UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

THÉORÈME DE CONVEXITÉ POUR UNE VARIÉTÉ MUNIE D'UNE STRUCTURE SYMPLECTIQUE TRANSVERSALE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

MOHAMED NOUIDHA

FÉVRIER 2017

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de mémoire, M. Vestislav Apostolov qui m'a proposé de travailler sur ce résultat très important de la géométrie symplectique. Ce travail ne reflète qu'une partie des connaissances que j'ai acquises sous sa direction. Son exemple restera très important dans ma formation de mathématicien.

Je remercie aussi mes professeurs au département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal (UQAM) ainsi que mes collègues dont l'aide et le soutien était indispensable à l'accomplissement de ce travail.

Enfin, je remercie ma famille et en particulier ma femme pour tellement de choses qu'il me serait impossible d'en faire la liste ici.

Évidemment, je rends grâce à dieu pour tout et avant tous et je l'implore de me guider sur le chemin de la droiture.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Le théorème de convexité stipule que l'image d'une variété symplectique compacte et connexe (M, ω) par l'application moment $\mu : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ de l'action hamiltonienne d'un tore T^k, est un polytope convexe. Prouvé simultanément par (Atiyah, 1982) et (Guillemin et Sternberg, 1982), ce résultat prend d'autant plus d'importance que dans le cas d'une variété torique (le cas où $dim(M) = 2k$), le polytope ainsi obtenu, s'avère être un invariant combinatoire pour cette classe de variétés symplectiques; résultat prouvé par (Delzant, 1988).
Les deux premiers chapitres de ce mémoire présentent un traitement systématique de la géométrie symplectique et de ses résultats fondamentaux dans le contexte de l'action hamiltonienne d'un tore sur une variété symplectique compacte et connexe.
Dans le troisième chapitre, nous parlerons de la version classique du théorème de convexité ainsi que du théorème de Delzant, pour ensuite aborder dans le chapitre 4 le théorème 4.3.10 dans lequel la condition sur la structure symplectique du théorème de Atiyah, Guillemin-Sternberg est remplacé par une structure symplectique transverse par rapport au feuilletage généré par un sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ qui agit librement sur la variété (où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un tore G). Dans le cas où $\mathfrak{g}' = \{0\}$ on retrouve le théorème de Atiyah, Guillemin-Sternberg.

MOTS-CLÉS : Convexité, groupe de Lie, action hamiltonienne, variété symplectique, application moment, polytope de Delzant, structure transversale.

CHAPITRE I

GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE LINÉAIRE

Un espace symplectique est un espace vectoriel muni d'une forme symplectique ; une telle forme introduit un certain nombre de propriétés qui distinguent ce genre d'espaces. Par exemple, les espaces symplectiques sont toujours de dimension paire.

On se propose dans ce chapitre de faire une étude systématique de la géométrie symplectique qui va être très utile pour l'étude des variétés différentiables symplectiques.

Le contenu de ce chapitre provient essentiellement de (Kostrikin et Manin, 1989) et de la section 2 du chapitre I de (McDuff et Salamon, 1995).

1.1 Espace vectoriel symplectique

Définition 1.1.1. *Une forme bilinéaire non dégénérée ω sur une espace vectoriel V, est une application*

$$\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1.1}$$

linéaire par rapport à ces deux arguments, telle que :

$$\omega^\flat : V \longrightarrow V^* \tag{1.2}$$

$$v \mapsto \omega(v, .) \tag{1.3}$$

est un isomorphisme.

Remarque 1.1.2. *La matrice de Gram de* ω *dans une base* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *de* V*, est la transposée de la matrice de* $\omega^\flat$ *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et sa dual* $\mathcal{B}^* = (e^1, \dots, e^n)$.

Définition 1.1.3. *Le sous-espace orthogonale à un sous-espace* $W \subset (V, \omega)$ *est défini par :*

$$W^{\perp_\omega} = \{x \in V | \quad \forall y \in W \; \omega(x, y) = 0\} = ker(i^* \circ \omega^\flat) \tag{1.4}$$

où $i^* : V^* \longrightarrow W^*$ *est le dual de l'injection* $i : W \longrightarrow V$.

Théorème 1.1.4. *Soit* ω *une forme bilinéaire non dégénérée sur une espace vectoriel* V*. Alors, pour tout sous-espace* $W \subset (V, \omega)$ *:*

(a) $dim(W) + dim(W^{\perp_\omega}) = dim(V)$.

(b) $W^{\perp_\omega \perp_\omega} = W$.

Démonstration. (a) $dim(W^{\perp_\omega}) = dim(ker(i^*)) = dim(V) - dim(W)$ car $\omega^\flat$ est un isomorphisme.

(b) On a $W \subset W^{\perp_\omega \perp_\omega}$, par (a) $dim(W^{\perp_\omega \perp_\omega}) = dim(W) \implies W = W^{\perp_\omega \perp_\omega}$. □

Définition 1.1.5. *Une forme symplectique est une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée.*

Définition 1.1.6. *Un espace vectoriel symplectique* (V, ω)*, est un espace vectoriel* V *muni d'une forme symplectique* ω.

De plus, si $W \subset V$ *est un sous-espace de* V*, on dit que* W *est :*

(a) *Isotrope si* $W \subset W^{\perp_\omega}$.

(b) *Coisotrope si* $W^{\perp_\omega} \subset W$.

(c) *Symplectique si* $W \cap W^{\perp_\omega} = 0$.

(d) *Lagrangien si* $W = W^{\perp_\omega}$.

Théorème 1.1.7. *Un espace vectoriel symplectique* (V, ω) *possède une base dite symplectique de la forme* $(e_1, \ldots, e_n, v_1, \ldots, v_n)$ *telle que :*
$\omega(e_i, v_j) = \delta^i_j$.
En particulier, $dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$.

Démonstration. Supposons que $dim(V) = 2$. Soit $e_1 \in V$ tel que $e_1 \neq 0$. Par la non dégénérescence de ω, il existe $v_1 \in V$ tel que $\omega(e_1, v_1) = 1 \implies (e_1, v_1)$ est une base symplectique de V.
Supposons maintenant que $dim(V) > 2$, et que l'énoncé est vraie pour tout espace vectoriel symplectique de dimension $< dim(V)$.
Soit $W \subset V$ un sous espace de V avec $W = Span\{e_1, v_1\}$ et $\omega(e_1, v_1) = 1$. On remarque que :

(1) $W \cap W^{\perp_\omega} = \emptyset$.

(2) $dim(W^{\perp_\omega}) = dim(V) - dim(W)$

$\implies V = W \bigoplus W^{\perp_\omega} \implies (W^{\perp_\omega}, \omega)$ est un espace vectoriel symplectique, alors par l'hypothèse de récurrence $W^{\perp_\omega}$ possède une base symplectique $(e_2, \ldots, e_n, v_2, \ldots, v_n)$
$\implies (e_1, \ldots, e_n, v_1, \ldots, v_n)$ est une base symplectique de V. □

Remarque 1.1.8. *La matrice de Gram d'une forme symplectique* ω *dans une base symplectique est de la forme :*

$$G_\omega = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix} = J_0,$$

où E_n *est la matrice identité de dimension* n.

Exemple 1.1.9. *L'espace vectoriel réel* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ *est un espace vectoriel symplectique, où* ω_0 *est la forme symplectique standard définie par :*

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge v^i. \tag{1.5}$$

avec $\{e^1, \ldots, e^n, v^1, \ldots, v^n\}$ *une base de* $\mathbb{R}^{2n*}$.

Remarque 1.1.10. *L'exemple* 1.1.9 *est très important car on verra dans le chapitre suivant que toute variété symplectique ressemble localement à* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

1.2 Groupe linéaire symplectique

Définition 1.2.1. *Un symplectomorphisme de* (V, ω) *est un endomorphisme* ψ *de* V *qui laisse invariante* ω*, dans le sens :*

$$(\psi^*\omega)(x, y) = \omega(\psi(x), \psi(y)) = \omega(x, y). \tag{1.6}$$

Ou d'une façon équivalente en notation matricielle :

$$A_\psi{}^t G_\omega A_\psi = G_\omega. \tag{1.7}$$

Dans une base symplectique, la matrice A_ψ *de* ψ *vérifie :*

$$A_\psi{}^t J_0 A_\psi = J_0. \tag{1.8}$$

L'ensemble des symplectomorphismes d'un espace vectoriel symplectique (V, ω) possède une structure naturelle de groupe (par composition d'automorphisme) et sera dénoté par $Sp(V, \omega)$. On dénotera par $Sp(2n)$ le groupe $Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Remarque 1.2.2. *L'équation* (1.8) *nous montre que la matrice de* ψ *dans une* *base symplectique est inversible. En d'autres termes, un symplectomorphisme est un automorphisme de l'espace vectoriel.*

Proposition 1.2.3. *Pour toute matrice $A \in Sp(2n, \mathbb{R})$, on a que :*

(a) $det(A) = 1$.

(b) $P(t) = t^{2n} P(t^{-1})$, *où P est le polynôme caractéristique de A.*

Démonstration. (a) A laisse invariante la forme volume $\omega_0^n \implies det(A) = 1$.
(b) Par l'équation (1.8) : $det(tE_{2n} - A) = det(tE_{2n} + J_0 (A^t)^{-1} J_0) =$
$det(tE_{2n} - (A^t)^{-1}) = det((A^t)^{-1}) det(tA^t - E_{2n}) = t^{2n} det(t^{-1} E_{2n} - A)$. □

Corollaire 1.2.4. *Pour toute matrice $A \in Sp(2n, \mathbb{R})$ on a que, si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda^{-1}, \overline{\lambda}$ et $\overline{\lambda^{-1}}$ sont aussi des valeurs propres de A.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 1.2.3 et le fait que P est un polynôme à coefficients réels. □

1.3 Complexification et décomplexification

La complexification est l'opération d'extension du corps des scalaires d'un espace vectorielle réel à $\mathbb{C}$. De même, la décomplexification est l'opération de restriction du corps des scalaires d'un espace vectorielle complexe à $\mathbb{R}$.
On se propose d'étudier dans cette section les résultats fondamentaux de ces opérations.

1.3.1 Décomplexification

Définition 1.3.1. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On désigne par $V_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel obtenu de V par la restriction du corps des scalaires à $\mathbb{R}$. $V_{\mathbb{R}}$ est l'espace vectoriel qui correspond à la décomplexification de V.*

De plus, si $f : V \longrightarrow W$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire, on désigne par $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \longrightarrow W_{\mathbb{R}}$ l'application $\mathbb{R}-$linéaire correspondante.

Théorème 1.3.2. *Soit L et M deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ avec comme bases respectives $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_l\}$ et $\mathcal{B}' = \{e_1^{'}, \ldots, e_m^{'}\}$. Soit $f : L \mapsto M$ une application $\mathbb{C}$-linéaire.*
Alors :

(1) *$dim_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{R}} = 2dim_{\mathbb{C}} L$. En particulier, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{e_1, \ldots, e_l, ie_1, \ldots, ie_l\}$ est une base de $L_{\mathbb{R}}$.*

(2) *Soit $(A + iB)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (où A et B sont deux matrices réelles). Alors, la matrice de $f_{\mathbb{R}}$ dans les bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$ est de la forme :*

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

(3) $det(f_{\mathbb{R}}) = |det(f)|^2$.

Démonstration. (1) Supposons qu'il existe $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}, (\beta_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j i e_j = 0 = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + i\beta_k) e_k$. Alors, $\alpha_k + i\beta_k = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$ $\Longrightarrow \alpha_k = 0 = \beta_k \quad \forall 1 \leq k \leq n$.

(2) $(A + iB)(x + iy) = (Ax - By) + i(Bx + Ay) = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ □

1.3.2 Structure complexe

Définition 1.3.3. *Une structure complexe sur un espace vectoriel réel V, est un automorphisme J de V tel que :*

$$J^2 = -Id \tag{1.9}$$

On dénotera par $\mathcal{J}(V)$ l'espace des structures complexes sur V.

Théorème 1.3.4. *Soit (V, J) un espace vectoriel réel V muni d'une structure complexe J. Soit l'espace vectoriel complexe $\widetilde{V}$ qui consiste en V muni de la multiplication par des complexes définie par l'équation suivante :*

$$(a+ib)x = ax + bJ(x) \quad \forall x \in V. \tag{1.10}$$

Alors :

$$\widetilde{V}_{\mathbb{R}} = V. \tag{1.11}$$

En particulier :

$$dim_{\mathbb{R}} V = 2dim_{\mathbb{C}} \widetilde{V}. \tag{1.12}$$

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\widetilde{V}$, alors $(e_1, \ldots, e_n, J(e_1), \ldots, J(e_n))$ est une base de V(voir la preuve du théorème 1.3.2(i)). □

Définition 1.3.5. *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Une structure complexe $J \in \mathcal{J}(V)$ est dite compatible avec ω si :*

$$\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w). \tag{1.13}$$

et

$$\omega(v, Jv) > 0. \tag{1.14}$$

$\forall\ v \neq 0,\ w \in V$.

On dénotera par $\mathcal{J}(V, \omega)$ l'espace des structures complexes compatibles avec ω.

Lemme 1.3.6. *Pour tout espace vectoriel symplectique (V, ω), il existe une structure complexe $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$.*

Démonstration. Soit g un produit euclidien sur V. On définit l'application linéaire

$A : V \longrightarrow V$ tel que $\omega(X, Y) = g(AX, Y)$. Alors :

(a) $A^* = -A$. En effet, on a que, $g(A^*X, Y) = g(X, AY) = g(AY, X) = -\omega(X, Y) = -g(AX, Y)$.

(b) AA^* est symétrique $((AA^*)^* = AA^*)$.

(c) AA^* est définie positive $(g(AA^*X, X) > 0 \quad \forall X \neq 0)$.

$\Longrightarrow$ AA^* est diagonalisable avec valeurs propres > 0, donc $(\sqrt{AA^*})^{-1}$ est bien définie et est autoadjointe. Par conséquent, $J = (\sqrt{AA^*})^{-1}A$ est une structure complexe (A commute avec $(\sqrt{AA^*})^{-1}$ car A commute avec AA^*). $\square$

Théorème 1.3.7. *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique, et $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$. Alors :*

(a)

$$\begin{aligned} g_J : & V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (v, w) \mapsto \omega(v, J(w)) \end{aligned} \tag{1.15}$$

est un produit euclidien J-invariant.

(b)

$$\begin{aligned} H : & \tilde{V} \times \tilde{V} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (v, w) \mapsto \omega(v, J(w)) + i\omega(v, w) \end{aligned} \tag{1.16}$$

est un produit hermitienne.

Démonstration. (a) On a que $g_J(v, v) = \omega(v, J(v)) > 0$. Par conséquent, g_J est non dégénéré. De plus, $g_j(v, w) = \omega(v, J(w)) = \omega(J(v), J^2(w)) = \omega(w, J(v)) = g_J(w, v)$. Donc, g_J est un produit euclidien.
(b) $\overline{H(w, v)} = \omega(w, J(v)) - i\omega(w, v) = \omega(v, J(w)) + i\omega(v, w) = H(v, w)$. $\square$

1.3.3 Complexification

Définition 1.3.8. *La complexification d'un espace vectoriel réel L est l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} L$ noté $L^{\mathbb{C}}$.*

De plus si $f : L \longrightarrow M$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire, on définit :

$$\begin{aligned} f^{\mathbb{C}} : & L^{\mathbb{C}} \longrightarrow M^{\mathbb{C}} \\ & a \otimes v \mapsto a \otimes f(v) \end{aligned} \tag{1.17}$$

la complexification de f.

Remarque 1.3.9. *On peut voir la complexification d'un espace vectoriel réel L comme étant l'espace vectoriel complexe $(L \bigoplus L, J)$ avec $J(l_1, l_2) = (-l_2, l_1)$.*

Théorème 1.3.10. *Soit L et M deux espaces vectoriels réels muni respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_l)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', \ldots, e_m')$. Alors :*

(a) $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont respectivement des bases de $L^{\mathbb{C}}$ et $M^{\mathbb{C}}$.

