de spirales.

#### 4.16 Discussion

Les analyses faites dans ce chapitre confirment que les champs de vecteurs élémentaires possèdent des propriétés qui justifient leur étude dans le cadre de la mémoire visuelle. Ces champs sont sans contredit une dimension importante de la perception du mouvement. Nos analyses suggèrent qu'ils peuvent jouer un rôle dans la perception invariante des formes.

En considérant les effets du mouvement, la force appliquée par les vecteurs de vitesse ajoute un degré de liberté aux valeurs d'intégration, qui autrement ne reflètent que l'aire de surface des contours. Cette démonstration indique certainement une avenue à suivre dans l'expression des principes gestaltistes sur la mémoire visuelle.

Le chapitre a aussi permis de présenter les principes par lesquels une intégration globale et invariante des champs de vecteurs est possible en intégrant localement sur les coins de polygones. Ceci correspond à une capacité essentielle du système visuel, qui est celle de générer spontanément les contours visuels, uniquement en présence des régions de courbure critique. Aussi, en considérant la courbure des contours visuels comme des arcs de spirales, il nous a été possible d'offrir une explication sur la génération spontanée des contours visuels et, du même coup, une explication sur l'invariance à la déformation des contours.

Spécifiquement, nous avons illustré qu'il est possible d'intégrer des segments de spirales en prenant uniquement le produit scalaire des vecteurs aux extrémités. En complément aux démonstrations précédentes, on note par ce résultat que plusieurs processus de la mémoire visuelle peuvent être reproduit à partir d'opérations simples, appliquées à une même structure, soit celle des champs de vecteurs élémentaires.

La structure du cortex incite à considérer l'étude de la perception visuelle comme une application immédiate de la géométrie différentielle. En n'utilisant que les opérations les plus élémentaires, ce chapitre n'a certainement pas atteint les limites d'application des champs de vecteurs à la modélisation des processus de la perception visuelle. La suite des recherches serait d'approfondir encore davantage les liens qui existent entre la perception visuelle et les opérations mathématiques invariantes que l'on peut effectuer sur des champs de vecteurs.

## CONCLUSION

Le motif profond des recherches sur la perception visuelle est de définir les principes qui gouvernent notre perception de l'espace et du temps par l'intermédiaire de la lumière. En ce sens, les explications qu'on y apporte doivent demeurer universelles, au-delà des applications techniques et peu généralisables.

En se tenant à l'écart des algorithmes complexes, souvent limités en pouvoir théorique, la contribution principale de cette thèse réside dans l'énoncé et la conjonction de ses éléments. L'intention a été de simplifier le système visuel à une seule opération. Conséquemment, nous avons pu étudier les processus de la mémoire et de la perception visuelle sans compromettre la généralité et la portée théorique des résultats.

L'objectif premier était de démontrer que le cortex visuel ne doit pas nécessairement être conceptualisé par une hiérarchie de mécanismes complexes et qu'il est possible de simplifier son fonctionnement à une transformation globale simple et bien définie. En particulier, nous avons regroupé les évidences théoriques et empiriques qui indiquent que l'organisation du cortex visuel reflète point par point celle d'un champ de vecteurs. Les recueils de textes généraux sur la perception visuelle ne contiennent pas ou très peu d'information à ce sujet. En revanche, les deuxième et troisième chapitres stipulent que la perception visuelle se simplifie justement à l'intégration de champs de vecteurs. L'apport de ces chapitres est d'avoir explicité que le système visuel est l'analogue d'une structure mathématique bien établie, et donc qu'il existe une approche formelle directement applicable à son étude.

Spécifiquement, le modèle numérique présenté au troisième chapitre illustre que l'opération de base du cortex visuel, la dérivée partielle, est invariante à l'échelle des images.

De ceci, il en découle que le cortex visuel est une variété topologique sur laquelle on peut se déplacer par le calcul infinitésimal, indépendamment des unités de mesure. Une telle structure correspond exactement à l'objet d'étude de la géométrie différentielle.

