

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME ELLIPTIQUE SUR LA  
SPHÈRE PAR DÉCOMPOSITION DE DOMAINE EN  
COORDONNÉES SPHÈRE-CUBIQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ COMME  
EXIGENCE PARTIELLE DE LA MAÎTRISE  
EN SCIENCES DE L'ATMOSPHÈRE

PAR  
YVES FRANKLIN NGUÉTO

Février 2017

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.07-2011). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Je tiens à dire merci au Département des Sciences de la Terre et de l'Atmosphère en général et au directeur des études avancées en particulier, le Professeur René Laprise, pour cette opportunité de continuer mon apprentissage au sein d'un programme aussi bien encadré.

Je remercie tous les agents de recherche œuvrant parfois dans l'ombre mais qui permettent à nous étudiants de rester focaliser sur la recherche.

Un merci également à tous mes enseignants et camarades de promotion pour tous ces bons moments passés ensemble.

Je ne pourrai terminer cette session sans montrer toute ma reconnaissance à mon Directeur de recherche, le Professeur Jean Côté, qui au-delà de ce projet d'études m'a donné des fondements qui assurément m'aideront pour la suite de mes études.

## DÉDICACE

À

Dieu, par qui je puis toute chose ;  
Mes parents, mes proches et toute  
personne ayant participé de près ou  
de loin à ce travail.

## TABLES DE MATIÈRES

|  |             |
|--|-------------|
| <i>REMERCIEMENTS</i> .....                                       | <i>ii</i>   |
| <i>DÉDICACE</i> .....  | <i>iii</i>  |
| <i>LISTE DES FIGURES</i> .....                                   | <i>vi</i>   |
| <i>LISTE DES TABLEAUX</i> .....                                  | <i>viii</i> |
| <i>LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES</i> .....         | <i>ix</i>   |
| <i>RÉSUMÉ</i> .....  | <i>x</i>    |
| <i>INTRODUCTION</i> .....  | <i>1</i>    |
| <i>CHAPITRE I</i> .....  | <i>5</i>    |
| <i>PROBLÈME ELLIPTIQUE ET GRILLE SPHÈRE-CUBIQUE</i> .....        | <i>5</i>    |
| 1.1 Origine du problème elliptique .....                         | <i>5</i>    |
| 1.2 La grille sphère-cubique.....                                | <i>6</i>    |
| 1.3 Procédures de communication .....                            | <i>11</i>   |
| 1.4 Synthèse partielle .....                                     | <i>13</i>   |
| <i>CHAPITRE II</i> .....   | <i>15</i>   |
| <i>MÉTHODES DE SCHWARZ 1D</i> .....                              | <i>15</i>   |
| 2.1 Introduction aux méthodes de Schwarz.....                    | <i>15</i>   |
| 2.1.1 Méthode de Schwarz parallèle.....                          | <i>16</i>   |
| 2.1.2 Méthode de Schwarz alternée .....                          | <i>17</i>   |
| 2.2 Schwarz 1D périodique à 2 sous-domaines.....                 | <i>18</i>   |
| 2.2.1 Méthode classique de Schwarz .....                         | <i>22</i>   |
| 2.2.2 Méthode de Schwarz optimisée avec conditions de Robin..... | <i>24</i>   |
| 2.3 Schwarz 1D à 4 sous-domaines .....                           | <i>25</i>   |
| 2.3.1 Généralisation à $N$ sous-domaines .....                   | <i>26</i>   |
| 2.3.2 Cas de quatre sous-domaines.....                           | <i>27</i>   |
| 2.4 Synthèse partielle .....                                     | <i>32</i>   |
| <i>CHAPITRE III</i> .....  | <i>33</i>   |
| <i>APPLICATION DES MÉTHODES DE SCHWARZ EN 2D</i> .....           | <i>33</i>   |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>3.1 Résolution du problème elliptique 2D sur une seule face de la grille sphère-cubique</b> | <b>33</b> |
| 3.1.1 Test préliminaire  | 35        |
| 3.1.2 Résultats et interprétation  | 36        |
| <b>3.2 Résolution du problème de Helmholtz 2D sur toutes les faces</b>                         | <b>37</b> |
| 3.2.1 Test avec conditions aux limites biaisées  | 39        |
| 3.2.2 Résultats et interprétation  | 39        |
| <b>3.3 Synthèse partielle</b>  | <b>44</b> |
| <b><i>CONCLUSION GÉNÉRALE</i></b>  | <b>45</b> |
| <b><i>ANNEXE A</i></b>   | <b>46</b> |
| <b><i>ANNEXE B</i></b>   | <b>49</b> |
| <b><i>ANNEXE C</i></b>   | <b>51</b> |
| <b><i>BIBLIOGRAPHIE</i></b>  | <b>53</b> |

## LISTE DES FIGURES

| N°  | Titre et légende  | Page |
|-----|---|------|
| 1.1 | <b>Solides de Platon.</b> (Source Wikipédia)  | 7    |
| 1.2 | <b>Grille du panneau principal en rouge.</b> La face numéro 1 du cube à gauche a été projetée sur la surface de la sphère et ensuite discrétisée en points de grille.   | 8    |
| 1.3 | <b>Bande de recouvrement entre deux panneaux voisins.</b> Les panneaux 1 et 2 se superposent dans une région appelée bande de recouvrement. C'est dans cette région que le transfert d'information entre les 2 SD a lieu.   | 8    |
| 1.4 | <b>Rotation du système d'axes.</b> Source: Stephen et Marion (2004). Le domaine de droite en gris est obtenu par une rotation de celui de gauche dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.   | 9    |
| 1.5 | <b>Panneau 2 en jaune</b>   | 10   |
| 1.6 | <b>Différents panneaux</b>  | 11   |
| 1.7 | <b>Projection de l'hémisphère Sud sur le plan équatorial</b>  | 12   |
| 1.8 | <b>Illustration de la nécessité d'interpoler aux frontières</b>   | 13   |
| 2.1 | <b>Figure originale de Schwarz en 1870.</b> À gauche on a le domaine complet $\Omega$ sur lequel on recherche la solution; la variable recherchée est $u$ . La figure de droite est le domaine initial décomposé en deux surfaces géométriques élémentaires.        | 15   |
| 2.2 | <b>Domaine rectiligne (<math>\Omega</math>) sur lequel on recherche la solution du problème de Poisson.</b> Le domaine $\Omega$ est décomposé en 2 SD. Le premier ( $\Omega_1$ ) est compris entre 0 et $b$ et le second ( $\Omega_2$ ) entre $a$ et 1.             | 16   |
| 2.3 | <b>Méthode classique de Schwarz parallèle.</b> Les solutions des SD 1 et 2 sont respectivement en bleu et vert. La solution analytique en rouge est approchée avec une bonne approximation en moins de dix itérations.  | 17   |
| 2.4 | <b>Méthode classique de Schwarz alternée.</b> Les solutions dans les SD 1 et 2 sont respectivement en bleu et vert. La solution analytique en rouge est approchée avec une bonne approximation en cinq itérations.  | 18   |
| 2.5 | <b>Domaine périodique sur lequel on recherche la solution du problème de Helmholtz.</b> Les couleurs rouges et vertes représentent respectivement les SD 1 et 2. Le domaine rouge est compris entre 0 et $\pi + \delta$ et le vert entre $\pi$ et $2\pi + \delta$ . | 19   |
| 2.6 | <b>Taux de convergence dans le cas classique.</b> Il représente la vitesse à laquelle l'algorithme converge en fonction de la taille de recouvrement choisit entre les 2 SD.  | 23   |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.7  | <b>Évolution de l'erreur au cours des 9 premières itérations.</b> Cette figure montre l'amortissement de l'erreur au cours du processus itératif.   | 25 |
| 2.8  | <b>Contour 0 de <math>c_4</math> (bleu), <math>c_6</math> (rouge) et <math>c_8</math> (noir) pour <math>\beta_1^{(1)}=0</math>, <math>\kappa=1</math> en fonction des paramètres <math>\beta_1^{(3)}</math> (en abscisse) et <math>\beta_1^{(4)}</math> (en ordonnée).</b> Les deux flèches bleues en haut indiquent des valeurs possibles de $\beta_1^{(3)}$ et $\beta_1^{(4)}$ qui annulent les coefficients $c_4$ et $c_6$ tout en s'assurant que $c_8$ est non nul. | 29 |
| 2.9  | <b>Convergence de l'algorithme de Schwarz avec les conditions de Robin optimisées pour <math>N = 4</math> SD.</b> La courbe en noir désigne la solution exacte et celle en verte notre première ébauche. Les segments de courbe en bleu, rouge, jaune et magenta représentent respectivement les solutions dans les SD 1, 2, 3 et 4.  | 31 |
| 2.10 | <b>Courbe semi-logarithmique d'évolution de l'erreur au cours des 9 premières itérations.</b> Cette figure montre l'amortissement de l'erreur au cours du processus itératif.   | 32 |
| 3.1  | <b>Représentation de la distribution sur la sphère.</b> À gauche, on représente la distribution sur une grille gaussienne ; à droite on montre l'endroit où cette distribution sera représentée sur notre grille sphère-cubique.  | 36 |
| 3.2  | <b>Représentation de la distribution sur le panneau 1</b>   | 37 |
| 3.3  | <b>Solution sur les 6 panneaux</b>  | 38 |
| 3.4  | <b>Solution globale perturbée</b>   | 39 |
| 3.5  | <b>Solution par panneau perturbée à la 1<sup>ère</sup> itération</b>  | 40 |
| 3.6  | <b>Solution par panneau perturbée à la 2<sup>ème</sup> itération</b>  | 40 |
| 3.7  | <b>Solution par panneau perturbée à la 3<sup>ème</sup> itération</b>  | 41 |
| 3.8  | <b>Solution par panneau perturbée à la 4<sup>ème</sup> itération</b>  | 41 |
| 3.9  | <b>Évolution de l'erreur du modèle à diverses résolutions.</b> En abscisse on a la résolution spatiale du modèle en $Km$ et en ordonnée l'erreur calculée au bout de 4 itérations. La courbe en bleu correspond à l'erreur; la courbe en bleu est la fonction polynomiale passant par le maximum de points calculés.  | 43 |

## LISTE DES TABLEAUX

| N° | Titre  | Page |
|----|--|------|
| 1  | Coefficients optimisés de Robin pour 4 sous domaines | 30   |
| 2  | Score au cours des quatre premières itérations       | 42   |

## LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

|            |   |   |
|------------|---|---|
| <b>1D</b>  | : | Une dimension                               |
| <b>2D</b>  | : | Deux dimensions                             |
| <b>CFL</b> | : | Courant-Friedrich-Lewy                      |
| <b>DD</b>  | : | Décomposition de domaine                    |
| <b>EDP</b> | : | Équation aux dérivées partielles            |
| <b>GEM</b> | : | modèle Global Environnemental Multi échelle |
| <b>Lat</b> | : | Latitude                                    |
| <b>Lon</b> | : | Longitude                                   |
| <b>MCG</b> | : | Modèles de circulation générale             |
| <b>PNT</b> | : | Prévision numérique du temps                |
| <b>SD</b>  | : | Sous-domaine                                |
| <b>TF</b>  | : | Transformée de Fourier                      |

## RÉSUMÉ

Dans un futur proche les modèles de circulation générale (MCG) pourront être roulés à résolutions très élevées. Cependant, il est commun en méthodes numériques que des algorithmes qui étaient stables à une résolution donnée deviennent instables lorsque l'on diminue la résolution spatiale. Le premier objectif de ce projet est de construire une grille qui couvrira complètement la sphère et s'adaptera non seulement à la nouvelle architecture massivement parallèle des ordinateurs, mais également aux schémas numériques avec une résolution spatiale élevée. La méthode employée est la décomposition de domaines, développée en 1870 par Schwarz. Elle est utilisée ici pour subdiviser le système sphérique complet en six sous-systèmes identiques représentant chacun une face d'un cube inscrit à l'intérieur de celle-ci (sphère-cubique). Cette décomposition permettra une résolution en parallèle sur chacun des sous-domaines (SD) du problème stationnaire de Helmholtz. La principale difficulté avec cette méthode est de faire un assemblage des (sous) solutions sur chacun des SD pour obtenir à la fin une solution globale unique. Dans cette optique, nous avons commencé par étudier la convergence du problème de Helmholtz sur un domaine périodique à une dimension (1D) ; les résultats obtenus ayant été encourageants, nous avons pu alors nous attaquer au problème à deux dimensions (2D) avec plus d'assurance et montrer que celui-ci converge sur la sphère.

**MOTS-CLÉS** : Haute résolution, décomposition de domaine, sphère-cubique, convergence, problème de Helmholtz.

## INTRODUCTION

La question « quel temps fera-t-il demain ? » a commencé à se poser il y a déjà des milliers d'années. À ces époques déjà l'homme essayait de trouver des théories pouvant expliquer les changements de conditions météorologiques. Des dessins, datant de 4 à 8 mille ans, retrouvés en Écosse semblent représenter le Soleil et la Lune entourés de halos. Mais les traces de cette époque sont limitées. Les Babyloniens ont laissé des tablettes de terre cuite sur lesquelles ils gravaient des lois relatives à la météorologie, qu'ils avaient déduites de leurs observations. Par exemple ils avançaient les principes suivants : « quand le Soleil est entouré d'un halo, la pluie va tomber. Quand un nuage obscurcit le ciel, le vent va souffler » (Touati, 2000). De nombreux rois dans l'antiquité s'en sont remis aux magiciens et aux astrologues pour savoir quand envoyer des navires à la mer ou commencer à semer en terre. Toutes ces superstitions ont pris fin avec l'invention d'instruments en mesure d'évaluer quantitativement les phénomènes atmosphériques (Villeneuve, 1948). L'idée que la nature pourrait être interprétée par mesures directes de paramètres météorologiques est née de Galilée. En compagnie de ses étudiants, ils se questionnaient sur les phénomènes atmosphériques et tentaient de les interpréter. Ce travail leur a permis de découvrir des paramètres atmosphériques clés tels que la température, la pression et l'humidité ainsi que d'inventer divers instruments pour les mesurer (Camuffo et Bertolin, 2012). Après la mort de Galilée, son équipe développa un réseau d'observation qui est considéré comme le premier réseau météorologique mondial; il fonctionna durant 17 ans (de 1654 à 1670). Elle ne se doutait sans doute pas de l'importance des réseaux d'observations comme outils essentiels pour la prévision du temps. Malgré leur volonté à étendre ce réseau au-delà de Florence en particulier et de l'Italie en général, ils ne purent trouver auprès des décideurs l'appui nécessaire pour une révolution des sciences atmosphériques. Paradoxalement, il a fallu un évènement tragique pour les pousser à agir. En effet, le 14 Novembre 1854, une violente tempête fut à l'origine de la perte de 38 navires de commerce et de la mort de 400 marins. Ceci amena le Ministre de la guerre français à charger l'astronome Urbain Le Verrier (qui a découvert la planète Neptune) à trouver les causes de ce désastre. En effet, il découvre que les événements météorologiques en un lieu donné sont le résultat d'un déplacement, à l'échelle planétaire, de phénomènes physiques. Le Verrier s'aperçoit que la tempête existait déjà le 12 novembre mais à un autre endroit : le Nord-Ouest de l'Europe. Elle s'est donc déplacée en trois jours vers le Sud-Est. Le Verrier décide alors de mettre en place un réseau qui permettrait de localiser les événements dangereux pour mieux s'y préparer (Touati, 2000). C'est le début de l'ère de la météorologie moderne. De nombreuses

stations voient le jour en Europe. La mise au point des ballons sondes a permis de compléter les mesures faites en surface par des profils verticaux des mêmes variables. Tous ces éléments permirent au mathématicien, physicien et géophysicien Wilhelm Bjerknes d'énoncer en 1904 une théorie qui demeure jusqu'à aujourd'hui au cœur des centres de prévision. D'après lui, si les phénomènes météorologiques se développent à partir de ceux qui les précèdent en suivant des lois précises (comme le penserait toute personne raisonnant scientifiquement), on peut en déduire des conditions nécessaires et suffisantes pour une solution rationnelle du problème de la prévision en météorologie :

- On doit connaître avec une précision suffisante l'état de l'atmosphère à un instant donné.
- On doit connaître avec une précision suffisante les lois selon lesquelles un état de l'atmosphère se développe à partir de l'état précédent (Bjerknes, 1904).

Pour résumer sa pensée, un réseau d'observation dense et précis combiné à la compréhension et la résolution des processus physiques atmosphériques sont les principales conditions nécessaires à la prévision du temps. Ces hypothèses ont été expérimentées pour la première fois par un jeune britannique engagé dans le corps des ambulanciers en France lors de la première guerre mondiale. En 1916, Lewis Fry Richardson essaya de résoudre les équations de la prévision du temps de façon approchée avec les outils du calcul numérique. Il réalise même une prévision à six heures d'échéance qui se révèle complètement irréaliste (variations de pression au sol de 145 hPa en six heures lors d'une journée pourtant calme). Sans se décourager, il cherche à expliquer les raisons de son échec. Ses travaux ont été publiés en 1922 dans un livre resté célèbre, intitulé *Weather Prediction by Numerical Process*, qui contient une vision à caractère réellement prémonitoire. Notant que « 64,000 calculateurs seraient nécessaires pour prendre de vitesse l'évolution du temps sur l'ensemble du globe », Richardson imagine une usine à prévisions météorologiques, constituée par une myriade de calculateurs humains effectuant les calculs de façon synchronisée sous la direction d'un responsable chargé de la bonne marche des opérations (Coiffier et Nicolau, 2003).

