UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

INTRODUCTION AU PROGRAMME DE MORI

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

FÉLIX DESROCHERS-GUÉRIN

FÉVRIER 2016

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente la classification d'Enriques-Kodaira des surfaces projectives complexes lisses à l'aide du programme du modèle minimal de Mori.

Le premier chapitre résume les notions et les résultats en géométrie algébrique nécessaires pour comprendre la suite de ce mémoire : théorie des faisceaux, fibrés en droites, cohomologie des faisceaux, etc. Pour les preuves, nous nous contentons de donner une référence, ou au mieux une brève esquisse.

Le deuxième chapitre consiste en la théorie de Mori proprement dite. On y trouve la définition du cône de Mori-Kleiman, puis l'énoncé et la preuve des théorèmes de Mori pour le cas lisse de dimension 2.

Le troisième chapitre termine ce mémoire en démontrant la théorème de classification des surfaces d'Enriques. La théorie de Mori servant à démontrer un des ingrédients principaux pour le théorème de classification : le critère de rationalité de Castelnuovo.

MOTS-CLEFS : géométrie algébrique, théorie de Mori, surfaces complexes, variétés projectives.

INTRODUCTION

Ce mémoire se veut un bref survol de la classification des surfaces projectives complexes du point de vue du *programme du modèle minimal* de Mori. On pourra comparer avec l'approche plus classique de (Beauville, 1996).

CHAPITRE I

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous résumons les définitions et les résultats nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Toutes les variétés dont on parle sont supposées projectives et complexes, c'est à dire des sous-ensembles de $\mathbb{CP}^n$ pouvant être représentées localement comme le lieu d'annulation d'un ensemble de fonctions holomorphes. Les énoncés pour lesquels on ne donne aucune citation pour preuve sont démontrés dans le chapitre 0 de (Griffiths et Harris, 1994).

1.1 Faisceaux

Définition 1.1.1. Soit X un espace topologique. Un *préfaisceau* $\mathcal{F}$ sur X est la donnée de :

— Pour chaque ouvert $U \subseteq X$, on a un groupe abélien $\mathcal{F}(U)$. On appelle les éléments de $\mathcal{F}(U)$ les *sections* de $\mathcal{F}$ sur U.

— Pour chaque inclusion d'ouverts $U \subseteq V$, on a un morphisme de groupes

$$\rho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

appelé *morphisme de restriction.*

— Les morphismes de restriction satisfont

$$\rho_{U,U} = \mathbb{1}_{\mathcal{F}(U)}, \qquad \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}.$$

On appelle $\mathcal{F}$ un *faisceau* si, en plus, pour chaque ouvert U et chaque recouvrement ouvert $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de celui-ci, $\mathcal{F}$ satisfait les conditions :

— Pour chaque paire de sections $s, t \in \mathcal{F}(U)$, on a $s = t$ si et seulement si

$$\rho_{U,U_i}(s) = \rho_{U,U_i}(t) \text{ pour tout } i \in I.$$

— Pour chaque famille de sections $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ satisfaisant

$$\rho_{U_i,U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j,U_i \cap U_j}(s_i) \text{ pour tous } i,j \in I,$$

il existe une section $s \in \mathcal{F}(U)$ (nécessairement unique par la condition précédente) telle que

$$\rho_{U,U_i}(s) = s_i \text{ pour tout } i \in I.$$

$\mathcal{F}(U)$ peut être également noté $\Gamma(U,\mathcal{F})$. On appelle les éléments de $\Gamma(\mathcal{F}) := \Gamma(X,\mathcal{F})$ les *sections globales* de $\mathcal{F}$.

On peut définir de façon similaire des faisceaux d'anneaux, d'ensembles, de groupes (pas nécessairement abéliens), etc. On a les exemples de faisceaux suivants :

— Pour un groupe abélien G (noté additivement), on a le faisceau constant, noté aussi G, où $G(U)$ est l'ensemble de fonctions localement constantes $U \to G$, l'opération de groupe étant l'addition de fonctions :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

— Le faisceau $\mathcal{C}^0$ de fonctions réelles continues : $\mathcal{C}^0(U)$ est l'ensemble des fonctions $U \to \mathbb{R}$ continues.

— Si X est une variété lisse, on a les faisceaux $\mathcal{C}^\infty$ de fonctions infiniment différentiables et $\mathcal{A}^p$ de p-formes différentielles pour $0 \leq p \leq \dim(X)$.

— Si X est une variété complexe, on a les faisceaux $\mathcal{O}$ et $\mathcal{M}$ de fonctions holomorphes et méromorphes, respectivement, $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau des formes de type p,q, Ω^p le faisceau de p-formes holomorphes. On a aussi $\mathcal{O}^*$ et

$\mathcal{M}^*$ les faisceaux de fonctions holomorphes (resp. méromorphes) inversibles multiplicativement (c'est-à-dire sans zéros, resp. non identiquement nulles), avec la multiplication de fonctions comme opération de groupe sur $\mathcal{O}^*(U)$ (resp. $\mathcal{M}^*(U)$).

Dans tous ces exemples, les éléments de $\mathcal{F}(U)$ sont des fonctions ayant pour domaine U et le morphismes de restrictions sont donnés par la restriction ordinaire de fonctions :

$$\rho_{U,V}(f) = f|_V.$$

Par analogie, on utilisera cette notation pour un préfaisceau quelquonque.

Un morphisme de (pré)faisceaux $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est donné par des morphismes $\sigma(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\sigma(U)} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle |_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |_V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\sigma(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

commutent. Si, pour chaque ouvert $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U) \subseteq \mathcal{G}(U)$ et les inclusions $\mathcal{F}(U) \hookrightarrow \mathcal{G}(U)$ définissent un morphisme, on dit que $\mathcal{F}$ est un *sous-(pré)faisceau* de $\mathcal{G}$

Soit $x \in X$ et $\mathcal{F}$ un préfaisceau. On définit la *fibre* de $\mathcal{F}$ en x par

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U).$$

Plus explicitement, un élément de $\mathcal{F}_x$ est représenté par une section s sur un voisinage ouvert $U \ni x$ et deux telles sections $s \in \mathcal{F}(U)$, $s' \in \mathcal{F}(V)$ représentent le même élément $s_x \in \mathcal{F}_x$ si et seulement si il existe un voisinage ouvert $W \ni x$ tel que $W \subseteq U \cap V$ et $s|_W = s'|_W$. Réciproquement, pour $s \in \mathcal{F}(U)$ et $x \in U$, on note s_x l'élément de $\mathcal{F}_x$ représenté par s et on l'appelle le *germe* de s en x.

Notons qu'un morphisme de faisceaux est complètement déterminé par son effet sur les fibres. Si on a un morphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ et une section $s \in \mathcal{F}(U)$, alors pour chaque point $x \in U$, $f(s_x)$ est représenté par $f(s|_V)$ pour un certain voisinage de x et on peut retrouver $f(s)$ en recollant les sections ainsi obtenues.

Définition 1.1.2. Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau. Alors le *faisceau associé à* $\mathcal{F}$, noté $\mathcal{F}^f$, où $\mathcal{F}^f(U)$ est donné par l'ensemble des fonctions

$$s : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

telles que pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert $V \ni x$ et une section $s' \in \mathcal{F}(V)$ tels que $s(x) = s'_x$ pour tout $x \in V$ (en particulier, $s(x) \in \mathcal{F}_x$).

Notons les propriétés suivantes de $\mathcal{F}^f$:

— $\mathcal{F}^f$ est un faisceau et on a un morphisme évident $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^f$ qui à $s \in \mathcal{F}(U)$ associe la fonction $x \mapsto s_x$. De plus, i induit un isomorphisme sur les fibres.

— Tout morphisme $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ où $\mathcal{G}$ est un faisceau se factorise par i :

$$\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^f \xrightarrow{\bar{g}} \mathcal{G}$$

En particulier, si $\mathcal{F}$ est déjà un faisceau, la factorisation de l'identité $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ montre que i est un isomorphisme. Si $\mathcal{F}$ est un sous-préfaisceau de $\mathcal{G}$, la factorisation de l'inclusion $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$ identifie $\mathcal{F}^f$ à un sous-faisceau de $\mathcal{G}$.

Les constructions que l'on peut faire avec des groupes abéliens ou des anneaux (par exemple somme directe, groupe quotient, etc.) ont des analogues évidents pour les préfaisceaux de groupes abéliens ou d'anneaux. Les analogues pour les faisceaux sont un peu moins évidents. Par exemple, si $\mathcal{G}$ est un faisceau et $\mathcal{F}$ un sous-faisceau, $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ ne définit en général qu'un préfaisceau. On contourne cette difficulté en passant au faisceau associé. Notons en particulier les définitions suivantes :

Définition 1.1.3.

— Si $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{G}$ le *faisceau quotient* $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$$

— Si $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceau, le *noyau* $\ker(f)$ de f est le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ donné par $U \mapsto \ker(f(U))$ et l'*image* $\operatorname{im}(f)$ est le faisceau associé au préfaisceau donné par $U \mapsto \operatorname{im}(f(U))$.

Remarque 1.1.4. $U \mapsto \ker(f(U))$ donne déjà un faisceau puisque la condition $f(U)(s) = 0$ peut se vérifier localement sur les fibres. Aussi, tel que remarqué précédemment, on peut considérer $\operatorname{im}(f)$ comme un sous-faisceau de $\mathcal{G}$.

Définition 1.1.5. Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux. On dit que f est *injectif* (resp. *surjectif*) si tous les morphismes $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ sur les fibres sont injectifs (resp. *surjectifs*).

On laissera au lecteur le soin de vérifier que $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est injectif (resp. surjectif) si $\ker(f) = 0$ (resp. $\operatorname{im}(f) = \mathcal{G}$). Remarquons aussi que la surjectivité de f n'implique pas la surjectivité de $f(U)$. Nous reviendrons à ce point lorsque nous parlerons de cohomologie.

Définition 1.1.6. Soit

$$\mathcal{F}_0 \xrightarrow{f_1} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{f_i} \cdots \xrightarrow{f_n} \mathcal{F}_n$$

une suite de morphismes de faisceaux. On dit que la suite est *exacte en* $\mathcal{F}_i$ si $\ker(f_i) = \operatorname{im}(f_{i-1})$. Si elle est exacte en $\mathcal{F}_i$ pour tout i entre 1 et $n-1$, on dit que la suite est *exacte*. On appelle une suite exacte de la forme

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

une *suite exacte courte*.

Beaucoup de propriétés peuvent être formulées en termes de suites exactes, par exemple :

$$
\begin{array}{rl}
0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} & \text{est exacte si et seulement si } \mathcal{F} \to \mathcal{G} \text{ est injective.} \\
\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0 & \text{est exacte si et seulement si } \mathcal{F} \to \mathcal{G} \text{ est surjective.} \\
0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} & \text{est exacte si et seulement si } \mathcal{K} \simeq \ker(f).
\end{array}
$$

Notons pour terminer que, tout comme l'injectivité et la surjectivité, l'exactitude d'une suite peut se vérifier sur les fibres.

1.2 Diviseurs et fibrés en droites

Définition 1.2.1. Soit X une variété. Un *diviseur (de Cartier)* est une section globale du faisceau $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$. On note $\mathrm{Div}(X) = \Gamma(\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ le groupe formé par ces diviseurs.

Autrement dit, un diviseur D est décrit localement sur un ouvert $U \subset X$ par une fonction rationelle non-identiquement-nulle $f \in \mathcal{M}^*(U)$ – que l'on appelle une *équation locale* de D – et deux telles équations locales $f,g \in \mathcal{M}^*(U)$ décrivent le même diviseur sur U si elles ont les mêmes zéros et les mêmes pôles, c'est-à-dire si leur quotient $\frac{f}{g}$ est dans $\mathcal{O}^*(U)$. On note additivement l'opération de groupe dans $\mathrm{Div}(X)$.

Soit une hypersurface $H \subset X$, et supposons pour simplifier que H n'intersecte pas le lieu singulier de X. H peut être décrit localement comme le lieu d'annulation d'une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ et ces équations locales se recollent dans $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ pour donner un diviseur. Plus généralement, on peut associer un diviseur à une somme formelle $\sum_i n_i H_i$ [1] de telles hypersurfaces.