(b) f et $f^{\mathbb{C}}$ ont la même matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement.

Démonstration. La preuve de (a) est évidente. Pour prouver (b), il suffit d'utiliser (a) et le fait que $f^{\mathbb{C}}(e_i) = f(e_i)$ (voir équation (1.17)). $\square$

CHAPITRE II

ACTION HAMILTONIENNE D'UN GROUPE DE LIE

Le but principal de ce chapitre est de démontrer l'existence et l'unicité de l'application moment induite par l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, ω) ainsi que ses propriétés. Bien que seul l'action d'un tore nous intéresse, nous étudierons le cas plus général de l'action propre d'un groupe de Lie et ses propriétés.
Nous suivrons les références (da Silva, 2006; Cieliebak, 2010; Cieliebak, 2001; Karshon, 2002).

2.1 Action lisse

Définition 2.1.1. *L'action d'un groupe de Lie G, sur une variété différentiable M, est un morphisme de groupes :*

$$\rho : G \longrightarrow Diff(M) \tag{2.1}$$

où $Diff(M)$ est le groupe des difféomorphismes de M. Pour alléger la notation on écrira $g.x$ ou juste gx au lieu de $\rho(g)(x)$.

L'action ainsi définie est dite lisse ou C^∞, si l'application d'évaluation :

$$\begin{aligned} ev : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, m) &\mapsto g.m \end{aligned} \tag{2.2}$$

est C^∞.

Exemple 2.1.2. *Un groupe de Lie G agit sur lui même de manière C^∞ par :*

(1) *Multiplication à gauche : $L_g(x) = g.x$.*
(2) *Multiplication à droite : $R_g(x) = x.g^{-1}$.*
(3) *Conjugaison : $c_g(x) = L_g \circ R_g(x) = g.x.g^{-1}$.*

Lemme 2.1.3. *Soit M une variété différentiable munie de l'action C^∞ d'un groupe de Lie compacte G. Alors, il existe sur M une métrique riemannienne G-invariant g ; dans le sens où $\rho(G)$ est un sous groupe du groupe d'isométries de g.*

Démonstration. Soit g' une métrique riemannienne quelconque sur M. On définit $g = \int_G (h^* g')dh$, où h est une mesure de Haar (une forme volume bi-invariante sur G) sur G. □

Remarque 2.1.4. *Soit (M, g) une variété différentiable munie d'une structure riemannienne G-invariante g, et $x \in M$ un point fixe de l'action de G.*
Soit $exp : \mathcal{V} \subset T_xM \to M$ l'application exponentielle associé à g (où $\mathcal{V}$ est une boule autour de $0 \in T_xM$). Alors :

(a) *L'action de G sur M définie une action sur T_xM telle que $hv = h_* v$ $\forall h \in G$, $\forall v \in T_xM$.*
(b) *$exp(hv) = h.exp(v) \quad \forall h \in G, \forall v \in \mathcal{V}$.*

où $exp(thv)$ et $h.exp(tv)$ sont deux géodésiques issues de x avec vélocité en x égale à $h_* v$. En d'autres termes, l'application exp d'une métrique riemannienne G-invariante est équivariante (voir définition 2.1.8 pour l'équivariance).

Définition 2.1.5. *L'action par conjugaison de G sur lui même induit les représentations suivantes :*

(a) *Représentation adjointe de G sur $\mathfrak{g}$:*

$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto (dc_g)_e \end{aligned} \tag{2.3}$$

(b) *Représentation coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$:*

$$< Ad^*(g)\xi, \eta >=< \xi, Ad(g^{-1})\eta > \forall g \in G, \forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \forall \eta \in \mathfrak{g}. \tag{2.4}$$

(c) *Représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$:*

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow gl(\mathfrak{g}) \\ \eta &\mapsto (dAd)_e(\eta) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Exemple 2.1.6. *Soit l'action de S^1 sur S^3 définie par :*

$$\begin{aligned} S^1 \times S^3 &\longrightarrow S^3 \\ (z, (z_1, z_2)) &\mapsto (z^{m_1} z_1, z^{m_2} z_2) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S^1 &= \{z \in \mathbb{C} | \quad |z| = 1\} \\ S^3 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \end{aligned}$$

et m_1, m_2 deux entiers fixé. L'action est clairement C^∞.

Exemple 2.1.7. *Soit M une variété différentiable et $X \in \mathfrak{X}(M)$ un champ de* *vecteurs complet. Alors :*

$$\begin{aligned} \rho : &\mathbb{R} \longrightarrow Diff(M) \\ &t \mapsto \Phi_t \end{aligned} \tag{2.6}$$

où Φ_t est le flot de X, est une action C^∞ de $\mathbb{R}$ sur M.

Pour $x \in M$ on définit l'orbite et le stabilisateur (groupe d'isotropie) de x respectivement comme suit :

$\mathcal{O}_x = G.x = \{g.x | g \in G\} \subset M.$
$G_x = \{g \in G | g.x = x\} \subset G.$

On définit aussi l'application orbitale de x, par :

$$\begin{aligned} \Psi_x : &G \xrightarrow{i_x} G \times M \xrightarrow{ev} M \\ &g \mapsto (g, x) \mapsto g(x) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Définition 2.1.8. *Une G-variété est une variété différentiable M munie de l'action C^∞ d'un groupe de Lie G. Une application C^∞ $f : M \longrightarrow N$ entre deux G-variétés M et N est dite équivariante, si :*

$$f(g(x)) = g(f(x)) \tag{2.8}$$

$\forall g \in G$ et $\forall x \in M$.

Terminologie 2.1.9. *Soit M une G-variété. L'action de G est dite :*

(a) *Libre : si $G_x = \{e\}$ $\forall$ $x \in M$.*
(b) *Localement libre : si G_x est discret $\forall$ $x \in M$.*
(c) *Effective : si $\bigcap_{x \in M} G_x = \{e\} = Ker(\rho : G \longrightarrow Diff(M))$.*
(d) *Transitive : si $\mathcal{O}_x = M$ $\quad \forall x \in M$.*

Remarque 2.1.10. *L'action dans l'exemple 2.1.6 est effective ssi m_1 et m_2 sont premiers entre eux.*

Démonstration. L'action de l'exemple 2.1.6 s'écrit en cordonnées polaires comme suit :

$$S^1 \times S^3 \longrightarrow S^3$$
$$(\theta, ((r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2))) \mapsto ((r_1, \theta_1 + m_1\theta), (r_2, \theta_2 + m_2\theta)) \text{ (avec } r_1^2 + r_2^2 = 1)$$

L'action de $\theta \in (0, 2\pi)$ fixe S^3 ssi $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ telles que :

$$\begin{aligned} m_1\theta &= k_1 2\pi \\ m_2\theta &= k_2 2\pi \end{aligned} \tag{2.9}$$

Or l'équation (2.9) est équivalente à $\frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2}$ avec $k_1 < m_1$ et $k_2 < m_2$. En d'autres termes, (2.9) $\Leftrightarrow |pgcd(m_1, m_2)| > 1$. Donc, l'action est effective ssi m_1 et m_2 sont premiers entre eux. □

Dorénavant, tout action d'un groupe de Lie est sous entendue C^∞ à moins de spécifier explicitement le contraire.
L'action d'un groupe de Lie G sur une variété M induit une action infinitésimale de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur M, définie comme suit :

Proposition 2.1.11. *L'action infinitésimale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G sur une G-variété M est une application linéaire :*

$$\begin{aligned} \sigma : &\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ &\eta \mapsto \underline{\eta}_x = \frac{d}{dt}|_{t=0} exp(t\eta).x = \Psi_{xe,*}(\eta) \end{aligned} \tag{2.10}$$

qui vérifie :

(1) $\underline{Ad_g\eta} = g_*\underline{\eta}$

(2) $\underline{[\alpha,\beta]} = -[\underline{\alpha},\underline{\beta}]$

$\forall\alpha,\beta,\eta \in \mathfrak{g}$ *et* $\forall\ g \in G$. *Le champ de vecteurs* $\underline{\eta} \in \mathfrak{X}(M)$ *est dit champ de vecteurs fondamental associé à* $\eta \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. Il est claire que σ est linéaire.

(1) $\underline{Ad_g\eta}_x = \frac{d}{dt}|_{t=0}exp(tAd_g\eta).x = \frac{d}{dt}|_{t=0}C_g(exp(t\eta)).x = \frac{d}{dt}|_{t=0}gexp(t\eta)g^{-1}.x = (g_*\underline{\eta})_x$.

(2) $\underline{[\alpha,\beta]}_x = \underline{ad(\alpha)\beta}_x = \frac{d}{dt}|_{t=0}\underline{Ad(exp t\alpha)\beta}_x = \frac{d}{dt}|_{t=0}(exp(t\alpha)_*\underline{\beta})_x = -[\underline{\alpha},\underline{\beta}]_x$. $\square$

Théorème 2.1.12. *Soit M et N deux G-variétés telles que l'action de G sur M est transitive, et $f : M \longrightarrow N$ une application équivariante. Alors :*

(1) *f est de rang constant.*

(2) $f_*\underline{\eta}_M = \underline{\eta}_N\ \forall\eta \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. (1) $f\circ L_g = L_g\circ f\ \forall g \in G \implies f_{L_g(x),*}(L_g)_{x,*} = (L_g)_{f(x),*}f_{x,*} \implies$ $f_{x,*}$ et $f_{L_g(x),*}$ ont le même rang $\forall\ g \in G$.

$\forall y \in M \quad \exists g \in G \quad tq\ g.x = y$ car G agit transitivement sur $M \implies rang(f_{x,*}) = rang(f_{y,*})\ \forall x,y \in M$.

(2) $(f_*\underline{\eta}_M)_{f(x)} = \frac{d}{dt}|_{t=0}f(exp(t\eta).x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}exp(t\eta).f(x) = (\underline{\eta}_N)_{f(x)}$. $\square$

Lemme 2.1.13. *Soit M une G-variété et $x \in M$. Alors :*

(1) *G_x est un sous-groupe fermé de G.*

(2) $Lie(G_x) = \mathfrak{g}_x = \{\eta \in \mathfrak{g}|\underline{\eta}_x = 0\}$.

Démonstration. (1) $G_x = \Psi_x^{-1}(x) \implies G_x$ est fermé car Ψ_x est C^∞.

(2) Si $\eta \in \mathfrak{g}_x \implies \frac{d}{dt}|_{t=0}exp(t\eta).x = 0$ or $\frac{d}{dt}|_{t=s}exp(t\eta).x = \frac{d}{dt}|_{t=0}exp((t+s)\eta).x = \frac{d}{dt}|_{t=0}exp(s\eta)exp(t\eta).x = 0 \implies exp(t\eta).x = x\ \forall t \in \mathbb{R} \implies \eta \in Lie(G_x)$.

Le sens inverse est évident. $\square$

Terminologie 2.1.14. *L'action infinitésimale de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *sur une* G*-variété* M *est dite :*

(a) *Libre : si* $\mathfrak{g}_x = \{0\}$ $\forall x \in M$.

(b) *Effective : si* $\bigcap_{x \in M} \mathfrak{g}_x = \{0\} = Ker(\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M))$.

(c) *Transitive : si* $\underline{\mathfrak{g}}_x = T_xM$ $\forall x \in M$.

Proposition 2.1.15. *Soit* M *une* G*-variété, alors :*

(1) L'action de G *est localement libre* $\Leftrightarrow$ *l'action de* $\mathfrak{g}$ *est libre.*

(2) L'action de G *est effective* $\Longrightarrow$ *l'action de* $\mathfrak{g}$ *est effective.*

(3) L'action de G *est transitive* $\Longrightarrow$ *l'action de* $\mathfrak{g}$ *est transitive. Si* M *est connexe alors le sens inverse est aussi vraie.*

Démonstration. (1) G_x est discret $\Leftrightarrow \mathfrak{g}_x = \{0\}$.
(2) Supposons qu'il existe $\eta \in \mathfrak{g}$ tel que $\underline{\eta} = 0 \Longrightarrow \eta \in \mathfrak{g}_x \ \forall \ x \in M \Longrightarrow$ $exp(t\eta) \in G_x \ \forall \ x \in M$ et $\forall \ t \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ l'action de G n'est pas effective.
(3) pour $x \in M$: Ψ_x est surjective et de rang constant (par théorème 2.1.12) $\Longrightarrow$ Ψ_x est une submersion $\Longrightarrow$ l'action de $\mathfrak{g}$ est transitive.
Inversement, si M est connexe et l'action de $\mathfrak{g}$ est transitive, alors $\Psi_x(G)$ est ouvert dans M(car Ψ_x est une submersion). Si $y \in M \backslash \Psi_x(G)$ alors $\Psi_y(G)$ est un voisinage de y disjoint de $\Psi_x(G) \Longrightarrow M \backslash \Psi_x(G)$ est un ouvert $\Longrightarrow \Psi_x(G) = M$ $\Longrightarrow$ l'action de G est transitive. □

2.2 Action propre

L'action d'une groupe de Lie de G sur une variété M est dite propre si l'application :

$$\varrho : G \times M \longrightarrow M \times M$$
$$(g, x) \mapsto (g(x), x)$$

est une application propre.

Lemme 2.2.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *L'action de G est propre.*

(2) *Pour toute suite convergente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ et suite $(g_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset G$ telles que $(g_k.x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ est une suite convergente, il existe une sous-suite convergente $(g_{k_j}) \subset (g_j)_{j\in\mathbb{N}}$.*

(3) *Pour tous sous-ensembles compactes $K_1,K_2 \subset M$, l'ensemble $G_{K_2}^{K_1} - \{g \in G \mid gK_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ est compacte.*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) Si (x_k) et $(g_k.x_k)$ convergent $\Longrightarrow$ $\exists$ compacte $K \subset M \times M$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ telles que $\forall\ k \geq n_0$ $(g_k.x_k, x_k) \in K$ $\Longrightarrow$ $(g_k, x_k)_{k\geq n_0} \in K' = \varrho^{-1}(K)$, or K' est compacte $\Longrightarrow$ $\exists$ sous-suite convergente $(g_{k_j}) \subset (g_j)_{j\in\mathbb{N}}$.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Soit une suite $(g_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset G_{K_2}^{K_1}$ et une suite convergente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K_1$, telle que $(g_k.x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ est une suite convergente. Remarquez que de telles suites existent car K_2 est compacte et qu'on pourra toujours passer au sous-suite.
Alors, il existe une sous-suite convergente $(g_{k_j}) \subset (g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ $\Longrightarrow$ $G_{K_2}^{K_1}$ est compacte.
(3) $\Longrightarrow$ (1) Soit un compacte $K \subset M \times M$ et $K' = \pi_1(K) \cup \pi_2(K)$ (où $\pi_i : M \times M \longrightarrow M$ tel que $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$), alors $\varrho^{-1}(K) \subset G_{K'}^{K'} \times \pi_2(K)$ $\Longrightarrow$ $\varrho^{-1}(K)$ est un compacte car sous-espace fermé d'un compacte. $\square$

Proposition 2.2.2. *Soit M une G-variété. Alors :*

(1) *G est compacte $\Longrightarrow$ l'action de G est propre.*

(2) *Si l'action de G est propre, alors :*

  (a) *L'application Ψ_x (voir équation (2.7)) est propre $\forall x \in M$.*

  (b) *G_x est compacte $\forall x \in M$.*

  (c) *La restriction de l'action de G à un sous groupe fermé $H \subset G$ et à un sous ensemble H-invariant ouvert $U \subset M$ est propre.*

Démonstration. (1) Soit un compacte $K \subset M \times M$, alors $\varrho^{-1}(K) \subset G \times \pi_2(K)$

est un sous-ensemble fermé d'un compacte $\Longrightarrow$ $\varrho^{-1}(K)$ est compacte.

(2) Si l'action de G est propre :

(a) $\Psi_x^{-1}(K) = G_K^{\{x\}}$ est un compacte de G pour tous compacte $K \subset M$ de M.

(b) $G_x = \Psi_x^{-1}(x)$ est compacte.