À la suite de l'échec de Richardson, peu de scientifiques osèrent s'attaquer au problème de prévision numérique. On peut tout de même noter l'apport de Courant, Friedrich et Lewy sur les contraintes à respecter lors de la numérisation en 1928 et les travaux de Rossby en 1939 visant à éliminer les ondes de gravité (responsables de l'échec de Richardson) des équations, pour simplifier leur résolution. Cependant il se posait toujours le même problème de puissance

limitée des machines à calculer de l'époque. Ce n'est qu'à partir de 1950, avec les premiers ordinateurs que ces principes ont pu être appliqués d'abord expérimentalement. Les premières prévisions numériques opérationnelles ont été instaurées au début des années 1960. Les modèles n'ont cessé depuis lors de se développer, grâce à l'augmentation fulgurante de la puissance de calcul des ordinateurs et aux progrès énormes en méthodes de calculs et en météorologie théorique.

Dès lors l'évolution des modèles a été rythmée par de nouveaux schémas numériques visant à accélérer la résolution des équations de la physique de l'atmosphère sur la sphère. La majorité de ces schémas ont été développés sur la grille latitude-longitude (lat/lon) qui est la plus simple pour discrétiser la sphère dans les MCG. Or, cette dernière pose le problème de convergence des méridiens au niveau des pôles. C'est la raison pour laquelle durant les dernières décennies de nombreuses grilles, utilisant divers systèmes de coordonnées horizontaux ont été proposés pour simuler la circulation générale de l'atmosphère (Baba et al, 2010). Entre autre, nous pouvons citer la grille Yin-Yang qui est la première grille issue de la DD à être implantée dans un modèle de prévision opérationnelle. Elle est composée de deux grilles lat/lon rectangulaires, courbées, orthogonales et identiques. Cette grille possède tous les avantages de la grille lat/lon et ne pose pas de problème au niveau des pôles. De plus le fait qu'elle combine deux modèles à aire limitée pour recouvrir la sphère la rend compatible avec les algorithmes parallèles développés sur les nouveaux calculateurs massivement parallèles disponibles. La grille Yin-Yang est actuellement utilisée au Centre Météorologique Canadien.

Ce projet de maîtrise s'inscrit dans la continuité des travaux de Qaddouri *et al.* (2008) sur la grille Yin-Yang. L'idée est de s'assurer que les théories développées pour les 2 SD de la grille Yin-Yang puissent fonctionner pour un nombre plus élevé de SD. Nous nous intéresserons dans ce projet à la grille sphère-cubique développée pour la première fois par Sadourny (1972). Cependant, nous utiliserons les coordonnées lat/lon au lieu des coordonnées adaptées développées par Sadourny car ces dernières sont complexes comparativement aux coordonnées lat/lon. Après avoir construit la sphère, nous résoudrons un problème elliptique sur celle-ci. Le problème elliptique a été choisi parce qu'il représente assez bien les ondes météorologiques vu qu'il résulte de la discrétisation des équations de Saint-Venant lorsque l'on traite implicitement les termes responsables des ondes de gravité sur la sphère (Qaddouri *et al.*, 2005).

La suite de ce travail sera structurée comme suit : le chapitre 1 présentera l'origine du problème elliptique et la construction de notre grille sphère-cubique. Pour conclure ce chapitre

nous montrerons comment l'information est échangée entre les SD. La première partie du second chapitre illustrera la méthode de Schwarz par un exemple simple. Dans la seconde partie nous généraliserons l'étude de la convergence des méthodes de Schwarz faites dans Qaddouri *et al.* (2008) dans le cas de 2 SD, à un nombre plus élevé et pair de sous-domaines dans le but de valider son utilisation sur notre grille sphère-cubique. Le dernier chapitre présentera le problème elliptique 2D et les résultats obtenus sur notre sphère-cubique.

## CHAPITRE I

### PROBLÈME ELLIPTIQUE ET GRILLE SPHÈRE-CUBIQUE

#### 1.1 Origine du problème elliptique

Les équations de Saint-Venant sont utilisées pour représenter les écoulements dont une des dimensions est plus petite que les autres. C'est le cas pour des modèles 2D en météorologie qui comportent un seul niveau (peu profond) dans la verticale. Elles sont un prototype pour les équations plus complètes. Nous illustrons ici comment le problème elliptique survient dans une discrétisation temporelle semi-implicite. Les équations de Saint-Venant s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + (gH + \phi) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $H$  est la hauteur moyenne du fluide et  $\phi$  est la perturbation de hauteur géopotentielle de la surface libre, le couple  $(u, v)$  désigne les composantes horizontales de la vitesse du fluide,  $f$  le paramètre de Coriolis,  $(x, y)$  le système de coordonnées cartésiennes et  $t$  le temps.

En discrétisant de manière semi-implicite (Robert *et al*, 1972) l'équation 1.1 on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{\Delta t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \left[ \frac{u}{\Delta t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{t-2\Delta t} - 2 \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv \right]_{t-\Delta t} = R_u \\
 \frac{v}{\Delta t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \left[ \frac{v}{\Delta t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{t-2\Delta t} - 2 \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu \right]_{t-\Delta t} = R_v \\
 \frac{\phi}{\Delta t} + gH \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \left[ \frac{\phi}{\Delta t} - gH \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]_{t-2\Delta t} \\
 &\quad - 2 \left[ u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]_{t-\Delta t} = R_c
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps.

Le problème elliptique s'obtient en sommant la dérivée première des deux premières lignes de l'équation 1.2 selon respectivement  $x$  et  $y$  pour obtenir la divergence du vent horizontal. L'équation résultante est ensuite soustraite de la dernière ligne de l'équation 1.2 (qui est divisée par le paramètre  $\Delta t$ ) pour obtenir :

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{\phi}{gH\Delta t^2} = R \quad (1.3)$$

avec  $R = \frac{\partial R_u}{\partial x} + \frac{\partial R_v}{\partial y} - \frac{R_c}{gH\Delta t}$ . Après la solution du problème elliptique (équation 1.3) on

retourne dans l'équation 1.2 pour obtenir les vents  $u$  et  $v$ . Ceci complète un pas de temps et on recommence jusqu'à ce que le temps final soit atteint.

Puisque dans ce mémoire on considèrera une sphère en coordonnées lat/lon on va étudier la solution de

$$\nabla^2 \phi(\lambda, \theta) - \eta \phi(\lambda, \theta) = R(\lambda, \theta). \quad (1.4)$$

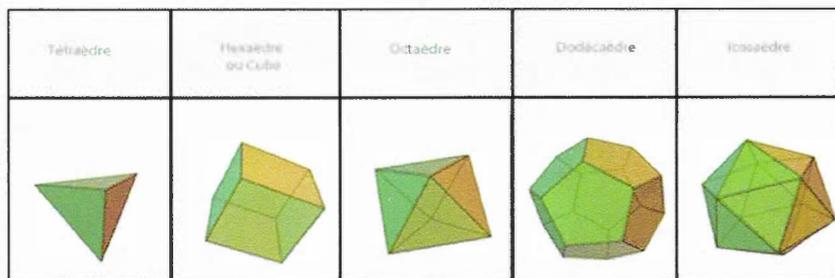
Où  $\eta$  est positif, ce qui garantit l'existence de la solution du problème elliptique (équation 1.4).

## 1.2 La grille sphère-cubique

Les coordonnées sphériques sont les mieux adaptées pour résoudre des équations sur une sphère. Pourtant, lorsque Sadourny construisit sa sphère-cubique, il affirma que « *le choix des coordonnées sphériques n'est pas le plus adapté pour une grille non-uniforme. Des projections centrales choisies de telles manière qu'elles recouvriraient complètement et de manière uniforme (à l'aide figures géométriques régulières) toute la sphère, sont une alternative à ce choix de coordonnées* » (Sadourny, 1972). Dans ce travail, nous réussirons néanmoins à utiliser des coordonnées sphériques. Cette différence est importante à signaler car les coordonnées sphériques sont les plus simples pour représenter les équations en météorologie; de plus, les projections centrales sont plus difficiles à comprendre que les coordonnées lat/lon.

Les figures géométriques dont Sadourny parle sont les 5 polygones réguliers proposés par le philosophe grec Platon. Ce dernier montra qu'il n'en existe que 5 convexes et inscriptibles

dans une sphère de telle manière que tous ses coins touchent la surface de celle-ci. Les cinq polyèdres sont présentés dans la figure ci-dessous:



**Fig. 1.1 Solides de Platon.** (Source Wikipédia)

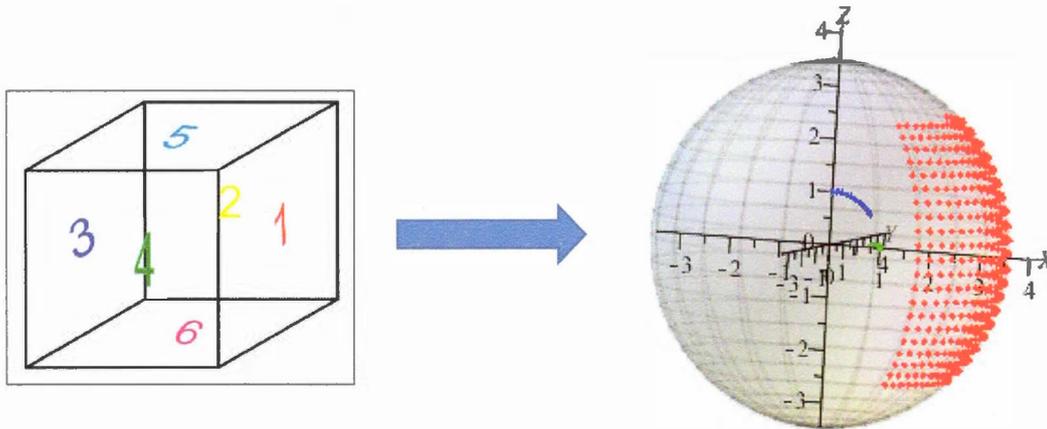
Ces polyèdres sont très utiles pour construire des grilles régulières composites. Il suffit de les inscrire à l'intérieur de la sphère et de projeter les différentes faces sur la surface de celle-ci. Le fait que les faces soient régulières donne l'avantage d'avoir des SD identiques, ce qui permet une résolution en parallèle du problème sur toutes les faces.

Pour construire notre grille, nous commençons par choisir une des faces du cube que nous définirons comme la face principale (figure. 1.2). Notre système de coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) a pour origine est le centre de la sphère. Son axe vertical Z passe par les deux pôles, l'axe X passe par le centre de la face principale du cube que nous avons choisi. Les faces du cube inscrit étant planes, nous avons juste besoin de deux coordonnées pour repérer tous les points de chacune d'elles. Nous avons choisi les coordonnées sphériques lat/lon. Le système d'équation suivant permet d'établir une correspondance entre les systèmes de coordonnées cartésiennes et sphériques :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= R * \cos(lon) * \cos(lat) \\
 y_1 &= R * \cos(lat) * \cos(lon) \\
 z_1 &= R * \sin(lat)
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

avec,  $-\frac{\pi}{4} \leq lat \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq lon \leq \frac{\pi}{4}$  et  $R$  est le rayon de la sphère. L'indice 1 correspond

au numéro de la face sur laquelle on se situe. En définissant une grille carrée lat/lon de  $N \times N$ , (ici  $N = 21$  pour illustration), on obtient à l'aide du logiciel MAPLE la projection de la face 1 du cube (en rouge) comme on peut le voir sur la figure 1.2 à droite.



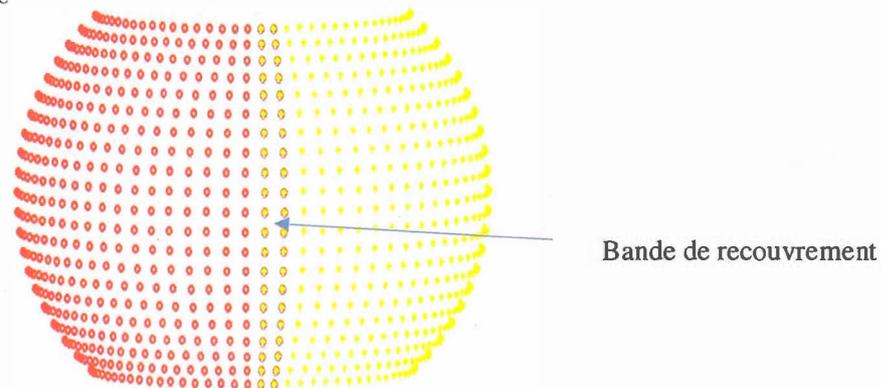
**Fig. 1.2** Grille du panneau principal en rouge. La face numéro 1 du cube à gauche a été projetée sur la surface de la sphère et ensuite discrétisée en points de grille.

Pour s'assurer que notre grille couvrira toute la sphère, nous imposerons un recouvrement  $\delta$  à tous les panneaux. Les nouvelles dimensions d'un panneau seront :

$$-\frac{\pi}{4} - \delta \leq lon \leq \frac{\pi}{4} + \delta, \quad -\frac{\pi}{4} - \delta \leq lat \leq \frac{\pi}{4} + \delta \quad \text{et} \quad \delta \ll \frac{\pi}{4} \quad (1.6)$$

La taille du recouvrement peut dépendre soit de la taille du sous-domaine ou du nombre de points de grille. Nous avons choisi de la définir en fonction du nombre de points de grille:

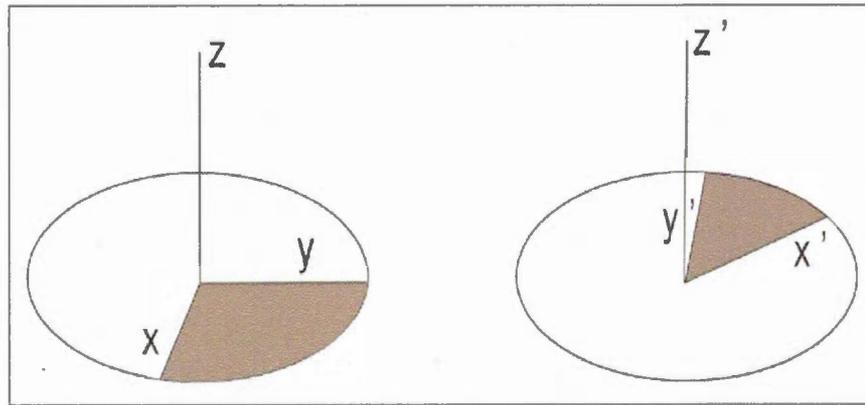
$\delta \approx \frac{N}{20}$  (on arrondit au demi-entier le plus proche de la division par 20). Pour notre exemple précédent où  $N = 21$  par exemple on aura  $\delta = 1$ . Ce qui reviendra à ajouter une ligne (resp. colonne) supplémentaire aux 4 différentes frontières du sous-domaine comme le montre la figure ci-dessous :



**Fig. 1.3** Bande de recouvrement entre deux panneaux voisins. Les panneaux 1 et 2 se superposent dans une région appelée bande de recouvrement. C'est dans cette région que le transfert d'information entre les 2 SD a lieu.

Pour construire les autres panneaux nous n'allons pas recommencer à faire des projections des 5 autres faces du cube comme Sadourny, mais nous servir des propriétés de symétrie du cube pour les générer automatiquement. L'approche consiste à faire 3 rotations autour de l'axe polaire pour obtenir le reste des panneaux latéraux (autour de l'équateur), puis deux autres autour de l'axe Y pour obtenir les panneaux recouvrant les deux pôles.

Effectuer des rotations autour des axes du système cartésien est équivalent à appliquer des opérateurs (matrices) de rotation. La technique pour obtenir ces matrices de rotation est tirée du premier chapitre de Stephen et Marion (2004).



**Fig. 1.4 Rotation du système d'axes.** Source: Stephen et Marion (2004). Le domaine de droite en gris est obtenu par une rotation de celui de gauche dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

En règle générale, le passage d'un système d'axes  $(x, y, z)$  à un autre  $(x', y', z')$  se fait par la matrice de rotation :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(x, x') & \cos(x, y') & \cos(x, z') \\ \cos(y, x') & \cos(y, y') & \cos(y, z') \\ \cos(z, x') & \cos(z, y') & \cos(z, z') \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Par exemple pour obtenir le panneau 2, il suffit d'obtenir les angles prédéfinis dans la matrice. Heureusement pour nous, toutes les rotations effectuées sont des multiples de  $\pi/2$ . Tous les éléments de matrices seront soit 0, 1 ou -1.