Évidemment, la géométrie différentielle va bien au-delà des transformations élémentaires utilisées dans cette thèse. C'est précisément ce fait qui donne aux résultats obtenus une grande portée théorique, puisque nous n'avons fait usage que des notions de géométrie différentielle les plus simples, soit l'intégration de champs de vecteurs sur un contour.

Dans cette voie, le quatrième chapitre souligne qu'en se limitant à une seule transformation élémentaire, il est possible de couvrir avec assez de profondeur les opérations du système visuel. L'originalité et l'intérêt des résultats ne résident pas dans leur exactitude, mais plutôt dans le fait qu'ils émergent naturellement des fonctions de base du système visuel, sans la formulation d'algorithmes complexes.

Notamment, l'intégration des vecteurs de gradient qui se trouvent aux coins d'une forme polygonale donne des valeurs globales qui sont invariantes aux isométries dans le plan visuel. En utilisant la dérivée partielle comme transformation locale du système visuel, cela a pour résultat qu'une seule opération permet de reproduire un aspect essentiel de la perception visuelle. Toutefois, nous avons noté que ce résultat est insuffisant puisqu'il ne dépend que de l'aire de surface des contours et non de leurs formes. Conséquemment, nous avons ajouté la donnée du mouvement à l'intégration, en appuyant l'hypothèse que la dimension temporelle ne doit pas être exclue du processus de reconnaissance des formes.

L'idée est que l'ensemble des forces sur les dimensions de l'espace-temps donne à l'objet visuel son identité. L'intégration des forces associées au mouvement nous a permis de maintenir la simplicité et l'invariance de la transformation tout en ajoutant un degré de liberté aux valeurs d'intégration. Les résultats obtenus ne donnent pas de conclusion définitive quant à leur application pratique à un modèle de mémoire visuelle. Cependant, notre démarche s'inclut dans un domaine d'analyse formelle. En effet, les forces de cohésion qui donnent à

une matière élastique la mémoire de sa forme en réaction au mouvement, ou à toute autre transformation, se représentent dans un système explicatif bien établi en mathématiques et en physique. Notamment, la théorie des tenseurs, sur la résistance et l'élasticité de la matière, fait usage de notions qui peuvent s'exprimer par les opérations du cortex visuel telles que nous les avons présentées.

L'élasticité d'une forme en présence d'une transformation correspond précisément à ce que doit accomplir la mémoire visuelle. Il est donc clair que le potentiel d'application de la géométrie différentielle aux processus de la perception visuelle est bien plus grand que ce que nous avons illustré, et les recherches futures gagneront à poursuivre dans cette voie. La contribution du quatrième chapitre est certainement d'avoir renforcé le lien entre les opérations de base du cortex visuel et l'expression des champs de forces qui donnent une élasticité et donc une mémoire à la matière.

Toujours dans l'objectif de n'utiliser qu'une seule transformation globale, nous avons illustré à l'aide d'arcs de spirales une autre façon de simplifier les opérations du cortex visuel à l'intégration de champs de vecteurs. Il se peut que le résultat obtenu quant à l'intégration d'arcs de spirales à partir des vecteurs aux extrémités ne soit pas une particularité mathématique inédite. Il demeure que son application à la génération de contours manquants, ainsi qu'à l'invariance à la déformation, contribue à généraliser et à simplifier les processus de la mémoire visuelle à un minimum d'opérations.

En somme, l'apport scientifique de cette thèse est de démontrer que l'organisation complexe du cortex visuel peut être étudiée par des opérations globales, simples et formellement établies par les mathématiques. Certes, il existe un écart considérable entre les résultats que nous avons présentés et ce que serait un modèle exhaustif des processus de la mémoire visuelle. L'avantage de notre démarche théorique, à défaut d'être pratique, est qu'elle génère un cadre d'analyse rigoureux permettant de raffiner et d'unifier sous forme moderne les avancées de J.J Gibson et D.O Hebb. Tout effort dans la voie que nous avons empruntée ne peut que mener à des résultats qui se rapprocheront davantage d'un modèle holistique de la mémoire visuelle, autant dans la théorie que dans la pratique.