(c) U est une sous-variété plongée de M, donc la restriction d'une application C^∞ de M à U reste C^∞. D'autre part, la restriction de ϱ à H reste propre car H est un sous-groupe fermé.

□

Théorème 2.2.3. *Soit M une variété différentiable munie de l'action propre d'un groupe de Lie G. Alors :*

(1) $\pi : G \longrightarrow G/G_x$ est un fibré principal.

(2) $\mathcal{O}_x$ est une sous-variété plongée de M, et $T_x\mathcal{O}_x = \{\underline{\eta}_x \quad | \quad \eta \in \mathfrak{g}\}$.

Démonstration. (1) G_x agit librement sur G et l'action est propre car G_x est compacte(par proposition 2.2.2). Donc, par un résultat connu de géométrie différentielle G/G_x possède une structure différentiable telle que $\pi : G \longrightarrow G/G_x$ est un fibré principal.

(2) Soit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\Psi_x"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \\ & G/G_x \arrow[ur, "\widetilde{\Psi}_x"'] & \end{tikzcd}$$

$\widetilde{\Psi}_x$ est une application injective, elle est aussi ouverte car Ψ_x est ouverte (Ψ_x une submersion par la proposition 2.2.2). $\widetilde{\Psi}_x$ est aussi de rang constant (par la proposition 2.1.12) $\Longrightarrow$ $\widetilde{\Psi}_x$ est un plongement, et par conséquent $\mathcal{O}_x$ est une sous-variété plongée. La définition de $T_x\mathcal{O}_x$ découle du fait que $\mathcal{O}_x$ est difféomorphe à G/G_x et de l'équation (2.10) . □

Dorénavant tout action d'un groupe de Lie est sous entendue propre à moins de spécifier explicitement le contraire.

2.3 Variété de Poisson

Définition 2.3.1. *Une structure de Poisson sur une variété différentiable M est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire :*

$$\{,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \tag{2.11}$$

qui satisfait :

(a) *Antisymétrie :* $\{f, g\} = -\{g, f\}$.

(b) $\{,h\}$ *est une dérivation, i.e* $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$.

(c) *Identité de Jacobi :* $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

$\forall f, g, h \in C^\infty(M)$. $(M, \{,\})$ *est dite variété de Poisson.*

Par la propriété (b) de la définition précédente, $\{,\}$ correspond à un tenseur $\mathcal{P} \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$, dit tenseur de Poisson, tel que :

$$\{f, g\} = \mathcal{P}(df, dg). \tag{2.12}$$

La structure de Poisson est dite non dégénérée si le tenseur de Poisson est non dégénéré, ou de manière équivalente :

$$\{f, g\} = 0 \quad \forall g \in C^\infty(M) \Leftrightarrow f \equiv cst. \tag{2.13}$$

La propriété (b) nous montre aussi qu'on peut associer à chaque fonction $f \in C^\infty(M)$ un champ de vecteurs $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ tel que :

$\{g, f\} = X_f(g)\ \forall\ g \in C^\infty(M)$.

X_f est le champ de vecteurs hamiltonien de f.

Par conséquent, pour $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$X_f = i(-df)\mathcal{P}. \tag{2.14}$$

Ainsi, si la structure de Poisson est non dégénérée, le tenseur de Poisson introduit une identification canonique entre TM et T^*M via l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\# : & T^*M \longrightarrow TM \\ & \eta \mapsto i(-\eta)\mathcal{P} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Exemple 2.3.2. *Soit $\mathfrak{g}$ un algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ son dual. Alors, $\mathfrak{g}^*$ possède une structure de Poisson canonique (dite structure de Kirillov, Kostant et Souriau ou KKS) définie par :*

$$\{f, g\}(\xi) =< \xi, [df_\xi, dg_\xi] > \forall f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*), \forall \xi \in \mathfrak{g}^*. \tag{2.16}$$

Lemme 2.3.3. *Le champ de vecteurs hamiltonien X_f associé à une fonction $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ est défini par :*

$$X_f(\xi) = -ad^*_{df_\xi}\xi. \tag{2.17}$$

Démonstration. Soit $g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Alors, $\{g, f\}(\xi) = X_f(\xi)(g) =< \xi, [dg_\xi, df_\xi] >$ $=< \xi, -ad_{df_\xi}dg_\xi >=< -ad^*_{df_\xi}\xi, dg_\xi > \Longrightarrow X_f(\xi) = -ad^*_{df_\xi}\xi$. □

Définition 2.3.4. *Une application $\Psi : (M, \{,\}) \longrightarrow (N, \{,\})$ est dite application de Poisson, si :*

$$\Psi^*\{f, g\} = \{\Psi^*f, \Psi^*g\} \quad \forall f, g \in C^\infty(N) \tag{2.18}$$

Lemme 2.3.5. *Soit $(M, \{\})$ une variété de Poisson. Alors :*

(a) $\mathcal{L}_{X_f}\mathcal{P} = 0 \; \forall f \in C^\infty(M)$.

(b) $f \mapsto X_f$ *est un anti-morphisme d'algèbre.*

(c) $X_{\Psi^* f} = \Psi^* X_f$ *pour tout application de Poisson* Ψ.

Démonstration. (a) $(\mathcal{L}_{X_f}\mathcal{P})(dg, dh) = X_f(\mathcal{P}(dg, dh))$ - $\mathcal{P}(\mathcal{L}_{X_f}dg, dh)$ - $\mathcal{P}(dg, \mathcal{L}_{X_f}dh)$ $- X_f(\{g, h\}) - \mathcal{P}(d\{f, g\}, dh) - \mathcal{P}(dg, d\{f, h\}) - \{f, \{g, h\}\} - \{\{f, g\}, h\} - \{g, \{f, h\}\} =$ 0(par l'identité de Jacobi).

(b) $X_{\{f,g\}}(h) - -\{\{f, g\}, h\} - -\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{f, h\}\} - -[X_f, X_g](h)$.

(c) $X_{\Psi^* f}(g) - \{g, \Psi^* f\} - \{\Psi^{*-1} g, f\} - X_f(\Psi^{-1^*} g) - (\Psi^* X_f)(g)$. □

Remarque 2.3.6. *Par (b) du lemme 2.3.5, une structure de Poisson induit une distribution naturelle (de rang variable) $\mathcal{F}$ générée par les champs de vecteurs hamiltoniens, telle que :*
$\mathcal{F} = \{X_F | \quad F \in C^\infty(M)\}$.

Proposition 2.3.7. *Soit $(M, \{,\})$ une variété de Poisson. La distribution $\mathcal{F}$ induite par la structure de poisson est intégrable (dans le sens de la définition* 4.1.2*). De plus, la restriction de la structure de Poisson à chaque feuille est non dégénérée.*

Démonstration. En ce qui concerne l'intégrabilité de $\mathcal{F}$ voir théorème A.5 dans (Cieliebak, 2010) (ou (Bolsinov *et al.*, 2016) section 2.2 page 45). Pour la deuxième assertion, soit $\mathcal{L}$ une feuille et $f \in C^\infty(\mathcal{L})$ telle que :
$\{g, f\} = 0 \quad \forall g \in C^\infty(\mathcal{L}) \Leftrightarrow X_g(f) = 0 \quad \forall g \in C^\infty(\mathcal{L})$, or $T\mathcal{L}$ est générée par les champs de vecteurs hamiltoniens.

$\Leftrightarrow f \equiv cst$. □

2.4 Variété symplectique

Définition 2.4.1. *Une variété symplectique (M, ω), est une variété différentiable M munie d'une 2-forme $\omega \in \Omega^2(M)$ fermée et non dégénérée. En d'autres termes :*

(a) $d\omega = 0$.

(b) (T_xM, ω_x) *est un espace vectoriel symplectique* $\forall x \in M$. *Ou de manière équivalente, l'application :*

$$\begin{aligned} \omega^\flat : & TM \longrightarrow T^*M \\ & X \mapsto i(X)\omega \end{aligned} \tag{2.19}$$

est un isomorphisme.

M est dite variété symplectique exacte, si $\omega = d\theta$ pour $\theta \in \Omega^1(M)$ (i.e ω est une 2-forme exacte).

Remarque 2.4.2. *Par le théorème Borel on sait que pour chaque champs de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ et en chaque point $x \in M$ il existe une fonction F_X, C^∞ dans un voisinage de x et telle que $\mathcal{P}^\#((dF_X^x)_x) = X_x$.*

Proposition 2.4.3. *Une structure de Poisson non dégénérée $\{,\}$ sur une variété différentiable M induit une structure symplectique ω telle que :*

$$\omega(X, Y) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^{\#^{-1}}(X), \mathcal{P}^{\#^{-1}}(Y)) \tag{2.20}$$

où $\mathcal{P}$ est le tenseur de Poisson. De plus :

$$i(X_F)\omega = dF \quad \forall F \in C^\infty \tag{2.21}$$

Démonstration. En utilisant la remarque 2.4.2 il est facile de voir que la non dégénérescence de ω découle directement de la non dégénérescence de $\mathcal{P}$.

Pour voir que ω est fermée, on a que :

$$\begin{aligned}
d\omega(X,Y,Z)_x &= X(\omega(Y,Z))_x - Y(\omega(X,Z))_x + Z(\omega(X,Y))_x \\
&- \omega([X,Y],Z)_x + \omega([X,Z],Y)_x - \omega([Y,Z],X)_x \\
&= X(\{F_Y,F_Z\})_x - Y(\{F_X,F_Z\})_x + Z(\{F_X,F_Y\})_x \\
&+ \{\{F_X,F_Y\},F_Z\}_x - \{\{F_X,F_Z\},F_X\}_x + \{\{F_Y,F_Z\},F_X\}_x \\
&= \{F_X,\{F_Y,F_Z\}\}_x - \{F_Y,\{F_X,F_Z\}\}_x + \{F_Z,\{F_X,F_Y\}\}_x \\
&+ \{\{F_X,F_Y\},F_Z\}_x - \{\{F_X,F_Z\},F_Y\}_x + \{\{F_Y,F_Z\},F_X\}_x = 0
\end{aligned}$$

$\forall x \in M$. Enfin, on a $dF(Y)_x = \{F, F_Y\}_x = \omega(X_F, Y)_x = (i(X_F)\omega)(Y)_x \ \forall x \in M$. Par conséquent, $i(X_F)\omega = dF \quad \forall F \in C^\infty$. □

Exemple 2.4.4. $(\mathbb{C}^n, \omega_{st})$ *avec :*

$$\omega_{st} = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\overline{z}_k \tag{2.22}$$

est une variété symplectique.

Exemple 2.4.5. *Soit M une variété différentiable et $(\pi : N = T^*M \longrightarrow M)$ son fibré cotangent. On définit sur N une 1-forme λ, dite forme de Liouville, de la manière suivante :*

$$\lambda_{(p,v)} = v \circ \pi_{(p,v),*}$$

Il est facile de voir que $(N, -d\lambda)$ est une variété symplectique exacte.

Définition 2.4.6. *Un symplectomorphisme ψ d'une variété symplectique (M,ω), est un difféomorphisme de M tel que :*

$$\psi^*\omega = \omega \tag{2.23}$$

On désignera par $Sp(M,\omega) \subset Diff(M)$ le sous-groupe des symplectomorphismes de M.

Proposition 2.4.7. *Un champ de vecteurs X d'une variété symplectique (M, ω) est dit symplectique si $i(X)\omega$ est fermé. Alors, l'ensemble des champs de vecteurs symplectiques $\mathfrak{X}(M, \omega)$ est un sous-algèbre de $\mathfrak{X}(M)$.*

Démonstration. Soit $X, Y \in \mathfrak{X}(M, \omega)$. Remarquons tout d'abord que $\mathcal{L}_X\omega = 0$. En effet, $\mathcal{L}_X\omega = (di(X) + i(X)d)\omega = di(X)\omega = 0$.
Maintenant, on veut prouver que $di([X, Y])\omega = 0$. On sait que, $i([X, Y])\omega = \mathcal{L}_Y i(X)\omega - i(X)\mathcal{L}_Y\omega = \mathcal{L}_Y i(X)\omega$. Or, $\mathcal{L}_Y i(X)\omega = di(Y)i(X)\omega$ (par la formule de Cartan). Par conséquent, $di([X, Y])\omega = dd\omega(X, Y) = 0$. □

Remarque 2.4.8. *Soit $X, Y \in \mathfrak{X}(M, \omega)$. Alors :*

(1)

(2) $di([X, Y])\omega = 0$

$d(i(X)\omega) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_X\omega = 0$.

Définition 2.4.9. *L'action d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, ω) est dite symplectique si :*

$$g^*\omega = \omega \quad \forall g \in G. \tag{2.24}$$

En d'autres termes, G est un sous-groupe de $Sp(M, \omega)$.

Proposition 2.4.10. *Si G agit symplectiquement sur (M, ω) alors $\underline{\mathfrak{g}} = \{\underline{\eta} | \quad \eta \in \mathfrak{g}\}$ est un sous-algèbre de $\mathfrak{X}(M, \omega)$.*

Démonstration. Soit $\eta \in \mathfrak{g}$ alors $di(\underline{\eta})\omega = \frac{d}{dt}|_{t=0}exp(t\eta)^*\omega = 0 \implies \underline{\eta} \in \mathfrak{X}(M, \omega)$. $\underline{\mathfrak{g}}$ est un sous-algèbre par (2) de la proposition 2.1.11. □

2.4.1 Structure presque complexe

Définition 2.4.11. *Une structure presque complexe sur une variété différentiable M est un tenseur $J \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$ tel que J_x est une structure complexe de T_xM.*

Définition 2.4.12. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Une structure presque complexe J sur M est dite compatible si $J_x \in \mathcal{J}(T_xM, \omega_x)$ $\forall x \in M$.*

Proposition 2.4.13. *Une variété symplectique (M, ω) possède toujours une structure presque complexe compatible J.*

Démonstration. En utilisant une métrique riemannienne g sur M et une carte locale $(U, x^1, \ldots, x^{2n})$ on définit J_y en chaque point $y \in U$ via la construction dans la preuve du lemme 1.3.6(sur T_yM). L'application $y \mapsto A_y$ ainsi définie est C^∞ car l'opération d'inversion d'une matrice est C^∞ de même pour l'opération de racine carré de matrice diagonalisable définie positive. □

2.4.2 Théorème de Darboux-Weinstein

Le résultat principal de cette section est le théorème de Darboux-Weinstein qui est en fait un cas particulier du théorème de Moser dont la preuve est assez technique.