Pour le panneau numéro 2 situé directement à droite du panneau principal, on a :

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & \cos(180^\circ) & \cos(-90^\circ) \\ \cos(0^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & \cos(0^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Une fois la matrice obtenue, on effectue le produit matriciel suivant pour obtenir les coordonnées cartésiennes du nouveau panneau :

$$M_2 * \begin{pmatrix} x_1(1, \dots, N \times N) \\ y_1(1, \dots, N \times N) \\ z_1(1, \dots, N \times N) \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Où les triplets  $(x_1, y_1, z_1)$  forment un tableau de dimension  $3 \times N^2$

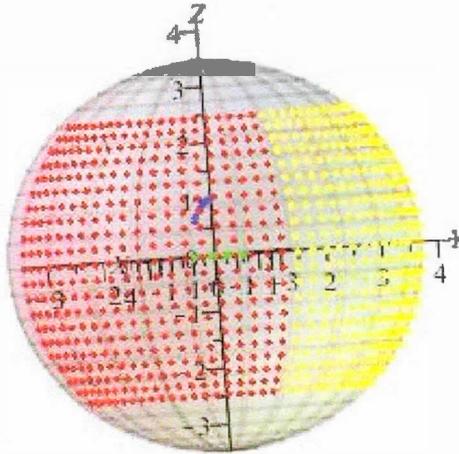
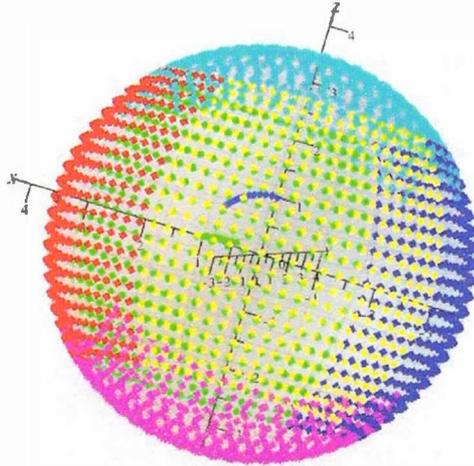


Fig. 1.5 : Panneau 2 en jaune

Le même raisonnement que précédemment sur les autres panneaux permet d'obtenir le reste des matrices de passage :

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$



**Fig. 1.6 Différents panneaux**

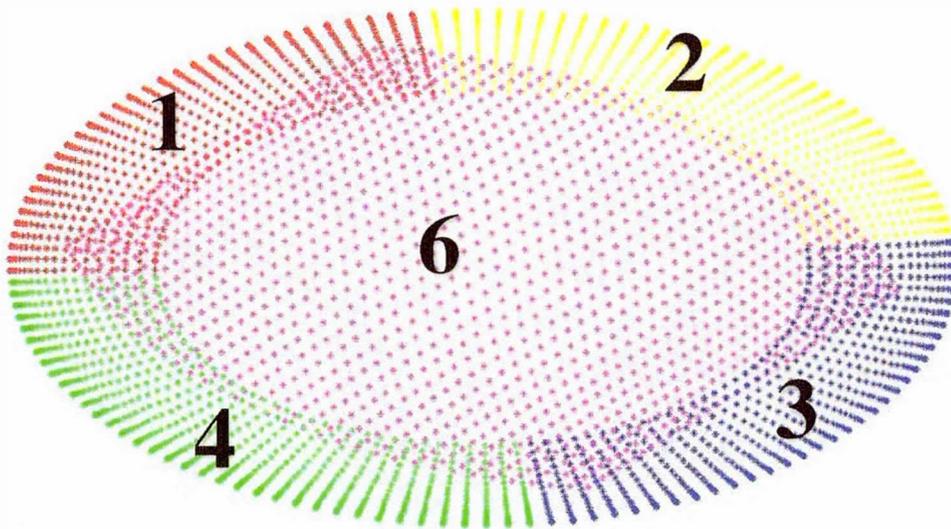
Pour distinguer les différentes faces nous leur avons attribué des couleurs. Ainsi, le panneau 1 est rouge, le panneau 2 est jaune, le panneau 3 est bleu, le panneau 4 est vert, le panneau 5 est cyan et le panneau 6 est magenta.

Une fois tous les panneaux combinés nous obtenons une grille qui recouvre complètement la sphère. Le problème numérique sera résolu indépendamment sur chacune des faces et les solutions obtenues seront échangées entre les différents SD. La section suivante explique comment se transfère l'information.

### 1.3 Procédures de communication

Les modèles régionaux de climat ne peuvent être roulés s'ils ne reçoivent sur toutes leurs frontières latérales, à chaque pas de temps, des informations sur l'état de l'atmosphère. Les différentes faces de notre grille sphère-cubique peuvent être visualisées comme six différents modèles régionaux. Nous proposons dans ce travail un ensemble de six grilles régionales (combinées de manière à pouvoir former une seule grille globale sans singularité) pouvant se piloter mutuellement sans recourir à des sources de données extérieures pendant la simulation. En effet, l'information sur les conditions initiales est fournie au tout début de la simulation par les données d'observations ou des ré-analyses. Par contre à chaque pas de temps subséquent, on utilise un premier estimé pour les itérations de Schwarz obtenu du pas de temps précédent afin de générer les conditions aux frontières des six SD (panneaux).

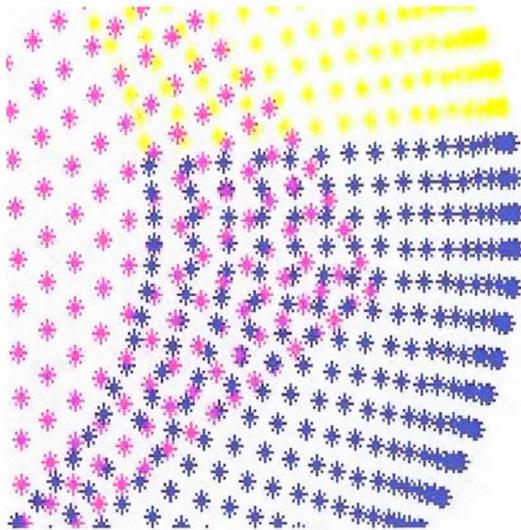
La figure ci-dessus illustre le propos précédent au moyen d'une projection plane de l'hémisphère sud de notre grille.



**Fig. 1.7 Projection de l'hémisphère Sud sur le plan équatorial**

À l'aide des différentes couleurs représentant 5 des 6 panneaux de notre grille, on peut savoir pour chacun des points du périmètre du panneau 6 par exemple sur lequel des panneaux voisins aller chercher l'information sur ses nouvelles conditions frontières. C'est la raison pour laquelle avant de commencer à résoudre le problème numérique, nous avons prévu un code qui explicite pour chacun des points frontières d'un panneau, le voisin sur lequel il ira chercher ses nouvelles informations ainsi que les points de grille alentours avec lesquels interpoler (Voir annexe B, section B1).

Une fois déterminés les différents voisins sur lesquels aller chercher les nouvelles informations il faut mettre en place une procédure pour les obtenir avec une bonne précision. En effet, une des difficultés rencontrées dans ce travail est lorsque le point de grille sur la frontière d'un SD ne coïncide pas avec un point de grille sur le SD voisin où il doit aller chercher de l'information comme on peut le voir sur la figure ci-dessous.



**Fig. 1.8 : Illustration de la nécessité d'interpoler aux frontières**

En effet, les points en magenta sur la périphérie ont besoin de nouvelles informations à chaque itération, mais ces points ne s'alignent pas toujours sur les points de la grille voisine (bleue ou jaune). Rappelons que les informations sur les variables ne sont disponibles que sur les points de grille. C'est la raison pour laquelle la résolution des modèles doit être la plus élevée possible afin de réduire au mieux la distance entre deux points successifs. Une solution à ce type de problème est l'interpolation. Interpoler revient à utiliser les informations autour du point d'intérêt afin d'estimer la valeur de la variable sur celui-ci. Dans le présent code nous utilisons l'interpolation cubique de Lagrange.

#### **1.4 Synthèse partielle**

Les équations de Saint-Venant sont les plus simples à utiliser en première approche pour simuler les ondes dans l'atmosphère. Leur discrétisation implicite ou semi-implicite aboutit à un problème elliptique. Ce problème est au cœur des modèles de prévision car il doit être résolu à chaque pas de temps. Son coût de calcul relativement élevé est un défi pour les modèles de prévision actuels. Dans ce chapitre introductif, nous avons commencé par présenter l'origine du problème elliptique ; ensuite nous avons montré qu'il est possible de construire la grille sphère-cubique en coordonnées lat/lon. Tout comme la grille Yin-Yang, notre grille sphère-cubique comprend tous les avantages de la grille lat/lon, mais comme elle comporte plus de

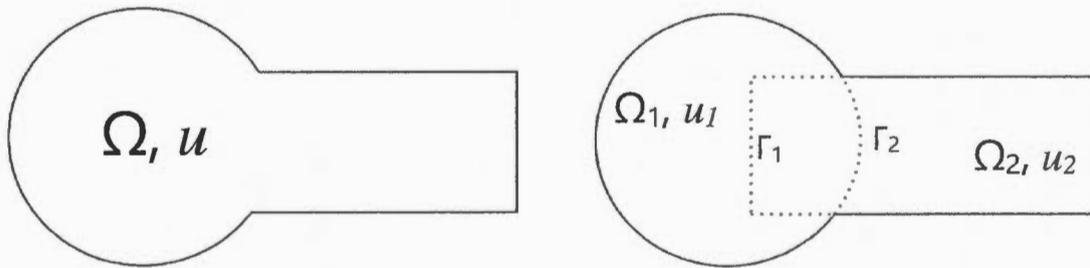
panneaux elle est intrinsèquement plus parallèle et donc bien adaptée à l'architecture massivement parallèle des supercalculateurs actuels. Nous ne pouvons affirmer que notre grille est la plus efficace, mais dans un premier temps nous allons montrer que l'on peut obtenir la solution du problème elliptique. Le chapitre suivant détaillera les méthodes utilisées pour résoudre notre problème numérique sur la sphère.

## CHAPITRE II

### MÉTHODES DE SCHWARZ 1D

#### 2.1 Introduction aux méthodes de Schwarz

À l'origine, les méthodes de Schwarz (1870) ont été développées pour prouver qu'il existait une solution théorique au problème de Poisson sur des domaines à géométrie complexe en utilisant les conditions aux limites de Dirichlet. L'idée était de décomposer une grande surface avec une géométrie non triviale en SD avec des géométries simples sur lesquelles on sait résoudre notre équation aux dérivées partielles (EDP). La figure originale présentée par Schwarz est la suivante :

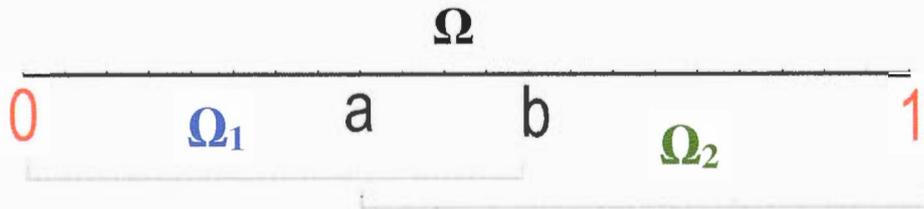


**Fig. 2.1** Figure originale de Schwarz en 1870. À gauche on a le domaine complet  $\Omega$  sur lequel on recherche la solution; la variable recherchée est  $u$ . La figure de droite est le domaine initial décomposé en deux surfaces géométriques élémentaires.

La figure de gauche représente le domaine complet ( $\Omega$ ) sur lequel on voudrait résoudre notre EDP. La forme géométrique de cette figure n'étant pas commune, Schwarz se proposa de la décomposer en deux SD plus simples (un cercle  $\Omega_1$  et un rectangle  $\Omega_2$ ).  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont des interfaces artificielles qui marquent les limites des SD. Une fois la DD effectuée, l'idée est de résoudre itérativement notre EDP sur chacun des SD.

Pour illustrer la méthode, considérons un problème simple. Considérons une barre rectiligne sur laquelle on voudrait estimer l'évolution d'une variable aléatoire ( $y$ ) en connaissant les conditions aux limites ( $x = 0$  à la frontière gauche et  $x = 1$  à la frontière de droite). En

supposant que l'évolution de la variable sur la barre suit l'équation de Poisson, le problème à résoudre est schématisé comme suit :



**Fig. 2.2** Domaine rectiligne ( $\Omega$ ) sur lequel on recherche la solution du problème de Poisson. Le domaine  $\Omega$  est décomposé en 2 SD. Le premier ( $\Omega_1$ ) est compris entre 0 et  $b$  et le second ( $\Omega_2$ ) entre  $a$  et 1.

Le problème analytique à résoudre dans chacun des SD est le suivant :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = 2C, \text{ avec les conditions limites: } y(x_g) = c_g, y(x_d) = c_d. \quad (2.1)$$

où  $C$ ,  $c_g$  et  $c_d$  sont des constantes. La solution du problème homogène est un polynôme de degré 2 dont le coefficient du monôme du plus haut degré est le terme source  $C$ . Il nous reste pour résoudre ce genre de problème de définir les deux autres coefficients du polynôme solution. Heureusement, nous avons encore deux conditions aux limites à satisfaire c'est-à-dire deux équations pour deux inconnues à résoudre. Ce problème étant trivial, la solution sur un SD en fonction des paramètres sus définis est :

$$y(x) = Cx^2 + \left[ \frac{(c_g - c_d)}{(x_g - x_d)} - C(x_g + x_d) \right] x + \left[ Cx_g x_d - \frac{(c_g x_d - c_d x_g)}{(x_g - x_d)} \right]. \quad (2.2)$$

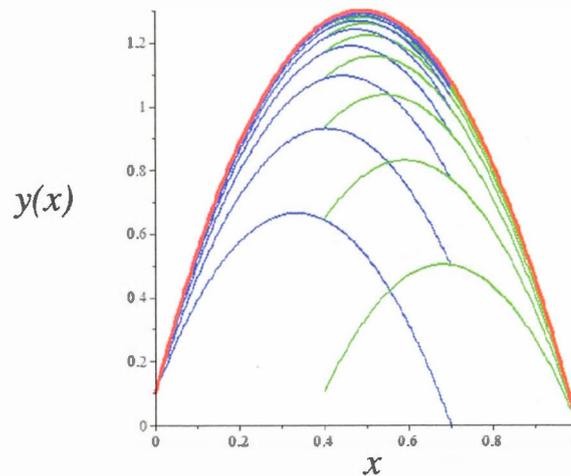
Donnons des valeurs aux paramètres de notre problème pour illustrer les deux variantes (parallèle et en alternée) de la méthode classique de Schwarz :

$$x_g = 0, x_d = 1, c_g = \frac{1}{10}, c_d = 0, 2C = -10, a = \frac{4}{10}, b = \frac{7}{10}. \quad (2.3)$$

### 2.1.1 Méthode de Schwarz parallèle

L'algorithme de Schwarz parallèle consiste à résoudre simultanément l'EDP dans les 2 SD. À la première itération, les conditions aux frontières sont les conditions initiales du

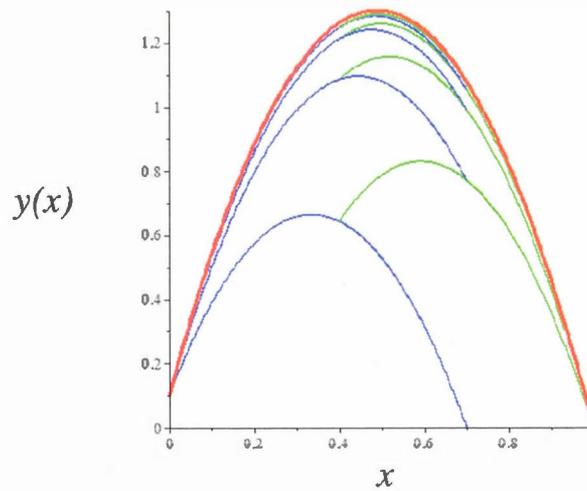
problème dans chacun des SD. À partir de la seconde itération, les conditions aux frontières artificielles pour chacun des SD (au point  $b$  pour le SD 1 et au point  $a$  pour le SD 2) s'obtiennent à partir de la solution obtenue lors de l'itération précédente dans le SD voisin. Cet échange d'information entre les SD assure la convergence des solutions par SD vers une solution globale unique comme le montre la figure 2.3 :



**Fig. 2.3 Méthode classique de Schwarz parallèle.** Les solutions des SD 1 et 2 sont respectivement en bleu et vert. La solution analytique en rouge est approchée avec une bonne approximation en moins de dix itérations.

### 2.1.2 Méthode de Schwarz alternée

L'algorithme de Schwarz alterné consiste à résoudre alternativement l'EDP dans les 2 SD. À la première itération, on connaît les conditions initiales dans seulement un des SD ; c'est seulement dans celui-ci que l'on résout notre EDP. Une fois sa solution obtenue, on l'utilise pour évaluer la variable dans la frontière artificielle de l'autre SD et on résout le problème analytique par SD. On poursuit le processus d'alternance jusqu'à ce que l'on soit suffisamment proche de la solution analytique globale. Un des SD est donc constamment en attente d'être résolu tandis que l'autre est actif. Ceci pose un problème si l'on utilise des calculateurs parallèles car on ne les utilisera pas de manière optimale. Par contre, le fait que les conditions frontières soient rafraîchies au fur et à mesure que le processus itératif avance permet de converger en moins d'itérations que si l'on utilisait un algorithme parallèle comme le montre la figure 2.4 :



**Fig. 2.4** Méthode classique de Schwarz alternée. Les solutions dans les SD 1 et 2 sont respectivement en bleu et vert. La solution analytique en rouge est approchée avec une bonne approximation en cinq itérations.