## RÉFÉRENCES

Barlett, M.S. et Sejnowski, T.L. (1997). View point invariant face recognition using independent component analysis and attractor network, dans *Advances in Neural Information Processing Systems 9*, sous la dir. de M. Mozer, M. Jordan et T. Petsche, p. 817-823 Cambridge, MA: MIT press .

Bergson, H. (1962). *La Pensée et Le Mouvant*, 47<sup>e</sup> éd. Paris : Presses Universitaires de France.

Bergson, H. (1948). *L'évolution Créatrice*, 77<sup>e</sup> éd. Paris : Presses Universitaires de France.

Blum, H. (1973). Biological shape and visual science, Part I. *Journal of Theoretical Biology*, 38, p. 205-287.

Brown, J.F et Voth, A.C. (1937). The path of seen movement as a function of the vector field. *American Journal of Psychology*, 49, p. 543-563.

Bruter, C.P. (1974). *Topologie et perception, Tome I, Bases philosophiques et mathématiques*. Paris : Éditions Maloine, S.A.

Bruter, C.P. (1975). *Topologie et perception, Tome II, aspects neurophysiologiques*. Paris : Éditions Maloine, S.A.

Cavanagh, P. (1978). Size and position invariance in the visual system. *Perception*, 7, p. 167-177.

Cavanagh, P. (1985). Local log polar frequency analysis in the striate cortex as basis for size and orientation invariance, dans *Model of the Visual Cortex*, sous la dir. de D. Rose et V.G Dobson, p.85-95. NewYork: Éditions Wiley.

Caelli, T et Dodwell, P. (1982). The discrimination of structure in vectorgraphs: Local and global effects. *Perception and Psychophysics*, 32(4), p. 314-326.

Chen, L. (2001). Perceptual organization: To reverse back the inverted (upside-down) question of feature binding. *Visual Cognition*, 8(3/4/5), p. 287-303.

Chaikin, G. et Weiman, C. (1979). Logarithmic spiral grids for image processing. *Proceedings for the IEEE Computer Society Conference on Pattern Recognition and Image Processing*. p. 25-31.

Chartier, S. (2004). Un nouveau modèle de réseaux de neurones artificiels à attracteurs dans le cadre de la catégorisation autonome. Thèse de Doctorat. Université du Québec à Montréal.

Celmmow, P. (1973). An introduction to electromagnetic theory. Cambridge MA: Cambridge University Press.

Copolla, D et Purves, D. (1996). The extraordinarily rapid disappearance of entopic images. *Proceeding of the National Academy of Science (Neurobiology)*, 93, p. 8001-8004.

Dodwell, P.C. (1983). The Lie transformation group model of visual perception. *Perception and Psychophysics*, 34(1), p. 1-16.

Dodwell, P et Caelli, T. (1984). Figural Synthesis. Hillsdale, New Jersey: Éditions Lawrence Erlbaum Associates.

Duffy, C.J et Wurtz, R.H. (1991). Sensitivity of MST Neurons to Optic Flow Stimuli I. A Continuum of Response Selectivity to Large-Field Stimuli. *Journal of Neurophysiology*, 65(6), p. 1328-1345.

Florack, M.J.L. Romeny, B.M.T. Koenderink, J.J et Viergever, M.A. (1992) Scale and differential structure of images. *Image and Vision Computing*. 10(6), p. 376-388.

Fohlmeister, C. Gerstner, W. Ritz, R. et Leo van Hemmen, J. (1995). Spontaneous excitations in the visual cortex: stripes, spirals, rings and collective burst. *Neural Computation*, 7, p. 905-914.