1. On appelle *diviseur de Weil* une telle somme.

Si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X et $f_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$ sont des équations locales pour D, alors on peut construire un fibré en droites $L = [D]$ en prenant pour fonctions de transition $g_{ij} := \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$. On note son faisceau de sections holomorphes par $\mathcal{O}(D)$ ou $\mathcal{O}(L)$ [2] et son faisceau de sections méromorphes par $\mathcal{M}(D) = \mathcal{O}(D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$. Comme les f_i satisfont $f_i = g_{ij} f_j$, elles définissent une section méromorphe $f \in \mathcal{M}(D)$.

À l'inverse, étant donné un fibré en droites L et une section méromorphe $s \in \Gamma(\mathcal{M}(L))$ non identiquement nulle, on peut obtenir un diviseur $(s) \in \mathrm{Div}(X)$ de la façon suivante : Sur un ouvert U où $L|_U \simeq \mathbb{C} \times U$ est trivial, on peut représenter s par une fonction méromorphe $s' \in \Gamma(U,\mathcal{M}^*)$. Comme le quotient de deux telles fonctions $s' \in \Gamma(U,\mathcal{M}^*)$ et $s'' \in \Gamma(V,\mathcal{M}^*)$ sur leur intersection appartient à $\Gamma(U \cap V,\mathcal{O}^*)$, on a une section $(s) \in \Gamma(\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) = \mathrm{Div}(X)$ bien définie par le fait que $(s)|_U$ est l'image sous $\mathcal{M}^* \to \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ des sections s' obtenues comme ci-haut.

Dans le cas particulier où L est trivial, la section s'identifie à une fonction $f \in \Gamma(\mathcal{M}) \simeq \Gamma(\mathcal{M}(L))$ et le diviseur obtenu est également l'image de f par $\Gamma(\mathcal{M}^*) \to \Gamma(\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$. On appelle *diviseur principal* un diviseur ainsi obtenu d'une fonction méromorphe.

Définition 1.2.2. Deux diviseurs D, D' sont dits *linéairement équivalents* si leur différence est un diviseur principal, c'est à dire s'il existe une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(X)$ telle que $D = D' + (f)$. On note alors $D \sim D'$.

On peut montrer que si D et D' sont linéairement équivalents, alors $[D]$ et $[D']$ sont isomorphes. On a également $[D+D'] \simeq [D]\otimes[D']$. Les classes d'isomorphisme

---

2. Le contexte précisera si D est un diviseur ou un fibré en droites (et donc $\mathcal{O}(D)$ un faisceau) ou si $D \subseteq X$ est un ouvert (et donc $\mathcal{O}(D)$ un groupe de sections). On privilégiera dorénavant la notation $\Gamma(U,\mathcal{F})$ pour éviter toute confusion.

de fibrés en droites avec le produit tensoriel forment un groupe appellé *groupe de Picard* et noté $\mathrm{Pic}(X)$, que l'on peut identifier au groupe des diviseurs modulo équivalence linéaire.

Si X est une variété lisse de dimention n, il y a un fibré en droite naturellement associé à X : la n-ième puissance extérieure du fibré cotangent holomorphe $\bigwedge^n T^*(X)$, dont les sections sont les n-formes holomorphes.

Définition 1.2.3. On appelle *diviseur canonique* un diviseur K_X tel que $[K_X] \simeq \bigwedge^n T^*(X)$

Soit $L = [D]$ un fibré en droites. Pour chaque point $p \in X$, on a une fonction

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{O}(L)) &\to L_p \\ s &\mapsto s(p) \end{aligned}$$

et, après identification de L_p à $\mathbb{C}$, une forme linéaire $\theta_p \in \Gamma(\mathcal{O}(L))^*$. Si on utilise un isomorphisme $L_p \simeq \mathbb{C}$ différent, la forme linéaire obtenue est un multiple scalaire de θ_p. Si $\theta_p = 0$ (c.-à.-d $s(p) = 0$ pour tout $s \in \Gamma(\mathcal{O}(L))$, ou encore $p \in D'$ pour tout diviseur tel que $[D'] = L$), on dit que p est un *point de base* de D. Si $\theta_p \neq 0$, on peut associer un point $\varphi_L(p) \in \mathbb{P}(\Gamma(\mathcal{O}(L))^*)$ à p. Si D n'a pas de point de base (on dit alors que D est *libre*), l'association $p \mapsto \varphi_{[D]}(p)$ définit un morphisme

$$\varphi_D : X \to \mathbb{P}(\Gamma(\mathcal{O}(L))^*) \simeq \mathbb{P}^N.$$

Plus généralement, tant que $\Gamma(\mathcal{O}(D))$ est non vide, on a une application rationnelle $\varphi_D : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ non-définie sur les points de base de D.

Définition 1.2.4. Soit D un diviseur.

— On dit que D est *effectif* s'il peut être partout réprésenté par une fonction holomorphe (pour un diviseur de Weil $\sum n_i C_i$, cela correspond à ce que tous les coefficients soient positifs).

— On écrit $D \leq D'$ si $D' - D$ est effectif.

— On dit que D est *très ample* si φ_D est un isomorphisme de X sur son image.

— On dit que D est *ample* si un multiple positif de D est très ample.

Remarque 1.2.5. $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathrm{Div}(X)$.

L'ensemble $\mathbb{P}(\Gamma(\mathcal{O}([D]))$ s'identifie à l'ensemble des diviseurs effectifs linéairements équivalents à D, que l'on note également $|D|$. Le codomaine de φ_D peut donc s'identifier à l'espace projectif dual $|D|^*$ que l'on peut aussi décrire comme l'ensemble des sous-espaces de codimension 1 dans $|D|$. On obtient alors une description alternative de $\varphi_D(p)$ comme l'ensemble des diviseurs de $|D|$ qui passent par p.

Lorsque l'ensemble des points de base de D est de codimension 1, les diviseurs dans $|D|$ ont un facteur commun. Soit F le plus grand diviseur tel que $F \leq D'$ pour tout $D' \in |D|$ et $M = D - F$. Alors $|D| = |M| + F$ et l'ensemble des points de base de $|M|$ est de codimension au moins 2. L'application $\varphi_M : X \dashrightarrow |M|^* \simeq |D|^*$ étend φ_D. On appelle M et F la partie *mobile* et *fixe* de D, respectivement.

1.3 Cohomologie

Soit

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \to 0$$

une suite exacte de faisceaux. Puisque $\Gamma(\ker(f)) = \ker(f(X))$, la suite

$$0 \to \Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{G}) \to \Gamma(\mathcal{H})$$

est exacte. Cependant, comme nous avons remarqué précédemment, $\Gamma(\mathcal{G}) \to \Gamma(\mathcal{H})$ n'est pas surjectif en général. Pour quantifier le manque de surjectivité, on introduit les *groupes de cohomologie* $\mathrm{H}^p(\mathcal{F})$ pour $p \in \mathbb{N}$, dont on peut trouver une construction dans (Hartshorne, 1997, ch. III, §2) ou (Voisin, 2007, ch. 4). Les principales propriétés des groupes $\mathrm{H}^p(\mathcal{F})$ sont :

— $\mathrm{H}^0(\mathcal{F}) \simeq \Gamma(\mathcal{F})$.

— À un morphisme de faisceau $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ on associe une série de morphismes $\mathrm{H}^p(f) : \mathrm{H}^p(\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{G})$.

— Pour chaque suite exacte courte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \to 0$$

il existe des morphismes $\delta : \mathrm{H}^p(\mathcal{H}) \to \mathrm{H}^{p+1}(\mathcal{F})$ tels que la *suite exacte longue de cohomologie*

$$\cdots \to \mathrm{H}^{p-1}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^p(\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathrm{H}^p(f)} \mathrm{H}^p(\mathcal{G}) \xrightarrow{\mathrm{H}^p(g)} \mathrm{H}^p(\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{p+1}(\mathcal{F}) \to \cdots$$

soit exacte.

— Si X est un espace localement contractible (une variété lisse, par exemple) et G un groupe abélien, alors la cohomologie du faisceau constant de fibre G sur X coïncide avec la cohomologie singulière à valeurs dans G.

Dans le cas particulier où $\mathcal{F}$ est le faisceau de sections d'un fibré en droites $L = [D]$, on écrit

$$\mathrm{H}^p(D) = \mathrm{H}^p(L) := \mathrm{H}^p(\mathcal{F})$$

par abus de notation.

Dans la plupart des cas qui nous concernent, les groupes de cohomologie sont naturellement des espaces vectoriels complexes de dimension finie. On note leur dimension $h^p(\mathcal{F}) = \dim \mathrm{H}^p(\mathcal{F})$. On note aussi

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p h^p(\mathcal{F})$$

lorsque cette somme est finie et on appelle $\chi(\mathcal{F})$ la *caractéristique d'Euler* de $\mathcal{F}$.

On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ est *acyclique* si $\mathrm{H}^p(\mathcal{F}) = 0$ pour $p > 0$. Si on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{A}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{d_1} \cdots$$

où les $\mathcal{A}_i$ sont acycliques, on peut calculer les $\mathrm{H}^p(\mathcal{F})$ comme la cohomologie du complexe

$$\Gamma(\mathcal{A}_0) \xrightarrow{\Gamma(d_0)} \Gamma(\mathcal{A}_1) \xrightarrow{\Gamma(d_1)} \cdots$$

c'est-à-dire $\mathrm{H}^p(\mathcal{F}) = \ker(\Gamma(d_p))/\operatorname{im}(\Gamma(d_{p-1}))$. Notons une classe particulière de faisceaux acycliques :

On commence par définir les sections de $\mathcal{F}$ sur un sous-ensemble $Y \subseteq X$ quelquonque comme la limite directe

$$\Gamma(Y,\mathcal{F}) := \varinjlim_{U \supseteq Y} \Gamma(U,\mathcal{F})$$

et pour $U \supseteq Y$, on définit le morphisme de restriction $\Gamma(U,\mathcal{F}) \to \Gamma(Y,\mathcal{F})$ comme étant le morphisme canonique $\Gamma(U,\mathcal{F}) \to \varinjlim_{U \supseteq Y} \Gamma(U,\mathcal{F})$.

Définition 1.3.1. On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ est *mou* si pour tout ensemble fermé F, la restriction $\Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(F,\mathcal{F})$ est surjective.

Théorème 1.3.2. *Soit X un espace séparé et paracompact. Alors tout faisceau mou sur X est acyclique.*

Démonstration. (Godement, 1973, p. 174)

□

Parmi les exemples de faisceaux mentionés dans la section 1.1, les faisceaux $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{A}^p$ et $\mathcal{A}^{p,q}$ sont mous : on peut utiliser une partition de l'unité pour étendre une section définie sur un ensemble fermé à l'espace tout entier. On a la suite exacte

$$0 \to \Omega^p \to \mathcal{A}^{p,0} \to \mathcal{A}^{p,1} \to \cdots$$

qui nous donne l'isomorphisme $\mathrm{H}^q(\Omega^p) \simeq \mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X)$ où $\mathrm{H}^{p,\cdot}_{\bar\partial}(X)$ est la cohomologie du complexe

$$\Gamma(\mathcal{A}^{p,0}) \to \Gamma(\mathcal{A}^{p,1}) \to \cdots$$

la différentielle étant donnée par $\bar\partial$.

Théorème 1.3.3 (Décomposition de Hodge). *Soit X une variété projective lisse. La dimension de $\mathrm{H}^n(X,\mathbb{C})$ comme espace vectoriel complexe est finie et*

$$\mathrm{H}^n(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X)$$
$$\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X) \simeq \overline{\mathrm{H}^{q,p}_{\bar\partial}(X)}$$

On appelle *nombres de Hodge* les nombres $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^q(\Omega^p) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X)$ et *nombres de Betti* les nombres $b_n = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^n(X,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{H}^n(X,\mathbb{R})$. On note

$$e(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$$

la *caractéristique d'Euler topologique*. On appelle l'*irrégularité* de X le nombre $q := h^{1,0} = h^{0,1}$, *genre géomértique* le nombre $p_g := h^{n,0} = h^0(K_X)$, où $n = \dim X$, et *m-ième plurigenre* le nombre $P_m = h^0(mK_X)$.