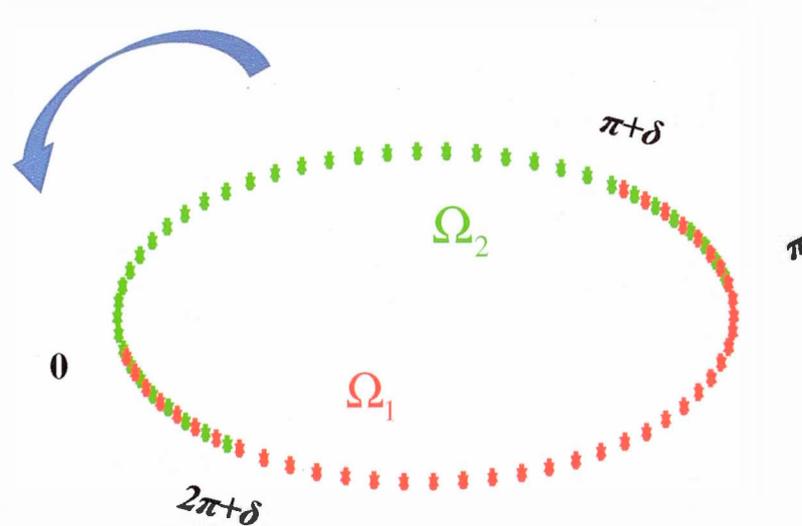
## 2.2 Schwarz 1D périodique à 2 sous-domaines

Tous les résultats de cette section, sauf indication contraire, reproduisent ceux de Qaddouri et *al.* (2008) et le formalisme est similaire, et sera éventuellement généralisé pour  $N$  sous-domaines (SD). On s'intéresse ici à la résolution sur un domaine périodique du problème 1D de Helmholtz dont la forme générale est la suivante :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - \eta \right) \phi = R, \text{ ou encore } H\phi = R \text{ avec } H = \left( \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - \eta \right) \text{ et } \eta > 0 \quad (2.4)$$

$R$  est le terme source,  $H$  et  $\eta$  sont respectivement l'opérateur et la constante de Helmholtz. Le domaine d'étude ici est un cercle  $\Omega = [0, 2\pi]$ . Le domaine circulaire a été choisi à cause de sa périodicité et de son parallèle avec la surface de la sphère pour le cas 2D. Les conditions aux limites seront celles de Robin  $(\beta\phi + \frac{\partial\phi}{\partial\lambda})$  qui combinent les conditions de

Dirichlet ( $\phi$ ) et de Neumann ( $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$ ). En effet, elles font appel à un opérateur d'échange d'information entre les deux SD noté  $B$  qui tient compte à la fois de la dérivée première de la fonction et d'un paramètre constant (à définir) dont le rôle est d'accélérer la convergence de l'algorithme. Le domaine circulaire  $\Omega$  est décomposé en deux SD courbés  $\Omega_1 = [0, \pi + \delta]$  et  $\Omega_2 = [\pi, 2\pi + \delta]$  qui se chevauchent comme le montre la figure ci-dessous :



**Fig. 2.5** Domaine périodique sur lequel on recherche la solution du problème de Helmholtz. Les couleurs rouges et vertes représentent respectivement les SD 1 et 2. Le domaine rouge est compris entre 0 et  $\pi + \delta$  et le vert entre  $\pi$  et  $2\pi + \delta$ .

La flèche à gauche indique le sens antihoraire dans lequel sont orientés les deux SD.

Les couleurs rouges et vertes indiquent respectivement les SD 1 et 2.  $\delta$  est la taille du chevauchement entre les SD, c'est-à-dire l'intervalle commun aux deux SD. Un des objectifs de cette section est de savoir quelle taille le recouvrement devrait avoir pour assurer la convergence rapide de l'algorithme lors du processus itératif. Le problème de Helmholtz discret avec conditions aux limites de Robin s'écrit :

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - \eta \right) \phi^{(1),k} &= R^{(1)}, & \text{sur } \Omega_1 & & \left( \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - \eta \right) \phi^{(2),k} &= R^{(2)} & \text{sur } \Omega_2 \\
B_1^{(1)} \phi^{(1),k}(0) &= B_1^{(1)} \phi^{(2),k-1}(2\pi) & \text{et} & & B_1^{(2)} \phi^{(2),k}(\pi) &= B_1^{(2)} \phi^{(1),k-1}(\pi) & (2.5) \\
B_2^{(1)} \phi^{(1),k}(\pi + \delta) &= B_2^{(1)} \phi^{(2),k-1}(\pi + \delta) & & & B_2^{(2)} \phi^{(2),k}(2\pi + \delta) &= B_2^{(2)} \phi^{(1),k-1}(\delta)
\end{aligned}$$

Les indices 1 et 2 indiquent le SD sur lequel on se trouve et  $k$  est l'indice de l'itération.

$B_i^{(l)} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta_i^{(l)}$  est l'opérateur d'interface, il agit à la frontière des SD pour assurer les échanges d'informations entre les différents SD. Cet opérateur est caractéristique des conditions aux limites de Robin ; les conditions de Robin sont des conditions mixtes qui combinent linéairement la valeur de la dérivée première de la fonction (conditions de Neumann) et la valeur de la fonction elle-même (conditions de Dirichlet) aux frontières du sous-domaine. La solution sur le SD ( $l$ ) à une itération  $k$  donnée s'écrit :

$$\phi^{(l),k}(\lambda) = a^{(l),k} e^{\kappa \lambda} + b^{(l),k} e^{-\kappa \lambda} + I^{(l)} = \begin{bmatrix} e^{\kappa \lambda} & e^{-\kappa \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(l),k} \\ b^{(l),k} \end{bmatrix} + I^{(l)} \quad (2.6)$$

avec  $\kappa = \sqrt{\eta}$  et  $I^{(l)}$  le terme inhomogène de la solution. La matrice établissant le lien entre ces coefficients entre deux itérations successives est appelée matrice de transition. Cette matrice possède une propriété importante : sa plus grande valeur propre ou rayon spectral détermine le taux de convergence du processus itératif. Pour simplifier les équations qui nous permettront de déterminer le rayon spectral, nous allons établir une correspondance biunivoque entre la coordonnée d'un point à la frontière d'un SD et son image sur la frontière du SD voisin. En effet, la lecture de la coordonnée de la frontière d'un SD n'est pas la même si on la fait depuis l'autre SD comme on peut le voir sur la figure. 2.5. Cette lecture par SD est résumée comme suit :

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{(1)} &= 0, & \lambda_2^{(1)} &= \pi + \delta, & \lambda_1^{(2)} &= \pi, & \lambda_2^{(2)} &= 2\pi + \delta, \\
\tilde{\lambda}_1^{(1)} &= 2\pi, & \tilde{\lambda}_2^{(1)} &= \pi + \delta, & \tilde{\lambda}_1^{(2)} &= \pi, & \tilde{\lambda}_2^{(2)} &= \delta.
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Sur la ligne du dessus, on fait la lecture depuis le premier SD en rouge tandis qu'en dessous on a l'image correspondante qui est obtenue en faisant la lecture des mêmes points depuis le second SD en vert. Cette approche permettra d'écrire le problème discret sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned}
B_1^{(1)} \phi^{(1),k}(\lambda_1^{(1)}) &= B_1^{(1)} \phi^{(2),k-1}(\tilde{\lambda}_1^{(1)}) & B_1^{(2)} \phi^{(2),k}(\lambda_1^{(2)}) &= B_1^{(2)} \phi^{(1),k-1}(\tilde{\lambda}_1^{(2)}) \\
& \text{et} & & \\
B_2^{(1)} \phi^{(1),k}(\lambda_2^{(1)}) &= B_2^{(1)} \phi^{(2),k-1}(\tilde{\lambda}_2^{(1)}) & B_2^{(2)} \phi^{(2),k}(\lambda_2^{(2)}) &= B_2^{(2)} \phi^{(1),k-1}(\tilde{\lambda}_2^{(2)})
\end{aligned} \tag{2.8}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
B_1^{(l)} \phi^{(l),k}(\lambda_1^{(l)}) &= B_1^{(l)} \phi^{(3-l),k-1}(\tilde{\lambda}_1^{(l)}) \\
& \text{et} \\
B_2^{(l)} \phi^{(l),k}(\lambda_2^{(l)}) &= B_2^{(l)} \phi^{(3-l),k-1}(\tilde{\lambda}_2^{(l)})
\end{aligned} \tag{2.9}$$

où  $l = 1, 2$  indique le numéro du SD.

La solution postulée lorsque le terme source est non nul contient une composante homogène et une autre inhomogène :  $\phi^{(l),k}(\lambda) = (a^{(l),k} e^{\kappa \lambda} + b^{(l),k} e^{-\kappa \lambda}) + I^{(l)}$ . Entre deux pas de temps successifs et dans un même SD( $l$ ), notre objectif est de faire tendre la différence entre 2 itérations  $\phi^{(l),k+1}(\lambda) - \phi^{(l),k}(\lambda)$  vers zéro. Cette différence fait disparaître le terme inhomogène  $I^{(l)}$  (Gander *et al*, 2014). C'est la raison pour laquelle dans ce qui suivra nous ne tiendrons pas compte de la partie inhomogène de la solution car le terme inhomogène ne contribue pas à la convergence.

En insérant cette nouvelle solution à l'intérieur de la forme compacte 2.9, on obtient :

$$M_{(l)} \begin{bmatrix} a^{(l),k} \\ b^{(l),k} \end{bmatrix} = \tilde{M}_{(l)} \begin{bmatrix} a^{(3-l),k-1} \\ b^{(3-l),k-1} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$\text{avec } M_{(l)} = \begin{pmatrix} B_1^{(l)} e^{\kappa \lambda_1^{(l)}} & B_1^{(l)} e^{-\kappa \lambda_1^{(l)}} \\ B_2^{(l)} e^{\kappa \lambda_2^{(l)}} & B_2^{(l)} e^{-\kappa \lambda_2^{(l)}} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{M}_{(l)} = \begin{pmatrix} B_1^{(l)} e^{\kappa \tilde{\lambda}_1^{(l)}} & B_1^{(l)} e^{-\kappa \tilde{\lambda}_1^{(l)}} \\ B_2^{(l)} e^{\kappa \tilde{\lambda}_2^{(l)}} & B_2^{(l)} e^{-\kappa \tilde{\lambda}_2^{(l)}} \end{pmatrix}$$

La matrice de transition s'obtient en considérant simultanément les deux SD :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & M_{(1)}^{-1} \tilde{M}_{(1)} \\ M_{(2)}^{-1} \tilde{M}_{(2)} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

L'algorithme alterné ou de Gauss-Seidel nous amène à effectuer deux demi-itérations pour obtenir une itération complète (Strang, 2006).

$$T^2 = T \cdot T = \begin{pmatrix} M^{-1}_{(1)} \widetilde{M}_{(1)} M^{-1}_{(2)} \widetilde{M}_{(2)} & 0 \\ 0 & M^{-1}_{(2)} \widetilde{M}_{(2)} M^{-1}_{(1)} \widetilde{M}_{(1)} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Les deux matrices sur la diagonale sont les transposées l'une de l'autre. Elles ont donc les mêmes valeurs propres et par conséquent le même rayon spectral. Il suffit donc de choisir l'une ou l'autre des matrices. Postulons la matrice de transition suivante :

$$A(\kappa, \lambda) = M^{-1}_{(1)} \widetilde{M}_{(1)} M^{-1}_{(2)} \widetilde{M}_{(2)} \quad (2.13)$$

Une fois la matrice de transition et le rayon spectral déterminés, nous commencerons par étudier la convergence de méthode classique de Schwarz qui utilise les conditions aux limites de Dirichlet. Ensuite, nous étudierons une méthode optimisée sans recouvrement qui utilise les conditions aux limites de Robin.

### 2.2.1 Méthode classique de Schwarz

Tel que discuté au premier chapitre, la méthode classique de Schwarz résout le problème discret avec les conditions aux frontières de Dirichlet. Il suffit donc de poser l'opérateur d'interface égal à l'opérateur identité, ce qui équivaut à ne considérer que la valeur de la fonction sur les bouts des SD. Avec cette nouvelle information, on simplifie l'expression des matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\kappa(\pi+\delta)} & e^{-\kappa(\pi+\delta)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} e^{\kappa\pi} & e^{-\kappa\pi} \\ e^{\kappa(2\pi+\delta)} & e^{-\kappa(2\pi+\delta)} \end{pmatrix} \quad (2.14a)$$

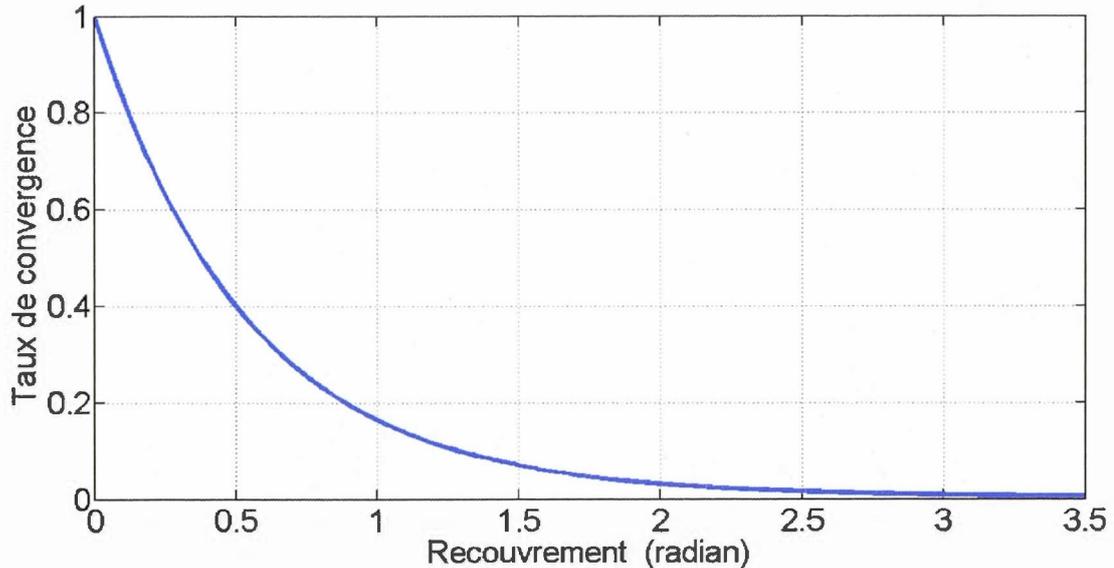
$$\widetilde{M}_1 = \begin{pmatrix} e^{\kappa 2\pi} & e^{-\kappa 2\pi} \\ e^{\kappa(\pi+\delta)} & e^{-\kappa(\pi+\delta)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widetilde{M}_2 = \begin{pmatrix} e^{\kappa\pi} & e^{-\kappa\pi} \\ e^{\kappa\delta} & e^{-\kappa\delta} \end{pmatrix} \quad (2.14b)$$

En réécrivant les termes obtenus plus haut, on obtient respectivement la matrice de transition et le rayon spectral suivant :

$$A(\kappa, \delta) = \frac{1}{\sinh^2(\kappa(\pi + \delta))} \begin{pmatrix} \sinh^2(\kappa\pi) + \sinh^2(\kappa\delta) & -e^{-\kappa\pi} \sinh(\kappa\pi) \\ -e^{\kappa\pi} \sinh(\kappa\pi) & \sinh^2(\kappa\pi) + \sinh^2(\kappa\delta) \end{pmatrix} \quad (2.15a)$$

$$\rho_{classique}(\kappa, \delta) = \left( \frac{\sinh(\kappa\delta) + \sinh(\kappa\pi)}{\sinh(\kappa\delta + \kappa\pi)} \right)^2 = \left( \frac{e^{\kappa\delta} + e^{\kappa\pi}}{1 + e^{\kappa(\delta + \pi)}} \right)^2 \quad (2.15b)$$

On voit que si le recouvrement est nul ( $\delta = 0$ ) alors le rayon spectral est égal à 1. Si un recouvrement existe ( $\delta > 0$ ) alors le rayon spectral est inférieur à 1 (figure 2.6). Dans ce cas le processus itératif converge vers la solution. Ce résultat est la preuve que la méthode de Schwarz classique ne converge que si le recouvrement est non nul.



**Fig. 2.6 Taux de convergence dans le cas classique.** Il représente la vitesse à laquelle l'algorithme converge en fonction de la taille de recouvrement choisit entre les 2 SD.

La figure ci-dessus montre l'évolution du taux de convergence en fonction du recouvrement dans le cas où la constante de Helmholtz est égale à 1. Le taux de convergence est inversement proportionnel au recouvrement ; plus il y a du recouvrement plus l'algorithme converge rapidement. Par exemple, si nous voulons réduire l'erreur initiale d'un facteur  $10^{-3}$  en 10 itérations, il faudrait à peu près un recouvrement de l'ordre de 0,5 radians.

