

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LIENS ENTRE LE MODÈLE BINOMIAL ET LES ÉQUATIONS
DE BLACK-SCHOLES

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

SAMI ZAYANI

JUIN 2016

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

J'adresse mes remerciements aux personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce mémoire.

En premier lieu, je remercie monsieur Matthieu Dufour, professeur à l'Université du Québec à Montréal. En tant que directeur de mon travail de recherche, il a montré beaucoup de patience et de compréhension à mon égard.

Je remercie Monsieur Michel Adès, professeur associé à l'Université du Québec à Montréal. En tant que codirecteur du mémoire, il m'a guidé dans mon travail, il m'a encouragé dans les moments difficiles et il m'a aidé à trouver des solutions pour avancer. Je le remercie pour sa disponibilité, sa ponctualité et son savoir stochastique et académique. Personnellement, je ne trouve pas des mots forts qui mettent en valeur les efforts de cette personne dans ce travail. Vous m'avez beaucoup touché Michel avec la bonté de votre cœur et votre humanisme.

Finalement, je tiens à remercier ma famille et mes amis qui m'ont beaucoup aidé à finir ce mémoire. En particulier, ma mère qui m'a donné beaucoup de soutien, d'affection et d'amour. Mon père qui m'a prodigué des bons conseils et d'encouragements. Je tiens à témoigner ma reconnaissance à l'égard de mes parents qui ont largement contribué à la réussite de ce travail et de mon parcours académique. Je tiens à souligner l'apport particulier de mon amie Mylène et sa famille pour leur soutien indéfectible tout au long de ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iii
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SYMBOLES	xii
RÉSUMÉ	xiii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
MODÈLE BINOMIAL ET NOTION DU RISQUE-NEUTRE	5
1.1 Introduction	5
1.2 Marché complet et stratégie	6
1.3 Opportunité d'arbitrage	8
1.4 Évaluation risque-neutre et prix d'arbitrage	11
1.5 Modèle binomial à une période	14
1.6 Modèle binomial à n-périodes	17
1.7 Évaluation des options et approche binomiale	22
1.8 Modèle binomial et option sur des actions payantes des dividendes	27
1.9 Conclusion	32
CHAPITRE II	
MODÈLE DE BLACK-SCHOLES ET CONVERGENCE DU MODÈLE BINOMIAL	35
2.1 Introduction	35
2.2 Le modèle de Black-Scholes	36
2.3 Convergence du modèle binomial	47
2.4 Modèle binomial avec paramètre d'inclinaison	52
2.5 Convergence du modèle binomial flexible	56
2.6 Modèle binomial généralisé	64

2.7	Convergence du modèle binomial généralisé	65	
2.8	Conclusion	66	
CHAPITRE III			
ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DU MODÈLE BINOMIAL POUR DIF- FÉRENTES OPTIONS			67
3.1	Introduction	67	
3.2	Aspect asymptotique de la vitesse de convergence	68	
3.3	Option à barrière et modèle binomial	79	
3.4	Exemple d'évaluation d'une option asiatique par le modèle binomial .	96	
3.5	Les lettres grecques	99	
3.6	Conclusion	103	
CONCLUSION			105
APPENDICE A			
MARCHÉ COMPLET			109
APPENDICE B			
LES OPTIONS			111
B.1	Option vanille	111	
B.2	Option à barrière	112	
B.3	Option asiatique	112	
RÉFÉRENCES			113

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Arbre binomial à une période	14
1.2 Arbre binomial à n-périodes	17
1.3 Arbre binomial à 2-périodes représentant l'évolution du prix de l'actif risqué sur la période $[0, t_2]$	19
1.4 Arbre binomial à 2-périodes représentant l'évolution du prix de l'option sur la période $[0, t_2]$	21
1.5 Arbre du prix d'une action payante un dividende proportionnel . .	29
1.6 Arbre du prix d'une action payant un dividende sous forme d'un montant d'argent connu	30
2.1 Prix de l'option en fonction du prix de l'action pour différentes dates de maturité	43
2.2 Prix de l'option en fonction du prix de l'action pour différentes valeurs du taux d'intérêt et de volatilité	45
2.3 Arbre binomial $\lambda = 0$	55
2.4 Arbre binomial $\lambda > 0$	55
2.5 Arbre binomial $\lambda < 0$	56
2.6 Convergence des modèles CRR et Flexible	57
2.7 Le modèle binomial à deux étapes	63
3.1 Évolution du prix du modèle binomial	69
3.2 Convergence des modèles de Tian et de Cox-Rubinstein	73
3.3 Convergence des modèles de Tian et de Cox-Rubinstein	74

3.4	(a) $C_2(N)$ lorsque N est pair et lorsque N est impair séparément (b) $C(N)$ et $C_2(N)$	77
3.5	Évolution du prix pour différentes valeurs de μ	78
3.6	Convergence d'une option à barrière "Down-and-out" digitale . . .	93
3.7	Convergence du modèle CRR-Corrigé d'une option à barrière "Down-and-out" digitale	94
3.8	Convergence en zigzag d'une option à barrière	95
3.9	Arbre binomial à $(n+2)$ périodes	100

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
1.1 tableau récapitulatif reliant les prix des actifs aux résultats de l'expérience aléatoire	7
3.1 Évolution du prix d'une option "Down-and-out"	88
3.2 Évolution du prix d'une option "Down-and-in"	89

LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES SYMBOLES

$(a - b)^+$ $\max(a-b,0)$

B_t Prix de l'actif sans risque à l'instant t

C_{0ar} Prix de l'action dans un contexte d'absence d'opportunité d'arbitrage

$C_{BS}^{di}()$ Prix d'une option à barrière down and in calculé par le modèle de Black-Scholes

$C_{BS}^{do}()$ Prix d'une option à barrière down and out calculé par le modèle de Black-Scholes

C_N^{do} Prix d'une option à barrière down and out calculé par le modèle binomial

C_t Prix de l'action à l'instant t

Q Mesure risque neutre

S_{0rn} Prix risque neutre de l'actif sous-jacent à l'instant initial

S_{Tm} Prix moyen de l'actif sous-jacent à l'instant T

S_t Prix de l'actif risqué à l'instant t

$S_T(D)$ Prix de l'actif sous-jacent à la baisse

$S_T(U)$ Prix de l'actif sous-jacent à la hausse

V_t Valeur du portefeuille à l'instant t

$C(N)$ Prix de l'option calculé par le modèle CRR

CRR Cox-Ross-Rubinstein

D Une baisse de prix

GCRR Le modèle binomial généralisé

GCRR-XPC Le modèle binomial généralisé dont le prix d'exercice se trouve au centre de deux nœuds consécutifs

int() Partie entière

r Taux d'intérêt constant sans risque

T date de maturité

t Temps

U Une hausse de prix

RÉSUMÉ

Ce travail est une exigence partielle de la maîtrise en mathématiques, intitulé "Liens entre le modèle binomial et les équations de Black-Scholes". En effet, comme le titre l'indique, dans cette étude on aborde le sujet des liens entre le modèle binomial et celui de Black-Scholes. On commence par la présentation du modèle binomial et le passage au modèle de Cox, Ross et Rubinstein (CRR). Puis on étudie en détail la convergence et les propriétés qui en découlent du Modèle binomial et CRR, et ce dans le cas des options simples, européennes et américaines. Par la suite, on élargit le centre d'intérêt pour d'autres extensions du modèle binomial par le biais du modèle binomial flexible de Tian et le modèle CRR généralisé de Chung. Finalement, on étudie les comportements asymptotiques du modèle binomial dans différents cas d'options plus complexes comme les options à barrières et asiatiques puis on aborde la convergence des lettres grecques dans le cadre du modèle binomial.

This work is a partial requirement of the MA in mathematics, entitled "Liens entre le modèle binomial et les équations de Black-Scholes." Indeed, as the title suggests, in this study we approach the subject of the links between the binomial and the Black-Scholes models. It begins with the presentation of the binomial model and the transition to Cox, Ross and Rubinstein (CRR) model. After, we study in details the convergence of CRR and binomial models and properties that result in the case of a simple options as Europeans and Americans. Subsequently, we broaden the focus to other extensions of the binomial model through flexible binomial model of Tian and generalized CRR model of Chung. Finally, we study the asymptotics behaviors of the binomial model in different cases of more complex

options such as barrier and Asian options and then we discuss the convergence of binomial Greeks.

INTRODUCTION

La finance est un domaine qui n'a cessé guère d'intriguer les chercheurs et les scientifiques depuis longtemps. Et chacun aborde ce sujet à partir de son point de vue, et ne traite que les thèmes reliés à son domaine d'étude et d'expertise. Néanmoins, la finance demeure toujours propice pour les chercheurs qui prennent des défis dans le but d'expliquer les variations des différentes entités qui constituent ce champ d'intérêt.

De ce fait, plusieurs modèles ont été élaborés et conçus afin d'expliquer des changements structurels comme l'augmentation du prix de pétrole pendant l'hiver, ou des changements conjoncturels comme le rebondissement du prix de pétrole à la suite d'une guerre déclarée contre un pays pétrolier. Cependant, ces changements contrôlent le marché financier, un marché où tout le monde transige en évitant le risque de perte qui peut avoir des répercussions désastreuses sur l'économie à l'échelle mondiale. Par ailleurs, le volume des transactions effectuées chaque jour et la valeur des produits échangés sur ce marché le rendent le plus important au monde. Il devient alors l'unique endroit où l'avenir financier se décide et la vision future de l'économie du monde entier se dessine chaque jour avec un impact dans bien des ramifications.

À ce sujet, les mathématiciens se sont penchés sur l'étude du risque encouru lors d'une transaction, le risque peut être exprimé par la chute du prix d'un actif transigé ou d'un autre instrument financier dont le prix est sensiblement lié d'une façon ou d'une autre au prix de l'actif négocié. Plusieurs d'entre eux ont réussi à développer des modèles crédibles. On cite à titre d'exemple, Black et Scholes qui

ont été les premiers à mettre en place un tel modèle qui porte leurs noms, soit le modèle de Black-Scholes, et c'est grâce à eux que les recherches en mathématiques financières ont connu une révolution en attirant plus d'attention depuis les années 1970 ou plus précisément après la date de leur publication en 1973. Aussi, il y a Vasiček qui décrit l'évolution du taux d'intérêt, et sur le même sujet Cox, Ingersoll et Ross ont réussi à développer leur propre modèle.

Mais, chaque modèle développé présente des faiblesses au niveau des hypothèses. Par conséquent, pour pouvoir élaborer le modèle le plus vraisemblablement crédible, il faut impérativement étudier à la fois les aspects économiques et mathématiques du marché financier pour aboutir à un modèle qui reflète la réalité derrière ces changements.

Dans le présent travail, on s'intéresse principalement à l'évaluation des options écrites sur des actions. Par conséquent, ce travail consiste à étudier l'évolution du cours boursier de l'action. Comme il y a plusieurs types d'options, cette étude se limite aux cas des options américaines et européennes qui seront définies plus tard. Par ailleurs, l'intérêt principal de ce travail est d'étudier les liens entre le modèle binomial et les équations de Black-Scholes sur le plan de l'approximation et de la convergence.

Dans un premier chapitre, on introduit le modèle binomial en s'appuyant sur la simplicité et la facilité dont ce modèle aborde des sujets complexes. Aussi, on explique l'utilisation de ce modèle dans la finance et dans plusieurs situations reliées à ce domaine comme l'arbitrage, le monde réel et le monde risque-neutre, ainsi que les différentes notions dont on a besoin pour élaborer cette étude.

Dans un deuxième chapitre, on présente le modèle de Black-Scholes, mais précisément on étudie la convergence et la vitesse de convergence du modèle binomial vers celui de Black-Scholes. Malgré sa simplicité, le modèle binomial présente quelque

point faible comme la vitesse de convergence, on aborde quelques papiers qui ont travaillé sur l'amélioration de la vitesse de convergence et les comportements asymptotiques du modèle binomial.

Le troisième et dernier chapitre est consacré à différentes utilisations du modèle binomial dans la finance en évaluant des options plus complexes comme les options à barrière et les options asiatiques, et l'étude de la convergence dans ces contextes. Puis, on étudie la convergence des lettres grecques dans le contexte du modèle binomial.

CHAPITRE I

MODÈLE BINOMIAL ET NOTION DU RISQUE-NEUTRE

1.1 Introduction

Le modèle binomial en est un modèle de base qui représente, par un simple graphe, les différentes trajectoires d'évolution d'un actif financier ou d'un produit dérivé pendant la durée de validité de ce dernier. Dans ce premier chapitre, on présente les circonstances qui ont permis l'utilisation de ce modèle à des fins d'évaluation des risques financiers, ainsi que ses avantages.

Selon l'approche générale (Korn et Müller, 2010), l'utilisation du modèle binomial survient dans le contexte d'absence d'arbitrage et dans un marché complet (c'est à dire quand tous les actifs peuvent être répliqués). En disposant d'un portefeuille contenant trois actifs dont chaque actif peut être répliqué par les deux autres, on présume aussi que la valeur future du portefeuille peut prendre seulement deux états, soit dans une situation haussière ou bien une situation baissière des prix. Dans cette optique, l'utilisation du modèle binomial est adéquate et reflète bien une grande partie de la réalité.

Dans ce chapitre, on commence par introduire quelques notions qui vont nous servir comme outils de base dans la résolution des équations qui découlent de l'examen du modèle binomial. Évidemment, on parle ici de l'arbitrage et ses formes, la

notion risque-neutre et la probabilité qui en découle et leurs impacts sur le calcul des prix des actifs financiers et des produits dérivés qui y sont rattachés. Par la suite, une fois toutes les hypothèses sont mises en place et toutes les conditions d'utilisation du modèle sont remplies, il sera facile de présenter le modèle binomial ainsi que d'expliquer tous les résultats qui découlent de son application.

1.2 Marché complet et stratégie

Dans chaque domaine d'étude, la définition d'un cadre général de travail facilite beaucoup la tâche à faire. En outre, notre travail consiste à modéliser le cours des actifs boursiers sur le marché financier. Également, ce marché a un aspect aléatoire provenant d'un énorme volume de transactions à des dates et à des prix imprévisibles. Notamment, il est primordial de formuler quelques hypothèses afin d'avoir un univers commun à partir duquel tous les chercheurs élaborent leurs projets en leur permettant de donner un sens à leurs résultats.

Particulièrement, l'hypothèse la plus importante est de présumer que le marché est complet. D'ailleurs, tous les auteurs admettent cette hypothèse qui consiste en la capacité du marché de pouvoir répliquer tous les instruments financiers par des portefeuilles contenant des actifs bien choisis.

Relativement à ce qui précède et à une fin d'illustration, on prend l'exemple suivant (Pascucci, 2011) : considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé comprenant six faces numérotées de 1 à 6. Simultanément, prenons un portefeuille contenant un actif sans risque dont le prix sera noté par r et deux actifs risqués dont les prix respectifs seront notés par S et C , où t représente le temps entre l'instant initial représentant la date d'émission du produit dérivé et l'instant final noté T qui représente la date d'échéance. Ensuite, on suppose que les trois actifs soient négociés pendant la période $[0, T]$. À l'instant T , les prix de ces trois actifs, si

$B_0 = 1\$$ et est le taux d'intérêt constant sans risque sur la période $[0, T]$, prennent les valeurs respectives $B_T = e^{rT}$, S_T et C_T . En se plaçant à l'instant T , toutes ces valeurs seront connues. Maintenant, supposons qu'on cherche la valeur C_0 sachant qu'on a ceci :

	Actif	Prix	Résultats du lancer du dé
	B	$B_T = e^{rT}$	
Hausse	C	$C_T()$	{1,2}
	S	$S_T(U)$	{1,2,3,4}
Baisse	C	$C_T()$	{3,4,5,6}
	S	$S_T(D)$	{5,6}

Tableau 1.1 tableau récapitulatif reliant les prix des actifs aux résultats de l'expérience aléatoire

Ainsi donc, il est indispensable d'identifier les trois ensemble $E_1 = \{1, 2\}$, $E_2 = \{3, 4\}$ et $E_3 = \{5, 6\}$ qui vont servir, selon le résultat du lancer du dé, à la détermination des différents prix des actifs de notre portefeuille. À ce niveau, on désigne par la valeur du portefeuille à l'instant t et on définit la stratégie suivante :

$$V_t = \alpha S_t + \beta B, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.1)$$

Éventuellement, le but d'une stratégie d'investissement sur les actifs B et S est de couvrir le risque encouru pendant la période d'exercice ainsi que de répliquer le prix d'exercice de l'actif C, par conséquent, on aura :

$$V_t = C_t, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.2)$$

Développons l'équation (1.2) conformément aux résultats du lancer du dé et aux

ensembles E_i , $i = 1..3$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha S_T(U) + \beta e^{rT} = C_T(U), & \text{si } E_1 \\ \alpha S_T(U) + \beta e^{rT} = C_T(D), & \text{si } E_2 \\ \alpha S_T(D) + \beta e^{rT} = C_T(D), & \text{si } E_3 \end{cases} \quad (1.3)$$

En admettant que soit différent de , la solution du système d'équations (1.3) sera impossible. Par conséquent, la détermination du prix de l'actif C à partir des autres actifs du portefeuille est impossible. Ainsi, cet actif ne peut pas être répliqué dans cette situation et conséquemment le marché en présence est incomplet.

Voyons maintenant, la définition mathématique d'une stratégie :

Définition 1.1. Une stratégie est un processus aléatoire dans \mathbb{R}^{n+1} tel que :

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^d, \beta_n)_{n=1, \dots, N}$$

Où α_n^i (respectivement β_n) représente la part de l'actif S^i dans le portefeuille pendant la période $[t_{n-1}, t_n]$. Par conséquent, la valeur du portefeuille pendant cette période sera :

$$V_n^{(\alpha, \beta)} = \alpha_n S_n + \beta_n B_n,$$

$$(\text{avec } \alpha_n S_n = \sum_{i=1}^d \alpha_n^i S_n^i, \quad n = 1, \dots, N)$$

Et :

$$V_0^{(\alpha, \beta)} = \sum_{i=1}^d \alpha_1^i S_0^i + \beta_1 B_0$$

1.3 Opportunité d'arbitrage

L'arbitrage tel qu'il est défini dans la littérature est le fait d'effectuer une opération financière sans risque avec un gain certain et sans avoir besoin d'investir de sa

propre monnaie au départ. Aussi, ça se traduit par la réalisation d'un profit vraisemblablement garanti sans courir aucun risque de perte suite à cette transaction

Cette idée représente un obstacle pour les chercheurs du domaine financier qui prêtent une attention particulière à l'étude du risque. Pour cela, ils ont convenu à un principe de base pour remédier à ce type de problème et contourner ces situations lors de la modélisation. En effet, si deux actifs ont le même prix à un instant futur, ils doivent avoir le même prix à l'instant présent. On en conclut que si A_t et B_t sont les prix respectifs des actifs A et B à l'instant $t \in [0, T]$, alors si :

$$A_T \leq B_T \Rightarrow A_t \leq B_t, \quad \forall t \leq T \quad (1.4)$$

Et particulièrement, si :

$$A_T = B_T \Rightarrow A_t = B_t, \quad \forall t \leq T \quad (1.5)$$

À titre d'illustration, on considère l'exemple qui suit (Coelen, 2002) : En effet, si un actif négocié simultanément à New York et à Londres dont le prix est de 150\$ à New York et de 100£ à Londres, tandis que le taux de change est de 1.60\$. Alors un négociateur peut acheter des actions du marché américain pour les vendre au marché anglais réalisant ainsi un profit sans courir aucun risque de perte.

En fait, l'arbitrage peut apparaître sous plusieurs formes, on en trouve souvent des opportunités permettant de faire une richesse facile et sans investir sa propre monnaie. En revanche, les spéculateurs en cherchent toujours, mais dès qu'une opportunité d'arbitrage apparaisse, le mouvement du marché par le biais de l'offre et de la demande permet de trouver un autre état d'équilibre de telle sorte d'éviter cet arbitrage.

Considérons l'exemple d'un portefeuille contenant initialement α parts d'un actif

risqué dont le prix sera noté par S , et un actif sans risque dont le prix sera B . À la date de maturité, S prend les valeurs $S_T(U) = uS$ à la hausse ou $S_T(D) = dS$ à la baisse. Au même instant, l'actif sans risque prend la valeur rB , où r est le taux d'intérêt sans risque. Aussi, soit C le prix d'une option d'achat européenne, qui prend les valeurs $C_T(U) = (S_T(U) - K)^+$ ou $C_T(D) = (S_T(D) - K)^+$ où K est le prix d'exercice de cette option. Admettons une stratégie de couverture de risque exprimée par :

$$V_T = \alpha S_T + \beta B_T \quad (1.6)$$

avec l'équation (1.5), on obtient :

$$C = V \quad (1.7)$$

$$= \alpha S + \beta B \quad (1.8)$$

En développant l'équation (1.8), à l'instant T , on aura :

$$C_T = \alpha S_T + \beta r B \quad (1.9)$$

Alors :

$$\begin{cases} C_T(U) = \alpha S_T(U) + \beta r B, & \text{à la hausse} \\ C_T(D) = \alpha S_T(D) + \beta r B, & \text{à la baisse} \end{cases} \quad (1.10)$$

Pour $B = 1$, la solution du système d'équations (1.10) à l'instant T est possible. Une fois la stratégie (α, β) est déterminée, il est très facile de déterminer la valeur de C_0 à l'instant 0.

Particulièrement, les calculs de cette sous-section ne font pas intervenir les probabilités du succès et d'échec. Alors, le prix de l'actif risqué ne dépend pas de ces probabilités pour qu'il puisse prendre ses valeurs à la hausse ou à la baisse. Donc, cette notion d'absence d'arbitrage ne tient pas compte des comportements du négociateur envers le risque.

1.4 Évaluation risque-neutre et prix d'arbitrage

On introduit dans cette section la notion risque-neutre et le prix d'arbitrage. À ce sujet, considérons l'exemple suivant (Pascucci, 2011) : on dispose d'un portefeuille contenant un actif sans risque dont le prix sera noté par B et un autre actif risqué dont le prix sera noté par S . Ce portefeuille sera négocié pendant une période $[0, T]$. Le prix de l'actif sans risque prend les valeurs B_0 ($B_0 = 1$) à l'instant 0 et B_T à l'instant T . Il évolue suivant l'expression $B_T = B_0 e^{rT}$ où r est le taux d'intérêt sans risque constant pendant cette période. Le prix de l'actif risqué est plus complexe vu qu'il cache un aspect aléatoire dans son processus d'évolution pendant la période $[0, T]$. En effet, on suppose qu'à l'instant T , le prix de l'actif risqué peut prendre deux positions suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie, soit $S_T(U)$ si le résultat de l'expérience aléatoire est un succès ou $S_T(D)$ s'il s'agit d'un échec. Comme le problème est de déterminer la valeur S_0 à l'instant 0, on suppose que :

$$P(\text{succès}) = p, \quad p \in]0, 1[\quad (1.11)$$

$$P(\text{échec}) = 1 - p \quad (1.12)$$

Ainsi, la connaissance de ces probabilités nous permettent de déterminer un prix moyen de l'actif risqué à l'instant T qui sera noté S_m . En actualisant cette quantité à l'instant 0, on obtient le prix initial S_{0rn} que doit payer le négociateur pour l'actif risqué. Alors :

$$S_{T_m} = pS_T(U) + (1 - p)S_T(D) \quad (1.13)$$

$$S_{0rn} = e^{-rT}(pS_T(U) + (1 - p)S_T(D)) \quad (1.14)$$

Le prix est appelé le prix risque-neutre vu qu'il exprime la certitude du négociateur envers le risque encouru dès qu'il connaît la probabilité de succès.

Réciproquement, connaissant le prix de l'actif risqué à l'instant 0, et en supposant que $S_0 = S_{0rn}$, il sera facile de déterminer une probabilité p_{rn} qui respecte la condition suivante :

$$S_0 = e^{-rT}(p_{rn}S_T(U) + (1 - p_{rn})S_T(D)) \quad (1.15)$$

Après quelques manipulations, on obtient :

$$p_{rn} = \frac{e^{rT}S_0 - S_T(D)}{S_T(U) - S_T(D)} \quad (1.16)$$

Il est évident qu'il faut avoir $S_T(D) < e^{rT}S_0 < S_T(U)$ à la fois pour répondre à la condition d'absence d'arbitrage et pour que p_{rn} soit dans $]0,1[$. La quantité p_{rn} ainsi déterminée est appelée probabilité risque-neutre.

Considérons maintenant qu'on dispose d'un troisième actif risqué dans notre portefeuille introduit ci-haut. Le prix de cet actif sera noté C qui dépend lui aussi de la même expérience aléatoire décrite ci-dessus. Alors, le prix C peut prendre seulement deux valeurs à l'instant T, soit $C_T(U)$ si le résultat de l'expérience aléatoire est un succès ou bien $C_T(D)$ en cas d'échec. Pour déterminer la valeur C_0 à l'instant 0, on procède comme suit :

D'une part, si le prix S_0 est connu, on détermine la probabilité risque-neutre de la même manière que l'équation (1.16), puis on déduit la valeur de C_{0rn} comme celle à partir de l'équation (1.15) et qui sera comme suit :

$$C_{0rn} = e^{-rT}(p_{rn}C_T(U) + (1 - p_{rn})C_T(D)) \quad (1.17)$$

D'autre part, revenons à la notion présentée dans la sous-section précédente qui consiste à déterminer la valeur C_0 indépendamment de l'estimation de la probabilité risque-neutre. En fait, le résultat obtenu sera déduit directement de la notion d'absence d'arbitrage. En effet, considérons une stratégie V qui réplique à l'instant

T l'actif C à partir des deux autres, alors des équations (1.4) et (1.5) on obtient :

$$V_T = C_T \iff V_0 = C_0 \quad (1.18)$$

Par la suite, supposons que :

$$V = \alpha S + \beta B \quad (1.19)$$

Il en résulte de ce qui précède que :

$$\begin{cases} \alpha S_T(U) + \beta e^{rT} = C_T(U) \\ \alpha S_T(D) + \beta e^{rT} = C_T(D) \end{cases} \quad (1.20)$$

Sachant que $S_T(U) \neq S_T(D)$ et $B = B_0 = 1$, on obtient après quelques manipulations :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{C_T(U) - C_T(D)}{S_T(U) - S_T(D)} \\ \beta = e^{rT} \frac{S_T(U)C_T(D) - S_T(D)C_T(U)}{S_T(U) - S_T(D)} \end{cases} \quad (1.21)$$

D'après les équations (1.18) et (1.21), et tout en sachant que S_0 est déterminé par le marché, il est assez simple d'écrire la nouvelle expression de $C_0 = C_{0ar}$, où , sous la forme :

$$\begin{cases} C_{0ar} = \alpha S + \beta \\ C_{0ar} = S_0 \frac{C_T(U) - C_T(D)}{S_T(U) - S_T(D)} + e^{-rT} \frac{S_T(U)C_T(D) - S_T(D)C_T(U)}{S_T(U) - S_T(D)} \\ C_{0ar} = e^{-rT} \left(C_T(U) \frac{e^{rT} S_0 - S_T(D)}{S_T(U) - S_T(D)} + C_T(D) \frac{S_T(U) - e^{rT} S_0}{S_T(U) - S_T(D)} \right) \end{cases} \quad (1.22)$$

En comparant le résultat obtenu à l'équation (1.22) et celui obtenu à l'équation (1.17), tout en considérant l'équation (1.16), on peut dire qu'on a abouti au même résultat en adoptant deux optiques différentes l'une de l'autre. La première optique consiste à estimer la probabilité risque-neutre et à décrire en quelque sorte le comportement du négociateur envers le risque, alors que la deuxième découle d'une propriété fondamentale qui est l'absence d'opportunité d'arbitrage.