1.4 Théorie d'intersection

Soit X surface projective. On peut définir sur $\mathrm{Div}(X)$ un produit d'intersection ayant les propriétes suivantes :

— Si $C \subset X$ est une courbe irréductible[3], alors $C \cdot D = \deg \mathcal{O}(D)|_C$.

— $D \cdot D'$ est bilinéaire, symétrique et ne dépend que des classes d'équivalence linéaires de D et D'.

3. Rappelons que l'on peut considérer une hypersurface dans X – c'est à dire une courbe puisque $\dim(X) = 2$ – comme un diviseur.

— Lorsque D et D' sont effectifs et n'ont pas de composantes en commun, $D \cdot D'$ est le nombre de points d'intersections, comptés avec multiplicité. En particulier, si $D \cdot D' = 0$, alors $D \cap D' = \varnothing$.

Définition 1.4.1. On dit que D est *nef* si $D \cdot D' \geq 0$ pour tout diviseur effectif D'. On dit que D et D' sont *numériquement équivalents* si $D \cdot C = D' \cdot C$ pour tout autre diviseur C. On note $D \equiv D'$ l'équivalence numérique.

Sur une variété complexe, on a la suite exacte suivante, appelée *suite exacte exponentielle* :

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

La suite exacte longue associée contient

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{O}^*) \xrightarrow{0} \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{O}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{O}^*) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{Z}) \to \cdots$$

Le morphisme $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}^*) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{Z})$ s'annule parce que $\mathbb{C} \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{O}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}^*) \simeq \mathbb{C}^*$ est surjectif. On a un isomorphisme $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{H}^1(\mathcal{O}^*)$ qui, à un fibré en droites trivialisé localement sur les ouverts d'un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ et décrit par les fonctions de transitions $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$, associe la classe représentée par le cocycle de Čech (g_{ij}). On appelle *groupe de Néron-Severi* l'image de $\mathrm{Pic}(X)$ dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z})$ et on le note $\mathrm{NS}(X)$. Le produit d'intersecion dans $\mathrm{Div}(X)$ correspond via $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{NS}(X) \subseteq \mathrm{H}^2(\mathbb{Z})$ au cup-produit dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z})$. Le noyau $\mathrm{Pic}^0(X) = \ker(\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{NS}(X))$ peut s'identifier à $\mathrm{H}^1(\mathcal{O})/\mathrm{H}^1(\mathbb{Z})$. Par l'exactitude de $\mathrm{NS}(X) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{C}) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{O}) = \mathrm{H}^{0,2}$ et la symétrie de Hodge, l'image de $\mathrm{NS}(X)$ est contenue dans $H^{1,1}$.

Théorème 1.4.2 (Critère de Nakai-Moishezon). *Soit X une surface projective et $D \in \mathrm{Div}(X)$. Alors D est ample si et seulement si $D^2 > 0$ et $D \cdot C > 0$ pour toute courbe irréductible $C \subset X$.*

Démonstration. (Hartshorne, 1997, p. 365)

□

Théorème 1.4.3 (Théorème de l'indice de Hodge). *Soit X une surface projective et H un diviseur ample. Si $D \not\equiv 0$ et $D \cdot H = 0$, alors $D^2 < 0$.*

Démonstration. (Hartshorne, 1997, p. 364)

□

Définition 1.4.4. Soit C une courbe irréductible. Son *genre géometrique* g_C est $\mathrm{H}^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}})$ où $\tilde{C}$ est la désingularisation de C.

Théorème 1.4.5 (Formule du genre). *Soit X une surface projective lisse et $C \subset X$ une courbe irréductible. Alors on a*

$$2g_C - 2 \leq C(K_X + C)$$

avec égalité si et seulement si la courbe est lisse.

Démonstration. Le cas pour les courbes lisses est une conséquence de la formule d'adjonction (Griffiths et Harris, 1994, p. 147). Le cas général suit en éclatant les singularités de C dans X.

□

Théorème 1.4.6 (Théorème d'annulation de Kodaira). *Si X est une variété projective lisse et H un diviseur ample, alors*

$$\mathrm{H}^i(K_X + H) = 0 \text{ pour } i > 0.$$

Démonstration. (Griffiths et Harris, 1994, p. 154)

□

Théorème 1.4.7 (Dualité de Serre). *Si X est une variété projective lisse de dimension n, alors pour tout diviseur D nous avons*

$$\mathrm{H}^q(D) = \mathrm{H}^{n-q}(K_X - D).$$

Démonstration. (Hartshorne, 1997, ch. III, §7)

□

Théorème 1.4.8 (Théorème de Riemann-Roch pour les courbes). *Soit X une courbe lisse de genre g et $D = \sum_{p \in X} n_p p$ un diviseur de degré $\deg D = \sum n_p$. Alors*

$$\chi(D) = \chi(\mathcal{O}_X) + \deg D = 1 - g + \deg D.$$

Théorème 1.4.9 (Théorème de Riemann-Roch pour les surfaces). *Soit X une surface projective lisse et $D \in \mathrm{Div}(X)$. Alors*

$$\chi(D) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{D(D - K_X)}{2}.$$

Démonstration. (Griffiths et Harris, 1994, p. 472)

□

Théorème 1.4.10 (Formule de Noether). *Soit X une surface projective lisse. Alors*

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{K_X^2 + e(X)}{12}$$

où $e(X)$ est la caractéristique d'Euler topologique de X.

Démonstration. (Griffiths et Harris, 1994, ch. 4, §6)

□

Théorème 1.4.11 (Théorème de Lefschetz sur les classes (1,1)). *Soit X une variété projective lisse. Alors*

$$\mathrm{NS}(X) = \mathrm{H}^{1,1}(X) \cap \mathrm{H}^2(\iota)\left(\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})\right),$$

où $\mathrm{H}^2(\iota) : \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(X,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{1,1}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$ *est l'application venant de l'inclusion* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$.

Démonstration. (Griffiths et Harris, 1994, p. 163)

□

1.5 Autres résultats

Théorème 1.5.1 (Critère de contraction de Castelnuovo). *Soit X une surface projective lisse et $E \subset X$ une courbe. Alors il existe un morphisme $\varphi : X \to Y$ vers une surface lisse telle que $\varphi(E) = p$ est un point et $\varphi : X \setminus E \to Y \setminus \{p\}$ est un isomorphisme si et seulement si E est rationnelle et $E^2 = -1$.*

Démonstration. (Griffiths et Harris, 1994, p. 476)

□

Par la formule du genre, un critère de contraction équivalent est $K_X \cdot E < 0$ et $E^2 < 0$. On appelle φ l'éclatement de Y en p et E la courbe exceptionelle de l'éclatement. Réciproquement, si on a une surface Y et $p \in Y$, on peut construire une surface $\tilde{Y}$ et un morphisme $\pi : \tilde{Y} \to Y$ tel que $E = \pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^1$, π est un isomorphisme hors de E, $\mathrm{Pic}(\tilde{Y}) = \mathrm{Pic}(Y) \oplus \mathbb{Z}E$ et $E^2 = -1$. Par le théorème de prolongement de Hartogs, on a $h^0(\mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = h^0(\mathcal{O}_Y)$. Plus généralement, on a une égalité semblable pour tout faisceau décrit localement par des fonctions holomorphes. D'où

$$h^{i,0}(\tilde{Y}) = h^{i,0}(Y), \qquad P_i(\tilde{Y}) = P_i(Y)$$

Deux surfaces X, Y sont birationelles si et seulement si il existe une surface Z et des morphismes $Z \to X$, $Y \to X$ qui sont des compositions d'éclatements. Donc P_i, $q = h^{1,0}$ et $p_g = h^{2,0}$ sont des invariants birationels.

Soit X une variété lisse. L'intégration sur les chaînes identifie $\mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z})$ à un réseau $\Lambda \subset \mathrm{H}^0(\Omega^1)^*$. Si on fixe un point $x_0 \in X$, la formule

$$x \mapsto \left(\omega \mapsto \int_{x_0}^{x} \omega\right)$$

donne une forme linéaire bien définie modulo Λ. On a donc un morphisme vers le tore complexe $\mathrm{Alb}(X) := X \to \mathrm{H}^0(\Omega^1)^*/\Lambda$ de dimension $h^{1,0} = q$. On a $\mathrm{H}^0(\Omega^1(X)) = \mathrm{H}^0(\Omega^1(\mathrm{Alb}(X)))$ par construction. $\mathrm{Alb}(X)$ est le tore dual à $\mathrm{Pic}^0 = \mathrm{H}^1(\mathcal{O})/\mathrm{H}^1(\mathbb{Z})$.

Théorème 1.5.2 (Variété d'Albanese). *Si X est projective, alors* $\mathrm{Alb}(X)$ *l'est aussi. Tout morphisme $X \to A$ vers une variété abélienne admet une factorisation $X \to \mathrm{Alb}(X) \to A$ unique à translation près.*

Démonstration. (Griffiths et Harris, 1994, p. 331)

□

On appelle *variété abélienne* un tore complexe projectif et *variété d'Albanese de X* la variété $\mathrm{Alb}(X)$.

Théorème 1.5.3 (Théorème de Tsen). *Soit X une surface lisse et $\pi : X \to C$ un morphisme lisse (c'est-à-dire dont la différetielle est de rang maximal partout) vers une courbe lisse tel que chaque fibre est isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Alors π admet une section $\sigma : C \to X$.*

Démonstration. (Hartshorne, 1997, p. 369)

□

Théorème 1.5.4 (Factorisation de Stein). *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés. Alors f admet une factorisation*

$$X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$$

où les fibres de f' sont connexes et celles de g sont finies. Si X est lisse, alors Y' est normale.

Démonstration. (Hartshorne, 1997, p. 280)

□

Définition 1.5.5. Soit X une variété lisse. Si $|nK_X|$ est non vide pour au moins un $n > 0$, on définit la *dimension de Kodaira* de X, notée $\kappa(X)$, par

$$\kappa(X) := \max \dim \varphi_{nK_X}(X).$$

Si $|nK_X|$ est toujours vide, alors on definit $\kappa(X) = -\infty$.

La dimension de Kodaira a les propriétés suivantes :

— $\kappa(X) = -\infty$ si et seulement si $h^0(nK_X) = 0$ pour tout n.

— $\kappa(X) = 0$ si et seulement si $h^0(nK_X) \leq 1$ pour tout n.

— Pour k entre 1 et $\dim X$, $\kappa(X) = k$ si et seulement si il existe une constante C telle que $h^0(nK_X) \sim Cn^k$.

— Les courbes de dimension de Kodaira $-\infty$, 0 et 1 sont les courbes rationnelles, elliptiques et de genre $g > 1$, respectivement.

Conjecture 1.5.6 (Conjecture d'Iitaka $C_{m,n}$). *Soit X et Y des variétés projectives lisses de dimension m et n, respectivement, et $f : X \to Y$ un morphisme surjectif. Alors pour X_s une fibre générique de f, on a*

$$\kappa(X_s) + \kappa(Y) \leq \kappa(X).$$

Théorème 1.5.7 ($C_{2,1}$). *Le cas $m = 2$, $n = 1$ de la conjecture d'Iitaka est vrai.*

Démonstration. (Barth *et al.*, 1984, p. 111)

□

CHAPITRE II

THÉORÈMES DE MORI

2.1 Cône de Mori-Kleiman

Définition 2.1.1. On appelle *1-cycle* une combinaison linéaire entière formelle de courbes irréductibles.

Dans le cas particulier des surfaces, un 1-cycle est la même chose qu'un diviseur de Weil.

Soit X une variété projective. Le produit d'un diviseur D avec une courbe irréductible C défini par $D \cdot C = \deg[D]|_C$ s'étend linéairement à une forme bilinéaire entre diviseurs et 1-cycles. Deux diviseurs D et D' sont dits numériquement équivalents si $D \cdot C = D' \cdot C$ pour tout 1-cycle. On définit similairement l'équivalence linéaire pour les 1-cycles.

Définition 2.1.2. On note $\mathrm{N}^1(X)$ le groupe $\mathrm{Div}(X) \otimes \mathbb{R}/\equiv$ des diviseurs à coefficients réels modulo équivalence numérique. De même, on note $\mathrm{N}_1(X)$ le groupe des 1-cycles à coefficients réels modulo équivalence numérique.