### 2.2.2 Méthode de Schwarz optimisée avec conditions de Robin

La lente convergence de l'algorithme classique a motivé le développement de méthodes optimisées. La détermination des paramètres optimaux représente un surcoût, mais elle est faite juste une fois au début de l'algorithme et ensuite on l'applique. En général l'utilisation de ces paramètres optimaux n'entraîne pas une augmentation de coût significative en comparaison avec la méthode classique pour chaque itération. L'innovation par rapport à la méthode classique est la prise en compte dans l'opérateur d'interface du terme de dérivée première. Ce terme supplémentaire permet d'optimiser le taux de convergence par un choix judicieux des paramètres  $\beta_{1,2}^{(l)}$ . Les nouvelles matrices de transition sont :

$$M_{(l)} = \begin{pmatrix} (\beta_1^{(l)} + \kappa)e^{\kappa\lambda_1^{(l)}} & (\beta_1^{(l)} - \kappa)e^{-\kappa\lambda_1^{(l)}} \\ (\beta_2^{(l)} + \kappa)e^{\kappa\lambda_2^{(l)}} & (\beta_2^{(l)} - \kappa)e^{-\kappa\lambda_2^{(l)}} \end{pmatrix} \quad (2.16a)$$

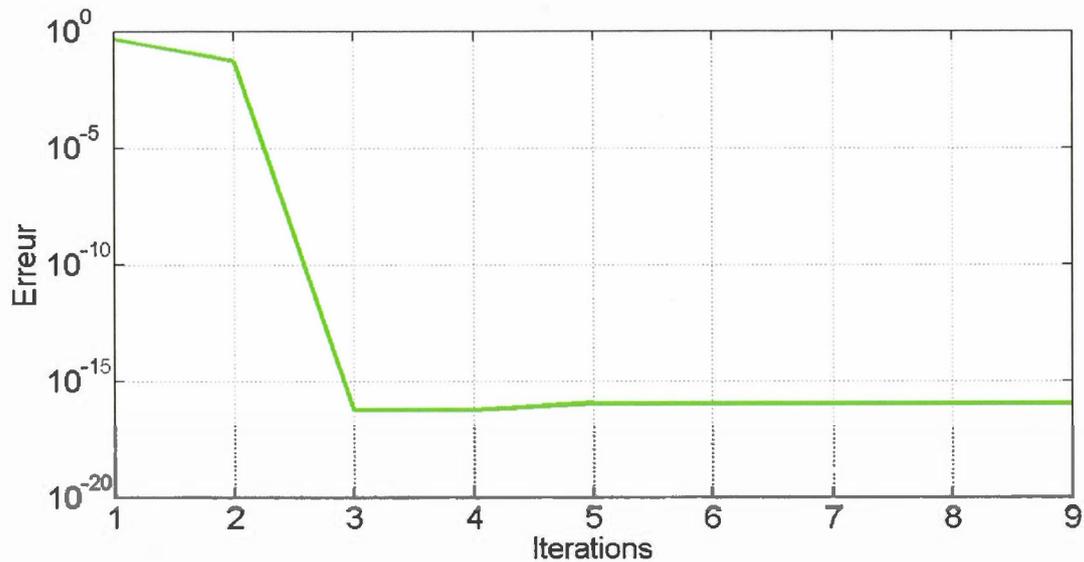
et

$$\widetilde{M}_{(l)} = \begin{pmatrix} (\beta_1^{(l)} + \kappa)e^{\kappa\lambda_1^{(l)}} & (\beta_1^{(l)} - \kappa)e^{-\kappa\lambda_1^{(l)}} \\ (\beta_2^{(l)} + \kappa)e^{\kappa\lambda_2^{(l)}} & (\beta_2^{(l)} - \kappa)e^{-\kappa\lambda_2^{(l)}} \end{pmatrix} \quad (2.16b)$$

Il y aura donc huit paramètres à déterminer et une seule équation à satisfaire. Heureusement, les propriétés de symétrie nous permettent d'éliminer une moitié des paramètres (en effet,  $\beta_1^{(l)} = -\beta_2^{(l)}$  avec  $l = 1, 2$ ). Les expressions des matrices étant longues et complexes nous nous sommes servis du logiciel Maple pour obtenir le rayon spectral de la matrice de transition. Le problème d'optimisation peut être résolu analytiquement en cherchant des paramètres qui rendent le rayon spectral égal à zéro. On obtient alors les coefficients de Robin suivants, qui sont aussi obtenus par Qaddouri et *al.* (2008) :

$$\begin{aligned} \beta_1^{(1)} &= -\kappa \tanh\left(\kappa\left(\frac{\pi - \delta}{2}\right)\right), \beta_1^{(2)} = -\kappa \coth\left(\kappa\left(\frac{\pi - \delta}{2}\right)\right), \\ \beta_2^{(1)} &= -\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(2)} = -\beta_1^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.16c)$$

Notons qu'en permutant les valeurs de  $\beta_1^{(1)}$  et  $\beta_1^{(2)}$  on obtient aussi une solution, celle-ci n'a pas été notée par Qaddouri et *al.* (2008). Avec les paramètres (2.16c), on peut évaluer le nombre d'itérations nécessaires pour assurer la convergence dans le cas optimisé :



**Fig. 2.7** Évolution de l'erreur au cours des 9 premières itérations. Cette figure montre l'amortissement de l'erreur au cours du processus itératif.

L'utilisation des paramètres optimaux permet de faire disparaître l'erreur au bout de trois itérations. En effet, la première itération permet juste de calculer la solution dans chacun des SD en partant des données initiales du problème. Deux autres itérations sont ensuite nécessaires pour réduire l'erreur initiale à zéro. Au-delà de trois itérations l'erreur reste nulle. Il est intéressant de signaler que pour un problème périodique nous avons besoin de trois itérations pour faire disparaître l'erreur alors que dans le cas non périodique seulement deux itérations sont nécessaires (Qaddouri *et al.*, 2008).

### 2.3 Schwarz 1D à 4 sous-domaines

Dans cette section on généralise l'algorithme de Qaddouri *et al.*, (2008) utilisé pour un domaine périodique décomposé en deux SD au cas général de  $N$  sous-domaines où  $N$  est un entier naturel non nul et pair.

### 2.3.1 Généralisation à $N$ sous-domaines

Supposons connue la solution analytique sur chaque SD et formulons le problème avec un nombre indéfini de SD. C'est une généralisation de l'analyse effectuée précédemment à 2 SD.

$$(\partial_{\lambda\lambda} - \lambda)\phi = R \text{ on } \Omega = [0, 2\pi], \quad \eta > 0 \quad (2.17)$$

On décompose le domaine  $\Omega$  en  $N$  parties qui se chevauchent  $\Omega = \bigcup_{l=1, N} \Omega_l$  avec

$$\begin{aligned} \Omega_l &= [(l-1)\Delta, l\Delta + \delta] \\ \Delta &= \frac{2\pi}{N} \\ \delta &\leq \Delta \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dans chaque SD  $l$  à l'itération  $k$  on résout le problème suivant,

$$\begin{aligned} (\partial_{\lambda\lambda} - \eta)\phi^{(l),k} &= R^{(l)} \text{ on } \Omega_l, \\ B_1^{(l)}\phi^{(l),k}((l-1)\Delta) &= B_1^{(l)}\phi^{(l-1),k-1}(\text{Image}_i^{l-1}((l-1)\Delta)), \\ B_2^{(l)}\phi^{(l),k}(l\Delta + \delta) &= B_2^{(l)}\phi^{(l+1),k-1}(\text{Image}_i^{l+1}(l\Delta + \delta)), \\ l-1 &\equiv N, \text{ pour } l=1, \\ l+1 &\equiv 1, \text{ pour } l=N. \end{aligned} \quad (2.19)$$

$\text{Image}_i^{l\pm 1}(x)$  est l'image du point  $x$  du sous-domaine  $l$  dans les sous-domaines  $l\pm 1$ . En appliquant la même démarche que dans le cas de deux SD, on obtient une matrice de transition dont l'expression est très générale et s'applique pour un nombre arbitraire de SD mais puisque nous intéressons au cas de  $N=4$ , nous nous concentrons sur cette valeur. On montre facilement que les résultats pour  $N=2$  publiés dans Qaddouri *et al.* (2008) sont reproduits, de plus on obtient aussi de nouvelles solutions valides qui n'y ont pas été discutées.

Nous nous limiterons dans cette partie aux conditions Robin optimisées. Pour obtenir le résultat de la méthode classique, il suffira de poser  $\alpha_1(l) = 0$  et  $\beta_1(l) = 1$ .

$$\begin{aligned}
B_1^{(l)}\phi^{(l),k} &= \beta_1^{(l)}\phi^{(l),k} + \alpha_1^{(l)}\frac{d\phi^{(l),k}}{d\lambda}, \\
B_2^{(l)}\phi^{(l),k} &= \beta_2^{(l)}\phi^{(l),k} + \alpha_2^{(l)}\frac{d\phi^{(l),k}}{d\lambda}, \\
\alpha_1^{(l)}, \alpha_2^{(l)} &= 1.
\end{aligned} \tag{2.20a}$$

Se basant sur les résultats déjà cités, nous introduisons aussi une relation de symétrie qui diminue par 2 le nombre de paramètres cherchés,

$$\beta_2^{(l)} = -\beta_1^{(l)}. \tag{2.20b}$$

### 2.3.2 Cas de quatre sous-domaines

Le polynôme caractéristique de la matrice de transition dont les racines sont les valeurs propres cherchées est de degré  $2 \times N$ , c'est-à-dire 8 dans ce cas-ci. Heureusement les règles de symétrie font que les coefficients impairs du polynôme sont nuls. On a donc 5 paramètres ( $c_0, c_2, c_4, c_6, c_8$ ) plus une variable (la valeur propre  $\mu$ ) à déterminer et une équation à satisfaire :

$$c_8\mu^8 + c_6\mu^6 + c_4\mu^4 + c_2\mu^2 + c_0 = 0 \tag{2.21}$$

L'idée est de forcer les 4 paramètres  $c_0, c_2, c_4$  et  $c_6$  à être nuls et de garder le dernier  $c_8$  non nul pour obtenir l'équation aux valeurs propres suivante :

$$c_8\mu^8 = 0 \tag{2.22}$$

Cette équation a pour unique solution une valeur propre nulle correspondant au rayon spectral minimal que nous recherchons (car  $c_8$  est non nul).

Nous allons essayer de résoudre le problème de minimisation des modules des racines de cette équation en s'inspirant de Qaddouri *et al.* (2008). Dans la section précédente, nous avons vu que pour  $N = 2$ , le problème de minimisation se résolvait en prouvant que des paramètres d'itération pouvaient être trouvés tels que le rayon spectral soit nul, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres soient nulles. Nous allons montrer que c'est possible avec  $N = 4$  et un chevauchement  $\delta$  nul.

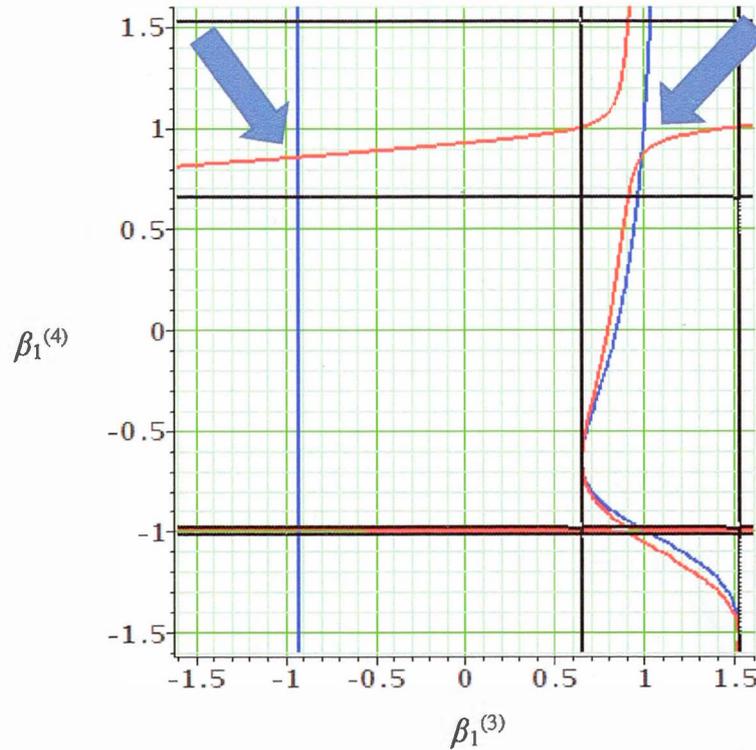
On peut choisir  $\beta_1^{(2)}$  en fonction de  $\beta_1^{(4)}$  de telle sorte que le coefficient constant  $c_0$  soit nul, (voir Annexe A).

$$\beta_1^{(2)} = -\frac{\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + \beta_1^{(4)}}{1 + \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \beta_1^{(4)}}. \quad (2.23)$$

Cela annule aussi le coefficient quadratique  $c_2$ . Il nous reste donc à déterminer  $\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(3)}$  et  $\beta_1^{(4)}$  de façon avoir simultanément,

$$\begin{aligned} c_4 &= 0, \\ c_6 &= 0, \\ c_8 &\neq 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

C'est un problème très difficile à résoudre analytiquement (les expressions assez complexes pour les  $c_i$  ne sont pas données ici), c'est pourquoi nous utiliserons une méthode graphique de manière à pouvoir explorer si ce problème possède une solution. Nous allons fixer  $\beta_1^{(1)}$  et explorer si ce problème possède une ou plusieurs solutions non-triviales. La méthode est assez simple, il s'agit de tracer sur une même figure les courbes de niveau 0 de quantités proportionnelles à  $c_4$  (bleu),  $c_6$  (rouge) et  $c_8$  (noir) et examiner leurs croisements. Pour avoir une solution il faut que le bleu et le rouge se croisent alors que la courbe en noir ne passe pas par ce point. Ceci est illustré par la figure ci-dessous :



**Fig. 2.8** Contour 0 de  $c_4$  (bleu),  $c_6$  (rouge) et  $c_8$  (noir) pour  $\beta_1^{(1)}=0$ ,  $\kappa=1$  en fonction des paramètres  $\beta_1^{(3)}$  (en abscisse) et  $\beta_1^{(4)}$  (en ordonnée). Les deux flèches bleues en haut indiquent des valeurs possibles de  $\beta_1^{(3)}$  et  $\beta_1^{(4)}$  qui annulent les coefficients  $c_4$  et  $c_6$  tout en s'assurant que  $c_8$  est non nul.

On voit donc clairement deux solutions possibles. Une racine est dans le coin supérieur gauche. Si on suit cette famille de racines pour  $\beta_1^{(1)}$  entre  $-0.95$  et  $+0.95$ , on obtient le tableau 1 avec une méthode de raffinement. L'analyse a été effectuée avec l'aide du logiciel Maple.

**Tableau 1** : Coefficients optimisés de Robin pour 4 sous-domaines.

La dernière colonne de droite permet de s'assurer que le coefficient  $c_8$  est non nul.

| $\beta_1^{(1)}$ | $\beta_1^{(2)}$ | $\beta_1^{(3)}$ | $\beta_1^{(4)}$ | $\min(\text{abs}(c_8), 1)$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------------------|
| -0.95           | -0.99562        | 0.20678         | 0.90351         | 1                          |
| -0.85           | -0.98788        | -0.30860        | 0.75282         | 1                          |
| -0.75           | -0.98336        | -0.53590        | 0.67485         | 1                          |
| -0.65           | -0.98219        | -0.66151        | 0.65585         | 0.04742                    |
| -0.55           | -0.98313        | -0.74107        | 0.67112         | 1                          |
| -0.45           | -0.98498        | -0.79601        | 0.70198         | 1                          |
| -0.35           | -0.98704        | -0.83628        | 0.73784         | 1                          |
| -0.25           | -0.98902        | -0.86715        | 0.77359         | 1                          |
| -0.15           | -0.99081        | -0.89163        | 0.80706         | 1                          |
| -0.05           | -0.99239        | -0.91162        | 0.83760         | 1                          |
| 0.05            | -0.99377        | -0.92834        | 0.86523         | 1                          |
| 0.15            | -0.99499        | -0.94267        | 0.89027         | 1                          |
| 0.25            | -0.99608        | -0.95526        | 0.91318         | 1                          |
| 0.35            | -0.99708        | -0.96662        | 0.93454         | 1                          |
| 0.45            | -0.99801        | -0.97728        | 0.95506         | 1                          |
| 0.55            | -0.99894        | -0.98784        | 0.97577         | 1                          |
| 0.65            | -0.99993        | -0.99927        | 0.99854         | 0.44793                    |
| 0.75            | -1.00118        | -1.01373        | 1.02772         | 1                          |
| 0.85            | -1.00323        | -1.03814        | 1.07740         | 1                          |
| 0.95            | -1.00872        | -1.11283        | 1.22338         | 1                          |

Pour illustrer la convergence de la méthode nous utilisons une implémentation en MATLAB de la méthode de Schwarz. Nous voulons résoudre le problème suivant,

$$(\partial_{\lambda\lambda} - \eta)\phi = A \cos(n\lambda + \theta) \text{ on } \Omega = [0, 2\pi], \quad \eta > 0, \quad (2.25)$$

dont la solution exacte est :

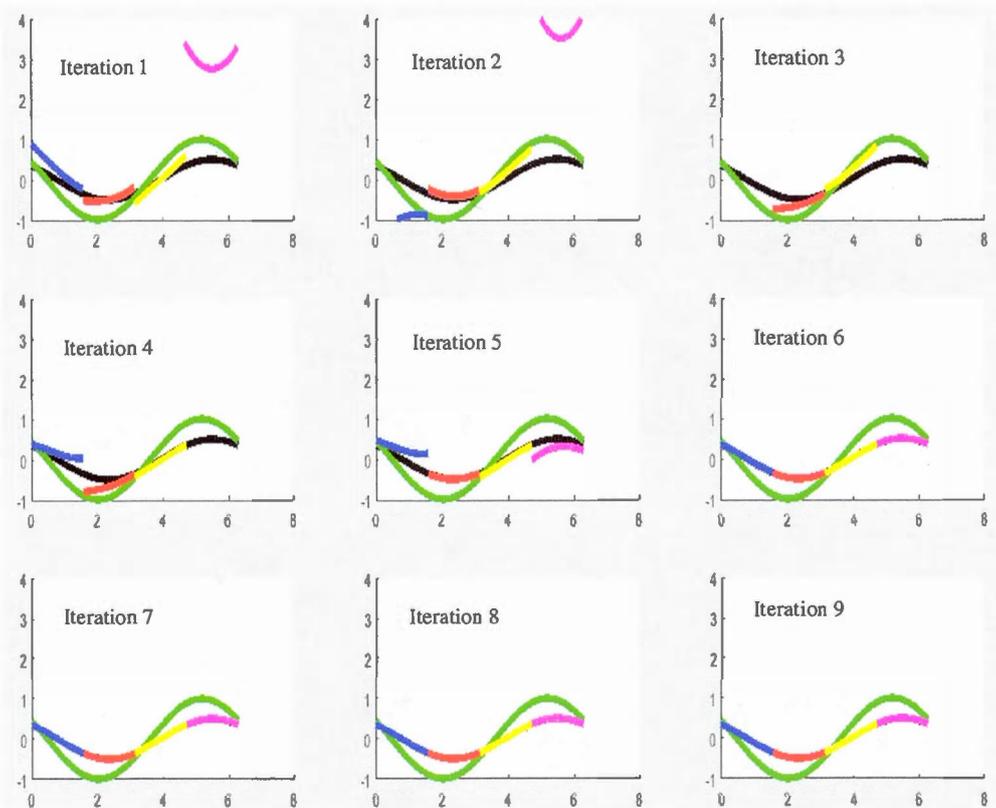
$$\phi(\lambda) = -\frac{A \cos(n\lambda + \theta)}{\eta + n^2}. \quad (2.26)$$

Pour notre expérience nous choisirons les paramètres :

$$A = 1, \quad n = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \eta = 1. \quad (2.27)$$

La solution itérative est obtenue avec un code MATLAB pour 9 itérations consécutives.