Définition 2.4.14. *Deux variétés symplectiques (M_0, ω_0) et (M_1, ω_1) sont dite symplectomorphes s'il existe un difféomorphisme $\phi : M_0 \longrightarrow M_1$ tel que :*

$$\phi^*\omega_1 = \omega_0 \tag{2.25}$$

Théorème 2.4.15 (Théorème du voisinage tubulaire). *Soit $Q \subset M$ une sous variété compacte de M. Il existe un voisinage convexe $\tilde{\mathcal{U}}$ de Q dans $NQ = TM|_Q/TQ$, et un voisinage $\mathcal{U}$ de Q dans M, ainsi qu'un difféomorphisme $\psi : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{U}$ tel que $\psi|_Q = Id$.*

Remarque 2.4.16. *Remarquons qu'on utilise ici l'identification de Q à la section zéro de NQ via le plongement :*

$$
\begin{aligned}
s_0 : Q &\longrightarrow NQ \\
x &\mapsto (x, 0)
\end{aligned}
$$

Démonstration. Soit $exp : NQ \longrightarrow M$ l'application exponentielle associé à une métrique riemannienne quelconque sur M. Alors, pour $\epsilon > 0$ assez proche de 0, la restriction de exp au voisinage $\tilde{\mathcal{U}} = \{(p,q) \in NQ \quad | \quad p \in Q \text{ et } |q| < \varepsilon\}$ est un difféomorphisme. On définit $\mathcal{U} = exp(\tilde{\mathcal{U}})$ et $\psi = exp$. $\square$

Lemme 2.4.17. *Soit $Q \subset M$ une sous variété compacte de M, et σ une k-forme sur un voisinage tubulaire $\mathcal{U}$ de Q telle que $\sigma|_Q = 0$. Il existe une $(k-1)-$forme $\tau \in \Omega^{k-1}(\mathcal{U})$ avec $\sigma = d\tau$ et $\tau|_Q = 0$. Si de plus M est munie de l'action d'un groupe de Lie compacte G qui laisse invariante Q et telle que σ est G-invariante, alors τ est aussi G-invariante.*

Démonstration. Soit l'application :

$$
\begin{aligned}
\psi_t : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{U} \\
exp(p,v) &\mapsto exp(p,tv)
\end{aligned}
$$

pour $0 \leq t \leq 1$. Remarquons tout d'abord que $\psi_1 = Id$ et que ψ_t est un difféomorphisme pour $0 < t$ donc on peut définir le champ de vecteurs X_t pour $0 < t$ tel que :

$$\frac{d}{d}\psi_t = X_t \circ \psi_t.$$

a l'aide de X_t on définit l'homotopie suivante :

$$\begin{aligned} h_k :&\Omega^k(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k-1}(\mathcal{U}) \\ &\beta \mapsto \int_0^1 \psi_t^*(i(X_t)\beta) \quad dt \end{aligned}$$

Avant de poursuivre on fait remarquer l'égalité suivante pour une k-forme fermée $\beta \in \Omega^k(\mathcal{U})$:

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\beta = \psi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\beta) = d(\psi_t^*(i(X_t)\beta)).$$

Ainsi on a :
$(h_{k+1}\circ d + d\circ h_k)\beta = \int_0^1 \psi_t^*(i(X_t)d\beta) \quad dt + d\int_0^1 \psi_t^*(i(X_t)\beta) \quad dt = \int_0^1 \psi_t^*(i(X_t)d+ di(X_t))\beta \quad dt = \int_0^1 \psi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\beta) \quad dt = \psi_1^*\beta - \psi_0^*\beta$
$\Longrightarrow \quad (h_{k+1}\circ d + d\circ h_k)\sigma = \psi_1^*\sigma - \psi_0^*\sigma = \sigma$ car $\psi_1^*\sigma = \sigma$ et $\psi_0^*\sigma = 0$.
$\Longrightarrow \quad \sigma = d\tau$ avec $\tau = h_k(\sigma)$ il nous reste donc à démontrer que $\tau|_Q = 0$ ceci résulte du fait que $X_t|_Q = 0$ car $\psi_t|_Q = cst$.
Enfin, M possède une métrique riemannienne G-invariante(par le lemme 2.1.3), et par la remarque 2.1.4, exp est équivariant. En d'autres termes, ψ_t commute avec l'action de G ainsi que $h_k \implies$ la $(k-1)$-forme τ est aussi G-invariante. □

Définition 2.4.18. *Une isotopie différentiable d'une variété différentiable M est une application C^∞ :*

$$\begin{aligned} \psi : [0,1]\times M &\longrightarrow M \\ (t,x) &\mapsto \psi_t(x) \end{aligned} \tag{2.26}$$

avec $\psi_0 = Id$.

Théorème 2.4.19 (Théorème de Moser). *Soit M une variété différentiable compacte munie de deux formes symplectiques ω_0 et ω_1 telles que $[\omega_0] = [\omega_1]$. Si $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$ est une forme symplectique $\forall t \in [0,1]$, alors il existe une* *isotopie ψ_t de M telle que :*

$$\psi_t^* \omega_t = \omega_0 \quad \forall t \in [0,1]. \tag{2.27}$$

De plus, si M est munie de l'action d'un groupe de Lie compacte G telle que ω_0 et ω_1 sont G-invariantes alors ψ_t est équivariante.

Démonstration. Supposons qu'il existe une isotopie ψ_t qui satisfait l'équation (2.27). Alors :
Soit le champ de vecteurs X_t défini par :

$$X_t = \frac{d}{dt}(\psi_t^* \omega_t) \circ \psi_t^{-1} \quad \forall t \in [0,1]. \tag{2.28}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi_t^* \omega_t) = 0 = \psi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}) \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} = 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Inversement supposons qu'il existe un champs de vecteurs X_t sur M tel que l'équation (2.29) est satisfaite, alors par compacité de M il existe une isotopie ψ_t qui satisfait équation (2.28) et par conséquent satisfait l'équation (2.27). En d'autres termes, la problématique revient a résoudre l'équation (2.29).
On sait que :
$\frac{d\omega_t}{dt} = \omega_1 - \omega_0 = d\mu \implies \mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} = 0 = di(X_t)\omega_t - d\mu \implies$ par la non-dégénérescence de ω_t il existe un champ de vecteurs X_t qui satisfait l'équation (2.29) et par compacité de M le flot ψ_t de X_t est un difféomorphisme globale qui satisfait a l'équation (2.27).
Si de plus ω_0 et ω_1 sont G-invariantes alors ω_t et μ sont G-invariantes et ainsi X_t

est G-invariant d'ou l'équivariance de ψ_t. □

Théorème 2.4.20 (Version relative du théorème de Moser). *Soit $Q \subset M$ une sous variété compacte de M et ω_0 et ω_1 deux formes symplectiques sur M telles que $\omega_0|_Q = \omega_1|_Q$. Alors il existe deux voisinages $\mathcal{U}$ et $\tilde{\mathcal{U}}$ de Q et un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \tilde{\mathcal{U}}$ tel que :*

$$\phi^* \omega_1 = \omega_0. \tag{2.30}$$

avec $\phi|_Q = Id$. En plus si M est munie de l'action d'un groupe de Lie compacte qui laisse invariante Q et telle que ω_0 et ω_1 sont G-invariantes alors ϕ est un difféomorphisme équivariant.

Démonstration. On définit $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0) \implies \omega_t|_Q = \omega_0$ et par conséquent on peut trouver un voisinage tubulaire $\mathcal{U}$ de Q tel que ω_t est une forme symplectique sur $\mathcal{U}$. Par le lemme 2.4.17 il existe une 1-forme μ telle que $(\omega_1 - \omega_0) = d\mu \implies \omega_t = \omega_0 + td\mu$. Par le théorème de Moser il existe une isotopie $\psi_t : \mathcal{U} \longrightarrow M$ telle que :

$$\psi_t^* \omega_t = \omega_0. \tag{2.31}$$

Ainsi, il suffit de prendre $\phi = \psi_1$ et $\tilde{\mathcal{U}} = \phi(\mathcal{U})$. □

Remarque 2.4.21. *La version équivariante du théorème précédent est souvent appelé "Théorème de Darboux-Weinstein", voir théorème 20.1 dans (Guillemin et Sternberg, 1990).*

Théorème 2.4.22 (Théorème de Darboux). *Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors, $\forall x \in M$ il existe une carte de Darboux $(\mathcal{U}, \phi)$ autour de x telle que $\phi^* \omega_0 = \omega$. En d'autres termes :*

$$\omega|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i. \tag{2.32}$$

avec $\phi = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$.

Démonstration. Il suffit de prendre $Q = \{x\}$ et de choisir on une carte $(\mathcal{U}, \psi = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n))$ telle que $\omega_x = \sum_{i=1}^n dx_x^i \wedge dy_x^i$, on définit aussi $\omega_1|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$ et on applique le théorème 2.4.20 avec $\omega_0 = \omega$. □

2.5 Action hamiltonienne

Définition 2.5.1. *Une action symplectique de G sur (M, ω) est dite faiblement hamiltonienne s'il existe une application moment $\mu \in C^\infty(M) \otimes \mathfrak{g}^*$ tel que :*

$$i(\underline{\eta})\omega = d < \mu, \eta > \quad \forall \eta \in \mathfrak{g}. \tag{2.33}$$

L'action est dite hamiltonienne si μ est équivariante. En d'autres termes :

$$< \mu(gx), \eta > = < Ad^*(g)\mu(x), \eta > = < \mu(x), Ad(g^{-1})\eta > \quad \forall x \in M, \forall \eta \in \mathfrak{g}, \forall g \in G. \tag{2.34}$$

On utilisera la notation μ^η pour designer $< \mu, \eta >$.

Remarque 2.5.2. *Quand G est un groupe de Lie abélien l'équivariance de l'application moment μ veut dire tout simplement que μ est G-invariante.*

Proposition 2.5.3. *Soit μ l'application moment associée à l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, ω). Alors :*

(*a*) $ker(d\mu_p) = {\underline{\mathfrak{g}}_p}^{\perp_\omega}$.

(*b*) $im(d\mu_p) = \mathfrak{g}_p^\circ$.

Démonstration. $< d\mu_p(v), \eta > = \omega(\underline{\eta}_p, v)$ $\forall p \in M, \eta \in \mathfrak{g}$ et $v \in T_pM$.

(*a*) v$\in ker(d\mu_p)$ ssi $\omega(\underline{\eta}_p, v) = 0 \forall \eta \in \mathfrak{g} \implies v \in ker(d\mu_p) \Leftrightarrow v \in {\underline{\mathfrak{g}}_p}^{\perp_\omega}$.

(*b*) Si $\eta \in \mathfrak{g}_p$ alors $\underline{\eta}_p = 0 \implies < d\mu_p(v), \eta > = 0$ $\forall v \in T_pM \implies im(d\mu_p) \subset \mathfrak{g}_p^\circ$

(où $\mathfrak{g}_p^\circ$ est l'annulateur de $\mathfrak{g}_p$), or $dim(im(d\mu_p)) = dim(M) - dim(ker(d\mu_p)) = dim(M) - dim(\underline{\mathfrak{g}}_p^{\perp_\omega}) = dim(\mathfrak{g}_p^\circ) \implies im(d\mu_p) = \mathfrak{g}_p^\circ$. $\square$

Exemple 2.5.4. *Soit $\mathcal{O}^* \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite coadjointe. Alors la forme de KKS de l'exemple 2.3.2 est l'unique forme symplectique sur $\mathcal{O}^*$ telle que l'application d'inclusion $i : \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ est l'application moment de l'action hamiltonienne de G sur $(\mathcal{O}^*, KKS)$.*

Démonstration. Premièrement, par les propositions 2.3.7 et 2.4.3 la forme de KKS est fermée et non dégénérée sur $\mathcal{O}^*$.
Soit $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ l'application moment associée à l'action hamiltonienne de G sur M. On sait que $T_p\mathcal{O}^* = span\{\underline{\mathfrak{g}}_p\}$ $\forall p \in \mathcal{O}^*$.
$\omega(\underline{\eta}_p, \underline{\alpha}_p) = < d\mu_p(\underline{\alpha}_p), \eta > \forall \eta, \alpha \in \mathfrak{g}$ et $p \in \mathcal{O}^*$, or :
$< d\mu_p(\underline{\alpha}_p), \eta >= \frac{d}{dt}|_{t=0} < \mu(exp(t\alpha).p), \eta >= \frac{d}{dt}|_{t=0} < \mu(p), Ad(exp(-t\alpha))\eta >=< \mu(p), [\eta, \alpha] >$, par conséquent si i est l'application moment alors ω est la forme de KKS.
Inversement, Soit $\eta \in \mathfrak{g}$ et $\varepsilon_\eta \in \mathfrak{g}^{**}$ telle que $\varepsilon_\eta(\alpha) =< \alpha, \eta > \forall \alpha \in \mathfrak{g}^*$.
Par le lemme 2.3.3 $i(\underline{\eta})\omega = d\varepsilon_\eta \implies$ l'action de G sur (M, KKS) est hamiltonienne avec comme application moment i. $\square$

Définition 2.5.5. *Une G-variété hamiltonienne est une variété symplectique (M, ω) munie de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie G.*

Proposition 2.5.6. *Soit $(M, \omega = d\theta)$ une G-variété telle que l'action de G préserve la 1-forme θ. Alors l'action de G est hamiltonienne avec comme application moment :*

$$< \mu, \eta >= -i(\underline{\eta})\theta \quad \forall \xi \in \mathfrak{g} \tag{2.35}$$

Démonstration. $i(\underline{\eta})\omega = i(\underline{\eta})d\theta =$ -$di(\underline{\eta})\theta$(car $\mathcal{L}_{\underline{\eta}}\theta = 0$).
Il nous reste donc a vérifier l'équivariance de μ.

$< \mu(g), \eta >= -(i(\underline{\eta})\theta)(g) = -g^*i(\underline{\eta})\theta = -i(g^*\underline{\eta})g^*\theta = -i(\underline{Ad(g^{-1})\eta})\theta$
$=< \mu, Ad(g^{-1})\eta >.$ □

Un exemple important d'action hamiltonienne est celle de l'action de $U(n)$ sur $(\mathbb{C}^n, \omega_{st})$, la compréhension de cette action est fondamentale pour la preuve du théorème de convexité dans le chapitre suivant.

Exemple 2.5.7. *Soit* $(.,.)$ *la forme hermitienne naturelle sur* $\mathbb{C}^n$ *défini par :*

$$h(z, z') = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i z'_i. \tag{2.36}$$

Or

$$\omega_{st} = -Im((.,.)) = -d\theta = -d(\frac{i}{4}\sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j dz_j - z_j d\overline{z}_j). \tag{2.37}$$

Par un calcul assez simple on peut voir que θ *est invariant sous l'action de* $U(n)$ *; par la proposition 2.5.6, l'action de* $U(n)$ *sur* $(\mathbb{C}^n, \omega_{st})$ *est hamiltonienne.*
On sait que :

$$\underline{X}_z = Xz = \sum_{i,j}^{n} X_{ij} z_j \frac{\partial}{\partial z_i} - X_{ji}\overline{z}_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} \quad \forall X \in \mathfrak{u}(n), \forall z \in \mathbb{C}^n. \tag{2.38}$$

Par proposition 2.5.6 :

$$\mu^X(z) = -(i(\underline{X})\theta)(z) = \frac{i}{2}\sum_{jk}^{n} X_{jk}\overline{z}_j z_k. \tag{2.39}$$

On identifie canoniquement $\mathfrak{u}(n)$ *et* $\mathfrak{u}(n)^*$ *via le produit euclidien sur* $\mathfrak{u}(n)$ *défini par :*

$$(X, Y) = tr(X^*Y) = -tr(XY) \tag{2.40}$$

On en déduit que :

$$\mu(z)_{ij} = -\frac{i}{2} z_i \overline{z}_j. \tag{2.41}$$

En d'autres termes :

$$\mu(z) = -\frac{i}{2} z z^*. \tag{2.42}$$

Proposition 2.5.8. *Soit (M, ω) une G-variété hamiltonienne et μ l'application moment correspondante et $\phi : H \longrightarrow G$ est un morphisme de groupes de Lie. Alors, $(\phi_{e,*})^* \circ \mu$ est l'application moment de l'action hamiltonienne de H sur M.*

Par la proposition 2.4.3 on associe à ω une structure de Poisson $\{,\}$ sur $C^\infty(M)$ définie par :

$$\{H_\alpha, H_\beta\} = \omega(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \omega(\omega^{\flat^{-1}}(dH_\alpha), \omega^{\flat^{-1}}(dH_\beta)) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g} \tag{2.43}$$

Ainsi, $\underline{\alpha}$ est par définition le champ de vecteurs hamiltonien de $\mu^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathfrak{g}$.

Proposition 2.5.9. *Pour une action hamiltonienne de G sur (M, ω), l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \mu^* : (\mathfrak{g}, [,]) &\longrightarrow (C^\infty(M), \{,\}) \\ \eta &\mapsto \mu^\eta \end{aligned} \tag{2.44}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie.

Démonstration. $\{\mu^\alpha, \mu^\beta\}(x) = \underline{\beta}_x(\mu^\alpha) = \frac{d}{dt}|_{t=0} < \mu(exp(t\beta).x), \alpha >$
$= \frac{d}{dt}|_{t=0} < \mu(x), Ad(exp(-t\beta))\alpha > = < \mu(x), -[\beta, \alpha] > = \mu^{[\alpha,\beta]}(x).$ □

Remarque 2.5.10. *Dans le cas d'un groupe connexe, la proposition précédente est en fait équivalente à l'équivariance de l'application moment μ.*

2.5.1 Points fixes de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie compacte

Proposition 2.5.11. *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique et μ l'application moment de l'action hamiltonienne d'une groupe de Lie compacte G sur M. Soit $x \in M$ un point fixe de cette action. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x et un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans T_xM et un difféomorphisme équivariant $\phi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ tels que :*

(1) *L'action de G induite sur (T_xM, ω_x) est hamiltonienne et correspond à celle d'un sous-groupe $G \subset U(n)$ sur $(\mathbb{C}^n, \omega_{st})$.*

(2) $\phi * \omega = \omega_{st}$.