On a donc par construction de $\mathrm{N}^1(X)$ et $\mathrm{N}_1(X)$ une forme bilinéaire for non dégénérée

$$\mathrm{N}^1(X) \times \mathrm{N}_1(X) \to \mathbb{R}$$

qui nous permet de voir $\mathrm{N}^1(X)$ et $\mathrm{N}_1(X)$ comme espaces duaux l'un de l'autre. Dans le cas des surfaces, c'est tout simplement le produit sur $\mathrm{N}^1(X) \simeq \mathrm{N}_1(X)$ induit par le produit d'intersection des diviseurs. On appelle la dimension de $\mathrm{N}^1(X)$ le *nombre de Picard de* X et on le note $\rho(X)$. Par le théorème de l'indice de Hodge, le produit d'intersection sur $\mathrm{N}^1(X)$ est de signature $(1, \rho(X)-1)$. Comme ce produit correspond au cup-produit sur $H^{1,1}$ via l'application $\mathrm{N}^1(X) \to \mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{R} \subseteq \mathrm{H}^{1,1}$ et que celui-ci est également non-dégénéré (Griffiths et Harris, 1994, pp. 125-126), $\mathrm{N}^1(X) \to \mathrm{H}^{1,1}$ est injective, d'où $\rho(X) \leq h^{1,1}$ et $\mathrm{N}^1(X) = \mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{R}$. Si de plus $h^{2,0} = h^{0,2} = 0$, alors

$$\rho(X) = \dim \mathrm{N}^1(X) = \operatorname{rang} \mathrm{NS}(X) = \operatorname{rang} \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) = \dim \mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}) = h^{1,1},$$

la troisième égalité découlant du théorème de Lefschetz (1.4.11).

Définition 2.1.3. Soit $\mathrm{NE}(X)$ le cône dans $\mathrm{N}_1(X)$ engendré par les 1-cycles effectifs. Le *cône de Mori-Kleiman* est l'adhérence $\overline{\mathrm{NE}(X)}$.

Remarque 2.1.4. Si on note $\mathrm{Nef}(X) \subset \mathrm{N}^1(X)$ le cône engendré par les diviseurs nefs (c.-à-d. tels que $D \cdot C \geq 0$ pour toute courbe irréductible) on a que

$$\mathrm{Nef}(X)^* = \overline{\mathrm{NE}(X)}, \qquad \overline{\mathrm{NE}(X)}^* = \mathrm{Nef}(X).$$

Théorème 2.1.5 (Critère de Kleiman). *Soit D un diviseur sur X. Alors D est ample si et seulement si $D \cdot C > 0$ pour tout $C \in \overline{\mathrm{NE}(X)} \setminus \{0\}$.*

Remarque 2.1.6. Ceci identifie le cône ample $\mathrm{Ample}(X) \subset \mathrm{N}^1(X)$ comme étant l'intérieur de $\mathrm{Nef}(X)$. Puisque l'auto-intersection d'un diviseur ample est positive, on a $D^2 \geq 0$ pour D nef.

2.2 Théorème du cône de Mori

La preuve des principaux résultats de cette section sont tirés de (Andreatta, 2005) et/ou (Buhren, 2012), avec quelques détails supplémentaires pour clarifier.

Théorème 2.2.1 (Théorème «*Base Point Freeness*» (BPF)). *Soit X une surface et D un diviseur nef, mais non ample. S'il existe un nombre rationnel $\epsilon > 0$ tel que $D - \epsilon K_X$ est ample, alors mD est libre pour $m \gg 0$.*

Démonstration. Nous séparons la preuve en trois cas :

Cas 1 : $D^2 > 0$.

Alors il existe une courbe irréductible C telle que $C \cdot D = 0$, car sinon D serait ample par le critère de Nakai-Moishezon (1.4.2). D'où $C^2 < 0$ par le théorème d'index de Hodge (1.4.3) et $(D - \epsilon K_X) \cdot C = -\epsilon K_X \cdot C > 0$ par Nakai-Moishezon encore. C est donc une courbe (-1). Soit $\varphi : X \to X_1$ sa contraction et $D_1 := \varphi_*(D)$.

Alors D_1 est encore nef avec $D_1^2 > 0$ et $D_1 - \epsilon K_{X_1} = \varphi_*(D - \epsilon K_X)$ est ample. Si D_1 n'est pas ample, on peut trouver une autre courbe (-1) à contracter pour obtenir $\varphi_1 : X_1 \to X_2$. On continue la suite de contractions $f = \varphi_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi : X \to X_1 \to \cdots \to X_n$ jusqu'à ce $D_n := f_*(D)$ soit ample, ce qui doit arriver à terme puisque le nombre de Picard $\rho(X_i)$ diminue de 1 à chaque contraction. Si m est assez grand pour que mD_n soit très ample (donc *a fortiori* libre), $mD = f^*(mD_n)$ est libre également.

Cas 2 : $D^2 = 0, D \not\equiv 0$.

Par Nakai-Moishezon, on a

$$D \cdot K_X = -\epsilon^{-1} D(D - \epsilon K_X) < 0$$

et on peut vérifier que

$$mD - K_X = \epsilon^{-1}(D - \epsilon K_X) + (m - \epsilon^{-1})D$$

est ample pour $m \gg 0$. Le théorème d'annulation de Kodaira (1.4.6) nous donne alors $h^i(mD) = 0$ pour $i > 0$, d'où, par Riemann-Roch (1.4.9) :

$$h^0(mD) = \chi(mD) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2} mD(mD - K_X) \sim Cm$$

pour $C = -\frac{1}{2}D \cdot K_X > 0$. En particulier, $\dim |mD| > 0$ pour $m \gg 0$. Fixons $l > 0$ tel que $\dim |lD| > 0$

Soit $|M|$ et F les parties libre et fixe du système linéaire $|lD|$, respectivement. M est effectif (et $|M|$ ne se réduit pas à un point) et sans composante fixe, donc nef, ce qui implique que

$$0 \leq M^2 \leq M(M+F) \leq lM \cdot D \leq l(M+F)D \leq l^2 D^2 = 0,$$

d'où $M^2 = M \cdot F = F^2 = 0$. Deux diviseurs distincts de $|M|$ n'ont aucun point en commun puisque $|M|$ est sans composante fixe et $M^2 = 0$. Donc M est sans point fixe et définit un morphisme $\varphi_M : X \to |M|^* \simeq \mathbb{P}^{\dim |M|}$. Si $\varphi_M(X)$ était un point, alors M serait trivial et $\dim |M| = 0$, ce qui n'est pas le cas. Si $\varphi_M(X)$ était une surface, alors en prenant une section hyperplane H de $\varphi_M(X)$, on aurait

$$M^2 = (\deg \varphi_M) H^2 = (\deg \varphi_M)(\deg \varphi_M(X)) > 0.$$

Donc $\varphi_M(X)$ est une courbe. Soit

$$X \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} \varphi_M(X)$$

la factorisation de Stein de $\varphi_M(X)$. W est une courbe normale (donc lisse) et puisque $M \cdot F = 0$, F est contenu dans les fibres de f. Soit $C \in \mathrm{Div}(X)$ la somme des fibres contenant F. Par construction, on a $C = f^*(\sum_{P \in W} a_P P)$ où $a_P \geq 0$ est le minimum tel que $C - F$ est effectif. Aussi, les fibres de φ_M, étant (co-)homologues, sont numériquement équivalentes, d'où $C \cdot F = M \cdot F = 0$, $C^2 = 0$.

Supposons que $F \neq C$. Le diviseur $C - F$ a son support strictement inclus dans celui de C car sinon au moins un des a_P ne serait pas minimal. Puisque les fibres de f sont connexes, une des composantes manquantes G intersecte

$C - F$, d'où $G(C - F) > 0$. Si $s > 0$, alors

$$0 \geq (C - F + sG)^2 = (C - F)^2 + 2s(C - F)G + s^2G^2$$
$$= 2G(F + rC)s + O(s^2) > 0,$$

pourvu que s soit suffisament petit. On a une contradiction.

Donc $lD = M + F = f^*(H')$ où $H' = H + \sum_{P \in W} a_P P$. H' est ample puisque $\deg H' = \deg H + \sum a_P > 0$. Donc mD est libre pour $m \gg 0$.

Cas 3 : $D \equiv 0$.

Alors $mD - K_X \equiv -K_X \equiv \epsilon^{-1}(D - \epsilon K_X)$ est ample pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Le théorème d'annulation de Kodaira donne

$$h^0(mD) = h^0((mD - K_X) + K_X) = \chi(mD)$$

et par Riemann-Roch, on a

$$h^0(mD) = \chi(mD) = \frac{1}{2}mD(mD - K_X) + \chi(\mathcal{O}_X)$$
$$= \frac{1}{2}0 \cdot (0 - mK_X) + \chi(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X) = 1.$$

Soit maintenant $C \in |mD|$. Si $C \neq 0$, il existe une section hyperplane H intersectant C transversalement, d'où $H \cdot C > 0$. Or, $C \equiv mD \equiv 0$ est numériquement trivial. Donc $C = 0$ et en particulier est libre.

□

Remarque 2.2.2. La même séparation en trois cas reviendra plusieurs fois dans ce chapitre. On résume les faits essentiels qui interviendront par la suite :

$D^2 > 0$.

X possède une courbe (-1).

$D^2 = 0, D \not\equiv 0$.

Il y a une application de X sur une courbe lisse dont les fibres sont données par la partie mobile du système linéaire $|mD|$ pour $m \gg 0$.

$D \equiv 0$.

D est un élément de torsion de $\mathrm{Div}(X)$. En particulier, le $\mathbb{Q}$−diviseur lui correspondant est nul.

Théorème 2.2.3 (de rationalité). *Soit X une surface où K_X n'est pas nef et soit $H \in \mathrm{Div}(X)$ ample. Soit*

$$t_0 = t_0(H) = \sup \{ t \in \mathbb{R} \,|\, tK_X + H \text{ est nef} \} .$$

Alors t_0 est rationnel et son dénominateur est au plus 3.

Démonstration. Remarquons que $H + tK_X = t(K_X - \frac{1}{t}H)$ n'est pas nef pour t assez grand. Donc $t_0 < \infty$. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ et un nombre rationnel $t_1 > t_0$ tels que $D_1 := n(H + t_1 K_X)$ est effectif, alors pour tout t entre 0 et t_1,

$$D := H + tK_X = (1 - \frac{t}{t_1})H + \frac{t}{nt_1}D_1$$

est une combinaison positive de H et D_1 et est donc aussi effectif, du moins à un multiple près. Donc D ne peut intersecter négativement que ses propres composantes. Par conséquent, D est nef si et seulement si

$$D \cdot \Gamma = H \cdot \Gamma + tK_X \cdot \Gamma \geq 0$$

pour toutes les composantes $\Gamma \subset D$. On obtient donc

$$t_0 = \min_{\Gamma} -\frac{H \cdot \Gamma}{K_X \cdot \Gamma} \in \mathbb{Q}$$

où Γ parcourt les composantes de D_1 telles que $K_X \cdot \Gamma < 0$.

Supposons maintenant que $t_0 \notin \mathbb{Q}$. On veut arriver à une contradiction soit directement, soit en trouvant n et t_1 comme au paragraphe ci-haut. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $m = \lfloor nt_0 \rfloor$ et $\alpha = nt_0 - m \in [0,1[$. Donc $nH + mK_X$ est ample, étant à l'intérieur du cône nef, et $nH + (m+1)K_X$ n'est pas nef. On montrera que $t_1 = \frac{m+1}{n}$ fait l'affaire pour $n \gg 0$, c'est à dire

$$h := h^0(n(H + t_1 K_X) = h^0(nH + (m+1)K_X) \neq 0.$$

Soit $D_0 = H + t_0 K_X \in \mathrm{N}^1(X)$. Par le théorème d'annulation de Kodaira et Riemann-Roch, on a

$$\begin{aligned} h &= \chi(nH + (m+1)K) \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(nH + (m+1)K_X)(nH + mK_X) \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(nD_0 + (1-\alpha)K_X)(nD_0 - \alpha K_X) \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(n^2 D_0^2 + n(1-2\alpha)D_0 K_X - \alpha(1-\alpha)K_X) \end{aligned}$$

Si $D_0^2 > 0$, alors $h > 0$ pour $n \gg 0$.