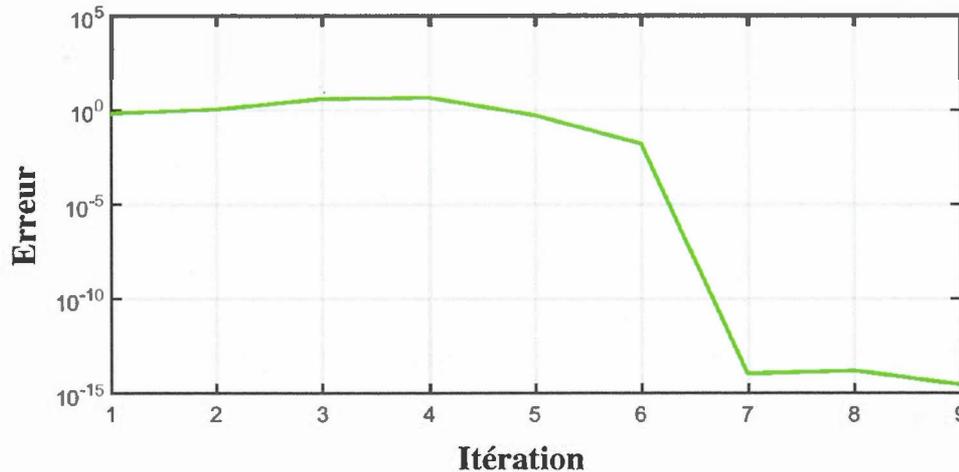
La figure ci-dessous montre les différentes itérations.



**Fig. 2.9** Convergence de l'algorithme de Schwarz avec les conditions de Robin optimisées pour  $N = 4$  SD. La courbe en noir désigne la solution exacte et celle en verte notre première ébauche. Les segments de courbe en bleu, rouge, jaune et magenta représentent respectivement les solutions dans les SD 1, 2, 3 et 4.

La solution exacte est en noir, la première ébauche est en vert et les solutions de chaque itération sur chaque SD sont successivement en bleu, rouge, jaune et magenta. Notons qu'à

partir de l'itération 7 nous avons essentiellement la solution exacte et elle demeure stable. L'axe  $y$  a une amplitude flottante. Les paramètres d'itération sont 0, -.99310, -.92032, .85177 pour  $\beta_1^{(1)}$ ,  $\beta_1^{(2)}$ ,  $\beta_1^{(3)}$  et  $\beta_1^{(4)}$  respectivement. À partir de l'itération 7 nous avons la précision machine comme on peut le voir sur la figure ci-dessous.



**Fig. 2.10** Courbe semi-logarithmique d'évolution de l'erreur au cours des 9 premières itérations. Cette figure montre l'amortissement de l'erreur au cours du processus itératif.

## 2.4 Synthèse partielle

Nous nous sommes intéressés à la convergence des solutions par SD du problème de Helmholtz 1D sur un domaine périodique, dans les cas de 2 et 4 SD respectivement. Nous avons montré que pour deux SD, la méthode classique ne peut fonctionner en absence de recouvrement, cependant avec des conditions optimisées de Robin on peut pour un recouvrement nul faire converger la solution après seulement 3 itérations. Dans le cas de 4 SD, les conclusions restent les mêmes pour ce qui est du cas classique. Cependant, pour ce qui est des conditions de Robin, les coefficients optimaux sont de plus en plus difficiles à obtenir lorsque le nombre de SD augmente. Néanmoins, en se servant des règles de symétrie, nous avons réussi à les trouver. La convergence est assurée après sept itérations. Ces résultats sont encourageants en vue de la résolution du problème 2D.

## CHAPITRE III

### APPLICATION DES MÉTHODES DE SCHWARZ EN 2D

#### 3.1 Résolution du problème elliptique 2D sur une seule face de la grille sphère-cubique

Cette section s'inscrit dans la continuité de l'étude faite au chapitre précédent. Cependant, les conditions frontières seront celles de Dirichlet ; le cas optimal avec les conditions de Robin ne sera pas traité dans ce mémoire.

Avant de résoudre le problème de Helmholtz sur toute la sphère nous allons nous assurer de pouvoir savoir le faire sur une seule des faces. Si nous en sommes capables, il suffira juste de mettre en place les procédures de communication décrites au premier chapitre pour générer à chaque itération des solutions sur chacun des SD.

Le problème de Helmholtz 2D s'écrit :

$$(\nabla^2 - \eta)\phi = R \quad (3.1a)$$

La décomposition de l'opérateur de dérivée seconde en coordonnées sphériques donne :

$$\left( \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \sin \theta} \left( \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial \sin \theta} \right) - \eta \right) \phi = R \quad (3.1b)$$

où R est le terme source et  $\eta$  est positif. Les opérateurs de dérivée sont approximés par des différences finies et s'écrivent :

$$\left[ \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \phi \right]_{ij} = \sum_{i'=1, i \pm 1} (P_{\lambda\lambda})_{i' i} P_m(\theta)_{ij} \phi_{i' j} \quad (3.2a)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \sin \theta} \left( \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial \sin \theta} \right) \phi \right]_{ij} = \sum_{j'=j, j \pm 1} P_{\theta\theta} [j, j'] \cdot P(\lambda) [i, i] \cdot \phi_{j' i} \quad (3.2b)$$

où  $P_{\lambda\lambda}$  et  $P_{\theta\theta}$  sont des matrices tridiagonales, tandis que  $P(\lambda)$ ,  $P(\theta)$ , et  $P_m(\theta)$  sont des matrices diagonales (Yeh *et al.*, 2001) dont les expressions se trouvent dans l'annexe C. L'indice  $m$  sur le terme en  $\theta$  (direction longitudinale) fait référence au terme métrique. Écrivant

les champs bidimensionnels  $\phi$  et  $R$  comme des vecteurs en supposant l'ordre du dictionnaire pour l'indexage, la forme finale du problème de Helmholtz en notation matricielle est :

$$H\phi = [P_m(\theta) \otimes P_{\lambda\lambda} + P_{\theta\theta} \otimes P(\lambda) - \eta P(\theta) \otimes P(\lambda)]\phi = P(\theta) \otimes P(\lambda)R = \tilde{R} \quad (3.3a)$$

Les produits tensoriels effectués à l'intérieur du crochet à gauche permettent d'obtenir explicitement l'opérateur de Helmholtz 2D, cependant celui-ci est une matrice creuse de grande taille ( $N^2 \times N^2$ ), ce qui rend son inversion directe difficile.

Dans un premier temps on élimine de  $H\phi$  toutes les contributions connues qui viennent de  $\lambda_1$  et  $\lambda_N$  et le côté droit  $\tilde{R}$  devient  $R'$ . Dans un deuxième temps nous allons exploiter la séparabilité du problème continu, que la discrétisation préserve, pour écrire la solution  $\phi$  et le terme inhomogène  $R'$  en termes des modes propres  $\Phi_m$  et des valeurs propres  $\varepsilon_m$  de l'équation matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1, N} [P_{\lambda\lambda} - \varepsilon_m P(\lambda)]_{i+1, i} \Phi_m(\lambda_i) &= 0, \quad i, m = 1, N-2 \\ \Phi_m(\lambda_1), \Phi_m(\lambda_N) &= 0, \\ M_{im} &= \Phi_m(\lambda_{i+1}). \end{aligned} \quad (3.3b)$$

On fixe la normalisation en imposant  $M^T P'(\lambda)M =$  matrice unité de dimension  $(N-2)$ , et où  $P'(\lambda)$  est  $P(\lambda)$  restreint aux points intérieurs. On peut alors écrire pour les points intérieurs en  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \phi(\lambda_{i+1}, \theta_j) &= \sum_{m=1}^{N-2} M_{im} \phi_m(\theta_j), \quad i = 1, N-2, j = 1, N, \\ R_{m,j} &= \sum_{i=1}^{N-2} M_{im} R'_{i+1,j}, \quad m, j = 1, N-2. \end{aligned} \quad (3.3c)$$

En effectuant cette transformation sur  $\phi$  et  $R'$  le problème de Helmholtz 2D se réduit à une série de  $N-2$  inversions de sous-opérateurs tridiagonaux de taille  $3 \times N$  pour les  $\phi_m(\theta_j)$  qui peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{j'=1, N} [\varepsilon_m P_m(\theta) + P_{\theta\theta} - \eta P(\theta)]_{j'j} \phi_m(\theta_{j'}) &= R_{m,j}, \quad j, m = 1, N-2, \\ \phi_m(\theta_1), \phi_m(\theta_N) &\text{ connus.} \end{aligned} \quad (3.3d)$$

L'algorithme est donc :

- a) analyse en modes pour obtenir  $R_{m,j}$ ,  $\phi_m(\theta_1)$  et  $\phi_m(\theta_N)$ ,
- b) inversions des matrices tridiagonales (Eq. 3.3d),
- c) synthèse pour obtenir la solution  $\phi(\lambda_i, \theta_j)$

Un intérêt supplémentaire de cette méthode est que quand la résolution est uniforme, les modes sont des sinus et que la transformation de Fourier rapide (FFT) et son inverse peuvent être utilisées à la place des produits matriciels. C'est calqué sur la méthode utilisée dans le modèle GEM d'Environnement Canada (Côté *et al*, 1998).

### 3.1.1 Test préliminaire

Afin de vérifier que les algorithmes que nous utilisons sont stables et convergent, nous allons effectuer des tests sur un des panneaux pris au hasard. Si les résultats sont convaincants nous pourrons alors effectuer des tests sur tous les panneaux de la grille sphère-cubique parallèlement. Reprenons le problème de Helmholtz sur un panneau ( $l$ ) quelconque:

$$\left( \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\partial \sin \theta} \left( \cos^2 \theta \frac{1}{\partial \sin \theta} \right) - \eta \right) \phi^{(l)} = R^{(l)} \quad (3.4)$$

L'idée est de partir d'un problème dont la solution est connue pour pouvoir la comparer à celle que nous obtiendrons. Ceci nous permettra de calculer à chaque fois l'erreur ou l'écart afin de déterminer si nos algorithmes convergent ou divergent. Le problème de Helmholtz est soluble si l'on connaît le terme source  $R$ , la constante de Helmholtz  $\eta$  les conditions aux frontières des SD. Toutes ces informations peuvent être obtenues si nous nous imposons notre solution.

Postulons la gaussienne suivante :

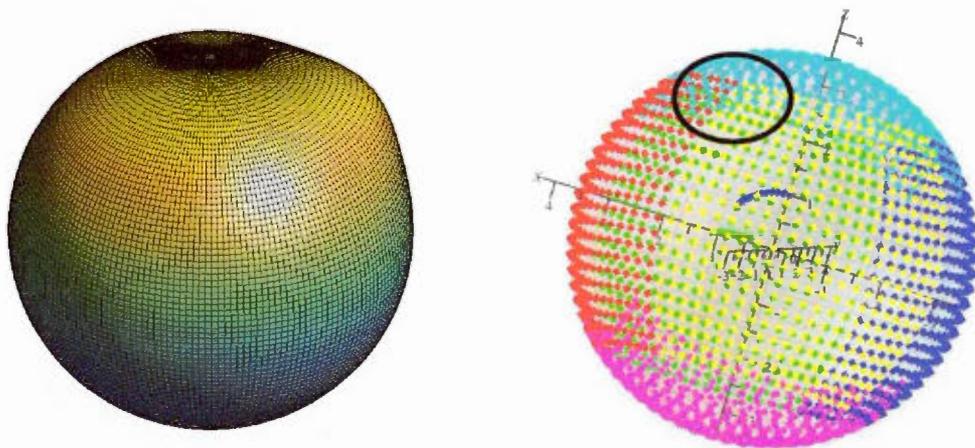
$$\phi^{(l)}(x, y) = \alpha e^{-(x^2+y^2)/L^2}, \quad (3.5)$$

comme solution de notre problème. L'amplitude  $\alpha$ , la constante  $L$  et la constante de Helmholtz  $\eta$  sont données. En appliquant l'opérateur de Helmholtz à cette fonction, on obtient

et sauve le terme source  $R^{(l)}$ . Il nous reste juste à définir la fonction sur tous les points frontières du SD choisi pour avoir la formulation du problème de Helmholtz à résoudre. De cette manière, on a créé un problème dont on connaît la solution. Pour résoudre numériquement le problème, on a utilisé l'algorithme précédemment décrit (Voir annexe B, section B2).

### 3.1.2 Résultats et interprétation

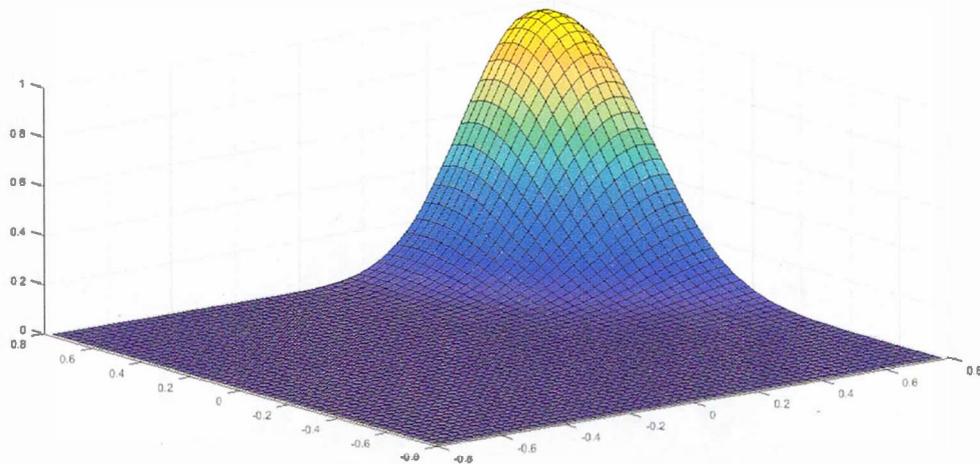
Le premier test consiste à centrer la gaussienne à l'intersection des trois panneaux 1, 2 et 5, puis de voir si nous sommes capables numériquement de la reproduire. Dans cette région où  $\lambda$  et  $\theta$  valent 45 degrés chacun, les périmètres des trois panneaux se chevauchent mutuellement, ce qui est idéal pour effectuer des tests.



**Fig. 3.1** Représentation de la distribution sur la sphère. À gauche, on représente la distribution sur une grille gaussienne ; à droite on montre l'endroit où cette distribution sera représentée sur notre grille sphère-cubique.

La figure de gauche trace la distribution initiale sur une grille gaussienne et la figure de droite montre l'endroit où elle apparaît sur notre sphère-cubique. Pour ce premier test, nous allons considérer une grille de 50 points dans les deux directions lat et lon pour un recouvrement  $\delta = 5/2$  et l'amplitude ( $\alpha$ ) de la distribution vaut 1. L'idée est de voir comment la distribution

serait représentée sur le panneau 1 (rouge) si on lui fournissait des conditions frontières exactes au début de la simulation.

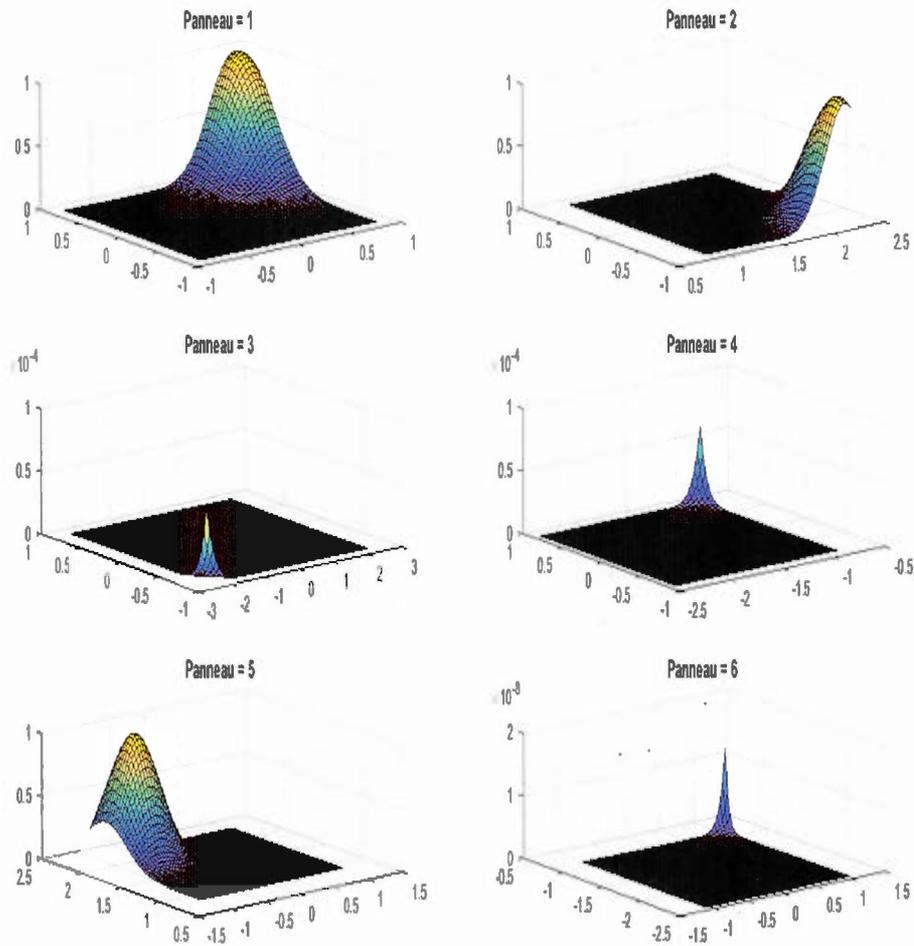


**Fig. 3.2 : Représentation de la distribution sur le panneau 1**

Comme on s'y attendait le panneau 1 montre un bout de la gaussienne. Le score (écart maximal entre la solution analytique et numérique sur tous les points de grille) a été évalué à  $2.4e-13$ . Ce qui confirme que l'algorithme reproduit la solution analytique.