Foldiak, P. (1991). Learning invariance from transformation sequences. *Neural Computation*, 3, p. 194–200.

Fujii, H. Ito, H. Aihara, K. Ichinose, N. et Tsukada, M. (1996). Dynamical cell Assembly Hypothesis. Theoretical Possibility of Spatio-temporal coding in the Cortex. *Neural Networks*, 9(8), p. 1303-1350.

Gallant, J. L., Braun, J., et Van Essen, D. C. (1993). Selectivity for hyperbolic, and Cartesian gratings in macaque visual cortex. *Science*, 259, p. 100-103.

Gallant, J.L. Connor, C.E. Rakshit, S, Lewis, J.W et Van Essen, D.C. (1996). Neural Responses to Polar, Hyperbolic, and Cartesian Gratings in Area V4 of the Macaque Monkey. *Journal of Neurophysiology*, 76(4), p. 2718-2739.

Gibson, J.J. (1950). The perception of the visual world. Boston, Mass: Houghton Mifflin.

Gibson, J.J. (1957). Optical motions and transformations as stimuli for visual perception *Psychological Review*, 64, p. 228-295.

Gibson, J.J (1968). What gives rise to the perception of motion? *Psychological Review*, 75(4), p. 335-346.

Gibson, J. J. (1971). The information available in pictures. *Leonardo*, 4, p. 27-35.

Graziano, M. S. A., Andersen, R. A., et Snowden, R. J. (1994). Tuning of MST neurons to spiral motions. *Journal of Neuroscience*, 14, p. 54-67.

Grimson, W.E.L. (1981). From Images to Surfaces. Cambridge MA: MIT Press.

Grierty, M. Tosdyks, M.V et Amit, D. J (1993). Conversion of Temporal Correlation Between Stimuli to Spatial Correlations Between Attractors. *Neural computation*, 5, p. 1-17.

Hallet, M. (2000). Transcranial magnetic stimulation and the human brain, *Nature*, 406, p. 147-150.

Hebb, D.O. (1949). *The Organisation of Behavior : A neuropsychological Theory*. New York: John Willey & Sons.

Hebb, D.O. (1982). Textes édités par Henry A. Buchtel. *The Conceptual Nervous System*. Pergamon Press.

Hildreth, E.C (1983). *The Measurement of Visual Motion*. Cambridge MA: MIT Press.

Hoffman, W.C. (1966). The Lie Algebra of Visual Perception. *Journal of Mathematical Psychology*, 3 , p. 65-98.

Hoffman, W.C et Dodwell, P.C. (1985). Geometric Psychology Generates the Visual Gestalt. *Canadian Journal of Psychology*, 39(4), p. 491-528.

Hoffman, D.D. (2000). *Visual Intelligence: How do we create what we see*. New York: W.W Norton & Company.

Hoffman, DD et Richards.W.A. (1985). Parts of recognition. *Cognition*, 18, p. 65-96.

Hubel, D.H. et Wiesel, T.N. (1968). Receptive fields and functional architecture of monkey striate cortex. *Journal of Physiology*, 195, p. 215-243.

Hubel, D. et Wiesel, T. (1965). Receptive fields and functional architecture in two nonstriate visual areas (18 and 19) of the cat. *Journal of Neurophysiology*. 28, p. 229–289.

Hulin, M. (1971). *Electromagnetisme*. Paris: Colin.

Koenderink, J.J. et Van Doorn, A. J. (1975). Invariant properties of motion parallax field due to the movement of rigid bodies relative to an observer. *Optica acta*, 22, p. 773-791.

Koenderink, J. J. et Van Doorn, A. J. (1984). Optical monitoring of ego-motion for movement with respect to a plane surface. In *Localisation and orientation in biology and Engineering*. Ed by Varju and Shenzler. p. 163-167.