Si $D_0^2 = 0$ et $D_0 \not\equiv 0$, alors $D_0 \cdot H > 0$ puisque D_0 est nef, mais pas numériquement trivial. Donc $D_0 \cdot K_X < 0$. Pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver n arbitrairement grand et divisible tel que $\alpha = nt_0 \mod 1 > 1 - \epsilon$. En prenant un tel n pour un $\epsilon < \frac{1}{2}$, on obtient $h \sim -D_0 \cdot K_X(1-2\epsilon)n > 0$.

Si $D_0 \equiv 0$, alors $K_X \equiv \frac{-1}{t_0}H$. D'où $t_0 \in \mathbb{Q}$ puisque K_X et H sont des $\mathbb{Q}$-diviseurs.

Il reste à montrer que le dénominateur de t_0 est ≤ 3. D_0 satisfait aux hypothèses du théorème BPF(2.2.1) avec $\epsilon = t_0$. Remarquons que s'il existe une courbe C telle que $D_0 \cdot C = 0$, alors comme on a toujours $H \cdot C > 0$ puisque H est ample, on a $K_X \cdot C = -\frac{1}{t_0} H \cdot C < 0$. Donc on peut isoler t_0 dans $C \cdot D_0 = H \cdot C + t_0 K_X \cdot C = 0$ et obtenir

$$t_0 = \frac{H \cdot C}{-K_X \cdot C}.$$

Reprenons les trois cas de la démonstration du théorème BPF :

Cas 1 : $D^2 > 0$.

Alors il existe une courbe (-1) C avec $D_0 \cdot C = 0$, donc $t_0 = -\frac{H \cdot C}{K_X \cdot C} = H \cdot C$ est un entier.

Cas 2 : $D_0^2 = 0$ et $D_0 \not\equiv 0$.

Alors l'image de φ_{mD_0} est une courbe pour $m \gg 0$. Soit $X \to B$ sa factorisation de Stein et F une fibre générique. Alors $F^2 = D_0 \cdot F = 0$ et $K_X \cdot F < 0$. La formule du genre donne $-K_X \cdot F = 2$. Donc le dénominateur de t_0 est 1 ou 2.

Cas 3 : $D_0 \equiv 0$.

Si $\rho(X) > 1$, alors il existe un diviseur ample H' qui n'est pas un multiple de H et en particulier est linéairement indépendant à K_X dans $\mathrm{N}^1(X)$. Donc $D' := H' + t_0 K_X \not\equiv 0$ doit être couvert par un des deux cas précédents. D'où l'existence d'une courbe C telle que $-K_X \cdot C = 1$ ou 2. Comme on a automatiquement $D_0 \cdot C = 0$ puisque D_0 est numériquement trivial, le dénominateur de $t_0 = \frac{H \cdot C}{-K_X \cdot C}$ est 1 ou 2.

Si $\rho(X) = 1$, alors soit L le générateur positif de $\mathrm{NS}(X)$. H et $-K_X$ sont des multiples positifs de L, disons $H = lL,\ -K_X = kL$ avec $k,l \in \mathbb{N}^*$. Soit $m \geq 1$. Par le théorème d'annulation de Kodaira, on a

$$\chi(K_X + mL) = h_0(K_X + mL) = h_0((m-k)L) = 0$$

lorsque $m < k$ et

$$\chi(K_X + mL) = h_0(K_X + mL) > 0$$

lorsque $m \gg 0$. Donc $\chi(K_X + mL)$, qui est un polynôme en m de degré au plus 2 par Riemann-Roch, n'est pas nul et a au moins $k - 1$ racines. D'où $k \leq 3$, k étant le dénominateur de $t_0 = \frac{l}{k}$.

□

Définition 2.2.4. On appelle le nombre t_0 dans l'énoncé du théorème le *seuil nef* de H.

Définition 2.2.5. Un sous-cône $S \subseteq \overline{\mathrm{NE}(X)}$ est dit *extrémal* si, pour tous $x, y \in \overline{\mathrm{NE}(X)}$ tels que $x + y \in S$, on a $x, y \in S$. Si l'espace engendré par S est de dimension 1, on appelle S une *arête extrémale.*

Si $D \in \mathrm{N}^1(X)$, est tel que $D \cdot C \geq 0$ pour tout $C \in \overline{\mathrm{NE}(X)}$ (D est nef, autrement dit), alors $D^{\perp} \cap \overline{\mathrm{NE}(X)}$ est un sous-cône extrémal, que l'on appelle la *face supportée par D.*

Théorème 2.2.6 (Théorème du cône). *Soit X une surface projective lisse et $\{R_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des arêtes extrémales de $\overline{\mathrm{NE}(X)}$ incluses dans $\overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X<0}$. Alors*

$$\overline{\mathrm{NE}(X)} = \overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X \geq 0} + \sum_{i \in I} R_i$$

De plus, pour tout diviseur ample H et nombre réel $\epsilon > 0$, seulement un nombre fini de R_i intersecte négativement $K_X + \epsilon H$. Autrement dit, les R_i ne peuvent s'accumuler que sur $K_X^{\perp} \subset \mathrm{N}_1(X)$.

Puisque Ample(X) est ouvert, on peut compléter $\{K_X\}$ en une base

$$\{K_X, H_1, \cdots, H_{\rho-1}\}$$

de $\mathrm{N}^1(X)$ où les H_i sont amples. Pour H ample, on note $t_0(H)$ le seuil nef de H.

Lemme 2.2.7. *Soit L un diviseur nef supportant une face $F_L = L^{\perp} \cap \overline{\mathrm{NE}(X)}$ contenue dans $\overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X<0}$. Considérons $\nu L + H_i$ pour chaque i et pour $\nu > 0$. Alors*

i) Considérée comme une fonction en ν, $t_0(\nu L + H_i)$ est croissante, bornée supérieurement et atteint son maximum.

ii) Soit ν_0 plus grand que le point où $t_0(\nu L + H_i)$ atteint son maximum et soit

$$L_i' = 6(\nu L + H_i + t_0(\nu L + H_i) K_X)$$

où $\nu > \nu_0$. Alors L_i' supporte une face $F_{L_i'} \subseteq F_L$.

iii) Si $\dim F_L \geq 2$*, alors il existe* i *et* ν *tels que* $F_{L'_i}$ *soit strictement inclus dans* F_L.

iv) F_L *contient une arête extrémale* $R \subset \overline{\mathrm{NE}(X)}$.

v) Si F_L *est une arête extrémale, et* $z \in F_L \setminus \{0\}$*, alors* $\frac{6H_i \cdot z}{K_X \cdot z} \in \mathbb{Z}$.

vi) Les arêtes extrémales dans $\overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X<0}$ *forment un ensemble discret de demi-droites.*

Remarque 2.2.8. La multiplication par 6 en ii) est pour s'assurer que $L'_i \in \mathrm{Div}(X)$, par le théorème de rationalité.

Démonstration du lemme.

i) Si $\nu_2 > \nu_1$, alors

$$\nu_2 L + H_i + t_0(\nu_1 L + H_i)K_X = (\nu_2 - \nu_1)L + (\nu_1 L + H_i + t_0(\nu_1 L + H_i)K_X)$$

est nef, d'où $t_0(\nu_2 L + H_i) > t_0(\nu_1 L + H_i)$. Si $z \in F_L \setminus \{0\}$, alors puisque $K_X \cdot z < 0$,

$$(\nu L + H_i + tK_X)z = (H_i + tK_X)z < 0$$

pour tout $\nu > 0$ et $t > -\frac{H_i \cdot z}{K_X \cdot z}$. D'où le majorant suivant pour t_0 :

$$t_0(\nu L + H_i) \leq -\frac{H_i \cdot z}{K_X \cdot z}.$$

Le maximum de $t_0(\nu L + H_i)$ est atteint puisque t_0 prend ses valeurs dans l'ensemble discret $\frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z} \subset \frac{1}{6}\mathbb{Z}$.

ii) Soit ν_0 tel que $t_0 = t_0(\nu L + H_i)$ est constant pour $\nu \leq \nu_0$. Alors pour tout $z \in F_{L'_i}$ et $\nu > \nu_0$ on a

$$0 = (\nu L + H_i + t_0 K_X)z = (\nu - \nu_0)L \cdot z + (\nu_0 L + H_i + t_0 K_X)z$$

où L et $\nu_0 L + H_i + t_0 K_X$ sont nefs et $\nu - \nu_0 > 0$. Les deux termes à droite sont donc positifs et le tout ne peut s'annuler que si ceux-ci s'annulent séparément. En particulier, $L \cdot z = 0$. Donc $z \in F_L$

iii) Soit ν assez grand pour que tous les $t_{i,0} = t_0(\nu L + H_i)$ aient atteint leurs maximums respectifs. L'indépendance linéaire des

$$L'_i = 6(\nu L + H_i + t_{i,0} K_X)$$

découle de celle des H_i. L'intersection $\bigcap_i L_i'^{\perp}$ est donc de dimension $\rho - (\rho - 1) = 1$. Puisque $\bigcap_i F_{L'_i} \subseteq \bigcap_i L_i'^{\perp}$, au moins un des $F_{L'_i}$ doit être strictement inclus dans F_L.

iv) On peut répéter la procédure décrite en iii) jusqu'à obtenir L' tel que $F_{L'} \subsetneq F_L$ et $\dim F_{L'} = 1$. $R = F_L$ est alors l'arête extrémale que l'on cherche.

v) Si F_L est une arête extrémale, alors l'inclusion $F_{L'} \subsetneq F_L$ ne peut être stricte. D'où

$$(H_i + t_0 K_X)z = (L'_i - \nu L)z = 0$$

pour tout $z \in F_L = F_{L'}$ non nul. Donc

$$t_0 = \frac{H_i \cdot z}{K_X \cdot z} \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}$$

par le théorème de rationalité.

vi) Par v), les points d'intersection de l'hyperplan $\{\, z \in \mathrm{N}_1(X) \mid K_X \cdot z = -1 \,\}$ avec les arêtes extrémales de $\overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X<0}$ forment un ensemble discret. Plus précisément, ils appartiennent au réseau dual à

$$\Lambda = K_X\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\rho-1} 6H_i\mathbb{Z} \subset \mathrm{N}^1(X).$$

□

Démonstration du théorème 2.2.6. Soit

$$B = \overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X\geq 0} + \sum_i R_i$$

où la somme est prise sur les arêtes extrémales de $\overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X<0}$ pouvant s'écrire sous la forme $R_i = F_L$ pour un diviseur L. Montrons d'abord que B est fermé.

Soit $z \in \overline{B}$, Si $z \cdot K_X \geq 0$, alors $z \in B$ car $B_{K_X \geq 0} = \overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X \geq 0}$ est fermé. Si $z \cdot K_X < 0$, alors on peut supposer sans perte de généralité que $K_X \cdot z = -1$ car $z \in B$ si et seulement si $\lambda z \in B$ pour $\lambda > 0$. Et $\{ z \in B \mid K_X \cdot \lambda = -1 \}$ est fermé, étant l'enveloppe convexe d'un ensemble discret. Donc B est bien fermé.