### 3.2 Résolution du problème de Helmholtz 2D sur toutes les faces

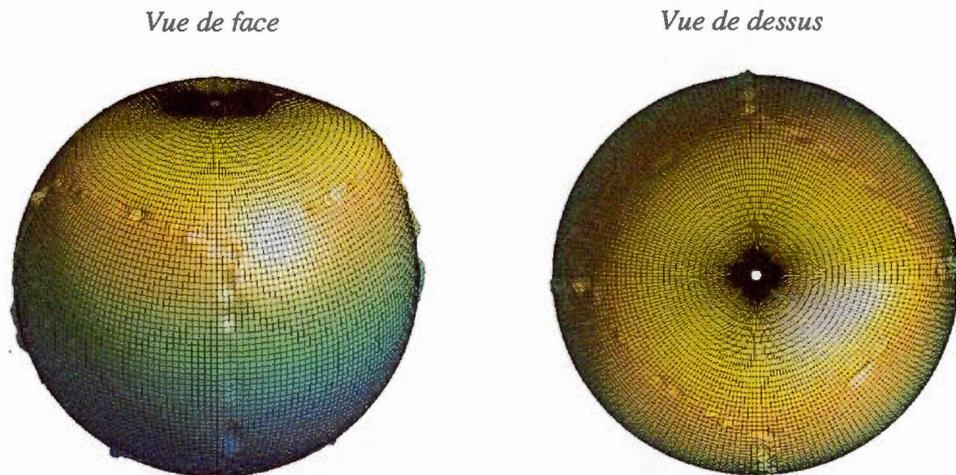
Pour obtenir une solution sur la sphère, on résout parallèlement le même algorithme sur les six panneaux. En partant de conditions aux limites exactes, on retrouve la solution analytique dès la première itération comme on peut le voir sur la figure ci-dessous :



**Fig. 3.3 : Solution sur les 6 panneaux**

On remarque que l'amplitude de la distribution est plus significative sur les panneaux 1, 2 et 5 ; L'ordre de grandeur sur les autres panneaux est beaucoup plus petit.

Pour pousser les tests plus loin, nous allons fournir des conditions frontières biaisées à chacun des panneaux afin de voir si à l'aide des procédures de communication, l'algorithme est capable de converger vers la solution de référence. Pour ce faire, on ajoute à la fonction sur le périmètre de tous les panneaux, une perturbation aléatoire. La nouvelle allure de la distribution en tenant compte de la perturbation est la suivante :



**Fig. 3.4 : Solution globale perturbée**

### 3.2.1 Test avec conditions aux limites biaisées

Avec les mêmes paramètres que précédemment, on résout itérativement le problème de Helmholtz. La différence avec le cas précédent est qu'ici, nous cherchons à faire converger les conditions frontières autour de chacun des panneaux le plus proche possible des conditions frontières exactes, sans quoi il serait impossible de tendre vers la solution analytique. L'algorithme utilisé commence en se fixant un seuil en deçà duquel on estime le résultat satisfaisant. Ensuite, on résout le problème en parallèle sur les 6 SD avec des conditions frontières perturbées. Au cours des itérations suivantes, les conditions frontières sont rafraichies en interpolant la solution que nous venions de calculer à l'intérieur des SD. Le processus se poursuit jusqu'à ce que la différence entre deux itérations successives soit inférieure à un seuil fixé au départ.

### 3.2.2 Résultats et interprétation

Après une première itération (compteur=1), on obtient la figure ci-dessous. Elle n'arrive pas à reproduire solution attendue. L'erreur calculée est 99.9, ce qui est extrêmement élevé mais logique car l'amplitude de la perturbation est de 100.

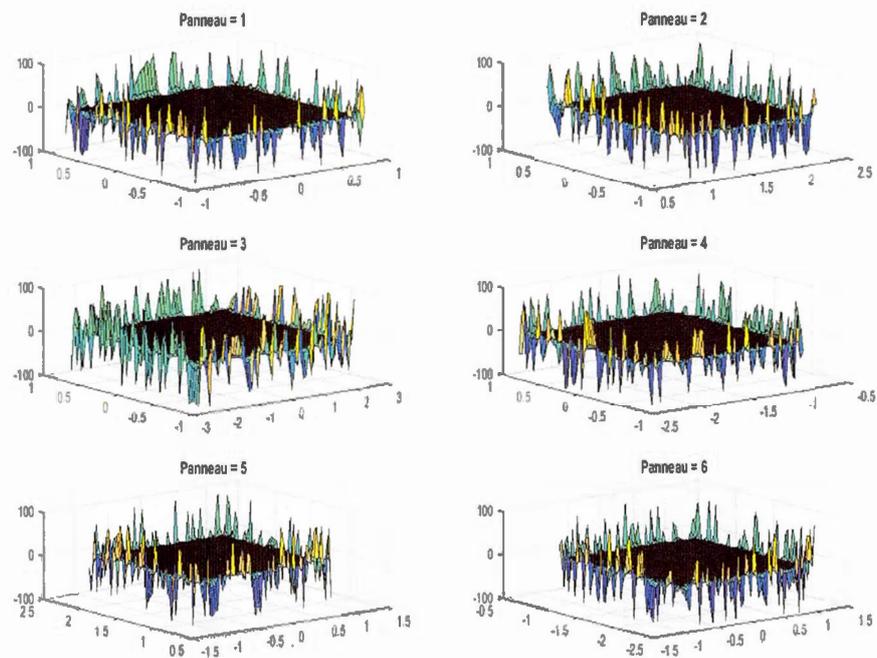


Fig. 3.5 : Solution par panneau perturbée à la 1<sup>ère</sup> itération

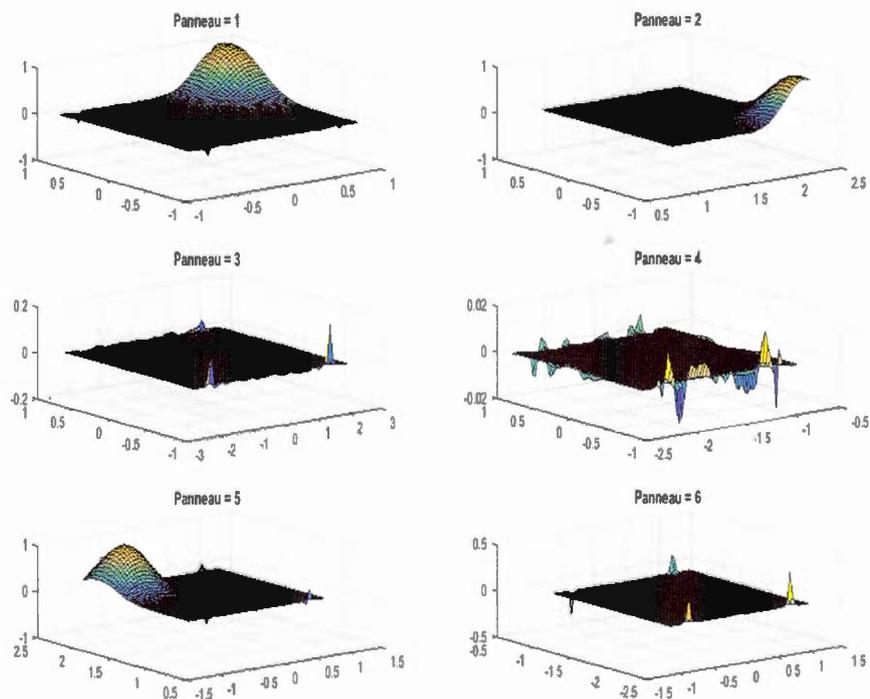
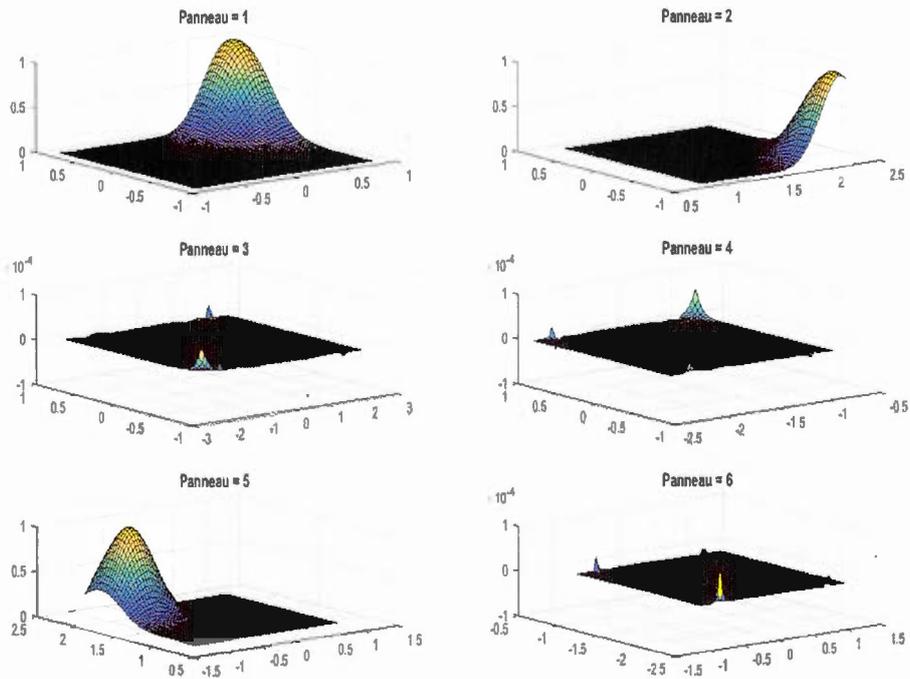
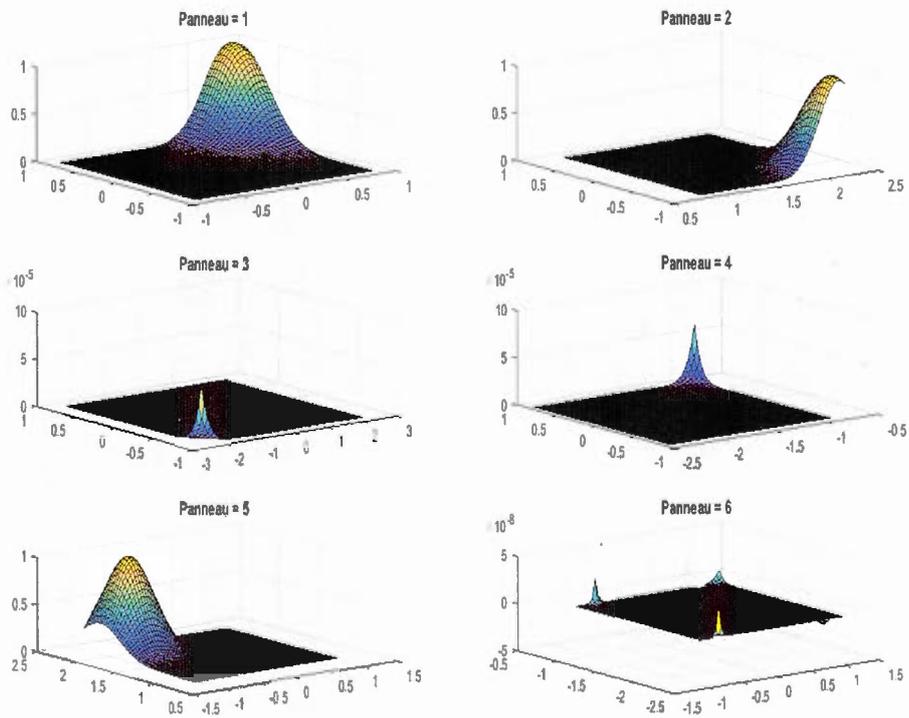


Fig. 3.6 : Solution par panneau perturbée à la 2<sup>ème</sup> itération



**Fig. 3.7 : Solution par panneau perturbée à la 3<sup>ème</sup> itération**



**Fig. 3.8 : Solution par panneau perturbée à la 4<sup>ème</sup> itération**

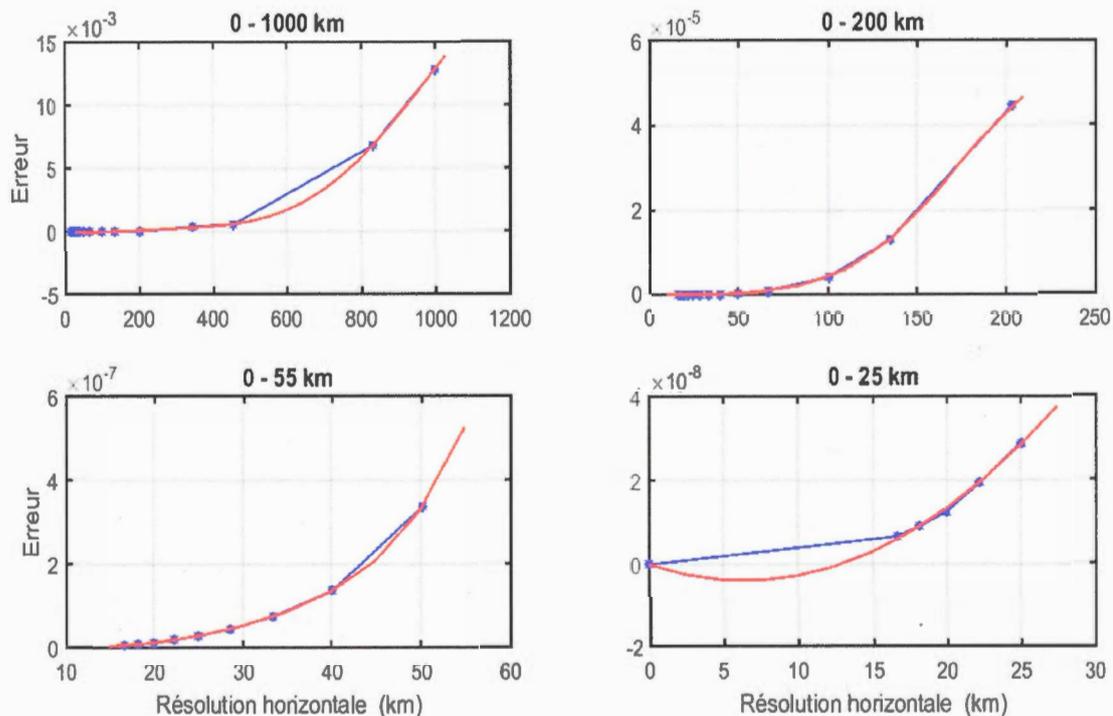
Les figures 3.5 à 3.8 montrent que seules quatre itérations successives sont nécessaires à chacun des pas des temps pour faire converger la solution numérique au cas où les conditions initiales ne seraient pas correctes au départ de la simulation. Le score diminue lorsque le nombre d'itérations augmente comme on peut le voir dans le tableau suivant :

|   | Score      |
|---|------------|
| 1 | 9.9967e+01 |
| 2 | 3.7335e-01 |
| 3 | 8.5821e-05 |
| 4 | 3.1919e-05 |

**Tableau 2 : Score au cours des quatre premières itérations**

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent cette convergence peut être accélérée si on augmente le recouvrement, cependant on augmentera le coût de calcul mais on réduira les communications. Il faudra donc choisir entre coût de calcul et convergence rapide de l'algorithme, le paramètre qui nous convient le mieux. Ce choix ne pourra pas être fait au cours de ce travail car il demande de prendre en compte tout un ensemble de paramètres dont le schéma temporel ou encore les différents schémas de discrétisation qui ne seront pas abordés ici. Par contre nous sommes en mesure de définir un seuil minimal d'erreur lié à notre méthode d'interpolation en deçà duquel aucune optimisation ne pourra descendre. En d'autres termes, la méthode d'interpolation de Lagrange que nous utilisons génère une certaine erreur qu'on ne pourra jamais éliminer. L'avantage est que cette erreur diminue drastiquement lorsque la résolution du modèle augmente ce qui est une bonne nouvelle car cette grille est conçue pour les modèles à haute résolution. Afin de démontrer cette affirmation nous avons réalisé un dernier test visant à déterminer l'erreur au bout de quatre itérations du modèle à diverses résolutions. Les diverses résolutions vont de 1000 km (11×11 points par SD) à 15 km (670×670 points par SD).

En plus de la courbe donnant les valeurs d'erreur que nous avons calculées (en bleu), nous proposons aussi une courbe qui par lissage permet d'estimer l'erreur pour une résolution donnée sans avoir à rouler à nouveau le code (en rouge).



**Fig. 3.9** Évolution de l'erreur du modèle à diverses résolutions. En abscisse on a la résolution spatiale du modèle en *Km* et en ordonnée l'erreur calculée au bout de 4 itérations. La courbe en bleu correspond à l'erreur; la courbe en rouge est la fonction polynomiale passant par le maximum de points calculés.

Nous remarquons que l'erreur diminue quand on tend vers des résolutions de plus en plus fines. La raison est que plus les points sont rapprochés les uns des autres, plus l'interpolation est précise. Les quatre figures présentent des patrons similaires, nous faisons à chaque fois un zoom lorsque l'asymptote à l'origine tend vers zéro. Le but est de se rapprocher de plus en plus vers les hautes résolutions pour avoir l'ordre de grandeur de l'erreur. À 1000 Km de résolution, l'erreur est de l'ordre de  $10^{-3}$  tandis qu'à 15Km elle a diminué à  $10^{-8}$ . Ceci montre que la grille est optimale pour les hautes résolutions.