Koenderink, J. J. (1984). The Structure of Images, *Biological Cybernetics* 50, p. 363-370.

Koenderink, J.J. (1986). Optic Flow. *Vision Research*, 26(1), p. 161-180.

Koenderink, J.J. et Van Doorn, A.J. (1987). Facts on Optic Flow. *Biological Cybernetics*, 56, p. 247-254.

Koenderink, J. J. et Doorn, A. J. (1987). Representation of Local Geometry in the Visual System. *Biological Cybernetic*, 55, p. 367-375.

Koenderink, J. J. et Richards, W. (1988). Two-dimensional curvature operators, *Journal. of the Optical Society of America*, 5:7, p. 1136-1141.

Koenderink, J.J. (1988). Operational Significance of Receptive Field Assemblies. *Biological Cybernetic*, 58, p. 163-171.

Koenderink, J.J, et Doorn, A. J. (1990). Receptive Field Families. *Biological Cybernetic*, 63, p. 291-298.

Koenderink, J. J. et van Doorn, A. J. ( 1992). Generic Neighborhood Operators, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 14(6), p. 597-605.

Landau, L. Licfchitz, E. (1994). *Théorie des champs*. Paris : Ellipses.

Lewin, K. (1936). *Principles of topological psychology*. New York, McGraw-Hill.

Leyton, M. (1987). Symmetry-Curvature Duality. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 38, p. 327-341.

Lindeberg, T. (1996). Feature detection with automatic scale selection. *International Journal of Computer Vision*, 30(2), p. 77-116.

Lockwood, E.H. (1961). *A book of Curves*. Cambridge MA: Cambridge University Press.

Lowe, D.G., «Object recognition from local scale-invariant features», dans Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision, 1999, tenue à Kerkyra, Greece, 20-27 September, p. 1150-1157.

Maffei, L. et Fiorentini, A. (1977). Spatial frequency rows in the striate visual cortex. *Vision Research*, 17, p. 257-264.

Malmivuo, J. et Plonsey, R. (1995). *Bioelectromagnetism: Principles and applications of bioelectric and biomagnetic fields*. New York: Oxford University Press.

Malsburg, C.V. (1981). *The Correlation Theory of Brain Function. Technical Report 81-2*, Dept. of Neurobiology, Max-Planck Institute for Biophysical Chemistry, Göttingen, Germany.

Marder, L. (1972). *Vector Fields*. London: George Allen et Unwin.

Martinez-Conde, S. Macknik, M.L. et Hubel, David. (2004). The role of fixational eye movement in visual perception. *Nature Reviews/Neurosciences*, 5, p. 229-240.

Marr, D. (1982). *Vision*. San Francisco: W.H Freeman et Co.

McFadden, J. (2002). The conscious electromagnetic information (cemi) field theory. *Journal of consciousness studies*, 9(8), p. 45-60.

McFadden, J. (2002). Synchronous firing and its influence on the brain's electromagnetic field. *Journal of consciousness studies*, 9, p. 23-50.

Mitchison, G. (1991). Removing Time Variation With the Anti-Hebbian Differential Synapse. *Neural Computation*, 3, p. 312-320.

Orban, G. A. Lagae, L. Verri, A. Raiguel, S., Xial, D. Maes, H., et Torre, V. (1992). First-order analysis of optical flow in monkey brain. *Proceeding of the National Academy of Science*, 89, p. 2592-2599.

Orbison, W.D (1939). Shape as a function of the vector-field. *American Journal of Psychology*, 52, p. 31-45.

Pasupathy, A et Connor, C.E. (1999). Responses to Contour Features in Macaque Area V4. *Journal of Neurophysiology*. 82, p. 2490–2502.

Platt, J.R. (1960). How we see straight lines. *Sci. Am*, 226, p. 121-129.

Pockett S. (2002). Difficulties with the electromagnetic field theory of consciousness. *Journal of consciousness studies*. 9(4), p. 51-56.

Poggio, T., Verri, A. et Torre, V. (1991). Green theorems and qualitative properties of the optical flow. *MIT A.I. Memo*, No. 1289, p. 1-6.

Proulx, R. (1986). Étude des propriétés de sélectivité d'un modèle parallèle de mémoire associative appliqué au problème de la reconnaissance des caractères alphabétiques. Thèse de doctorat non publiée. Université de Montréal.

Proulx, R. et Begin, J. (1996) Categorisation in unsupervised neural networks: The Eidos model. *IEEE Transaction on neural networks*, 7, p. 147-154.

Rao, R.N.P. Sejnowski, T.J. (2001). Spike-Timing-Dependent Hebbian Plasticity as Temporal Difference Learning. *Neural Computation*, 13, p. 2221-2237.

Reitz, J. Milford, F. (1967). Foundations of electromagnetic theory. Massachuset : Addison-Wesley.

Riejo Makela. (1976). Living Cells Are Electromagnetic Units. Traduit par: Earthpulse Flashpoints, Newtext Number One.

Rolls, E.T. et Stringer, S.M. (2001). Invariant object recognition in the visual system with error correction and temporal difference learning. *Network: Computation in Neural Systems*, 12, p. 111-129.

Ritter, G.X (1999). Image Algebra. Center for computer vision and visualization. Department of Computer and Information Science and Engineering. University of Florida.

Rolls, E.T. et Deco, G. (2002). Computational Neurosciences of Vision, Oxford University Press : Oxford.

Richards, W.A. Hoffman, D.D. (1984). Codon constraints on closed 2D shapes. MIT, *A.I memo no 769*.

Richards, W. et Polit, A. (1974). Texture Matching. *Kybernetik*, 16, p. 155-162.

Sutton, R.S. (1988). Learning to Predict by Method of Temporal Differences. *Machine Learning*, 3, p. 9-44.

Schey, H.M. (1973). Div, Grad, Curl and All That: An informational text on Vector Calculus. New York: W.W Norton et Compan.

Schwartz, E.L. (1977). Spatial mapping in the primate visual cortex: Analytic structure and relevance to perception. *Biological Cybernetic*, 25, p. 181-194.

Seely, S. (1958). Introduction to electromagnetic field. New York: McGraw-Hill.

Sereno, M.I. Sereno, M.E. et Zhang, K. (1993). Emergence of Position-Independent Detectors of Sense of Rotation and Dilation with Hebbian Learning : An Analysis. *Neural Computation*, 5, p. 597-612.

Treves, A. Rolls, E.T. Tovee, M.J. (1996). On the time required for recurrent processing in the brain, dans *Neurobiology: Ionic Channels, Neurons and the Brain*, sous la dir. de V. Torre et F. Conti, p. 371-382. New York: Plenum Press.

Ullman, H. (1979) The interpretation of structure from motion. *Proceedings of royal society of London B*, 203, p. 405-426.

Wallis, G., Rolls, E. (1997). A model of invariant object recognition in the visual system. *Progress in Neurobiology*. 51, p. 167-194.

Wandell, B.A. (1995). *Foundations of Vision*. Cambridge MA: Sinauer Associates.

Wilson, H.R. et Bergen, J.R. (1979). A four mechanism model for threshold spatial vision. *Vision Research*, 19, p. 19-32.

Wilson, H.R. et Giese, S.C. (1977). Threshold visibility of frequency gradient patterns. *Vision Research*, 17, p. 1177-1190.

Witkin, A.P., «Scale-space filtering», dans *Proceedings of the Ninth International Joint Conf, on Artificial Intelligence, 1983*, tenue à Karlsruhe (West Germany), p. 1019-1022.

Young, R.A. (1985). The gaussian derivative theory of spatial vision: Analysis of cortical receptive field line-weighting profiles. General Motor Research, *Technical report GMR-4920*.