

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MOUVEMENT BROWNIEN AVEC CHANGEMENTS DE RÉGIME ET  
APPLICATIONS

MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR  
SIMON FLIBOTTE

DÉCEMBRE 2016

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

En premier lieu, j'aimerais remercier mon directeur François Watier, sans qui la rédaction de ce mémoire aurait été impossible. Merci beaucoup pour ton appui tout au long de ce projet et de mes études, du baccalauréat jusqu'à aujourd'hui, particulièrement lors des moments difficiles.

Ensuite, j'aimerais remercier les autres professeurs du département qui m'ont aidé à développer mon intérêt et mes habiletés pour les mathématiques et la statistique. En particulier, un gros merci à Simon Guillotte pour m'avoir initié à la recherche et pour la chance d'avoir pu donner des démos.

J'aimerais aussi remercier ma famille et mes amis qui ont été là pour moi tout au long de mes études et avant.

De plus, je remercie ma copine Marie-Claude de m'avoir encouragé à persévérer durant ma maîtrise. De tout mon coeur, merci de m'avoir redonné le sourire lors des jours les plus sombres!

Enfin, j'aimerais remercier le CRSNG pour l'appui financier à cet ouvrage.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	vii
RÉSUMÉ . . . . .	ix
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
PREMIER TEMPS DE PASSAGE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN AVEC DÉRIVE . . . . .	3
1.1 Rappels de processus stochastiques . . . . .	3
1.2 Distribution du premier temps de passage . . . . .	6
1.3 Exemple d'application . . . . .	8
1.4 La règle du 80% . . . . .	14
CHAPITRE II	
PREMIER TEMPS DE PASSAGE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN AVEC CHANGEMENTS DE RÉGIME . . . . .	21
2.1 Rappel sur les chaînes de Markov à temps continu . . . . .	22
2.2 Introduction aux changements de régime . . . . .	23
2.3 Factorisation de Wiener-Hopf . . . . .	27
2.4 Redérivation du premier temps de passage avec un état . . . . .	29
2.5 Dérivation du premier temps de passage avec deux états . . . . .	30
CHAPITRE III	
APPLICATION FINANCIÈRE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN AVEC CHANGEMENTS DE RÉGIME . . . . .	47
3.1 Description et contexte du problème . . . . .	47
3.2 Résolution analytique du problème du premier temps de passage . . . . .	50
3.3 La règle du 80% avec deux régimes . . . . .	56
CONCLUSION . . . . .	59
APPENDICE A	

CODE MATLAB . . . . .	61
A.1 Simulation de trajectoires . . . . .	61
A.2 Calcul de la fonction de répartition du premier temps de passage . . .	63
RÉFÉRENCES . . . . .	67

## LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1.1	Probabilité d'atteinte d'un objectif d'investissement . . . . .	14
2.1	Trajectoires de mouvement brownien avec changements de régime	25
3.1	Probabilité d'atteinte d'un objectif en fonction du temps . . . . .	58

## RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur l'étude d'un mouvement brownien où les paramètres sont déterminés par une chaîne de Markov à temps continu, appelé mouvement brownien avec changements de régime. Nous nous intéressons à la distribution du premier temps de passage de ce processus. En utilisant la méthodologie de Hieber (2014), nous arrivons à une expression analytique pour décrire la distribution dans le cas où deux régimes existent en alternance.

Nous illustrons ensuite une application financière du mouvement brownien avec changements de régime. En effet, nous cherchons à déterminer si la règle du 80%, que nous attribuons à Li et Zhou (2006), s'applique toujours dans un contexte où les paramètres du mouvement brownien ne sont pas connus d'avance mais bien aléatoires et décrits par des changements de régime déterminés par une chaîne de Markov à temps continu à deux états.

Nous arrivons finalement à un exemple qui montre que la borne inférieure universelle de 80% ne s'applique pas dans un contexte de changements de régime, la probabilité d'atteinte de l'objectif pouvant même descendre sous la barre des 20%.

**MOTS-CLÉS :** mouvement brownien, changements de régime, premier temps de passage.

## INTRODUCTION

En probabilité, l'étude du premier temps de passage d'un processus stochastique se résume à établir la probabilité que les mesures d'un phénomène aléatoire évoluant dans le temps atteignent pour la première fois un certain niveau à l'intérieur d'un intervalle de temps prédéterminé. Ce problème se rencontre fréquemment dans plusieurs domaines des sciences appliquées tels que la biologie, l'informatique, ainsi que dans certaines sphères économiques et financières.

En finance, le mouvement brownien et ses extensions occupent une place importante dans la modélisation de phénomènes aléatoires, comme le prix d'une action ou le comportement du marché boursier. Toutefois, plusieurs modèles supposent que les paramètres du mouvement brownien sont prédéterminés, alors qu'une modélisation plus réaliste de ces phénomènes suggérerait l'emploi de paramètres aléatoires.

Ce mémoire porte sur l'étude du premier temps de passage de plusieurs types de mouvements browniens. D'abord, au chapitre 1, on s'intéresse au premier temps de passage d'un mouvement brownien standard, avec dérive et géométrie. Puis, le chapitre 2 porte sur le premier temps de passage d'un mouvement brownien avec dérive où les paramètres sont régis par une chaîne de Markov à temps continu, connu dans la littérature comme un mouvement brownien avec changements de régime. Finalement, le chapitre 3 illustre une application financière d'un modèle de mouvement brownien avec changements de régime.



## CHAPITRE I

### PREMIER TEMPS DE PASSAGE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN AVEC DÉRIVE

En premier lieu, nous nous intéressons au premier temps de passage du mouvement brownien standard, aussi appelé processus de Wiener, et du mouvement brownien avec dérive. Il serait approprié de rappeler certaines notions de processus stochastiques avant de passer à la dérivation du premier temps de passage.

#### 1.1 Rappels de processus stochastiques

**Définition 1.1.1.** Un processus stochastique est une collection de variables aléatoires indicées  $\{X(t)\}$ , où  $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ .

**Définition 1.1.2.** Un processus stochastique  $\{W(t) : t \geq 0\}$  est appelé mouvement brownien standard, ou processus de Wiener, s'il satisfait aux conditions suivantes :

1.  $W(0) = 0$ .
2.  $W(t) \sim N(0, t)$  pour tout  $t > 0$ .
3.  $\{W(t) : t \geq 0\}$  a des accroissements indépendants et stationnaires.

Il est intéressant de noter qu'une combinaison linéaire de mouvements browniens standards indépendants avec coefficients non tous nuls est, à une constante près, un mouvement brownien.

**Théorème 1.1.** Soient  $W_1(t), \dots, W_m(t)$  des mouvements browniens standards indépendants et soient  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  des constantes non toutes nulles. Alors,

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2}} \sum_{i=1}^m a_i W_i(t) \text{ est un mouvement brownien standard.}$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $X(t)$  satisfait aux 3 conditions de la définition 1.1.2.

1. On a bien  $X(0) = \sum_{i=1}^m a_i W_i(0) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot 0 = 0.$

2. Soit  $t > 0$ . Comme  $X(t)$  est une somme de normales indépendantes, alors

$$X(t) \text{ est également une variable aléatoire de loi normale d'espérance } E[X(t)] = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2}} E[W_i(t)] = 0 \text{ et de variance } \text{Var}[X(t)] = \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2}} \right)^2 a_i^2 t =$$

$t$ . On a bien  $X(t) \sim N(0, t)$ .

3. Soient  $s > 0$  et  $t > 0$ . Pour la stationnarité des accroissements, on a

$$\begin{aligned} X(t+s) - X(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2}} a_i W_i(t+s) - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2}} a_i W_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2}} a_i (W_i(t+s) - W_i(t)) \\ &\sim N(0, s) \text{ (par stationnarité et indépendance des } W_i). \end{aligned}$$

Les accroissements ne dépendent donc pas de  $t$ .

De plus, puisque les accroissements de chaque  $W_i(t)$  sont indépendants et que les  $W_i(t)$  sont indépendants, l'indépendance des accroissements de  $X(t)$  peut être déduite en montrant que ceux-ci ont comme loi conjointe une normale multivariée et que leur covariance est nulle.

On conclut que le processus  $X(t)$  est donc un mouvement brownien standard puisque les 3 conditions de la définition sont respectées.  $\square$

**Définition 1.1.3.** Un processus stochastique  $\{X(t) : t \geq 0\}$  est appelé mouvement brownien avec dérive si

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t),$$

où  $W(t)$  est un mouvement brownien standard,  $\mu \neq 0$  et  $\sigma > 0$ . De plus, on appelle  $\mu$  la dérive et  $\sigma$  la volatilité.

**Définition 1.1.4.** Un processus stochastique  $\{X(t) : t \geq 0\}$  est appelé mouvement brownien géométrique s'il satisfait à l'équation différentielle stochastique

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

où  $W(t)$  est un mouvement brownien standard,  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ . De plus, il est bien connu que l'unique solution à cette équation est

$$X(t) = X(0) \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right).$$

Une fois le mouvement brownien défini, nous nous intéressons au premier instant où celui-ci atteint un seuil prédéterminé  $a \in \mathbb{R}$ . On peut définir ce concept de façon mathématique de la manière suivante.

**Définition 1.1.5.** Soit  $\{X(t) : t \geq 0\}$  un processus stochastique. On définit  $T_a$ , le premier temps de passage au niveau  $a$ , comme étant

$$T_a = \begin{cases} \inf\{t > 0 : X(t) \geq a\}, & \text{si } a \geq X(0) \\ \inf\{t > 0 : X(t) \leq a\}, & \text{si } a < X(0). \end{cases}$$

Finalement, il serait utile de définir la distribution inverse-gaussienne qui sera utilisée lors de la distribution du premier temps de passage d'un mouvement brownien avec dérive.

**Définition 1.1.6.** Soit  $X$  une variable aléatoire. On dit que  $X$  suit une loi inverse-gaussienne de paramètres  $\lambda > 0$  et  $\nu > 0$ , que l'on note  $X \sim \text{IG}(\lambda, \nu)$ , si la densité

de  $X$  est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} \left[ \frac{\lambda}{x^3 2\pi} \right]^{1/2} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\nu)^2}{2\nu^2 x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 1.2 Distribution du premier temps de passage

On peut maintenant chercher la distribution du premier temps de passage d'un mouvement brownien avec dérive. D'abord, on peut trouver aisément la densité du premier temps de passage d'un mouvement brownien standard. En effet, si  $W(t)$  est un mouvement brownien standard, on a pour  $a > 0$  et  $T > 0$

$$\begin{aligned} P(T_a \leq T) &= P(T_a \leq T \cap X(T) \geq a) + P(T_a \leq T \cap X(T) < a) \\ &= P(T_a \leq T | X(T) \geq a) P(X(T) \geq a) \\ &\quad + P(X(T) < a | T_a \leq T) P(T_a \leq T) \\ &= 1 \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{T}}\right)\right) + \frac{1}{2} P(T_a \leq T) \quad (\text{par symétrie}) \\ &= 2\Phi\left(\frac{-a}{\sqrt{T}}\right), \end{aligned}$$

où  $\Phi(\cdot)$  désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. Ensuite, il suffit de dériver par rapport à  $T$  pour obtenir la densité. On obtient alors

$$f_{T_a, W(t)}(T) = \frac{d}{dT} P(T_a \leq T) = \begin{cases} \frac{a}{T^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2T}\right) & \text{si } T > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À partir de ce résultat, on peut facilement déduire le résultat du cas où  $\mu = 0$  et  $\sigma > 0$  arbitraire. En effet, on a  $X(t) > a$  si et seulement si  $W(t) > \frac{a}{\sigma}$ . On en déduit donc

$$f_{T_a, \mu=0}(T) = f_{T_{a/\sigma}, W(t)}(T) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma T^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{\sigma^2 2T}\right) & \text{si } T > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que si  $a < 0$ , on utilise la propriété de symétrie du mouvement brownien pour obtenir les densités pour ce cas. Il suffit de remplacer  $a$  par  $-a$  dans les densités précédentes.

Finalement, on utilise les deux résultats précédents pour déduire le cas  $\mu \neq 0$  et  $\sigma > 0$ . Puisqu'il s'agit d'un résultat bien connu, on ne présentera qu'une ébauche de la preuve se trouvant dans Karatzas et Shreve (1996).

La clé pour arriver au résultat est d'invoquer le théorème de Girsanov. Soit  $X(t) = W(t) + \mu t$ , où  $\mu \neq 0$ . Alors, en vertu de ce théorème, il existe une unique mesure de probabilité  $P^{(\mu)}$  sous laquelle le processus  $\widehat{W}(t) = W(t) - \mu t$  est un mouvement brownien standard. De plus, pour tout événement  $A \in \mathcal{F}_t^W$ ,  $P^{(\mu)}$  satisfait à

$$P^{(\mu)}(A) = E[\mathbf{1}_A \exp(\mu W(t) - \mu^2 t/2)],$$

où  $\mathbf{1}_A$  désigne la fonction indicatrice de l'événement  $A$ . Par ailleurs, on a que sous  $P^{(\mu)}$ ,  $W(t) = \widehat{W}(t) + \mu t$  est un mouvement brownien avec dérive. On a alors

$$\begin{aligned} P^{(\mu)}(T_a \leq T) &= E[\mathbf{1}_{\{T_a \leq T\}} \exp(\mu W(T) - \mu^2 T/2)] \\ &= E[\mathbf{1}_{\{T_a \leq T\}} E[\exp(\mu W(T) - \mu^2 T/2) | \mathcal{F}_{\min(T_a, T)}^W]] \\ &= E[\mathbf{1}_{\{T_a \leq T\}} \exp(\mu W(\min(T_a, T)) - \mu^2 \min(T_a, T)/2)] \\ &= E[\mathbf{1}_{\{T_a \leq T\}} \exp(\mu a - \mu^2 T_a/2)] \\ &= \int_0^T \exp\left(\mu a - \frac{1}{2}\mu^2 s\right) \frac{|a|}{s^{3/2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) ds \end{aligned}$$

puisque l'on connaît la distribution de  $T_a$  pour le mouvement brownien standard  $W(t)$ . On en déduit donc que la densité du premier temps de passage d'un mouvement brownien avec dérive où  $\sigma = 1$  est

$$f_{T_a, \mu \neq 0, \sigma=1}(T) = \begin{cases} \frac{|a|}{T^{3/2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a - \mu T)^2}{2T}\right) & \text{si } T > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, pour le cas du mouvement brownien avec dérive avec  $\sigma > 0$  arbitraire, il suffit de remarquer que diviser le processus  $X(t)$  par  $\sigma$  nous ramène au cas

précédent. Le terme de dérive devient  $\frac{\mu}{\sigma}$  et la nouvelle barrière à franchir est  $\frac{a}{\sigma}$ . On a donc que la densité d'un mouvement brownien avec dérive  $X(t)$  est donnée par

$$f_{T_a, X(t)}(T) = \begin{cases} \frac{|a|}{\sigma T^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a - \mu T)^2}{2\sigma^2 T}\right) & \text{si } T > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est important de noter que cette densité est incomplète dans le cas où  $\mu$  et  $a$  sont de signes opposés. En effet, on peut montrer que

$$P(T_a < \infty) = \exp(\mu a - |\mu a|),$$

qui vaut 1 si et seulement si  $\mu$  et  $a$  sont de même signe. Pour montrer l'égalité ci-haut, il faut d'abord calculer  $E[e^{-sT_a}] = e^{-|a|\sqrt{2s}}$ ,  $s > 0$ , pour un mouvement brownien standard  $W(t)$ . Puis, on substitue cette valeur dans l'équation  $P^{(\mu)}(T_a \leq T) = E[\mathbf{1}_{\{T_a \leq T\}} \exp(\mu a - \mu^2 T_a / 2)]$  en faisant tendre  $T$  vers l'infini et en posant  $s = \frac{\mu^2}{2}$ .

Finalement, on remarque que si  $\mu$  et  $a$  sont de signes opposés, alors  $T_a$  suit une loi inverse-gaussienne de paramètres  $\lambda = \frac{a^2}{\sigma^2}$  et  $\nu = \frac{a}{\mu}$ .

### 1.3 Exemple d'application

Considérons une application financière pour un modèle de mouvement brownien géométrique tirée de l'article de Li et Zhou (2006).