Supposons maintenant que $B \subsetneq \overline{\mathrm{NE}(X)}$. Puisque B est fermé, l'inclusion des cônes duaux $\overline{\mathrm{NE}(X)}^* = \mathrm{Nef}(X) \subsetneq B^* \subset \mathrm{N}^1(X)$ est également stricte. Prenons M à la frontière de $\mathrm{Nef}(X)$ et dans l'intérieur de B^*. Par construction, M supporte une face $F_M = M^{\perp} \cap \overline{\mathrm{NE}(X)}$, celle-ci ne rencontre B qu'à l'origine et donc F_M est dans $\overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X < 0}$. Par construction, si on ajoute un petit multiple de $-K_X$ à M, on obtient un élément $M - \epsilon K_X \in \mathrm{N}^1(X)$ strictement positif sur tout $\overline{\mathrm{NE}(X)} \setminus \{0\}$, donc ample par le critère de Kleiman. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, $M + \epsilon K_X$ cesse d'être nef tout en restant dans l'intérieur de B^*. En remplaçant M par un $\mathbb{Q}$-diviseur suffisamment proche et en prenant $\epsilon \in \mathbb{Q}$, on peut faire de $M - \epsilon K_X$ et $M + \epsilon K_X$ des $\mathbb{Q}$-diviseurs tout en les gardant dans Ample(X) et $(B^*)^\circ \setminus \mathrm{Nef}(X)$, respectivement. Après multiplication par $n \gg 0$, on obtient $H := n(M - \epsilon K_X) \in \mathrm{Div}(X)$ ample et par le théorème de rationalité, un $\mathbb{Q}$-diviseur nef $L := H + t_0 K_X$ à l'intérieur de B^*. La face correspondante F_L n'appartient pas à B et par 2.2.7 iv), elle contient une arête extrémale R, en contradiction avec la définition de B. □

2.3 Théorème de contraction de Mori

Lemme 2.3.1. *Pour toute arête extrémale R de $\overline{\mathrm{NE}(X)}$ rencontrant $\overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X<0}$, il existe un $\mathbb{Q}$-Diviseur nef L_R tel que $L_R \cdot z = 0$ si et seulement si $z \in R$*

Démonstration. On prends

$$B = \overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X \geq 0} + \sum_{\substack{i \in I \\ R_i \neq R}} R_i$$

et on applique la procédure décrite au dernier paragraphe de la preuve du théorème du cône pour trouver L_R. $\square$

Définition 2.3.2. Soit R une arête extrémale de $\overline{\mathrm{NE}(X)}$ rencontrant $\overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X<0}$. Une *contraction extrémale* de R est un morphisme projectif

$$\varphi_R : X \to Z$$

surjectif sur une variété projective et normale Z telle que

i) Pour toute courbe irréductible $C \subset X$, $\varphi_R(C)$ est un point si et seulement si $[C] \in R$.

ii) Les fibres de φ_R sont connexes, c'est à dire $\varphi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Z$.

Théorème 2.3.3 (Théroème de contraction). *Chaque arête extrémale de* $\overline{\mathrm{NE}(X)}$ *appartenant à* $\overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X<0}$ *admet une contraction extrémale* $\varphi_R : X \to Z$. *De plus,* φ_R *est de l'un des trois types suivants :*

i) Z *est une surface lisse est* $\varphi_R : X \to Z$ *est l'éclatement d'un point.* R *est engendré par la courbe exceptionelle :* $R = \mathbb{R}_{>0}[E]$. *De plus,* $\rho(Z) = \rho(X) - 1$.

ii) Z *est une courbe lisse et* $\varphi_R : X \to Z$ *est une fibration lisse de fibre* $\mathbb{P}^1$. R *est engendré par la classe d'une fibre. De plus,* X *est une surface reglée sur* Z *(birationelle à* $Z \times \mathbb{P}^1$*) et* $\rho(X) = 2$.

iii) Z *est un point. Donc* R *est le cône effectif tout entier,* $\rho(X) = 1$ *et* $-K_X$ *est ample. En fait,* $X \simeq \mathbb{P}^2$.

Démonstration. Soit L_R donné par le lemme 2.3.1. Par le critère de Kleiman, $mL_R - K_X$ est ample pour $m \gg 0$. Par le théorème BPF (2.2.1), mL_R est libre pour $m \gg 0$. Soit φ_R la factorisation de Stein de φ_{mL_R}, qui possède toutes les propriétés voulues. On reprends les trois cas dans la preuve du théorème BPF :

Cas i) : $L_R^2 > 0$.

Il existe une courbe (-1) E contractée par φ_R. Puisque R est engendré par $[E]$ et que la seule courbe irréductible numériquement proportionelle à E est E elle même (pour toute autre courbe irréductible C, $E^2 \neq E \cdot C \geq 0$), φ_R ne contracte que E. Par le critère de contraction de Castelnuovo (1.5.1), Z est lisse et φ_R est l'éclatement d'un point.

Cas ii) : $L_R^2 = 0,\ L_R \not\equiv 0$.

On a que $\varphi_R : X \to Z$ est une fibration sur une courbe lisse Z. Soit $F = \sum a_i C_i$ avec $a_i \in \mathbb{N}^*$ une fibre quelconque et soit G une fibre générique lisse. Alors $[F] = [G]$ engendre R qui est extrémale, donc chaque $[C_i] \in R$. Pour toute courbe irréductible C contractée par φ_R (par exemple C_i ou G), on a $C^2 = 0, C \cdot K_X < 0$, d'où $C \cdot K_X = -2$ et $C \simeq \mathbb{P}^1$ par la formule du genre. Ainsi

$$-2 = CK_X = FK_X = \sum a_i(C_iK_X) = -2\sum a_i.$$

On peut en déduire que F a une seule composante irréductible, donc $F \simeq \mathbb{P}^1$ aussi. Donc φ_R est lisse avec $\mathbb{P}^1$ comme fibre et donc admet une section T par le théorème 1.5.3. Il s'en suit que l'application injective $\mathrm{Pic}(Z) \times \mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(X)$, $(L,n) \mapsto \varphi_R^*(L)(nT)$ est un isomorphisme car, pour $L' \in \mathrm{Pic}(X)$ et $n = L' \cdot F$, la restriction de $L'(-nT)$ à chaque fibre de φ_R est trivial (car c'est un fibré de degré 0 sur $\mathbb{P}^1$) et donc il existe $L \in \mathrm{Pic}(Z)$ tel que $L'(-nT) = \varphi_R^* L$. Donc $\rho(X) = 2$. On peut déduire que X est une surface reglée facilement de la surjectivité de

$$\mathrm{H}^0(j) : \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_X(T + lF)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_F(T + lF)) = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$$

pour $l \gg 0$ dans la suite longue exacte de cohomologie associée à la suite courte exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_X(T + (l-1)F) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X(T + lF) \xrightarrow{j} \mathcal{O}_F(T + lF) \to 0,$$

ce qui suit du fait que $\mathrm{H}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = 0$ implique la surjectivité et donc la bijectivité pour $l \gg 0$ de $\mathrm{H}^1(i)$.

Cas iii) : $L_R \equiv 0$.

Alors L_R est nul comme $\mathbb{Q}$−diviseur, donc Z est un point. Ainsi

$$\rho(X) = 1, \ \overline{\mathrm{NE}(X)} = R = \mathbb{R}_+ \text{ et } \mathrm{Ample}(X) = \mathbb{R}_+^*.$$

Comme R rencontre $\overline{\mathrm{NE}(X)}_{K_X<0}$, on a que $-K_X$ est ample et $-K_X \equiv kH$, où $k > 0$ et H est un générateur ample de $\mathrm{Div}(X)/\text{torsion}$. Le théorème d'annulation de Kodaira et la dualité de Serre implique que

$$h^1(\mathcal{O}_X) = h^2(\mathcal{O}_X) = 0$$

et donc $\chi(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X) = 1$. Les nombres de Hodge sont $h^{1,0} = h^{0,1} = h^{2,0} = h^{0,2} = 0$, $h^{1,1} = 1$ (tel que remarqué au début du chapitre, $h^{2,0} = h^{0,2} = 0 \Rightarrow h^{1,1} = \rho(X)$). On a donc

$$b_1(X) = h^{1,0} + h^{0,1} = 0$$
$$b_2(X) = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2} = 1,$$

d'où $e(X) = \sum_{i=0}^4 b_i(X) = 3$. Par la formule de Noether

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{K_X^2(X) + e(X)}{12},$$

on a $K_X^2 = 9$. Puisque $N^1(X)_\mathbf{Z} = N_1(X)_\mathbf{Z}$ modulo torsion, on voit que $H^2 = 1$, $k = 3$ et que $C \in |H|$ implique que $C \simeq \mathbb{P}^1$ par la formule du genre car $(K_X + C)C = -2$. Puisque $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$, $\mathrm{H}^0(\cdot)$ préserve la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(C) \xrightarrow{r} \mathcal{O}_C(C) \to 0.$$

En particulier, $\mathrm{H}^0(r) : \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_X(C)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_C(C))$ est surjectif. Donc toute section globale de $\mathcal{O}_C(C) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ est la restriction d'une section globale de

$\mathcal{O}_X(C)$ à C. Puisque $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)|$ est libre, $|\mathcal{O}_X(C)|$ l'est aussi. Par le théorème de Riemann-Roch,

$$h^0(H) = \chi(H) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{H^2 - HK_X}{2} = 1 + \frac{1+3}{2} = 3.$$

Donc φ_H donne un morphisme $X \to \mathbb{P}(h^0(H)^*) \simeq \mathbb{P}^2$ génériquement injectif (donc birationnel) puisque $H^2 = 1$. Comme $\rho(X) = \rho(\mathbb{P}^2) = 1$, φ_H ne peut pas contracter de courbe et est donc un isomorphisme.

$\square$

CHAPITRE III

CLASSIFICATION DES SURFACES

Le but de ce chapitre est de montrer le résultat suivant.

Théorème 3.0.1 (Enriques). *Soit X une surface minimale projective et lisse. Alors X appartient à l'une des catégories suivantes :*

Type	κ	q	p_g
surfaces rationnelles	$-\infty$	0	0
surfaces irrationnelles reglées	$-\infty$	>0	0
surfaces K3	0	0	1
surfaces d'Enriques	0	0	0
surfaces bielliptiques	0	1	0
surfaces abéliennes	0	2	1
surfaces elliptiques	1		
surfaces de type général	2		

Une surface *rationelle* est une surface birationnelle à $\mathbb{P}^2$.

Une surface *reglée* est une surface birationnelle à $\mathbb{P}^1 \times C$ où C est une courbe. Elle est rationnelle si et seulement si $C \simeq \mathbb{P}^1$.

Une surface *K3* est une surface avec fibré canonique trivial et $q = 0$.

Une surface d'*Enriques* est une surface qui admet un revêtement non ramifié de degré 2 par une surface K3.

Une surface *bielliptique* est une surface de la forme $(B \times F)/G$, où B et F sont des courbes elliptiques et G un groupe fini de transformations qui agit par translations sur B et dont l'action sur F contient un automorphisme non-trivial qui n'est pas une translation.

Une surface *abélienne* est une variété abélienne de dimension 2.

Une surface *elliptique* est une surface qui admet une fibration dont la fibre générique est une courbe elliptique. Elles ne sont pas toutes de dimension de Kodaira 1. Cependant, le théorème affirme que toutes les surfaces avec $\kappa = 1$ sont elliptiques.

Une surface de *type général* est une surface de dimension de Kodaira 2. La classification d'Enriques n'affirme rien en particulier à leur sujet.

Remarquons que les invariants birationnels κ, q et p_g suffisent à distinguer toutes ces classes. Les trois outils principaux pour la démonstration de 3.0.1 sont $C_{2,1}$ (1.5.7), l'application d'Albanese (1.5.2) et le résultat classique suivant d'Enriques, que l'on prouve à l'aide du théorème de contraction de Mori.

Théorème 3.0.2 (Critère de rationalité de Castelnuovo). *Soit X une surface projective lisse. Alors X est rationnelle si et seulement si*

$$q = P_2 = 0.$$

Démonstration. Rappelons d'abord que q et P_2 sont des invariants birationnels. Si X est rationnelle, on a donc

$$q(X) = q(\mathbb{P}^2) = P_2(X) = P_2(\mathbb{P}^2) = 0.$$

Dans l'autre direction, Soit X satisfaisant $q = P_2 = 0$. Soit K_X est nef, soit le théorème de contraction s'applique. On peut supposer X minimale, ce qui exclut le cas i). Il nous reste donc trois cas.

Cas ii) : X est une surface reglée.

Nous avons alors

$$g_B = h^1(\mathcal{O}_B) = h^1(\mathcal{O}_X) = 0$$

où B est la base de la fibration. D'où $B \simeq \mathbb{P}^1$. Donc X est birationnelle à $B \times \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ par le théorème de contraction et donc birationnelle à $\mathbb{P}^2$.

Cas iii) : $X \simeq \mathbb{P}^2$.

X est évidemment rationnelle.

K_X est nef.