(3)

$$\begin{aligned} \mu : &\mathcal{U} \longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ &y \mapsto \mu(x) + i^*(-\frac{i}{2}zz^*) \end{aligned} \tag{2.45}$$

avec $z = \phi^{-1}(y)$, et $i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{u}(n)$ l'injection canonique.

Démonstration. Soit exp_x l'application exponentielle d'une métrique riemannienne G-invariante dont l'existence dans un voisinage de $0 \in T_xM$ découle de l'existence de solution maximal d'une EDO. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x et un voisinage $\mathcal{V}$ de $0 \in T_xM$ tels que $exp_x : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ est un difféomorphisme équivariant.
Soit $\omega' = exp_x{}^*\omega$ et ω_0 la forme symplectique constante qui coïncide avec ω' en 0. Par le théorème 2.4.20, il existe un difféomorphisme équivariant $\psi : \mathcal{V} \longrightarrow T_xM$ tel que $\psi^*\omega' = \omega_0$. Il suffit donc de choisir une structure presque complexe G-invariant $J_0 \in \mathcal{J}(\omega_0)$, pour que l'action de G sur $(\mathcal{V}, J_0, \omega_0)$ correspond à celle d'un sous-groupe $G \subset U(n)$ sur $(\mathbb{C}^n, \omega_{st})$, qui est une action hamiltonienne (par l'exemple 2.5.7). $\square$

Définition 2.5.12. *Soit M une G-variété et $H \subset G$ un sous-groupe de G. Alors on désigne par $M_H = \{x \in M | \quad hx = x \quad \forall h \in H\}$ l'ensemble des points fixes de* *l'action de H sur M.*

Corollaire 2.5.13. *Soit $H \subset G$ un sous-groupe de G alors M_H est une sous-variété symplectique de M. De plus, $M_H = M_{\overline{H}}$.*

Démonstration. Soit $x \in M_H$. Par la proposition 2.5.11, les élément de M_H dans un voisinage de x correspondent aux éléments fixes par l'action linéaire complexe de H sur $\mathbb{C}^n$, qui est un sous espace vectoriel complexe, donc symplectique.
Le fait que $M_H = M_{\overline{H}}$ découle de la continuité de l'action. □

2.5.2 Propriétés de l'application moment

Proposition 2.5.14. *L'application moment $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ est une application de Poisson, où $\mathfrak{g}^*$ est muni de la structure de Poisson de KKS décrite dans l'exemple 2.3.2.*

Démonstration. On veut prouver l'identité suivante :

$$\mu^*\{f, g\} = \{\mu^* f, \mu^* g\} \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

Remarquons d'abord que df_μ, $dg_\mu \in \mathfrak{g}$.
Par la proposition 2.5.9 $< \mu, [df_\mu, dg_\mu] >= \{< \mu, df_\mu >, < \mu, dg_\mu >\}$.
De plus $d(\mu^* f) = df_\mu \circ d\mu =< d\mu, df_\mu >= d < \mu, df_\mu >$, or le crochet de Poisson dépend uniquement des dérivées $\Longrightarrow$ $\mu^*\{f, g\} = \{\mu^* f, \mu^* g\}$. □

2.6 Existence et unicité de l'application moment

On a vue qu'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, ω) est en particulier une action symplectique. On peut alors se poser les questions suivantes :

(1) Quand est-ce qu'une action symplectique est hamiltonienne ?

(2) Jusqu'à quel point l'application moment d'une action hamiltonienne est unique ?

Pour répondre à ces deux questions on va nous restreindre au cas d'un groupe de Lie connexe.

Lemme 2.6.1. *Soit l'action symplectique d'un groupe de Lie connexe G sur une variété compacte (M, ω) telle que $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Alors l'action de G est hamiltonienne. De plus, si G est abélien l'application moment est définit a une constante près.*

Démonstration. Soit $\eta \in \mathfrak{g}$ alors $i(\underline{\eta})\omega$ est fermée or $H^1(M, \mathbb{R}) = 0 \implies i(\underline{\eta})\omega = d\mu^\eta$ où μ^η est définit à une constante $c(\eta)$ près. Remarquons tout d'abord que :

(*a*) $c \in \mathfrak{g}^*$.

(*b*) $c \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\circ$ l'annulateur de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, chose qu'on peut déduire de l'équation suivante :

$$\mu_{[\alpha,\beta]} + c([\alpha, \beta]) = \{\mu^\alpha + c(\alpha), \mu^\beta + c(\beta)\} = \{\mu^\alpha, \mu^\beta\} = \mu_{[\alpha,\beta]}.$$

Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est abélien n'importe quelle constante c fera l'affaire, sinon on peut choisir l'application c en exigeant que $\int_M \mu^\eta \omega^n = 0$.

En effet soit $X, Y \in \mathfrak{g}$ alors :

$\int_M \{\mu^X, \mu^Y\}\omega^n = c([X, Y]) \int_M \omega^n$.

Or

$\{\mu^X, \mu^Y\}\omega^n = \mathcal{L}_{\underline{Y}}(\mu^X)\omega^n = d(i(\underline{Y})(\mu^X\omega^n)) \implies c([X, Y]) = 0.$

L'équivariance de μ résulte de la remarque 2.5.10. □

On peut aussi déduire des conditions sur G via le théorème suivant :

Théorème 2.6.2. *Soit (M, ω) une variété symplectique munie de l'action symplectique d'un groupe de Lie connexe G. Alors, si $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0 = H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ l'action est hamiltonienne et l'application moment correspondante est unique.*

Avant de prouver le théorème précédent, on va introduire un certains nombres de résultats sur la cohomologie d'un groupe de Lie compacte et connexe.

2.6.1 Cohomologie d'algèbre de Lie

Dans cette section, G désigne un groupe de Lie compacte et connexe, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Définition 2.6.3. *Une k-forme $\alpha \in \Omega^k(G)$ est dite invariante à gauche, si :*

$$L_g{}^*\alpha = \alpha \quad \forall g \in G. \tag{2.46}$$

Lemme 2.6.4. *L'espace des k-formes invariantes à gauche sur G est isomorphe à $\wedge^k(\mathfrak{g}^*)$. De plus, la dérivée extérieure d'une k-forme invariante à gauche α est une $(k+1)$-forme invariante à gauche $\delta_k\alpha$, définie par :*

$$(\delta_k\alpha)(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k). \tag{2.47}$$

Remarque 2.6.5. *Le lemme précédent nous dit simplement que $(C_k := \wedge^k(\mathfrak{g}^*), \delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un complexe de cochaine. On définit la cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, par :*

$$H^k(\mathfrak{g}) = \frac{Ker(\delta_k : C_k \longrightarrow C_{k+1})}{Im(\delta_{k-1} : C_{k-1} \longrightarrow C_k)} \tag{2.48}$$

En particulier, $H^k(\mathfrak{g}) = H^k{}_{deRham}(G, \mathbb{R})$.

2.6.2 Preuve du théorème 2.6.2

Lemme 2.6.6. *Soit (M, ω) une variété symplectique, et $X, Y \in \mathfrak{X}(M, \omega)$ deux champs de vecteurs symplectiques. Alors, $[X, Y]$ est le champs de vecteurs hamiltonien de $-\omega(X, Y)$.*

Démonstration. $\mathcal{L}_Y i(X)\omega = i([X,Y])\omega + i(X)\mathcal{L}_Y\omega = i([X,Y])\omega$.

Or $\mathcal{L}_Y i(X)\omega = (di(Y)+i(Y)d)(i(X)\omega) = d\omega(X,Y) \implies i([X,Y])\omega = d\omega(X,Y)$.

□

Démonstration. Remarquons tout d'abord que : $H^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\circ$. En effet, $(\delta_1\alpha)(X_0,X_1) = -\alpha([X_0,X_1]) \quad \forall\alpha \in \mathfrak{g}^*$, donc $\alpha \in Ker(\delta_1) \Leftrightarrow \alpha \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\circ$.

Par conséquent, $H^1(\mathfrak{g}) = 0 \Leftrightarrow [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Maintenant en utilisant le fait que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ et que $\underline{[X,Y]} = -[\underline{X},\underline{Y}]$, on définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mu^* : \mathfrak{g} &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\mapsto \mu^X \end{aligned}$$

où μ^X est le hamiltonien de $\underline{X}$. L'application μ^* n'est probablement pas un morphisme d'algèbres, mais nous permet de définir la 2-forme suivante :

$$c(X,Y) = \mu^{[X,Y]} - \{\mu^X,\mu^Y\}.$$

Par l'identité de Jacobi, $\delta_2 c = 0 \implies \exists b \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\delta_1 b = c$ (car $H^2(\mathfrak{g}) = 0$). Par conséquent, l'application :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}^* : \mathfrak{g} &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\mapsto \mu^X + b(X) = \widetilde{\mu}^X \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres, et par la remarque 2.5.10, $\widetilde{\mu}$ l'application moment. Supposons maintenant que $\widetilde{\mu_1}$ et $\widetilde{\mu_2}$ sont deux applications moments. Alors $\forall X \in \mathfrak{g}$:

$$c(X) = \widetilde{\mu_1}^X - \widetilde{\mu_2}^X.$$

est une fonction localement constante sur M. Il est claire que $c \in \mathfrak{g}^*$, et puisque $\widetilde{\mu_1}$ et $\widetilde{\mu_2}$ sont des morphismes d'algèbres, $c([X,Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$. Or $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\circ = \{0\} \implies c = 0$. $\square$

CHAPITRE III

THÉORÈME DE CONVEXITÉ

Le théorème de convexité est un théorème très important de la géométrie symplectique. Prouvé simultanément par (Atiyah, 1982) et (Guillemin et Sternberg, 1982) ; il a pris encore plus d'importance grâce aux travaux de (Delzant, 1988) sur les variétés toriques. Les chapitres 1 et 2 de (Guillemin, 1994) sont une bonne référence pour la matière de ce chapitre.

3.1 Réduction symplectique

La réduction symplectique est une technique très utile pour la construction de variétés symplectiques à partir d'une variété munie d'une 2-forme dégénérée dans la direction d'une distribution donnée.

Définition 3.1.1. *(M, ω, G, μ) est dite G-variété hamiltonienne si M est une G-variété telle que μ est l'application moment de l'action hamiltonienne de G.*

Théorème 3.1.2 (Marsden-Weinstein-Meyer). *Soit (M, ω, G, μ) une G-variété hamiltonienne et supposons que 0 est une valeur régulière de μ, et que G agit librement sur $\mu^{-1}(0)$. Alors, il existe une unique forme symplectique $\tilde{\omega}$ sur $M//G(0) := \mu^{-1}(0)/G$, telle que $\pi^*\tilde{\omega} = \omega$ où π est le fibré principal $\pi : \mu^{-1}(0) \longrightarrow M//G(0)$.*

Remarque 3.1.3. *La codimension de $\mu^{-1}(0)$ est égale à $dim(G)$ et par conséquent $dim(M//G(0)) = dim(M) - 2dim(G)$.*

Pour prouver le théorème 3.1.2 on va utiliser le lemme suivant :

3.1.1 G-fibré principal

Définition 3.1.4. *Un fibré principal sur une variété différentiable M avec groupe structurelle G, est une variété différentiable P, telle que :*

(a) *G agit librement et à droite sur P.*

(b) *$M = P/G$ et l'application $\pi : P \longrightarrow P/G$ est une submersion.*

(c) *P est localement triviale. En d'autres termes, $\forall x \in M$ il existe un voisinage U de x, et un difféomorphisme :*

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G \tag{3.1}$$

$$u \mapsto (\pi(u), \phi(u)) \tag{3.2}$$

où $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ est une application équivariante. Un G-fibré principal est un fibré principal avec groupe structurelle G.

Définition 3.1.5. *Soit $P(M, G)$ la G-fibré principal sur M. Une connexion principale Γ sur P, est une distribution C^∞ $u \mapsto Q_u$, telle que :*

(a) *$T_uP = \underline{\mathfrak{g}}_u \bigoplus Q_u$, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G.*

(b) *$Q_{ua} = R_{a*}Q_u$ $\forall u \in P, \forall a \in G$.*

$\underline{\mathfrak{g}}_u$ est dit sous-espace vertical de T_uP, et Q_u sous-espace horizontal de T_uP.
On associe à Γ une 1-forme ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$, définie par :

$$\omega(Z) = X. \tag{3.3}$$

où $\underline{X}_u$ est la composante verticale de $Z \in T_uP$.

Définition 3.1.6. *Soit $P(M, G)$ le G-fibré principal sur M. Une k-forme $\alpha \in \Omega^k(P)$ est dite :*

(a) *Horizontale : si :*

$$i(\underline{\eta})\alpha = 0 \quad \forall \eta \in \mathfrak{g}. \tag{3.4}$$

(b) *G-invariante : si*

$$\mathcal{L}_{\underline{\eta}}\alpha = 0 \quad \forall \eta \in \mathfrak{g}. \tag{3.5}$$

(c) *Basique : si elle est à la fois horizontale et G-invariante.*

Lemme 3.1.7. *Soit $\pi : P \longrightarrow B$ un G-fibré principal et $\alpha \in \Omega^k(P)$ une k-forme basique. Alors, il existe une unique k-forme $\tilde{\alpha} \in \Omega^k(B)$ telle que $\pi^*\tilde{\alpha} = \alpha$ avec $\tilde{\alpha}$ est fermée ssi α est fermée. De plus, $\tilde{\alpha}$ est non dégénérée ssi $ker(\alpha) = ker(\pi_*)$.*

Démonstration. Soit $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m)$ un système de coordonnées sur P telle que $\pi(x, y) = x$.
α est horizontale $\Longrightarrow$ $\alpha = \sum_{I_j} f_{I_j} dx^{I_j}$.
α est G-invariante $\Longrightarrow$ les f_{I_j} ne dépendent pas de y.
Par conséquent, en utilisant les remarques précédentes et le fait que $(x^1, \ldots, x^n)$ est un système de coordonnées sur B, on peut définir $\tilde{\alpha} = \sum_{I_j} f_{I_j} dx^{I_j}$.
Il est claire que $\tilde{\alpha}$ est fermée ssi α est fermée. Il reste donc à prouver la dernière condition.
$\tilde{\alpha}$ est non dégénérée ssi les f_{I_j} ne s'annulent jamais$\Leftrightarrow$ $ker(\alpha) = ker(\pi_*)$. □

Démonstration : Marsden-Weinstein-Meyer. Soit $S = \mu^{-1}(0)$. Alors, par équivariance de μ, $\mathcal{O}_x \subset S \ \forall x \in S$. On sait aussi que $T_xS = ker(d_x\mu) = T_x\mathcal{O}_x{}^{\perp_\omega} \Longrightarrow T_xS^{\perp_\omega} \subset T_xS \Longrightarrow S$ est une sous variété coisotrope ; de plus, $Ker(\omega|_S) = \underline{\mathfrak{g}}$. Ainsi on peut appliquer le lemme précédent pour $\alpha = \omega|_S \Longrightarrow$ il existe une unique forme symplectique $\tilde{\omega}$ sur $M//G(0)$ telle que $\pi^*\tilde{\omega} = \omega|_S$. □

Remarque 3.1.8. *On sait par le lemme 2.6.1 que l'application moment μ est définie, à une constante prés, $\lambda \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\circ$. Par conséquent, on peut généraliser le* *théorème 3.1.2 pour* $\mu^{-1}(\lambda)/G$ *avec* $\lambda \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\circ$ *en utilisant l'application moment* $\tilde{\mu} = \mu - \lambda$.