On s'intéresse au cas d'un investisseur ayant une richesse initiale  $x_0$  et qui souhaite atteindre un objectif  $z$  à l'intérieur d'un horizon de temps prédéterminé  $T$ . On considère un marché constitué de  $m + 1$  titres : d'abord, un compte d'épargne sans risque à taux d'intérêt connu  $r(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ , que l'on peut décrire par l'équation différentielle stochastique suivante

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, \quad t \in [0, T],$$

et  $m$  titres avec risque (actions) dont le processus de prix est donné par

$$dS_i(t) = S_i(t) \left[ \mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t)dW_j(t) \right], \quad t \in [0, T], i \in \{1, \dots, m\},$$

où les  $W_i(t)$  sont des mouvements browniens standards indépendants,  $\mu_i(t)$  est le taux d'appréciation de l'action  $i$  au temps  $t$  et  $\sigma_{ij}(t)$  est la volatilité des actions. On suppose les  $\mu_i(t)$  et  $\sigma_{ij}(t)$  connus pour tout  $t \in [0, T]$  et on pose les conditions initiales  $S_0(0) = s_0 > 0$  et  $S_i(0) = s_i > 0$  si  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Soit  $X(t)$  la richesse de l'investisseur au temps  $t \in [0, T]$ . En supposant que les échanges d'actions sont autofinancées et continues et qu'il n'existe pas de frais liés à ces échanges, on peut montrer que  $X(t)$  satisfait à

$$dX(t) = \left\{ r(t)X(t) + \sum_{i=1}^m [\mu_i(t) - r(t)]\pi_i(t) \right\} dt + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t)\pi_i(t)dW_j(t),$$

pour tout  $t \in [0, T]$  avec  $X(0) = x_0 > 0$  et  $\pi_i(t)$  désignant la valeur totale des parts de l'action  $i$  dans le portefeuille au temps  $t$ .

Sous ce marché, on considère le portefeuille optimal selon la stratégie moyenne-variance de Markowitz. Cette stratégie consiste à choisir le portefeuille ayant la plus petite variance tout en atteignant en moyenne l'objectif  $z$ . Dans les faits, on cherche à minimiser  $E[(X(T) - z)^2]$  sous les contraintes  $E[X(T)] = z$  et  $X(0) = x_0$ . La solution à ce problème, si elle existe, porte le nom de portefeuille efficient.

Évidemment, nous supposons  $z > x_0 e^{\int_0^T r(t)dt}$ , sans quoi le problème serait trivial (l'objectif  $z$  serait toujours atteint au temps  $T$  en laissant la richesse initiale  $x_0$  dans le compte sans risque).

Pour alléger la notation, on définit la matrice de covariance  $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{m \times m}$ , le vecteur

$$B(t) := (\mu_1(t) - r(t), \dots, \mu_m(t) - r(t)), \quad t \in [0, T],$$

et le vecteur

$$\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_m(t)) := B(t)[\sigma(t)']^{-1}, \quad t \in [0, T],$$

où ' dénote la transposée vectorielle ou matricielle et  $\sigma^{-1}(t)$  est l'inverse matriciel de  $\sigma(t)$ . On peut alors réécrire le processus de richesse comme

$$dX(t) = [r(t)X(t) + B(t)\pi(t)]dt + \pi(t)'\sigma(t)dW(t), \quad t \in [0, T],$$

où  $W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))$  est le vecteur contenant les  $m$  mouvements browniens standards indépendants.

Il est possible de montrer que l'unique portefeuille efficient est donné par

$$\pi^z(t) = (\pi_1^z(t), \dots, \pi_m^z(t))' = -[\sigma(t)\sigma(t)']^{-1}B(t)' \left[ X(t) - \gamma e^{-\int_t^T r(s)ds} \right],$$

où  $\gamma = \frac{z - x_0 e^{-\int_0^T [r(t) - |\theta(t)|^2] dt}}{1 - e^{-\int_0^T |\theta(t)|^2 dt}}$  et  $|\cdot|$  désigne la norme vectorielle.

Afin d'étudier la probabilité de l'atteinte d'un objectif d'investissement selon cette stratégie, il nous faut poser  $T_z$  le premier temps où la richesse  $X(t)$  atteint la valeur escomptée de  $z$ , qui correspond à l'instant où l'on pourra placer toute la richesse dans le compte sans risque et atteindre l'objectif d'investissement avec certitude.

Cela correspond à

$$T_z = \inf \left\{ t \in [0, T] : X(t) = z \exp \left( - \int_t^T r(s)ds \right) \right\}.$$

De plus, on pose  $\inf \emptyset = +\infty$  dans le cas où l'objectif d'investissement n'est pas atteint à l'intérieur de l'horizon prédéterminé.

Pour arriver à calculer analytiquement cette probabilité, on doit d'abord réécrire le premier temps de passage sous une autre forme, à l'aide d'un changement de variable, pour se ramener à un processus connu.

**Théorème 1.2.** Pour tout  $z > x_0 \exp(\int_0^T r(t)dt)$ , on a

$$T_z = \inf \left\{ 0 \leq t \leq T : \frac{3}{2} \int_0^t |\theta(s)|^2 ds + \int_0^t \theta(s) dW(s) = \int_0^T |\theta(s)|^2 ds \right\}.$$



*Démonstration.* Posons  $Y(t) = X(t) - \gamma e^{-\int_t^T r(s)ds}$ . On a

$$dY(t) = dX(t) - r(t)\gamma e^{-\int_t^T r(s)ds} dt, \quad t \in [0, T].$$

En substituant  $\pi(t)$  par le portefeuille efficient  $\pi^z(t)$  dans l'équation de richesse

$$dX(t) = [r(t)X(t) + B(t)\pi(t)]dt + \pi(t)'\sigma(t)dW(t), \quad t \in [0, T],$$

on arrive à

$$dY(t) = \{r(t)(Y(t) + \gamma e^{-\int_t^T r(s)ds}) - B(t)[\sigma(t)\sigma(t)']^{-1}B(t)'Y(t) - r(t)\gamma e^{-\int_t^T r(s)ds}\}dt - Y(t)'B(t)[\sigma(t)\sigma(t)']^{-1}\sigma(t)dW(t), \quad t \in [0, T],$$

qui peut se simplifier comme

$$dY(t) = [r(t) - |\theta(t)|^2]Y(t)dt - \theta(t)Y(t)dW(t), \quad t \in [0, T],$$

étant donné que  $\sigma(t)\sigma(t)'$  est symétrique et que  $|\theta(t)|^2 = \theta(t)\theta(t)'$  car  $\theta(t)$  est un vecteur ligne.

Nous avons comme condition initiale  $Y(0) = x_0 - \gamma e^{-\int_0^T r(s)ds} = \frac{x_0 - z e^{-\int_0^T r(t)dt}}{1 - e^{-\int_0^T |\theta(t)|^2 dt}}$ .

Or, de façon analogue au mouvement brownien géométrique, il est connu que cette équation différentielle stochastique admet comme unique solution

$$Y(t) = Y(0) \exp\left(\int_0^t \left[r(s) - \frac{3}{2}|\theta(s)|^2\right] ds - \int_0^t \theta(s)dW(s)\right), \quad t \in [0, T].$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} X(t) - z e^{-\int_t^T r(s)ds} &= Y(t) + (\gamma - z) e^{-\int_t^T r(s)ds} \\ &= \frac{e^{-\int_t^T r(s)ds} (z - x_0 e^{\int_0^T r(s)ds})}{e^{\int_0^T |\theta(t)|^2 dt} - 1} \\ &\quad \times [1 - e^{\int_0^T |\theta(t)|^2 dt} \exp(-\frac{3}{2} \int_0^t |\theta(s)|^2 ds - \int_0^t \theta(s)dW(s))]. \end{aligned}$$

Puisque  $\frac{e^{-\int_t^T r(s)ds} (z - x_0 e^{\int_0^T r(s)ds})}{e^{\int_0^T |\theta(t)|^2 dt} - 1} > 0$ , la valeur escomptée de  $z$  est atteinte par le portefeuille, c'est-à-dire  $X(t) = z e^{-\int_t^T r(s)ds}$ , si et seulement si le terme entre

crochets est égal à zéro, ce qui signifie

$$\frac{3}{2} \int_0^t |\theta(s)|^2 ds + \int_0^t \theta(s) dW(s) = \int_0^T |\theta(s)|^2 ds.$$

□

En écrivant le processus sous cette forme, il nous est maintenant possible d'évaluer les probabilités associées au premier temps de passage à l'aide de résultats connus et d'une technique de changement de temps. Toutefois, nous allons d'abord tenter d'illustrer la règle à l'aide d'un exemple.

Dans l'énoncé du théorème 1.2, il est intéressant de noter que si  $r(t)$ ,  $\sigma(t)$  et  $\mu(t)$  sont constants sur  $[0, T]$ , alors  $\theta(t) = \theta$  est constant et le processus décrit du côté gauche de l'équation est un mouvement brownien avec dérive où le paramètre de dérive est  $\mu^* = \frac{3}{2}|\theta|^2$  et le paramètre de volatilité est  $\sigma^* = |\theta|$  en vertu du théorème 1.1. De plus, la barrière que ce processus doit atteindre, qui se trouve du côté droit de l'équation, ne dépend pas de la richesse initiale  $x_0$  ni de l'objectif à atteindre  $z$ .

Supposons que l'on modélise un marché de  $m = 10$  actions et un titre sans risque par le modèle moyenne-variance de Markowitz. Pour simplifier les calculs, supposons que les 10 actions proviennent de secteurs économiques indépendants, ce qui signifie que  $\sigma_{ij}(t) = 0$  pour tout  $t > 0$  si  $i \neq j$ .

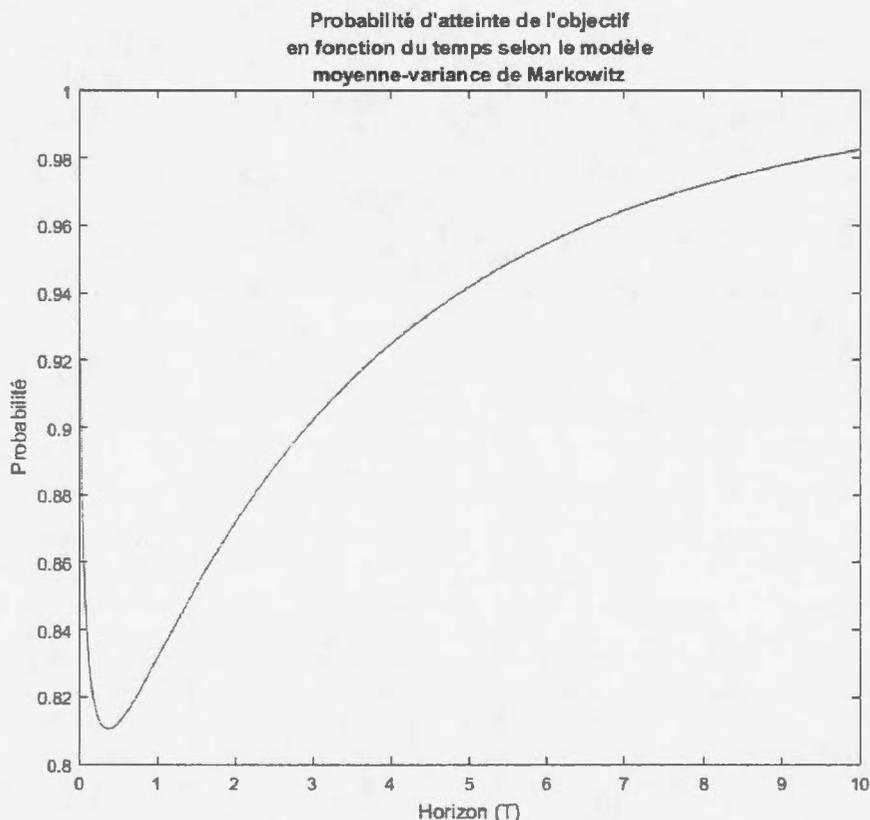
Considérons les paramètres de marché suivants : pour l'action  $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ , la volatilité et la dérive au temps  $t$  sont constantes et identiques,  $\sigma_{ii}(t) = \sigma = 0.05$  et  $\mu_i(t) = \mu = 0.03$ . Supposons que le taux d'intérêt du titre sans risque est constant pour tout  $t > 0$ ,  $r(t) = r = 0.01$ . Un investisseur utilise la stratégie moyenne-variance de Markowitz en espérant faire croître une richesse initiale  $x_0 = 1$  de 20% ( $z = 1.20$ ) en plaçant dès que possible sa richesse dans le titre sans risque. On s'intéresse à la probabilité d'atteindre cet objectif d'investissement au temps

$T > 0$ .

Comme  $r(t)$ ,  $\sigma(t)$  et  $\mu(t)$  sont fixes sur l'horizon  $[0, T]$  pour tout  $T > 0$ , il s'ensuit que la valeur de  $\theta(t)$  est également constante sur  $[0, T]$ , que nous noterons  $\theta$ . Par conséquent, la distribution de  $T_z$ , l'instant où l'on place toute la richesse dans le compte d'épargne, correspond à celle du premier temps de passage d'un mouvement brownien de paramètres  $\mu^* = \frac{3}{2}|\theta|^2$  et  $\sigma^* = |\theta|$  à travers une barrière fixe  $a^* = \int_0^T |\theta(s)|^2 ds = T|\theta|^2$ . Puisque  $\theta \neq \mathbf{0}$ ,  $\mu^*$  et  $a^*$  sont tous deux positifs et il s'ensuit que  $T_z \sim \text{IG} \left( \lambda = T^2|\theta|^2, \nu = \frac{2T}{3} \right)$  par la section 1.2.

Ensuite, on calcule  $|\theta| = \sqrt{B(t)[\sigma(t)']^{-1}[\sigma(t)]^{-1}B(t)'} = \sqrt{\frac{10 \cdot (0.03 - 0.01)^2}{0.05^2}} = 1.6$ . Il nous est maintenant possible d'évaluer la probabilité que l'investisseur atteigne son objectif de faire croître de 20% sa richesse d'ici un temps d'échance  $T$  prédéterminé, c'est-à-dire  $P(T_z \leq T)$ . Pour ce faire, il suffit d'évaluer la fonction de répartition de  $T_z$ , une variable aléatoire de loi inverse-gaussienne.

Graphiquement, si on fait varier  $T$  de 0.01 à 10 par des sauts de 0.01, nous obtenons avec l'aide du logiciel MATLAB le graphique suivant :



**Figure 1.1** Probabilité d'atteinte d'un objectif d'investissement

On remarque que la probabilité d'atteindre l'objectif est toujours supérieure à 80%, quel que soit  $T$ . Cette borne inférieure n'a rien à voir avec nos choix de paramètres. En effet, une propriété intéressante de cette stratégie est que la probabilité d'atteindre l'objectif  $z$  au temps  $T$  est toujours supérieure à 80%, peu importe les paramètres du marché et l'horizon  $T$  considéré. Dans la littérature, cette propriété porte le nom de règle du 80%.

#### 1.4 La règle du 80%

Dans cette section, nous allons démontrer la règle du 80%. D'abord, il serait pertinent de rappeler la définition de la fonction d'erreur afin d'alléger la notation.

**Définition 1.4.1.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On définit la fonction d'erreur  $\text{Erfc}(x)$  comme

$$\text{Erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Il est facile de vérifier  $\text{Erfc}(x) = 2(1 - N(\sqrt{2}x))$ , où  $N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$  désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite évaluée en  $x$ .

**Théorème 1.3.** Soit  $z > x_0 e^{\int_0^T r(t) dt}$ . La probabilité que le processus de richesse  $X(t)$  décrit par le portefeuille efficient atteigne la valeur escomptée de  $z$  d'ici le temps  $T$  est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_z \leq T) &= \frac{1}{2} \text{Erfc} \left( -\frac{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}}{2\sqrt{2}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp \left( 3 \int_0^T |\theta(s)|^2 ds \right) \text{Erfc} \left( \frac{5\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}}{2\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Posons  $\varphi(t) = \frac{3}{2} \int_0^t |\theta(s)|^2 ds + \int_0^t \theta(s) dW(s)$  pour  $t \in [0, T]$ . En vertu du théorème précédent, on peut écrire

$$T_z = \inf \left\{ 0 \leq t \leq T : \varphi(t) = \int_0^T |\theta(s)|^2 ds \right\}.$$

En vertu d'une technique de changement de temps (voir Ideka et Watanabe, 1989), il existe, sur le même espace de probabilité, un mouvement brownien standard  $\widehat{W}(t), t \geq 0$ , tel que

$$\int_0^t \theta(s) dW(s) = \widehat{W}(\beta(t)), \quad t \in [0, T],$$

où  $\beta(t) := \int_0^t |\theta(s)|^2 ds$ . Il s'ensuit que

$$\varphi(t) = \frac{3}{2} \beta(t) + \widehat{W}(\beta(t)), \quad t \in [0, T].$$

De plus, on remarque que  $\inf \left\{ 0 \leq t \leq T : \varphi(t) = \int_0^T |\theta(s)|^2 ds \right\} \leq T$  si et seulement si  $\sup_{0 \leq t \leq T} \varphi(t) \geq \int_0^T |\theta(s)|^2 ds$ . On a donc

$$\begin{aligned} P(T_z \leq T) &= P \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \varphi(t) \geq \int_0^T |\theta(s)|^2 ds \right) \\ &= P \left( \sup_{0 \leq t \leq \beta(T)} \left( \frac{3}{2}t + \widehat{W}(t) \right) \geq \beta(t) \right). \end{aligned}$$

Or, selon Borodin et Salminen (page 250, 1.1.4), cette probabilité est égale à

$$\begin{aligned} P(T_z \leq T) &= \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left( \frac{\beta(T)}{\sqrt{2\beta(T)}} - \frac{(3/2)\sqrt{\beta(T)}}{\sqrt{2}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{3\beta(T)} \operatorname{Erfc} \left( \frac{\beta(T)}{\sqrt{2\beta(T)}} + \frac{(3/2)\sqrt{\beta(T)}}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left( -\frac{\sqrt{\beta(T)}}{2\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} e^{3\beta(T)} \operatorname{Erfc} \left( \frac{5\sqrt{\beta(T)}}{2\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left( -\frac{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}}{2\sqrt{2}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{3 \int_0^T |\theta(s)|^2 ds} \operatorname{Erfc} \left( \frac{5\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}}{2\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

puisque  $\beta(T) = \int_0^T |\theta(s)|^2 ds$ . □

Ensuite, pour alléger la notation, nous allons poser

$$f(x) := \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left( -\frac{x}{2\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} e^{3x^2} \operatorname{Erfc} \left( \frac{5x}{2\sqrt{2}} \right), \quad x \geq 0.$$

Avant de poursuivre, il nous faudra les deux lemmes suivants.

**Lemme 1.4.** Pour tout  $T > 0$ ,  $P(T_z \leq T) = f \left( \sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds} \right)$ .

*Démonstration.* Le résultat est immédiat en vertu du théorème 1.2. □

**Lemme 1.5** (Abramowitz et Stegun, 1972). Soit  $x > 0$ . Alors,

$$N(x) \leq 1 - \frac{\sqrt{4+x^2} - x}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

*Démonstration.* Soit  $Y$  une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{ye^{-y^2/2}}{\int_x^\infty ye^{-y^2/2} dy} & \text{si } y \geq x, \\ 0 & \text{si } y < x. \end{cases}$$

Par l'inégalité de Jensen, on a  $E\left[\frac{1}{Y}\right] \geq \frac{1}{E[Y]}$  puisque la fonction  $\frac{1}{y}$  est convexe pour  $y > 0$ . On en déduit

$$\frac{\int_x^\infty e^{-y^2/2} dy}{\int_x^\infty ye^{-y^2/2} dy} \geq \frac{\int_x^\infty ye^{-y^2/2} dy}{\int_x^\infty y^2 e^{-y^2/2} dy}.$$

On peut évaluer deux de ces intégrales. D'abord, on a directement

$$\int_x^\infty ye^{-y^2/2} dy = \left[-e^{-y^2/2}\right]_{y=x}^{y=\infty} = e^{-x^2/2}.$$

En intégrant par parties, on pose  $u = y$  et  $dv = ye^{-y^2/2} dy$  pour obtenir

$$\int_x^\infty y^2 e^{-y^2/2} dy = \left[-ye^{-y^2/2}\right]_{y=x}^{y=\infty} - \int_x^\infty -e^{-y^2/2} dy = xe^{-x^2/2} + \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy.$$

En substituant ces valeurs dans l'inégalité précédente et en multipliant, on a

$$\begin{aligned} & \left(\int_x^\infty e^{-y^2/2} dy\right) \left(xe^{-x^2/2} + \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy\right) \geq e^{-x^2} \\ \Leftrightarrow & \left(\int_x^\infty e^{-y^2/2} dy + \frac{xe^{-x^2/2}}{2}\right)^2 \geq e^{-x^2} + \frac{x^2 e^{-x^2}}{4} \\ \Leftrightarrow & \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy + \frac{xe^{-x^2/2}}{2} \geq e^{-x^2/2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} \\ \Leftrightarrow & \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy \geq e^{-x^2/2} \frac{\sqrt{4+x^2} - x}{2}. \end{aligned}$$

En remarquant que  $N(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy$ , on a

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}(1 - N(x)) & \geq e^{-x^2/2} \frac{\sqrt{4+x^2} - x}{2} \\ \Leftrightarrow N(x) & \leq 1 - \frac{\sqrt{4+x^2} - x}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \end{aligned}$$

ce qui correspond à l'énoncé du lemme.  $\square$

Le premier lemme justifie l'étude de la fonction auxiliaire  $f$  en explicitant le lien entre celle-ci et la probabilité d'atteindre l'objectif à l'intérieur de l'horizon  $[0, T]$  prédéterminé. Le second lemme, quant à lui, sera utilisé dans le calcul de la borne inférieure universelle de la probabilité d'atteinte de l'objectif. Nous avons maintenant tous les outils nécessaires à la dérivation de cette borne, c'est-à-dire la fameuse règle du 80%.

**Théorème 1.6.**

$$f(x) \geq N\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{10}{\pi}}e^{-1/10} \approx 0.8072 \quad \forall x \geq 0.$$

*Démonstration.* D'abord, on peut réécrire  $f(x)$  en fonction de  $N(x)$  en utilisant la relation  $\text{Erfc}(x) = 2(1 - N(\sqrt{2}x))$ . On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\text{Erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}e^{3x^2}\text{Erfc}\left(\frac{5x}{2\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(1 - N\left(-\frac{x}{2}\right)\right) + e^{3x^2}\left(1 - N\left(\frac{5x}{2}\right)\right) \\ &= N\left(\frac{x}{2}\right) + e^{3x^2}\left(1 - N\left(\frac{5x}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

pour tout  $x \geq 0$ . Ensuite, en utilisant le résultat d'Abramowitz et Stegun, on a

$$\begin{aligned} f(x) &\geq N\left(\frac{x}{2}\right) + e^{3x^2}\left(1 - \left(1 - e^{-(5x/2)^2/2}\frac{\sqrt{4 + (5x/2)^2} - 5x/2}{2\sqrt{2\pi}}\right)\right) \\ &= N\left(\frac{x}{2}\right) + e^{-x^2/8}\frac{\sqrt{16 + 25x^2} - 5x}{4\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Posons maintenant  $g(x) := N\left(\frac{x}{2}\right) + e^{-x^2/8}\frac{\sqrt{16 + 25x^2} - 5x}{4\sqrt{2\pi}}$  pour tout  $x \geq 0$ . En dérivant  $g(x)$ , on obtient, après quelques manipulations,

$$g'(x) = \frac{e^{-x^2/8}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( \frac{5x^2}{16} - \frac{25x^3}{16\sqrt{16 + 25x^2}} \right) + \left( \frac{21x}{4\sqrt{16 + 25x^2}} - \frac{3}{4} \right) \right].$$

On remarque que  $\frac{5x^2}{16} - \frac{25x^3}{16\sqrt{16 + 25x^2}} \geq \frac{5x^2}{16} - \frac{25x^3}{16\sqrt{25x^2}} = 0$  pour tout  $x \geq 0$ . On remarque aussi que l'expression  $\frac{21x}{4\sqrt{16 + 25x^2}}$  est strictement croissante lorsque  $x \geq 1$ . On a donc  $\frac{21x}{4\sqrt{16 + 25x^2}} - \frac{3}{4} \geq \frac{21}{4\sqrt{41}} - \frac{3}{4} > 0$  pour tout  $x \geq 1$ .



On peut alors conclure  $g'(x) > 0$  pour  $x \geq 1$  et on en déduit  $g(x) \geq g(1) = N\left(\frac{1}{2}\right) + e^{-1/8} \frac{\sqrt{41} - 5}{4\sqrt{2\pi}} \approx 0.8150$  pour tout  $x \geq 1$ .

Par ailleurs, comme  $f(x)$  est continue, elle doit admettre un point minimum  $x^*$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Étant donné que  $f(x)$  est différentiable, on doit avoir  $f'(x^*) = 0$  dans le cas où  $x^* \in (0, 1)$ .

Pour  $x \in (0, 1)$ , on calcule

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/8} + 3xe^{3x^2} \left(1 - N\left(\frac{5x}{2}\right)\right) - \frac{5}{2\sqrt{2\pi}} e^{3x^2} e^{-25x^2/8} \\ &= 3xe^{3x^2} \left(1 - N\left(\frac{5x}{2}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/8}. \end{aligned}$$

Puisqu'on doit également avoir  $f'(x^*) = 0$ , on en déduit la relation

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}3x^*} e^{-x^{*2}/8} = \left(1 - N\left(\frac{5x^*}{2}\right)\right) e^{3x^{*2}}.$$

Donc, si ce  $x^*$  existe, par la définition de la fonction  $f$ , il doit satisfaire à

$$\begin{aligned} f(x^*) &= N\left(\frac{x^*}{2}\right) + \left(1 - N\left(\frac{5x^*}{2}\right)\right) e^{3x^{*2}} \\ &= N\left(\frac{x^*}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}3x^*} e^{-x^{*2}/8}. \end{aligned}$$

Ensuite, posons

$$h(x) := N\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}3x} e^{-x^2/8}, \quad x \in (0, 1),$$

et étudions cette fonction. En dérivant, on calcule

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/8} - \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/8} - \frac{1}{3\sqrt{2\pi}x^2} e^{-x^2/8} \\ &= \frac{e^{-x^2/8}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{3x^2}\right). \end{aligned}$$

Puisque l'exponentielle est toujours strictement positive, on constate que la seule racine de  $h$  est atteinte en  $\hat{x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . De plus, on remarque que  $h'(x) < 0$  si

$0 < x < \hat{x}$  et  $h'(x) > 0$  si  $\hat{x} < x$ . Alors,  $\hat{x}$  est le minimum global de  $h$ , ce qui implique

$$h(x) \geq h\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = N\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{10}{\pi}}e^{-1/10} \approx 0.8072 \quad \text{pour } x \in (0, 1).$$

De plus, on a  $f(0) = 1$  et  $f(1) \approx 0.8162$ . On conclut donc que le minimum de  $f$  sur l'intervalle  $[0,1]$  est atteint en un certain  $x^*$  tel que  $f(x^*) \geq h(\hat{x}) \approx 0.8072$ . Puisque pour tout  $x \geq 1$ ,  $f(x) \geq g(x) \geq g(1) \approx 0.8150$ , on déduit le résultat énoncé au début du théorème, soit

$$f(x) \geq N\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{10}{\pi}}e^{-1/10} \approx 0.8072 \quad \forall x \geq 0.$$

□

Enfin, il suffit d'assembler ces résultats pour arriver à la règle du 80%. Nous devons ce résultat à Li et Zhou (2006).

**Théorème 1.7** (La règle du 80%). Pour tout  $T > 0$ ,

$$P(T_z \leq T) \geq N\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{10}{\pi}}e^{-1/10} \approx 0.8072.$$

*Démonstration.* Le résultat est immédiat en vertu du lemme 1.3 et du théorème 1.5 puisque  $\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}$  est toujours supérieur ou égal à 0. □

Nous avons donc montré que sous cette stratégie d'investissement, la probabilité qu'un objectif soit atteint est toujours supérieure ou égale à 80%, quels que soient les paramètres du marché et le temps dont on dispose.

## CHAPITRE II

### PREMIER TEMPS DE PASSAGE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN AVEC CHANGEMENTS DE RÉGIME

Au chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à un modèle financier comportant un mouvement brownien avec dérive et nous avons montré que ce modèle possédait une propriété très intéressante. En fait, quelque soit l'objectif visé et la fenêtre de temps dans laquelle on désirait l'atteindre, l'investisseur touchait la richesse souhaitée plus de 80% du temps.

Toutefois, l'utilisation de ce modèle dans un tel contexte peut sembler élémentaire. En effet, ce modèle suppose que les paramètres du marché, c'est-à-dire la dérive et la volatilité représentés par les paramètres d'un mouvement brownien avec dérive, sont constants tout au long de la période d'investissement. Or, il serait plus naturel de supposer que ceux-ci varient de façon aléatoire au fil du temps.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un modèle de mouvement brownien dont les paramètres varient de façon aléatoire selon le temps parmi un nombre fini de valeurs possibles. Le modèle est le mouvement brownien avec changements de régime.

Essentiellement, nous allons montrer qu'il existe une expression analytique pour décrire le premier temps de passage d'un tel modèle à travers une barrière fixe.

## 2.1 Rappel sur les chaînes de Markov à temps continu

Avant de présenter le modèle de mouvement brownien avec changements de régime, il est pertinent de faire quelques rappels sur les chaînes de Markov à temps continu, qui sont nécessaires à la construction du modèle.

Pour ce qui suit, on construira la définition de chaîne de Markov à temps continu comme extension de la chaîne de Markov à temps discret impliquant un générateur.

**Définition 2.1.1.** Soit  $Q$  une matrice réelle carrée  $S \times S$ , où  $S \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $Q$  est un générateur infinitésimal si elle satisfait aux conditions suivantes :

1. La somme des éléments de chaque ligne de  $Q$  est 0.
2. Les éléments sur la diagonale de  $Q$  sont strictement inférieurs à 0 et les autres sont non-négatifs.

**Définition 2.1.2.** Soit  $\mathcal{S}$  un ensemble fini. Un processus stochastique  $\{X(k) : k \in \mathbb{N}\}$  est appelé chaîne de Markov à temps discret si

$$P(X(k+1) = s_{k+1} | X(k) = s_k) = P(X(k+1) = s_{k+1} | X(k) = s_k, \dots, X(0) = s_0),$$

où  $s_0, \dots, s_{k+1} \in \mathcal{S}$ .

Dans une chaîne de Markov à temps discret, on dénote les probabilités de transition  $P(X(k+1) = j | X(k) = i) = p_{ij}$ . Il est important de noter que ces probabilités sont stationnaires, c'est-à-dire qu'elles sont les mêmes quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ . Cela revient à dire que la chaîne est homogène.

Il est assez simple de construire une chaîne de Markov à temps continu à partir d'une chaîne à temps discret. En effet, il suffit de générer un temps d'attente entre chaque transition afin de mettre le temps sur une échelle continue. À partir d'un

générateur  $Q$ , on peut construire une chaîne de Markov à temps continu  $\Theta(t)$ , où  $t \geq 0$ , grâce à l'algorithme suivant :

1. Définir un état initial  $X(0) \in \{1, \dots, S\}$  à la chaîne de Markov à temps discret. Cela peut être fait à partir d'une distribution initiale  $\pi_0$  ou encore de façon déterministe.
2. Poser  $k = 1$  et  $t_0 = 0$ .
3. Générer le temps d'attente  $t_k$  selon une loi exponentielle de paramètre  $-q_{X(k-1)X(k-1)}$ , c'est-à-dire avec la probabilité

$$P(t_k > t | X(k-1) = i) = e^{q_{ii}t}, \quad t \geq 0.$$

4. Générer l'état après la transition,  $X(k) \in \{1, \dots, S\}$ , où les probabilités de transition sont données par

$$p_{ij} = P(X(k) = j | X(k-1) = i) = \begin{cases} -q_{ij}/q_{ii} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

5. Poser  $\Theta(t) = X(k-1)$  pour tout  $t \in [t_{k-1}, t_k)$ .
6. Incrémenter  $k$  de 1 et revenir à l'étape 3.

Nous avons donc une chaîne de Markov à temps continu  $\{\Theta(t) : t \geq 0\}$  qui sera nécessaire pour construire un mouvement brownien avec changements de régime.