1.5 Modèle binomial à une période

Considérons un portefeuille contenant un seul actif risqué négocié sur une période de temps qui commence à l'instant 0 et qui prend fin à l'instant T , le prix de cet actif est de S_0 au début de la période et de S_T à la fin de cette même période. Par la suite, supposons que le prix S_T à l'instant T dépend du lancer d'une pièce de monnaie. On désigne par $S_T(U)$ le prix de notre actif si le résultat du lancer de cette pièce est un succès et $S_T(D)$ s'il s'agit d'un échec. Aussi, on admet que pour l'expérience aléatoire considérée, la probabilité d'un succès est p et celle d'un échec est $1-p$. Notons que p est strictement positive et qu'on doit obligatoirement avoir $p \neq \frac{1}{2}$. Finalement toutes les valeurs $S_i(x)$, $x = \{U, D\}$ et $i = \{0, T\}$, sont strictement positives. La figure 1.1 schématise ce qui précède.

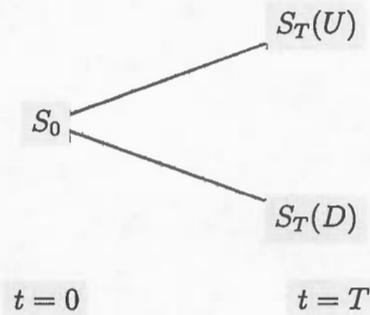


Figure 1.1 Arbre binomial à une période

En se plaçant maintenant à l'instant T , on sera en mesure de connaître le résultat du lancer de la pièce de monnaie. Par conséquent, les prix $S_T(U)$ et $S_T(D)$ seront connus aussi. Cependant, il sera difficile de déterminer la valeur initiale S_0 , d'ailleurs, c'est de ce contexte que découle son aspect aléatoire puisqu'elle dépend du résultat de l'expérience aléatoire.

On introduit dans ce qui suit les paramètres u , d et r . D'une part, les deux premiers

paramètres découlent de la considération de l'impact de notre expérience aléatoire sur le prix de notre actif, alors que r est le taux d'intérêt en vigueur. D'autre part, on présume que $u > 1$, $d < 1$ et $0 < d < 1 + r < u$. Il est crucial de noter que la dernière inégalité exprime l'absence d'arbitrage qui se traduit par la possibilité de réaliser un bénéfice considérable à l'instant T tout en partant d'une richesse de valeur 0 à l'instant 0.

Précisons maintenant cette pensée, si $d > 1 + r$, un négociateur peut acheter un actif négocié à l'instant 0 par l'argent emprunté. Par conséquent, au pire des cas, à l'instant T , le prix de l'actif réalise un profit qui couvre suffisamment le montant d'argent emprunté et le montant des intérêts chargés, d'où la présence d'arbitrage.

Autrement, si $u < 1 + r$, le négociateur n'a plus d'intérêt à investir sur l'actif risqué à l'instant 0. En effet, à l'instant T et pour la même période, le profit réalisé de l'investissement sur l'actif risqué sera considérablement inférieur à celui d'un actif sans risque, ce dernier sera garanti et plus important. Là aussi, il y a une opportunité d'arbitrage.

Par la suite, on suppose que $d = \frac{1}{u}$, et qu'on dispose d'une option d'achat européenne dont le prix d'exercice à la date de maturité T est K . De ce qui précède, on prétend avoir $S_T(D) < K < S_T(U)$ afin de s'assurer qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage.

Soit :

$$\begin{cases} S_T(U) = uS_0 \\ S_T(D) = dS_0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Il en résulte qu'à la date de maturité T , la valeur de l'option, notée V , est exprimée par :

$$V = (S_T - K)^+ \quad (1.24)$$

où . En effet, considérons l'exemple (Shreve, 2004) dont le contexte est le suivant :

$$S_0 = 4, \quad S_T(U) = 8, \quad S_T(D) = 2 \quad (1.25)$$

$$u = 2, \quad d = \frac{1}{2} \quad (1.26)$$

$$r = \frac{1}{4}, \quad K = 5 \quad (1.27)$$

De plus, supposons qu'on parte d'une fortune $X_0 = 1.2$, et qu'on achète $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ part d'une action. Donc, pour conclure cette transaction, on aura besoin d'un montant d'argent de 0.8 qui sera emprunté. De ce fait, la richesse initiale est évaluée au montant $X_0 - \alpha_0 S_0 = -0.8$ à l'instant 0. À la date d'échéance T, la dette passe à $(1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0) = -1$. Cependant, la valeur de notre portefeuille peut prendre deux positions à deux valeurs possibles à la date T, soit $X_T(U)$ ou $X_T(D)$. Après quelques manipulations, on obtient :

$$X_T(U) = \frac{1}{2}S_T(U) + (1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0) = 3 \quad (1.28)$$

en cas de profit, qui se traduit par une hausse de prix, et :

$$X_T(D) = \frac{1}{2}S_T(D) + (1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0) = 0 \quad (1.29)$$

en cas de perte, qui se traduit par une baisse de prix.

Par ailleurs, la valeur de l'option telle qu'elle est définie, fait qu'elle puisse prendre deux positions aussi, soit à la hausse :

$$V(U) = (S_T(U) - K)^+ = 3 \quad (1.30)$$

ou bien à la baisse :

$$V(D) = (S_T(D) - K)^+ = 0 \quad (1.31)$$

De ce qui précède, il en résulte que la valeur du portefeuille coïncide avec la valeur de l'option dans les deux cas, cela veut dire qu'on a pu répliquer la valeur de l'option à partir du portefeuille constitué par un actif risqué et un autre sans risque. On en déduit que le marché est complet.

1.6 Modèle binomial à n-périodes

On considère maintenant les mêmes hypothèses décrites dans la section précédente. Par contre, on dispose cette fois de plusieurs dates d'échéances, soient les instants t_1, t_2, \dots, t_n . En rappelant que $d = \frac{1}{u}$, on en déduit que deux résultats successifs et différents, pendant deux périodes consécutives, s'annulent et n'ont pas d'impact sur le prix d'un actif. En effet, le prix de l'actif ne change pas après deux périodes successives si le résultat du dernier lancer de la pièce de monnaie est un succès précédé par un échec ou un échec précédé par un succès ($S_{i-1}(UU\dots U) = S_{i+1}(UU\dots UDU)$ ou $S_{i-1}(UU\dots U) = S_{i+1}(UU\dots UUD)$, $i = 1..n - 1$). De ce fait, on aura à chaque instant t_i , $i+1$ valeurs possibles pour le portefeuille. La figure 1.2 illustre ce qui précède.

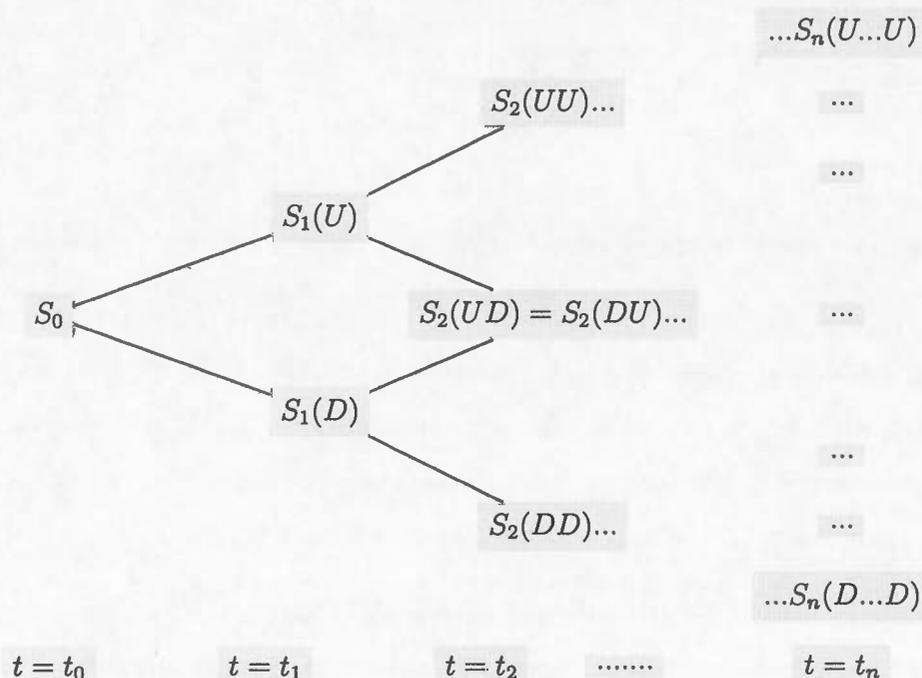


Figure 1.2 Arbre binomial à n-périodes

En effet, pour $i = 2$, on a d'une part :

$$S_2(UD) = udS_0 = S_0 \quad (1.32)$$

D'autre part, on a :

$$S_2(DU) = duS_0 = S_0 \quad (1.33)$$

Il en résulte que :

$$S_2(UD) = S_2(DU) = S_0 \quad (1.34)$$

Reprenant l'exemple de la section précédente pour le cas où $i = 2$ et après quelques manipulations, on obtient les valeurs suivantes :

$$S_0 = 4, \quad S_1(U) = 8, \quad S_1(D) = 2 \quad (1.35)$$

$$S_2(UU) = 16, \quad S_2(UD) = 4, \quad S_2(DD) = 2 \quad (1.36)$$

La figure 1.3 résume ce qui précède dans un arbre binomial à deux périodes.

L'objectif étant toujours de pouvoir évaluer C_0 qui est le prix de l'option à la date t_0 , pour cela, on applique une technique itérative (Hull, 2003). Cette technique consiste à calculer les valeurs de l'option en commençant par la date d'échéance où les valeurs de l'option sont connues, et en rétrogradant d'une manière itérative jusqu'à déterminer la valeur de l'option à la date désirée.

En rappelant qu'à chaque instant le négociateur équilibre son portefeuille constitué par une action S , un actif sans risque B et une option d'achat européenne C . le prix de l'option à la date de maturité est exprimé par $C_2 = (S_2 - K)^+$, ainsi que le prix de l'action à la même date dépendent tous les deux des résultats des deux premiers lancers de la pièce de monnaie.

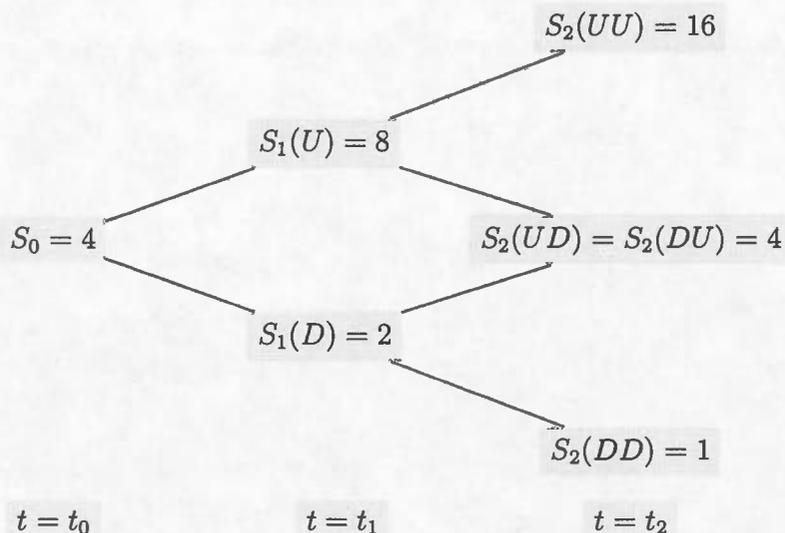


Figure 1.3 Arbre binomial à 2-périodes représentant l'évolution du prix de l'actif risqué sur la période $[0, t_2]$

En effet, à l'instant t_1 , on dispose d'une richesse X_1 , comme on a vu d'ailleurs précédemment. Suivant le résultat obtenu au premier lancer de la pièce de monnaie, cette richesse peut prendre deux valeurs. À la lumière de ces valeurs, le négociateur réajuste son portefeuille par l'achat de α_1 parts de l'actif risqué. D'une manière générale, la richesse à l'instant t_{n+1} s'écrit sous la forme (Shreve, 2004) :

$$X_{n+1} = \alpha_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \alpha_n S_n) \quad (1.37)$$

Donc, il en résulte que la fortune à l'instant t_1 sera :

$$X_1 = \alpha_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0) \quad (1.38)$$

En supposant que le négociateur vend l'option à l'instant t_0 au prix C_0 qui reste à déterminer et qu'il investit ce montant dans l'achat de α_0 part d'un actif risqué S . Pour compenser la différence des prix, le négociateur emprunte le montant

$(C_0 - \alpha_0 S_0)$. On en conclut que $X_0 = C_0$, donc l'équation (1.39) aura la forme :

$$X_1 = \alpha_0 S_1 + (1 + r)(C_0 - \alpha_0 S_0) \quad (1.39)$$

En développant cette équation, on retrouve que :

$$\begin{cases} X_1(U) = \alpha_0 S_1(U) + (1 + r)(C_0 - \alpha_0 S_0) \\ X_1(D) = \alpha_0 S_1(D) + (1 + r)(C_0 - \alpha_0 S_0) \end{cases} \quad (1.40)$$

De la même manière que précédemment, le prix de l'option à l'instant t_2 est de la forme :

$$C_2 = (S_2 - K)^+ \quad (1.41)$$

Cependant, cette fois-ci le négociateur veut que sa richesse à l'instant t_2 soit égale à la valeur de l'option pour qu'il soit rassuré qu'en cas de chute de prix, sa richesse couvre sa perte. On aura alors :

$$C_2 = \alpha_1 S_2 + (1 + r)(X_1 - \alpha_1 S_1) \quad (1.42)$$

En développant cette équation de nouveau, on obtient ainsi les équations que voici :

$$\begin{cases} C_2(UU) = \alpha_1(U)S_2(UU) + (1 + r)(X_1(U) - \alpha_1(U)S_1(U)) \\ C_2(UD) = \alpha_1(U)S_2(UD) + (1 + r)(X_1(U) - \alpha_1(U)S_1(U)) \\ C_2(DU) = \alpha_1(D)S_2(DU) + (1 + r)(X_1(D) - \alpha_1(D)S_1(D)) \\ C_2(DD) = \alpha_1(D)S_2(DD) + (1 + r)(X_1(D) - \alpha_1(D)S_1(D)) \end{cases} \quad (1.43)$$

La figure 1.4 illustre brièvement l'évolution du prix de l'option sur la période $[0, t_2]$. À ce niveau, on a six équations à six inconnus qui sont respectivement C_0 , α_0 , $\alpha_1(U)$, $\alpha_1(D)$, $X_1(U)$ et $X_1(D)$.

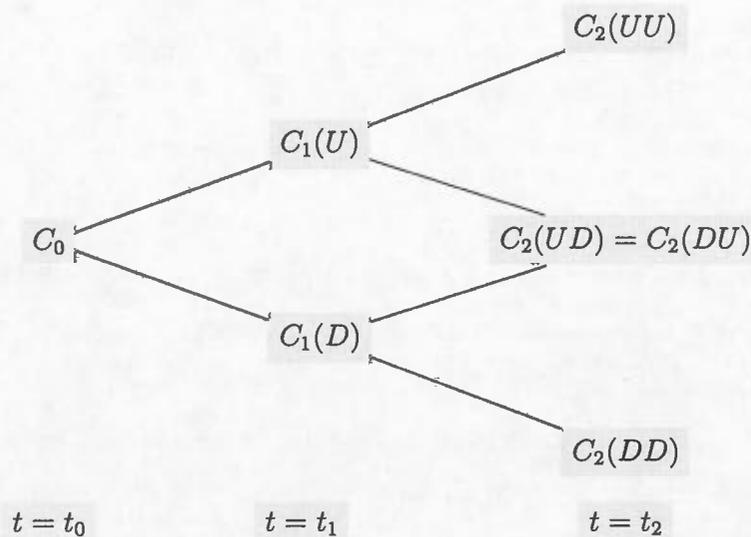


Figure 1.4 Arbre binomial à 2-périodes représentant l'évolution du prix de l'option sur la période $[0, t_2]$

À cette étape, la résolution de ces équations fait appel à la notion risque-neutre qu'on a déjà définie dans la section 1.4 à la page 11.

Après quelques manipulations, on obtient d'une part :

$$\begin{cases} \alpha_1(U) = \frac{C_2(UU) - C_2(DU)}{S_2(UU) - S_2(UD)} \\ \alpha_1(D) = \frac{C_2(DU) - C_2(DD)}{S_2(DU) - S_2(DD)} \end{cases} \quad (1.44)$$

D'autre part :

$$\begin{cases} C_1(U) = \frac{1}{1+r}(pC_2(UU) + (1-p)C_2(UD)) \\ C_1(D) = \frac{1}{1+r}(pC_2(DU) + (1-p)C_2(DD)) \end{cases} \quad (1.45)$$

où p et $1-p$ sont respectivement égales à $\frac{1+r-d}{u-d}$ et $\frac{u-1-r}{u-d}$, et sont appelées des probabilités risque-neutre.

Il est très important à ce niveau, et dans ce qui suit, de voir de près l'approche binomiale et son utilisation pour évaluer les options.

1.7 Évaluation des options et approche binomiale

L'approche qui vise à introduire l'utilisation du modèle binomial dans l'évaluation de l'évolution des prix boursiers fut introduite dans le papier de J.C. Cox, S.A. Ross et M. Rubinstein en 1979. Ils adaptaient l'évolution du prix des actifs à un cas discret représenté par le modèle binomial ayant comme limite le célèbre modèle de Black-Scholes. En effet, ils ont constaté que le modèle de Black-Scholes utilise des outils mathématiques très complexes, comme le calcul stochastique et ses fondements. Par conséquent, ils ont pensé à développer un modèle fondamental qui utilise des notions mathématiques simples afin d'expliquer l'évaluation de ces prix boursiers qui en eux-mêmes cachent des phénomènes sensibles et susceptibles de se perdre par la complexité des outils mathématiques utilisés.

Dans cette partie, on reprend un exemple simple (Cox *et al.*, 1979), avec lequel on expliquera avec détails le point de vue permettant au modèle binomial de prendre place dans la modélisation de l'évaluation des prix d'actifs boursiers ainsi que ses limites.

En effet, restons dans le contexte général des exemples précédents et supposons qu'on dispose d'un portefeuille contenant un actif risqué S et un autre sans risque B . Notamment, considérons une option d'achat européenne de prix d'exercice K et dont le prix dépend de celui de l'actif risqué. Comme d'habitude, les calculs servent à évaluer le prix de cette option à l'instant t_0 . En plus, supposons qu'on dispose aussi d'un taux d'intérêt sans risque r , d'un coefficient u exprimant la proportion d'augmentation de prix de l'actif S et d'un coefficient d exprimant la proportion de baisse de prix du même actif. À l'instant t_1 , l'actif S prend les valeurs $S_1(U) = uS$ et $S_1(D) = dS$ respectivement à la hausse et à la baisse. Par

conséquent, la valeur de l'option sera :

$$\begin{cases} C_1(U) = (S_1(U) - k)^+ \\ C_1(D) = (S_1(D) - k)^+ \end{cases} \quad (1.46)$$

La solution de ces équations se fait suivant plusieurs approches. Le résultat obtenu par l'approche d'absence d'arbitrage est déterminé par l'équation (1.22) que voici :

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{1+r} (C_T(U) \frac{(1+r)S_0 - S_T(D)}{S_T(U) - S_T(D)} + C_T(D) \frac{S_T(U) - (1+r)S_0}{S_T(U) - S_T(D)}) \\ C_0 = \frac{1}{1+r} (\frac{1+r-d}{u-d} C_T(U) + \frac{u-r-1}{u-d} C_T(D)) \end{cases} \quad (1.47)$$

Il est important de préciser que la capitalisation de B à une date future est de la forme $B_{t_n} = B_{t_{n-1}}(1 + r\frac{t}{n}) = B_{t_{n-2}}(1 + r\frac{t}{n})^2 = \dots = B_{t_0}(1 + r\frac{t}{n})^n$. Rappelons qu'à mesure que n tend vers l'infini et $\frac{t}{n}$ vers 0, $(1 + r\frac{t}{n})^n \rightarrow e^{rt}$. Généralement, la forme exponentielle est utilisée quand le taux évolue continûment, c'est à dire quand on considère un temps continu. Par contre, la forme $(1+rt)$ quant à elle, est utilisée quand le taux évolue périodiquement, c'est à dire quand on s'intéresse à des instants précis dans le temps qui est considéré comme discret. Finalement, il est à noter qu'une période $t = 1$ désigne un an et que $t = 0.5$ désigne six mois.

Aussi, à la lumière de ce qui précède, on voit que la probabilité $p = \frac{1+r-d}{u-d}$ n'est autre que la probabilité risque-neutre. De plus, il est important de noter que le prix de cette option à l'instant initial est l'espérance actualisée de son prix à la date d'échéance au sens risque-neutre. À ce niveau, on a pu évaluer le prix d'une option sur une période avec des outils simples et évidents.

Certainement, le calcul du prix C_0 , dans le cas où l'option est négociée sur deux périodes, découle de la même méthode que les cas précédents. En effet, à l'instant t_2 , on aura trois valeurs possibles pour le prix de l'option, soit :

$$\begin{cases} C_2(UU) = (S_2(UU) - k)^+ \\ C_2(UD) = (S_2(UD) - k)^+ \\ C_2(DD) = (S_2(DD) - k)^+ \end{cases} \quad (1.48)$$

On a besoin de calculer les prix $C_1(U)$ et $C_1(D)$ pour pouvoir calculer le prix à l'instant désiré t_0 . Par conséquent, ces deux derniers prix sont exprimés comme suit :

$$\begin{cases} C_1(U) = \frac{1}{1+r}(pC_2(UU) + (1-p)C_2(UD)) \\ C_1(D) = \frac{1}{1+r}(pC_2(DU) + (1-p)C_2(DD)) \end{cases} \quad (1.49)$$

où p étant la probabilité risque-neutre.

Un problème qui s'impose dans le cas où il y a plusieurs dates d'échéances, c'est qu'avant la date d'échéance finale, il est fort probable d'avoir une valeur d'option différente de celle du portefeuille. Dans ce cas, des opportunités d'arbitrages surviennent sur le marché vis-à-vis cette différence générée par le marché lui-même. En revanche, pour contourner un tel problème, le négociateur doit réajuster les proportions en actif risqué α_n et de l'actif sans risque B de son portefeuille à chacune des périodes $[t_{n-1}, t_n]$, sans ajouter ou retirer de l'argent à ou de son portefeuille. Le théorème (Shreve, 2004) ci-dessous, décrit l'évolution de la valeur de l'option ainsi que celle de la richesse à chaque instant en déterminant les relations récursives entre les paramètres d'intérêt du modèle.

Théorème 1.1. *Considérons un modèle binomial à n -périodes, avec $0 < b < 1+r < h$ et une probabilité :*

$$\begin{cases} p & = & \frac{1+r-d}{u-d} \\ 1-p & = & \frac{u-1-r}{u-d} \end{cases} \quad (1.50)$$

Soit V_n une variable aléatoire déterminant la valeur d'un titre dérivé à l'instant t_n . Cette valeur dépend des n résultats consécutifs $(w_1 w_2 \dots w_n)$ issus d'une expérience aléatoire (comme le lancer d'une pièce de monnaie). On définit d'une manière récursive la séquence des variables aléatoires V_{n-1}, V_{n-2}, \dots et V_0 telles que :

$$V_n(w_1 w_2 \dots w_n) = \frac{1}{1+r}(pV_{n+1}(w_1 w_2 \dots w_n H) + (1-p)V_{n+1}(w_1 w_2 \dots w_n B)) \quad (1.51)$$

Où chacune des V_n dépend des n résultats $w_1 w_2 \dots w_n$, avec $0 < n < N-1$.

Aussi, on définit :

$$\alpha_n(w_1 w_2 \dots w_n) = \frac{V_{n+1}(w_1 w_2 \dots w_n H) - V_{n+1}(w_1 w_2 \dots w_n B)}{S_{n+1}(w_1 w_2 \dots w_n H) - S_{n+1}(w_1 w_2 \dots w_n B)}, \quad \forall 0 < n < N - 1 \quad (1.52)$$

Maintenant, si on fixe $X_0 = V_0$, et on définit récursivement aussi la valeur du portefeuille X_1, X_2, \dots et X_n on retrouve :

$$X_n(w_1 w_2 \dots w_n) = V_n(w_1 w_2 \dots w_n), \quad \forall w_1 w_2 \dots w_n \quad (1.53)$$

Le paramètre α_n représente la proportion de l'actif risqué S à l'instant n. C'est par ce paramètre que le négociateur réajuste son portefeuille à chaque période.

Par la suite, on peut déterminer toutes les valeurs de l'option à tous les nœuds de l'arbre binomial en commençant par la date d'échéance finale et en procédant rétro progressivement jusqu'à la date initiale par la même méthode que l'équation (1.49). De ce fait, on en conclut ce qui suit :

$$C_0 = \frac{1}{1+r} (pC_1(U) + (1-p)C_1(D)) \quad (1.54)$$

En recombinaison les équations (1.49) et (1.54), on en déduit que :

$$\begin{cases} C_0 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 (p^2 C_2(UU) + 2p(1-p)C_2(UD) + (1-p)^2 C_2(DD)) \\ C_0 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 (p^2 (u^2 S_0 - K)^+ + 2p(1-p)(udS_0 - K)^+ + (1-p)^2 (d^2 S_0 - K)^+) \end{cases} \quad (1.55)$$

L'équation (1.55) ainsi définie, nous amène à introduire une expression plus générale déterminant la valeur de l'option C dans le cas où on dispose de plusieurs dates d'échéance avant la date de maturité, soit l'expression suivante introduite dans le papier mentionné ci-haut (Cox et al., 1979) :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (0, u^j d^{n-j} S_0 - K)^+ \right) \quad (1.56)$$

Maintenant, soit $a > 0$, un paramètre qui représente le nombre de hausses de prix dans la vie d'une option de la date initiale jusqu'à sa date de maturité. De plus, ce paramètre est le plus petit entier positif pour lequel l'option est dans la monnaie, c'est-à-dire que sa valeur intrinsèque à la date de maturité est positive. Alors :

Si $j < a$, on obtient :

$$(0, u^j d^{n-j} S_0 - K)^+ = 0 \Rightarrow C_0 = 0 \quad (1.57)$$

Par contre,

Si $j > a$, et en considérant l'équation (1.56), on obtient :

$$\begin{cases} (0, u^j d^{n-j} S_0 - K)^+ = u^j d^{n-j} S_0 - K \\ \Rightarrow C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \left(\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (u^j d^{n-j} S_0 - K) \right) \end{cases} \quad (1.58)$$

On précise que dans le cas où $a > n$, l'option sera hors de la monnaie, c'est à dire que sa valeur intrinsèque à la date de maturité est négative.

Après quelques manipulations de l'équation (1.58), on obtient :

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \left(\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (u^j d^{n-j} S_0 - K) \right) \\ = S_0 \left(\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \left(\frac{u^j d^{n-j}}{(1+r)^n} \right) \right) \\ - \frac{K}{(1+r)^n} \left(\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \right) \\ = S_0 \left(\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} \left(\frac{up}{1+r} \right)^j \left(\frac{d(1-p)}{1+r} \right)^{n-j} \right) \\ - \frac{K}{(1+r)^n} \left(\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \right) \end{cases} \quad (1.59)$$

Analysons brièvement l'équation (1.59), pour le deuxième terme en K, on remarque l'expression de la distribution d'une loi binomiale de paramètres a , n et de probabilité p exprimée ci-dessus. On retrouve dans le premier terme en S de l'équation la même forme de distribution binomiale avec les paramètres a , n et de probabilité p' , où $p' = \frac{up}{1+r}$ et $1 - p' = \frac{d(1-p)}{1+r}$.

De ce qui précède, on conclut que le modèle binomial, quelque soit le nombre de périodes avant la date de maturité, nous permet de déterminer la valeur de l'option à la date initiale t_0 en une seule étape connaissant seulement les paramètres u , d , r , p , S et K . Le paramètre a peut être déterminé après quelques manipulations de l'équation $u^a d^{n-a} S_0 - K > 0$, d'où $a > \frac{\log(\frac{K}{u^n S_0})}{\log(\frac{u}{d})}$.

De la même manière, l'espérance actualisée au sens risque neutre nous permet aussi de calculer le prix de l'option en une seule étape, mais cette méthode dépend du comportement du négociateur envers le risque, et de sa manière dont il réagit versus le mouvement du marché. Donc, si on ignore ces deux aspects, il est impossible de déterminer notre prix par cette méthode. En revanche, le modèle binomial, comme il est introduit dans l'équation (1.59), offre une alternative simple qui ne dépend d'aucun paramètre difficile à exprimer mathématiquement.

1.8 Modèle binomial et option sur des actions payantes des dividendes

Le dividende d'une action est un montant payé au détenteur de l'action comme étant un revenu sur la totalité ou une partie de son capital investi. En revanche, ce paiement peut prendre plusieurs formes, soit en argent et dans ce cas le dividende est dit sous forme numéraire. Autrement, si le dividende est payé par le biais d'autres actions ou tout autre actif détenu par l'entreprise émettrice de l'action payant le dividende, dans ce cas le dividende est sous forme naturelle. Finalement, ce dividende peut être payé par l'augmentation de la part de participation du détenteur de l'action dans l'entreprise, ici le dividende est sous forme d'actions de l'entreprise qui aura recours parfois à l'émission de nouvelles actions.

Comme il est déjà défini, le dividende est un facteur financier très important pour les deux membres du contrat. Il est considéré comme un facteur qui diminue en

quelque sorte la liquidité des entreprises ainsi que leurs actifs et leurs avoirs disponibles. Par conséquent, il cause des difficultés financières majeures devant les entreprises qui possèdent des politiques de développements et de progressions à long terme, ou d'une manière générale les entreprises qui veulent s'agrandir. Par contre, pour les actionnaires, le dividende augmente leurs revenus, leurs rendements et leurs ressources financières. De plus, sous certaines formes, il attribue plus de valeurs à l'investissement et permet aux investisseurs d'augmenter leurs richesses.

À ce niveau, à partir du modèle binomial, on s'intéresse à l'évaluation d'une option sur action payant un dividende. Cela nous amène à penser à deux situations possibles. la première situation est quand le dividende versé est une proportion δ du prix de l'action à la date de versement. Dans ce cas, le dividende est dit proportionnel. La résolution du problème de l'évaluation est identique à ce qu'on a vu précédemment. En fait, on procède par les mêmes techniques vues jusqu'à maintenant dans les sections précédentes.

En effet, si la date t_i précède la date de versement du dividende t_v , les prix de l'action aux différents nœuds sont définis par :

$$u^j d^{i-j} S_0, \quad j = 0, 1..i \quad (1.60)$$

Autrement, si la date t_i est postérieure à la date t_v , date à laquelle l'action est dite ex-dividende, les prix de cette action aux différents nœuds sont définis par :

$$u^j d^{i-j} S_0 (1 - \delta), \quad j = 0, 1..i \quad (1.61)$$

Alors, d'une part, et d'autre de la date de versement t_v , l'arbre binomial est toujours recombinaison, et les mêmes techniques de résolution vues jusqu'à maintenant sont toujours valides.

La figure 1.5 ci-après, représente ce qui précède pour une action de prix S , payant un seul dividende à la date de versement $t_v \in [t_1, t_2]$ et évaluée sur n -périodes.

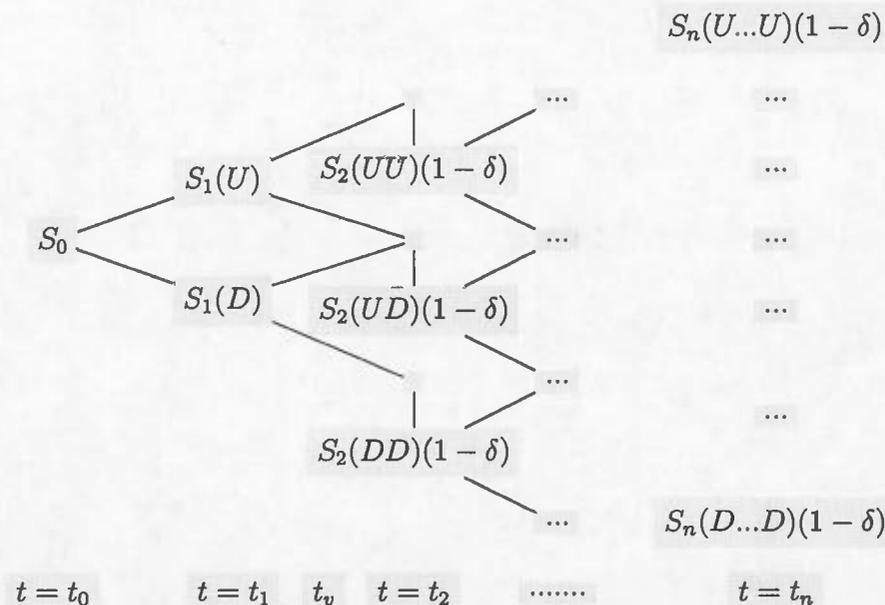


Figure 1.5 Arbre du prix d’une action payante un dividende proportionnel

Il est important de noter qu’il est possible de verser plusieurs dividendes proportionnels pendant la durée de vie d’une option. Dans ce cas, les prix de l’action aux différents nœuds de l’instant t_i sont :

$$u^j d^{i-j} S_0 (1 - \delta_i), \quad j = 0, 1..i \tag{1.62}$$

où δ_i est la somme totale des proportions aux prix versés de la date initiale t_0 jusqu’à la date t_i .

La deuxième situation envisagée pour le versement d’un dividende est quand il est payé sous forme d’un montant d’argent M connu qui sera versé au détenteur à une date de versement t_v . Dans ce cas, l’arbre binomial n’est plus recombinaisonnel comme

le montre la figure 1.6 ci-après, et le nombre de nœuds où il faudra évaluer l'option ou l'action risque d'être très élevé surtout lorsqu'il s'agit du cas de plusieurs versements de dividendes pendant la durée de vie de l'option.

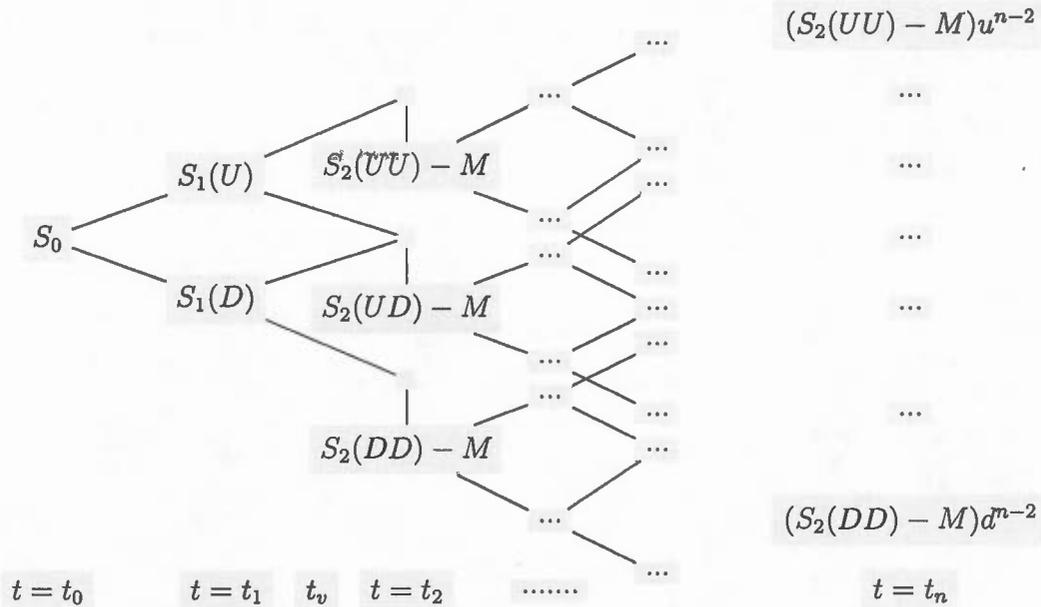


Figure 1.6 Arbre du prix d'une action payant un dividende sous forme d'un montant d'argent connu

Dans ce cas, l'évaluation d'une option sur action payant ce type de dividende utilise les mêmes techniques qui sont employées dans les parties ci-haut avec quelques différences que l'on explique dans ce qui suit :

En effet, avant la date de versement $t_v \in [t_i, t_{i+1}]$, c'est-à-dire jusqu'à la date t_i , les prix de l'action aux différents nœuds sont exprimés par :

$$u^j d^{i-j} S_0, \quad j = 0, 1..i \tag{1.63}$$

Par ailleurs, dans le cas de versement d'un seul dividende et quand l'action passe

ex-dividende, ces prix, à partir de la date t_{i+1} , sont exprimés par :

Pour $t = t_{i+1}$:

$$u^j d^{i-j} S_0 - M, \quad j = 0, 1..i \quad (1.64)$$

Pour $t = t_{i+2}$:

$$\begin{cases} uS_{i+1} = (u^j d^{i-j} S_0 - M)u, & \text{en cas de gain} \\ dS_{i+1} = (u^j d^{i-j} S_0 - M)d, & \text{en cas de perte} \end{cases} \quad (1.65)$$

où $j = 1..i - 1$. Désormais, à partir de la date t_{i+1} , il n'y a plus $i + 1$ mais $2i$ nœuds. D'une façon générale, à la date t_{i+k} , il y aura $k(i + 2)$ nœuds.

En général, pour simplifier ce problème et retourner aux mêmes hypothèses que précédemment, on suppose que le prix de l'action payant un dividende possède deux composantes dont l'une est aléatoire comme on a vu jusqu'à maintenant, et l'autre est la valeur actualisée du dividende, ou des dividendes, à payer pendant la durée de vie de l'option.

En effet, on considère une action de prix S , payant un dividende de montant M à la date t_v . Ensuite, on note S^* la partie incertaine du prix de l'action, on a :

$$\begin{cases} S^* = S, & \text{pour } t_i > t_v \\ S^* = S - Me^{-r(t_v - t_i)}, & \text{pour } t_i < t_v \end{cases} \quad (1.66)$$

où r est le taux d'intérêt sans risque.

Donc, l'étude de l'évolution de S^* nous ramène aux hypothèses habituelles de l'arbre recombinaut, et nous permet aussi d'évaluer les prix de l'action à chaque nœud de cet arbre en ajoutant la valeur du dividende actualisée quand c'est nécessaire. Dans ce cas, les prix de l'action à chaque nœud sont :

$$\begin{cases} S_i = u^j d^{i-j} S_0^* + Me^{-r(t_v - t_i)}, & \text{pour } t_i < t_v \text{ et } j = 0, 1..i \\ S_i = u^j d^{i-j} S_0^*, & \text{pour } t_i > t_v \text{ et } j = 0, 1..i \end{cases} \quad (1.67)$$

On considère un exemple simple, soit une option d'achat européenne dont le contexte est le suivant :

$$\begin{cases} S_0^* = 4, S_1^*(U) = 8, S_1^*(D) = 2 \\ S_2^*(UU) = 16, S_2^*(UD) = 4, S_2^*(DD) = 2 \\ u = 2, d = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{4}, K = 5 \end{cases} \quad (1.68)$$

Cette option prend fin dans deux mois, elle paye aussi un dividende $M = 0.2$ après un mois et demi. La valeur du dividende actualisée est de 0.1898 et de 0.1938 aux dates t_0 et t_1 respectivement. Alors, dans ce cas son prix S prend les valeurs que voici :

$$\begin{cases} S_0 = 4.1898, S_1(U) = 8.1938, S_1(D) = 2.1938 \\ S_2(UU) = 16, S_2(UD) = 4, S_2(DD) = 1 \end{cases} \quad (1.69)$$

On en conclut, et d'après l'équation (1.59), que la valeur à la date initiale de l'option dont le sous-jacent est une action payant le dividende M est :

$$\begin{cases} C_0 = S_0 \left(\sum_{j=2}^2 \binom{2!}{j!(2-j)!} \left(\frac{up}{1+r} \right)^j \left(\frac{d(1-p)}{1+r} \right)^{2-j} \right) \\ \quad - \frac{K}{(1+r)^2} \left(\sum_{j=2}^2 \binom{2!}{j!(2-j)!} p^j (1-p)^{2-j} \right) \\ = 1.88 \end{cases} \quad (1.70)$$

où $p = \frac{1}{2}$.

Donc, comme on a vu jusqu'à maintenant, le modèle binomial est un outil simple permettant d'épargner des étapes de calcul longues et fastidieuses. Le dernier exemple montre comment en une seule étape, on a pu déterminer la valeur de l'option à la date initiale.

1.9 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre l'importance de l'arbre binomial, ainsi que le modèle qui en découle, qui offre une possibilité de voir les choses plus simplement.

On a expliqué les circonstances derrière lesquelles ce modèle a été élaboré, les différentes utilisations de ce modèle ainsi que les différentes hypothèses permettant son application pour l'évaluation des options et l'étude de l'évolution de leurs valeurs à travers le temps. À cet égard, de telles hypothèses étaient toujours un sujet propice et plein de discussions et controverses scientifiques. À ce niveau, le modèle de Black-Scholes, depuis son introduction en 1973, reste le modèle le plus crédible qui réunit en sa faveur l'appréciation des chercheurs. Finalement, bien que le modèle binomial jouisse toujours de sa forte position dans la finance et d'un avis positif en sa faveur dans ce domaine, il est nécessaire de voir ses limites en comparaison avec le modèle de Black-Scholes.

CHAPITRE II

MODÈLE DE BLACK-SCHOLES ET CONVERGENCE DU MODÈLE BINOMIAL

2.1 Introduction

La finance est un domaine très complexe par ses divers paramètres qui sont à la fois nombreux et extrêmement sensibles aux différents changements de types financiers ou autres. Il est indispensable pour les gens qui exercent dans ce domaine de modéliser son évolution sans ignorer les phénomènes importants afin de comprendre minutieusement la façon dont ce domaine se comporte au cours du temps. Toutefois, ce besoin d'explication vient du fait que la finance est un domaine très connecté avec son environnement et sa stabilité offre plus de sécurité pour la vie économique des sociétés et humaine en particulier.

Depuis toujours, les chercheurs se sont penchés sur l'étude des variations des instruments financiers. D'ailleurs, Fisher Black, Myron Scholes et un peu plus tard Robert Merton ont réussi à élaborer un modèle considéré comme le plus important progrès dans l'évaluation du marché boursier. Ce modèle a été le sujet de plusieurs discussions scientifiques et constitue d'une part la base de plusieurs explorations dans le domaine.

Dans ce chapitre, on introduit le modèle de Black-Scholes, ainsi que toutes les no-

tions mathématiques et stochastiques nécessaires pour cette étude. Évidemment, on étudie quelques applications de ce modèle dans l'évaluation des options européennes, américaines et les options européennes à barrières. Aussi, on examine la convergence du modèle binomial et son adaptation avec le modèle de Black-Scholes puisque ce dernier reste un repère crédible pour toutes les études de ce genre.

D'autre part, on s'intéresse à l'étude de deux modèles liés au modèle binomial publiés dans deux papiers. En effet, Le papier de Tian (Tian, 1999) où l'auteur introduit un nouveau paramètre qu'on l'appelle paramètre d'inclinaison et qu'on le note λ . Ce paramètre, selon son signe, tire les nœuds de l'arbre binomial vers le haut ou vers le bas donnant ainsi beaucoup de flexibilité au modèle binomial. Cependant, le paramètre d'inclinaison a un impact direct sur le niveau du prix de l'option à chaque instant. Par conséquent, il est facile de chercher la valeur de ce paramètre qui améliore la convergence du modèle binomial vers celui de Black-Scholes.

Un autre papier est celui de Chung (Chung et Shih, 2007) qui a introduit un nouveau paramètre de forme qu'on le note ζ cette fois-ci. Dans le but de généraliser le modèle CRR l'auteur utilise ce paramètre de forme permettant d'étendre ou rétrécir la dispersion des nœuds de l'arbre binomial. Par ailleurs, il est facile de déterminer une valeur précise de ce paramètre d'étendue afin d'avoir plus d'ajustement et une convergence plus rapide du modèle de CRR vers le modèle de Black-Scholes.

2.2 Le modèle de Black-Scholes

Depuis la publication du travail de Fisher Black et Myron Scholes (Black et Scholes, 1972) en 1973, la finance et le marché boursier en particulier ont connu un

rebondissement important grâce au modèle présenté par ces derniers et qui porte d'ailleurs leur nom, soit le modèle de Black-Scholes. L'idée de leur travail était de trouver un modèle mathématique du marché financier où les prix des actions sont des processus stochastiques en temps continu contrairement au modèle binomial, conçu un peu plus tard en 1979, qui les considère comme étant des processus stochastiques évoluant en temps discret.

Ils ont été parmi les premiers qui ont réussi à bâtir une théorie qui met un rapport entre le prix de l'option et les variations du prix de l'actif sous-jacent tout en s'appuyant sur des aspects purement stochastiques.

Pour élaborer leur modèle, ils ont mis quelques hypothèses telles que :

- Le prix de l'actif sous-jacent S_t suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité σ constante et une dérive μ constante, soit

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t) \quad (2.1)$$

où $W(t)$ est un processus de Wiener ;

- Absence d'opportunité d'arbitrage ;
- Le temps est une fonction continue ;
- Le taux d'intérêt sans risque est connu à l'avance et constant ;
- Tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles.

De plus, on suppose que l'action ne paie pas de dividende entre le moment de l'évaluation et la date d'échéance. Aussi, il n'y a pas de coûts à charger sur toutes les transactions effectuées et on considère que les ventes à découvert sont autorisées.

Une fois les hypothèses sont fixées, on peut introduire le modèle de Black-Scholes qui est à l'origine du modèle à deux actifs, risqué et non risqué. L'actif risqué S dont le prix évolue suivant l'équation (2.1) et il représente en général une action. Alors que l'actif non risqué représente une obligation B dont le prix évolue suivant

l'équation ci-dessous :

$$dB_t = rB_t dt \quad (2.2)$$

où r est le taux d'intérêt instantané.

Supposons que l'on dispose d'un portefeuille contenant ψ options d'achat européenne C , un nombre δ d'actions S et une quantité ϕ d'obligations. La valeur de notre portefeuille est de :

$$V_t = \psi C_t - \Delta S_t - \phi B_t \quad (2.3)$$

Comme on a vu dans le chapitre précédent, par une stratégie d'investissement sur les actifs B et S , la valeur de ce portefeuille doit être égale à zéro pour que l'option puisse couvrir le risque encouru par le prix de l'action pendant sa durée de vie. Par conséquent, on aura :

$$C_t = \alpha S_t + \beta B_t \quad (2.4)$$

où $\alpha_n = \Delta/\psi$ et $\beta_n = \phi/\psi$. On précise que ces deux paramètres sont des fonctions du temps et du prix de l'actif risqué S .

D'après le lemme d'Itô, on a :

$$d(XY) = XdY + YdX + dXdY \quad (2.5)$$

On obtient que :

$$\begin{aligned} dC &= d(\alpha_n S_t) + d(\beta_n B_t) \\ &= (\alpha_n + d\alpha_n) dS_t + (\beta_n + d\beta_n) dB_t + S_t d\alpha_n + B_t d\beta_n \end{aligned} \quad (2.6)$$

Selon le papier (Perello *et al.*, 2000), les chercheurs ont pu prouver les équations de Black-scholes en utilisant les méthodes de calculs d'Itô qui sont standards et très connus en finance, et aussi les méthodes de calculs de Stratonovich qui

sont utilisées en physique. Dans ce papier, les auteurs définissent d'une part α_n et β_n comme des quantités qui sont fonctions de S_t et de temps. D'autre part, ces quantités ne dépendent pas du prix futur de l'action qui ne change ni la stratégie d'investissement ni le contenu du portefeuille dans le présent. Alors, la stratégie d'investissement dépend du prix de l'action à l'instant passé précédant juste l'instant présent. On en conclut, que α_n et β_n ne dépendent pas de $S(t)$ mais plutôt de $S(t - dt) = S_t - dS_t$. En supposant que $dS_t = O(dt^{1/2})$, on a pu faire les calculs ci-dessous et aboutir aux résultats que voici :

$$\begin{aligned}\alpha_n(S_t, t) &= \alpha(S_t - dS_t, t) \\ &= \alpha(S_t, t) - \frac{\partial \alpha(S_t, t)}{\partial S_t} dS_t + O(dt)\end{aligned}\quad (2.7)$$

On a aussi :

$$\frac{\partial \alpha(S_t, t)}{\partial S_t} dS_t = d\alpha(S_t, t) + O(dt) \quad (2.8)$$

D'où :

$$\alpha_n(S_t, t) = \alpha(S_t, t) - d\alpha(S_t, t) + O(dt) \iff \alpha(S_t, t) = \alpha_n(S_t, t) + d\alpha_n(S_t, t) + O(dt) \quad (2.9)$$

Les mêmes calculs sont vrais pour la fonction β_n .

Avec les résultats de l'équation (2.6), l'équation (2.9) devient :

$$dC = \alpha dS_t + \beta dB_t + S_t d\alpha_n + B_t d\beta_n + O(dt^{3/2}) \quad (2.10)$$

Comme pour une stratégie autofinancée, l'investisseur ne peut ni retirer de l'argent ni en injecter dans le portefeuille, donc la composition du portefeuille en question en actifs risqués et non risqués doit s'ajuster suivant l'équation ci-dessous :

$$S_t d\alpha_n = -B_t d\beta_n \quad (2.11)$$

De plus, il en résulte des équations (2.2) et (2.4) que :

$$\beta dB_t = r(C - \alpha S_t)dt + O(dt^{3/2}) \quad (2.12)$$

Alors l'équation (2.10) devient :

$$dC = \alpha dS_t + r(C - \alpha S_t)dt + O(dt^{3/2}) \quad (2.13)$$

Or, l'option C est une fonction de S_t et de t, ainsi, l'application du lemme d'Itô sur ce processus conduit au résultat suivant :

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S_t} dS_t \quad (2.14)$$

D'après les équations (2.13) et (2.14), on obtient ce qui suit :

$$\left(\alpha - \frac{\partial C}{\partial S_t} \right) dS_t = \left(\frac{\partial C}{\partial t} - r(C - \alpha S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right) dt \quad (2.15)$$

L'aspect stochastique de cette équation provient du processus de Wiener de la quantité dS_t . En mettant le terme en dS_t égal à 0, l'équation (2.15) devient déterministe et on peut calculer ainsi le prix de l'option et déterminer aussi la stratégie d'investissement caractérisée par le delta hedging ou delta qui est la solution de l'équation suivante :

$$\alpha = \frac{\partial C}{\partial s} \quad (2.16)$$

La combinaison des équations (2.15) et (2.16) nous donne l'équation de Black-Scholes que voici :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rC - rS \frac{\partial C}{\partial s} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} \quad (2.17)$$

L'équation (2.17) donne la relation exprimant l'évolution du prix de l'option en fonction du prix de l'actif risqué s indépendamment de la nature mathématique

de ce dernier qu'il soit stochastique ou déterministe et du temps t . Il s'agit de l'équation différentielle aux dérivées partielles de Black-Scholes.

Comme toutes les équations, l'équation (2.17) admet un nombre infini de solutions. Par contre, si on fixe une condition terminale pour le prix de l'option, il nous reste qu'une seule et unique solution.

Plusieurs papiers ont été publiés et de nombreuses méthodes ont été employées pour résoudre l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes dans le cas général. On cite l'exemple du papier de (Jódar *et al.*, 2005) où les auteurs ont utilisé la transformation de Mellin. Aussi, on trouve le papier de (Chanane, 2011) qui a déduit une solution pour la classe des équations différentielles de Black-Scholes et aussi le papier de (Bohner et Yao, 2009) qui a développé une solution analytique pour cette équation. Ces trois papiers ont considéré le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = rC - rs\frac{\partial C}{\partial s} - \frac{1}{2}\sigma^2s^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2} \\ C(s, t) = g(s) \end{cases} \quad (2.18)$$

où $g(s)$ est une fonction qui répond à des conditions prédéfinies de continuité et d'intégrabilité.

Dans ce travail, on calcule la solution de l'équation de Black-Scholes pour une option d'achat européenne dont sa valeur à la date de maturité désignera la condition terminale, soit le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = rC - rs\frac{\partial C}{\partial s} - \frac{1}{2}\sigma^2s^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2} \\ C(s, T) = (S_T - K)^+ \end{cases} \quad (2.19)$$

De ce fait, une seule solution satisfait ce système d'équations. Le papier (Black et Scholes, 1972) propose une méthode simple pour déterminer cette solution. En

effet, posons ce qui suit :

$$C(s, t) = e^{r(T-t)} y\left[\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left[\ln\left(\frac{s}{K}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right], \left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right] \quad (2.20)$$

Avec ce changement de variable, l'équation (2.17) devient :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \quad (2.21)$$

De plus, la condition terminale devient :

$$y(v, 0) = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ K[e^{v(\frac{1}{2}\sigma^2)/(r-\frac{1}{2}\sigma^2)} - 1], & v > 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Notons que l'équation (2.21) est largement connue sous le nom de l'équation de la chaleur dont la solution est :

$$y(v, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-v/\sqrt{2s}}^{\infty} K[e^{(v+q\sqrt{2s})(\frac{1}{2}\sigma^2)/(r-\frac{1}{2}\sigma^2)} - 1] e^{-q^2/2} dq \quad (2.23)$$

Combinons les équations (2.20) et (2.22), on obtient la fameuse solution de l'équation (2.17) sous la forme :

$$C(s, t) = S_0 \phi(d_1) - K e^{r(T-t)} \phi(d_2) \quad (2.24)$$

où

$$\begin{aligned} d_1 &= [\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)] / [\sigma\sqrt{T-t}] \\ d_2 &= [\ln(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)] / [\sigma\sqrt{T-t}] \end{aligned} \quad (2.25)$$

ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On voit clairement dans l'équation (2.24) que la date de maturité apparaît toujours multipliée par le taux d'intérêt r ou bien par la volatilité σ^2 . À ce propos, Black et Scholes expliquent qu'une augmentation de la date de maturité peut être

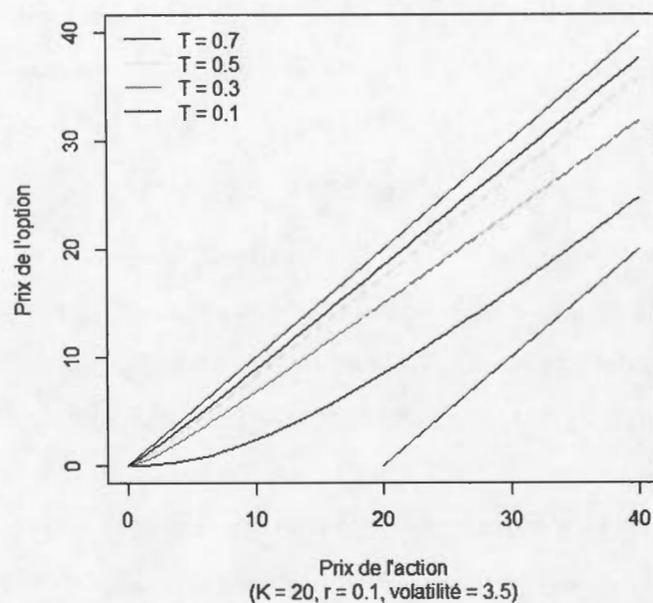


Figure 2.1 Prix de l'option en fonction du prix de l'action pour différentes dates de maturité

exprimée par une augmentation du taux d'intérêt ou une augmentation de la volatilité. D'ailleurs, Merton précise que la valeur de l'option croît continuellement par l'augmentation de l'un des paramètres T , r ou σ^2 .