### 3.3 Synthèse partielle

La discrétisation du problème de Helmholtz sur un panneau nous a permis de vérifier la précision de notre algorithme. En s'appuyant sur les résultats obtenus, nous avons combiné les solutions sur chacun des SD pour arriver à une solution globale quasiment identique à la solution analytique dès la première itération. Le dernier test qui pouvait nous convaincre de la qualité nos résultats était de partir de conditions frontières biaisées sur chacun des SD et de parvenir malgré cela à la convergence. La première itération de toute évidence ne donne pas la solution exacte mais après avoir effectué trois itérations supplémentaires, nous sommes parvenus à la convergence. Pour terminer, nous avons estimé l'erreur du modèle (due en grande partie à l'interpolation sur les frontières des SD) en fonction de différentes résolutions. Le résultat, comme attendu, montra que cette erreur diminue à mesure que la résolution augmente. Pour une résolution de l'ordre du km, elle serait de l'ordre de l'erreur du logiciel de calcul utilisé; donc négligeable.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

La prévision du temps est un domaine des sciences d'une grande complexité. Au-delà de la compréhension des lois physiques nous permettant de faire des prévisions, il faut aussi prendre en compte un aspect chaotique de l'atmosphère dont on pourra toujours réduire son influence sur les prévisions sans jamais annuler. Dans cette optique, nous avons regardé le problème de prévision non du sommet de la chaîne mais à la base en commençant par la construction même de la grille. L'objectif étant d'améliorer ce qui existe actuellement sans révolutionner. Pour ce faire, nous avons commencé par regarder comment utiliser au meilleur de leurs capacités les ressources informatiques dont nous disposons actuellement. Nous avons conclu que la manière optimale de le faire est de rendre parallèle les algorithmes de résolution numérique des équations du modèle afin que le maximum de processeurs (de nos calculateurs) puissent toujours être actifs. Une des manières de paralléliser est de décomposer le système à résoudre en sous-systèmes contenant les mêmes informations que le système original bien qu'ayant des dimensions plus petites. Cette approche devrait accélérer la vitesse de résolution des équations si la convergence est assez rapide. En d'autres termes, on sait que les problèmes numériques seront résolus dans chacun des SD, mais quelle certitude avons-nous que ses sous-solutions seront liées entre elles car il ne faut jamais perdre de vue que l'atmosphère est un fluide continu. Pour répondre à cette question nous avons regardé le problème de Helmholtz 1D sur le cercle dans le cas de 2 et 4 SD. L'étude à deux sous-domaines faite par Qaddouri *et al.* (2008) pour la grille Yin-Yang a permis de voir que la convergence est toujours possible quand il y a du recouvrement entre les SD. Cette conclusion a été confirmée dans le cas à 4 SD. Cette bonne nouvelle nous a permis d'attaquer avec plus de sérénité le problème à deux dimensions qui nous concerne. Les résultats comme attendus montrent que les solutions par sous-domaines convergent vers la solution de référence après une itération lorsque les conditions sur les bords sont exactement connues mais on a besoin de trois itérations supplémentaires dans le cas où elles sont biaisées. Cette vitesse de convergence peut être accélérée si on augmente le recouvrement; mais on augmenterait alors le volume de données à traiter. Un compromis devra donc être fait entre vitesse de convergence et le temps de communication. La bonne nouvelle au terme de ce travail est que la méthode classique de Schwarz que nous avons utilisée étant lente, les résultats obtenus (quoique satisfaisants) ne pourront qu'être améliorés par la suite lorsque l'on utilisera les conditions de Robin optimisées.

## ANNEXE A

Le coefficient  $c_0$  correspond au déterminant de la matrice de droite et  $c_8$  à celui de la matrice de gauche.

Les matrices de gauche  $M_{(l)}$  et de droite  $M'_{(l)}$  s'écrivent respectivement :

$$M_{(l)} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q \end{bmatrix}, M'_{(l)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' & d' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e' & f' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g' & h' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i' & j' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k' & l' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m' & n' & 0 & 0 \\ p' & q' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Les termes non nuls de la matrice de gauche sont :

$$\begin{aligned} a &= \beta_1, \quad e = \beta_2, \quad i = \beta_3, \quad m = \beta_4, \\ b, f, j, n &\equiv \kappa, \\ c &= -\beta_1 \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right) + \kappa \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right), \\ d &= -\beta_1 \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right) + \kappa \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right), \\ g &= -\beta_2 \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right) + \kappa \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right), \\ h &= -\beta_2 \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right) + \kappa \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right), \\ k &= -\beta_3 \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right) + \kappa \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right), \\ l &= -\beta_3 \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right) + \kappa \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right), \\ p &= -\beta_4 \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right) + \kappa \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right), \\ q &= -\beta_4 \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right) + \kappa \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2} + \kappa\delta\right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Pour alléger la notation nous avons dénoté  $\beta_l$  ce qu'on a appelé  $\beta_1^{(l)}$  dans le chapitre 2.

Et ceux de la matrice de droite sont :

$$\begin{aligned}
a' &= \beta_1 \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right) + \kappa \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right), & b' &= \beta_1 \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right) + \kappa \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right), \\
c' &= -\beta_1 \cosh(\kappa\delta) + \kappa \sinh(\kappa\delta), & d' &= -\beta_1 \sinh(\kappa\delta) + \kappa \cosh(\kappa\delta), \\
e' &= \beta_2 \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right) + \kappa \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right), & f' &= \beta_2 \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right) + \kappa \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right), \\
g' &= -\beta_2 \cosh(\kappa\delta) + \kappa \sinh(\kappa\delta), & h' &= -\beta_2 \sinh(\kappa\delta) + \kappa \cosh(\kappa\delta), \\
i' &= \beta_3 \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right) + \kappa \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right), & j' &= \beta_3 \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right) + \kappa \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right), \\
k' &= -\beta_3 \cosh(\kappa\delta) + \kappa \sinh(\kappa\delta), & l' &= -\beta_3 \sinh(\kappa\delta) + \kappa \cosh(\kappa\delta), \\
m' &= \beta_4 \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right) + \kappa \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right), & n' &= \beta_4 \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right) + \kappa \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2}\right), \\
p' &= -\beta_4 \cosh(\kappa\delta) + \kappa \sinh(\kappa\delta), & q' &= -\beta_4 \sinh(\kappa\delta) + \kappa \cosh(\kappa\delta).
\end{aligned} \tag{A.3}$$

On cherche maintenant à annuler le déterminant de la matrice  $M'_{(l)}$ , ce qui est équivalent à annuler le coefficient  $c_0$ . On peut la transformer pour obtenir les conditions qui permettent de choisir  $\beta_2$  en fonction de  $\beta_4$  de façon à ce que  $c_0$  soit nul.

La première étape consiste à réordonner la matrice de façon à ce que les paramètres impairs et pairs soient groupés ensemble, ceci ne change pas le déterminant. La matrice de permutation suivante effectue ce regroupement :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

$M'_{(l)}$  devient donc  $PM'_{(l)}P$  :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i' & j' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k' & l' \\ e' & f' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g' & h' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m' & n' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p' & q' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Cette matrice possède 2 blocs non-zéro et le déterminant est le produit des déterminants de chacun des blocs. Puisque nous nous intéressons au bloc des variables pair il suffit que le déterminant de ce bloc soit 0. Ce déterminant est

$$(e'q' - fp')(g'n' - hm'). \quad (\text{A.6})$$

L'équation A.6 s'annule si  $\beta_2 = \kappa$  ou si :

$$\beta_2 = -\frac{\kappa \left( \beta_4 \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2} - \kappa\delta\right) + \kappa \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2} - \kappa\delta\right) \right)}{\beta_4 \sinh\left(\frac{\kappa\pi}{2} - \kappa\delta\right) + \kappa \cosh\left(\frac{\kappa\pi}{2} - \kappa\delta\right)} = -\frac{\kappa \left( \beta_4 + \kappa \tanh\left(\frac{\kappa\pi}{2} - \kappa\delta\right) \right)}{\beta_4 \tanh\left(\frac{\kappa\pi}{2} - \kappa\delta\right) + \kappa}. \quad (\text{A.7})$$

Cette dernière racine a la propriété de faire en sorte que le coefficient  $c_2$  soit aussi nul ce qui n'est pas le cas pour la première racine. En posant  $\kappa = 1$  et  $\delta = 0$  dans (A.7) on obtient le résultat 2.23 du chapitre 2.

## ANNEXE B

- B1

### Pseudo-code 1

L'idée est de prédéfinir pour chacun des points du périmètre d'un panneau le nom du panneau voisin et l'endroit précis sur lequel il prendra ses nouvelles conditions initiales.

```
for i_pan = 1:n_pan % Boucle sur les panneaux
  for k = 1:n_per % Boucle sur les points du périmètre
    compteur= 0; % Pour chacun des points du périmètre d'un panneau on détermine à combien de voisins il
    appartient
    for i_v = 1:n_voisins % Boucle sur les voisins
      if lon_i<=lambda ET lambda<=lon_f ET lat_i<=theta ET theta<=lat_f
        compteur = compteur + 1 ;
        lon_voi(k, compteur) = lambda; % Longitude voisin
        lat_voi(k, compteur) = theta; % Latitude voisin
        dis_voi(k, compteur) = (norm(lxyz-o_x))/rayon_terre;
        j_voi(k, compteur) = j; % On sauve le voisin obtenu
      end
    end %Fin de la boucle sur les voisins
    ll = 1 ;
    if compteur == 0 OU compteur > 2
      display('Something wrong');
      STOP % Ce cas est improbable et entraine immédiatement l'arrêt de la procédure
    elseif compteur == 1
      .....
      Si le compteur est égal à un, c'est parfait.
      .....
    elseif compteur == 2 ET dis_voi(k,1) > dis_voi(k,2)
      ll = 2;
      .....
      Enfin, si le compteur est égal à deux, on choisit le point qui est le plus loin des frontières.
      .....
    end
    % Fin test sur compteur : On sauve les résultats obtenus
  end % Fin de la boucle sur les points du périmètre
end % Fin boucle sur les panneaux
% Fin de l'algorithme
```

- B2

### Pseudo-code 2

.....  
Initialisation des variables  
.....

Rhs représente le terme source,  $q_0$  la solution de référence,  $q_{0\_p}$  notre solution obtenue

% 1) Transformée de Fourier dans la direction  $\lambda$  (On projette le côté droit dans l'espace de Fourier)

$q_{0\_p} = \text{phi\_d} * \text{Rhs}$ ; %On implémente la TF avec le produit matriciel (transformée lente)

% Division par  $p(\lambda)$  dans l'espace de Fourier

for k = 1 : N-2;

$q_{0\_p}(k,2:N-1) = q_{0\_p}(k,2:N-1)/r_0(k+1)$ ;

end;

% 2) Résolution tridiagonale dans la direction  $\theta$  (solution pour chacun des modes de Fourier)

for k = 1:N-2;

$A = (e\_d(k) * p_m(\theta) + p_{\theta\theta} - \eta * p(\theta))$ ;

$\text{sol\_2}(k,:) = (A \setminus \text{sol\_2}(k,:))'$ ;

end;

% 3) Transformée inverse de Fourier dans la direction  $\lambda$  (assemblage de la solution dans l'espace physique)

$q_{0\_p} = \text{phi\_d} * q_{0\_p}$ ;

$\text{norm}(q_0 - q_{0\_p})$  % Calcul d'erreur

## ANNEXE C

Chacune de nos grilles étant une figure géométrique plane, seules deux coordonnées sont nécessaires pour représenter un point s'y trouvant. Les coordonnées lat/lon que nous avons choisies s'écrivent sous leur forme discrétisée comme suit :

$$\begin{aligned}
 (\lambda, \theta)_i &= \lambda_i, \theta_i, & \text{avec } i = 1, N \\
 \lambda_i &= \lambda_0 + (i-1)\Delta\lambda \\
 \theta_i &= \theta_0 + (i-1)\Delta\theta \\
 \lambda_0 &= \theta_0 \text{ et } \Delta\lambda = \Delta\theta \\
 \Delta(\sin \theta)_i &= \sin \theta_{i+1} - \sin \theta_i, & \text{avec } i = 1, N-1 \\
 \tilde{\theta}_i &= \theta_0 + (i-\frac{3}{2})\Delta\theta, & \text{avec } i = 1, N+1 \\
 \Delta(\sin \tilde{\theta})_i &= \sin \tilde{\theta}_{i+1} - \sin \tilde{\theta}_i & \text{avec } i = 1, N
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Les opérateurs de différences finies prennent la forme :

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \Delta\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta\lambda \end{bmatrix} \tag{C.2}$$

$$P_{\lambda\lambda} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta\lambda} & \frac{1}{\Delta\lambda} & & & & & \\ \frac{1}{\Delta\lambda} & -\frac{2}{\Delta\lambda} & \frac{1}{\Delta\lambda} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{\Delta\lambda} & -\frac{2}{\Delta\lambda} & \frac{1}{\Delta\lambda} & \\ & & & & \frac{1}{\Delta\lambda} & -\frac{1}{\Delta\lambda} & \end{bmatrix} \tag{C.3}$$

$$P_m(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\Delta(\sin \tilde{\theta})_1}{\cos^2 \theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & \frac{\Delta(\sin \tilde{\theta})_N}{\cos^2 \theta_N} \end{bmatrix} \tag{C.4}$$

$$P(\theta) = \begin{bmatrix} \Delta(\sin \tilde{\theta})_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \Delta(\sin \tilde{\theta})_N \end{bmatrix} \tag{C.5}$$



## BIBLIOGRAPHIE

- Bélaïr S, Roch M, Leduc A-M, Vaillancourt P-A, Laroche S, Mailhot J, (2009). *Medium-range quantitative precipitation forecasts from Canada's new 33 km deterministic global operational system*. *Weather and Forecasting* **24**: 690–708.
- Bjerknes V, (1904). *Das Problem der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkte der Mechanik und der Physik*. *Meteorologische Zeitschrift*. **21**, 1-7.
- Bodin L, (2015). *Quand la météo fait l'histoire*. RTL. 288 pp.
- Camuffo D, Bertolin C, (2012). *The earliest temperature observations in the world: the Medici Network (1654–1670)*. *Climatic Change*, **111**, 335-363
- Chancibault K, (2003). *Risque Hydro-météorologiques, crues et inondations*. DDS-TUE 364.29
- Coiffier J, Nicolau J, (2003). *La prévision numérique du temps*. École d'été de physique pour le monde de l'enseignement, Université de Bordeaux 1. e2phy.in2p3.fr/2003/actesNicolau.doc
- Côté J, Gravel S, Méthot A, Patoine A, Roch M, Staniforth A, (1998). *The Operational CMC–MRB Global Environmental Multiscale (GEM) Model. Part I: Design Considerations and Formulation*. *Monthly Weather Review*, **126**, 1373-1395.
- Gander MJ, Halpern L, (2012). *Méthodes de décomposition de domaines*. *Techniques de l'ingénieur*, 81 pp.
- Gander W, Gander MJ, Kwok Felix (2014). *Scientific Computing - An Introduction using Maple and MATLAB*. Springer , 905 pp.
- Holloway J, Manabe S, Spelman MJ, (1973). *Latitude-Longitude Grid Suitable for Numerical Time Integration of a Global Atmospheric Model*. *Monthly Weather Review*, **101**, 69-78.
- Kageyama A, Sato T, (2004). *The Yin-Yang grid: An overset grid in spherical geometry*. *Geochem. Geophys. Geosyst.* **5**: Q09005.
- Yeh K-S, Côté J, Gravel S, Méthot A, Patoine A, Roch M, Staniforth A, (2001). *The CMC–MRB Global Environmental Multiscale (GEM) Model. Part III: Nonhydrostatic Formulation*. *Monthly Weather Review*, **130**, 339-356.
- Kurihara Y, (1965). *Numerical Integration of the Primitive Equations on a Spherical Grid*. *Monthly Weather Review*, **93**, 399-415
- Purser RJ, (1988). *Degradation of numerical differencing caused by Fourier filtering at high latitudes*. *Monthly Weather Review*, **137**, 1913–1926.
- Qaddouri A, Lee V, (2011). *The Canadian Global Environmental Multiscale model on the Yin-Yang grid system*. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **137**, 1913-1926.
- Qaddouri A, Laayouni L, Loisel S, Côté J et Gander MJ, (2008). *Optimized Schwarz methods with an overset grid for the shallow-water equations: preliminary results*. *ScienceDirect, Applied Numerical Mathematics*, **58**, 459-471.
- Richardson LF, (1922). *Weather prediction by Numerical Process*. University Press. 262 pp.
- Robert A, Henderson J, Turnbull C, (1972). *An implicit time integration scheme for baroclinic modes of the atmosphere*. *Monthly Weather Review*, **100**, 329-335.
- Ronchi C, Iacono R, Paolucci PS, (1996). *Finite Difference Approximation to the Shallow Water Equations on Quasi-Uniform Spherical Grid*. *Springer*, **919**, 741-747.
- Sadourny, (1972). *Conservative finite-difference approximations of the primitive equations on quasi-uniform spherical grid*. *Monthly Weather Review*, **100**, 136-137.
- Stephen TT, Marion JB, (2003). *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5<sup>ème</sup> Édition, 660 pages.
- Strang G, (2006). *Mathematical methods for engineers*. Chapter 6, section 2, 1359 pp.

- Touati A, (2000). *L'histoire de la météorologie*. Le site de la Fondation La main à la pâte (<http://www.fondation-lamap.org>).
- Villeneuve GO, (1948). *La Météorologie: Aperçu Historique*. Journal of the Royal Astronomical Society of Canada, **42**, 131-139
- Washington MW, Buja L, Craig A, (2009). *The computational future for climate and Earth system models: on the path to petaflop and beyond*. Philosophical Transactions of the Royal Society A, **367**, 833–846.
- Williamson DL, (2007). *The evolution of dynamical cores for global atmospheric models*. Journal of the Meteorological Society Japan, **85B**, 241-269
- Williamson D, Drake JB , Hack JJ, Jakob R, Swartrauber PN, (1992). *A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry*. Journal of Computational Physics, **102**, 211-224.
- Yousef Saad, (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 567 pp.