Exemple 3.1.9. *Soit l'action diagonale de* S^1 *sur* $(\mathbb{C}^n, \omega_{st})$ *définie par :*

$$S^1 \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(z, (z^1, \ldots, z^n)) \mapsto (zz^1, \ldots, zz^n)$$

En utilisant le fait que $\omega_{st} = \sum_{i=1}^n r_i dr_i \wedge d\theta_i$ *en coordonnées polaires, on peut réécrire l'action de* S^1 *de la manière suivante :*

$$S^1 \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(\theta, ((r_1, \theta_1), \ldots, (r_n, \theta_n))) \mapsto ((r_1, \theta_1 + \theta), \ldots, (r_n, \theta_n + \theta))$$

Par conséquent, $\underline{\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta_i} \implies i(\underline{\theta})\omega_{st} = -\sum_{i=1}^n r_i dr_i = d\mu^\theta$
$\implies \mu(z) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n |z_i|^2 + cst$. *Si on choisit* $cst = \frac{1}{2}$ *alors* $\mu^{-1}(0) = S^{2n-1}$ *et* $\mathbb{C}^n//S^1 = \mathbb{C}P^{n-1}$ *et la forme* $\tilde{\omega}$ *sur* $\mathbb{C}^n//S^1$ *est par construction la forme de Fubini-Study.*

Théorème 3.1.10. *Soit* (M, ω) *une variété symplectique et* μ *et* Ψ *les applications moments de l'action hamiltonienne des groupes de Lie* G *et* H*, respectivement. Supposons que l'action de* H *commute avec celle de* G*. Alors l'action de* H *descend en action hamiltonienne sur* $(M//G(0), \tilde{\omega})$ *avec application moment* Ψ_{red} *qui vérifie :*

$$\Psi_{red} \circ \pi = \Psi \circ i. \tag{3.6}$$

et π et i désignent les applications :

$$\pi : \mu^{-1}(0) \longrightarrow M//G(0)$$
$$i : \mu^{-1}(0) \longrightarrow M$$

Démonstration. On commence par montrer que Ψ est constante sur les G-orbites de M.
Soit $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{h}$. Alors $\mathcal{L}_{\underline{X}}\Psi^Y = \mathcal{L}_{\underline{X}} i(\underline{Y})\omega = i([\underline{X}, \underline{Y}])\omega = 0$. Pour la dernière identité nous avons utilisé la relation $[\underline{X}, \underline{Y}] = 0$ qui résulte du fait que les actions de H et de G commutent. Par conséquent il existe une application C^∞, Ψ_{red} telle que $\Psi_{red} \circ \pi = \Psi \circ i$. De plus on peut définir une action de H sur $M//G(0)$ par :

$$h\pi(x) = \pi(hx) \quad \forall x \in \mu^{-1}(0), \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Notons que $\underline{h}^{M//G(0)} = \pi_* \underline{h}^{\mu^{-1}(0)}$ avec $i_* \underline{h}^{\mu^{-1}(0)} = \underline{h}$. Pour voir que l'action est hamiltonienne avec application moment Ψ_{red}, on calcule :
$\pi^* i(\underline{h}^{M//G(0)})\tilde{\omega} = i(\underline{h}^{\mu^{-1}(0)})(\pi^*\omega) = i(\underline{h}^{\mu^{-1}(0)})(i^*\omega) = i^*(i(\underline{h})\omega) = d(\Psi^h \circ i) = \pi * d\Psi^h_{red} \implies i(\underline{h}^{M//G(0)})\tilde{\omega} = d\Psi^h_{red}$.
L'équivariance de Ψ^h_{red} découle de l'équivariance des applications π, i et Ψ et de la relation 3.6. □

3.1.2 Réduction par rapport à une orbite coadjointe

Définition 3.1.11. *Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite coadjointe. On désigne par $\mathcal{O}^-$ la variété symplectique $(\mathcal{O}, -KKS)$.*

Lemme 3.1.12. *Soit (M, ω, G, μ) une G-variété hamiltonienne et $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite coadjointe. Alors, l'application moment de l'action diagonale de G sur $M \times$*

$\mathcal{O}^-$ est :

$$\tilde{\mu} : M \times \mathcal{O}^- \longrightarrow \mathfrak{g}^* \qquad (3.7)$$
$$(x, \varepsilon) \mapsto \mu(x) - \varepsilon$$

Proposition 3.1.13. *ε est une valeur régulière de μ ssi 0 est une valeur régulière de $\tilde{\mu}$. De plus, l'action de G_ε sur $\mu^{-1}(\varepsilon)$ est libre(respectivement localement libre) ssi l'action de G sur $\tilde{\mu}^{-1}(0)$ est libre(respectivement localement libre). De plus, $\mu^{-1}(\varepsilon)/G_\varepsilon$ et $(M \times \mathcal{O}_\varepsilon^-)//G(0)$ sont symplectomorphes (où $\mathcal{O}_\varepsilon$ est l'orbite coadjointe de ε).*

Démonstration. $\mu^{-1}(\mathcal{O}_\varepsilon) = G\mu^{-1}(\varepsilon) \implies$ l'action de G sur $\mu^{-1}(\mathcal{O}_\varepsilon)$ est libre(respectivement localement libre) ssi l'action de G_ε sur $\mu^{-1}(\varepsilon)$ est libre (respectivement localement libre).

L'application :

$$M \longrightarrow M \times \mathcal{O}_\varepsilon{}^-$$
$$m \mapsto (m, \mu(m))$$

préserve la forme symplectique, par conséquent sa restriction :

$$\mu^{-1}(\mathcal{O}_\varepsilon) \longrightarrow \tilde{\mu}^{-1}(0)$$
$$m \mapsto (m, \mu(m))$$

est une bijection équivariante qui préserve la forme symplectique $\implies$ $\tilde{\mu}^{-1}(0)/G$ et $\mu^{-1}(\mathcal{O}_\varepsilon)/G$ sont symplectomorphes $\implies$ $\mu^{-1}(\varepsilon)/G_\varepsilon$ et $(M \times \mathcal{O}_\varepsilon^-)//G(0)$ sont symplectomorphes. $\square$

3.2 Théorème de convexité

Définition 3.2.1. *Soit $S = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fini de points. L'enveloppe convexe de S, noté $conv(S)$, est l'intersection de tous les polyèdres convexes de $\mathbb{R}^n$ contenant S.*

Théorème 3.2.2 (Atiyah ; Guillemin-Sternberg)**.** *Soit (M, ω) une variété symplectique compacte et connexe, munie de l'action hamiltonienne d'un tore T^k. Notons par $\mu : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ l'application moment de cette action. Alors :*

- (A_n) *$\mu^{-1}(c)$ est vide ou connexe $\forall c \in \mathbb{R}^k$.*
- (B_n) *$\mu(M)$ est un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^k$. Plus encore, si $W_1, \ldots, W_s$ sont les composantes connexes des points fixes de T^k alors $\mu(M) = conv\{\mu(W_1), \ldots, \mu(W_s)\}$.*

Soit T un tore de dimension k. On définit les ensembles suivants :

$$\Lambda = \{\tau \in \mathfrak{t} | exp(2\pi i \tau) = 1\}.$$

$$\Lambda^* = \{\xi \in \mathfrak{t}^* | <\xi, \tau> \in \mathbb{Z} \quad \forall \tau \in \Lambda\}.$$

Par la proposition 2.5.11, on sait qu'autour de chaque point fixe de T ce dernier agit comme un sous groupe de $U(n)$. En d'autres termes, T agit par représentation unitaire. Étant donnée que T est abélien, il existe une décomposition de $\mathbb{C}^n$ telle que tous les éléments de T sont diagonale et telle que $w_1, \ldots, w_n \in \Lambda^*$ sont les poids de cette représentation. On a prouvé ainsi la proposition suivante :

Proposition 3.2.3. *Soit $x \in M^{2n}$ un point fixe de l'action hamiltonienne d'un tore T sur M^{2n}. Alors, dans un voisinage autour de x, l'action de T est l'action diagonale sur $\mathbb{C}^n$ définie par :*

$$exp(\tau).(z_1, \ldots, z_n) = (e^{2\pi i \langle w_1, \tau \rangle} z_1, \ldots, e^{2\pi i \langle w_n, \tau \rangle} z_n). \tag{3.8}$$

De plus, une application moment pour cette action est donnée par :

$$\mu(z) = \mu(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 w_i. \tag{3.9}$$

où $w_1, \ldots, w_n \in \Lambda^*$ *sont les poids de la représentation irréductible de* T. *De plus :*

$$\underline{\tau} = 2\pi \sum_{j=1}^{n} \langle dw_j, \tau\rangle (x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j}). \tag{3.10}$$

$\forall \tau \in \mathfrak{t}$.

Remarque 3.2.4. *La proposition précédente nous permet déjà de voir que le voisinage d'un point fixe est envoyé par l'application moment dans un cône. En effet, La preuve du théorème 3.2.2 due à Victor Guillemin et Shlomo Sternberg (voir (Guillemin et Sternberg, 1982)), montre que les poids* $w_1, \ldots, w_n$ *sont les segments du polytope convexe qui partent du sommet* $\mu(x)$.

Remarque 3.2.5. *Si l'action de* T^k *sur* M^{2n} *est effective alors* $\mathfrak{t}^* = span\{w_1, \ldots, w_n\}$. *En d'autres termes pour que l'action d'un tore* T *sur une variété* M *soit effective il faut que* $2dim(T) \leq dim(M)$.

Démonstration. Imaginons que $\mathfrak{t}^* \neq span\{w_1, \ldots, w_n\}$. Alors $\exists \tau \in \mathfrak{t} \neq 0$ tel que $< w_i, \tau >= 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \implies exp(\tau)$ agit trivialement au voisinage de x donc sur tout $M \Rightarrow\Leftarrow$. □

Nous ne prouverons pas le théorème 3.2.2, car nous établirons par les mêmes arguments que dans (Atiyah, 1982), une version plus générale dans le chapitre suivant.

Exemple 3.2.6. *Soit l'action d'un tore T^n sur $(\mathbb{C}^n, \omega_{st})$, définie par :*

$$
\begin{aligned}
&T^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \\
&((t_1, \dots, t_n), ((r_1, \theta_1), \dots, (r_n, \theta_n))) \mapsto ((r_1, \theta_1 + t_1), \dots, (r_n, \theta_n + t_n))
\end{aligned}
$$

$\underline{t_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \implies i(\underline{t_i})\omega_{st} = -r_i dr_i \implies \mu^{t_i}(z) = -\frac{1}{2}|z_1|^2 + c_i.$

Par conséquent, l'action de T^n sur $(\mathbb{C}^n, \omega_{st})$ est hamiltonienne avec application moment :

$$
\begin{aligned}
\mu : &M \longrightarrow \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^n \\
&(z_1, \dots, z_n) \mapsto -\frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2) + (c_1, \dots, c_n)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Si on revient à l'exemple 3.1.9, on remarque que l'action de S^1 et T^n sur $(\mathbb{C}^n, \omega_{st})$ commutent, ainsi par le théorème 3.1.10 l'action de T^n descend en une action hamiltonienne sur $(\mathbb{C}P^{n-1}, \omega_{FS})$. En utilisant la relation 3.6, l'image $\mu_{red}(\mathbb{C}P^{n-1})$ est le n-simplexe au point $(c_1, \dots, c_n) := \{(c_1, \dots, c_n) + (t_1, \dots, t_n) | \quad t_1, \dots, t_n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n t_i = 1\}$.

3.3 Variétés toriques et théorème de Delzant

Définition 3.3.1. *Une variété torique est une variété symplectique compact et connexe (M^{2n}, ω) de dimension $2n$, munie de l'action effective et hamiltonienne d'un tore T^n de dimension n.*

Le théorème de Delzant illustre parfaitement l'importance du théorème de convexité car il démontre que dans le cas d'une variété torique le polytope convexe de l'application moment permet de construire un espace classifiant pour cette classe de variétés.

Définition 3.3.2. *Un polytope convexe $P \subset (\mathbb{R}^n)^*$ est dit polytope de Delzant,* *si :*

(a) *n arêtes s'intersectent en chaque sommet de P.*

(b) *Les arêtes qui partent d'un sommet p de P sont de la forme $\{p+tw_i|t \geq 0\}$ avec $w_i \in (\mathbb{Z}^n)^*$.*

(c) *Les vecteurs $w_1, \ldots, w_n$ forment une base de $(\mathbb{Z}^n)^*$.*

Théorème 3.3.3 (Delzant). *Le polytope de l'application moment d'une variété torique est un polytope de Delzant. De plus, chaque polytope de Delzant est le polytope de l'application moment d'une variété torique. Inversement, deux variétés toriques qui possèdent le même polytope de Delzant(à translation près) sont symplectomorphes.*

La première assertion du théorème 3.3.3 découle du fait que $\{w_1, \ldots, w_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}^{n*}$ (par remarque 3.2.5) et que $w_i \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ $\forall 1 \leq i \leq n$ (par la proposition 3.2.3). Quand à la seconde assertion elle sera adressée dans la section 3.3.1.

3.3.1 Espace de Delzant

Soit $P \subset \mathbb{R}^{n*}$ un polytope de Delzant. Les d faces de P (qui sont de dimension $(n-1)$) sont définis par :

$$P_i = \{\xi \in (\mathbb{R}^n)^* | \langle \xi, u_i \rangle = \lambda_i\}. \tag{3.12}$$

avec $u_i \in \mathbb{Z}^n$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et tel que :

$$P = \cap_{i=1}^d \{\xi \in (\mathbb{R}^n)^* | \langle \xi, u_i \rangle \geq \lambda_i\}. \tag{3.13}$$

Soit $w_1, \ldots, w_n$ les segments qui partent d'un des sommet de P. Le vecteur u_s normal à la face $P_s = span\{w_1, \ldots, \widehat{w_s}, \ldots, w_n\}$ et qui pointe vers l'intérieur de

P, doit vérifier la relation suivante :

$$\langle w_j, u_s \rangle = \delta_s^j.$$

ou de manière équivalente :

$$W.u_s = e_s. \tag{3.14}$$

avec $W = (w_1^t, \ldots, w_n^t)^t$. Puisque W est un automorphisme de $\mathbb{Z}^n$, l'équation précédente possède une unique solution $u_s \in \mathbb{Z}^n$. On définit ainsi, un vecteur normal à chaque face de P qui pointe vers l'intérieur du polytope.

Maintenant on va entamer la construction d'une variété torique X_P, dont l'image par l'application moment sera P. Soit l'application :

$$\begin{aligned} \pi : & \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & e_i \longmapsto u_i \end{aligned}$$

qui se restreint à une application $\pi : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ et induit par conséquent une application $\pi : T^d \longrightarrow T^n$ avec $H = ker(\pi)$. On obtient ainsi les suites courtes exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{i} T^d \xrightarrow{\pi} T^n \longrightarrow 0.$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^d \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n \longrightarrow 0.$$

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^d)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{h}^* \longrightarrow 0.$$

Soit l'action standard du tore T^d sur $\mathbb{C}^d$ définie par :

$$exp(\tau)(z_1, \ldots, z_d) = (e^{e\pi i \tau_1} z_1, \ldots, e^{e\pi i \tau_d} z_d)$$

avec application moment définie par(voir équation (3.11)) :

$$\mu(z) = \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2) + (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

Par la proposition 2.5.8, l'action de H sur $\mathbb{C}^d$ est hamiltonienne avec application moment $i^* \circ \mu$.

Lemme 3.3.4. *$(i^* \circ \mu)^{-1}(0)$ est compacte avec une action libre de H.*

Démonstration. $(i^* \circ \mu)^{-1}(0) = \mu^{-1}(ker(i^*)) = \mu^{-1}(im(\pi^*) \cap im(\mu))$.
Puisque $\lambda_i \leq \langle \mu(z), e_i \rangle \quad 1 \leq i \leq d$.
$\Longrightarrow \; (im(\pi^*) \cap im(\mu)) \subset \{\pi^*(\xi) | \quad \lambda_i \leq \langle \xi, u_i \rangle \quad 1 \leq i \leq d\} = \pi^*(P)$.
$\Longrightarrow \; (i^* \circ \mu)^{-1}(0) = \mu^{-1}(\pi^*(P)) \Longrightarrow (i^* \circ \mu)^{-1}(0)$ est compacte car μ est propre.
Soit $z \in (i^* \circ \mu)^{-1}(0) \Longrightarrow \exists \xi \in P$ tel que $\pi^*(\xi) = \mu(z)$, on définit $I = \{i \quad | \langle \xi, u_i \rangle = \lambda_i\} \Longrightarrow \langle \mu(z), e_i \rangle = \lambda_i \quad \forall i \in I \Longrightarrow z_i = 0 \quad \forall i \in I$.
Soit $h = exp(X) \in H_z$ avec $X \in \mathfrak{h}$. Alors h stabilise z ssi $X_i \in \mathbb{Z}$ pour $i \notin I$. On veut prouver que $X \in \mathbb{Z}^d$.
Soit $\widetilde{X} = X - \sum_{i \notin I} X_i$, puisque $\pi(X) \in \mathbb{Z}^n$ (car $H = ker(\pi)$), on a $\pi(\widetilde{X}) = \sum_{i \in I} X_i u_i \in \mathbb{Z}^n$.
$\Longrightarrow \; X_i = \langle w_i, \pi(\widetilde{X}) \rangle \in \mathbb{Z}$ car $\langle w_i, u_j \rangle = \delta_i^j \Longrightarrow h = 1$. □

Définition 3.3.5. *La variété de dimension $2n$ compacte et connexe $\mathbb{C}^d//H(0) = (i^* \circ \mu)^{-1}(0)/H$ est l'espace de Delzant associée au polytope de Delzant P et sera désigné par X_P.*

Soit l'homomorphisme de groupe $j : T^n \longrightarrow T^d$ tel que $\pi \circ j = Id$, alors $j^* \circ \mu$ est l'application moment de l'action hamiltonienne de T^n sur $\mathbb{C}^d$. En appliquant le théorème 3.1.10 et étant donnée que l'action de T^n commute avec celle de H elle descend en une action hamiltonienne sur X_P avec comme application moment

μ_{X_P} définie par l'équation 3.6.

$$\Longrightarrow \mu_{X_P}(X_P) = j^* \circ \mu(\mu^{-1}(\pi^*(P))) = (\pi \circ j)^*(P) = P.$$

Voir (Delzant, 1988) pour la preuve du sens inverse du théorème 3.3.3 qui est assez technique.

CHAPITRE IV

THÉORÈME DE CONVEXITÉ POUR UNE VARIÉTÉ TRANSVERSE SYMPLECTIQUE

Dans ce dernier chapitre nous démontrerons une version plus générale du théorème de convexité, due à Hiroaki Ishida (Ishida, 2015).

4.1 Théorème de Frobenius

Définition 4.1.1. *Une distribution $\mathcal{D}$ de dimension d, sur une variété différentiable M, est un sous-fibré de TM de rang d. $\mathcal{D}$ est dite involutive si $[X,Y] \in \Gamma(\mathcal{D})$ $\forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$.*

Définition 4.1.2. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution sur M. Une sous-variété immergée N de M est dite variété intégrale de $\mathcal{D}$, si $T_xN = \mathcal{D}_x$ $\forall x \in N$. La distribution $\mathcal{D}$ est dite intégrable si chaque $x \in M$ est contenu dans une sous-variété intégrale de $\mathcal{D}$.*

Théorème 4.1.3 (Frobenius). *Soit $\mathcal{D}$ une distribution involutive de dimension d, sur une variété différentiable M. Alors, $\mathcal{D}$ est intégrable. De plus, $\forall x \in M$ il existe une unique variété intégrale connexe $\mathcal{L}(x)$ de $\mathcal{D}$ qui passe par x.*

4.2 Feuilletage C^∞

Définition 4.2.1. *Soit M une variété de dimension $m+n$. Un feuillage de codimension n est un atlas dit feuilleté $\mathcal{F} = \{U_\alpha, \psi_\alpha\}_\alpha$ tel que :*

$$\begin{aligned}\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : &\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)\\ &(x,y) \mapsto (f_{\alpha\beta_1}(x,y), \dots, f_{\alpha\beta_m}(x,y), g_{\alpha\beta_1}(y), \dots, g_{\alpha\beta_n}(y))\end{aligned}$$

$\forall (x,y) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. $(M,\mathcal{F})$ est dite variété feuilletée. Une carte feuilletée est une carte (U_α, ψ_α) d'un atlas feuilleté.

Définition 4.2.2. *Soit $(M,\mathcal{F})$ une variété feuilletée de dimension $m+n$ munie d'un feuilletage de codimension n. Soit aussi $(U, \psi = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n))$ une carte feuilletée. Alors, les coordonnées $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont dites coordonnées transversales. De plus, la feuille locale d'un point $b \in U$ est l'ensemble $\psi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{a\})$, où $y(b) = a$.*

Remarque 4.2.3. *Soit $P_b = span\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_b, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}|_b\}$. Alors, la définition de P_b ne dépend pas de la carte feuilletée $(U, \psi = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n))$. Par conséquent, l'application $x \mapsto P_x$ définie une distribution C^∞ involutive de rang m sur M.*

Définition 4.2.4. *Soit $(M,\mathcal{F})$ une variété feuilletée et $x \in M$. Alors, le sous-espace $P_x \subset T_xM$ (défini dans la remarque précédente) est l'espace tangent à $\mathcal{F}$ au point x. On désigne par $T\mathcal{F}$ le sous-fibré de TM générer par la distribution intégrable $x \mapsto P_x$.*

Définition 4.2.5. *Soit $(M,\mathcal{F})$ une variété feuilletée. La feuille $\mathcal{L}_{x_0}$ qui passe par un point $x_0 \in M$ est l'ensemble des points $x \in M$ tel qu'il existe une courbe $\gamma \in \Omega(x_0, x)$ tangente à $\mathcal{F}$. En effet, $\mathcal{L}_{x_0}$ et la variété intégrale de la distribution définie dans la remarque 4.2.3, qui passe par x_0.*

Remarque 4.2.6. *On peut toujours trouver une carte feuilletée* (U, ψ) *d'une variété feuilletée* $(M, \mathcal{F})$ *telle que* $\psi(U)$ *est un cube de* $\mathbb{R}^{dim(M)}$. *Ainsi, en utilisant la relation d'équivalence introduite par les feuilles locales,* $U/\mathcal{F}$ *est difféomorphe à* $\mathbb{R}^{dim(M)-dim(\mathcal{F})}$.

Définition 4.2.7. *Soit* $(M, \mathcal{F})$ *une* G*-variété feuilletée. On dit que* $\mathcal{F}$ *est* G*-invariante si l'action induit par* G *sur* TM *se restreint à une action sur* $T\mathcal{F}$.

4.2.1 Structure transversale

Définition 4.2.8. *Soit* $(M, \mathcal{F})$ *une variété feuilletée. On désigne par* $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ *l'ensemble des champs de vecteurs tangents à* $\mathcal{F}$. *Une* k*-forme* $\alpha \in \Omega^k(M)$ *est dite basique si :*

$$\mathcal{L}_X \alpha = 0.$$

et

$$i(X)\alpha = 0.$$

$\forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$.

4.3 Théorème de convexité

Définition 4.3.1. *Une structure symplectique transversale sur une variété feuilletée* $(M, \mathcal{F})$ *est une 2-forme fermée* $\omega \in \Omega^2(M)$ *telle que* $ker(\omega) = T\mathcal{F}$.

Lemme 4.3.2. *Soit* $(M, \mathcal{F})$ *une variété feuilletée de dimension* $2n + l$ *équipée d'une structure symplectique* ω *transversale par rapport à* $\mathcal{F}$, *et munie de l'action d'un tore* G. *De plus, supposons que* $\mathcal{F}$ *est un feuilletage* G*-invariant de dimension* l. *Alors* $\forall x \in M$ *il existe :*

- *Une carte feuilletée* $\psi_x : \widetilde{U_x} \longrightarrow \widetilde{V_x}$ *telle que* $\widetilde{U_x}/\mathcal{F}$ *est muni de l'action de* G_x.
- *Un voisinage* G_x*-invariant* V_x *de* $0 \in T_xM/T_x\mathcal{F}$.

— *Un difféomorphisme G_x équivariant $\phi_x : \widetilde{U_x}/\mathcal{F} \longrightarrow V_x$.*

— *Une base $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ de $(T_xM/T_x\mathcal{F})^*$ telle que :*
$\phi_x{}^{-1^*}\underline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$.

Démonstration. Soit $\psi_x : U \longrightarrow V$ une carte feuilletée autour de x telle que $U/\mathcal{F}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$, on suppose aussi que U est G_x-invariant.
Étant donné que ω est transversale par rapport à $\mathcal{F}$(i.e ω est basique), il existe une forme symplectique $\underline{\omega}$ sur $\pi(U)/\mathcal{F}$ avec $\pi^*\underline{\omega} = \omega$ où $\pi : U \longrightarrow U/\mathcal{F}$ est une submersion(voir lemme 3.1.7). Par la proposition 2.5.11 il existe un voisinage U_x de $\pi(x)$ et V_x de $0 \in T_xM/T_x\mathcal{F}$ G_x-invariants et un difféomorphisme G_x-équivariant $\phi : U_x \longrightarrow V_x$ telles que :
$\phi^{-1^*}\underline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ où $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ est un système de carte sur $(T_xM/T_x\mathcal{F})$.
Par la proposition 3.2.3 :

$$\underline{\eta}_v = \sum_{i=1}^{n} \langle d\alpha_i, v \rangle (x_i \frac{\partial}{dy_i} - y_i \frac{\partial}{dx_i})$$

$\forall v \in \mathfrak{g}_x$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Hom(G_x, S^1)$ sont les poids de la représentation unitaire de G_x sur $TxM/T_x\mathcal{F}$. Enfin, il suffit de prendre $\widetilde{U_x} = \pi^{-1}(U_x)$ et $\widetilde{V_x} = \psi_x(\widetilde{U_x})$. □

Définition 4.3.3. *Une fonction f sur une variété M est dite de Morse-Bott si l'ensemble des points critiques de f est une sous-variété W de M et que le hessien de f est non dégénéré dans le sens transverse à W.L'indexe d'une composante connexe $W_i \subset W$ est le nombre de valeurs propres négatives du hessien calculer en un point de W_i.*

Lemme 4.3.4. *Soit M une variété compacte et connexe, et $f \in C^\infty$ une fonction de Morse-Bott. Supposons que f et $-f$ ne possèdent pas de sous variété critique d'indexe égale à 1. Alors, $f^{-1}(c)$ est une sous variété connexe de M (ou vide) $\forall c \in \mathbb{R}$.*

Le lemme précédent est un résultat très important pour la preuve du théorème de convexité.

Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée et supposons qu'il existe $v \in \mathfrak{g}$ tel que $i(\underline{v})\omega = dh_v$ avec $h_v \in C^\infty(M)$. Un point $x \in M$ est un point critique de h_v ssi $\underline{v}_x \in T_x\mathcal{F}$. Par conséquent, on ne peut pas déduire que h_v est une fonction de Morse-Bott (on ne peut même pas déduire que les points critiques de h_v ont une structure de variété).

Définition 4.3.5. *On désigne par $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}$ le feuilletage correspondant à la distribution générée par $\underline{\mathfrak{g}}$.*

Lemme 4.3.6. *Soit M une variété muni de l'action d'un tore G et $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ un sous-algèbre de Lie qui agit librement sur M (voir 2.1.14). Soit ω une structure symplectique G-invariante et transversale par rapport à $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'}$. S'il existe une fonction $h_v \in C^\infty(M)$ telle que $i(\underline{v})\omega = dh_v$ pour $v \in \mathfrak{g}$, alors :*

— *h_v est une fonction de Morse-Bott.*

— *L'indice de chaque composante critique de h_v est pair.*

Démonstration. Soit $x \in M$ un point critique de h_v, alors $\underline{v}_x \in T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'}$ $\Longrightarrow$ $\exists v_x \in \mathfrak{g}_x$ et $v' \in \mathfrak{g}'$ tels que $v = v_x + v'$. Par conséquent $i(\underline{v})\omega = i(\underline{v_x})\omega$ car $i(\underline{v'})\omega = 0$. h_v est basique car $i(\underline{v})\omega$ est basique.

Soit $\psi_x : \widetilde{U_x} \longrightarrow \widetilde{V_x}, \phi_x$ et $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ comme dans le lemme 4.3.2. Puisque h_v est basique, il existe $\underline{h_v} \in C^\infty(\widetilde{U_x}/\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})$ telle que :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{U_x} \arrow[rr, "h_v"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R} \\
& \widetilde{U_x}/\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'} \arrow[ur, "\underline{h_v}"'] &
\end{tikzcd}$$

Par la définition de $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'}$ et de π, $\underline{v} \in \mathfrak{X}(\widetilde{U_x})$ est envoyé sur $\underline{v_x}^{(\widetilde{U_x}/\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})} \in \mathfrak{X}(\widetilde{U_x}/\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})$. De même par G_x-équivariance de ϕ_x, $\underline{v_x}^{(\widetilde{U_x}/\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})} \in \mathfrak{X}(\widetilde{U_x}/\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})$ est envoyé sur $\underline{v_x}^{(T_x\widetilde{U_x}/T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})} \in$

$\mathfrak{X}(T_x\widetilde{U_x}/T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})$.

Par conséquent :

$dh_v = i(\underline{v})\omega = i(\underline{v_x})\omega = \pi^*(i(\underline{v_x}^{(\widetilde{U_x}/\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})})\underline{\omega}) = \pi^* \circ \phi_x{}^*(i(\underline{v_x}^{(T_x\widetilde{U_x}/T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})})\phi_x{}^{-1*}\underline{\omega})$, où $\underline{\omega}$ est la forme symplectique du lemme 4.3.2.

D'autre part :

$dh_v = d(\pi^*\underline{h_v}) = \pi^* d(\underline{h_v}) = \pi^* \circ \phi_x^* d((\phi_x{}^{-1})^*\underline{h_v})$.

Puisque π^* est injective et ϕ_x est un difféomorphisme, on a $d((\phi_x{}^{-1})^*\underline{h_v}) = i(\underline{v_x}^{(T_x\widetilde{U_x}/T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})})\phi_x{}^{-1*}\underline{\omega}$.

Par le lemme 4.3.2 :

$\underline{v_x}^{(T_x\widetilde{U_x}/T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})} = 2\pi \sum_{i=1}^n \langle d\alpha_i, v_x\rangle (x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i})$.

Ainsi :

$$i(\underline{v_x}^{(T_x\widetilde{U_x}/T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'})})(\phi_x{}^{-1})^*\underline{\omega} = -2\pi \sum_{i=1}^n \langle d\alpha_i, v_x\rangle (x_i dx_i + y_i dy_i). \tag{4.1}$$

et par conséquent :

$$(\phi_x{}^{-1})^*\underline{h_v} = (\phi_x{}^{-1})^*\underline{h_v}(0) + \pi \sum_{i=1}^n \langle d\alpha_i, v_x\rangle (x_i{}^2 + y_i{}^2). \tag{4.2}$$

Il est clair(à partir des deux équations précédentes) que $(\phi_x{}^{-1})^*\underline{h_v}$ est une fonction de Morse-Bott dont l'indice des composantes critiques est deux fois le nombre des α_i tels que $0 < \langle d\alpha_i, v_x\rangle$. Puisque $\phi_x \circ \pi : \widetilde{U_x} \longrightarrow V_x$ est une submersion, h_v est aussi de Morse-Bott dont les composantes critiques sont de même indice que $(\phi_x{}^{-1})^*\underline{h_v}$. □

On arrive maintenant à un lemme important pour la preuve du théorème de convexité(voir (Atiyah, 1982)), qui permet de faire le lien entre le lemme précédent et le théorème de convexité.

Lemme 4.3.7 (Atiyah, 1982). *Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse-Bott où M est une variété compacte et connexe. Si f et $-f$ ne possèdent pas de sous-*

variétés critiques d'indice égale à 1. Alors $\forall c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(c)$ *est une sous-variété connexe de* M *ou vide. De plus,* f *possède un unique minimum local ainsi qu'un unique maximum local.*

Démonstration. voir lemme 5.51 dans (McDuff et Salamon, 1995). □

Lemme 4.3.8. *Soit* M *une variété connexe et compacte munie de l'action d'un tore* G, *et* $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ *un sous-algèbre de Lie qui agit librement sur* M. *Soit* ω *une structure symplectique* G*-invariante et transversale par rapport à* $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'}$. *Supposons qu'il existent* $h_{v_1}, \ldots, h_{v_k} \in C^\infty(M)$ *telles que* $dh_{v_i} = i(\underline{v_i})\omega$ *pour* $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{g}$. *Soit la fonction* $h = (h_{v_1}, \ldots, h_{v_k}) : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *et* c *une valeur régulière de celle ci. Alors,* $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}' + \mathbb{R}v_1 + \cdots + \mathbb{R}v_k$ *agit librement sur* $h^{-1}(c)$ *et* $\omega|_{h^{-1}(c)}$ *est une structure symplectique transversale par rapport à* $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}''}$.

Démonstration. Soit $x \in h^{-1}(c)$. Puisque c est une valeur régulière de h, $\{(i(\underline{v_i})\omega)_x\}_{1 \leq i \leq k}$ sont linéairement indépendants. En utilisant le fait que $\mathfrak{g}'$ agit librement sur M on déduit que pour $v'' \in \mathfrak{g}''$, $\underline{v''}_x = 0$ ssi $v'' = 0$. En d'autres termes, l'action de $\mathfrak{g}''$ est libre.
$T_x h^{-1}(c) = ker(dh_x)$. $X \in ker(dh_x)$ ssi $\omega(\underline{v_i}, X) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq k \implies ker(dh_x) = (T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}''})^\perp$ ce qui implique aussi que $ker(\omega|_{h^{-1}(c)})_x = T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}''}$. Par conséquent $\omega|_{h^{-1}(c)}$ est une structure symplectique transversale par rapport à $h^{-1}(c)$. □

Remarque 4.3.9. *Dans la preuve du lemme précédent, on utilise le fait que* $dh_v = i(\underline{v})\omega$ *est* G*-invariante car* G *est abélien, ce qui veut dire que* h_v *est* G*-invariante. En d'autres termes,* ${h_v}^{-1}(c)$ *est une sous-variété* G*-invariante et donc* $T\mathcal{F}_{\mathfrak{g}''}$ *est une sous fibré de* $T{h_v}^{-1}(c)$.

On arrive maintenant au théorème principal de ce chapitre

Théorème 4.3.10 (Ishida, 2015). *Soit M une variété compacte et connexe munie de l'action d'un tore G et $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ un sous-algèbre de Lie qui agit librement sur M. Soit ω une structure symplectique G-invariante et transversale par rapport à $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'}$. Supposons qu'il existe des fonctions $h_{v_1}, \ldots, h_{v_k} \in C^\infty(M)$ telles que $dh_{v_i} = i(\underline{v_i})\omega$ pour $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{g}$. Soit la fonction $h = (h_{v_1}, \ldots, h_{v_k}) : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Alors :*

- *(A_k) $h^{-1}(c)$ est connexe ou vide $\forall c \in \mathbb{R}$.*
- *(B_k) $h(M)$ est convexe.*
- *(C_k) Si $Z_1, \ldots, Z_n$ sont les composantes connexes des points critiques commun des $(h_i)_{1 \leq i \leq k}$ alors $h(M) = conv\{c_1, \ldots, c_n\}$ avec $c_i = h(Z_i)$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que (B_1) est vraie. Étant donné que M est connexe et compacte alors $h(M)$ est un intervalle fermé et connexe de $\mathbb{R}$. Pour prouver le théorème on va procéder comme suit :

(Étape 1) $(A_k) \implies (B_{k+1})$.

Soit $x, y \in h(M) \subset \mathbb{R}^{k+1}$ et $\pi : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ la projection sur le plan perpendiculaire à la droite (x, y), définit par $\pi(e_i) = \sum_{j=1}^{k+1} a_{ij} e_j$ et telle que $\pi(x) = \pi(y) = c$.

L'application $h' = \pi \circ h : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ respecte les conditions du théorème car $dh'_j = \sum_{i=1}^{k+1} a_{ij} dh_{v_i} = i(\underline{\sum_{i=1}^{k+1} a_{ij} v_i})\omega$. Par conséquent, $h'^{-1}(c)$ est connexe, et puisque $h(M) \cap \pi^{-1}(c) = h(h'^{-1}(c))$ alors $h(M) \cap \pi^{-1}(c)$ est connexe ce qui implique que $h(M)$ est convexe.

(Étape 2) (A_k) est vraie par induction.

(A_1) est vraie par les lemmes 4.3.4 et 4.3.6.

Soit $h_{v_1}, \ldots, h_{v_{k+1}} \in C^\infty(M)$ telles que $dh_{v_i} = i(\underline{v_i})\omega$ pour $v_1, \ldots, v_{k+1} \in \mathfrak{g}$. Si la fonction $h = (h_{v_1}, \ldots, h_{v_k})$ ne possède pas de valeurs régulières alors $(dh_{v_i})_{1 \leq i \leq k+1}$ sont linéairement dépendants et par conséquent (A_{k+1}) découle de l'assomption (A_k).

Si h possède des valeurs régulières, par le théorème de Sard, l'ensemble de ceux ci est dense dans $h(M)$. Donc, par continuité, on peut nous restreindre à une valeur régulière $c = (c_1, \dots, c_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Par l'hypothèse de récurrence $W = {h_{v_1}}^{-1}(c_1) \cap \dots {h_{v_k}}^{-1}(c_k)$ est une sous variété connexe. Soit le sous algèbre de Lie $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}' + \mathbb{R}v_1 + \dots + \mathbb{R}v_k$, par le lemme 4.3.8, $\omega|_W$ est une structure symplectique transversale par rapport à $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}''}$. Par (A_1), $h_{v_{k+1}}|_W^{-1}(c_{k+1})$ est connexe et par conséquent $h^{-1}(c) = W \cap h^{-1}_{v_{k+1}}(c_{k+1})$ est connexe.

(Étape 3) $(B_k) \implies (C_k)$.

Le fait que $h(Z_i)$ est un point c_i est évident. Il est clair aussi par (B_k) que $conv\{c_1, \dots, c_n\} \subset h(M)$. Il reste à démontrer que $h(M) \subset conv\{c_1, \dots, c_n\}$. Soit H la fermeture de $exp(\mathfrak{g}'')$ dans G, et $x \in M$ un point critique commun de $h_{v_1}, \dots, h_{v_k}$. On a $(\underline{v_i})_x \in T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'}$ car $(dh_{v_i})_x = 0 = (i(\underline{v_i})\omega)_x$ $\forall 1 \leq i \leq k$, par conséquent, il existe $v_{1,x}, \dots, v_{k,x} \in \mathfrak{h}_x$ et ${v_1}', \dots, {v_k}' \in \mathfrak{g}'$ tels que $v_i = v_{i,x} + {v_i}'$ pour $1 \leq i \leq k$.

Étant donné que $\mathfrak{g}'$ agit librement sur M, $\mathfrak{h}_x = span\{v_{1,x}, \dots, v_{k,x}\}$ et donc $\{exp(t_1 v_{1,x}) \dots exp(t_k v_{k,x}) | t_i \in \mathbb{R}\}$ est dense dans ${H_x}^{\circ}$. De même, $exp(\mathfrak{h}_x + \mathfrak{g}')$ est dense dans H. Inversement, soit $H' \subset H$ un sous tore dense dans H. Alors si $x \in M^{H'}$, on a $(\underline{h'})_x = 0$ $\forall h' \in \mathfrak{h}'$, or H' est dense dans $H \implies \exists h'_1, \dots h'_k \in \mathfrak{h}'$ et $v'_1, \dots, v'_k \in \mathfrak{g}'$ tels que $v_i = h'_i + v'_i$ $\forall 1 \leq i \leq k$

$\implies (\underline{v_i})_x \in T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'} \implies x$ est un point critique commun de $h_{v_1}, \dots, h_{v_k}$.

Soit $v_{\{a_1, \dots, a_k\}} = \sum_{i=1}^k a_i v_i + u'$, pour $a_i \in \mathbb{R}$ et $u' \in \mathfrak{g}'$ tels que $\{exp(tv_{\{a_1, \dots, a_k\}}) | t \in \mathbb{R}\}$ est dense dans H, et $x \in M$ un point critique de la fonction $h_{v_{\{a_1, \dots, a_k\}}} = \sum_{i=1}^k a_i h_{v_i}$. Alors, il existe $v' \in \mathfrak{g}'$ et $v_x \in \mathfrak{h}_x$ tels que $v_{\{a_1, \dots, a_k\}} = v_x + v'$ car $(\underline{v_{\{a_1, \dots, a_k\}}})_x \in T_x\mathcal{F}_{\mathfrak{g}'}((dh_{v_{\{a_1, \dots, a_k\}}})_x = 0 = (i(\underline{v_{\{a_1, \dots, a_k\}}})\omega)_x)$. Puisque $\{exp(tv_{\{a_1, \dots, a_k\}}) | t \in \mathbb{R}\}$ est dense dans H, $\{exp(tv_x) | t \in \mathbb{R}\}$ est dense dans ${H_x}^{\circ}$, et par conséquent $exp(\mathfrak{h}_x + \mathfrak{g}')$ est dense dans H. Il en résulte que x est un point critique commun de

$h_{v_1}, \ldots, h_{v_k}$. Ainsi, par le lemme 4.3.7, $h_{v_{\{a_1,\ldots,a_k\}}}$ atteint son minimum en un point critique commun de $h_{v_1}, \ldots, h_{v_k}$. Par conséquent la restriction de $\alpha_{\{a_1,\ldots,a_k\}} = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i{}^*$ à $h(M)$ atteint son minimum en un point c_j.

On a ainsi prouvé que :

$$h(M) \subset C_A = \cap_{(a_1,\ldots,a_k)\in A}\{y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k | < \alpha_{\{a_1,\ldots,a_k\}}, y >\geq y_{\{a_1,\ldots,a_k\}}\} \tag{4.3}$$

Où :

$y_{\{a_1,\ldots,a_k\}} = min(< \alpha_{\{a_1,\ldots,a_k\}}, c_j > |1 \leq j \leq n)$.

et

$A = \{(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k | \{exp(tv_{\{a_1,\ldots,a_k\}}) | t \in \mathbb{R}\}$ est dense dans $H\}$.

Puisque A est dense dans $\mathbb{R}^k$, l'ensemble C_A est en fait l'ensemble $conv\{c_1, \ldots, c_n\}$

$\Longrightarrow h(M) = conv\{c_1, \ldots, c_n\}$.

□

4.4 Exemples

Exemple 4.4.1. *Prenons la construction de Delzant dans la section 3.3.1 du chapitre 3. On sait que :*

(1) $M_{T^{d-n}} = (i^* \circ \mu)^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^d$ *est une sous variété compacte et connexe de dimension* $d + n$.

(2) *La restriction* $\omega_{st}|_{M_{T^{d-n}}}$ *est une structure symplectique transversale par rapport à* $\mathcal{F}_{\mathfrak{t}^{d-n}}$. *En effet, soit* $x \in M_{T^{d-n}}$, *alors* $T_x M_{T^{d-n}} = ker(d(i^* \circ \mu)_x) = (\underline{\mathfrak{t}^{(d-n)}}_x)^{\perp_\omega}$. *Par conséquent,* $ker(\omega_{st}|_{M_{T^{d-n}}}) = T_x M_{T^{d-n}} \cap \underline{\mathfrak{t}^{(d-n)}}_x = \underline{\mathfrak{t}^{(d-n)}}_x$ *(car* $M_{T^{d-n}}$ *est invariants sous l'action de* T^{d-n}*).*

(3) *Par le lemme 3.3.4, le sous tore* $T^{d-n} \subset T^d$ *agit librement sur* $M_{T^{d-n}} \Longrightarrow$ *l'action de* $\mathfrak{t}^{d-n}$ *sur* $M_{T^{d-n}}$ *est libre.*

Par (1) *et* (2), $(M_{T^{d-n}}, \omega_{st}|_{M_{T^{d-n}}})$ *est une variété transverse symplectique compacte et connexe. Soit* $v_1, \ldots, v_n \in \mathfrak{t}^n$ *les générateurs de l'action hamiltonienne du sous* *tore* $T^n \subset T^d$ *sur* $\mathbb{C}^d$, *avec* $i^*h_{v_1}, \ldots, i^*h_{v_n}$ *la restriction à* $M_{T^{d-n}}$ *des hamiltoniens de respectivement* $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}$.

Soit l'application $h = (i^*h_{v_1}, \ldots, i^*h_{v_n})$. *Il suffit de choisir* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{t}^n$ *dans l'énoncé du théorème précédent pour voir que* $h(M_{T^{d-n}}) \subset \mathbb{R}^n$ *est un polytope convexe. En fait,* $h(M_{T^{d-n}})$ *est le polytope de Delzant* P *de la construction dans la section 3.3.1 du chapitre 3.*

En effet, soit $\Psi = (h_{v_1}, \ldots, h_{v_n})$ *l'application moment de l'action hamiltonienne du sous tore* $T^n \subset T^d$ *sur* $\mathbb{C}^d$, *et* Ψ_{red} *celle de l'action hamiltonienne de* T^n *sur* $M_{T^{d-n}}/T^{d-n}$. *On sait que* $\Psi_{red}(M_{T^{d-n}}/T^{d-n}) = P$, *or par l'équation* (3.6) $\Psi_{red}(M_{T^{d-n}}/T^{d-n}) = (\Psi \circ i)(M_{T^{d-n}}) \implies h(M_{T^{d-n}}) = P$.

RÉFÉRENCES

Atiyah, M. F. (1982). Convexity and commuting hamiltonians. *Bulletin London Mathematical Society*, *14*, 1–15.

Audin, M. (204). *Torus Actions on Symplectic Manifolds*. Birkhäuser.

Bolsinov, A., Morales-Ruiz, J. J. et Zung, N. T. (2016). *Geometry and Dynamics of Integrable Systems*. Birkhäuser.

Cieliebak, K. (2001). Symplectic geometry and topology ii. Récupéré de `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kai/classes/257spr01/lecture_partB.ps`

Cieliebak, K. (2010). Symplectic geometry and topology i. Récupéré de `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kai/classes/257win01/lecture_partA.ps`

da Silva, A. C. (2006). Lectures on symplectic geometry. Récupéré de `https://people.math.ethz.ch/~acannas/Papers/lsg.pdf`

Delzant, T. (1988). Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, *116*, 315–339.

Elisabetta Barletta, Sorin Dragomir, K. L. D. (2007). *Foliations in Cauchy-Riemann Geometry*. American Mathematical Society.

Guillemin, V. (1994). *Moment Maps and Combinatorial invariants of Hamiltonian T^n-spaces*. Boston : Birkhauser.

Guillemin, V. et Sternberg, S. (1982). Convexity properties of the moment mapping. *Inventiones mathematicae*, *67*, 491–513.

Guillemin, V. et Sternberg, S. (1990). *Symplectic techniques in physics*. Cambridge : Cambridge University Press.

Ishida, H. (2015). Torus invariant transverse kähler foliations. arXiv :1505.06035v2.

Karshon, Y. (2002). Proper actions of lie groups. Récupéré de `http://www.utm.utoronto.ca/~karshony/HUJI/monograph/app-actions.pdf`

Kobayashi, S. et Nomizu, K. (1996). *Foundations of Differential Geometry, Vol. 1.* Wiley-Interscience.

Kostrikin, A. et Manin, Y. (1989). *Linear Algebra and Geometry.* CRC Press.

McDuff, D. et Salamon, D. (1995). *Introduction to Symplectic Topology.* Oxford : Oxford University Press.