D'une part, la figure 2.1 nous montre l'évolution du prix de l'option en fonction du prix de l'action pendant différentes dates de maturités quand les paramètres de volatilité σ et du taux d'intérêt r sont constants. On remarque que le prix de l'option est toujours situé entre le prix de l'action S et le prix d'exercice K . Cela est tout à fait en accord avec ce qui précède puisque l'option ne sera pas exécutée si sa valeur dépasse le prix de l'action et elle sera négociée dans le contraire. Aussi, sa valeur ne peut en aucun cas être inférieure à son prix d'exercice. Par ailleurs, on

voit que le prix de l'option augmente avec l'augmentation de sa durée de vie. En effet, plus la date de maturité est longue, plus l'option est chère. Cette tendance à la hausse est traduite par l'incertitude du prix de l'action qui augmente à travers le temps, plus la durée est grande, plus le risque encouru par l'action est important.

D'autre part, la figure 2.2 montre l'évolution du prix de l'option par rapport à celui de l'action pour différentes valeurs de volatilité (ligne continue) et du taux d'intérêt (ligne discontinue) pour une date de maturité constante. On voit que la courbe croît avec l'augmentation du prix de l'action et il croît quand le taux d'intérêt ou la volatilité augmente. Cela intervient dans le même contexte qui montre que les prix du marché financier sont très sensibles aux changements des nombreux paramètres qui s'y trouvent et qui prouvent l'existence d'une connexion entre tous ses éléments. En effet, la volatilité est une mesure des variations du cours de l'action. Elle traduit en quelque sorte la possibilité de réaliser un gain ou de subir une perte, plus elle est élevée, plus la possibilité de réaliser un gain est importante et le risque d'une perte sur le prix de l'actif est grand.

Il y a d'autres approches qui permettent de calculer la formule de Black-Scholes, qui ont été développées plus tard comme l'approche risque-neutre ou l'évaluation par réplication. On montre dans ce qui suit l'approche risque-neutre s'appuyant, comme on a vu précédemment, sur l'existence d'une probabilité sous laquelle le prix de l'actif risqué S est une martingale. En effet, restons toujours dans le contexte précédent et dans le cadre d'absence d'arbitrage impliquant l'existence d'une mesure risque-neutre Q . Dans cette situation, la condition martingale nous permet d'écrire ce qui suit :

$$\frac{S_t}{B_t} = E^Q\left[\frac{S_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right] \quad (2.26)$$

où $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration.

Par la même optique, on retrouve la valeur initiale de l'option ayant l'expression

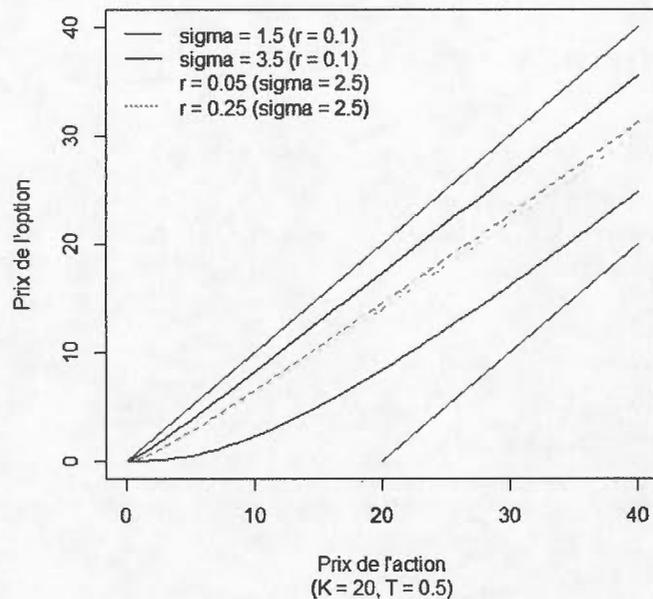


Figure 2.2 Prix de l'option en fonction du prix de l'action pour différentes valeurs du taux d'intérêt et de volatilité

ci-dessous lorsque $B_0 = 1$:

$$C_0 = E^Q \left[\frac{C_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_0 \right] \quad (2.27)$$

À ce niveau, la transformation du mouvement brownien dû au changement de la mesure de probabilité réelle P à la nouvelle mesure de probabilité risque-neutre Q , permet de garder la propriété martingale de ce dernier et cela grâce au résultat du théorème de Girsanov dont voici l'énoncé :

Théorème 2.1. Soit λ un processus satisfaisant la condition dite de Novikov ci-dessous :

$$E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right) \right] < \infty \quad (2.28)$$

Alors, on a les propriétés suivantes :

- le processus $\{L_t, 0 < t < T\}$ est une P -martingale
- le processus $\{W_t^*, 0 < t < T\}$ défini par :

$$W_t^* = \int_0^t \lambda_s ds + W_t \quad (2.29)$$

est un mouvement brownien sous la mesure Q caractérisé par :

$$\frac{dQ}{dP} = L_T \quad (2.30)$$

Si λ est constant, le processus $\{L_t, 0 < t < T\}$ est une martingale, et dans ce cas, on a :

$$L_t = \exp(-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t) \quad (2.31)$$

Grâce au résultat de ce théorème, et en posant $\lambda < 0$, on peut s'assurer que le processus $\{W_t^Q, 0 < t < T\}$ qui est égal à :

$$W_t^Q = W_t + \lambda t \quad (2.32)$$

est un mouvement brownien sous la mesure-risque neutre .

Par la suite, on a d'une part :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.33)$$

qui est égal à :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d(W_t^Q - \lambda t) \quad (2.34)$$

On a donc :

$$dS_t = (\mu - \lambda\sigma) S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \quad (2.35)$$

D'autre part, posons :

$$dS_t^* = \frac{S_t}{B_t} \quad (= S_t e^{-rt}) \quad (2.36)$$

À l'aide du lemme d'Itô, on a :

$$dS_t^* = (\mu - r - \lambda\sigma)S_t^*dt + \sigma S_t^*dW_t^Q \quad (2.37)$$

Pour que S_t^* soit une martingale, il faut que $\mu - r - \lambda\sigma = 0$, ce qui donne $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$, qui est appelé le prix du risque ou le ratio de Sharpe.

Ensuite, utilisons la valeur de λ dans l'équation (2.34), on obtient l'expression de la dynamique du prix de l'actif risqué sous la mesure risque neutre qui est de la forme :

$$dS_t = rS_tdt + \sigma S_t dW_t^Q \quad (2.38)$$

De ce qui précède, l'équation (2.26) devient :

$$C_0 = e^{-rT} E^Q[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_0] \quad (2.39)$$

On sait que $\ln(\frac{S_T}{S_0})$ suit une normale de moyenne $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ et de variance σ^2T .

Alors, la solution de l'équation (2.38) est la même que celle des équations (2.23) et (2.24) trouvée par la méthode des équations aux dérivées partielles proposée Black et Scholes.

2.3 Convergence du modèle binomial

Dans cette section, après avoir présenté les deux modèles binomiaux et de Black-Scholes, il est important de voir le lien entre ces deux en terme de convergence. Il est essentiel que ces deux modèles coïncident à un certain moment puisqu'ils décrivent le même phénomène.

De nombreuses approches ont été employées pour montrer que le modèle de Black-Scholes est la limite du modèle binomial lorsque le nombre de périodes de ce dernier devient suffisamment grand et le prix change continuellement pendant ces

périodes. L'une des plus simples méthodes est celle développée par Cox, Ross et Rubinstein dans leur papier fondateur du modèle binomial, ce qui prouve d'avantage que la convergence entre les deux modèles est une étape cruciale pour la validité de leur modèle.

En fait, supposons qu'on soit dans le contexte d'une option d'achat européenne de prix C , écrite sur une action de prix S . La date de maturité est T et le prix d'exercice est K . Aussi, le prix de l'action change tout le long des n périodes séparant la date initiale $t = 0$ et la date de maturité $t = T$. À chaque instant t , le prix S prend les valeurs uS_{t-1} avec probabilité p s'il est à la hausse, ou dS_{t-1} avec probabilité $(1-p)$ s'il est à la baisse. De plus, on suppose que le taux d'intérêt sans risque r est constant.

Les auteurs affirment qu'avec un bon choix des paramètres u , d et p , le modèle binomial converge vers le modèle de Black-Scholes lorsque $n \rightarrow \infty$ ou aussi le modèle avec saut lorsque $n \rightarrow \infty$. Dans notre travail, on s'intéresse principalement à la convergence vers le modèle de Black-Scholes.

En effet, le prix de l'action après n périodes est égal à :

$$S = u^j d^{n-j} S_0 \quad (2.40)$$

où j est un nombre aléatoire désignant le nombre des hausses du prix S jusqu'à la n ème période.

L'équation (2.39) est équivalente à :

$$\log(S/S_0) = j \log(u/d) + n \log(d) \quad (2.41)$$

Donc, l'espérance de $\log(S/S_0)$ est égale à :

$$E(\log(S/S_0)) = \log(u/d)E(j) + n \log(d) \quad (2.42)$$

et sa variance est égale à :

$$\text{var}(\log(S/S_0)) = (\log(u/d))^2 \text{var}(j) \quad (2.43)$$

Le nombre j est de probabilité p sur chaque période, donc il est d'espérance et de variance égale à np et $np(1-p)$ respectivement.

Alors, de ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} E(\log(S/S_0)) &= (p \log(u/d) + \log(d))n \\ \text{var}(\log(S/S_0)) &= np(1-p)(\log(u/d))^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

D'après les résultats de l'équation (2.43), lorsque n tend vers l'infini, il est indispensable que l'espérance et la variance soient finies et différentes de 0. Par conséquent, un bon choix des paramètres u , d et p assure de bons résultats en terme de convergence. Pour ce faire, les auteurs proposent un choix des paramètres u , d et p permettant l'égalité des moments empiriques et réels du processus $\log(S/S_0)$, soit :

$$\begin{aligned} (p \log(u/d) + \log(d))n &\rightarrow \mu t \\ np(1-p)(\log(u/d))^2 &\rightarrow \sigma^2 t \end{aligned} \quad (2.45)$$

un petit calcul nous amène aux résultats suivants :

$$u = e^{\sigma \sqrt{t/n}}, \quad d = e^{-\sigma \sqrt{t/n}} \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mu/\sigma)\sqrt{t/n} \quad (2.46)$$

Maintenant, dans le but d'établir une convergence du modèle binomial vers celui de Balck-Scholes, les auteurs utilisent les propriétés du théorème central limite qui stipule ce qui suit :

Si :

$$\frac{p \frac{|\log u - E(\log(S/S_0))|^3 + (1-p) \frac{|\log d - E(\log(S/S_0))|^3}{\text{var}(\log(S/S_0))^3 \sqrt{n}}}{\text{var}(\log(S/S_0))^3 \sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (2.47)$$

Alors :

$$Prob\left(\left(\frac{\log(S/S_0) - nE(\log(S/S_0))}{\text{var}(\log(S/S_0))^{3/2}\sqrt{n}}\right) \leq z\right) \rightarrow \phi(z) \quad (2.48)$$

où $\phi(z)$ est la distribution de la loi normale centrée réduite.

Par la suite, et après quelques manipulations, on obtient :

$$\frac{p |\log u - E(\log(S/S_0))|^3 + (1-p) |\log d - E(\log(S/S_0))|^3}{\text{var}(\log(S/S_0))^{3/2}\sqrt{n}} = \frac{(1-p)^2 + p^2}{\sqrt{np(1-p)}} \quad (2.49)$$

Pour un choix approprié de la probabilité p , comme celui de l'équation (2.45), et quand n tend vers l'infini, l'équation (2.47) tend vers 0. Donc la condition de l'équation (2.46) est vérifiée ce qui garantit la convergence du modèle binomial à n -périodes vers une distribution log-normale.

Aussi, on a d'une part la formule de Black-Scholes qui est de la forme :

$$\begin{aligned} C(s, t) &= S_0\phi(d_1) - Ke^{r(T-t)}\phi(d_2) \\ d_1 &= [\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]/[\sigma\sqrt{T-t}] \\ d_2 &= [\ln(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]/[\sigma\sqrt{T-t}] \end{aligned} \quad (2.50)$$

D'autre part, on a vu au premier chapitre que par la méthode du modèle binomial, la formule permettant de calculer le prix de l'option est de la forme :

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \left(\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} \left(\frac{up}{1+r}\right)^j \left(\frac{d(1-p)}{1+r}\right)^{n-j} \right) \\ &\quad - \frac{K}{(1+r)^n} \left(\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \right) \\ &= S_0\psi(a, n, p') - \frac{K}{(1+r)^n}\psi(a, n, p) \end{aligned} \quad (2.51)$$

où $\psi()$ est la distribution binomiale incomplète.

De ce qui précède, il est clair que les deux formules possèdent la même forme, et d'après les auteurs, il suffit de montrer que :

$$\psi(a, n, p') \rightarrow \phi(d_1) \quad \psi(j, n, p) \rightarrow \phi(d_2) \quad (2.52)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} 1 - \psi(a, n, p) &= \text{Prob}(j \leq a - 1) \\ &= \text{Prob}\left(\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{a - 1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Par analogie à tout ce qui précède, on a :

$$\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\log(S/S_0) - nE(\log(S/S_0))}{\text{var}(\log(S/S_0))\sqrt{n}} \quad (2.54)$$

Du chapitre 1, on sait que :

$$\begin{aligned} a - 1 &= \log(KSd^n) / \log(u/d) - \epsilon \\ &= (\log(K/S) - n\log(d)) / \log(u/d) - \epsilon \end{aligned} \quad (2.55)$$

où ϵ est un nombre réel entre 0 et 1.

On en conclut que :

$$\frac{a - 1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\log(K/S) - nE(\log(S/S_0)) - \epsilon \log(u/d)}{\text{var}(\log(S/S_0))\sqrt{n}} \quad (2.56)$$

Donc, l'équation (2.52) devient :

$$1 - \psi(a, n, p) = \text{Prob}\left(\frac{\log(S/S_0) - nE(\log(S/S_0))}{\text{var}(\log(S/S_0))\sqrt{n}} \leq \frac{\log(K/S) - nE(\log(S/S_0)) - \epsilon \log(u/d)}{\text{var}(\log(S/S_0))\sqrt{n}}\right) \quad (2.57)$$

Dans cette situation, il est possible d'appliquer le théorème central limite vu que la condition de l'équation (2.46) est vérifiée par le choix prédéfini des paramètres u , d et p . Aussi, il est facile de vérifier, quand n tend vers l'infini :

$$nE(\log(S/S_0)) \rightarrow (\log r - 1/2\sigma^2)t \quad \text{et} \quad \text{var}(\log(S/S_0))\sqrt{n} \rightarrow \sigma\sqrt{t} \quad (2.58)$$

Et que :

$$\log(u/d) \rightarrow 0 \quad (2.59)$$

Donc, d'après l'équation (2.57), l'équation (2.55) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}} &= \frac{\log(K/S) - nE(\log(S/S_0)) - \epsilon \log(u/d)}{\text{var}(\log(S/S_0))\sqrt{n}} \\ &= \frac{\log(Kr^{-1}/S)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \end{aligned} \quad (2.60)$$

De ce fait, L'équation (2.56) sera de la forme :

$$1 - \psi(a, n, p) \rightarrow \phi(z) = \phi\left(\frac{\log(Kr^{-1}/S)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}\right) \quad (2.61)$$

D'où la convergence du modèle binomial vers celui de Black-Scholes. Dans cette démonstration, les auteurs ont utilisé des méthodes de calcul simple et ont mis beaucoup d'importance sur le choix des paramètres du modèle binomial. En effet, ils présument que c'est le choix des paramètres u , d et p qui oriente la convergence et précise le modèle limite.

2.4 Modèle binomial avec paramètre d'inclinaison

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein est un modèle d'évaluation d'options standards. Il est très connu et le plus utilisé dans la finance grâce à ses calculs simples et à son ultime convergence vers le modèle de Black-Scholes. Plusieurs ont cherché à modifier le modèle CRR afin d'élargir son application et de le rendre plus efficace dans l'évaluation des options plus complexes.

Dans ce contexte vient la motivation du travail de Tian (Tian, 1999). En effet, il a développé une autre dimension pour le modèle en ajoutant le paramètre d'inclinaison. Le nouveau modèle est une extension du modèle afin d'évaluer des options plus complexes et permettant d'améliorer la vitesse de convergence vers le modèle de Black-Scholes.

Ce nouveau modèle, appelé le modèle binomial flexible, a été conçu par l'ajout

d'un paramètre d'inclinaison au modèle binomial standard. En effet, considérons une option ayant une maturité T et un actif sous-jacent risqué dont le prix est S suit un mouvement brownien géométrique avec l'expression que voici :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW \quad (2.62)$$

Dans le cadre d'un modèle binomial standard à N périodes, dont chacune est notée par $\Delta t = T/N$, on désigne l'instant $t_i = i\Delta t$, $i=0, \dots, N$. Le modèle évolue dans un environnement neutre au risque, ce qui laisse entendre que $\mu = r$ où r est le taux d'intérêt risque-neutre. À chaque instant t_i , le prix de l'actif sous-jacent prend la valeur S_i , alors qu'à l'instant t_{i+1} le prix S_{i+1} est égal à uS_i avec une probabilité p , ou dS_i avec une probabilité $1-p$, où u et d sont deux constantes telle que $u > 1 > d$ et p est une probabilité telle que $0 < p < 1$.

Chaque nœud de l'arbre binomial est identifié par le couple (i, j) , $i=0, \dots, N$ et $j=0, \dots, i+1$, où i et j désignent respectivement le nombre de périodes et le nombre de fois où le prix a augmenté. De ce fait S_{ij} est la valeur du prix de l'actif au nœud (i, j) , S_0 est le prix initial au nœud $(0, 0)$. Alors à chaque nœud (i, j) , le prix de l'actif sous-jacent est égal à :

$$S_{ij} = u^j d^{i-j} S_0 \quad (2.63)$$

Connaissant le prix d'exercice K , il est facile de calculer le prix de l'option à l'instant 0 avec les techniques vues précédemment soit avec le modèle binomial ou CRR. Cependant, le choix des paramètres du modèle binomial est crucial afin qu'il y ait convergence de la distribution discrète du modèle binomial vers celle log-normale. À ce niveau, l'univers risque-neutre stipule que sa probabilité doit être égale à :

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (2.64)$$

Aussi, le choix des paramètres u et d tels que :

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t} + O(t)} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t} + O(t)} \end{aligned} \quad (2.65)$$

où $O(t)$ signifie que le paramètre u est dominé par t au voisinage de l'infini.

Ce choix de paramètres assure la convergence du modèle binomial vers celui de Black-Scholes.

À partir des deux dernières équations, Tian propose d'introduire une constante arbitraire λ , appelée paramètre d'inclinaison à travers duquel le modèle binomial flexible sera construit. En effet, considérons les paramètres u et d comme suit :

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Le paramètre d'inclinaison λ peut prendre différentes valeurs positives, négatives ou nulles et cela donne plus de flexibilité au modèle binomial. Aussi, pour des petites valeurs de Δt , il suffit que le paramètre λ soit borné pour que la condition $\lambda\sigma^2\Delta t = O(\Delta t)$ soit vérifiée et que les deux équations (2.65) et (2.66) soient égales. Dans ce même contexte du paramètre λ , la nouvelle condition d'absence d'opportunité d'arbitrage est vérifiée et elle prend la forme suivante :

$$\lambda - \frac{r}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (2.67)$$

Le modèle binomial standard est un cas particulier du modèle binomial flexible. Réciproquement, le modèle binomial flexible, avec son paramètre d'inclinaison, est une extension du modèle binomial standard. Le paramètre d'inclinaison modifie la forme de l'arbre binomial. En effet, lorsque $\lambda = 0$, il s'agit alors du modèle binomial standard dont l'arbre binomial est symétrique par rapport à la ligne parfaitement horizontale formée par les nœuds où $u^j d^{i-j} = 1$, $i = 0, \dots, N$ et $j = 0, \dots, N + 1$, comme c'est illustré sur la figure 2.3.

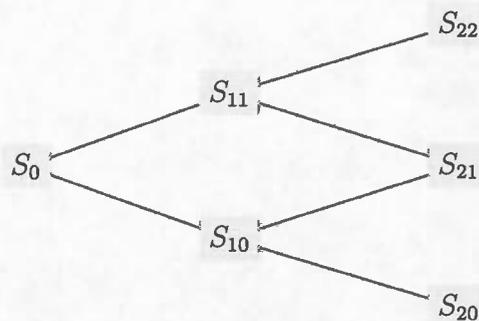


Figure 2.3 Arbre binomial $\lambda = 0$

Maintenant, lorsque $\lambda > 0$, tous les nœuds de l'arbre binomial ont tendance à se tirer vers le haut par rapport à la ligne horizontale vue dans le cas du modèle standard. Cela exprime une hausse du niveau du prix de l'actif risqué, dans ce cas par exemple $udS_0 > S_0$ contrairement au modèle standard où $udS_0 = S_0$, la figure 2.4 ci-dessous montre la forme de l'arbre dans ce cas.

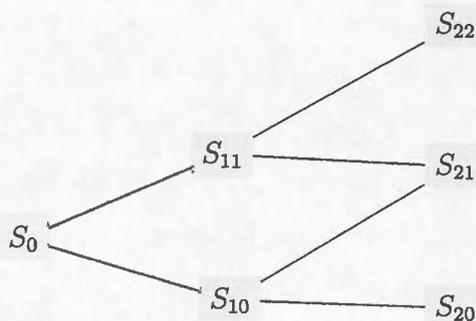


Figure 2.4 Arbre binomial $\lambda > 0$

À l'encontre de ce qui précède, lorsque $\lambda < 0$ l'arbre binomial s'étire vers le bas exprimant ainsi une baisse du niveau de prix. Cela est traduit par le fait que $ud < 1$, la figure 2.5 illustre cela.

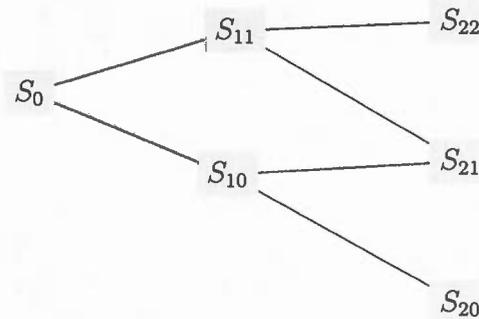


Figure 2.5 Arbre binomial $\lambda < 0$

2.5 Convergence du modèle binomial flexible

La convergence du modèle binomial flexible est assurée pour toutes les valeurs du paramètre d'inclinaison λ . De ce fait, il est commode d'en choisir une valeur particulière permettant une convergence plus rapide et plus lisse. En effet, plusieurs techniques permettent de calculer la vitesse de convergence ainsi que la limite du modèle considéré. Mais, certaines de ces techniques ne peuvent être utilisées que dans le cadre d'une convergence lisse et monotone. Contrairement au modèle binomial où la convergence est irrégulière et fluctuante, le modèle binomial flexible muni du paramètre λ permet une convergence lisse et monotone, comme le montre la figure 2.6, facilitant ainsi l'utilisation de certaines techniques de calcul de la vitesse de convergence et de sa limite.

Selon Tian, le choix du paramètre d'inclinaison est simple. En effet, il faut simplement choisir λ telle qu'à la date de maturité T , un nœud de l'arbre binomial coïncide exactement avec le prix d'exercice K de l'option. Considérons un modèle binomial flexible à N -périodes et fixons $\lambda_0 = 0$. Alors, à l'instant N , on a :

$$S_{Nj} = u^j d^{N-j} S_0 \quad (2.68)$$

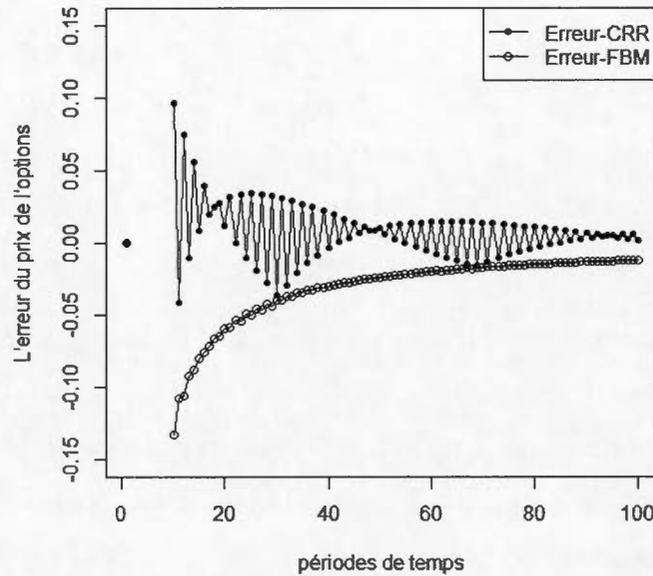


Figure 2.6 Convergence des modèles CRR et Flexible

Le nœud le plus proche du prix d'exercice K est solution de l'équation suivante :

$$u^\eta d^{N-\eta} S_0 = K \quad (2.69)$$

Donc, on arrive à une solution qui n'est pas nécessairement un entier et qui est de la forme :

$$\eta = \frac{\log(K/S_0) - N \log(d_0)}{\log(u_0/d_0)} \quad (2.70)$$

où $u_0 = u(\lambda_0)$, $d_0 = d(\lambda_0)$ et $\lambda = 0$. Maintenant, soit j_0 l'entier le plus proche de η . Ensuite, on choisit la valeur de λ qui nous permet d'avoir une parfaite coïncidence entre le nœud (N, j_0) et le prix d'exercice K et qui est une solution de l'équation suivante :

$$u^{j_0} d^{N-j_0} S_0 = K \quad (2.71)$$

Après quelques manipulations, on aura :

$$\lambda = \frac{\log(K/S_0) - (2j_0 - N)\sigma\sqrt{\Delta t}}{N\sigma^2\Delta t} \quad (2.72)$$

Ce choix de paramètre d'inclinaison λ assure que le nœud (N, j_0) coïncide parfaitement avec la valeur du prix d'exercice K tout en vérifiant les différentes conditions stipulant l'existence du modèle binomial flexible.

Une fois le paramètre λ est déterminé, il est temps d'étudier la convergence par le biais du taux d'erreur défini ci-dessous. Dans le cas d'une option européenne, considérons C_{BS} le prix de l'option calculé par la formule de Black-Scholes et $C(N)$ le prix de l'option calculé par la méthode binomiale. L'auteur commence par définir l'erreur comme suit :

$$e(N) = C(N) - C_{BS} \quad (2.73)$$

L'erreur est la différence entre le prix du modèle binomial à N -périodes et le prix de Black-Scholes. Par la suite, le taux d'erreur est défini comme suit :

$$\rho(N) = \frac{e(N)}{e(2N)} \quad (2.74)$$

Le taux d'erreur exprime la précision de la convergence. En effet, si l'erreur diminue lorsque le nombre de périodes du modèle binomial augmente, alors le taux d'erreur doit être supérieur à 1 en valeur absolue d'après l'équation (2.74). De plus, si c'est le cas, le taux d'erreur converge vers une constante qu'on note ρ . À ce niveau, il est commode d'utiliser la méthode d'extrapolation afin de trouver des résultats plus précis du modèle binomial. la formule d'extrapolation donnant le prix d'option est définie comme suit :

$$\hat{C}(2N) = \frac{\rho C(2N) - C(N)}{\rho - 1} \quad (2.75)$$

Quelques manipulations des équations (2.73), (2.74) et (2.75) nous donnent :

$$\hat{C}(2N) = C_{BS} + \frac{\rho - \rho(N)}{\rho - 1} e(2N) \quad (2.76)$$

La dernière équation montre que si le taux d'erreur, $\rho()$ converge vers ρ , alors l'erreur contenue dans la méthode d'extrapolation sera beaucoup plus petite que l'erreur du modèle binomial, $e()$. Alors, la méthode d'extrapolation permet d'améliorer la vitesse de convergence si celle-ci est lisse.

Dans le cas d'une option américaine, il n'y a pas de formule explicite permettant de calculer le prix C_{BS} . Cependant, on définit un nouveau taux d'erreur basé sur l'erreur réduite défini comme suit :

$$\epsilon(N) = C(N) - C(2N) \quad (2.77)$$

Ainsi, ce nouveau taux d'erreur appelé taux d'erreur réduit est défini par l'expression :

$$\rho'(2N) = \frac{\epsilon(N)}{\epsilon(2N)} = \frac{C(N) - C(2N)}{C(2N) - C(4N)} \quad (2.78)$$

De cette dernière équation, on peut voir la relation entre le taux d'erreur et le taux d'erreur réduit par la relation suivante :

$$\rho'(2N) = \frac{\rho(N) - 1}{\rho(2N) - 1} \rho(2N) \quad (2.79)$$

Cela montre que la convergence du taux d'erreur vers une constante implique la convergence du taux d'erreur réduit vers la même constante. Aussi, dans le cas des options où la formule de Black-Scholes n'admet pas de solution explicite, la méthode d'extrapolation améliore la vitesse de convergence.

On présente dans ce qui suit un exemple qui traite une option à barrière, cette option est devenue l'une des plus transigées sur le marché boursier grâce à son

prix beaucoup moins élevé que les options ordinaires. L'option à barrière est une option exotique qui peut être créée ou annulée par le passage du prix de l'actif sous-jacent au-dessus ou en dessous d'une valeur limite appelée barrière fixée à l'avance. En effet, une option à barrière est dite continue quand sa barrière est observée continuellement. Dans le cas où l'arbre binomial est utilisé afin d'évaluer son prix, il est important qu'une couche horizontale de nœuds soit placée par-dessus la barrière. Sinon, la convergence sera irrégulière et ondulée, en plus, l'erreur du prix sera très élevée même pour des grands nombres d'étapes de l'arbre binomial. C'est à ce niveau que le paramètre d'inclinaison s'intervient afin de bien placer la barrière par-dessus la couche horizontale des nœuds. Maintenant, considérons une option à barrière dont K et B_d sont respectivement le prix d'exercice et la barrière définie d'avance. L'option devient hors exercice si à n'importe quel moment pendant sa durée de vie, le prix de l'actif sous-jacent passe en dessous de la barrière B_d qui est censée être inférieure au prix initial de cet actif.

D'une part, comme on a vu précédemment, l'arbre du modèle CRR est symétrique par rapport à la couche des nœuds parfaitement horizontale passant par le nœud initial S_0 qu'on l'appelle la couche centrale. D'autre part, la barrière est une droite qui se trouve entre deux couches horizontales et elle est parallèle à toutes les couches des nœuds de cet arbre. Aussi, pour bien évaluer le prix de cette option avec la précision requise, il faut que la barrière coïncide parfaitement avec une de ces couches se trouvant en bas de la couche centrale. Par la même approche, on détermine le paramètre d'inclinaison qui est égal à :

$$\lambda = \frac{\log(B_d/S_0) - N_0\sigma\sqrt{\Delta t}}{N_0\sigma^2\Delta t} \quad (2.80)$$

où :

$$N_0 = \frac{\log(B_d/S_0)}{\log(d_0)} \quad (2.81)$$

Ce choix de λ , d'après Tian, nous dit que la barrière est atteinte après N_0 baisses

du prix de l'actif sous-jacent. Par la suite, il est nécessaire de s'assurer que le modèle binomial converge avec ce choix de λ . Pour s'en assurer, il suffit de montrer que le paramètre d'inclinaison est borné. Alors, on pose :

$$\epsilon = N_0 - \frac{\log(B_d/S_0)}{\log(d_0)} \quad (2.82)$$

Après quelques manipulations, on obtient :

$$\lambda = \frac{\epsilon}{\epsilon\sigma\sqrt{\Delta t} - \log(B_d/S_0)} \quad (2.83)$$

Lorsque $|\epsilon| \leq 0.5$ et $\log(B_d/S_0)$ qui est une constante positive, l'équation (2.67) est vérifiée et le paramètre λ est borné pour des petites valeurs de Δt d'où la convergence du modèle binomial.

Cependant, l'arbre binomial est incliné vers le haut ou vers le bas respectivement si la valeur de λ est positive ou négative. Cela vient contre nos attentes puisque toutes les couches des nœuds de l'arbre sont désormais obliques et que la barrière est une droite horizontale qui ne peut plus s'ajuster à aucune couche de l'arbre. Ce qui précède est évident d'après l'expression :

$$ud = e^{2\lambda\sigma^2\Delta t} \quad (2.84)$$

Dans ce contexte d'un arbre incliné, la valeur choisie du paramètre d'inclinaison λ assure que la barrière passe par le premier nœud de la couche où le nombre de baisses de prix est N_0 . Pour résoudre ce dilemme, l'auteur propose une procédure à deux étapes qui divise l'arbre binomial en deux parties, le modèle binomial flexible devient le modèle binomial flexible à deux étapes. La première étape consiste à travailler avec un arbre incliné où la barrière passe par dessus le nœud le plus bas de cet arbre, cela vient avec la valeur de λ choisie ci-haut. La deuxième étape nous fait revenir à l'arbre binomial symétrique où toutes les couches sont horizontales. Il faut toujours s'assurer que l'arbre soit recombinaison après le changement

des paramètres. la figure 2.7 illustre ce qui précède. Il est clair qu'à la zone (1) du graphique, l'arbre est incliné, par contre il est symétrique à la zone (2) du graphique. Par ce choix, on convient qu'à la première étape, l'actif sous-jacent évolue suivant les paramètres $(u, d, p, 1-p)$ calculés à partir du paramètre λ déterminé par l'équation (2.80), ce qui nous assure que l'arbre se place par-dessus la barrière après exactement N_0 baisses de prix consécutives à partir de (S_0) . Alors qu'à la deuxième étape, l'actif sous-jacent évolue en fonction des paramètres $(u_0, d_0, p_0, 1 - p_0)$ calculés quand $\lambda = 0$ ce qui nous ramène au modèle CRR avec un arbre tout à fait symétrique. Il est crucial de mentionner que l'arbre reste recombiné par changement de paramètres, par conséquent, il reste recombiné par passage de la zone (1) à la zone (2) du graphique 2.7. En effet, considérons deux nœuds adjacents, à l'instant t_{N_0} , soit les nœuds (N_0, j) et $(N_0, j + 1)$ pour tout $0 \leq j \leq N_0 - 1$. L'arbre est recombiné si une baisse de prix à partir du nœud $(N_0, j + 1)$ donne le même prix qu'une hausse de prix à partir du nœud (N_0, j) .

Cela veut dire que :

$$S(N_0, j)u_0 = S(N_0, j + 1)d_0 \quad (2.85)$$

Ce qui est équivalent à dire que :

$$u^j d^{N_0-j} u_0 S_0 = u^{j+1} d^{N_0-j-1} d_0 S_0 \quad (2.86)$$

Donc, il est clair que :

$$\frac{u}{d} = \frac{u_0}{d_0} \quad (2.87)$$

Ce résultat est vrai pour toute valeur de λ d'après la définition même de ces paramètres à l'équation (2.66). Par conséquent, l'arbre est recombiné par passage de la première à la deuxième étape du modèle binomial flexible à deux étapes.

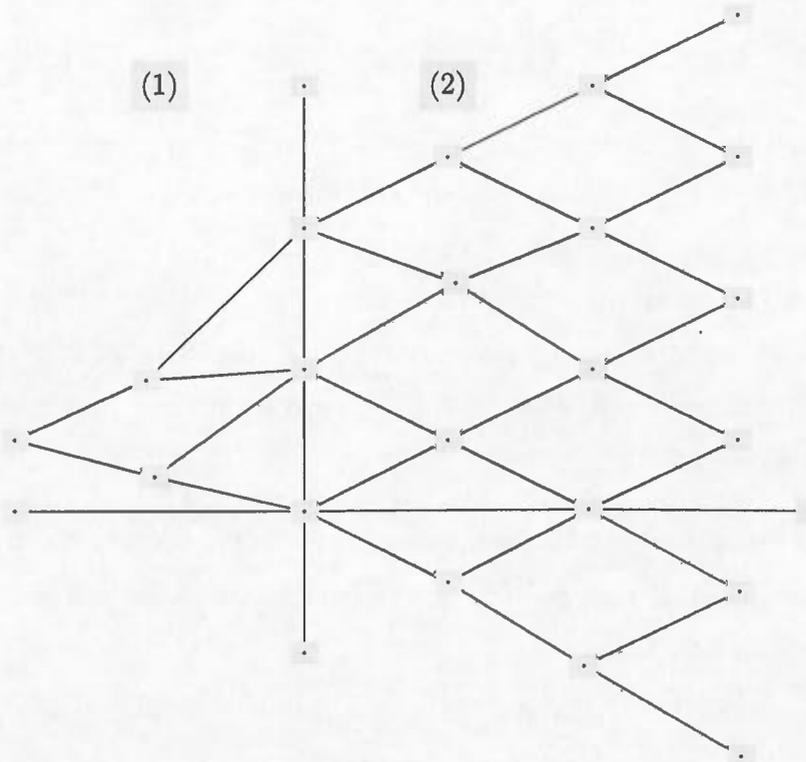


Figure 2.7 Le modèle binomial à deux étapes

Le prix de l'actif sous-jacent évolue suivant le modèle que voici :

$$S(i, j) = \begin{cases} u^j d^{N_0-j} S_0 & \text{si } i \leq N_0 \\ u_0^j d_0^{i-N_0-j} d^{N_0} S_0 & \text{si } i > N_0 \end{cases} \quad (2.88)$$

Cet arbre est modifié mais il est toujours recombiné, ce qui permet d'utiliser la technique itérative à rebours qu'on a vu au premier chapitre afin de calculer le prix de l'option à barrière continue.

2.6 Modèle binomial généralisé

Le modèle binomial généralisé, qu'on note par ζ , présenté dans le papier de Chung (Chung et Shih, 2007) n'est autre qu'une nouvelle formulation du modèle binomial standard en ajoutant un nouveau paramètre de forme qui exprime l'étendue. On appelle ce paramètre le paramètre d'étendue et on le note par ζ cette fois-ci. Ce nouveau paramètre donne plus de facilité et plus de liberté au modèle standard permettant ainsi l'utilisation de la méthode d'extrapolation et d'avoir une convergence lisse et rapide.

Le modèle binomial standard est aussi un cas particulier de notre nouveau modèle binomial généralisé lorsque $\zeta = 1$. En effet, considérons le même cadre de travail de la section précédente où :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW \quad (2.89)$$

Toutes les autres conditions du modèle binomial standard sont vérifiées. Le théorème suivant met en place le modèle binomial généralisé :

Théorème 2.2. *Les paramètres du modèle binomial généralisé sont définis comme suit :*

$$\begin{aligned} p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \\ u &= e^{\zeta\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\frac{1}{\zeta}\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \quad (2.90)$$

où $\zeta > 0$, est un paramètre de forme de l'arbre binomial. Lorsque le nombre de périodes du modèle augmente, le modèle binomial généralisé converge vers le modèle de Black-Scholes pour une option vanille européenne.

Chung présume qu'avec ce choix de paramètre, la convergence du modèle est assurée du fait que la distribution du prix de l'actif risqué du modèle binomial généralisé converge vers une distribution log-normale dès que $\Delta t \rightarrow 0$.

2.7 Convergence du modèle binomial généralisé

La convergence de ce modèle dépend de la valeur du paramètre ζ . Par exemple, lorsque $\zeta = 1$, on est alors en présence du modèle binomial standard qui ne présente pas un mode de convergence lisse et monotone. Pour étudier en détail la convergence de notre nouveau modèle, on définit la nouvelle erreur du prix qui dépend à son tour de la position du nœud le plus proche du prix d'exercice K à la date de maturité.

En effet, soit :

$$S_k = u^m d^{N-m} S_0 \quad (2.91)$$

où S_k est le nœud le plus proche du prix d'exercice à la date de maturité et m est le plus petit entier vérifiant $S_k > K$. On définit $\gamma()$ comme une variable qui mesure l'écart entre S_k et le prix d'exercice K comme suit :

$$\gamma(N) = \frac{\ln(S_k/K)}{\ln(S_k/S_{k-1})} = \frac{\ln(S_k/K)}{\ln(u/d)} \quad (2.92)$$

où $S_{k-1} = u^{m-1} d^{N-(m-1)} S_0$. On précise que lorsque N augmente, la distance logarithmique entre deux nœuds consécutifs $\ln(u/d)$ diminue. Une fois la variable γ est définie, voici le théorème et les résultats qui suivent :

Théorème 2.3. *Soient C_N et C_{BS} les prix du modèle binomial généralisé de paramètre ζ fixé et celui de Black-Scholes respectivement, ces prix sont ceux d'une option d'achat européenne de prix d'exercice $(S_T - K, 0)^+$, alors :*

$$C_N = \begin{cases} C_{BS} + O(1/\sqrt{N}), & \zeta \neq 1 \\ C_{BS} + \frac{\beta(0.5-\gamma(N))^2}{N} + O(1/N), & \zeta = 1 \end{cases} \quad (2.93)$$

où $\beta = -2Ke^{-rT}\Phi(d_2)\sigma\sqrt{T}$, avec $\Phi()$ comme densité de la loi normale standard, $d_2 = (\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2)T)/\sigma\sqrt{T}$.

Le modèle binomial généralisé, comme le modèle binomial standard, converge vers le modèle de Black-Scholes. Mais cette convergence n'est pas lisse et présente des

fluctuations, ce qui diminue la précision des résultats trouvés. Cette fluctuation est due au fait que la vitesse de convergence du GCRR dépend en général des propriétés asymptotiques de la probabilité p . Chung suppose que le prix d'exercice se positionne au centre des nœuds finaux à la date de maturité et appelle ce nouveau modèle le GCRR-XPC, et il décrit la vitesse de convergence à travers le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. *Soient C_N et C_{BS} les prix du modèle GCRR-XPC et celui de Black-Scholes respectivement, ces prix sont ceux d'une option d'achat européenne de prix d'exercice $(S_T - K, 0)^+$, alors :*

$$C_N = C_{BS} + O(1/N) \quad (2.94)$$

D'après ce corollaire, la vitesse de convergence du modèle dépend toujours des propriétés asymptotiques de la probabilité p et elle est de l'ordre de $O(1/N)$.

2.8 Conclusion

Grâce à sa simplicité, le modèle binomial est l'un des importants modèles d'évaluation des options dans la finance, on a vu qu'il converge vers le modèle de Black-Scholes et qu'il montre quelques faiblesses comme la vitesse de convergence et plusieurs chercheurs, comme Tian et Chung, ont travaillé sur l'amélioration de la vitesse de convergence en ajoutant généralement des paramètres qui ont tendance à changer la forme de l'arbre binomial. Loin de la complexité des calculs stochastique, le modèle binomial a réussi à modéliser des phénomènes financiers très délicats. Aussi, Il est important de voir la performance de ce modèle en étudiant d'autres types d'options plus complexes.

CHAPITRE III

ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DU MODÈLE BINOMIAL POUR DIFFÉRENTES OPTIONS

3.1 Introduction

On a vu précédemment la convergence du modèle binomial dans différentes situations et contextes. Plusieurs ont cherché des améliorations sur les paramètres du modèle binomial afin d'accélérer la convergence qui reste le point faible de ce modèle.

Une fois que la convergence du modèle binomial vers celui de Black-Scholes est établie, il est important d'étudier cette convergence de près pour en tirer des propriétés qui peuvent être cruciales dans la prise de décisions des négociateurs boursiers. De ce fait, plusieurs chercheurs se sont penchés sur cette question. En particulier, quelques papiers, qu'on les cite plus loin, nous intéressent dans cette partie de travail.

Dans ce chapitre, on prolonge notre travail à l'étude des options plus complexes comme les options à barrière, les options asiatiques et les options de diffusion avec saut. Un peu plus loin, on présente les lettres grecques qui sont des instruments importants et elles demeurent la base de la gestion financière des options.

Dans une première partie, on traite le papier de Diener (Diener et Diener, 2004)

qui est d'une bonne importance en ce qui concerne la convergence. Dans ce papier, les auteurs ont étudié soigneusement et avec minutie l'aspect oscillatoire asymptotique de la vitesse de convergence des options vanilles européennes du modèle binomial vers celui de Black-Scholes. Ils ont pu montrer après développement que la vitesse de convergence est de l'ordre $\frac{1}{N}$, où N est le nombre de périodes qui précèdent la date de maturité.

Dans une deuxième partie, on se penche sur l'étude approfondie des options à barrière à travers l'analyse de quelques papiers intéressants comme celui de Lin et Palmer (Lin et Palmer, 2013) où les auteurs étudient la vitesse de convergence des options européennes à barrière du modèle CRR vers celui de Black-Scholes. Aussi, dans ce papier les auteurs détaillent l'origine des oscillations autour de la vitesse de convergence.

3.2 Aspect asymptotique de la vitesse de convergence

La convergence du prix des options européennes du modèle binomial vers celui de Black-Scholes est un sujet très populaire en finance. D'ailleurs, le prix obtenu par le modèle de Black-Scholes est considéré comme une approximation de celui calculé par le modèle binomial lorsque le nombre des étapes N avant la date de maturité de l'option est très grand. Par contre, il est rare où des études sérieuses à propos du sujet de la vitesse de convergence sont effectuées. Tout ce qui entoure la convergence et ses différentes composantes telles que sa précision, le nombre de périodes nécessaires afin d'obtenir un résultat précis, sa nature, sa monotonie et sa tendance restent vague et abstrait.

Le papier de Diener (Diener et Diener, 2004), les auteurs ont détaillé avec précision la convergence et ils ont trouvé des développements asymptotiques pour les paramètres qui ont un impact direct sur la convergence et sa vitesse. En effet, la figure

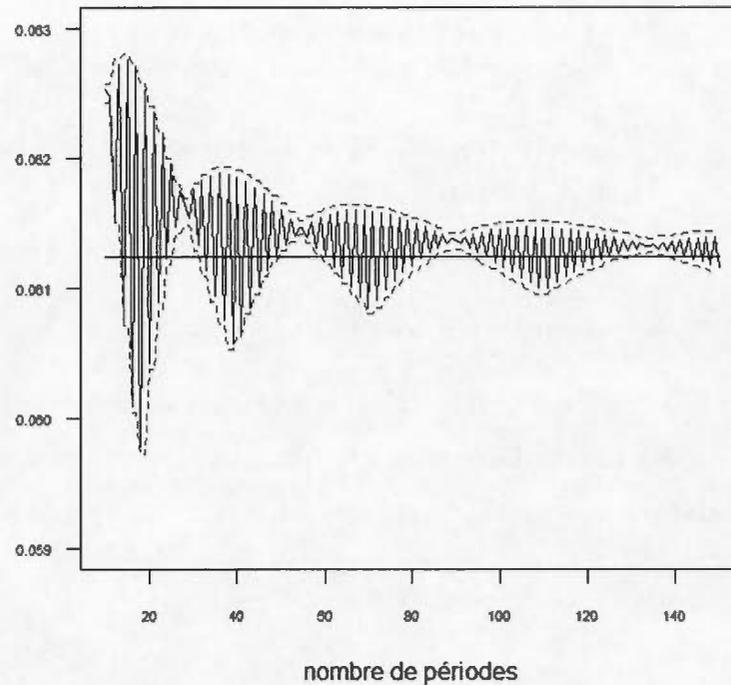


Figure 3.1 Évolution du prix du modèle binomial

3.1 montre l'aspect irrégulier des oscillations du prix du modèle binomial. Aussi, on remarque que ces oscillations se trouvent entre deux courbes qui enveloppent l'évolution du prix. Donc, la détermination des équations analytiques de ces deux courbes ou même une approximation mathématique est d'une importance majeure dans l'étude de la convergence.

En effet, on a vu précédemment que dans un contexte de modèle CRR, le prix de l'option à la date initiale est de la forme :

$$C_0 = S_0 \psi(a, N, p') - \frac{K}{(1+r)^n} \psi(a, N, p) \quad (3.1)$$

où $\psi()$ est la distribution binomiale incomplète, telle que a , p et p' sont les paramètres définis à l'équation (2.52) vue précédemment dans le deuxième chapitre.

Alors que dans le cadre du modèle de Black-Scholes ce même prix est de la forme :

$$\begin{aligned} C_{BS}(s, t) &= S_0\phi(d_1) - Ke^{r(T-t)}\phi(d_2) \\ d_1 &= [\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)]/[\sigma\sqrt{T - t}] \\ d_2 &= [\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)]/[\sigma\sqrt{T - t}] \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $\phi()$ est la distribution normale centrée réduite.

Aussi, on a vu la convergence du modèle CRR vers le modèle Black-Scholes traduit par la convergence de la distribution binomiale incomplète $\psi()$ vers celle de la normale $\phi()$ détaillée dans le chapitre précédent, soit de l'équation (2.52) jusqu'à l'équation (2.61). Cette convergence est exprimée comme suit :

$$\lim_N C(N) = C_{BS} \quad (3.3)$$

Maintenant, pour comprendre les oscillations de la figure 3.1, il faut étudier avec détail la différence $C(N) - C_{BS}$ lorsque N tend vers l'infini.

En effet, dans le contexte du modèle binomial présenté dans le travail de Diener (Diener et Diener, 2004), le choix des paramètres u et d est prédéfini. Aussi, ces deux paramètres convergent avec une vitesse de l'ordre de $1/\sqrt{N}$ lorsque N tend vers l'infini et cela découle des développements asymptotiques qu'ils possèdent et qui sont de la forme :

$$\begin{aligned} u(N) &= 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{\mu}{N} + O(\frac{1}{N\sqrt{N}}) \\ d(N) &= 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{\nu}{N} + O(\frac{1}{N\sqrt{N}}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans le cadre du modèle de Cox-Rubinstein, $\mu = \nu = \sigma^2/2$, tels que les termes μ et ν disparaissent par passage à la limite. Donc, lorsque N tend vers l'infini et σ

est borné, $\frac{\sigma^2}{N}$ tend vers 0. Cependant, μ et ν sont les deux termes qui causent les oscillations du prix de l'option.

En effet, la figure 3.5 nous montre que plus le terme μ est important, plus les oscillations des prix sont importantes. De la même manière que u et d , les probabilités p et p' de l'équation (3.1), qui sont des fonctions de u et d , convergent asymptotiquement avec la même vitesse de l'ordre $1/\sqrt{(N)}$. Alors, les auteurs remettent l'origine de ce problème à l'entier a qui est le plus petit entier j tel que $S_0 u^j d^{N-j} > K$.

Maintenant, soit $k(N)$, la solution de $S_0 u^j d^{N-j} > K$, il est de la forme :

$$k(N) = \frac{\ln(K/S_0 - N \ln(d(N)))}{\ln(u(N)) - \ln(d(N))} \quad (3.5)$$

On peut le réécrire comme suit :

$$a(N) = [k(N)] + 1 = k(N) + 1 - \{k(N)\} \quad (3.6)$$

où $[.]$ est la partie entière et $\{.\}$ est la partie fractionnaire.

Sous ces hypothèses de u et d , $k(N)$ possède un développement asymptotique, il reste que ce n'est pas le cas de $a(N)$ qui est bornée entre 0 et 1, n'ayant pas un développement asymptotique ni une limite lorsque N tend vers l'infini. Pour cela, on introduit la définition suivante permettant une extension du calcul asymptotique.

Définition 3.1. Soit $(f_i)_{i \leq 0}$ une séquence de fonctions bornées en $\epsilon > 0$. La fonction $f(\epsilon)$ possède un développement asymptotique en ϵ avec les coefficients $(f_i)_{i \leq 0}$ si pour tout $m \leq 0$, on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-m} (f(\epsilon) - \sum_{i=0}^m f_i(\epsilon) \epsilon^i) = 0 \quad (3.7)$$

le terme $f_i(\epsilon) \epsilon^i$ est appelé le terme d'ordre i de l'expression.

Supposons qu'il n'y a pas une expression unique avec les coefficients bornés. Ainsi, le développement asymptotique du prix de l'actif $C(N)$ est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soient u et d des valeurs qui satisfont l'équation (3.4). Alors le prix d'une option d'achat européenne du modèle CRR possède un développement asymptotique avec des coefficients bornés dont la forme est :*

$$C(N) = C_0 + \frac{C_1}{\sqrt{N}} + \frac{C_2}{N} + \frac{C_3}{N\sqrt{N}} + \dots \quad (3.8)$$

avec $C_0 = C_{BS}$, $C_1 = \frac{\mu-\nu}{2\sqrt{2\pi}}TS_0e^{-d_1^2/2}$, $d_1 = (\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T)/\sigma\sqrt{T}$. Pour $i = 2, 3, \dots$, $C_i(N)$ sont des fonctions bornées pouvant être calculées explicitement à partir des expressions de u et d par la méthode de prolongation de Laplace. Le terme C_1 ne dépend pas de N et il est nul lorsque $\mu = \nu$.

Il est à souligner que l'expression, des courbes qui enveloppent les oscillations du prix de l'actif pendant son évolution à travers le temps, est donnée approximativement par le terme $C_2(N)$.

Comme résultat de ce théorème, on peut conclure ce qui suit :

Premièrement, d'une part, un développement asymptotique existe jusqu'à l'ordre 1 parce que (C_1) ne dépend pas de N et il est nul lorsque $\mu = \nu$. D'une autre part, il y a des modèles qui ne possèdent pas de développement asymptotique pour des ordres plus grands que 1, cela arrive avec les modèles où les termes C_2, C_3, \dots , dépendent de N et ne convergent vers aucune limite.

Deuxièmement, il est important de constater que l'expression d'ordre 0, ne dépend pas vraiment des valeurs de u et d , mais elle dépend des deux premiers coefficients 1 et $\pm\sigma/\sqrt{N}$ de l'équation (3.4). Seuls ces deux coefficients sont pertinents pour le calcul de C_0 . Par contre, pour des ordres plus élevés, tous les coefficients des

expressions de u et d sont pertinents. En fait, cela explique pourquoi le prix du modèle de Tian, où $u = \frac{1}{2}R\nu(\nu + 1 + \sqrt{\nu^2 + 2\nu - 3})$ et $d = \frac{1}{2}R\nu(\nu + 1 - \sqrt{\nu^2 + 2\nu - 3})$, et le prix du modèle de CRR ne sont pas égaux, mais ils convergent tous les deux vers le modèle de Black-Scholes comme le montre la figure 3.2 où le modèle de Cox-Rubinstein est représenté par les points rouges.

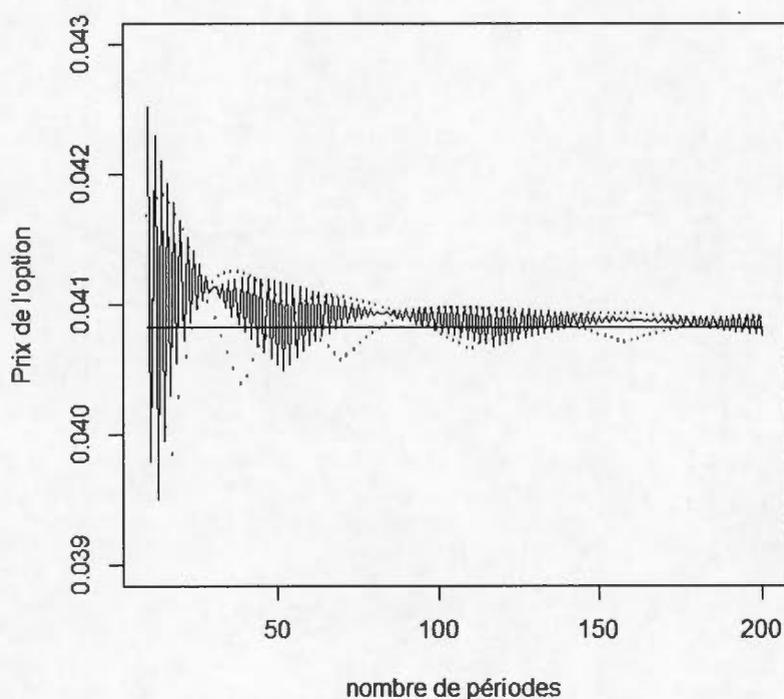


Figure 3.2 Convergence des modèles de Tian et de Cox-Rubinstein

Revenons aux paramètres μ et ν , la figure 3.3 montre la convergence des deux modèles, la première courbe en haut présente l'évolution du prix du premier modèle où $\mu \neq \nu$, tandis que la deuxième courbe d'en bas présente le cas où $\mu = \nu$. Aussi, il est clair d'après le graphique que la deuxième courbe, en bas du graphique,

converge beaucoup plus rapidement que l'autre qui présente une convergence non-linéaire.

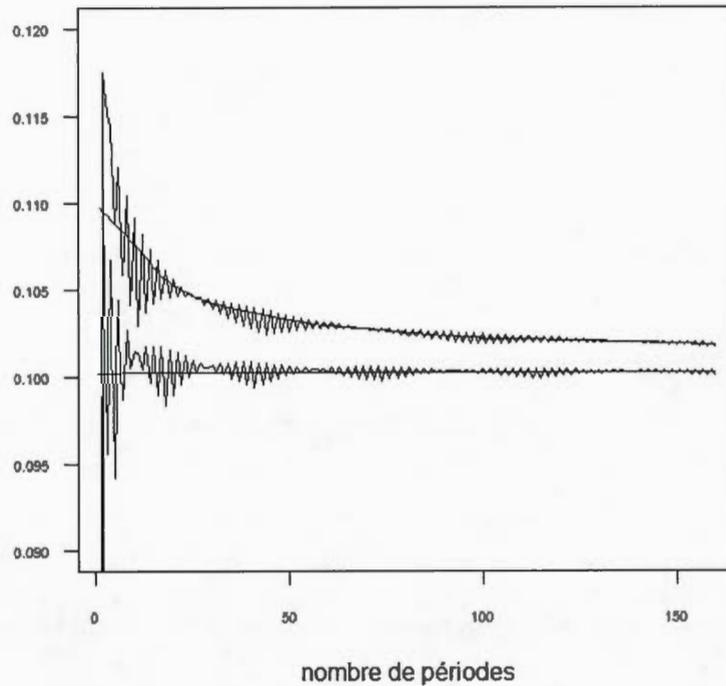


Figure 3.3 Convergence des modèles de Tian et de Cox-Rubinstein

Il est à noter que l'expression de C_1 , plus précisément le facteur $(\mu - \nu)$, montre que la convergence du modèle binomial vers celui de Black-Scholes est de l'ordre de $(1/N)$, vu que $C_1 = 0$, et c'est le cas de tous les modèles où $\mu = \nu$. Dans le cas contraire, lorsque $\mu \neq \nu$, la vitesse de convergence est plus lente, et elle est de l'ordre de $(1/\sqrt{N})$ parce que $C_1 \neq 0$. Notons que tous les termes d'ordre $1/N$, $1/N\sqrt{N}$, ..., convergent vers 0 plus rapidement que $1/\sqrt{N}$.

Aussi, la différence $C(N) - BS$ est de l'ordre de $1/N$ à condition que $\mu = \nu$ et les auteurs affirment que ces résultats sont compatibles avec ceux trouvés par Leisen et Reimer qui ont calculé une limite supérieure pour cette différence.

Leisen et Reimer ont conçu un modèle donnant plus de précision tant à l'évaluation des prix des options qu'à la convergence de leur modèle, qui est important en ce qui concerne la convergence puisqu'il possède une convergence quadratique lorsque N tend vers l'infini et non pas une convergence linéaire.

Le modèle de Leisen et Reimer est défini comme suit :

$$\begin{aligned} a &= e^{r\Delta t} \\ p &= \beta(d_2, N) \\ \bar{p} &= \beta(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}, N) \end{aligned}$$

où d_2 est le même d_2 retrouvé avec le modèle de Black-Scholes et $\beta(., .)$ est l'inverse de la distribution binomiale tel que $\beta(z, N) = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \exp(-(\frac{z}{N+1/3})^2(N+1/6)))^{\frac{1}{2}}$.

On a alors que :

$$\begin{aligned} u &= a \cdot \frac{\bar{p}}{p} \\ d &= a \cdot \frac{1-\bar{p}}{1-p} \end{aligned}$$

Troisièmement, la formule explicite permettant de s'assurer de la qualité de l'approximation du prix par un développement asymptotique avec des coefficients bornés comme c'est le cas du théorème précédent. Cette formule est donnée par les deux corollaires qui suivent. Dans ces corollaires, on compare pour tout N , la valeur de $C(N)$, sa limite lorsque N tend vers l'infini et l'approximation du deuxième ordre.

Corollaire 3.1. (*Modèle de Cox-Rubinstein*). *Si l'actif sous-jacent est tel que :*

- 1) $u = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$;
- 2) $d = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$;

Alors $\mu = \nu = \frac{1}{2}\sigma^2$ et le prix à l'instant $t = 0$ d'une option d'achat dont sa valeur est égale à $(S_0 u^j d^{N-j} - K)^+$ à l'instant $T = N\Delta T$ satisfait la relation qui suit :

$$C(N, a) = BS - S_0 e^{\frac{-d_1^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sigma\sqrt{T} a(a-1) + D_1) \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N\sqrt{N}}\right) \quad (3.9)$$

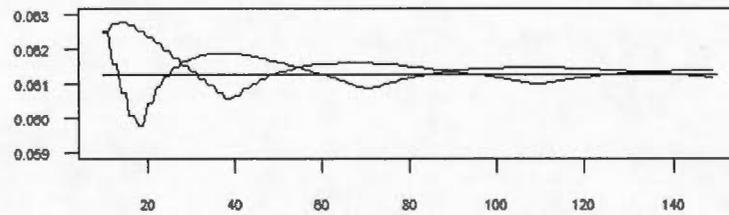
où $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} (\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T)$, $D_1 = \frac{1}{96\sigma\sqrt{T}} (4(\ln(\frac{S_0}{K}))^2 - 8rT\ln(\frac{S_0}{K}) + 3T(4\sigma^2 - 12T^2 - \sigma^4 T))$ et $a = a(N)$ qui est la partie fractionnaire de $k(N) = \frac{\ln(K/S_0 - N\ln(d(N)))}{\ln(u(N)) - \ln(d(N))}$.

La figure 3.4 (a) montre une approximation de $C_2(N)$ lorsque N est pair une fois et impair une autre fois. Tandis que (b), montre une approximation de $C(N)$ et de $C_2(N)$ ensemble. Il est clair d'après le graphique qu'il est difficile de distinguer entre les deux oscillations mêmes pour des petites valeurs de N . Ainsi, le corollaire précédent permet de comprendre au mieux les oscillations du prix d'une option d'achat. En effet, la fonction $a(N)$ qui est la partie fractionnaire de $k(N) = \frac{\ln(K/S_0 - N\ln(d(N)))}{\ln(u(N)) - \ln(d(N))}$ dont le développement asymptotique est de la forme $k(N) = \frac{1}{2}N + a_{-1}\sqrt{N} + O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ dans notre modèle considéré. Alors, le premier terme ne contribue pas à k lorsque N est pair puisque sa partie fractionnaire est égale à 0 et au contraire il contribue avec un facteur $1/2$ lorsque N est impair. Ce qui explique les oscillations de l'ordre $1/N$ entre les valeurs paires et impaires de N dans le prix $C(N)$.

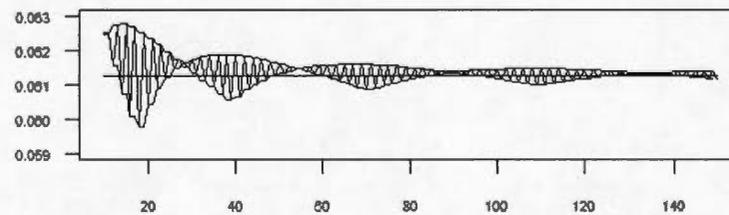
Le deuxième corollaire, de ce chapitre, donne la formule explicite de $C_2(N)$ pour le modèle de Van Den Berg où l'auteur le définit par $u = 1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + \mu\frac{T}{N}$ et $d = 1 - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + \mu\frac{T}{N}$.

Corollaire 3.2. *Si l'actif sous-jacent est tel que $u = 1 + \sigma/\sqrt{N} + \mu/N$ et $d = 1 - \sigma/\sqrt{N} + \mu/N$. Alors le prix d'une option d'achat européenne à l'instant $t = 0$, dont son prix est égal à $(S_0 u^j d^{N-j} - K)^+$ à l'instant $T = N\Delta T$, satisfait la relation :*

$$C(N, a) = BS + S_0 e^{\frac{-d_1^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sigma\sqrt{T} a(a-1) + D_2) \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N\sqrt{N}}\right). \quad (3.10)$$



(a)



(b)

Figure 3.4 (a) $C_2(N)$ lorsque N est pair et lorsque N est impair séparément (b) $C(N)$ et $C_2(N)$

où $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T)$, $D_2 = \frac{1}{96\sigma\sqrt{T}}(4(\ln(\frac{S_0}{K}))^2 + 8T(2\mu - r - \sigma^2)\ln(\frac{S_0}{K}) + 32r(2\mu - \sigma^2)T^2 - 36r^2T^2 + 24\mu(\sigma^2 - \mu)T^2 + 3\sigma^2T(4 - 3\sigma^2T))$ et $a = a(N)$ qui est la partie fractionnaire de $k(N) = \frac{\ln(K/S_0 - N\ln(d(N)))}{\ln(u(N)) - \ln(d(N))}$.

Finalement, la figure 3.5 montre l'évolution du prix de l'option du modèle CRR pour différentes valeurs de μ , on remarque que pour N trop élevé, le paramètre μ n'a plus d'importance et le modèle CRR converge bien vers le modèle de Black-Scholes pour les différentes valeurs de μ . Autrement, les comportements asymptotiques

tiques de la courbe du prix de l'option du modèle CRR dépendent de plusieurs paramètres dont les plus importants sont les coefficients des développements asymptotiques des paramètres u et d . Il est à noter que lorsque $u = 1/d$, la vitesse de convergence est plus rapide selon les auteurs parce que le développement asymptotique du corollaire (3.2) néglige l'effet de la queue $O(1/N\sqrt{N})$ donnant ainsi une excellente approximation de la courbe $C(N)$.

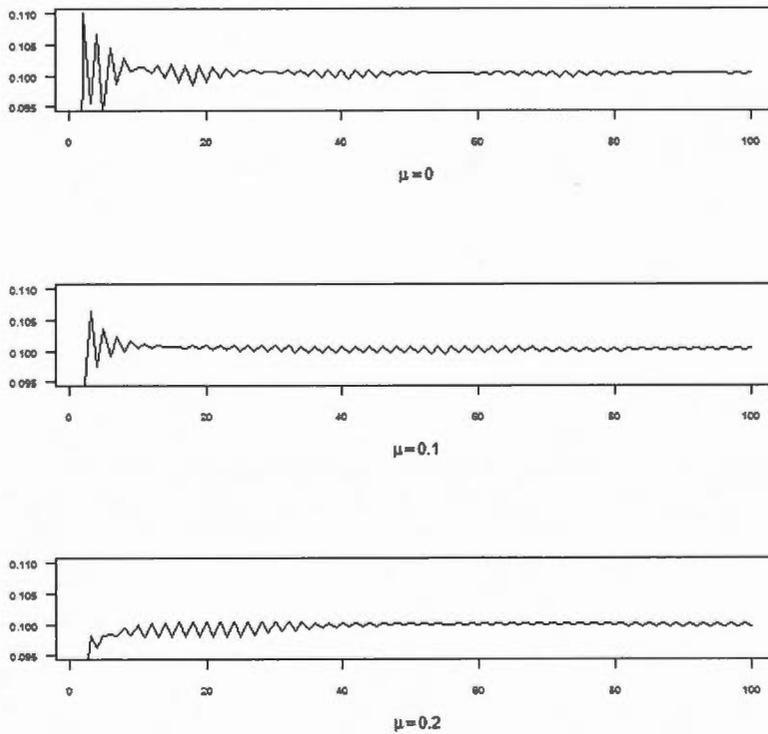


Figure 3.5 Évolution du prix pour différentes valeurs de μ

Dans le travail de Diener (Diener et Diener, 2004), les auteurs ont montré qu'il est possible de calculer explicitement un développement asymptotique avec coefficients bornés pour le prix d'une option d'achat européenne du modèle binomial.

Ainsi, on arrive à la conclusion que la vitesse de convergence est de l'ordre de $1/N$ pour la plupart des modèles.

3.3 Option à barrière et modèle binomial

On a vu dans tout ce qui précède plusieurs notions sur la famille des modèles binomiaux, leurs applications et leurs utilisations dans un environnement financier. Mais, on était toujours limité sur l'étude des options plus ou moins simple comme les options européenne et américaine. Il est temps d'étendre le travail afin de voir l'efficacité de ce modèle binomial à résoudre le problème d'évaluation du prix d'autres options beaucoup plus complexes qui sont négociées par des volumes énormes sur le marché boursier et de voir si le modèle binomial tient encore la route en terme de convergence vers le modèle de Black-Scholes.

On commence par le travail de Kerry Back (Back, 2005), où on trouve la définition de chaque type d'option à barrière. Généralement, il existe deux familles d'option à barrière connue sous les noms "Knock-out" et "Knock-in". Dans la première famille, l'option disparaît dès que le prix de l'actif sous-jacent touche la barrière. Tandis que pour la deuxième, l'option naît dès que le prix de l'actif sous-jacent touche la barrière. Il est à préciser que :

- Une option de type "knock-in" peut être évaluée à partir d'une "knock-out" et réciproquement.
- La combinaison d'une option de type "Down-and-out" et une autre de type "Down-and-in" forme une option d'achat ordinaire.
- Il est facile de déterminer le prix d'une "Down-and-in" par soustraction du prix d'une "Down-and-out" du prix d'une option d'achat ordinaire.
- La combinaison d'une option de type "up-and-out" et une autre de type "up-and-in" forme une option d'achat ordinaire.

— Les options "knock-out" et les "knock-in" sont moins chères comparative-
ment au prix d'une option ordinaire.

On donnera quelques définitions des types d'options à barrières plus loin dans
cette partie de notre travail. L'important est que Kerry Back a calculé le prix
d'une "Down-and-in" qui est évaluée à l'instant 0 grâce à la formule suivante :

$$C_{di} = S_0(\phi(d_1) - (\frac{H}{S_0})^{(2r+\sigma^2)/\sigma^2}\phi(d'_1)) - e^{-rT}K(\phi(d_2) - (\frac{H}{S_0})^{(2r+\sigma^2)/\sigma^2}\phi(d'_2)) \quad (3.11)$$

où H est la barrière. Selon la position de cette barrière par rapport à K, on a :

— Si $K > H$, alors :

$$\begin{aligned} d_1 &= [\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)]/[\sigma\sqrt{T - t}] \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \\ d'_1 &= [\ln(H^2/KS_0) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)]/[\sigma\sqrt{T - t}] \\ d'_2 &= d'_1 - \sigma\sqrt{T - t} \end{aligned} \quad (3.12)$$

— si $K < H$, alors :

$$\begin{aligned} d_1 &= [\ln(\frac{S_0}{H}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)]/[\sigma\sqrt{T - t}] \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \\ d'_1 &= [\ln(H/S_0) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)]/[\sigma\sqrt{T - t}] \\ d'_2 &= d'_1 - \sigma\sqrt{T - t} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Maintenant, on se met dans le contexte de Lin et Palmer (Lin et Palmer, 2013),
soit un actif sous-jacent qui évolue suivant les conditions d'un modèle de Black-
Scholes. On désigne par S_0 le prix initial, K le prix d'exercice, r le taux d'intérêt,
 σ la volatilité, T la date de maturité, H la barrière et $C_{BS}(S_0, K, T, H)$ le prix de
l'option à barrière à l'instant t_0 calculé par le modèle de Black-Scholes. Aussi, on
considère le modèle CRR tel que $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ et $d = u^{-1}$ avec $\Delta t = T/N$.

L'idée derrière le papier de Lin et Palmer (Lin et Palmer, 2013) est que plusieurs
chercheurs dans le domaine ont pu, par différentes manières, montrer qu'il y a

une convergence du modèle CRR vers celui de Black-Scholes lorsque le nombre des étapes N tend vers l'infini, mais peu d'entre eux ont étudié la vitesse de convergence qui est de l'ordre de $O(1/\sqrt{N})$ comme ils le déterminent. Aussi, ils prétendent que la convergence des options d'achats européennes est plus rapide et il est de l'ordre de $O(1/N)$. L'importance de ce papier provient du fait qu'aucun de ceux qui ont étudié la vitesse de convergence n'a donné une forme explicite du coefficient $O(1/N)$ dans le développement de l'erreur définie par la différence entre le prix CRR et celui de Black-Scholes.

Afin de prouver ce qu'on vient de présenter, on s'appuie sur le résultat du théorème suivant :

Théorème 3.2. *Dans le cadre d'un modèle CRR à N périodes, si le prix initial est S_0 , le taux d'intérêt sans risque est r et la volatilité est σ , alors le prix d'une option d'achat européenne de prix d'exercice K et de date de maturité T satisfait l'équation qui suit :*

$$C(S_0, K, T, N) = C_{BS}(S_0, K, T) + \frac{S_0 e^{-\frac{d_{11}^2}{2}}}{24\sigma\sqrt{2\pi T}} \frac{A - 12\sigma^2 T((\Delta_N^K)^2 - 1)}{N} + O(1/N^{3/2}) \quad (3.14)$$

où $C_{BS}(S_0, K, T)$ est le prix de Black-Scholes et

$$\Delta_N^K = 1 - 2 \operatorname{frac}\left(\frac{\log(\frac{S_0}{K})}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} - N/2\right) \quad (3.15)$$

avec

$$A = -\sigma^2 T(6 + d_{11}^2 + d_{12}^2) + 4T(d_{11}^2 - d_{12}^2)r - 12T^2 r^2 \quad (3.16)$$

sachant que les quantités d_{11} et d_{12} sont égales respectivement à :

$$d_{11} = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3.17)$$

et

$$d_{12} = d_{11} - \sigma\sqrt{T} \quad (3.18)$$

La quantité Δ_N^K est une mesure logarithmique de la position du prix d'exercice K par rapport à deux prix adjacents de l'actif sous-jacent à la date de maturité. En effet, on considère j_k l'entier j tel que :

$$S_{j-1} = u^{j-1} d^{N-j+1} S_0 < K \leq u^j d^{N-j} S_0 = S_j \quad (3.19)$$

où S_{j_k} est un prix d'exercice fictif du modèle binomial, alors $j_k = -\text{int}(-l_k)$ où

$$l_k = \frac{\log(K/S_0)}{2\sigma\sqrt{T}} \sqrt{N} - N/2 \quad (3.20)$$

avec $\text{int}(x)$ qui représente le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Maintenant, dès que $\Delta_N^K = 1 - 2\text{frac}(-l_K)$ on a

$$2j_K = 1 - \Delta_N^K + 2l_K \quad (3.21)$$

Dans le cas d'une option à barrière, on introduit $\Delta_N^{\tilde{H}}$ dont l'interprétation change d'une option à barrière à une autre selon qu'elle soit "up" ou "down" et que la barrière fictive soit un prix final ou non de l'actif sous-jacent.

Par exemple, pour une option à barrière dite down, on définit j_H le nombre de fois où le prix de l'actif doit augmenter pour atteindre la barrière effective \tilde{H} . D'une part, si cette barrière coïncide avec un prix final de l'actif sous-jacent on a :

$$\tilde{H} = u^{j_H} d^{N-j_H} S_0 \leq H \leq u^{j_H} d^{N-1-j_H} S_0 = \tilde{H}u \quad (3.22)$$

où :

$$j_H = \frac{1}{2} \text{int}(2l_H) \quad (3.23)$$

avec

$$l_H = l_k = \frac{\log(H/S_0)}{2\sigma\sqrt{T}} \sqrt{N} - N/2 \quad (3.24)$$

D'autre part, si la barrière effective coïncide avec un prix de l'actif sous-jacent au moment précédent de la date finale, alors :

$$\tilde{H} = u^{j_H} d^{N-1-j_H} S_0 \leq H \leq u^{j_H+1} d^{N-(j_H+1)} S_0 = \tilde{H}u \quad (3.25)$$

où :

$$j_H = \frac{1}{2}int(2l_H) - \frac{1}{2} \quad (3.26)$$

Par contre, si on considère le même cadre de travail avec une option à barrière dite up alors que la barrière effective est un prix final on a :

$$\tilde{H}d = u^{j_H-1}d^{N-1-(j_H-1)}S_0 \leq H \leq u^{j_H}d^{N-j_H}S_0 = \tilde{H} \quad (3.27)$$

où :

$$j_H = -\frac{1}{2}int(2l_H) \quad (3.28)$$

Et quand la barrière effective est un prix de l'actif sous-jacent au moment précédent la date finale, on a :

$$\tilde{H}d = u^{j_H}d^{N-j_H}S_0 \leq H \leq u^{j_H}d^{N-1-j_H}S_0 = \tilde{H} \quad (3.29)$$

où :

$$j_H = -\frac{1}{2}int(2l_H) - \frac{1}{2} \quad (3.30)$$

où est la partie entière.

On remarque de ce qui précède qu'en définissant \tilde{j}_H égale à $\frac{1}{2}int(2l_H)$ pour les options à barrière dites down, et égale à $-\frac{1}{2}int(2l_H) - \frac{1}{2}$ pour celles dites up. La barrière effective peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{H} = u^{\tilde{j}_H}d^{N-\tilde{j}_H}S_0 \quad (3.31)$$

Aussi, on peut voir que :

$$j_H = \tilde{j}_H - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_N) \quad (3.32)$$

où :

$$\epsilon_N = \begin{cases} 0 & \text{si la barrière effective n'est pas un prix final de l'actif sous-jacent} \\ 1 & \text{si la barrière effective est un prix final de l'actif sous-jacent} \end{cases} \quad (3.33)$$

De plus, soit :

$$\Delta_N^H = \begin{cases} \text{frac}(2l_H) & \text{pour les options dites down} \\ \text{frac}(-2l_H) & \text{pour les options dites up} \end{cases} \quad (3.34)$$

Alors :

$$2\tilde{j}_H = 2l_H - \begin{cases} \Delta_N^H & \text{pour les options dites down} \\ -\Delta_N^H & \text{pour les options dites up} \end{cases} \quad (3.35)$$

Finalement, on déduit que $\log(H) = (1 - \delta_N^H)\log(\tilde{H}) + \delta_N^H\log(\tilde{H}u)$ pour les options down et $\log(H) = (1 - \delta_N^H)\log(\tilde{H}) + \delta_N^H\log(\tilde{H}d)$ pour les options up. On revient à la conclusion que Δ_N^H est une mesure logarithmique de la position de la barrière H avec deux prix adjacents à la date finale. L'un des deux prix mentionnés sera le prix final de l'actif sous-jacent et l'autre sera la barrière effective \tilde{H} . Par exemple, dans le cas d'une option à barrière dite down, le prix inférieur sera la barrière effective et dans le cas d'une option dite up, c'est le prix supérieur qui sera la barrière effective.

Le théorème suivant montre que la vitesse de convergence est de l'ordre $N^{-1/2}$, et plus loin les auteurs développent la formule asymptotique des coefficients $N^{-1/2}$ et N^{-1} du modèle CRR.

Théorème 3.3. *Dans le cas d'un modèle CRR à N -périodes, supposons le prix initial S_0 . Alors, la formule asymptotique pour évaluer une option d'achat européenne à barrière de date maturité T , de prix d'exercice K et de barrière H est comme suit :*

- 1) *pour une option dite down and out (do) et down and in (di) avec $S_0 > H$:*
 - a- *Si $H < K$, ou $H = K$ et K n'est pas un prix final, alors :*

$$C_{do}(S_0, K, T, H, N) = C_{BS}^{do}(S_0, K, T, H) + [A_1 \Delta_N^H] \frac{1}{\sqrt{N}} + [B_1 - D_1(\Delta_N^K)^2 - E_1(\Delta_N^H)^2] \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right) \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
C_{di}(S_0, K, T, H, N) &= C_{BS}^{do}(S_0, K, T, H) - [A_1 \Delta_N^H] \frac{1}{\sqrt{N}} \\
&\quad - [B_2 + D_2(\Delta_N^K)^2 - E_1(\Delta_N^H)^2] \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

b- Si $H > K$, ou $H = K$ et K est un prix final, alors :

$$\begin{aligned}
C_{do}(S_0, K, T, H, N) &= C_{BS}^{do}(S_0, K, T, H) + [A_2 \Delta_N^H] \frac{1}{\sqrt{N}} \\
&\quad + [B_3 - C\epsilon_N^2 - E_2(\Delta_N^H)^2] \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
C_{di}(S_0, K, T, H, N) &= C_{BS}^{di}(S_0, K, T, H) - [A_2 \Delta_N^H] \frac{1}{\sqrt{N}} \\
&\quad - [B_4 + D_3(\Delta_N^K)^2 - C\epsilon_N^2 - E_2(\Delta_N^H)^2] \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

2) pour une option dite up and in (ui) et up and out (uo) avec $S_0 < H$, si $H > K$, alors :

$$\begin{aligned}
C_{ui}(S_0, K, T, H, N) &= C_{BS}^{ui}(S_0, K, T, H) - [A_3 \Delta_N^H] \frac{1}{\sqrt{N}} \\
&\quad - [B_5 + D_2(\Delta_N^K)^2 - C\epsilon_N^2 - E_3(\Delta_N^H)^2] \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
C_{uo}(S_0, K, T, H, N) &= C_{BS}^{uo}(S_0, K, T, H) - [A_3 \Delta_N^H] \frac{1}{\sqrt{N}} \\
&\quad - [B_6 + D_1(\Delta_N^K)^2 - C\epsilon_N^2 - E_3(\Delta_N^H)^2] \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

avec :

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} ; & d_{12} &= d_{11} - \sigma\sqrt{T} \\
d_{21} &= \frac{\log(H^2/S_0K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} ; & d_{22} &= d_{21} - \sigma\sqrt{T} \\
d_{31} &= \frac{\log(\frac{S_0}{H}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} ; & d_{32} &= d_{31} - \sigma\sqrt{T} \\
d_{41} &= \frac{\log(H/S_0) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} ; & d_{42} &= d_{41} - \sigma\sqrt{T} \\
\alpha &= \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma} ; & \hat{\alpha} &= \alpha + \frac{\sigma}{2} \\
\beta &= \frac{\sigma^4 - 4\sigma^2r + 12r^2}{48\sigma} ; & \hat{\beta} &= -\beta - \frac{\sigma r}{6} \\
\hat{g}_i &= 2T(\hat{\alpha}d_{i1} + \hat{\beta}\sqrt{T}) + \left(\frac{2\hat{\alpha}\sqrt{T}}{3} - \frac{d_{i1}}{12}\right)(1 - d_{i1}^2), & i &= 1, \dots, 4 \\
g_i &= 2T(\alpha d_{i1} + \beta\sqrt{T}) + \left(\frac{2\alpha\sqrt{T}}{3} - \frac{d_{i1}}{12}\right)(1 - d_{i1}^2), & i &= 1, \dots, 4 \\
G_1 &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{21}^2}{2}} (\hat{g}_1 - g_1), & G_2 &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1 - \frac{2r}{\sigma^2}} e^{-\frac{d_{21}^2}{2}} (\hat{g}_2 - g_2) \\
G_3 &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{31}^2}{2}} (\hat{g}_3 - \frac{K}{H}g_3), & G_4 &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{41}^2}{2}} (\hat{g}_4 - \frac{K}{H}g_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= 4\sqrt{T}h_1(d_{21}, d_{22}) \\
A_2 &= 4\sqrt{T}h_1(d_{41}, d_{42}) + 2\frac{S_0}{2\Pi}e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}\left(1 - \frac{K}{H}\right) \\
A_3 &= 4\sqrt{T}(h_1(d_{41}, d_{42}) - h_1(-d_{21}, -d_{22})) - 2\frac{S_0}{2\Pi}e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}\left(1 - \frac{K}{H}\right) \\
B_1 &= G_1 - G_2 + Ih_0(d_{21}, d_{22}), \quad B_2 = B_1 - G_1 \\
B_3 &= G_3 - G_4 + Ih_0(d_{41}, d_{42}), \quad B_4 = B_3 - G_1 \\
B_5 &= G_2 + G_3 - G_4 + Ih_0(d_{21}, d_{22}) - Ih_0(-d_{41}, -d_{42}), \quad B_6 = B_5 - G_1 \\
C_1 &= \frac{2S_0}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{d_{21}^2}{2}}\left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{2\sigma}}\sigma\sqrt{T}, \quad C_2 = \frac{2S_0}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}\left(d_{31} - \frac{K}{H}d_{32}\right) \\
C_3 &= \frac{S_0}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}\left(d_{41} - \frac{K}{H}d_{42}\right), \quad C = \frac{1}{2}(C_2 - C_3) \\
D_1 &= \frac{S_0}{2\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{d_{21}^2}{2}}\sigma\sqrt{T} - \frac{C_1}{4}, \quad D_2 = \frac{C_1}{4}, \quad D_3 = D_1 + D_2 \\
E_1 &= 8Th_2(d_{21}, d_{22}) + C_1, \quad E_2 = 8Th_2(d_{41}, d_{42}) + \frac{1}{2}(3C_2 + C_3) \\
E_2 &= 8T(h_2(-d_{21}, -d_{22}) - h_2(-d_{41}, -d_{42})) - C_1 + \frac{1}{2}(3C_2 + C_3)
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
h_i(x, y) &= \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left(H\hat{\alpha}^i\Phi(x) - \frac{S_0Ke^{-rT}}{H}\alpha^i\Phi(y)\right), \quad i = 0, 1, 2 \\
I &= \left(\frac{4\beta + \frac{16}{3}\alpha^3}{\sigma}\right)\log\left(\frac{S_0}{H}\right)T
\end{aligned}$$

On définit une option européenne à barrière comme un instrument financier qui s'active et se désactive par la position du prix de l'actif sous-jacent par rapport à la barrière. Elle peut être activée ou désactivée à la baisse comme à la hausse. Également, on peut citer quatre types d'options d'achat à barrière pour chacune des deux familles, les voici :

- Up and in, qui s'active à la hausse, c'est lorsque le prix franchit un niveau à la hausse ;
- Up and out, qui disparaît lorsque l'actif franchit un niveau à la hausse ;
- Down and in, l'option ne prend effet que lorsque l'actif franchit un niveau à la baisse ;
- Down and out, l'option disparaît dès que le prix de l'actif franchit la barrière à la baisse.

Pour chaque type cité de l'option à barrière, on trouve deux sortes de vente ou

d'achat. Ainsi, on retrouve au total huit options à barrières où il est possible d'évaluer l'une à partir de l'autre si elles appartiennent à la même famille.

Revenons au théorème précédent, on précise que lorsque $H \leq K$, l'option dite up est une option vanille et elle n'est pas incluse dans le théorème précédent.

Ce théorème montre que dans tous les cas, la vitesse de convergence de l'option à barrière est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{N}}$ et que la majeure partie de l'erreur est dans la quantité $\frac{\Delta_N^H}{\sqrt{N}}$. L'importance de ce théorème vient du fait qu'il étudie avec détails la monotonie de la convergence et qu'il ne présente pas des effets croisés comme $\Delta_N^H \Delta_N^K$ ou $\epsilon_N \Delta_N^H$.

En effet, la quantité Δ_N^H oscille entre 0 et 1 ce qui provoque une oscillation dans la convergence du prix de l'option. Donc, la majeure partie de l'oscillation est causée par la position de la barrière par rapport aux deux prix adjacents à la date de maturité dans le cadre d'un modèle binomial et non pas par la position du prix d'exercice par rapport à ces deux prix adjacents. Aussi, la quantité $C\epsilon^2$, provoque une oscillation additionnelle lorsque $H > K$, cette oscillation est provoquée par le fait que la barrière soit un prix final ou non. Finalement, une remarque intéressante est l'absence du terme Δ_N^K dans l'expression de l'option dite down and out lorsque $H > K$ ce qui exprime la non-importance de la position de K sur la vie de l'option. En effet, pour que l'option reste en vie, son prix doit rester toujours au-dessus de la barrière H qui est supérieure à K le prix d'exercice. Donc, la position de K n'a pas d'influence sur la vie de l'option.

Maintenant, on remarque que pour les 4 types d'options illustrées dans le théorème précédent, le développement asymptotique de l'option peut s'écrire sous la forme $C(N) = C_{BS} + \frac{A_N}{\sqrt{N}} + \frac{B_N}{N} + O(1/N^{\frac{3}{2}})$. Cela arrive dans le même contexte du travail de Diener (Diener et Diener, 2004). De plus, on peut conclure que :

- 1) $\sqrt{N}(C(N) - C_{BS}) - A_N \rightarrow 0$ lorsque le nombre des étapes N est très grand.

2) $N(C(N) - C_{BS} - A_N/\sqrt{N}) - B_N \rightarrow 0$ pour des grandes valeurs de N.

Les expressions de et ont été calculées comme suit :

$$\begin{aligned}
 C_{BS}^{do}(S_0, K, T, H) &= S_0\phi(d_{31}) - ke^{-rT}\phi(d_{32}) \\
 &\quad - (S_0(\frac{S_0}{H})^{(-1-\frac{2r}{\sigma^2})}\phi(d_{41}) - Ke^{-rT}(\frac{S_0}{H})^{(1-\frac{2r}{\sigma^2})}\phi(d_{42})) \\
 C_{BS}^{di}(S_0, K, T, H) &= S_0\phi(d_{31}) - ke^{-rT}\phi(d_{32}) \\
 &\quad - (S_0(\frac{S_0}{H})^{(-1-\frac{2r}{\sigma^2})}(\phi(-d_{21}) - \phi(-d_{41})) \\
 &\quad - Ke^{-rT}(\frac{S_0}{H})^{(1-\frac{2r}{\sigma^2})}(\phi(-d_{22}) - \phi(-d_{42})))
 \end{aligned}$$

À ce niveau, on a calculé les prix de deux options d'achat "Down-and-out" et "Down-and in" lorsque $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.25$, $T = 1$ et $H = 95$ et pour différentes valeurs de N. On trouve les résultats illustrés dans les tableaux 3.1 et 3.2. Ces résultats confirment la théorie inventée par Lin et Palmer (Lin et Palmer, 2013) et on peut voir clairement la convergence de l'option à barrière et sa vitesse qui est de l'ordre de $(1/N)$ comme on avait expliqué.

N =	1000	1500	5000
C_{BS}^{do}	7.045	7.045	7.045
	7.382	7.128	7.071
$\sqrt{N}(C_N^{do} - C_{BS}^{do})$	10.649	3.238	1.828
A_N^{do}	11.444	3.325	1.865
$N(C_N^{do} - C_{BS}^{do} - A_N^{do}/\sqrt{N})$	-25.143	-3.379	-1.998
B_N^{do}	-25.143	-3.379	-1.998

Tableau 3.1 Évolution du prix d'une option "Down-and-out"

Les auteurs ont réussi à calculer des coefficients explicites pour les termes en $(1/\sqrt{N})$ et $(1/N)$ du développement asymptotique de l'erreur entre les deux modèles CRR et Black-Scholes.

N =	1000	1500	5000
C_{BS}^{do}	7.931	7.931	7.931
C_N^{do}	8.013	8.124	7.956
$\sqrt{N}(C_N^{do} - C_{BS}^{do})$	10.586	3.187	1.8
A_N^{do}	11.444	3.325	1.865
$N(C_N^{do} - C_{BS}^{do} - A_N^{do}/\sqrt{N})$	-27.127	-5.363	-3.982
B_N^{do}	-27.127	-5.363	-3.982

Tableau 3.2 Évolution du prix d'une option "Down-and-in"

Dans la même optique, et toujours dans le sujet des options à barrières, Appoloni et Ligori (Appoloni et Ligori, 2014) ont réussi à développer une expression asymptotique pour cette famille d'option et ils ont donné une explication aux deux cas où la vitesse de convergence est de l'ordre de $1/\sqrt{N}$ et de $1/N$.

En effet, les auteurs ont analysé l'erreur entre le modèle CRR et celui de Black-Scholes en évaluant une option d'achat européenne à barrière digitale. Une option d'achat à barrière digitale, telle que présentée dans ce travail, est un contrat qui paye 1 si le prix de l'actif sous-jacent à la date de maturité est supérieur à son prix d'exercice et 0 sinon. Aussi, le prix du contrat dépend du chemin que fait le prix du sous-jacent pendant son évolution de l'instant initial jusqu'à la date de maturité. Dans ce travail, les auteurs ont pris soin de détailler l'erreur $Err_{CRR}(N) = C_{CRR}(N) - C_{BS}$ pour tout entier N . Pour cela, on a besoin de nouveau des quantités, Δ_N^K et Δ_N^H , K est le prix d'exercice et H est la barrière. La quantité Δ_N^K mesure la position de K par rapport à la position des deux nœuds adjacents à la date de maturité en échelle logarithmique. De plus, si K se trouve entre $S_{N,j_{K-1}}$ et S_{N,j_K} alors Δ_N^K se trouve entre -1 et 1, et elle prend les valeurs -1, 0 et 1 respectivement lorsque K se trouve sur le nœud $S_{N,j_{K-1}}$, au milieu entre

les nœuds $S_{N,j_{K-1}}$ et S_{N,j_K} , et finalement lorsque K se trouve sur le nœud S_{N,j_K} .

De même, la quantité Δ_N^L , mesure la position de la barrière par rapport à la position des nœuds de l'arbre binomial en échelle logarithmique. Aussi, elle est comprise entre 0 et 1. Pour les cas particuliers où elle est égale à 0 ou 1, la barrière effective coïncide avec une couche horizontale de l'arbre binomial.

les deux propositions suivantes déterminent les prix de deux options à barrières digitales :

Proposition 3.1. *Le prix d'une option d'achat "Down-and-in" du modèle binomial avec une barrière $H < K < S_0$ est égal à :*

$$C_{di-digital}(S_0, K, T, H, N) = e^{-rT} \sum_{i=j_K}^{2\bar{j}_H} \left(\frac{N!}{(N-2\bar{j}_H+i)!(2\bar{j}_H-i)!} \right) p^i (1-p)^{N-i} \quad (3.42)$$

Proposition 3.2. *Le prix d'une option d'achat "Down-and-out" du modèle binomial avec une barrière $H > K$ est égal à :*

$$C_{do-digital}(S_0, K, T, H, N) = e^{-rT} \left(\sum_{i=\bar{j}_{H+1}}^N \left(\frac{N!}{(N-i)!i!} \right) p^i (1-p)^{N-i} - \sum_{i=j_K}^{2\bar{j}_H} \left(\frac{N!}{(N-2\bar{j}_H+i)!(2\bar{j}_H-i)!} \right) p^i (1-p)^{N-i} \right) \quad (3.43)$$

À l'aide de ces deux propositions, on peut déduire les prix des autres types d'options par soustraction des prix obtenus du prix du modèle CRR standard. On rappelle que les termes sont les mêmes que ceux calculés dans le travail de Lin et Palmer (Lin et Palmer, 2013).

Les deux théorèmes qui suivent, donnent une expression asymptotique de l'erreur ce qui nous ramène au même contexte de Lin et Palmer, et Diener.

Théorème 3.4. *Dans le cas d'un modèle CRR à N périodes, l'erreur $Err_{CRR}(N)$ pour le prix d'une option d'achat européenne digitale avec une barrière $H < K$ est égal à :*

— pour une option d'achat "Down-and-in" digitale :

$$\begin{aligned} Err_{CRR}(N) &= e^{-rT}((\tilde{A}_1\delta_N^K + \tilde{A}_2\delta_N^H)1/\sqrt{N} \\ &\quad +(\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2(\Delta_N^K)^2 + \tilde{B}_3\Delta_N^K\Delta_N^H \\ &\quad +\tilde{B}_4(\Delta_N^H)^2)1/N) + O(1/N\sqrt{N}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

— pour une option d'achat "Down-and-out" digitale :

$$\begin{aligned} Err_{CRR}(N) &= e^{-rT}((\tilde{C}_1\delta_N^K + \tilde{C}_2\delta_N^H)1/\sqrt{N} \\ &\quad +(\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2(\Delta_N^K)^2 + \tilde{D}_3\Delta_N^K\Delta_N^H \\ &\quad +\tilde{D}_4(\Delta_N^H)^2)1/N) + O(1/N\sqrt{N}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Dans ce premier théorème, on remarque que le terme en $1/\sqrt{N}$ dépend à la fois de la position logarithmique du prix d'exercice par rapport aux nœuds à la date de maturité et de la barrière par rapport aux nœuds de l'arbre binomial. Par conséquent, ce terme disparaît lorsque K se trouve à la moitié du segment $[S_{N,j_K-1}, S_{N,j_K}]$ et L doit se trouver exactement sur une couche horizontale de l'arbre binomial.

Théorème 3.5. *Dans le cas d'un modèle CRR à N périodes, l'erreur $Err_{CRR}(N)$ pour le prix d'une option d'achat européenne digitale avec une barrière $K < H$ est égal à :*

— pour une option d'achat "Down-and-out" digitale :

$$\begin{aligned} Err_{CRR}(N) &= e^{-rT}((\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2\delta_N^H)1/\sqrt{N} \\ &\quad +(\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2\Delta_N^H + \tilde{F}_3\Delta_N^K\Delta_N^H \\ &\quad +\tilde{F}_4(\Delta_N^H)^2)1/N) + O(1/N\sqrt{N}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

— pour une option d'achat "Down-and-in" digitale :

$$\begin{aligned} Err_{CRR}(N) &= e^{-rT}((\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2\delta_N^K + \tilde{G}_3\delta_N^H)1/\sqrt{N} \\ &\quad +(\tilde{H}_1 + \tilde{H}_2(\Delta_N^K)^2 + \tilde{H}_3\Delta_N^K\Delta_N^H \\ &\quad +\tilde{D}_4(\Delta_N^H)^2 + \tilde{H}_4(\Delta_N^H)^2)1/N) + O(1/N\sqrt{N}) \end{aligned} \quad (3.47)$$

où tous les termes utilisés dans ces deux théorèmes sont les mêmes que ceux définis dans le travail de Lin et Palmer (Lin et Palmer, 2013) dans leur théorème (7). De plus, on définit ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1 &= \left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \frac{e^{-\frac{d_{22}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \\
\tilde{A}_2 &= -2\tilde{A}_1 - 4\alpha\sqrt{T}\phi(d_{22})\left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \\
\tilde{B}_1 &= \left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \left(g_2 \frac{e^{-\frac{d_{22}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} - \phi(d_{22})\right) \\
\tilde{B}_2 &= \left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \frac{e^{-\frac{d_{22}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \left(-\frac{d_{22}}{2}\right) \\
\tilde{B}_3 &= \left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \frac{e^{-\frac{d_{22}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \left(-\frac{d_{22}}{2}\right) (2d_{22} - 4\alpha\sqrt{T}) \\
\tilde{B}_4 &= \left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \frac{e^{-\frac{d_{22}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \left(-\frac{d_{22}}{2}\right) (-2d_{22} + 8\alpha\sqrt{T}) + 8\alpha^2 T \phi(d_2) \\
c_1 &= \frac{e^{-\frac{d_{12}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \left(-\frac{d_{22}}{2}\right) \\
c_2 &= \left(-\frac{d_{12}}{2}\right) \frac{e^{-\frac{d_{12}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \left(-\frac{d_{22}}{2}\right) \\
\tilde{c} &= \frac{d_{11}^3 + d_{11}d_{12}^2 + 2d_{12} - 4d_{11}}{24} + \frac{(2-d_{11}d_{12}-d_{11}^2)\sqrt{T}}{6\sigma} r + \frac{Td_{11}}{2\sigma^2} r^2 \\
c_3 &= \tilde{c} \frac{e^{-\frac{d_{12}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \\
\tilde{C}_1 &= c_1 - \tilde{A}_1, \quad \tilde{C}_2 = -\tilde{A}_2 \\
\tilde{D}_1 &= c_2 - \tilde{B}_1, \quad \tilde{D}_2 = c_3 - \tilde{B}_2, \quad \tilde{D}_3 = -\tilde{B}_3, \quad \tilde{D}_4 = -\tilde{B}_4 \\
\tilde{E}_1 &= -\epsilon_N \frac{e^{-\frac{d_{32}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} + \left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} e^{-\frac{d_{42}^2}{2}} \\
\tilde{E}_2 &= \frac{e^{-\frac{d_{32}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} + \left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \left(e^{-\frac{d_{42}^2}{2}} + 4\alpha\sqrt{\phi(d_{42})}\right) \\
\tilde{F}_1 &= \frac{e^{-\frac{d_{32}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \left(g_3 - \frac{d_{32}^2}{2}\epsilon^2\right) + \left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \frac{e^{-\frac{d_{32}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \left(\frac{d_{42}}{2}\epsilon^2 - g_4\right) + \phi(d_{42})I\left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \\
\tilde{F}_2 &= \frac{e^{-\frac{d_{32}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} d_{32}\epsilon_N + \left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \left(\frac{e^{-\frac{d_{32}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} d_{42}\epsilon - 4\epsilon_N\alpha\sqrt{T}\right) \\
\tilde{F}_3 &= \left(-\frac{d_{32}}{2}\right) \frac{e^{-\frac{d_{32}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} + \left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \frac{e^{-\frac{d_{32}^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \left(\frac{d_{42}}{2} - 4\alpha\sqrt{T}\right) - \left(\frac{S_0}{H}\right)^{(1-2\frac{r}{\sigma^2})} \phi(d_{42})8\alpha^2 T \\
\tilde{G}_1 &= -\tilde{E}_1, \quad \tilde{G}_2 = c_1, \quad \tilde{G}_3 = -\tilde{E}_2 \\
\tilde{H}_1 &= c_2 - \tilde{F}_1, \quad \tilde{H}_2 = c_3, \quad \tilde{H}_3 = -\tilde{F}_2, \quad \tilde{H}_4 = -\tilde{F}_4
\end{aligned}$$

Dans le théorème précédent, le terme en $1/\sqrt{N}$ de l'expression de l'option 'Down-and-out' ne dépend pas de la quantité Δ_N^K , ce qui est évident parce que $H > K$.

Donc, la position de K n'a pas d'importance dans cette situation. Aussi, lorsque $H > K$, il n'est pas possible que les termes en $1/\sqrt{N}$ disparaissent totalement puisqu'il y a des termes constants \tilde{E}_1 et \tilde{G}_1 dans l'expression. Comme solution à ce problème de non annulation du terme en $1/\sqrt{N}$, les auteurs proposent de choisir des valeurs de K et H qui annulent respectivement Δ_N^K et Δ_N^H puis de calculer \tilde{E}_1 et \tilde{G}_1 et de soustraire leurs valeurs de l'approximation binomiale du prix.

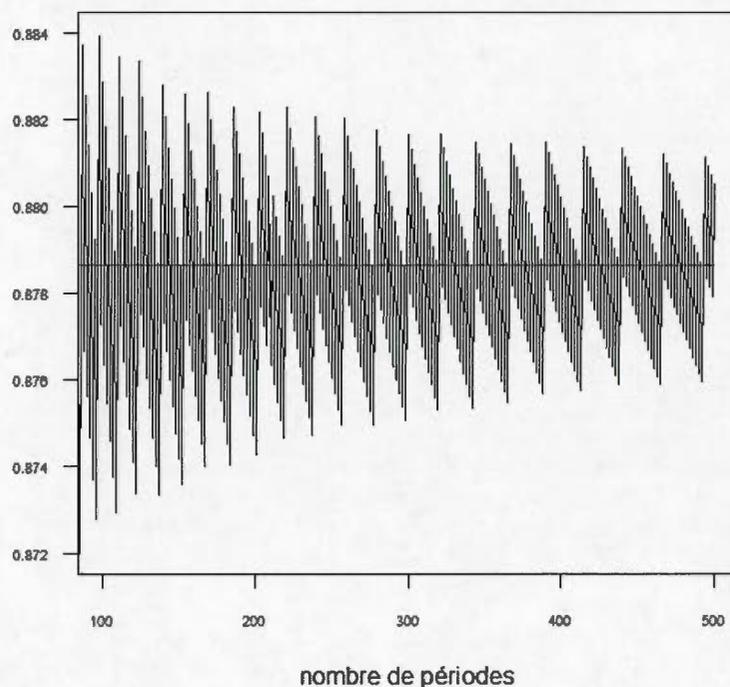


Figure 3.6 Convergence d'une option à barrière "Down-and-out" digitale

La figure 3.6 montre la convergence du modèle CRR standard vers celui du modèle Black-Scholes pour une option digitale "Down-and-out" où $C_{do-digital}^{BS}(S_0, K, T, H, r, \sigma) = e^{-rT}(\phi(d_{12}) - (\frac{S_0}{H})^{1-\frac{2r}{\sigma^2}})$. On remarque ainsi qu'il y a une forte oscillation de

$C_{do-digital}^{CRR}(N)$ autour de $C_{do-digital}^{BS}$ due à la position de K et H simultanément par rapport aux nœuds de l'arbre binomial. Il est clair dans ce cas que la convergence est de l'ordre de $1/\sqrt{N}$.

Par contre, la figure 3.7 montre la courbe de convergence du modèle CRR-corrigé par interpolation et qui est présenté dans le travail de Appoloni (Appoloni *et al.*, 2014), on remarque qu'il n'y a plus d'oscillation autour du prix $C_{do-digital}^{BS}$ si bien que la convergence est rapide et monotone. Dans ce cas, l'effet de la position de K et H est éliminé et la convergence est de l'ordre de $1/N$.

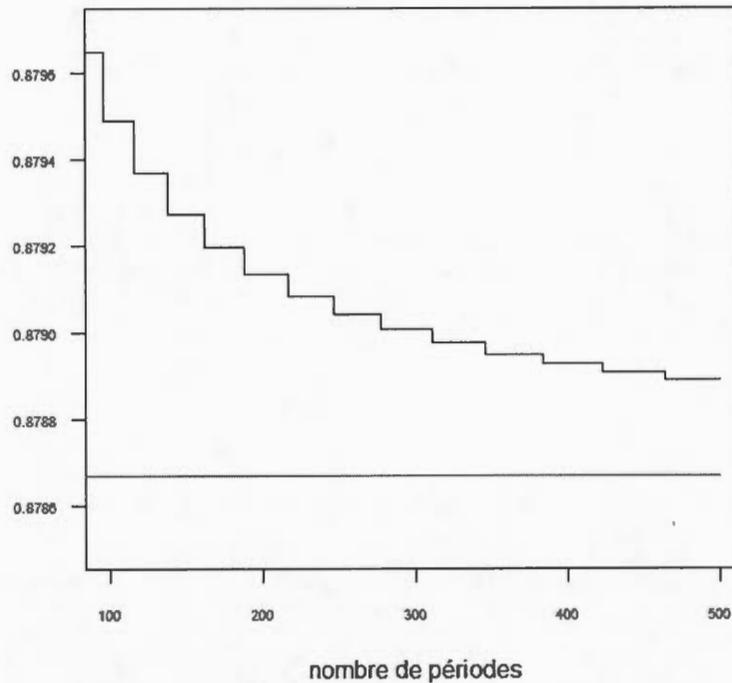


Figure 3.7 Convergence du modèle CRR-Corrigé d'une option à barrière 'Down-and-out' digitale

Dans le même contexte, Gobet (Gobet, 2001) a analysé et interprété la convergence en zigzag des options à barrière, comme c'est illustré sur la figure 3.8. Aussi, avec un travail similaire mais avec d'autres techniques, il est arrivé à conclure que la convergence est de l'ordre de $1/N$ et ne dépend que de la position de K et H .

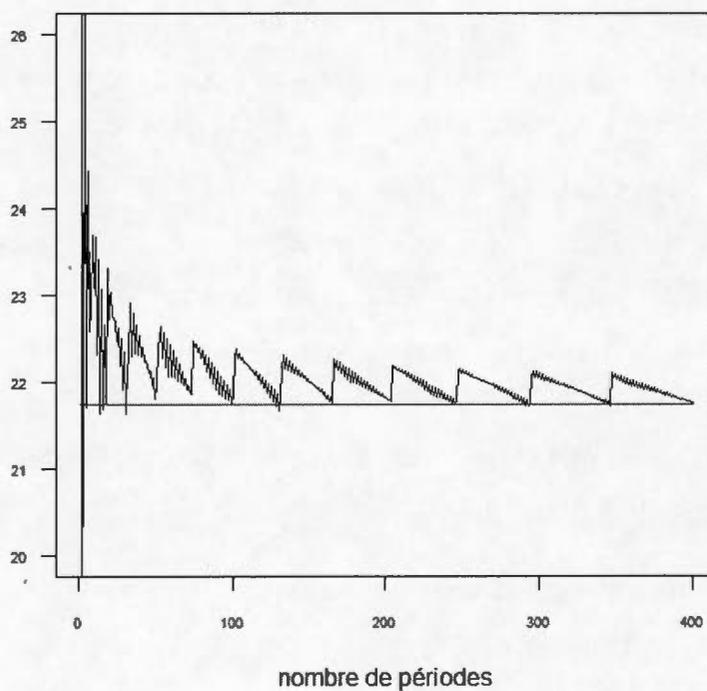


Figure 3.8 Convergence en zigzag d'une option à barrière

3.4 Exemple d'évaluation d'une option asiatique par le modèle binomial

Dans ce paragraphe, on étudie le modèle binomial en évaluant un autre type d'option qui est l'option asiatique. On s'intéresse au papier de Massabo et Russo (Costabile *et al.*, 2006) où ils ont développé un modèle binomial ajusté afin de bien trouver un prix d'option plus précis et plus crédible.

En effet, une option asiatique est un contrat qui donne le droit à son détenteur de prendre en référence la moyenne du cours du sous-jacent tout en ayant un prix d'exercice fixe ou flottant. Cette moyenne, du cours du sous-jacent, peut être arithmétique ou géométrique, et elle peut être observée sur toute la durée de vie de l'option ou une période précise à la fin de la durée de vie. Il y a huit type d'options asiatiques, il y en a quatre où le payoff est calculé sur une base de cours moyen et prix d'exercice fixe, et quatre autres sur une base de cours moyens et prix d'exercice flottant. Le payoff de la première famille est de la forme de $f(M(t), K)$ où cette option peut être une option d'achat ou de vente où $M(t)$ est la moyenne qui peut être arithmétique ou géométrique. Pour la deuxième famille, le pay-off est de la forme $f(M(t), S(t))$.

Dans ce travail, les auteurs présentent le travail de Hull et White, puis ils développent leur modèle binomial ajusté.

On considère une option d'achat européenne écrite sur la moyenne arithmétique d'un sous-jacent de prix $S(t)$, à la date t . À la date de maturité T , le payoff est de la forme $(A(T+t) - K, 0)^+$ où $A(T+t)$ est la moyenne arithmétique du sous-jacent calculée sur la durée de vie de l'option T avec un prix d'exercice K . La moyenne arithmétique est calculée comme suit :

$$A(T+t) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N S(t+i\Delta t) \quad (3.48)$$

où $\Delta t = T/N$, et on revient au même cadre du modèle CRR pour tous les paramètres N , u , d , p , r et σ .

Dans le cadre d'un modèle binomial, le problème d'évaluation des options asiatiques revient au nombre élevé des payoff possibles à chaque nœud de l'arbre binomial. Alors, Hull et White considèrent un ensemble représentatif des moyennes à chaque nœud (i,j) . Il est à noter qu'au nœud (i,j) l'actif sous-jacent a fait j hausses et $i-j$ baisses. Le maximum et le minimum de la moyenne représentative, $A_{max}(i)$ et $A_{min}(i)$ à l'instant $i\Delta t$ pour $i=1,\dots,N$ sont de la forme $S_0 e^{\pm mh}$ avec h comme paramètre fixe et m est le plus petit entier satisfaisant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} A_{max}(i) &= S_0 e^{mh} \geq \frac{1}{i+1} [iA_{max}(i-1) + uS(i-1, i-1)] \\ A_{min}(i) &= S_0 e^{-mh} \leq \frac{1}{i+1} [iA_{min}(i-1) + dS(i-1, i-1)] \end{aligned} \quad (3.49)$$

où $S(i,j)$ est la valeur du prix de l'actif sous-jacent au nœud (i,j) .

Une fois la valeur de m est déterminée, il est plus facile de déterminer les autres éléments de l'ensemble représentatif des moyennes qui sont de la forme de $S_0 e^{kh}$ où k représente tous les entiers supérieurs ou égaux à $-(m-1)$ et inférieurs ou égaux à $m-1$. Aussi, il est à noter qu'à chaque nœud de l'instant $i\Delta$, l'ensemble des moyennes représentatives est inchangé. Par la suite, on note par $A(i,j,k)$ la k -ème moyenne représentative du nœud (i,j) , alors la valeur de l'option qui correspond à cette moyenne à ce nœud est notée $C(i,j,k)$, qui est de la forme :

$$C(i,j,k) = e^{-r\Delta t} [pC(i+1, j+1, k_u) + qC(i+1, j, k_d)] \quad (3.50)$$

où $C(i+1, j+1, k_u)$ et $C(i+1, j+1, k_d)$ sont respectivement les valeurs de l'option correspondants aux moyennes représentatives $[(i+1)A(i,j,k) + uS(i,j)]/(i+2)$ et $[(i+1)A(i,j,k) + dS(i,j)]/(i+2)$. Enfin, la valeur de l'option peut être calculée comme on a vu précédemment pour le modèle binomial. Mais, le modèle de Hull et White reste très sensible au paramètre h qui a un effet direct sur l'évaluation du prix puisqu'il détermine le nombre des moyennes représentatives. Aussi, plusieurs

ont essayé de déterminer le paramètre h mais il reste toujours sensible, et il a d'importants impacts dans le processus de calcul du prix de l'option.

Toujours dans le même cadre de travail, on évalue le prix d'une option asiatique écrite sur la moyenne arithmétique du sous-jacent dont le prix évolue suivant le modèle CRR. La différence portée par le modèle binomial ajusté, qu'on décrit dans cette partie de notre travail, par rapport aux autres approches comme celle de Hull et White, est dans le choix des moyennes représentatives des nœuds servant à calculer le prix de l'option. En effet, considérons le nœud (i,j) , l'ensemble des moyennes représentatives est déterminé grâce à une procédure simple. En effet, on commence par calculer la moyenne maximale associée au nœud (i,j) qu'on le note $A_{max}(i,j)$, cette moyenne est produite par la trajectoire τ_{max} qui est la trajectoire obtenue après j hausses consécutives et $(i-j)$ baisses consécutives du prix du sous-jacent. Cette moyenne sera la premier élément calculé de l'ensemble des moyennes représentatives et elle sera notée par $A_{max}(i,j,1)$. Ensuite, le dernier élément de cet ensemble qui est $A_{min}(i,j)$, est produit par la trajectoire τ_{min} obtenue après $(i-j)$ baisses consécutives et j hausses consécutives. Le reste des éléments, $A(i,j,k)$ où $k=1,\dots,j(i-j)$, sont calculés récursivement en posant $S_{max}(i,j,k)$ comme la plus grande valeur du prix du sous-jacent n'appartenant pas à τ_{min} et on calcule $A(i,j,k)$ comme suit :

$$A(i,j,k+1) = A(i,j,k) - \frac{1}{i+1}(S_{max}(i,j,k) - S_{max}(i,j,k)d)^2 \quad (3.51)$$

L'ensemble des moyennes représentatives au nœud (i,j) est formé par $j(i-j)+1$ éléments dont le premier et le dernier sont égaux à :

$$\begin{aligned} A(i,j,1) &= A_{max}(i,j) = \frac{1}{i+1}(\sum_{h=0}^j S_0 u^h + \sum_{h=0}^{i-j-1} S_0 u^{h+2j-1}) \\ A(i,j,j(i-j)+1) &= A_{min}(i,j) = \frac{1}{i+1}(\sum_{h=0}^j S_0 d^h + \sum_{h=0}^{i-j-1} S_0 d^{h+2j-1}) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Une fois l'ensemble des moyennes représentatives est déterminé, il est facile de

calculer le prix de l'option à la date voulue récursivement par la formule déjà connue sous la forme :

$$C(i, j, k) = e^{-r\Delta t}(pC(i+1, j+1, k_u) + qC(i+1, j, k_d)) \quad (3.53)$$

où $C(i+1, j+1, k_u)$ et $C(i+1, j, k_d)$ sont respectivement associés aux moyennes $((i+1)A(i, j, k) + uS(i, j))/(i+2)$ et $((i+1)A(i, j, k) + dS(i, j))/(i+2)$.

3.5 Les lettres grecques

Les lettres grecques sont des instruments financiers très importants dans la gestion financière puisqu'ils mesurent en quelques sortes l'impact des variations des paramètres qui forment la valeur de l'option sur ce dernier. En fait, la valeur de ces instruments dépend du modèle d'évaluation qui en découle.

Dans cette partie, on présente les principales lettres grecques, soit Δ et Γ . Puis, on étudie la convergence de Δ dans le concept du modèle binomial. On s'intéresse principalement dans cette partie à l'étude du papier (Chung *et al.*, 2011) où les auteurs ont étudié avec minutie la convergence de Δ dans différents contextes du modèle binomial.

En effet, Δ est la mesure de la sensibilité du prix de l'option par rapport à une variation du cours du sous-jacent. Dans un cadre du modèle de Black-Scholes, Δ d'une option d'achat est calculée suivant l'équation suivante :

$$\Delta_C = \frac{\delta C}{\delta S} = N(d_1) \quad (3.54)$$

où N est la distribution normale centrée réduite et d_1 est la même que l'équation (2.25). De la même manière, pour une option de vente $\Delta_P = N(d_1) - 1$.

La mesure Γ est la mesure de sensibilité de Δ par rapport à une variation du cours du sous-jacent. Donc, on a $\Gamma_C = \Gamma_P = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$.

Dans le cadre d'un modèle binomial, on trouve principalement deux méthodes qui permettent de calculer avec précision ces instruments. La première consiste à évaluer l'option pour deux prix différents du sous-jacent puis de calculer le rapport de la différence des évaluations trouvées sur la différence des valeurs du sous-jacent utilisé. Par exemple, pour calculer Δ d'une option de prix C dont le prix du sous-jacent est S , on calcule tout d'abord le prix de l'option pour le prix du sous-jacent est $0.99S$ qu'on le note $C_{0,99}$, puis on calcule la valeur de l'option pour le prix du sous-jacent $1.01S$ qu'on le note $C_{1,01}$ puis on a $\Delta = \frac{C_{1,01} - C_{0,99}}{1.01S - 0.99S}$. Dans cette méthode, plus la variation du cours du sous-jacent est petite, plus le calcul des grecques est précis.

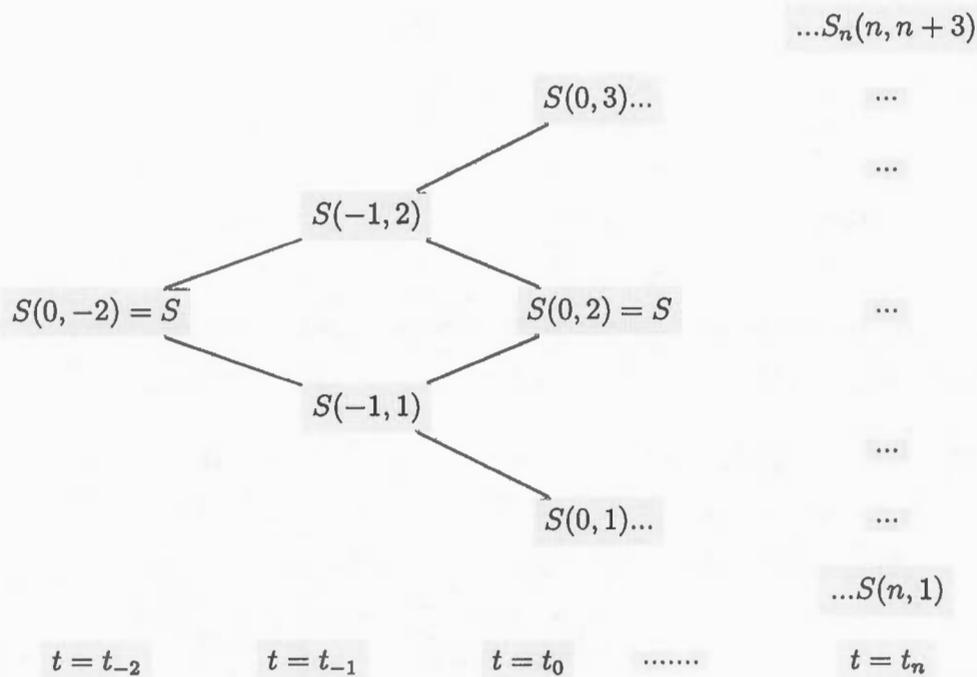


Figure 3.9 Arbre binomial à $(n+2)$ périodes

La deuxième méthode, appelé la méthode de l'arbre binomial étendu, consiste à ajouter deux périodes à l'arbre binomial qui commence cette fois deux périodes

plutôt à $t = t_{-2}$. la figure 3.9 explique ce qui précède. En fait, on évalue l'option à l'instant $t = t_{-2}$, puis les valeurs trouvées aux nœuds (0,3) et (0,1) sont les valeurs de l'option lorsque le prix initial du sous-jacent est $S(0,3)$ et $S(0,1)$ respectivement. Finalement, on calcule Δ qui est égale à $\frac{C(0,3)-C(0,1)}{S(0,3)-S(0,1)}$.

Il y a plusieurs études qui ont été faites autour du modèle binomial et de sa convergence vers le modèle de Black-Scholes, mais peu d'études ont été consacrées à l'étude des lettres grecques et leurs convergences. le papier de (Chung *et al.*, 2011), cité plus-haut, a essayé de mettre les lumières sur ce sujet.

En effet, dans ce papier, les auteurs ont étudié en détail la vitesse de convergence de Δ dans différents concepts du modèle binomial. Pour commencer, ils ont défini le paramètre $\epsilon(n)$ qui est une mesure de la position des nœuds par rapport au prix d'exercice K à la date de maturité T . Soit m le plus grand entier tel que $S_K = S_0 u^m d^{n-m} \leq K$. Alors :

$$\epsilon(n) = \frac{\ln(S_{K+1}/K)}{\ln(S_{K+1}/S_K)} = \frac{\ln(S_{K+1}/K)}{\ln(u/d)} \quad (3.55)$$

Toujours dans un contexte du modèle binomial, u et d sont les paramètres d'une hausse du prix et d'une baisse du prix respectivement, S_{K+1} est le prix du sous-jacent juste en dessus du prix d'exercice à la date de maturité.

Le théorème suivant présente la vitesse de convergence de la lettre grecque Δ calculée dans le contexte du modèle CRR.

Théorème 3.6. *Soit $\hat{\Delta}_{n,CRR}$ est le Δ du modèle CRR à n -périodes, d'une option de vente européenne standard, calculée par la méthode de l'arbre binomial étendu et Δ_{BS} est le vrai Δ du modèle de Black-Scholes, alors :*

$$\hat{\Delta}_{n,CRR} = \Delta_{BS} + \frac{e^{-d_1^2/2}}{n\sqrt{2\pi}} f(\epsilon(n)) + O(1/n) \quad (3.56)$$

où $d_1 = (\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T)/(\sigma\sqrt{T})$, $f(\epsilon(n)) = 2d_2(-\epsilon(n) + \epsilon(n)^2)$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Ce théorème montre que dans le cadre du modèle CRR utilisant la méthode de l'arbre binomial étendu pour calculer Δ , la vitesse de convergence est de l'ordre de $O(1/n)$. Aussi, le modèle de convergence illustré dans ce théorème montre des oscillations causées par la position du prix d'exercice par rapport aux nœuds à la date de maturité qui change lorsque n augmente. Donc, l'erreur de Δ du modèle CRR est produite par la position des nœuds à la date de maturité autour du prix d'exercice.

Si le modèle de convergence de Δ du modèle CRR n'est pas monotone à cause de la non-stabilité de l'erreur qui en découle, le modèle CRR généralisé présente un autre modèle de convergence de meilleure qualité selon le théorème suivant.

Théorème 3.7. *Soit $\hat{\Delta}_{n,GRR}$ est le Δ du modèle CRR généralisé à n -périodes d'une option de vente européenne standard calculée par la méthode de l'arbre binomial étendu et Δ_{BS} est le vrai Δ du modèle de Black-Scholes, alors :*

$$\hat{\Delta}_{n,GRR} = \Delta_{BS} + O(1/n) \quad (3.57)$$

Contrairement au cas du modèle CRR, de ce dernier théorème on constate une convergence monotone et lisse, ce qui permet l'utilisation de la technique d'extrapolation afin d'améliorer la qualité de l'estimation de Δ . Alors, soit l'erreur de Δ du modèle binomial standard qui a la forme suivante :

$$e(n) = \hat{\Delta}_n - \hat{\Delta}_{BS} \quad (3.58)$$

où $\hat{\Delta}_n$ et $\hat{\Delta}_{BS}$ sont les Δ du modèle binomial standard et du modèle de Black-Scholes respectivement.

Aussi, on définit le taux d'erreur sous l'expression :

$$\rho(n) = e(n/2)/e(n) \quad (3.59)$$

Le taux d'erreur exprime le taux d'amélioration de la précision de la convergence lorsque le nombre des périodes n est doublé. Sous l'hypothèse que le modèle binomial converge avec une vitesse de l'ordre de $O(1/n)$, le taux d'erreur $\rho(n)$ converge vers 2 lorsque le nombre de périodes n tend vers l'infini. De plus, par la méthode d'extrapolation, on détermine une approximation de Δ du modèle de Black-Scholes sous la forme :

$$\tilde{\Delta}_{BS}(n) = 2\hat{\Delta}(n) - \hat{\Delta}(n/2) \quad (3.60)$$

De ce fait, on peut écrire l'erreur comme suit :

$$\tilde{e}(n) = \tilde{\Delta}_{BS}(n) - \Delta_{BS} = (2 - \rho(n))e(n) \quad (3.61)$$

D'après cette expression, l'erreur calculée par la méthode d'extrapolation dépend de la différence entre 2 et le taux d'erreur $\rho(n)$. Aussi, une fois que $\rho(n)$ se situe entre 1 et 3, la valeur absolue de l'erreur calculée par la méthode d'extrapolation est plus petite que l'erreur ($|\tilde{e}(n)| < e(n)$). Alors, dans le cas de Δ du modèle binomial standard, l'extrapolation augmente l'erreur.

3.6 Conclusion

Le modèle binomial est un excellent concept simple permettant de modéliser des phénomènes très complexes et aléatoires dans la finance. Ce modèle propose une théorie efficace qui a réussi avec le temps à intriguer les chercheurs qui n'ont jamais cessé de poser des questions autour de son application dans différents domaines et dans la finance en particulier. Le modèle binomial, par sa simplicité, répond à tous les critères qui font de lui un concept robuste capable de modéliser tous les phénomènes. Bien que le modèle binomial montre quelques points faibles en ce qui concerne la vitesse de convergence, mais sa flexibilité et extensibilité font de lui

un concept incontournable dans la finance. En effet, on a étudié la convergence du modèle binomial ainsi que différents modèles qui en découlent comme le modèle de CRR, le modèle binomial flexible ou le modèle CRR généralisé. À chaque fois, et dans tous les contextes, on a réussi à établir une convergence et on a pu l'améliorer. Même quand il s'agit de modéliser des options complexes comme les options asiatiques ou les options à barrières, le modèle binomial, avec ses propriétés simples, donne d'excellents résultats offrant à la fois la qualité et la précision.

CONCLUSION

Dans ce travail, on a présenté le modèle binomial dans différentes situations du marché financier, ainsi que l'origine de ses applications dans le domaine financier. En effet, grâce à sa simplicité, le modèle binomial a trouvé sa place dans la finance, de plus, il a intrigué les chercheurs et les professionnels de la finance. Aussi, on a montré que le modèle binomial converge vers celui de Black-Scholes, ce dernier est une référence dans la finance depuis son introduction au début des années 1970.

Dans une première partie, on a présenté d'une part, le modèle binomial à travers le papier fondateur de Cox, Ross et Rubinstein, d'autre part, le modèle de Black-Scholes. Aussi, on a prouvé les équations du modèle de Black-Scholes en utilisant des méthodes du calcul stochastique développées par Itô et d'autres chercheurs. Par la suite, on a montré la convergence du modèle binomial vers celui de Black-Scholes. Dans un premier temps, la convergence a été appuyée par le papier fondateur de Cox, Ross et Rubinstein qui ont développé une approche simple de la convergence de leur modèle CRR. d'ailleurs, les auteurs soulignent l'importance de la convergence de leur modèle pour que ce dernier puisse avoir de bonnes répercussions dans la finance.

Dans un deuxième temps, une grande partie du travail a été consacrée à l'étude de convergence du modèle binomial et de ses différentes variantes. Le modèle binomial a montré quelques faiblesses en termes de convergence et les multiples aspects qui s'y rattachent. Cependant, plusieurs chercheurs ont contribué à son amélioration, ce qui se traduit par différents ajustements du modèle binomial initial. En effet, Tian a réussi par l'ajout d'un paramètre d'inclinaison à contrôler

la forme de l'arbre binomial, c'est ce qu'on appelle le modèle binomial flexible, comme Tian le nomme. Il a prouvé une convergence plus lisse et plus rapide vers le modèle de Black-Scholes contrairement au modèle CRR qui a un comportement asymptotique lent et fluctuant. Par ailleurs, Chung introduit le modèle binomial généralisé en ajoutant un nouveau paramètre appelé paramètre d'étendue. Le modèle binomial muni de ce nouveau paramètre peut avoir beaucoup plus de liberté et de facilité ce qui a entraîné des fluctuations au niveau de la vitesse de convergence. Chung a remarqué que ces fluctuations sont causées par la position du prix d'exercice par rapport aux nœuds de l'arbre binomial à la date de maturité. Pour remédier à ce problème, il a inventé le modèle GCRR-XPC qui présente une meilleure convergence, mais il demeure dépendant de l'aspect asymptotique de la probabilité que définit le modèle CRR.

Dans un troisième temps, on s'est consacrée à l'analyse de l'aspect asymptotique de la vitesse de convergence par l'étude du papier de Diener. On a pu développer une expression asymptotique du prix de l'option qui est évalué par le modèle binomial, ce qui a permis de voir en détail les composantes qui contrôlent la convergence. Par la suite, on a fait utilisation du modèle binomial pour évaluer divers types d'options, dont celles à barrières de même que les asiatiques.

Finalement, le modèle binomial est simple qui n'utilise pas des techniques trop complexes. En effet, sa simplicité réside dans ses calculs élémentaires et faisant appel à peu de paramètres. Ce modèle a réussi à modéliser des phénomènes complexes et très délicats dans un domaine où il y a beaucoup de variantes contenant des aspects implicites et difficiles à contrôler. Le modèle binomial donne la possibilité de repousser les limites de son application par son aspect simple et extensible. Il a démontré que sa simplicité lui confère plus d'importance, puisqu'il fait preuve de plus de flexibilité et d'extensibilité asymptotique contrairement aux autres modèles complexes qui offrent peu de marge à la modification. Avec son aspect

extensible, il est fort probable que ce modèle soit le déclencheur d'un nouveau rebondissement dans la finance si on arrive à donner un aspect stochastique à ses paramètres.

APPENDICE A

MARCHÉ COMPLET

La modélisation des phénomènes financiers est un problème d'envergure qui nécessite beaucoup de précision. Lorsqu'on modélise des actifs financiers avec le modèle CRR dans un contexte d'absence d'arbitrage, on peut toujours construire des portefeuilles auto-finançants qui couvrent l'option pour toutes les options européennes. On dit aussi de ce portefeuille qu'il duplique l'option puisque son prix est égal à celui de l'option en tout temps.

De cette idée découle la théorie du marché complet. En effet, un marché où toutes les options peuvent être dupliquées est un marché complet. Sinon, le marché est incomplet. D'où la définition suivante :

Définition A.1. *Un marché où toute option est duplicable s'appelle un marché complet. Sinon, on parle d'un marché incomplet.*

D'une manière générale, l'arbitrage est un facteur important dans la modélisation et le calcul des prix des actifs financiers. Le théorème suivant met en évidence la relation entre marché complet et probabilité martingale.

Théorème A.1. *Un marché sans arbitrage est complet si et seulement s'il n'existe qu'une seule probabilité de martingale.*

APPENDICE B

LES OPTIONS

B.1 Option vanille

L'option vanille est une option ordinaire classique. Elle se définit sur le marché par un prix d'exercice et une date d'échéance. C'est un produit dérivé qui donne le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une quantité d'actifs sous-jacents à un prix fixé d'avance et à une date donnée.

L'intérêt de cette option sur le marché vient du fait qu'elle permet de limiter à la fois la mobilisation du capital pendant les multiples et différentes transactions sur le marché et les pertes considérables. Par contre, l'option vanille avec sa simplicité demeure faible en matière d'optimisation et de maximisation du profit.

On trouve deux types d'options vanilles qui sont :

- Les options européennes qui donnent le droit d'acheter ou de vendre à un prix déterminé à l'avance et une date d'échéance fixée à l'avance aussi, mais cette date ne peut pas être changée.
- Les options américaines ressemblent aux européennes sauf que la date d'échéance peut varier selon les préférences de celui qui les détient.

B.2 Option à barrière

Une option à barrière est un produit dérivé sur un actif sous-jacent pour lequel son prix à l'échéance est soumis à la contrainte que l'actif sous-jacent a franchi ou non une barrière donnée et ce durant la durée de vie de l'option. Notons que la barrière peut être franchie par le haut ou bien par le bas. Il existe une grande variété d'options à barrière que l'on peut classer en deux principales familles. En effet, la "Knock-Out" est une option à barrière qui expire quand l'actif sous-jacent touche la barrière alors que la "Knock-In" est une option à barrière qui est activée lorsque l'actif sous-jacent touche la barrière.

B.3 Option asiatique

Une option asiatique est une option classique qui donne le droit à son détenteur d'acheter ou de vendre à une date d'échéance fixée et à un prix déterminé à l'avance. La particularité de cette option est que son prix est déterminé par la moyenne d'évolution du prix du sous-jacent pendant la durée du contrat de celle-ci et du fait que cette moyenne soit au-dessous ou au-dessus du prix d'exercice à la date d'échéance.

RÉFÉRENCES

- Appoloni, E. et Ligori, A. (2014). Efficient tree methods for pricing digital barrier options. *arXiv1401.2900v2[qfin-fn.CP]*.
- Appoloni, E., Marcellino, G. et Zanette, A. (2014). The binomial interpolated lattice method for step double barrier options. *International Journal of Theoretical and Applied Finance, World Scientific Publishing*.
- Back, K. (2005). *A Course in Derivative Securities - Introduction to Theory and Computation*. Springer.
- Black, F. et Scholes, M. (1972). The Pricing of Options Corporate Liabilities.
- Bohner, M. et Yao, Z. (2009). On analytical solutions of the Black-Scholes equation. *Applied Mathematics Letters*, vol. 22, 309–313.
- Chanane, B. (2011). Solutions of a class of partial differential equations with application to the Black-Scholes equation. *Applied Mathematics and computation*, 217 (19), 7845–7850.
- Chung, S.-L., Hung, W., Lee, H.-H. et Shih, P.-T. (2011). On the rate of convergence of binomial greeks. *The journal of futures markets*, Vol.31, No.6, 562–597.
- Chung, S.-L. et Shih, P.-T. (2007). Generalized Cox-Ross-Rubinstein Binomial Model. *Management science*, vol. 53, No. 3, 508–520.
- Coelen, N. (2002). Black-Scholes Option Pricing Model. *CiteSeerX*.
- Costabile, M., Massabo, I. et Russo, E. (2006). An adjausted binomial model for pricing asian options. *Rev Quant Finan Acc*, 27 :285–296.
- Cox, J. C., Ross, S. A. et Rubinstein, M. (1979). Option pricing : a simplified approach. *Journal of Financial Economics*.
- Diener, F. et Diener, M. (2004). Asymptotics of the price oscillations of a european call option in a tree model. *Mathematical Finance*, Vol. 14, No. 2, 271, 293.

- Gobet, E. (2001). Analysis of the zigzag convergence for barrier options with binomial trees. *Rapport technique valide sur* : <http://www.proba.jussieu.fr/mathdoc/preprints/>.
- Hull, J. C. (2003). *Options, futures and other derivatives*. Pearson.
- Jódar, L., Sevilla-Peris, P., Cortés, J. et Sala, R. (2005). A new direct method for solving the Black-Scholes equation. *Applied Mathematics Letters*, vol. 18, Issue 1, 29–32.
- Korn, R. et Müller, S. (2010). Binomial trees in option pricing—history, practical applications and recent developments. *Springer*.
- Lin, J. et Palmer, K. (2013). Convergence of barrier option prices in the binomial model. *Mathematical finance*, vol. 23, No. 2, 318–338.
- Pascucci, A. (2011). *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*. Springer.
- Perello, J., Porra, J., Montero, M. et Madoliver, J. (2000). Black-Scholes option pricing within Itô and Stratonovich conventions. *arXiv:physics/0001040 [physics.soc-ph]*.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance I the Binomial Asset Pricing Model*. Springer.
- Tian, Y. S. (1999). A Flexible Binomial Option Pricing Model. *The journal of futures markets*, vol. 19, No. 7, 817–843.