Ce cas ne peut pas se produire. En effet, Si $h^1(\mathcal{O}_X) = h^0(2K_X) = 0$, alors $h^0(K_X)$ est également nul, d'où $h^2(\mathcal{O}_X) = 0$ par dualité de Serre. Donc

$$\chi(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X) = 1.$$

Par Serre également, on a $h^2(-K_X) = h^0(2K_X) = 0$, d'où

$$h^0(-K_X) \geq \chi(-K_X) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{-K_X(-K_X - K_X)}{2} = 1 + K_X^2 \geq 1$$

On a donc un diviseur effectif $D \in |-K_X|$ tel que $-D \sim K_X$ est nef. Donc $K_X \sim D = 0$ et

$$h^0(2K_X) = h^0(\mathcal{O}_X) = 1$$

contrairement à l'hypothèse $h^0(2K_X) = 0$.

□

Théorème 3.0.3. *S'il existe une application rationnelle génériquement surjective $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow X$, alors X est rationnelle.*

Démonstration. Soit Y l'adhérence du graphe de f dans $\mathbb{P}^2 \times X$ et Z la désingularisation de Z. Z est une surface rationnelle lisse, donc $q(Z) = h^{1,0}(Z) = P_2(Z) = 0$, et on a un morphisme $g : Z \to X$. Il s'en suit que $q(X) = h^{1,0}(X) = P_2(X) = 0$, car autrement on pourrait obtenir des sections non-nulles de $\Omega^1(Z)$ ou $\mathcal{O}_Z(2K_Z)$ en tirant des formes venant de X via g^*. D'où X rationnelle par Castelnuovo. $\square$

3.1 $\kappa = -\infty$

Cas $q(X) = 0$

Alors X est rationnelle par Castelnuovo.

Cas $q(X) > 0$

Alors l'application $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est non triviale. D'autre part, on ne peut avoir $\dim(\alpha(X)) = 2$ car sinon on aurait une 2-forme non-nulle $\omega \in \mathrm{H}^0(K_{\mathrm{Alb}(X)})$ se tirant à une 2-forme non-nulle $\alpha^*(\omega)$, d'où $P_1 \geq 1$ contrairement à notre supposition $\kappa(X) = -\infty$. Donc l'image de α est une courbe, nécessairement de genre ≥ 1. Après factorisation de Stein, on obtient une application à fibres connexes $X \to C$ vers une courbe de genre ≥ 1. Si X_s est une fibre générique, la conjecture d'Iitaka $C_{2,1}$ dit

$$\kappa(X_s) = \kappa(X_s) + \kappa(C) \leq \kappa(X) = -\infty$$

donc la fibre générique est une courbe rationnelle X est donc une surface reglée par le théorème de Tsen (voir l'argument donné dans le cas ii) du théorème de contraction (2.3.3)).

3.2 $\kappa = 0$

Théorème 3.2.1. *Si X est une surface minimale avec $\kappa(X) \geq 0$, alors K_X est nef et en particulier $K_X^2 \geq 0$. Si $\kappa(X) < 2$, alors $K_X^2 = 0$.*

Démonstration. Si $\kappa(X) \geq 0$, alors il doit exister un diviseur n-canonique effectif $D \in |nK_X|$. Si une courbe irréductible satisfait $C \cdot K_X = \frac{1}{n} C \cdot D < 0$, alors C doit être une de ses composantes irréductibles de D. Si a est le coefficient de C dans D, alors

$$C^2 < C^2 - \frac{1}{a} C \cdot D = -\frac{1}{a} C(D - aC) \leq 0$$

Donc C est une courbe (-1), ce qui contredit la minimalité de X.

Si $K_X^2 > 0$, alors comme $-K_X$ ne peut être $\mathbb{Q}$-effectif non-nul en même temps que K_X, on a par Riemann-Roch

$$h^0(nK_X) \geq \chi(nK_X) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{n(n-1)}{2} K_X^2 \sim \frac{K_X^2}{2} n^2$$

d'où $\kappa(X) = 2$. □

Cas $q(X) = 0$

Puisque X n'est pas rationnelle, on doit avoir $P_2(X) > 0$ par le critère de Castelnuovo. Supposons qu'il existe un diviseur non-nul $D_2 \in |2K_X|$. Alors $h^0(nK_X) = h^2((1-n)K_X) = 0$ pour $n < 0$. Donc par Riemann-Roch, on a

$$\begin{aligned} P_n(X) = h^0(nK_X) \geq \chi(nK_X) &= \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{n(n-1)}{2} K_X^2 \\ &= 1 - q(X) + p_g(X) \geq 1 \qquad (*) \end{aligned}$$

pour $n \geq 2$. D'autre part, $P_n(X) \leq 1$ puisque $\kappa(X) = 0$. Donc $P_n(X) = 1$ pour $n \geq 2$ et $P_1(X) = p_g(X) = 0$, chose nécessaire pour que (*) soit une égalité. Chaque système linéaire $|nK_X|$, pour $n \geq 2$, possède donc un et un seul diviseur effectif $D_n \in |nK_X|$. D_2 et D_3 ont les mêmes composantes puisque $3D_2 = 2D_3 = D_6$. Donc $D := D_3 - D_2 = \frac{1}{2} D_2 \in |K_X|$ est effectif, en contradiction avec $p_g(X) = 0$.

On a donc $2K_X \sim 0$. Si $K_X = 0$, alors X est une surface K3.

Si $K_X \neq 0$, alors considérons le morphisme de fibré en droites

$$f : [K_X] \to [2K_X] \simeq \mathbb{C} \times X$$

donné sur les fibres par $\omega \mapsto \omega \otimes \omega$. Si on identifie l'image de la section triviale $1 \times X$ à X, la restriction de f à la préimage de X donne un revêtement étale – c'est à dire sans ramification – cyclique d'ordre 2

$$\pi = f|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \to X.$$

avec $K_{\tilde{X}} = \pi^*(K_X) \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}$. On a donc $\kappa(\tilde{X}) = 0$ et

$$\begin{aligned} q(\tilde{X}) = 1 + p_g(\tilde{X}) - \frac{e(\tilde{X}) + K_{\tilde{X}}^2}{12} = 2 - \frac{2e(X)}{12} = \\ = 2 - \frac{1}{6}\left(12(1 - q(X) + p_g(X)) - K_X^2\right) = 0 \end{aligned}$$

par la formule de Noether. $\tilde{X}$ est donc une surface K3, ce qui fait de X une surface d'Enriques.

La construction du revêtement $\pi : \tilde{X} \to X$ se généralise. Si on a un fibré en droites $[D]$ dont la n-ième puissance $[D]^{\otimes n} = [nD] \simeq [0]$ est triviale, alors on peut obtenir un revêtement étale cyclique de degré n $f : \tilde{X} \to X$ tel que $f^*D \sim 0$. De plus, si $D = K_X$ est un diviseur canonique, alors $K_{\tilde{X}} = f^*K_X \sim 0$.

Cas $q(X) > 0$

Par la formule de Noether, on a

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X) = \frac{K_X^2 + e(X)}{12} = \frac{e(X)}{12}$$

D'autre part, on a $b_1 = h^{0,1} + h^{1,0} = 2q$ par symétrie de Hodge et

$$e(X) = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i b_i = 2 - 2b_1 + b_2 = 2 - 4q + b_2$$

par dualité de Poincaré. En mettant tout cela ensemble, on obtient

$$8q = 10 + 12p_g - b_2 \leq 22$$

d'où $q \leq 2$, et $q = 2$ implique $p_g = 1$.

Supposons que $q = 2$ et considérons $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$. Si $\alpha(X)$ est une courbe, alors elle est lisse de genre 2. En effet, si N est la normalisation de $\alpha(X)$, alors on peut factoriser α en $X \xrightarrow{\tilde{\alpha}} N \to \mathrm{Alb}(X)$ et on a un morphisme $\mathrm{Alb}(N) \to \mathrm{Alb}(X)$ induit par $N \to \mathrm{Alb}(X)$ et la propriété universelle de la variété d'Albanese. D'autre part, on a également un morphisme $\mathrm{Alb}(X) \to \mathrm{Alb}(N)$, clairement inverse de l'autre, induit par $X \to N \to \mathrm{Alb}(N)$, d'où $\mathrm{Alb}(X) \simeq \mathrm{Alb}(N)$. Comme $N \to \mathrm{Jac}(N) = \mathrm{Alb}(N)$ est un plongement, $\alpha(X) = N$ et $g(\alpha(X)) = \dim \mathrm{Jac}(N) = 2$. $C_{2,1}$ impliquerait alors que la fibre générique de α satisfasse

$$\kappa(F) \leq \kappa(X) - \kappa(\alpha(X)) = -1$$

et est donc rationelle. Mais alors X serait une surface reglée et $\kappa(X) = -\infty$. Donc α est surjective.

Supposons que $K_X \neq 0$. Comme $p_g = 1$, il existe un unique diviseur canonique effectif non-nul $K \in |K_X|$. Soit $K = \sum n_i C_i$ sa décomposition en composantes irréductibles et $K = \sum D_\alpha$ sa décomposition en composantes connexes. On a

$$0 = K^2 = \sum n_i K \cdot C_i.$$

Puisque K est nef, on doit avoir $K \cdot C_i = 0$ pour tout i. Donc

$$0 = C_i \cdot \left(\sum n_j C_j\right) = n_i C_i^2 + \sum_{i \neq j} n_j C_i \cdot C_j,$$

ce qui laisse deux possibilités :

— Si $C_i^2 < 0$ alors $C_i^2 = -2$ et $C_i \simeq \mathbb{P}^1$ par la formule du genre.

— Si $C_i^2 \geq 0$ alors $C_i^2 = C_i \cdot C_j = 0$ et par la formule du genre encore, C_i est une courbe de genre arithmétique 1, soit une courbe elliptique ou une courbe rationelle singulière. De plus, comme C_i n'intersecte aucune autre composante C_j, elle est dans une composante connexe à part.

En résumé, les composantes connexes de K sont soit des courbes elliptiques ou rationnelles singulières (possiblement multiples), soit des chaînes de courbes rationnelles d'auto-intesection -2. Et comme $0 = D_\alpha \cdot K = D_\alpha^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} D_\alpha \cdot D_\beta$, chaque composante satisfait $D^2 = 0$. Comme il n'y a pas de morphisme non-constant de $\mathbb{P}^1$ dans une variété abélienne, toutes les composantes rationelles de K sont écrasées par $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$. D'autre part, comme les composantes connexes de K satisfont $D^2 = 0$, elles ne peuvent être dans le lieu exceptionel de α. Donc toutes les composantes de K sont elliptiques et leurs images par α sont également des courbes elliptiques. En particulier, on a une courbe elliptique $E = \alpha(E') \subset \mathrm{Alb}(X)$. Comme toute application holomorphe entre tores complexes peut être induite par une application affine $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, E est un sous-groupe de $\mathrm{Alb}(X)$ à une translation près. Le quotient $B = \mathrm{Alb}(X)/E$ est une courbe elliptique sur laquelle il y a un morphisme $X \to B$. Soit $X \xrightarrow{f} B' \to B$ sa factorisation de Stein et $b = f(E')$. Puisque $f^*b = kE' \leq kK$ pour un entier $k \geq 0$ et tout diviseur effectif sur une courbe est ample, on a

$$h^0(mkK) \geq h^0(mkE) \geq h^0(mb) \underset{m \to \infty}{\to} \infty$$

en contradiction avec $\kappa(X) = 0$. Donc $K_X \sim 0$. Si on tire un forme volume de $\mathrm{Alb}(X)$ (p. ex. celle induite par $dz_1 \wedge dz_2$ sur $\mathrm{Alb}(X) \simeq \mathbb{C}^2/\Gamma$) sur X via $X \to \mathrm{Alb}(X)$, on obtient une forme holomorphe non-nulle qui ne s'annule nulle part puisque $K_X \sim 0$. Donc la différentielle de α est de rang maximal partout. α est un isomorphisme local, donc étale. X est donc elle-même une variété abélienne (en fait, $X \simeq \mathrm{Alb}(X)$ par la propriété universelle de $\mathrm{Alb}(X)$).

Il reste à traiter le cas où $q = 1$.