## 2.2 Introduction aux changements de régime

L'idée du mouvement brownien avec changements de régime est simple. En fait, il s'agit d'un mouvement brownien avec dérive dont les paramètres sont régis par une chaîne de Markov à temps continu. De façon plus formelle, on peut définir le processus de la manière suivante.

**Définition 2.2.1.** Soit  $\{B(t) : t \geq 0\}$  un processus stochastique,  $\{\Theta(t) : t \geq 0\}$  une chaîne de Markov à temps continu à  $S$  états ayant comme générateur infinitésimal la matrice  $Q$  et  $W(t)$  est un mouvement brownien standard indépendant de  $\Theta(t)$ . On dit que  $B(t)$  est un mouvement brownien avec changements de régime s'il est décrit par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dB(t) = \mu_{\Theta(t)}dt + \sigma_{\Theta(t)}dW(t), \quad B(0) = x.$$

La valeur initiale du processus en  $t = 0$  est  $B(0) = x \in \mathbb{R}$ . Les paramètres  $\mu_{\Theta(t)}$  et  $\sigma_{\Theta(t)}$  sont sujets aux mêmes restrictions que lors du mouvement brownien avec dérive, c'est-à-dire que  $\mu_1, \dots, \mu_S \in \mathbb{R}$  et  $\sigma_1, \dots, \sigma_S > 0$ . De plus, on dit que le modèle est pleinement déterminé si l'état initial est connu ou, de manière plus générale, s'il existe une distribution initiale  $\pi_0$  connue.

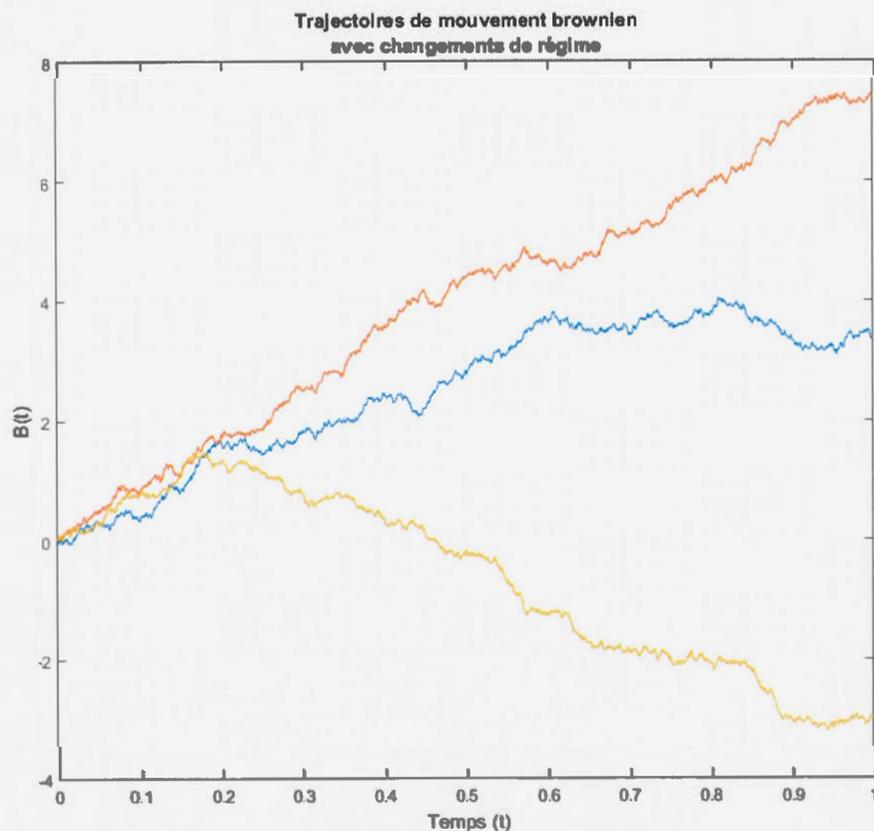
Ce modèle, plus complexe que le mouvement brownien avec dérive, permet une modélisation plus réaliste de certains phénomènes scientifiques ou financiers. En finance, les changements de régime sont utilisés pour mieux décrire le comportement du marché boursier (voir Guo, 2001), en ajoutant l'alternance entre le *bear market* (tendance à la baisse) et le *bull market* (tendance à la hausse). Ils sont aussi utilisés en biologie pour modéliser les comportements d'entrée-sortie dans les neurones sous différents stimuli qui alternent de façon aléatoire dans le temps (voir Buonocore, Di Crescenzo et Di Nardo, 2002).

Il serait pertinent de faire un exemple pour mieux visualiser la modèle. Supposons un mouvement brownien avec changements de régime avec  $S = 2$  régimes donnés par  $(\mu_1 = 5, \sigma_1 = 1)$  et  $(\mu_2 = -5, \sigma_2 = 1)$ . L'alternance des régimes est régie par le générateur infinitésimal  $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et le régime initial est  $\Theta(0) = 1$  avec probabilité 1. Notons que nous avons choisi la dérive grande par rapport à la volatilité pour mieux illustrer quand se produisent les changements de régime

ainsi que leurs effets.

Nous allons simuler 3 trajectoires de ce processus sur l'intervalle  $[0, 1]$  avec des pas de discrétisation  $\Delta = 0.0001$ . Pour ce faire, il faut d'abord simuler la chaîne des changements de régime sur l'horizon  $[0, 1]$ , puis simuler la position du processus  $\Delta$  plus tard ou au moment du prochain changement de régime s'il a eu lieu moins que  $\Delta$  après le temps actuel. On répète ce processus jusqu'à la fin de l'intervalle. Le code MATLAB pour simuler ce processus se trouve en annexe.

Nous avons alors le graphique suivant :



**Figure 2.1** Trajectoires de mouvement brownien avec changements de régime

Il semble que la trajectoire jaune ait subi un changement de régime autour de  $t = 0.2$  comme l'indique la tendance générale qui passe soudainement du positif au négatif. La trajectoire a peut-être subi un changement de régime autour de  $t = 0.8$ , mais le court temps entre ce moment et la fin des observations nous permet difficilement de vérifier graphiquement cette affirmation.

Afin de trouver la distribution du premier temps de passage du processus  $B(t)$  à travers une barrière constante, il suffit de trouver la transformée de Laplace de cette distribution, puis de l'inverser.

Pour ce faire, il nous sera nécessaire de définir le premier temps de sortie d'un intervalle.

**Définition 2.2.2.** Soit  $\{X(t) : t \geq 0\}$  un processus stochastique. On définit  $T_{ab}$  le premier temps de sortie de l'intervalle  $(b, a)$ , où  $b < X(0) < a$ , comme étant

$$T_{ab} = \begin{cases} \inf\{t > 0 : X(t) \notin (b, a)\}, & \text{s'il existe,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette définition est nécessaire à la dérivation du premier temps de passage à un unique niveau constant. De plus, il serait pertinent de rappeler la définition de la transformée de Laplace d'une variable aléatoire.

**Définition 2.2.3.** Soit  $X$  une variable aléatoire. On définit la transformée de Laplace de  $X$  comme

$$\Psi_X(u) := E[\exp(-uX)].$$

Pour arriver au résultat cherché, nous aurons besoin d'une technique appelée factorisation de Wiener-Hopf, qui sera décrite au cours de la prochaine section.



### 2.3 Factorisation de Wiener-Hopf

La factorisation de Wiener-Hopf est une façon de factoriser un processus de diffusion impliquant une paire de matrices dans le but de résoudre des équations avec barrières. Dans notre cas, elle sera utilisée pour trouver la transformée de Laplace de la densité du premier temps de passage.

**Définition 2.3.1** (Factorisation de Wiener-Hopf). Soit  $\mathcal{Q}_S$  l'ensemble des matrices réelles génératrices irréductibles (c'est-à-dire que ses entrées hors de la diagonale principale sont non-négatives et que la somme des éléments de chaque ligne est aussi non-négative) de format  $S \times S$ . On appelle factorisation de Wiener-Hopf du processus  $(B(t), \Theta(t))$  le couple  $(Q_+, Q_-)$ , où  $Q_+, Q_- \in \mathcal{Q}_S$ , si on a pour tout  $u > 0$  l'égalité  $\Xi(-Q_+) = \Xi(Q_-) = 0$ , où

$$\Xi(P) := \frac{1}{2}\Sigma^2 P^2 + VP + Q - uI_S,$$

avec  $\Sigma := \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_S)$ ,  $V := \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_S)$ ,  $Q$  le générateur infinitésimal des changements de régime, et  $I_S$  la matrice identité  $S \times S$ .

Il existe un lien qui nous sera essentiel entre cette factorisation et  $\Psi_{T_{ab}}(u)$  qui sera explicité dans le théorème suivant. Cependant, il nous faudra au préalable définir l'exponentielle matricielle.

**Définition 2.3.2.** Soit  $M$  une matrice carrée. On définit l'exponentielle matricielle de  $M$ , notée  $\exp(M)$ , par la série

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

À partir de cette définition, il est possible de montrer que  $\exp(M)$  est également la solution à l'équation différentielle matricielle  $\frac{d}{dt}y(t) = My(t)$ .

**Théorème 2.1.**

1. La factorisation  $(Q_+, Q_-)$  de la définition précédente est unique.
2. La transformée de Laplace du premier temps de passage est

$$\Psi_{ab}^\pm(u) = \pi_0 \psi_{ab}^\pm(u, x) \mathbf{1},$$

où  $\pi_0 \in \mathbb{R}^{1 \times S}$  est la distribution initiale de la chaîne et  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{S \times 1}$  est un vecteur dont toutes les entrées sont le chiffre 1. Dans le cas où l'on ne s'intéresse à une seule barrière constante  $a > B(0) = x$  ou  $b < B(0) = x$ , on a respectivement

$$\begin{aligned} \psi_{a,+\infty}^+(u, x) &:= \lim_{b \rightarrow +\infty} \psi_{ab}^+(u, x) = \exp(Q_+(a-x)), \\ \psi_{-\infty,b}^-(u, x) &:= \lim_{a \rightarrow -\infty} \psi_{ab}^-(u, x) = \exp(Q_-(x-b)). \end{aligned}$$

Dans le cas d'une double barrière, on a

$$\begin{aligned} \psi_{ab}^+(u, x) &= [\exp(Q_+(a-x)) - \exp(Q_-(x-b)) \exp(Q_+(a-b))] \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} [\exp(Q_-(a-b)) \exp(Q_+(a-b))]^k, \\ \psi_{ab}^-(u, x) &= [\exp(Q_-(x-b)) - \exp(Q_+(a-x)) \exp(Q_-(a-b))] \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} [\exp(Q_+(a-b)) \exp(Q_-(a-b))]^k. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Voir Jiang et Pistorius (2008). □

Ensuite, il suffit d'inverser la transformée de Laplace résultante pour arriver à une forme algébrique. Il est important de noter que la méthodologie présentée jusqu'ici est valide quel que soit le nombre  $S$  d'états ou de régimes. On pourrait, par exemple, poser  $S = 1$  et retrouver les résultats connus sur le premier temps de passage du mouvement brownien avec dérive.

## 2.4 Redérivation du premier temps de passage avec un état

Il pourrait être intéressant de s'assurer que la méthodologie de Hieber (2014) fonctionne pour un cas connu. Dans cette section, nous allons redériver le premier temps de passage dans le cas où il n'y a que  $S = 1$  régime, ce qui correspond au mouvement brownien avec dérive.

Soit  $\{B(t) : t \geq 0\}$  un mouvement brownien avec dérive de paramètre de dérive  $\mu$  et de volatilité  $\sigma > 0$ . Dans ce cas, il est facile de vérifier que la factorisation de Wiener-Hopf est le couple  $(Q_+, Q_-) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\Xi(Q_-) = \Xi(-Q_+) = 0$  pour tout  $u > 0$ , où

$$\Xi(Q) := \frac{1}{2}\sigma^2 Q^2 + \mu Q - u.$$

Il est facile de trouver les racines de l'équation quadratique ci-haut. On trouve  $Q_- = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 u}}{\sigma^2}$  et  $-Q_+ = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 u}}{\sigma^2}$ .

En prenant  $B(0) = 0$ , la deuxième partie du théorème 2.1 nous dit que la transformée de Laplace de la densité du premier temps de passage  $T_a$  d'un mouvement brownien avec dérive à travers une barrière supérieure  $a > 0$  est donnée par

$$\Phi_{T_a}(u) = \exp(aQ_+) = \exp\left(\frac{a(\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 u})}{\sigma^2}\right),$$

pour tout  $u \geq 0$ .

Pour vérifier que la densité sous-jacente est l'inverse-gaussienne, on doit calculer la transformée de Laplace de la densité inverse-gaussienne, puis conclure par l'unicité de la transformée pour les fonctions continues.

**Lemme 2.2.** Soit  $f(t) = \begin{cases} \frac{|a|}{\sigma t^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$

où  $\sigma > 0$  et  $a > 0$ . Alors, la transformée de Laplace de  $f(t)$ ,  $\mathcal{L}\{f\}(u)$ , est donnée par  $\Phi_{T_a}(u)$  trouvée plus tôt par la factorisation de Wiener-Hopf.

*Démonstration.* Soit  $u > \frac{-\mu^2}{2\sigma^2}$ . On calcule

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f\}(u) &= \int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{a}{\sigma t^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{2\sigma^2 ut^2 + (a - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) dt \\
&= \exp\left(\frac{a\mu}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{-a\sqrt{2\sigma^2 u + \mu^2}}{\sigma^2}\right) \times \\
&\quad \int_0^\infty \frac{a}{\sigma t^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(2\sigma^2 u + \mu^2)t^2 - 2a\sqrt{2\sigma^2 u + \mu^2}t + a^2}{2\sigma^2 t}\right) dt \\
&= \exp\left(\frac{a(\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 u})}{\sigma^2}\right) \times \\
&\quad \int_0^\infty \frac{a}{\sigma t^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a - \sqrt{2\sigma^2 u + \mu^2}t)^2}{2\sigma^2 t}\right) dt \\
&= \exp\left(\frac{a(\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 u})}{\sigma^2}\right).
\end{aligned}$$

L'intégrale finale est 1 puisque  $P(T_a^* < \infty) = 1$ , où  $T_a^*$  est le premier temps de passage d'un mouvement brownien de dérive  $\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 u} > 0$  et de volatilité  $\sigma > 0$  à travers une barrière  $a > 0$ . Puisque la dérive et la barrière sont de même signe, la probabilité que la barrière soit éventuellement atteinte est 1 en vertu des résultats de la fin de la section 1.2.  $\square$

Par conséquent, puisque  $\Phi_{T_a}(u) = \mathcal{L}\{f\}(u)$ , on conclut que la fonction pour laquelle  $\Phi_{T_a}$  est la transformée de Laplace est  $f$ . La densité du premier temps de passage de  $B(t)$  est donc  $f(t)$ , ce qui concorde avec les résultats trouvés au chapitre précédent par le théorème de Girsanov.

## 2.5 Dérivation du premier temps de passage avec deux états

Dans cette section, nous allons appliquer la méthodologie décrite plus haut pour tenter d'arriver à une forme explicite pour la distribution du premier temps de passage d'un mouvement brownien avec changements de régime où il y a deux

états.

La première étape sera de trouver la factorisation de Wiener-Hopf associé au processus  $(B(t), \Theta(t))$ . Le résultat sera lié aux racines de l'équation de Cramér-Lundberg donnée par

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2\beta^2 + \mu_1\beta + q_{11} - u\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_2^2\beta^2 + \mu_2\beta + q_{22} - u\right) - q_{11}q_{22} = 0,$$

où  $q_{11}$  et  $q_{22}$  sont les valeurs sur la diagonale du générateur infinitésimal de  $\Theta(t)$ .

Le lemme suivant s'avérera nécessaire à la factorisation de Wiener-Hopf.

**Lemme 2.3.** L'équation de Cramér-Lundberg

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2\beta^2 + \mu_1\beta + q_{11} - u\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_2^2\beta^2 + \mu_2\beta + q_{22} - u\right) - q_{11}q_{22} = 0$$

admet 4 racines réelles distinctes,  $-\infty < \beta_{1,u} < \beta_{2,u} < 0 < \beta_{3,u} < \beta_{4,u} < +\infty$ .

*Démonstration.* Posons

$$f(\beta) = \left(\frac{1}{2}\sigma_1^2\beta^2 + \mu_1\beta + q_{11} - u\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_2^2\beta^2 + \mu_2\beta + q_{22} - u\right) - q_{11}q_{22}$$

pour  $\beta \in \mathbb{R}$ . Soient  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les deux racines du polynôme

$$p(\theta) = \frac{1}{2}\sigma_1^2\theta^2 + \mu_1\theta + q_{11} - u.$$

D'une part, on a  $f(0) = u^2 - uq_{11} - uq_{22} = u(u - q_{11} - q_{22}) > 0$  étant donné que  $u > 0$  dans le contexte de Wiener-Hopf et  $q_{11}, q_{22} < 0$  puisque ce sont les entrées sur la diagonale principale d'un générateur infinitésimal. Par ailleurs, on

a  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} f(\beta) = \infty > 0$  et  $\lim_{\beta \rightarrow -\infty} f(\beta) = \infty > 0$ .

On a aussi  $f(\theta_1) = f(\theta_2) = -q_{11}q_{22} < 0$ . Par ailleurs, on calcule

$$\begin{aligned} \theta_1\theta_2 &= \left( \frac{-\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 2\sigma_1^2(q_{11} - u)}}{\sigma_1^2} \right) \left( \frac{-\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 2\sigma_1^2(q_{11} - u)}}{\sigma_1^2} \right) \\ &= \frac{\mu_1^2 - (\mu_1^2 - 2\sigma_1^2(q_{11} - u))}{\sigma_1^4} \\ &= \frac{2(q_{11} - u)}{\sigma_1^2} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Comme  $\mu_1^2 - 2\sigma_1^2(q_{11} - u) > 0$ , on a  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ . Puisque leur produit est négatif,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont de signes opposés, avec  $\theta_1 > 0$  et  $\theta_2 < 0$ .

Puisque  $f(\beta)$  est continue pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ , on conclut qu'il existe 4 racines réelles distinctes à l'équation  $f(\beta) = 0$ , soit  $\beta_{1,u} \in (-\infty, \theta_2)$ ,  $\beta_{2,u} \in (\theta_2, 0)$ ,  $\beta_{3,u} \in (0, \theta_1)$  et  $\beta_{4,u} \in (\theta_1, \infty)$ .  $\square$

À l'aide de ce lemme, il nous sera possible de trouver la factorisation de Wiener-Hopf de  $(B(t), \Theta(t))$ .

**Théorème 2.4.** Soit  $\{B(t) : t > 0\}$  un mouvement brownien avec changement de régime décrit par la définition 2.2.1 avec  $S = 2$  régimes. La factorisation de Wiener-Hopf  $(Q_+, Q_-)$  de ce modèle est donnée par

$$\begin{aligned} Q_+ &= \begin{pmatrix} \frac{-\beta_{3,u}\beta_{4,u} + 2(q_{11} - u)/\sigma_1^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} & \frac{-2q_{11}/\sigma_1^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} \\ \frac{-2q_{22}/\sigma_2^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} & \frac{-\beta_{3,u}\beta_{4,u} + 2(q_{22} - u)/\sigma_2^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} \end{pmatrix}, \\ Q_- &= \begin{pmatrix} \frac{\beta_{1,u}\beta_{2,u} - 2(q_{11} - u)/\sigma_1^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} & \frac{2q_{11}/\sigma_1^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} \\ \frac{2q_{22}/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} & \frac{\beta_{1,u}\beta_{2,u} - 2(q_{22} - u)/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où  $-\infty < \beta_{1,u} < \beta_{2,u} < 0 < \beta_{3,u} < \beta_{4,u} < +\infty$  sont les racines de l'équation de Cramér-Lundberg associée aux paramètres du modèle.

*Démonstration.* Pour trouver la factorisation de Wiener-Hopf, il suffit de trouver  $-Q_+$  et  $Q_- \in \mathcal{Q}_2$  satisfaisant l'équation de la définition 2.3.1, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} P^2 + \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} q_{11} - u & -q_{11} \\ -q_{22} & q_{22} - u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u > 0.$$

Posons  $Q_- = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . On obtient alors un système de 4 équations quadratiques avec 4 inconnues. Le terme d'en haut à gauche nous permet de déduire

$$\frac{1}{2} \sigma_1^2 (a_{11}^2 + a_{12} a_{21}) + \mu_1 a_{11} + q_{11} - u = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$a_{12} a_{21} = -\frac{2(q_{11} - u)}{\sigma_1^2} - \frac{2\mu_1}{\sigma_1^2} a_{11} - a_{11}^2.$$

De plus, le terme d'en haut à droite nous donne l'équation

$$\frac{1}{2} \sigma_1^2 a_{12} (a_{11} + a_{22}) + \mu_1 a_{12} - q_{11} = 0,$$

ou, de façon équivalente,

$$a_{12} = \frac{2q_{11}}{\sigma_1^2 (a_{11} + a_{22} + 2\mu_1/\sigma_1^2)}.$$

La clé pour trouver  $Q_-$  sera de trouver ses valeurs propres ainsi que les vecteurs propres qui leur sont associés. On remarque d'abord que  $Q_-$  a deux valeurs propres réelles non-positives  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 0$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \det(Q_- - \lambda I_2) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}). \end{aligned}$$

Puisque  $Q_- \in \mathcal{Q}_2$ , on doit avoir  $a_{12}, a_{21} \geq 0$  et  $a_{11}, a_{22} \leq 0$ . Les solutions à l'équation  $\det(Q_- - \lambda I_2) = 0$  sont réelles car le discriminant est

$$\begin{aligned} [-(a_{11} + a_{22})]^2 - 4(1)(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) &= a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11} a_{22} + 4a_{12} a_{21} \\ &= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12} a_{21} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Soient  $v_1$  et  $v_2$  les vecteurs propres associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  respectivement. En vertu de l'équation de Wiener-Hopf, on a pour tout  $u > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} Q_-^2 + \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} Q_- + \begin{pmatrix} q_{11} - u & -q_{11} \\ -q_{22} & q_{22} - u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} Q_-^2 + \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} Q_- + \begin{pmatrix} q_{11} - u & -q_{11} \\ -q_{22} & q_{22} - u \end{pmatrix} \right] v_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_i \\ \Rightarrow & \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \lambda_i^2 + \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \lambda_i + \begin{pmatrix} q_{11} - u & -q_{11} \\ -q_{22} & q_{22} - u \end{pmatrix} \right] v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut résoudre l'équation ci-haut en proposant comme solutions

$$\lambda_1 = \beta_{1,u}, v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{1,u} + q_{22} - u \\ q_{22} \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda_2 = \beta_{2,u}, v_2 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \end{pmatrix}.$$

En effet, on remarque qu'en effectuant les opérations du côté gauche, on obtient un vecteur dont les deux composantes sont l'équation de Cramér-Lundberg avec  $\beta = \beta_{i,u}, i \in \{1, 2\}$ . Puisque  $\beta_{1,u}$  et  $\beta_{2,u}$  sont les racines de cette équation, on a bien l'égalité.

Ensuite, puisque la somme des valeurs propres d'une matrice est sa trace et que le produit de ses valeurs propres est son déterminant, on déduit  $a_{11} + a_{22} = \beta_{1,u} + \beta_{2,u}$  et  $\det(Q_-) = \beta_{1,u} \beta_{2,u}$ .

Cela nous permet de déduire

$$a_{12} = \frac{2q_{11}}{\sigma_1^2(a_{11} + a_{22} + 2\mu_1/\sigma_1^2)} = \frac{2q_{11}/\sigma_1^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2}.$$



On a aussi  $\det(Q_-) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}(\beta_{1,u} + \beta_{2,u} - a_{11}) - a_{12}a_{21} = \beta_{1,u}\beta_{2,u}$ .

On peut alors trouver  $a_{11}$  en se souvenant que

$$\begin{aligned} a_{12}a_{21} &= -\frac{2(q_{11} - u)}{\sigma_1^2} - \frac{2\mu_1}{\sigma_1^2}a_{11} - a_{11}^2 \\ \Leftrightarrow a_{11}(\beta_{1,u} + \beta_{2,u}) &= -\frac{2(q_{11} - u)}{\sigma_1^2} - \frac{2\mu_1}{\sigma_1^2}a_{11} + a_{11}(\beta_{1,u} + \beta_{2,u} - a_{11}) - a_{12}a_{21} \\ \Leftrightarrow a_{11}(\beta_{1,u} + \beta_{2,u}) &= -\frac{2(q_{11} - u)}{\sigma_1^2} - \frac{2\mu_1}{\sigma_1^2}a_{11} + \beta_{1,u}\beta_{2,u} \\ \Leftrightarrow a_{11} &= \frac{\beta_{1,u}\beta_{2,u} - 2(q_{11} - u)/\sigma_1^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2}. \end{aligned}$$

De façon analogue, il suffit d'échanger le triplet  $(\sigma_1^2, \mu_1, q_{11})$  pour  $(\sigma_2^2, \mu_2, q_{22})$  dans la toute première équation de la preuve afin de trouver les deux termes du bas, soit

$$a_{21} = \frac{2q_{22}/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2}$$

et

$$a_{22} = \frac{\beta_{1,u}\beta_{2,u} - 2(q_{22} - u)/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2}.$$

Cela nous donne bien

$$Q_- = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{1,u}\beta_{2,u} - 2(q_{11} - u)/\sigma_1^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} & \frac{2q_{11}/\sigma_1^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} \\ \frac{2q_{22}/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} & \frac{\beta_{1,u}\beta_{2,u} - 2(q_{22} - u)/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} \end{pmatrix},$$

tel que mentionné dans l'énoncé du théorème.

Finalement, par symétrie (en remplaçant  $\mu_1$  par  $-\mu_1$ ,  $\mu_2$  par  $-\mu_2$ ,  $\beta_{1,u}$  par  $-\beta_{4,u}$  et  $\beta_{2,u}$  par  $-\beta_{3,u}$  dans l'équation de Wiener-Hopf où l'on substitue  $-Q_+$  par ses valeurs propres), on obtient

$$Q_+ = \begin{pmatrix} \frac{-\beta_{3,u}\beta_{4,u} + 2(q_{11} - u)/\sigma_1^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} & \frac{-2q_{11}/\sigma_1^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} \\ \frac{-2q_{22}/\sigma_2^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} & \frac{-\beta_{3,u}\beta_{4,u} + 2(q_{22} - u)/\sigma_2^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} \end{pmatrix}.$$

□

Afin de s'assurer qu'il s'agit bel et bien de l'unique factorisation de Wiener-Hopf, il faudrait vérifier que  $Q_- \in \mathcal{Q}_2$  et  $Q_+ \in \mathcal{Q}_2$ .

**Lemme 2.5.** Les matrices trouvées de la factorisation de Wiener-Hopf proposée au théorème 2.4,  $Q_- = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{1,u}\beta_{2,u} - 2(q_{11} - u)/\sigma_1^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} & \frac{2q_{11}/\sigma_1^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} \\ \frac{2q_{22}/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} & \frac{\beta_{1,u}\beta_{2,u} - 2(q_{22} - u)/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} \end{pmatrix}$  et  $Q_+ = \begin{pmatrix} \frac{-\beta_{3,u}\beta_{4,u} + 2(q_{11} - u)/\sigma_1^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} & \frac{-2q_{11}/\sigma_1^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} \\ \frac{-2q_{22}/\sigma_2^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} & \frac{-\beta_{3,u}\beta_{4,u} + 2(q_{22} - u)/\sigma_2^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} \end{pmatrix}$  sont des matrices réelles génératrices irréductibles, c'est-à-dire  $Q_-, Q_+ \in \mathcal{Q}_2$ .

*Démonstration.* Il faut vérifier que la somme de chaque ligne de  $Q_-$  et  $Q_+$  est non-positive et que les éléments non-diagonaux de ces matrices sont non-négatifs. Pour ce faire, il suffit de vérifier que le dénominateur de chaque élément de  $Q_-$  est négatif et que le dénominateur de chaque élément de  $Q_+$  est positif.

En se rappelant la démonstration du lemme 2.3, on a  $\beta_{1,u} < \theta_2$ ,  $\beta_{2,u} \in (\theta_2, 0)$ ,  $\beta_{3,u} \in (0, \theta_1)$  et  $\beta_{4,u} > \theta_1$ , avec  $\theta_1 = \frac{-\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 2\sigma_1^2(q_{11} - u)}}{\sigma_1^2}$  et aussi  $\theta_2 = \frac{-\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 2\sigma_1^2(q_{11} - u)}}{\sigma_1^2}$ .

D'abord, on a

$$\begin{aligned} \beta_{1,u} + \beta_{2,u} &< \theta_2 + 0 \\ \Leftrightarrow \beta_{1,u} + \beta_{2,u} &< \frac{-\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 2\sigma_1^2(q_{11} - u)}}{\sigma_1^2} \\ \Leftrightarrow \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2 &< \frac{\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 2\sigma_1^2(q_{11} - u)}}{\sigma_1^2} \\ \Leftrightarrow \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2 &< -\theta_1 \\ \Rightarrow \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2 &< 0 \end{aligned}$$

puisque  $\theta_1$  est strictement positif.

De façon analogue, on montre que  $\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2 > 0$  en commençant par  $\beta_{3,u} + \beta_{4,u} > \theta_1$ . Pour montrer les deux autres inégalités, il suffit d'appliquer le même raisonnement en considérant plutôt les racines du polynôme

$$p'(\theta) = \frac{1}{2}\sigma_2^2\theta^2 + \mu_2\theta + q_{22} - u.$$

On obtient alors comme nouvelles racines  $\theta'_1 = \frac{-\mu_2 + \sqrt{\mu_2^2 - 2\sigma_2^2(q_{22} - u)}}{\sigma_2^2} > 0$  et  $\theta'_2 = \frac{-\mu_2 - \sqrt{\mu_2^2 - 2\sigma_2^2(q_{22} - u)}}{\sigma_2^2} < 0$ . Les inégalités restantes se montrent ainsi de façon analogue aux premières.  $\square$

Maintenant que nous avons bel et bien l'unique factorisation de Wiener-Hopf associée à  $(B(t), \Theta(t))$ , la prochaine étape pour l'obtention de la transformée de Laplace du premier temps de passage est de calculer l'exponentielle des matrices  $Q_-$  et  $Q_+$ .

**Lemme 2.6.** Pour tout  $k > 0$ , les exponentielles des matrices  $Q_+$  et  $Q_-$  sont données respectivement par

$$\exp(Q_+k) = \frac{\beta_{3,u}e^{-k\beta_{4,u}} - \beta_{4,u}e^{-k\beta_{3,u}}}{\beta_{3,u} - \beta_{4,u}}I_2 + \frac{e^{-k\beta_{3,u}} - e^{-k\beta_{4,u}}}{\beta_{3,u} - \beta_{4,u}}Q_+$$

et

$$\exp(Q_-k) = \frac{\beta_{1,u}e^{k\beta_{2,u}} - \beta_{2,u}e^{k\beta_{1,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}}I_2 + \frac{e^{k\beta_{1,u}} - e^{k\beta_{2,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}}Q_-,$$

où  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice identité  $2 \times 2$ .

*Démonstration.* Nous allons faire les calculs pour l'exponentielle de  $Q_-$ . La démonstration avec  $Q_+$  se fait de façon analogue.

Supposons  $Q_-$  diagonalisable telle que  $Q_- = SAS^{-1}$ . Alors, par définition d'ex-

ponentielle matricielle, on aurait

$$\begin{aligned}
 \exp(Q_- k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (kQ_-)^j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j}{j!} (S\Lambda S^{-1})^j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j}{j!} S\Lambda^j S^{-1} \\
 &= S \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k\Lambda)^j}{j!} \right) S^{-1} \\
 &= S \begin{pmatrix} e^{k\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{k\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}
 \end{aligned}$$

Or, on sait que  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de  $Q_-$  et  $S$  est composée des vecteurs propres associés. Les valeurs propres et vecteurs propres de  $Q_-$  ont déjà été trouvés dans la preuve du théorème 2.2. On a  $\lambda_1 = \beta_{1,u}$ ,  $\lambda_2 = \beta_{2,u}$  et  $S = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{1,u} + q_{22} - u & q_{11} \\ q_{22} & \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \end{pmatrix}$ .

Comme il s'agit d'une matrice  $2 \times 2$ , on peut facilement calculer

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u & -q_{11} \\ -q_{22} & \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{1,u} + q_{22} - u \end{pmatrix},$$

avec  $\det(S) = \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{1,u} + q_{22} - u \right) \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right) - q_{11} q_{22}$ .

Pour vérifier que la factorisation en termes de  $Q_-$  et  $I_2$  est juste, on peut procéder terme par terme en posant  $\exp(Q_- k) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ,  $Q_- = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  et  $S =$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}.$$

D'abord, montrons  $b_{11} = \frac{e^{k\beta_{1,u}} - e^{k\beta_{2,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} a_{11} + \frac{\beta_{1,u} e^{k\beta_{2,u}} - \beta_{2,u} e^{k\beta_{1,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}}$ .

D'une part, on calcule directement  $b_{11} = \frac{1}{\det(S)} (e^{k\beta_{1,u}} s_{11} s_{22} - e^{k\beta_{2,u}} q_{11} q_{22})$  en effectuant le produit matriciel. Ensuite, puisque  $\beta_{1,u}$  et  $\beta_{2,u}$  sont des racines de l'équation de Cramér-Lundberg, on a

$$\begin{aligned} q_{11} q_{22} &= \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{1,u} + q_{11} - u \right) \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{1,u} + q_{22} - u \right) \text{ et} \\ q_{11} q_{22} &= \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right) \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{2,u} + q_{22} - u \right). \end{aligned}$$

En utilisant la seconde égalité ci-haut dans  $\det(S)$ , on a

$$\begin{aligned} \det(S) &= \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{1,u} + q_{22} - u \right) \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right) - q_{11} q_{22} \\ &= \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right) \left( \frac{\sigma_2^2}{2} (\beta_{1,u}^2 - \beta_{2,u}^2) + \mu_2 (\beta_{1,u} - \beta_{2,u}) \right) \\ &= \frac{\sigma_2^2}{2} \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right) (\beta_{1,u} - \beta_{2,u}) \left( \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} \right) \end{aligned}$$

Puis, en calculant  $b_{11}$  à l'aide du produit matriciel, on a

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{e^{k\beta_{1,u}} \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{1,u} + q_{22} - u \right) \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right)}{\frac{\sigma_2^2}{2} \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right) (\beta_{1,u} - \beta_{2,u}) \left( \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} \right)} \\ &\quad - \frac{e^{k\beta_{2,u}} q_{11} q_{22}}{\frac{\sigma_2^2}{2} \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right) (\beta_{1,u} - \beta_{2,u}) \left( \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{k\beta_{1,u}} \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{1,u} + q_{22} - u \right) \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right)}{\frac{\sigma_2^2}{2} \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right) (\beta_{1,u} - \beta_{2,u}) \left( \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} \right)} \\
&= \frac{e^{k\beta_{2,u}} \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right) \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{2,u} + q_{22} - u \right)}{\frac{\sigma_2^2}{2} \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right) (\beta_{1,u} - \beta_{2,u}) \left( \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} \right)} \\
&= \frac{e^{k\beta_{1,u}} \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{1,u} + q_{22} - u \right) - e^{k\beta_{2,u}} \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{2,u} + q_{22} - u \right)}{\frac{\sigma_2^2}{2} (\beta_{1,u} - \beta_{2,u}) \left( \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} \right)} \\
&= \frac{(e^{k\beta_{1,u}} - e^{k\beta_{2,u}}) \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u} \beta_{2,u}}{2} + q_{22} - u \right)}{\frac{\sigma_2^2}{2} (\beta_{1,u} - \beta_{2,u}) \left( \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} \right)} \\
&+ \frac{(\beta_{1,u} e^{k\beta_{2,u}} - \beta_{2,u} e^{k\beta_{1,u}}) \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u}}{2} + \frac{\sigma_2^2 \beta_{2,u}}{2} + \mu_2 \right)}{\frac{\sigma_2^2}{2} (\beta_{1,u} - \beta_{2,u}) \left( \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} \right)} \\
&= \frac{e^{k\beta_{1,u}} - e^{k\beta_{2,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} a_{11} + \frac{\beta_{1,u} e^{k\beta_{2,u}} - \beta_{2,u} e^{k\beta_{1,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}}.
\end{aligned}$$

Pour montrer  $b_{21} = \frac{e^{k\beta_{1,u}} - e^{k\beta_{2,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} a_{21}$ , on procède de façon analogue à partir de  $b_{21} = \frac{e^{k\beta_{1,u}} s_{22} q_{22} - e^{k\beta_{2,u}} s_{22} q_{22}}{\det(S)}$ . On a alors

$$\begin{aligned} b_{21} &= \frac{(e^{k\beta_{1,u}} - e^{k\beta_{2,u}}) q_{22} \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right)}{\frac{\sigma_2^2}{2} \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{2,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{2,u} + q_{11} - u \right) (\beta_{1,u} - \beta_{2,u}) \left( \beta_{1,u} + \beta_{2,u} + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} \right)} \\ &= \frac{e^{k\beta_{1,u}} - e^{k\beta_{2,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} \left( \frac{2q_{22}/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} \right) \\ &= \frac{e^{k\beta_{1,u}} - e^{k\beta_{2,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} a_{21}. \end{aligned}$$

Enfin, on procède de façon analogue pour  $q_{12}$  et  $q_{22}$ , mais en utilisant plutôt l'identité  $q_{11}q_{22} = \left( \frac{\sigma_1^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_1 \beta_{1,u} + q_{11} - u \right) \left( \frac{\sigma_2^2 \beta_{1,u}^2}{2} + \mu_2 \beta_{1,u} + q_{22} - u \right)$  dans l'expression de  $\det(S)$ .  $\square$

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire à l'obtention de la transformée de Laplace du premier temps de passage à travers une barrière fixe, qu'elle soit supérieure ou inférieure.

**Théorème 2.7.** Soit  $\{B(t) : t > 0\}$  un mouvement brownien avec changements de régime décrit par la définition 2.2.1 avec  $S = 2$  régimes. Soit  $\pi_0 = (\bar{\pi}, 1 - \bar{\pi}) = (P(\Theta(0) = 1), P(\Theta(0) = 2))$ , la distribution initiale des états. Alors, la transformée de Laplace du premier temps de passage à une barrière fixe supérieure  $a > B(0) = x$  ou inférieure  $b < x$  est respectivement donnée par

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{a,+\infty}^+(u) &= \frac{\beta_{3,u} e^{-\beta_{4,u}(a-x)} - \beta_{4,u} e^{-\beta_{3,u}(a-x)}}{\beta_{3,u} - \beta_{4,u}} - \frac{e^{-\beta_{4,u}(a-x)} - e^{-\beta_{3,u}(a-x)}}{\beta_{3,u} - \beta_{4,u}} \\ &\quad \times \left( \bar{\pi} \frac{\beta_{3,u} \beta_{4,u} + 2u/\sigma_1^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} + (1 - \bar{\pi}) \frac{\beta_{3,u} \beta_{4,u} + 2u/\sigma_2^2}{\beta_{3,u} + \beta_{4,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} \right), \\ \Psi_{-\infty,b}^-(u) &= \frac{\beta_{1,u} e^{\beta_{2,u}(x-b)} - \beta_{2,u} e^{\beta_{1,u}(x-b)}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} + \frac{e^{\beta_{1,u}(x-b)} - e^{\beta_{2,u}(x-b)}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} \\ &\quad \times \left( \bar{\pi} \frac{\beta_{1,u} \beta_{2,u} + 2u/\sigma_1^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} + (1 - \bar{\pi}) \frac{\beta_{1,u} \beta_{2,u} + 2u/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} \right), \end{aligned}$$

où  $\beta_{1,u} < \beta_{2,u} < 0 < \beta_{3,u} < \beta_{4,u}$  sont les racines de l'équation de Cramér-Lundberg associée au modèle.

*Démonstration.* En vertu du théorème 2.1, on a  $\Psi_{-\infty,b}^-(u) = \pi_0 \exp(Q_-(x-b))\mathbf{1}$ . En posant  $k = (x-b)$  dans le résultat du lemme 2.6, on a

$$\begin{aligned} \Psi_{-\infty,b}^-(u) &= \pi_0 \left( \frac{\beta_{1,u}e^{(x-b)\beta_{2,u}} - \beta_{2,u}e^{(x-b)\beta_{1,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} I_2 + \frac{e^{(x-b)\beta_{1,u}} - e^{(x-b)\beta_{2,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} Q_- \right) \mathbf{1} \\ &= (\bar{\pi} + 1 - \bar{\pi}) \frac{\beta_{1,u}e^{(x-b)\beta_{2,u}} - \beta_{2,u}e^{(x-b)\beta_{1,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} \\ &\quad + \frac{e^{(x-b)\beta_{1,u}} - e^{(x-b)\beta_{2,u}}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} \times \left( \bar{\pi} \frac{\beta_{1,u}\beta_{2,u} - 2(q_{11} - u)/\sigma_1^2 + 2q_{11}/\sigma_1^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} \right. \\ &\quad \left. + (1 - \bar{\pi}) \frac{2q_{22}/\sigma_2^2 + \beta_{1,u}\beta_{2,u} - 2(q_{22} - u)/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} \right) \\ &= \frac{\beta_{1,u}e^{\beta_{2,u}(x-b)} - \beta_{2,u}e^{\beta_{1,u}(x-b)}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} + \frac{e^{\beta_{1,u}(x-b)} - e^{\beta_{2,u}(x-b)}}{\beta_{1,u} - \beta_{2,u}} \\ &\quad \times \left( \bar{\pi} \frac{\beta_{1,u}\beta_{2,u} + 2u/\sigma_1^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_1/\sigma_1^2} + (1 - \bar{\pi}) \frac{\beta_{1,u}\beta_{2,u} + 2u/\sigma_2^2}{\beta_{1,u} + \beta_{2,u} + 2\mu_2/\sigma_2^2} \right). \end{aligned}$$

Pour montrer le résultat pour  $\Psi_{a,+\infty}^+(u)$ , il suffit de poser  $k = (a-x)$  et de procéder de façon analogue en effectuant directement les produits matriciels.  $\square$

Enfin, nous pouvons en déduire une expression analytique pour la fonction de répartition du premier temps de passage d'un tel processus à travers une barrière fixe. Pour ce faire, il suffit d'inverser la transformée de Laplace. Nous arrivons directement à la fonction de répartition du premier temps de passage sans passer par sa densité en vertu de la propriété suivante.

**Lemme 2.8.** Soit  $X$  une variable aléatoire positive continue de densité  $f_X$  et soit  $\mathcal{L}\{f_X\}(u) = E[\exp(-uX)] = \int_0^\infty e^{-ux} f_X(x) dx$  la transformée de Laplace de  $X$ . Alors, la transformée de Laplace de la fonction de répartition de  $X$ ,  $\mathcal{L}\{F_X\}(u)$ , est donnée par

$$\mathcal{L}\{F_X\}(u) := \int_0^\infty e^{-ux} F_X(x) dx = \frac{\mathcal{L}\{f_X\}(u)}{u}.$$



*Démonstration.* Puisque  $X$  est une variable aléatoire positive, on a  $F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt$  pour tout  $x \geq 0$ . On calcule donc

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{F_X\}(u) &= \int_0^\infty e^{-ux} F_X(x) dx \\
 &= \int_0^\infty e^{-ux} \int_0^x f_X(t) dt dx \\
 &= \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-ux} f_X(t) dx dt \quad (\text{en changeant l'ordre d'intégration, Fubini}) \\
 &= \int_0^\infty f_X(t) \left[ -\frac{e^{-ux}}{u} \right] \Big|_{x=t}^{x=\infty} dt \\
 &= \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-ut} f_X(t) dt \\
 &= \frac{\mathcal{L}\{f_X\}(u)}{u},
 \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. □

Pour inverser une transformée de Laplace, il existe un résultat très connu appelé intégrale de Bromwich, qui sera énoncé sans démonstration.

**Lemme 2.9.** (Formule de Bromwich)

Soit  $f$  une fonction ayant comme transformée de Laplace  $\mathcal{L}\{f\}(u)$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Alors, on peut inverser la transformée pour retrouver la fonction en utilisant l'intégrale

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{tu} \mathcal{L}\{f\}(u) du,$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur arbitraire plus grande que la partie réelle de toutes les singularités de  $\mathcal{L}\{f\}(u)$ .

Finalement, grâce aux deux lemmes précédents, on peut inverser la transformée de Laplace trouvée précédemment pour arriver à une expression analytique pour la fonction de répartition du premier temps de passage d'un mouvement brownien avec changements de régime  $B(t)$  à travers une barrière fixe. Notons ce premier

temps de passage  $T_a$  si la barrière  $a$  est supérieure à la valeur initiale du mouvement  $B(0) = x$  et  $T_b$  si la barrière  $b$  est inférieure à  $x$ .

**Théorème 2.10.** Soit  $\{B(t) : t > 0\}$  un mouvement brownien avec changements de régime décrit par la définition 2.2.1 avec  $S = 2$  régimes avec  $P(X(0) = 1) = \bar{\pi}$ . Alors, pour tout  $T > 0$  et tout  $\lambda > 0$ , la distribution du premier temps de passage est donnée par

$$P(T_a \leq T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{T(\lambda+iu)} \frac{\Psi_{a,+\infty}^+(\lambda+iu)}{\lambda+iu} du$$

pour une barrière supérieure  $a$  et par

$$P(T_b \leq T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{T(\lambda+iu)} \frac{\Psi_{-\infty,b}^-(\lambda+iu)}{\lambda+iu} du$$

dans le cas d'une barrière inférieure  $b$ .

Il est important de noter que lorsque  $\Psi^\pm(\cdot)$  est évaluée en des valeurs complexes, la relation d'ordre pour les racines de l'équation de Cramér-Lundberg doit être effectuée sur la partie réelle des racines. En d'autres termes, au lieu d'ordonner  $\beta_{1,u} < \beta_{2,u} < 0 < \beta_{3,u} < \beta_{4,u}$ , la numérotation des racines doit se faire selon la relation  $\text{Re}(\beta_{1,u}) < \text{Re}(\beta_{2,u}) < 0 < \text{Re}(\beta_{3,u}) < \text{Re}(\beta_{4,u})$ , où  $\text{Re}(\cdot)$  désigne la partie réelle d'un nombre complexe.

*Démonstration.* Sans perdre de généralité, supposons qu'on considère une barrière supérieure  $a$ . On a alors  $P(T_a \leq T) = F_{T_a}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{Tu} \mathcal{L}\{F_{T_a}\}(u) du$  par la formule de Bromwich, avec  $\lambda$  supérieur à la partie réelle de toutes les singularités de la transformée de  $F_{T_a}(\cdot)$ .

On a  $\mathcal{L}\{F_{T_a}\}(u) = \frac{\Psi_{a,+\infty}^+(u)}{u}$  par le lemme 2.8. Soit  $T > 0$  et supposons l'existence d'un  $\lambda > 0$  plus grand que la partie réelle de toutes les singularités de  $\Psi_{a,+\infty}^+(\cdot)$ .

On a donc

$$\begin{aligned}
 P(T_a \leq T) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{Tu} \frac{\Psi_{a,+\infty}^+(u)}{u} du \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{T(\lambda+iv)} \frac{\Psi_{a,+\infty}^+(\lambda+iv)}{\lambda+iv} (idv) \quad \left( \text{en posant } v = \frac{u-\lambda}{i} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{T(\lambda+iv)} \frac{\Psi_{a,+\infty}^+(\lambda+iv)}{\lambda+iv} dv,
 \end{aligned}$$

ce qui correspond à l'énoncé.

□

Nous avons maintenant une expression analytique pour la fonction de répartition du premier temps de passage en un point  $T$ . Cependant, cette formule est difficilement utilisable sans l'aide d'un ordinateur puisque le calcul analytique des racines  $\beta_{i,u}$  de l'équation de Cramér-Lundberg (un polynôme de degré 4) est compliqué. Nous pouvons toutefois approximer les racines et évaluer numériquement l'intégrale à l'aide d'un logiciel de calcul, ce qui nous permet d'obtenir les probabilités de premier temps de passage dans un contexte de changements de régime. Nous verrons une application de ce type de modèle au prochain chapitre.



## CHAPITRE III

### APPLICATION FINANCIÈRE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN AVEC CHANGEMENTS DE RÉGIME

Dans ce chapitre, nous allons présenter une application au modèle de mouvement brownien avec changements de régime décrit au chapitre précédent. Nous allons résoudre un problème relatif au premier temps de passage d'un processus utilisé en finance.

En fait, nous allons considérer le problème de portefeuille optimal de Markowitz, comme dans notre premier chapitre, sauf que nous y ajouterons des changements de régime. Nous allons vérifier si la règle du 80% décrite à la section 4 du chapitre 1 tient toujours dans ce cas.

#### 3.1 Description et contexte du problème

Comme précédemment, nous allons considérer une application financière pour le modèle de mouvement brownien avec changements de régime.

On s'intéresse encore une fois au cas d'un investisseur ayant une richesse initiale  $x_0$  et qui souhaite atteindre un objectif  $z$  à un temps  $T$  prédéterminé. On considère un marché constitué de  $m + 1$  produits. D'une part, un compte d'épargne sans risque de taux d'intérêt connu  $r(t)$ , pouvant être décrit par l'équation différentielle

stochastique

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, \quad t \in [0, T].$$

D'autre part,  $m$  actions dont le prix est décrit par

$$dS_i(t) = S_i(t) \left[ \mu_{i, \Theta(t)}(t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij, \Theta(t)}(t)dW_j(t) \right], \quad t \in [0, T], i \in \{1, \dots, m\},$$

où  $\{\Theta(t) : t \in [0, T]\}$  désigne une chaîne de Markov à temps continu à 2 états,  $\mu_{i, \Theta(t)}(t)$  est le taux d'appréciation de l'action  $i$  au temps  $t$  lorsque l'état de la chaîne au temps  $t$  est  $\Theta(t)$ ,  $\sigma_{ij, \Theta(t)}(t)$ , sont les paramètres de volatilité entre les titres  $i$  et  $j$  au temps  $t$  lorsque la chaîne se trouve à l'état  $\Theta(t)$  et les  $W_i(t)$  sont  $m$  mouvements browniens standards indépendants de la chaîne des régimes et indépendants entre eux. De plus, on suppose que pour tous  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  et  $t \in [0, T]$ , les paramètres  $r(t)$ ,  $\mu_{i,1}(t)$ ,  $\mu_{i,2}(t)$ ,  $\sigma_{ij,1}(t)$  et  $\sigma_{ij,2}(t)$  sont connus.

Nous posons les conditions initiales  $S_0(0) = s_0 > 0$ ,  $S_i(0) = s_i > 0$  et nous supposons l'état initial de la chaîne connu. On suppose, sans perdre de généralité, que  $\Theta(0) = 1$  avec probabilité 1. De plus, on ne considère que les cas non-triviaux où  $z > x_0 e^{\int_0^T r(t)dt}$ .

Notons que l'ajout de la chaîne des régimes rend la modélisation boursière un peu plus réaliste. En effet, on peut supposer deux régimes différents correspondant aux états du marché qui sont en alternance, un qui affichera une plus grande hausse des prix des actions (*bull market*), et l'autre qui sera marqué par une hausse plus timide ou encore une baisse (*bear market*). De plus, nous avons supposé  $r(t)$  indépendant de la chaîne des régimes pour simplifier le problème.

Pour alléger la notation, on définit la matrice de covariance

$$\sigma_{\Theta(t)}(t) := (\sigma_{ij, \Theta(t)}(t))_{m \times m}, \quad t \in [0, T],$$

le vecteur

$$B_{\Theta(t)}(t) := (\mu_{1,\Theta(t)}(t) - r(t), \dots, \mu_{m,\Theta(t)}(t) - r(t)), \quad t \in [0, T],$$

et le vecteur

$$\theta_{\Theta(t)}(t) = (\theta_{1,\Theta(t)}(t), \dots, \theta_{m,\Theta(t)}(t)) := B_{\Theta(t)}(t)[\sigma_{\Theta(t)}(t)']^{-1}, \quad t \in [0, T],$$

où  $'$  dénote la transposée vectorielle ou matricielle.

Soit  $X(t)$  la richesse de l'investisseur au temps  $t \in [0, T]$ . En gardant les hypothèses que les échanges d'actions sont autofinancées, sans frais et continus, on peut écrire  $X(t)$  comme

$$dX(t) = [r(t)X(t) + B_{\Theta(t)}(t)\pi(t)]dt + \pi(t)'\sigma_{\Theta(t)}(t)dW(t), \quad t \in [0, T],$$

avec  $X(0) = x_0 > 0$  la richesse initiale,  $\pi(t)$  désignant toujours la valeur des stocks de l'action  $i$  dans le portefeuille au temps  $t$  et  $W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))$  un vecteur contenant les  $m$  mouvements browniens standards indépendants.

Nous considérons le portefeuille efficient  $\pi^z(t) = (\pi_1^z(t), \dots, \pi_m^z(t))'$  qui est défini comme étant le portefeuille optimal selon la stratégie moyenne-variance de Markowitz, c'est-à-dire celui minimisant  $E[(X(T) - z)^2]$  sous la contrainte  $E[X(T)] = z$ .

La stratégie de l'investisseur sera la même qu'à la section 1.3. Il suivra le portefeuille efficient  $\pi^z(t)$  jusqu'à ce que sa richesse  $X(t)$  atteigne la valeur escomptée de  $z$ , soit  $ze^{-\int_t^T r(s)ds}$ . À ce moment, il placera tout son argent dans le compte d'épargne sans risque pour s'assurer d'atteindre son objectif d'investissement au temps  $T$ .

Zhou et Yin (2001) ont montré que si le taux d'intérêt  $r(t)$  ne dépend pas du régime, alors, en supposant que l'état initial du marché est assurément 1, le portefeuille efficient au temps  $t$  dépend du régime en vigueur à ce moment et est

donné par

$$\pi_{\Theta(t)}^z(t) = -[\sigma_{\Theta(t)}(t)\sigma_{\Theta(t)}(t)']^{-1}B_{\Theta(t)}(t)' \left[ X(t) + \lambda e^{-\int_t^T r(s)ds} \right],$$

où

$$\lambda = \frac{z - x_0 P(0, 1) e^{-\int_0^T r(s)ds}}{P(0, 1) e^{-2\int_0^T r(s)ds} - 1}$$

et  $P(t, i)$  est décrit comme la solution du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{\partial P(t, i)}{\partial t} = [\theta_i(t)\theta_i(t)' - 2r(t)]P(t, i) - \sum_{j=1}^2 q_{ij}P(t, j), \\ P(T, i) = 1, \quad \text{pour } t \in [0, T] \text{ et } i \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

Ici,  $q_{ij}$  fait référence aux composantes du générateur infinitésimal  $Q$  de la chaîne des états et  $i$  fait référence aux régimes possibles du marché.

Notons qu'il est possible de montrer que  $P(t, i) > 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et  $i \in \{1, 2\}$ . Il est aussi possible de montrer que  $P(0, \Theta(0)) = P(0, 1) < e^{2\int_0^T r(s)ds}$ . Les détails se trouvent dans la section 6 de Zhou et Yin (2001).

### 3.2 Résolution analytique du problème du premier temps de passage

Dans cette section, on s'intéresse à la probabilité que la valeur escomptée du processus de richesse  $X(t)$  atteigne l'objectif  $z$  au temps  $T$ . En d'autres termes, on définit

$$T_z = \inf \left\{ t \in [0, T] : X(t) = z \exp \left( - \int_t^T r(s)ds \right) \right\},$$

avec  $\inf \emptyset = +\infty$ , et on cherche à évaluer  $P(T_z \leq T)$ . Pour ce faire, nous allons procéder de façon analogue au cas à un seul régime en effectuant un changement de variable sur le processus de richesse  $X(t)$ .

**Théorème 3.1.** Pour tout  $z > x_0 \exp(\int_0^T r(t)dt)$ , on a

$$\begin{aligned} T_z = \inf \left\{ t \in [0, T] : \frac{3}{2} \int_0^t |\theta_{\Theta(s)}(s)|^2 ds + \int_0^t \theta_{\Theta(s)}(s) dW(s) \right. \\ \left. = -\ln(P(0, 1)) + 2 \int_0^t r(s)ds \right\}. \end{aligned}$$



*Démonstration.* Posons  $Y(t) = X(t) + \lambda e^{-\int_t^T r(s)ds}$ . On en déduit

$$dY(t) = dX(t) + r(t)\lambda e^{-\int_t^T r(s)ds} dt, \quad t \in [0, T],$$

avec  $Y(0) = x_0 + \lambda e^{-\int_0^T r(s)ds}$  comme condition initiale. Puis, en substituant  $\pi(t)$  par le portefeuille efficient  $\pi_{\Theta(t)}^z(t)$  dans l'équation de richesse, on arrive à

$$\begin{aligned} dY(t) &= \{r(t)Y(t) - Y(t)B_{\Theta(t)}(t)[\sigma_{\Theta(t)}(t)\sigma_{\Theta(t)}(t)']^{-1}B_{\Theta(t)}(t)'\} dt \\ &\quad - Y(t)B_{\Theta(t)}(t)[\sigma_{\Theta(t)}(t)']^{-1}\sigma_{\Theta(t)}(t)^{-1}\sigma_{\Theta(t)}(t)dW(t) \\ &= Y(t)[r(t) - |\theta_{\Theta(t)}(t)|^2]dt - Y(t)\theta_{\Theta(t)}(t)dW(t), \end{aligned}$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme vectorielle.

Or, cette équation différentielle stochastique se résout de façon similaire à celle du mouvement brownien géométrique ou du processus analogue du chapitre 1. Elle admet comme unique solution

$$Y(t) = Y(0) \exp \left( \int_0^t [r(s) - \frac{3}{2}|\theta_{\Theta(s)}(s)|^2]ds - \int_0^t \theta_{\Theta(s)}(s)dW(s) \right), \quad t \in [0, T].$$

En posant  $Z(t) = \exp \left( \int_0^t [r(s) - \frac{3}{2}|\theta_{\Theta(s)}(s)|^2]ds - \int_0^t \theta_{\Theta(s)}(s)dW(s) \right)$  pour allé-

ger la notation, on a

$$\begin{aligned}
X(t) - ze^{-\int_t^T r(s)ds} &= Y(t) - (\lambda + z)e^{-\int_t^T r(s)ds} \\
&= [x_0 + \lambda e^{-\int_0^t r(s)ds}]Z(t) - (\lambda + z)e^{-\int_t^T r(s)ds} \\
&= Z(t) \left[ \frac{x_0 - x_0 P(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds}}{1 - P(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_0 P(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds} - ze^{-\int_0^T r(s)ds}}{1 - P(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds}} \right] \\
&\quad e^{-\int_t^T r(s)ds} \left[ \frac{x_0 P(0,1)e^{-\int_0^T r(s)ds} - z}{1 - P(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{z - zP(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds}}{1 - P(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds}} \right] \\
&= \left[ \frac{x_0 - ze^{-\int_0^T r(s)ds}}{1 - P(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds}} \right] Z(t) \\
&\quad + \left[ \frac{zP(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds} - x_0 P(0,1)e^{-\int_0^T r(s)ds}}{1 - P(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds}} \right] \times \\
&\quad e^{-\int_t^T r(s)ds} \\
&= \frac{x_0 - ze^{-\int_0^T r(s)ds}}{1 - P(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds}} [Z(t) \\
&\quad - P(0,1)e^{-\int_0^T r(s)ds} e^{-\int_t^T r(s)ds}].
\end{aligned}$$

Puisque  $x_0 - ze^{-\int_0^T r(s)ds} < 0$  et  $1 - P(0,1)e^{-2\int_0^T r(s)ds} > 0$ , on en déduit que  $X(t) = ze^{-\int_t^T r(s)ds}$  si et seulement si  $Z(t) = P(0,1)e^{-\int_0^T r(s)ds} e^{-\int_t^T r(s)ds}$ , ou encore

$$\frac{3}{2} \int_0^t |\theta_{\Theta(s)}(s)|^2 ds + \int_0^t \theta_{\Theta(s)}(s) dW(s) = 2 \int_0^T r(s) ds - \ln P(0,1)$$

en prenant le logarithme de chaque côté et avec un peu d'algèbre.  $\square$

Le processus du côté gauche de l'équation ci-haut est un mouvement brownien avec changements de régime si  $\theta_1(t) = \theta_1$  et  $\theta_2(t) = \theta_2$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Notons que de supposer les paramètres  $r(t)$ ,  $\sigma_i(t)$  et  $\mu_i(t)$  constants pour tout temps  $t \in [0, T]$  et tout régime  $i \in \{1, 2\}$  est une hypothèse suffisante, mais non nécessaire, pour satisfaire à cette condition.

En travaillant avec cette nouvelle hypothèse, nous sommes alors en train de considérer un mouvement brownien à deux régimes dont les paramètres sont donnés par

$$\begin{cases} \mu_1^* = \frac{3}{2}|\theta_1|^2, \sigma_1^* = |\theta_1| \\ \mu_2^* = \frac{3}{2}|\theta_2|^2, \sigma_2^* = |\theta_2| \end{cases}$$

et nous nous intéressons au premier temps de passage à travers la barrière supérieure

$$\begin{aligned} a^* &= 2 \int_0^T r(s) ds - \ln P(0, 1) \\ &= 2rT - \ln P(0, 1). \end{aligned}$$

Il est important de noter que la position initiale du processus est  $X(0) = 0$  et le régime initial est  $\Theta(0) = 1$  avec probabilité 1. Cela nous permet de déduire une propriété très intéressante de ce modèle. En effet, on verra que comme dans le cas à un seul régime, la probabilité d'atteinte de l'objectif ne dépend ni de la richesse initiale, ni de l'objectif visé.

Par ailleurs, pour obtenir la valeur de la barrière, il faut trouver la valeur de  $P(0, 1)$  qui avait été définie par le système d'équation différentielles

$$\begin{cases} \frac{\partial P(t, i)}{\partial t} = [|\theta_i|^2 - 2r(t)] P(t, i) - \sum_{j=1}^2 q_{ij} P(t, j), \\ P(T, i) = 1, \quad \text{pour } t \in [0, T] \text{ et } i \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

**Théorème 3.2.** Pour tout  $t \in [0, T]$ , on a

$$\begin{bmatrix} P(t, 1) \\ P(t, 2) \end{bmatrix} = \exp(-(T-t)M) * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

où  $\exp(\cdot)$  dénote l'exponentielle matricielle et

$$M = \begin{bmatrix} |\theta_1|^2 - q_{11} - 2r & q_{11} \\ q_{22} & |\theta_2|^2 - q_{22} - 2r \end{bmatrix}.$$

*Démonstration.* En écrivant  $P(t) = \begin{bmatrix} P(t, 1) \\ P(t, 2) \end{bmatrix}$ , on peut alors réécrire le système comme l'équation différentielle matricielle

$$\frac{dP(t)}{dt} = MP(t), \quad P(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Or, il est bien connu et rappelé par la définition 2.3.2 que l'unique solution à cette équation est donnée par

$$P(t) = \exp(tM)P(0).$$

En vertu des propriétés de l'exponentielle matricielle, on obtient

$$\begin{aligned} P(t) &= \exp(tM)P(0) \\ &= \exp((t - T + T)M)P(0) \\ &= \exp(-(T - t)M) \exp(TM)P(0) \\ &= \exp(-(T - t)M)P(T) \\ &= \exp(-(T - t)M) * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Avec ce résultat, nous pouvons facilement déduire la valeur de  $P(0, 1)$  faisant partie de la barrière à atteindre. En effet, il suffit de prendre la première composante lorsqu'on évalue en  $t = 0$ .

Enfin, pour évaluer  $P(T_z \leq T)$ , il suffit d'inverser la transformée de Laplace donnée à la fin de la section 2.5 pour le premier temps de passage d'un mouvement brownien avec deux régimes. Les paramètres à utiliser sont décrits plus haut.

Voici un exemple pour illustrer le tout. Supposons que l'on modélise un marché de  $m = 10$  actions et un titre sans risque par le modèle moyenne-variance de Markowitz avec changements de régime. Pour simplifier les calculs, supposons que

les 10 actions proviennent de secteurs économiques indépendants, ce qui signifie que  $\sigma_{ij,\Theta(t)}(t) = 0$  pour tout  $t > 0$  si  $i \neq j$ .

Considérons les paramètres de marché suivants : pour l'action  $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ , la volatilité et la dérive au temps  $t$  sont constantes et identiques lorsque le régime  $k \in \{1, 2\}$  est en vigueur,  $\sigma_{ii,1}(t) = \sigma_1 = 0.05$ ,  $\sigma_{ii,2}(t) = \sigma_2 = 0.1$ , et  $\mu_{i,1}(t) = \mu_1 = 0.03$ ,  $\mu_{i,2}(t) = \mu_2 = 0.06$ . Supposons que le taux d'intérêt du titre sans risque est constant pour tout  $t > 0$ ,  $r(t) = r = 0.01$ . De plus, les temps entre les changements de régimes sont indépendants et de loi exponentielle de moyenne 1. Un investisseur utilise la stratégie moyenne-variance de Markowitz en espérant faire croître une richesse initiale  $x_0 = 1$  de 20% ( $z = 1.20$ ) en plaçant dès que possible sa richesse dans le titre sans risque. On s'intéresse à la probabilité d'atteindre cet objectif d'investissement au temps  $T = 1$ .

Puisque pour  $k \in \{1, 2\}$ , les valeurs  $r_k(t)$ ,  $\sigma_k(t)$  et  $\mu_k(t)$  sont fixes sur l'horizon  $[0, T]$  pour tout  $T > 0$ , il s'ensuit que la valeur de  $\theta_k(t)$  est également constante sur  $[0, T]$ , que nous noterons  $\theta_k$ . Par conséquent, la distribution de  $T_z$ , l'instant où l'on place toute la richesse dans le compte d'épargne, correspond à celle du premier temps de passage d'un mouvement brownien avec changements de régimes de paramètres  $\mu_1^* = \frac{3}{2}|\theta_1|^2$ ,  $\mu_2^* = \frac{3}{2}|\theta_2|^2$  et  $\sigma_1^* = |\theta_1|$ ,  $\sigma_2^* = |\theta_2|$  à travers une barrière fixe  $a^* = 2rT - \ln P(0, 1)$ . Notons que ce processus a 0 comme valeur initiale.

Puis, on calcule  $|\theta_1| = \sqrt{B_1(t)[\sigma_1(t)']^{-1}[\sigma_1(t)]^{-1}B_1(t)'} = \sqrt{\frac{10 \cdot (0.03 - 0.01)^2}{0.05^2}} = 1.6$  et  $|\theta_2| = \sqrt{B_2(t)[\sigma_2(t)']^{-1}[\sigma_2(t)]^{-1}B_2(t)'} = \sqrt{\frac{10 \cdot (0.06 - 0.01)^2}{0.1^2}} = 2.5$ . De plus, on a  $M = \begin{bmatrix} 1.6^2 + 1 - 2 * 0.01 & -1 \\ -1 & 2.5^2 + 1 - 2 * 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.54 & -1 \\ -1 & 7.23 \end{bmatrix}$ , ce qui nous permettra d'évaluer numériquement  $P(0, 1)$ .

Comme  $T = 1$ , on a

$$\begin{aligned} P(0) &= \exp(-M) * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.0352 & 0.0088 \\ 0.0088 & 0.0028 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.0439 \\ 0.0116 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que la barrière à atteindre dans cet exemple est  $2rT - \ln P(0, 1) = 2 * 0.01 * 1 - \ln(0.0439) = 3.145$ .

On calcule ensuite la probabilité que le premier temps de passage à travers cette barrière soit inférieur à  $T = 1$  pour un mouvement brownien à 2 régimes donnés par

$$\left( \begin{array}{l} \mu_1 = \frac{3}{2}|\theta_1|^2 = 3.84, \sigma_1 = |\theta_1| = 1.6 \\ \mu_2 = \frac{3}{2}|\theta_2|^2 = 9.375, \sigma_2 = |\theta_2| = 2.5 \end{array} \right).$$

Avec l'aide de MATLAB, on a finalement  $P(T_z \leq 1) = 0.8652$ . Cela signifie qu'en suivant la stratégie décrite plus tôt, l'investisseur a une probabilité de 86,52% d'atteindre son objectif d'augmenter sa richesse initiale de 20%.

### 3.3 La règle du 80% avec deux régimes

Il est naturel de se demander si l'ajout de changements de régime à ce modèle change la validité de la règle du 80%. On se souvient qu'au chapitre 1, il avait été montré qu'en utilisant la même stratégie avec un seul régime, la probabilité d'atteinte d'un objectif d'investissement était toujours supérieure à 80% et ce, indépendamment de la richesse initiale, de l'objectif à atteindre, de l'horizon et des paramètres du marché.

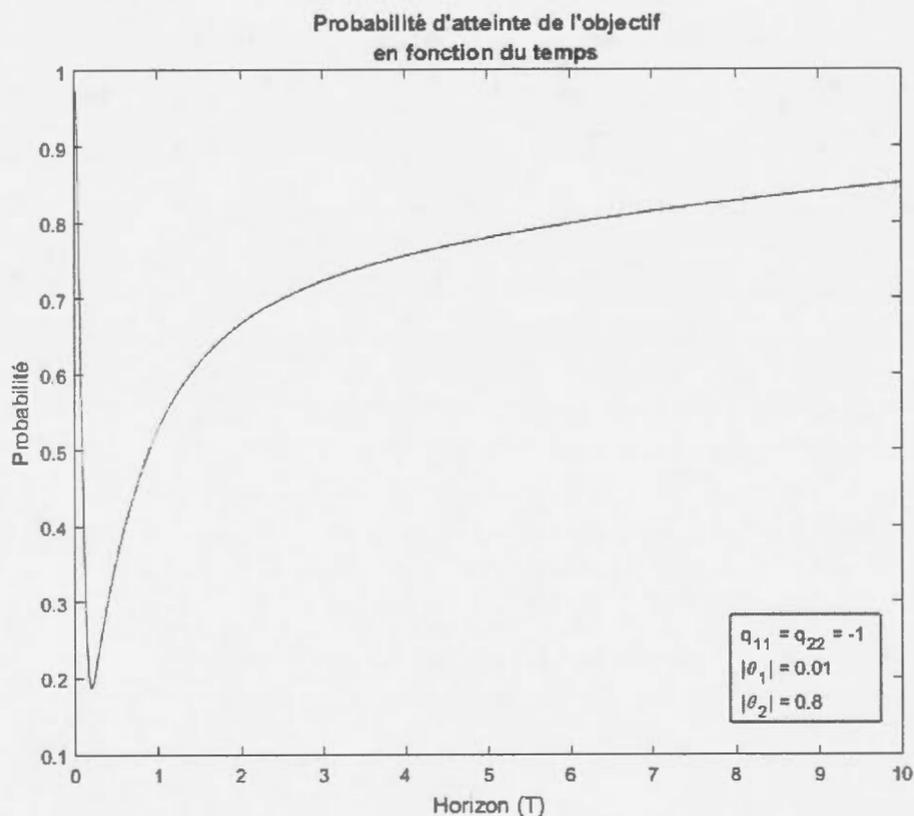
Malheureusement, cette règle ne tient plus lorsqu'on considère un modèle avec

2 régimes. Pire encore, dans certains cas, la probabilité d'atteinte d'un objectif avec cette stratégie peut même descendre sous la barre des 20%, ce qui est 4 fois plus bas que la probabilité minimale dans le cas à un seul régime. Il suffit d'un contre-exemple pour s'en convaincre.

Considérons les paramètres  $|\theta_1| = 0.01$ ,  $|\theta_2| = 0.8$ ,  $r = 0.01$  et  $q_{11} = q_{22} = -1$ . En faisant varier la valeur de  $T$ , on peut tracer un graphique de la probabilité d'atteinte d'un objectif d'investissement  $z$  quelconque (rappelons que la probabilité ne dépend pas de l'objectif  $z$  ni de la richesse initiale  $x_0$ ) en fonction de l'horizon de temps  $T$ .

À l'aide du logiciel MATLAB, on calcule la probabilité que l'objectif soit atteint en codant l'intégrale correspondant au résultat du théorème 2.10.

On a alors le graphique suivant :



**Figure 3.1** Probabilité d'atteinte d'un objectif en fonction du temps

Notons que nous avons fait varier  $T$  de 0.01 à 10 par des sauts de 0.01. À partir de ce graphique, on peut conclure que la règle du 80% ne s'applique pas dans le cas avec changements de régime. On remarque cependant que la forme de la courbe ressemble à celle de la figure 1.1 correspondant à la probabilité d'atteinte du même objectif avec un seul régime.



## CONCLUSION

Les deux principaux objectifs de ce mémoire étaient d'étudier la distribution du premier temps de passage d'un mouvement brownien avec changements de régime et de considérer des applications de ces modèles.

Au chapitre 1, nous avons dérivé la distribution du premier temps de passage d'un modèle plus simple, le mouvement brownien avec dérive. Puis, nous avons considéré une application financière de ce modèle, soit la stratégie moyenne-variance de Markowitz. Nous avons montré qu'il existait une borne inférieure universelle pour la probabilité s'atteinte d'un objectif d'investissement selon ce modèle. Cette propriété porte le nom de règle du 80%.

Ensuite, au chapitre 2, nous avons dérivé la distribution du premier temps de passage à travers une barrière fixe d'un mouvement brownien avec 2 régimes dont l'alternance est régie par une chaîne de Markov à temps continu. Pour ce faire, nous avons factorisé le processus par la méthode de Weiner-Hopf pour trouver la transformée de Laplace, puis nous avons inversé cette transformée pour arriver à une expression analytique de la distribution.

Enfin, au chapitre 3, nous avons considéré l'application du chapitre 1 avec des changements de régime. Nous avons utilisé l'expression analytique trouvée de la distribution du premier temps de passage trouvée au chapitre 2 pour vérifier numériquement, à l'aide du logiciel MATLAB, que la règle du 80%, qui rendait la stratégie moyenne-variance attrayante, n'était malheureusement plus vérifiée lorsque des changements de régime sont présents.

Cependant, même si la probabilité minimale en fonction du temps pour un ensemble de paramètres peut être très basse, nous avons observé toujours la même forme générale de graphique quel que soient les paramètres. On commence toujours haut, puis on descend assez rapidement vers un creux se situant entre  $T = 0$  et  $T = 2$  avant de finalement remonter de façon concave vers 1. Il serait intéressant d'étudier la forme de ces courbes dans le futur.

## APPENDICE A

### CODE MATLAB

#### A.1 Simulation de trajectoires

Fonction servant à simuler des trajectoires de mouvement brownien avec changements de régimes où  $S = 2$  régimes.

```
function [ trajectoires ] = brownienRegime( mu, sigma, q,  
                                           nbTraj, z0, T, initState )  
  
%Trace nbTraj trajectoires de brownien avec changement de régime  
%(S=2 régimes) dont l'espace entre chaque point est delta  
%sur l'horizon T avec état initial initState  
  
delta = 1/10000; %paramètre caché  
trajectoires = zeros(nbTraj, floor(T/delta)+1);  
  
for k = 1:nbTraj  
    %generation de la chaine  
    chain = [0];  
    t = 0;  
    state = initState;
```

```

noTrans = 1;
while t <= T
    t = t - log(rand)/q(state); %genere changement regime
    if t > T
        chain = [chain T];
    else
        chain = [chain t];
        state = 1 + (state == 1);
    end
end

end

%generation de la trajectoire
trajectoires(k,1)=z0;
pos = z0;
state = initState;
for i = 1:(length(chain)-1)
    %cas ou deux transitions dans le même sous intervalle
    if floor(chain(i)/delta) == floor(chain(i+1)/delta)
        pos = pos + mu(state)*(chain(i+1)-chain(i))
            + sigma(state)*sqrt(chain(i+1)-chain(i))*randn;
        state = 1 + (state == 1);
    else
        pos = pos + mu(state)*(delta*(1+floor(chain(i)/delta))
            -chain(i)) + sigma(state)*sqrt(delta*
            (1+floor(chain(i)/delta))-chain(i))*randn;
        j = floor(chain(i)/delta) + 2;
        trajectoires(k,j)=pos;
        j = j+1;
    end
end

```

64

```
sigma2, mu1, mu2 )/(2*pi);
```

```
end
```

Fonction calculant l'intégrale du théorème 2.10.

```
function [ integ ] = integRoots( T, a, x, q11, q22, sigma1, sigma2,  
mu1, mu2 )
```

```
%l'intégrale dans Hieber avec la fonction roots
```

```
integ=integral(@(u) phiComplexeNumerique(T, a, x, q11, q22,  
sigma1, sigma2, mu1, mu2, u),-Inf,Inf,'ArrayValued',true);
```

```
end
```

Fonction calculant la transformée de Laplace du premier temps de passage.

```
function [ phi ] = phiComplexeNumerique(T, a, x, q11, q22, sigma1,  
sigma2, mu1, mu2, u)
```

```
%la fonction phi evaluee pour -iu sans utiliser le package analytique
```

```
lambda = 0.02;
```

```
poly = [(sigma1^2*sigma2^2)/4 (mu1*sigma2^2 + mu2*sigma1^2)/2  
mu1*mu2+(sigma1^2*(q22-1i*u-lambda)+sigma2^2*(q11-1i*u-lambda))/2  
mu1*(q22-1i*u-lambda)+mu2*(q11-1i*u-lambda)  
(-1i*u-lambda)*(q11+q22-1i*u-lambda)];
```

```
racines = roots(poly);
```

```
[~, idx ] = sort(real(racines),'descend');
```

```
racines = racines(idx);
beta4 = racines(1,1);
beta3 = racines(2,1);

phi = (exp((1i*u+lambda)*T)*((beta3*exp(beta4*(x-a)) -
beta4*exp(beta3*(x-a)))/(beta3 - beta4) +((exp(beta3*(x-a)) -
exp(beta4*(x-a))) / (beta3-beta4))*
(beta3*beta4+2*(1i*u+lambda)/(sigma1^2)) /
(beta3 + beta4 + 2*mu1/(sigma1^2) ))/(1i*u+lambda));

end
```

## RÉFÉRENCES

- Abramowitz, M. et Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications.
- Borodin, A. et Salminen, P. (2002). *Handbook of Brownian Motions : Facts and Formulae*. Springer.
- Buonocore, A., Di Crescenzo, A. et Di Nardo, E. (2002). Input-output behaviour of a model neuron with alternating drift. *BioSystems*, 67, 27–34.
- Guo, X. (2001a). An explicit solution to an optimal stopping problem with regime switching. *Journal of Applied Probability*, 38, 464–481.
- Guo, X. (2001b). When the "bull" meets the "bear" - a first passage time problem for a hidden markov process. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 3, 135–143.
- Hieber, P. (2014). First-passage times of regime switching models. *Statistics & Probability Letters*, 92, 148–157.
- Ikeda, N. et Watanabe, S. (1989). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland.
- Jiang, Z. et Pistorius, M. (2008). On perpetual american put valuation and first-passage in a regime-switching model with jumps. *Finance and Stochastics*, 12, 331–355.
- Karatzas, I. et Shreve, S. (1996). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer.
- Li, X. et Zhou, X. Y. (2006). Continuous-time mean-variance efficiency : The 80% rule. *The Annals of Applied Probability*, 16(4), 1751–1763.
- Zhou, X. Y. et Yin, G. (2001). Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching : A continuous-time model. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(4), 1466–1482.