Remarquons d'abord que la formule de Noether s'écrit $12\chi(\mathcal{O}_X) = e(X)$ puisque $K_X^2 = 0$. Comme $q > 0$, X admets des revêtements étales cycliques $\pi_m : \tilde{X} \to X$ de degré m arbitraire (on peut s'en convaincre en prenant par exemple le produit fibré $\tilde{X} = X \times_{\mathrm{Alb}(X)} A$ où $A \to \mathrm{Alb}(X)$ est une isogénie de degré m, ou encore la racine m-ième dans L d'une section triviale, où L est un élément d'ordre m dans $\mathrm{Pic}^0(X)$). Si $p_g = 1$, alors

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \frac{e(\tilde{X})}{12} = m\frac{e(X)}{12} = m\chi(\mathcal{O}_X) = m$$

d'où $p_g(\tilde{X}) \geq m$. Étant donné une section $\omega \in \mathrm{H}^0(K_{\tilde{X}})$, on peut construire $\tilde{\omega} = \bigotimes_\sigma \sigma^*\omega \in \mathrm{H}^0(mK_{\tilde{X}})$, le produit étant pris sur les automorphismes de $\pi_m : \tilde{X} \to X$. $\tilde{\omega}$ est clairement invariant pour ces automorphismes et induit donc une section $\omega' \in \mathrm{H}^0(mK_X)$. Si $m \geq 2$, on peut trouver une autre section $\theta \in \mathrm{H}^0(K_{\tilde{X}})$ qui ne s'annule sur aucun point de l'orbite d'un point donné p dans la partie mobile de (ω). La construction précédente nous donne une autre section $\theta' \in \mathrm{H}^0(mK_X)$ qui ne s'annule pas sur $\pi_m(p)$ alors que ω', elle, s'annule. Les deux sections sont donc linéairement indépendantes, d'où $P_m(X) \geq 2$ en contradiction avec $\kappa = 0$.

Donc une surface minimale avec $\kappa = 0$ et $q = 1$ doit nécessairement avoir $p_g = 0$, d'où $\chi(\mathcal{O}_X) = e(X) = 0$. Soit $f : X \to B$ la factorisation de Stein de l'application d'Albanese. La base B et la fibre générique F doivent être des courbes elliptiques par $C_{2,1}$. Par la formule du genre, on a $K_X \cdot F = F^2 + K_X \cdot F = 0$.

Soit $b \in B$, $D_b = f^*(b) \equiv F$ la fibre en b, $D_b = \sum_i n_i C_i$ sa décomposition irréductible et $D_b' = \sum_i C_i$ sa réduction. Puisque $K_X \cdot D_b = 0$ et K_X est nef, on doit avoir $K_X \cdot C_i = 0$ pour tout i. Le même argument que pour le cas $q = 2$ montre alors que D_b' est soit une courbe elliptique, soit une courbe rationelle avec un point double, soit une chaîne de courbes (-2). La caractéristique d'Euler de D_b' est, respectivement, 0, 1 ou 2 (selon le type de singularité), et le nombre n de composantes irréductibles de D_b'. Dans ce dernier cas, on peut déduire $e(D_b') \geq n$

par le fait que $D_b'^2 \leq 0$, une conséquence du théorème de l'indice de Hodge : la forme d'intersection est semi-définie négative sur $(D_b)^\perp \ni D_b'$ (on peut prendre comme complément défini négatif à son noyau $\mathbb{R}D_b$ l'espace $H^\perp \cap D_b^\perp$ où H est ample). Donc

$$0 \geq D_b'^2 = \sum_i C_i^2 + 2\sum_{i<j} C_iC_j = -2n + 2\sum_{i<j} C_iC_j,$$

d'où $\sum_{i<j} C_iC_j \leq n$. $e(D_b')$ est $2n$ moins le nombre de points d'intersection, qui est au plus $\sum_{i<j} C_iC_j$. D'où $e(D_b') \geq n$.

On peut voir à l'aide d'une triangulation de X où les fibres singulières sont des sous-complexes que

$$\sum_{b \in \mathrm{sing}(f)} e(D_b') = e(X) = 0.$$

Donc toutes les fibres sont en fait elliptiques, possiblement multiples. Soient m_b tels que $D_b = m_b D_b'$. Prenons un diviseur pluricanonique effectif $D \in |mK_X|$, avec m le plus petit possible. Comme $K_X|_F$ est trivial sur toutes les fibres par la formule d'adjonction, D est entièrement supporté sur les fibres. On peut donc écrire

$$D = \sum n_b D_b' = \sum \frac{n_b}{m_b} D_b = f^*P$$

où $P = \sum \frac{n_b}{m_b} b$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur sur B. Si $D \neq 0$, alors pour $l \gg 0$, Riemann-Roch sur les courbes donne

$$\mathrm{H}^0(lmK_X) = \mathrm{H}^0(lD) = \mathrm{H}^0(lP) > 1$$

ce qui contredit $\kappa = 0$. Donc $D = 0$ et $[mK_X]$ est trivial. En prenant la racine m-ième dans $[K_X]$ d'une section triviale de $[mK_X]$, on obtient un revêtement étale cyclique $\pi : \tilde{X} \to X$ de degré m (puisqu'on a supposé m minimal) avec $\kappa(\tilde{X}) = 0$ et $p_g(\tilde{X}) = 1$. On a $q(\tilde{X}) > 0$ puisqu'on peut tirer les 1-formes de X à $\tilde{X}$ et $q(\tilde{X}) \neq 1$ puisque $p_g(\tilde{X}) = 1$. Donc $q(\tilde{X}) = 2$ et $\tilde{X}$ est une variété abélienne. $\tilde{X} \to B$ est donc, à un choix d'éléments neutres et/ou une translation près, un morphisme de variétés abéliennes. On peut déjà conclure que $X \to B$ est lisse et localement trivial comme fibration.

Soit $\tilde{F}$ la composante connexe de l'élément neutre dans $\ker(\tilde{X} \to B)$ et soit $\tilde{B} = \tilde{X}/\tilde{F}$. Comme $\tilde{F} = \ker(\tilde{X} \to \tilde{B}) \subseteq \ker(\tilde{X} \to B)$ on a un morphisme $\tilde{B} \to B$ qui identifie B à un quotient de $\tilde{B}$ par un sous-groupe discret. En fait, $\tilde{X} \to \tilde{B}$ est la factorisation de Stein de $\tilde{X} \to B$. Soit F l'image de $\tilde{F}$ dans X. F est une fibre de $X \to B$ et $\tilde{B} \to B$, $\tilde{F} \to F$ sont des revêtements cycliques (donc galoisiens). Comme le quotient de $\tilde{X}$ par un sous groupe de $G := \mathrm{Gal}(\tilde{X}/X)$ agissant par translation est encore une variété abélienne, on peut supposer – quitte à remplacer $\tilde{X}$ par ce quotient – que G ne contient pas de tel éléments.

Un élément de G agit sur $\tilde{B}$ par translation. On peut considérer $\mathrm{Gal}(\tilde{B}/B)$ comme un groupe quotient de G. Par supposition, il n'y a pas d'élément de G qui agit comme l'identité sur $\tilde{B}$ et par translation sur $\tilde{F}$. Il n'y a pas non plus d'élément qui agit comme l'identité sur $\tilde{B}$ et comme un automorphisme non trivial sur $\tilde{F}$, car sinon $\tilde{X}/X$ serait ramifié. Donc $G \simeq \mathrm{Gal}(\tilde{B}/B)$ et $\tilde{F} \simeq F$. On identifie dorénavant F et $\tilde{F}$. Si on fait agir un élément $\sigma \in G$ sur $\tilde{X}$, puis on remet l'élément neutre de $\tilde{X}$ à sa place par translation, alors l'effet net est l'identité sur $\tilde{B}$ et un automorphisme non trivial (à moins que σ soit l'identité) sur F. Ceci donne un morphisme injectif $G \to \mathrm{Aut}(F)$. Rappelons que qu'un automorphisme de $F \simeq \mathbb{C}/\Lambda$ correspond à un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de Λ, et $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ est :

— cyclique d'ordre 6 engendré par $z \mapsto \omega z$ si $\Lambda \simeq \mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z}$, où $\omega = e^{\pi i/3}$,

— cyclique d'ordre 4 engendré par $z \mapsto iz$ si $\Lambda \simeq \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$,

— cyclique d'ordre 2 engendré par $z \mapsto -z$ si Λ est quelquonque.

Donc l'ordre m de G (et aussi l'ordre de K_X comme élément de $\mathrm{Pic}(X)$) est soit 2, 3, 4 ou 6.

Puisqu'un fibré en droites sur $\tilde{X}$ stable par l'action de G induit un fibré en droites sur X, on a une application tr : $\mathrm{Pic}^0(\tilde{X}) \to \mathrm{Pic}^0(X)$ déterminée par le fait que

$$\pi^* \operatorname{tr}(L) = \bigotimes_{g \in G} g^* L.$$

La composition de l'application duale $B \simeq \mathrm{Alb}(X) \to \mathrm{Alb}(\tilde{X}) \simeq \tilde{X}$ avec $\tilde{X} \to B$ est la multiplication par m et l'image $\bar{B}$ de B dans $\tilde{X}$ est invariante sous l'action de G par construction. On a une application

$$\bar{B} \times F \to \tilde{X}$$
$$(z,w) \mapsto z + w$$

de noyau $\{\,(z, -z) \mid z \in \bar{B} \cap F\,\} \simeq \bar{B} \cap F$. C'est une isogénie de degré $\#(\bar{B} \cap F)$, donc en particulier un revêtement galoisien. Comme G et $\mathrm{Gal}(\bar{B} \times F/\tilde{X})$ agissent sur $\bar{B}$ par translation, il en est de même de $\bar{G} = \mathrm{Gal}(\bar{B} \times F/X)$. Nous avons la description voulue de $X = (\bar{B} \times F)/\bar{G}$ comme le quotient d'un produit de courbes elliptiques par un groupe de translations de $\bar{B}$ agissant sur F.

3.3 $\kappa > 0$

Si $\kappa = 1$, alors il existe un système pluricanonique $|nK_X|$ de dimension au moins 1. Soit $|nK_X| = F + |M|$ sa décomposition en parties fixe et mobile. On a $K(F+M) = nK^2 = 0$ puisque $\kappa < 2$, d'où $K \cdot M = K \cdot F = 0$ puisque K est nef. On a

$$0 = nK \cdot M = M(F + M) = M \cdot F + M^2.$$

$F \cdot M \geq 0$, $M^2 \geq 0$ puisque M est effectif et sans partie fixe. Donc $M^2 = 0$. Puisque $|M|$ n'a pas de partie fixe, tout point de base de $|M|$ doit être un point d'intersection de toute paire de membres de $|M|$, mais il n'y a pas de tel point puisque $M^2 = 0$. La factorisation de Stein de φ_M a pour fibres les composantes connexes des membres de $|M|$ et pour image une courbe B. La fibre générique X_b est elliptique par la formule du genre : $X_b^2 + X_b \cdot K_X = 0$.

La classification d'Enriques ne dit rien en particulier à propos des surfaces avec $\kappa = 2$. Il n'y a donc rien à prouver dans ce cas.

BIBLIOGRAPHIE

Andreatta, M. (2005). An introduction to mori theory : The case of surfaces. `http://alpha.science.unitn.it/~andreatt/scuoladott1.pdf`.

Barth, W., Peters, C. et Van de Ven, A. (1984). *Compact complex surfaces*, volume 4 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin.

Beauville, A. (1996). *Complex Algebraic Surfaces.* Cambridge University Press.

Buhren, J. V. (2012). Introduction au programme des modèles minimaux pour les surfaces. `http://www-irma.u-strasbg.fr/~buhren/Recherche/mmp.pdf`.

Godement, R. (1973). *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann, Paris. Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252.

Griffiths, P. et Harris, J. (1994). *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc.

Hartshorne, R. (1997). *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag.

Kleiman, S. L. (1966). Toward a numerical theory of ampleness. *Ann. of Math. (2)*, *84*, 293–344.

Kollár, J. et Mori, S. (1998). *Birational Geometry of Algebraic Varieties.* Cambridge University Press.

Voisin, C. (2007). *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*, volume 76 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge.