JEROME PROULX

LE CALCUL MENTAL AU-DELA DES NOMBRES : CONCEPTUALISATIONS ET ILLUSTRATIONS AVEC LA RESOLUTION D'EQUATIONS ALGEBRIQUES

Abstract. Mental calculations beyond numbers: conceptualization and illustrations about algebraic equations solving. In this paper, I offer an illustration of what doing mental calculations (or mental mathematics) with objects other than numbers can look like. Through examples about algebraic equation solving, I illustrate how this activity made emerge numerous strategies, which can differ from paper-and-pencil work and open up a variety of understandings about what solving an algebraic equation means. The data analyses also offer ways to a better understanding of the nature of the mathematical activity in which solvers engage in this mental mathematics environment, by pointing out the importance of the "entry" into the problem and less on the search for an answer. These considerations put forth the significance of continuing to investigate mental mathematics activities with objects other than numbers for its potential for developing mathematical understandings and strategies, as well as a better understanding of the nature of the mathematical activity that the mental mathematics environment can make emerge.

Résumé. Je présente dans cet article des illustrations de ce que peut signifier faire du calcul mental sur autre chose que des nombres, dans ce cas-ci en algèbre. Par le thème choisi – la résolution d'équations algébriques – je montre la richesse qu'une entrée par le calcul mental peut provoquer au niveau de l'émergence d'une variété de stratégies, qui peuvent différer des stratégies en contexte papier-crayon et ouvrir sur une diversité de compréhensions de ce que peut signifier résoudre une équation algébrique. Les analyses conduites offrent de plus des pistes de compréhensions du phénomène de résolution en calcul mental, pointant sur l'importance de l'entrée dans le problème et moins sur la recherche d'une réponse à proprement parler. Ces considérations font ressortir l'intérêt de continuer à étudier le calcul mental sur d'autres objets mathématiques que les nombres, pour son potentiel pour développer des compréhensions et stratégies mathématiques et mieux comprendre la nature de l'activité mathématique que ces activités permettent de faire émerger.

Mots-clés. Calcul mental, résolution d'équations algébriques, stratégies mathématiques, processus de résolution

---

Introduction

Pour souligner la pertinence et l'importance du calcul mental dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, Thompson (1999, dans Threlfall, 2002), à travers une revue de la littérature, souligne quatre raisons spécifiques :

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 18, p. 61-90.

- La plupart des calculs faits dans la vie de tous les jours sont faits mentalement.
- Le travail du calcul mental fait développer le sens du nombre chez les apprenants.
- Le travail du calcul mental fait développer l'habileté à résoudre des problèmes.
- Le travail du calcul mental accroit le succès dans les calculs écrits.

Ces raisons soulignent les retombées élargies du travail du calcul mental, alors que les habiletés qui y sont développées touchent plus que la seule activité du calcul mental et développent des habiletés et compréhensions mathématiques beaucoup plus larges ; on peut parler alors d'habiletés de résolution de problèmes, de sens du nombre, du réinvestissement dans les calculs écrits et même dans la vie de tous les jours. Pour Butlen et Pézard (1992), le travail du calcul mental permet même de faire avancer des compréhensions mathématiques que le calcul écrit traditionnel n'arrive que peu à faire car souvent trop cadré, avec l'apprentissage de techniques et d'algorithmes qui sont suffisamment performants et qui ne font pas ressortir le besoin de penser plus loin qu'eux. Ces constats se retrouvent de plus chez les élèves eux-mêmes, qui affirment que la pratique du calcul mental les aide dans leurs résolutions subséquentes de problèmes (Butlen et Pézard, 2000).

On retrouve donc dans différentes études des retombées importantes de la pratique du calcul mental en classe : sur les habiletés de résolution de problèmes (Trafton, 1986 ; Leutzinger et al., 1986 ; Butlen et Pézard, 1992, 2000), sur le développement du sens du nombre (Boule, 2008 ; Butlen et Pézard, 1992, 2000 ; Leutzinger et al., 1986 ; Murphy, 2004 ; Heirdsfield et Cooper, 2004), sur les habiletés papier-crayon et les algorithmes standard (Butlen et Pézard, 1992, 2000) et même sur les habiletés en estimation (Heirdsfield et Cooper, 2004 ; Schoen et Zweng, 1986). Ainsi, en plus du caractère stimulant souvent documenté chez les élèves concernant leur investissement dans ce type d'activités (voir Butlen et Pézard, 1992 ; Carlow, 1986), ce qui apparaît le plus convaincant est la presque unanimité des résultats obtenus dans les travaux faisant intervenir le calcul mental. Ainsi, qu'on soit aux États-Unis (e.g., Schoen et Zweng, 1986; Reys et Nohda, 1994), en France (Butlen et Pézard, 1992, 2000 ; Douady, 1994), au Japon (Reys et Nohda, 1994), ou en Angleterre (Murphy, 2004 ; Thompson, 2000, 2009; Threlfall, 2002, 2009), et souvent suite à des approches qui diffèrent les unes des autres, on note que ce type de travail mathématique bonifie le sens du nombre chez les apprenants, fait développer des stratégies diverses et adaptables de calcul et enrichit les habiletés de résolution de problèmes.

Ce convaincant corpus de recherches sur les bénéfices du calcul mental au niveau de l'apprentissage mathématique des élèves amène à se demander si le travail du calcul mental ne peut pas être pensé de façon plus large ou simplement étendu vers d'autres objets de l'enseignement des mathématiques. Dans cette lignée, Rezat (2011) souligne que le travail du calcul mental a presque toujours été centré sur les nombres naturels et l'apprentissage des mathématiques au niveau élémentaire. Ce chercheur suggère alors de regarder le calcul mental sur les décimaux, travaillés dans les premières années du secondaire. Malgré sa critique, Rezat continue toutefois à travailler sur les « nombres ». Mes travaux de recherche m'amènent à vouloir mieux comprendre ce que peut signifier le travail du calcul mental sur d'autres objets mathématiques, par exemple le volume des solides, l'aire des figures, l'algèbre, les fonctions, la trigonométrie, ainsi qu'à analyser le potentiel de ce type de travail pour la compréhension et l'activité mathématiques. Dans cette optique, une étude exploratoire autour de la résolution d'équations algébriques en contexte de calcul mental a été réalisée, avec un groupe de 12 étudiants universitaires. Cet article fait état des résultats de cette étude.

1. Objectifs et apports de cette recherche

Un premier objectif de recherche, pour cette étude exploratoire, est d'investiguer un contexte de calcul mental pour la résolution d'équations algébriques et d'y étudier son potentiel et son intérêt pour faire émerger des façons de faire, de comprendre et de résoudre. L'analyse conduite dans cette étude, discutée et détaillée à la section 5, illustre le potentiel du calcul mental pour la résolution d'équations algébriques, à travers l'émergence d'une variété de façons de résoudre, façons qui se distinguent des approches usuelles de résolution en contexte papier-crayon. Ces façons de résoudre font aussi ressortir une diversité de compréhension sur ce que signifie « résoudre une équation algébrique », ouvrant sur un éventail de significations riches pour le travail algébrique.

De plus, à travers cette richesse sur les façons de faire, de comprendre et de résoudre en contexte de résolution d'équations algébriques, l'analyse offre des pistes de compréhensions sur le phénomène de résolution en contexte de calcul mental. Ceci touche à un deuxième objectif de recherche, soit de mieux comprendre le processus de résolution en calcul mental et son fonctionnement. Au cœur de ces pistes de compréhensions se situe le fait que les solveurs, en contexte de calcul mental, sont davantage axés sur la recherche d'une façon d'entrer dans le problème que de trouver la réponse ; une situation qui rend le contexte de calcul mental très différent du contexte papier-crayon.

Ces résultats sont présentés dans cet article à travers diverses sections. Dans un premier temps, je clarifie ce que j'entends par le calcul mental sur d'autres objets mathématiques que les nombres, pour ensuite développer sur la perspective théorique enracinant cette étude. Après avoir cadré théoriquement le travail, et discuté des enjeux méthodologiques, j'analyse des stratégies produites en contexte de calcul mental sur la résolution d'équations algébriques pour (1) montrer la richesse des compréhensions déployées dans ce contexte et (2) caractériser la nature de l'activité mathématique mobilisée. Cette analyse permet de mieux comprendre le potentiel de ce type de travail et l'activité mathématique qu'il permet de mobiliser, mais surtout ouvre sur le développement d'une conceptualisation du processus de résolution en contexte de calcul mental. La conclusion offre différentes pistes et questions sur le calcul mental avec d'autres objets que les nombres et le besoin de (continuer à) les explorer par la recherche.

2. Clarifications conceptuelles : que signifie faire du calcul mental au-delà des nombres ?

Les travaux sur le calcul mental sont majoritairement sur les nombres. Ceci peut paraître sans grande surprise, puisque l'expression utilisée est « calcul mental » (ou en anglais *mental arithmetic*, *mental calculations*, etc.). Toutefois, l'expression anglophone *mental mathematics* semble avoir un certain potentiel pour ouvrir plus large la visée de ce type de travaux vers d'autres objets mathématiques, ce qui est au cœur de l'étude présentée ici. Bien qu'il n'existe pas de définition formelle de l'expression « mathématiques mentales » dans la littérature de recherche, les travaux de recherche antérieurs sur le calcul mental offrent des conceptualisations fort utiles pour s'intéresser aux « mathématiques mentales », qui englobent, selon Thompson (2009), plus que le calcul mental[1]. En effet, à travers la diversité de définitions existant dans la littérature, Hazelkemp (1986, p. 116) en offre une qui résume ce qui est généralement entendu par calcul mental : « the computing of exact answers without paper and pencil or other computational (material) aids, usually with non-traditional mental processes (strategies) ». Cette définition, quoique pensée en termes de nombres et de *mental arithmetic*, s'adapte à un travail sur d'autres objets mathématiques (tels algèbre, géométrie, fonctions, etc.) et cadre bien avec le thème de cet article, soit la résolution mentale d'équations algébriques. On peut donc définir les mathématiques mentales comme étant la détermination de réponses à une question mathématique à l'aide d'une résolution mentale, sans papier-crayon ou toute autre aide matérielle.

Pour aider à développer une compréhension plus fine de ce que signifie faire du calcul mental au-delà des nombres, on retrouve dans la littérature diverses déclinaisons sur la nature des stratégies utilisées par les apprenants pour résoudre des problèmes de calcul mental, et qui ont un potentiel d'adaptation pour d'autres objets mathématiques[2]. Une première déclinaison concerne le « calcul

---

[1] Thompson (2009) ne définit toutefois pas ce qu'il entend par *mental mathematics*, et affirme uniquement que les *mental calculations* sont un « subset of mental mathematics ».

[2] Ces déclinaisons proviennent, entre autres, de la synthèse des travaux de Boule (2008), Butlen et Pézard (1990, 1992, 2000), Kahane (2003) et MJER (2008). Quoique proposés ici en termes de « *versus* », les types de stratégies présentées ne se veulent pas en

réfléchi/raisonné », qui implique chez l'apprenant l'élaboration de ses propres stratégies de résolution, souvent non-standard et contingentes/adaptées au type de problème, *versus* le « calcul automatisé » qui implique l'accès immédiat à un résultat, soit par l'utilisation de faits/résultats mathématiques connus ou de procédures (standard) mémorisées. Une deuxième déclinaison concerne le calcul approché, basé sur l'estimation et les approximations pour démarrer un raisonnement d'ordre de grandeur, *versus* l'application d'un algorithme ou un fait pour obtenir une réponse exacte. Finalement, une troisième déclinaison concerne le calcul rapide, qui exige une rapidité d'exécution pour trouver la réponse. Type de stratégie souvent critiquée, car pouvant être perçue uniquement comme un travail de vitesse au détriment du développement du sens (MJER, 2008), elle peut aussi être vue comme aidant au développement de nouvelles méthodes de résolution puisqu'elle force, dans un souci d'économie, l'abandon de méthodes plus lentes (les procédures standard, par exemple) et donc moins efficaces pour la tâche (Butlen et Pézard, 1990) ; on pense par exemple à une lecture globale du nombre, obligeant à quitter le dénombrement un à un ou forçant des regroupements plus intéressants pour aller plus vite, voire le recours à diverses propriétés. Ces déclinaisons de stratégies montrent une diversité d'entrées possibles pour résoudre en contexte de calcul mental et peuvent aider à la compréhension de ce que peut signifier ce travail au-delà des nombres. Ces dimensions sont réinvesties plus bas dans l'analyse des données, montrant par le fait même leur portée sur d'autres objets que les nombres.

3. Ancrage théorique pour conceptualiser l'activité mathématique en calcul mental

Les travaux récents sur le calcul mental soulignent le besoin de mieux comprendre et mieux conceptualiser le processus de développement de stratégies en calcul mental. Confronté à une variété importante de stratégies créatives et une insatisfaction au niveau de leur « classification » dans des catégories précises, certains chercheurs ont critiqué l'idée que les solveurs font un « choix » de stratégie à partir d'un coffre à outils rempli de stratégies déjà élaborées pour résoudre un problème de calcul mental. En particulier, Threlfall (2002, 2009) insiste plutôt sur l'émergence organique et le caractère contingent des stratégies en fonction des tâches *et* du solveur (ce qu'il comprend, préfère, connait, a comme expérience, est confiant de, etc., voir aussi Butlen & Pézard, 2000; Rezat, 2011). Cette idée d'émergence est aussi présente chez Murphy (2004), qui discute les travaux de Lave (1988) en cognition située où les stratégies mentales sont conceptualisées comme étant des réponses flexibles, émergentes et adaptées, liées à un certain contexte.

---

opposition, mais sont plutôt contrastés pour mieux les comprendre et les comparer.

Parce qu’elle s’intéresse aux notions d’émergence, d’adaptation et de contingence, des aspects de la théorie de l’enaction (des travaux de Maturana, 1987, 1988 ; Maturana & Varela, 1992 ; Varela, 1999 ; Varela, Thompson & Rosch, 1991) sont utilisés pour enraciner cette étude au niveau de la caractérisation du processus de développement de stratégies en contexte de calcul mental. En particulier, la distinction proposée par Varela (1996) entre la « résolution de problèmes » et la « pose de problèmes » offre une entrée préliminaire pour mieux comprendre l’émergence et la génération de stratégies et du processus de résolution.

Pour Varela, la notion de « résolution de problèmes » implique que des problèmes sont déjà présents, en attente d’être résolus, indépendamment de nous. Varela explique que, plutôt, nous spécifions les problèmes que nous rencontrons, à travers le sens que nous donnons au monde qui nous entoure et notre compréhension des choses, ce qui nous amène à reconnaitre les choses d’une façon spécifique. En un mot, *nous* posons les problèmes. Nous ne « choisissons » pas ou ne « prenons » pas les problèmes comme s’ils existaient « à l’extérieur » de nous, de façon objective et indépendante de nos actions : plutôt, nous les faisons émerger.

> La plus importante faculté de toute cognition vivante est précisément, dans une large mesure, de *poser* les questions pertinentes qui surgissent à chaque moment de notre vie. Elles ne sont pas prédéfinies mais *enactées*, on les *fait-émerger* sur un arrière-plan, et les critères de pertinence sont dictés par notre sens commun, d’une manière toujours contextuelle. (Varela, 1996, p. 91)

Les problèmes que nous rencontrons et les questions que nous posons font autant partie de nous que de notre environnement : ils émergent de notre interaction avec lui. Nous interprétons les évènements qui nous entourent comme des éléments à aborder, nous les voyons comme des problèmes à résoudre. Nous n’agissons pas sur des situations préexistantes, notre interaction avec notre environnement crée les situations possibles sur lesquelles agir. Les problèmes que nous résolvons, alors, sont implicitement pertinents pour nous, car nous permettons à ceux-ci d’être des problèmes pour nous. Évidemment, certains éléments de l’environnement qui déclenchent des réactions chez certaines personnes ne déclenchent pas les mêmes réactions chez d’autres.

Si cette perspective est acceptée pour le calcul mental, on ne peut pas tenir pour acquis, tel que René de Cotret (1999) l’explique, que des propriétés instructionnelles sont présentes dans les tâches offertes et que celles-ci vont déterminer les réactions des solveurs. Heirdsfield et Cooper (2004) et Rezat (2011) ont en effet montré l’occasionnelle futilité en calcul mental de varier le type de problèmes ou les variables didactiques pour encourager l’utilisation de stratégies spécifiques. Ces stratégies émergent de l’interaction du solveur et de la tâche, influencées par les deux comme le dit Davis (1995) : pas uniquement reliées à la tâche (sa nature), ni uniquement reliées au solveur (ses expériences, ses habitudes, ses succès, sa confiance, sa compréhension de la tâche, etc.), mais aux deux. Ces stratégies sont donc « nouvelles », d'une certaine façon. Non pas que rien auparavant n'ait été fait de la sorte, mais plutôt qu'elles sont générées *pour* cette tâche, taillées sur mesure pour elle, reflétant ainsi autant le solveur que la tâche. Tel que l'explique Threlfall (2002) :

> As a result of this interaction between noticing and knowledge each solution 'method' is in a sense unique to that case, and is invented in the context of the particular calculation – although clearly influenced by experience. It is not learned as a general approach and then applied to particular cases. […] The 'strategy' (in the holistic sense of the entire solution path) is not decided, it emerges. (p. 42)

Dans cette perspective, le solveur ne « choisit » pas une stratégie sur la base d'un groupe prédéterminé de stratégies, mais plutôt s'engage dans la tâche d'une façon spécifique et développe une stratégie taillée pour la tâche. Les stratégies ne sont pas prédéterminées, mais générées pour les tâches rencontrées, émergeant de l'interaction d'avec la tâche lorsque le solveur s'y engage. Ainsi, le solveur *transforme* la tâche mathématique, la fait sienne; ce qui est souvent différent des intentions du concepteur de la tâche, comme l'explique René de Cotret (1999). Ce faisant, le solveur génère une stratégie développée pour la tâche « posée », pour résoudre « sa » tâche. C'est cette entrée dynamique sur le processus de résolution qui enracine cette étude sur le calcul mental, en particulier autour des questions sur l'émergence de stratégies de résolution.

4. Considérations méthodologiques : le contexte de l'étude exploratoire

Je présente dans ce qui suit l'analyse d'une activité donnée à l'intérieur d'un cours universitaire pour (douze) futurs enseignants de mathématiques du secondaire. Lors du chapitre centré sur l'algèbre et la résolution d'équations, un bloc d'une heure à été consacré à la résolution mentale d'équations algébriques. Les équations algébriques données à résoudre étaient des équations habituelles et ordinaires, rencontrées dans le travail quotidien en algèbre au début du secondaire. Il a été proposé une certaine variété d'équations, de formes $\mathrm{A}x + \mathrm{B} = \mathrm{C}$, $\mathrm{A}x + \mathrm{B} = \mathrm{C}x + \mathrm{D}$, $\mathrm{A}x/\mathrm{B} = \mathrm{C}/\mathrm{D}$, $\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0$, avec diverses variantes.

L'organisation de la classe s'apparente à celle proposée par Douady (1994), portant une attention particulière à installer un climat respectueux qui permet le partage et l'écoute des solutions entre les apprenants : (1) Le formateur offre oralement *et* par écrit (sur acétate) la tâche à résoudre. (2) Les étudiants écoutent, réfléchissent et résolvent mentalement la tâche. (3) Au signal du formateur, les étudiants écrivent uniquement leur réponse sur une feuille de papier. (4) Le formateur demande aux étudiants d'expliquer oralement et en détails leur solution (bonne ou mauvaise) et comment ils y sont parvenus (et dans certains cas de venir devant la classe pour l'expliquer au tableau). (5) Le formateur, si les réponses sont expliquées oralement, prend soin de noter clairement celles-ci sur transparent (projeté) un après l'autre. (6) Les solutions offertes doivent être justifiées et les autres étudiants sont invités à questionner ou intervenir s'ils ne sont pas complètement convaincus de la solution ou ne la comprennent pas. (7) Le formateur invite les autres étudiants qui ont résolu la tâche différemment (ou qui pensent à la résoudre différemment) à se manifester et à offrir leur solution. (8) Les différentes solutions sont comparées, autant que possible, et le formateur et les étudiants discutent leurs efficacités, leurs liens, leurs avantages/inconvénients, les possibilités qu'elles offrent pour résoudre d'autres problèmes, etc. Les données recueillies pour l'analyse proviennent des transparents sur lesquels les stratégies des étudiants ont été notées, ainsi que des notes « à chaud » et des réflexions issues de la séance.

L'analyse veut illustrer la nature des stratégies déployées en contexte de résolution mentale en algèbre, et tout le potentiel que ceci recouvre, pour y comprendre et caractériser la nature de l'activité mathématique mobilisée. À l'instar de Douady (1994), il ne s'agit pas de faire un rapport de recherche complet sur les apprentissages réalisés chez les étudiants, ni d'aller voir le réinvestissement à long terme que les étudiants en font sur d'autres objets mathématiques, mais bien de comprendre le sens et la fonctionnalité des outils utilisés (i.e. le calcul mental en algèbre), et particulièrement d'explorer leur potentiel. À travers les exemples/illustrations de stratégies développées par les étudiants, l'intention est (1) d'explorer la richesse et le potentiel d'une entrée en calcul mental en algèbre et (2) de caractériser la nature de l'activité mathématique mobilisée. Ce contexte avec douze étudiants à la formation des maîtres, qui ont eu dans leur parcours une expérience avec une variété de problèmes, est fort riche pour arriver à étudier le potentiel d'un contexte de calcul mental et voir ce qui peut émerger comme stratégies dans ce contexte. En ce sens, le choix de travailler avec des futurs enseignants, semi-experts, est méthodologiquement important. En effet, ces futurs enseignants n'en sont pas à leurs débuts en algèbre et ne sont donc pas en contexte nouveau de résolution ou en familiarisation avec les objets algébriques, évitant des blocages et difficultés reliées à l'algèbre comme sujet. Ce contexte permet que les solveurs puissent « entrer » dans les problèmes et tenter de les résoudre. Ceci pourrait être très différent avec des élèves ne connaissant pas bien l'algèbre, qui en resteraient possiblement au sens des lettres algébriques par exemple et n'entreraient pas dans la résolution, ne permettant pas d'avoir accès aux résolutions des solveurs.

Ainsi, cette analyse, il est important de le souligner, en est une pour étudier un phénomène et n'a pas pour but d'offrir des prescriptions et de montrer comment l'approche est ou n'est pas « bonne » et de quelle façon elle permet de mieux faire apprendre la résolution d'équations chez l'élève du secondaire ; en particulier parce que ce travail se fait avec des semi-experts, qui ont déjà amplement résolu des équations dans leur parcours académique et n'en sont pas à leurs débuts[3]. Cette analyse n'a pas non plus comme intention de tracer un parallèle entre ce qui s'est passé avec ces futurs enseignants et ce qui peut se produire en classe avec des élèves du secondaire, même si les analyses en cours pour d'autres objets mathématiques suggèrent que la nature des activités de ces deux groupes en contexte de calcul mental est fort similaire (e.g. sur les opérations sur les fonctions, voir Proulx, 2012). Ce travail, et ce qui le prolonge, pourra dans le futur déboucher dans la classe, mais à ce stade ce travail sur la résolution algébrique en contexte de calcul mental veut regarder ce que ce contexte *peut* produire comme activité mathématique et tenter de la caractériser, ainsi que de penser à de futures pistes de recherche et éléments à étudier.

Au niveau de l'analyse des données, les déclinaisons de stratégies (calcul réfléchi/raisonné, automatisé, approché, exact, rapide) sont mises à profit pour caractériser les entrées utilisées et leur diversité/richesse, ainsi que de voir leurs apports possibles à l'analyse de travaux sur d'autres objets que les nombres. De plus, puisque cette analyse dépend de la nature des stratégies déployées et que celles-ci sont relatives à la résolution d'équations algébriques, l'approche du réinvestissement de concepts théoriques disponibles de Desgagnés (1998) est utilisée, ici avec les concepts issus de la littérature scientifique en didactique de l'algèbre, dans le but de guider et d'enrichir l'analyse conduite sur les stratégies déployées. À titre d'exemple, les procédures inverses de Hewitt (1996), Nathan et Koedinger (2000) et Filloy et Rojano (1989), la transformation d'équations d'Arcavi (1994), les équations équivalentes de Mary (2003), pour ne nommer que celles-ci, ont été réinvesties lorsqu'elles étaient pertinentes dans l'analyse. Ainsi, à travers cette analyse, l'intérêt est porté sur l'activité mathématique par les façons d'entrer dans la résolution des tâches proposées, et le sens donné à la résolution d'équations algébriques (Bednarz, 2001; Bednarz & Janvier, 1992).

5. Illustrations des entrées sur la résolution mentale d'équations algébriques

Dans ce qui suit, parce que le but est d'offrir des illustrations la manière selon laquelle ces tâches ont été résolues, et parce que leur résolution a fait émerger un nombre considérable d'entrées et que l'espace ne me permet pas de traiter tous les exemples, je présente un exemple pour une équation de la forme $\mathrm{A}x + \mathrm{B} = \mathrm{C}x + \mathrm{D}$ et un exemple pour une équation de la forme $\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0$. Je montre ensuite, dans le cas d'équations de la forme $\mathrm{A}x/\mathrm{B} = \mathrm{C}/\mathrm{D}$ et ses variantes, l'éventail des stratégies qui sont ressorties à travers les diverses équations posées et je centre la

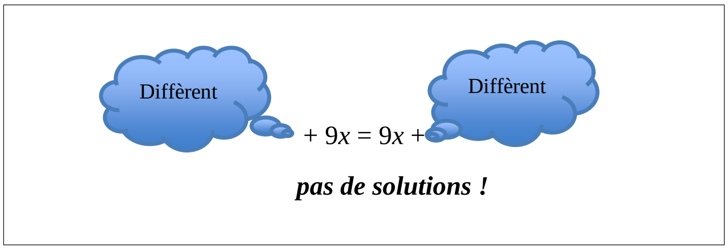
[3] La littérature scientifique regorge toutefois d'études questionnant le niveau de connaissances et de compréhensions algébriques des (futurs) enseignants de mathématiques du secondaire (e.g. Bryan, 1999 ; Hitt, 1998 ; Schmidt et Bednarz, 1997 ; Van Dooren, Verschaffel et Onghena, 2003 ; voir la recension des écrits faite dans Mewborn, 2003, et Proulx et Bednarz, 2010)

discussion sur quelques-unes en particulier. À travers cette diversité de stratégies déployées, une attention particulière est portée sur les différentes significations accordées à la résolution d'équations algébriques.

5.1. Résolution de l'équation 5x + 6 + 4x + 3 = –1 + 9x

Lors de la résolution de l'équation 5x + 6 + 4x + 3 = –1 + 9x, trois stratégies différentes sont ressorties : (1) lecture globale de l'équation, (2) manipulations algébriques standard, et (3) essai numérique.

(1) *Lecture globale de l'équation*. Une première entrée, affirmant qu'il n'y a pas de solutions, est qu'on peut rapidement voir 9*x* d'un côté comme de l'autre de l'équation, et qu'on voit aussi rapidement, sans les additionner, que les nombres restants ne donnent pas une réponse égale, ce qui amène à voir aussitôt qu'il n'y a pas de solution satisfaisant l'équation à résoudre, car aucun *x*, quel qu'il soit, ne peut faire en sorte que des nombres différents deviennent égaux.



On retrouve dans cette stratégie une idée de lecture rapide et globale de l'équation, permettant d'attester rapidement de la réponse, sans entrer dans les manipulations algébriques ou procédures standard de résolution. On peut voir ce type de réponse comme étant provoqué, tel que l'indiquent Butlen et Pézard (1990), par l'empressement de trouver une réponse, un *calcul rapide*, sans passer par une procédure plus lourde de résolution algébrique. Cette entrée rappelle aussi ce que Arcavi (1994) nomme la lecture du sens des symboles ou l'inspection *a priori* des symboles, soit une sensibilité pour analyser une expression algébrique et prendre des décisions avant d'entrer dans les processus algorithmiques de résolution. Il donne, entre autres, l'exemple de l'équation $(2x + 3)/(4x + 6) = 2$, qui n'a pas de solution parce que, quelle que soit la valeur de *x*, le numérateur vaut la moitié du dénominateur, rendant futile la mise en route d'étapes supplémentaires de résolution.

La procédure de lecture globale pour 5x + 6 + 4x + 3 = –1 + 9x a eu un effet intéressant lors de la résolution d'autres tâches, par exemple $x + x^2 = 2x^2 + 5 - x^2$. Face à cette équation, plusieurs ont tenté de « voir » ce qui se répétait de chaque côté de l'égalité, soit en *x* et en x^2, dans le but de ne pas les considérer dans la résolution. Ainsi, on peut voir que chaque côté possède un x^2 et qu'on peut en faire abstraction, amenant à dire $x = 5$. D'une certaine façon, le « bruit » provoqué par l'exposant 2 dans x^2, de la même façon que le bruit provoqué par la présence d'une fraction dans l'exemple $x + \frac{x}{4} = 6 + \frac{x}{4}$, a été évité, au profit d'une reconnaissance des répétitions non importantes pour la résolution. En fait, confrontés à $x + \frac{x}{4} = 6 + \frac{x}{4}$, plusieurs étudiants ont aussi rapidement reconnu que $x = 6$, par une lecture globale de l'équation (Bednarz et Janvier, 1992).

(2) *Manipulations algébriques standard.* Une deuxième entrée sur la résolution de cette équation a été de la traiter de façon similaire à ce qui peut se faire en contexte papier-crayon, soit de soustraire $9x$ à droite et à gauche pour arriver à $9 = –1$ ou à $10 = 0$. Dans un premier temps, cette approche a amené l'étudiant à affirmer que la réponse est « infinité de solutions », alors qu'il a « éliminé » tous les x et donc qu'il n'en reste plus pour orienter la détermination de la réponse. Toutefois, la contradiction obtenue, soit $10 = 0$ ou $9 = –1$ l'a amené après coup à réaliser que ceci signifie qu'il n'y a pas de solution.

$$
\begin{array}{c}
-9x \qquad\qquad -9x \\
5x + 6 + 4x + 3 = –1 + 9x \\
9 = –1 \\
10 = 0
\end{array}
$$

~~infinité~~ ! ***…. pas de solutions !***

Il y a une différence intéressante, mis à part le fonctionnement davantage standard de résolution, entre les stratégies (1) et (2). En effet, la stratégie (2) fonctionne plus par automatismes, un certain *calcul automatisé*, pour l'étudiant : enlever de chaque côté le x ; absence de x donc « infinité de solutions » ; contradiction sur la réponse ($9 = –1$ ou $10 = 0$) donc correction et affirmation de « pas de solution ». La stratégie (1), avec les explications données par l'étudiant, est davantage une lecture globale de l'équation amenant à ne pas considérer (et non pas à « enlever ») ce qui est répété des deux côtés de l'égalité et à regarder si ce qui reste permet de conserver l'égalité. Ainsi, pour la stratégie (1), on cherche à voir si l'égalité est satisfaite, alors que dans la stratégie (2) on cherche davantage la signification de l'absence de x ou de la contradiction (et on s'y trompera au début, cherchant à se rappeler ce que ceci implique). La différence d'approche est parlante pour la signification donnée à la résolution d'équations algébriques, particulièrement dans une idée de trouver les valeurs pour lesquelles l'égalité est satisfaite (Bednarz, 2001). Cette idée se retrouve dans la stratégie (1), mais peu dans la (2).

(3) *Essai numérique*. Une autre stratégie utilisée est celle de l'essai numérique. Celle-ci a été utilisée pour se donner une indication de ce qui se passe dans cette équation ; une entrée de type *calcul approché*, où on tente d'obtenir un certain aperçu de la réponse. En effet, l'étudiant a essayé de remplacer x par la valeur 1 et s'est retrouvé avec 18=8.

$$5x+6+4x+3 = -1+9x$$

$\Rightarrow$ si $x = 1$

$$5+6+4+3 = -1+9$$
$$18 = 8$$

À ce moment, l'étudiant a expliqué que cette stratégie peut prendre beaucoup de temps (sans parler de la lourdeur à se rappeler de tous les essais effectués et leurs résultats) et donc une autre stratégie doit être tentée (e.g., lecture globale). Cette entrée peut être vue comme provoquée par le calcul mental, émergente dans ce contexte, car sur papier-crayon l'étudiant dit qu'il aurait fait quelque chose de plus standard comme la stratégie (2) pour y arriver. Mais, ici, avec l'idée implicite de rapidité (bien que non-imposée), l'étudiant a cherché une entrée rapide sur le problème (x=1 est une stratégie ingénieuse pour gagner du temps), mais celle-ci n'a pas abouti, l'amenant à chercher d'autres façons de faire plus efficaces (autant en termes de temps, d'économie de mémoire, que pour l'obtention d'une réponse). Ces étudiants peuvent être vus comme étant mûrs pour l'écoute d'autres stratégies plus efficaces en calcul mental, la mise en commun des stratégies de calcul mental s'avérant intéressante car un besoin de résolution évident est créé (Butlen et Pézard, 1992).

Retour. Déjà, par ces premiers exemples pour une première équation, on voit l'émergence d'une diversité d'entrées pour « résoudre », provoquée par le contexte de calcul mental (et ses contraintes implicites de rapidité, et celles explicites telles ne pas pouvoir prendre de notes ni laisser des traces écrites). Ces contraintes peuvent faire émerger des stratégies de résolution – telle la lecture globale – qui a le potentiel d'influer en retour sur les stratégies papier-crayon et de forcer à une lecture plus critique de l'équation algébrique (voir Bednarz et Janvier, 1992).

Le contexte de calcul mental, on le voit ici, pousse à faire une affirmation, à avancer quelque chose, voire à prendre position, pour formuler ou proposer une *réponse* au lieu de trouver un *résultat*. L'aspect « mental » oriente vers la formulation d'une réponse, mais pas de la même façon qu'on l'entend normalement. L'entrée est davantage sur le processus, alors qu'on cherche une façon de voir vite, d'entrer dans le problème rapidement et efficacement, sans nécessairement chercher un résultat. La régulation de la résolution se fait par le solveur lui-même, et non pas par le déroulement de la procédure papier appliquée à l'équation. Plusieurs travaux de recherche reprochent aux élèves de s'obnubiler sur l'idée de trouver un résultat et d'y perdre le sens et le raisonnement sous-jacent en cours de résolution (voir e.g. les travaux sur le contrôle de Saboya, 2010). Pour ces exemples de calcul mental, tout semble orienté vers une réponse mais en procédant par raisonnements et par le sens sous-jacent, donc très peu sur l'application mécanique d'une méthode ou d'un algorithme (ceci dit, ce ne serait pas impossible comme entrée, mais elle s'est rarement produite, voire jamais). On entre alors dans une idée de créer son propre contexte de résolution, sa propre entrée adéquate et adaptée pour résoudre, où la part des résolutions mécaniques est réduite et se fond dans le contexte global de résolution.

5.2. Résolution de l'équation $x^2 - 4 = 5$

La résolution de l'équation $x^2 - 4 = 5$ a produit quatre approches différentes, mais qui font ressortir des entrées complémentaires bonifiant, voire transformant, la compréhension de ce que signifie résoudre une équation algébrique : (1) transformation de l'équation, (2) passage par un système d'équations, (3) recherche des zéros de la fonction, (4) résolution suivie d'une vérification.

(1) *Défaire les opérations*. « Tu transfères le 4 avec le 5 et tu prends la racine carrée » ; « Mon nombre a été élevé au carré et ensuite on lui a enlevé 4, alors j'ajoute 4 et j'extrais la racine carrée ». Ces approches, donnant +/- 3 comme réponse, sont similaires aux méthodes de résolution « inverses » retrouvées dans Hewitt (1996) et Filloy et Rojano (1989) et dans le *unwinding* de Nathan et Koedinger (2000), où les opérations sont défaites pour arriver à la valeur de *x*. Tel que l'expliquent Filloy et Rojano (1989), pour résoudre l'équation avec cette méthode « il n'est pas nécessaire d'opérer sur ou avec les inconnues » (traduction de la p. 20), le travail se ramenant à une suite d'opérations arithmétiques réalisées sur des nombres.

Dans ce cas, résoudre l'équation algébrique est centré sur la recherche d'une façon d'isoler *x*, dans un contexte arithmétique. Même si cela fait penser à un contexte papier-crayon, la différence majeure est qu'il n'y a pas de papier-crayon et qu'ainsi un dialogue interne se met en place entre l'élève et sa tâche *pendant* sa résolution (car il ne peut pas laisser de traces écrites ou transformer par écrit l'équation, voire en écrire une nouvelle comme dans Hewitt, 1996, p. 34). Parce qu'il ne peut laisser de traces écrites ou ne peut transformer par écrit l'équation, et ne peut ainsi interagir avec les résultats obtenus sur papier après chacune des transformations de l'équation, la *régulation* de la solution se fait à travers un dialogue personnel, la création d'une histoire dans laquelle le solveur s'engage. La narration de la solution – « Mon nombre a été élevé au carré et ensuite on lui a enlevé 4, alors j'ajoute 4 et j'extrais la racine carrée » – est parlée à travers la résolution, pendant celle-ci, chaque « étape » étant réalisée après celle qui la précède pour arriver à garder le fil de la résolution et des opérations suivantes à faire. Chacune des étapes oriente les suivantes (e.g. « alors…et… »). La *régulation* de la résolution se fait en cours de résolution par le solveur, dans l'action mathématique, par sa réflexion, et non pas par l'application d'une mécanique ou procédure connue nécessitant la réalisation d'une suite d'étapes à respecter (où ce sont alors les étapes et leur respect qui guident la *régulation* de la solution). Il y a un côté *ad hoc* à la nature de la stratégie déployée, qui émerge et est orientée par la résolution. Avec cette entrée, on est davantage sur une idée d'isoler x pour retrouver sa valeur, que de trouver les valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vérifiée. La résolution d'équations n'a pas tout à fait la même signification.

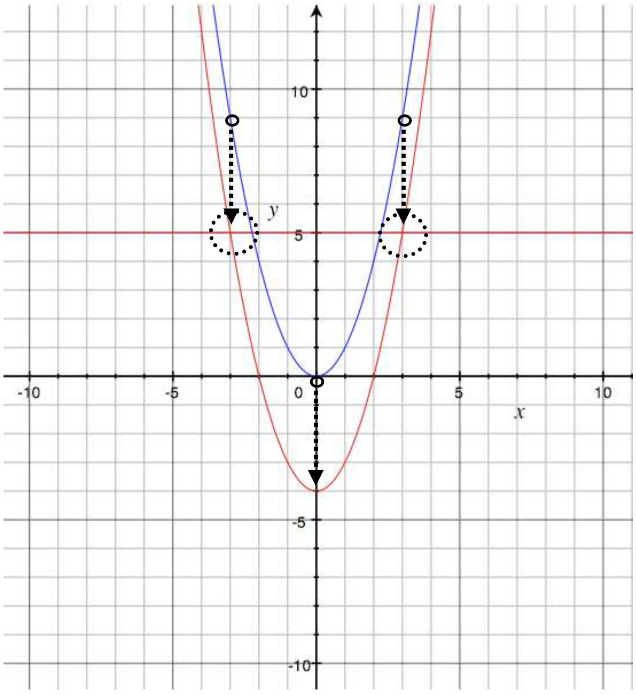
(2) *Passage par un système d'équations*. Une autre stratégie proposée est de considérer l'équation à résoudre comme la comparaison de deux équations dans un système d'équations ($y = x^2 – 4$ et $y = 5$) et de chercher les points d'intersection de ces deux fonctions dans le graphique.

Pour y arriver, l'étudiant s'est représenté la droite $y = 5$ et ensuite a positionné $y = x^2 – 4$. Cette dernière réfère à la fonction quadratique $y = x^2$, laquelle coupe la droite $y = 5$ en $x = \sqrt{5}$. Dans le cas de $y = x^2 – 4$, elle est déplacée de 4 vers le bas dans le graphique et donc le 5 de la droite $y = 5$ devient en quelque sorte un 9 par translation. Ainsi, comment obtenir une image de 9 avec la fonction $y = x^2$? Avec $x = 3$. Donc, en $x = 3$, la fonction $y = x^2 – 4$ coupe la droite $y = 5$. Le graphique présenté ci-après permet un peu de comprendre ce qui a été fait par l'étudiant, mais nécessite un raisonnement de la part du lecteur, un peu de la même façon que le reste de la classe a dû le faire lors de la communication de la solution.

Cette entrée sur le graphique, qui rappelle l'idée d'en appeler à diverses formes de représentation pour résoudre un problème algébrique (Arcavi, 1994), permet de penser le signe d'égalité autrement[4]. C'est-à-dire, de penser le signe d'égalité en termes d'une comparaison entre deux fonctions pour trouver le x commun, donc qui satisfait ces deux fonctions en un y considéré commun. La signification de l'égalité change ici, car on ne cherche pas la valeur qui rend l'égalité vraie, mais plutôt un x auquel les deux fonctions associent le même y.[5]

[4] Il est possible de penser ce type de stratégie comme étant davantage de l'ordre d'une estimation, par un *calcul approché*, que de l'ordre du calcul d'une réponse exacte. Toutefois, parce que les nombres utilisés étaient exacts, ceci a donné une réponse exacte. Les analyses en cours sur le travail des opérations sur les fonctions en contexte de calcul mental avec des élèves du secondaire montrent en effet des entrées davantage en termes de *calcul approché* pour résoudre les problèmes posés en contexte graphique (Proulx, 2012).

[5] Il y a, évidemment, d'autres idées déployées, telles les notions de droites à images constantes et de variation des paramètres dans la fonction quadratique.



(3) *Recherche des zéros de fonctions*. Une autre stratégie proposée est celle de chercher les valeurs de *x* qui donnent une valeur en *y* nulle ou ce qu'on appelle couramment la recherche des zéros de la fonction, où la courbe de la fonction croise l'axe des *x*, autrement dit la droite $y=0$.

$$x^2 - 9 = 0$$
$$(x + 3)(x - 3) = 0$$

En ce sens, dans l'explication donnée par l'étudiant, on peut voir qu'on ne recherche pas ici nécessairement les valeurs qui vérifient l'égalité (même si on peut le faire), mais surtout les valeurs qui « annulent » la fonction $y=x^2-9$, donc qui donnent le(s) point(s) pour le(s)quel(s) l'image vaut 0.[6] On se retrouve à mi-chemin entre un travail de la fonction quadratique et de la résolution d'équation, donnant un autre sens à la résolution de cette équation.

[6] Reste à voir si l'étudiant pense complètement en termes de fonction ici. En effet, on peut faire cette résolution à un niveau davantage algébrique, en passant par une identité remarquable, pour voir vite que pour que le produit soit nul il suffit qu'un des deux facteurs soit nul. On parle alors davantage d'un *calcul automatisé*, faisant intervenir les identités remarquables.

(4) *Résolution suivie d'une vérification*. Cette quatrième stratégie ressemble à la stratégie (1) alors que l'équation $x^2 – 4 = 5$ est rapidement transformée en $x^2 = 9$. Toutefois, la réponse obtenue est 3, sous l'effet de la vitesse. Parce qu'il est en situation de calcul mental et qu'il sait bien que dans ce contexte ses réponses sont données rapidement et peuvent manquer de précision, l'étudiant décide de faire une vérification de sa réponse. En vérifiant que $(3)^2 = 9$, il réalise alors que $(–3)^2$ donne aussi 9 et se réajuste. Cette façon de faire est intéressante, car elle se rapproche de l'idée non pas de trouver une valeur pour laquelle l'égalité est vérifiée, mais plutôt de trouver toutes les valeurs possibles qui satisfont à l'égalité. C'est une entrée qui permet de réaffirmer le sens de la résolution d'équations algébriques.

Retour. On retrouve avec ces autres exemples, pour une deuxième équation, une diversité d'entrées possibles en calcul mental pour la résolution d'équations algébriques. Ceci, il faut le souligner, avec des tâches très simples. Cette diversité d'entrées sur la résolution a un potentiel énorme pour permettre de donner un sens à ce que signifie résoudre une équation algébrique, et sous diverses formes, passant par une vision globale de l'équation, des essais-erreurs, la réalisation d'étapes intermédiaires (–4 et 5), la vision d'un système d'équations, des zéros de fonctions, etc. Ceci ouvre considérablement ce qui est permis de faire pour résoudre une équation algébrique : dépassant les procédures habituelles de résolution algébriques étapes par étapes pour aller au-delà de la clarté des étapes en résolution et vers une compréhension plus large de ce que signifie résoudre une équation algébrique. Cet aspect est discuté en 5.4.

De plus, dans cette résolution d'équations « purement » mathématique ou « sans contexte », on peut voir encore que les solveurs se sont créés leurs « contextes » de résolution d'équation, en interprétant ou « contextualisant » l'équation à leur façon ; ils posent l'équation en lui assignant un contexte. Cette contextualisation ne s'est pas faite en termes de situations de la vie de tous les jours (achats de bonbons, lancer de balle, etc.), mais en termes de « chercher les zéros », « chercher un point de rencontre de deux équations », « chercher les valeurs qui satisfont l'équation », etc. C'est cette diversité qui ressort et qui se traduit par des heuristiques de résolution différentes pour résoudre la même équation (qui n'en devient plus la même équation soudainement, car elle est contextualisée, *posée*, différemment et signifiée différemment). Cette expérience ne fait pas que bonifier, mais surtout transforme la signification et la compréhension des entrées possibles de résolution d'équations algébriques, les solveurs leur donnent un sens particulier, adaptent leurs entrées, posent leur problème. Ils développent leurs façons d'entrer dans le problème. On voit donc l'ouverture vers une diversité de sens possibles, autant au niveau des stratégies que de la signification attribuée au fait de résoudre une équation algébrique.

5.3. Résolution sous la forme Ax/B = C/D

La pose d'équations sous la forme A*x*/B = C/D, soit $3x = 3/4$, $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3x} = \frac{2}{5}$ et $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$, a aussi fait émerger une diversité d'entrées pour les résoudre. Celles-ci sont résumées dans le tableau suivant.

Équations proposées	Stratégies déployées
$3x = 3/4$ $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3x} = \frac{2}{5}$ $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$	(1) *Recherche d'un nombre qui satisfait l'équation* (2) *Éliminer les fractions* (3) *Manipulations pour isoler la variable x* (4) *Se donner un ordre de grandeur* (5) *Établir des équations équivalentes pour simplifier la résolution* (6) *Décomposition de l'équation et mise en évidence de facteurs* (7) *Défaire les opérations* (8) *Distinguer ce qui n'est pas* (9) *Lecture par dessous* (10) *Utilisation de propriétés mathématiques* (11) *Éliminer le x* (12) *Utiliser des ratios*

Sans méconnaître l'intérêt mathématique de toutes ces stratégies, faute d'espace je ne m'attarde dans ce qui suit que sur celles qui contribuent à la discussion en cours, soit les stratégies (1), (4), (5), (7) et (12).

(1) *Recherche d'un nombre qui satisfait l'équation*. Une stratégie a été de lire l'équation en considérant *x* comme un nombre et en cherchant ce nombre : « je cherche le nombre qui…donne… » (voir Bednarz, 2001 ; Whitman, 1982). Par exemple, avec une équation algébrique du type $4x + 2 = 10$, on peut dire « le quadruple d'un nombre, additionné de 2, donne 10. Ce quadruple vaut 8, donc le nombre vaut 2 ». Avec $3x = 3/4$, la stratégie a été de se demander quel nombre multiplié par trois donnera 3/4 ou « le triple d'un nombre vaut 3/4, quel est ce nombre ? ». On parle ici l'équation, on la verbalise ainsi que le dit Bednarz (2001), ce qui fait travailler l'idée que l'inconnue *est un nombre* que l'on recherche. Cette stratégie permet de lire l'équation comme on lit une phrase et d'insister sur le fait que *x* est un nombre, une compréhension à la base de l'algèbre au secondaire et de l'utilisation des lettres algébriques dans les mises en équations de problèmes (Bednarz et Janvier, 1992, 1996 ; Bednarz, Kieran et Lee, 1996).

Cette idée de « parler » l'équation se distingue du travail fait habituellement par écrit. Sans vouloir le stigmatiser, notons que le travail écrit n'amène pas habituellement à verbaliser l'équation, mais plutôt à la traiter et chercher à isoler le *x* en manipulant les symboles à travers une série de manipulations algébriques (c'est en fait la force de l'algèbre… sur papier !). Dans ces cas en résolution mentale, l'étudiant se dit l'équation, il se raconte une histoire, la fait vivre pour pouvoir suivre ce qui se passe et retracer les étapes à faire, de façon similaire à la stratégie (1) *Défaire les opérations* pour l'équation $x^2 - 4 = 5$.

(4) *Se donner un ordre de grandeur*. Cette stratégie fait référence à l'idée de *calcul approché* et se distingue des autres approches, car elle n'amène pas nécessairement à la réponse, mais plutôt à se donner un ordre de grandeur pour la réponse. Par exemple, dans le cas de $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$, un étudiant a transformé les fractions en décimaux et a comparé 0,4 et 0,5 ; il a alors trouvé que *x* devait être plus grand que 1 pour permettre d'atteindre 0,5 en multipliant *x* par 0,4. Ceci lui a donné un ordre de grandeur pour répondre à la question. Toutefois, l'étudiant n'a pas offert de réponse finale, arrêtant ici sa résolution[7].

(5) *Établir des équations équivalentes pour simplifier la résolution*. Pour arriver à résoudre l'équation algébrique $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$, certains ont eu comme stratégie de trouver des équations équivalentes pour lesquelles la résolution est plus facile. Ainsi, certains ont *doublé l'équation*, pour aboutir à $\frac{4}{5}x = 1$, ce qui pour eux était maintenant simple à résoudre, en multipliant par 5/4 pour obtenir $x = 5/4$. Cette stratégie rappelle les approches de division arithmétique, où par exemple on dit que diviser 5,08 par 2,54 est égal à 508 ÷ 254, car 254 entre le même nombre de fois dans 508 que 2,54 entre dans 5,08.

Cette démarche sémiotique de produire des équations équivalentes a beaucoup de potentiel pour réussir à résoudre des équations, mais aussi pour la compréhension du principe d'équivalence : dès lors que la valeur de *x* demeure la même, peu importe la variation d'une équation à une autre, et celle-ci sera conservée dans les autres équations équivalentes (Mary, 2003). D'une certaine façon, trouver des équations équivalentes devient la façon de résoudre l'équation. Arcavi (1994) parle de cette démarche comme résultant de la connaissance qu'en transformant une expression algébrique en une autre équivalente, il devient possible de lire de l'information qui n'était pas visible dans l'expression originale. On obtient alors,

[7] Son approche aurait pu être exploitée pour y voir que 0,5 est un quart de 0,4 de plus que 0,4, donc vaut 5/4 de 0,4, réalisant ainsi que 0,4 doit être multiplié par 5 quarts.

par les transformations des équations, une façon d'arriver à trouver une valeur pour le *x*. Ainsi, plutôt que d'isoler *x*, on cherche des équations équivalentes qui guideront tranquillement vers l'équation, équivalente elle aussi, de « *x* = quelque chose ». Ces transformations sont aussi à la base de la résolution d'équations par écrit, mais ce ne sont pas exactement ces transformations usuelles que l'on retrouve ici. On ne transforme pas l'équation pour isoler le *x*, mais bien pour obtenir une autre équation plus facile à lire ou plus parlante (on double le 1/2 de $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$, par exemple, pour obtenir 1 dans $\frac{4}{5}x = 1$), pour ensuite pouvoir trouver la valeur du *x*.

(7) *Défaire les opérations*. Se rapprochant de la stratégie connue sous le nom de « unwinding » (Nathan et Koedinger, 2000) ou celle des procédures inversées répertoriée dans Hewitt (1996) et Filloy et Rojano (1989), cette entrée vise à retrouver la valeur du *x* en faisant le contraire des opérations faites pour obtenir l'équation (tel que cela est discuté dans la stratégie « transformation de l'équation » pour l'équation $5x + 6 + 4x + 3 = -1 + 9x$). Par exemple, dans le cas de $3x = 3/4$, on dira qu'on a multiplié *x* par 3 et donc que pour retrouver *x* il faut faire l'inverse ou « défaire l'opération », soit diviser par 3.

Utilisée ici pour un problème simple, ce type de stratégie est au cœur, avec des problèmes complexes, d'une approche de résolution très sophistiquée comme le montre Hewitt (1996) dans son activité « think of a number » avec des équations du type : $6\left(\frac{2(x+3)-5}{3}+72\right)=100$. Ici aussi, tel que pour la stratégie « transformation de l'équation », le travail se ramène à une suite d'opérations arithmétiques réalisées sur des nombres comme cela est expliqué dans Filloy & Rojano (1989). On se retrouve donc dans un contexte arithmétique.

(12) *Utiliser des ratios*. Finalement, une autre entrée développée par certains étudiants est d'analyser le ratio unissant numérateurs et dénominateurs. Par exemple, certains ont regardé le ratio unissant le numérateur et le dénominateur pour l'expression contenant *x* et ensuite ont imposé ce ratio, car égalité il y a, de l'autre côté de l'équation[8]. Ainsi, avec $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$, inversé pour donner $\frac{x}{6} = \frac{5}{3}$, si mon nombre est 6 fois plus gros que *x*/6, alors il est 6 fois plus gros que 5/3.[9]

[8] L'égalité n'est en effet pas vue ici comme une égalité conditionnelle, mais plutôt comme étant « donnée » et pour laquelle il existe une solution.

[9] Une variante peut être : « mon ratio me dit que pour 3 au numérateur j'ai 5 au dénominateur, donc si j'ai 6 au numérateur, ce qui est le double de 3, j'ai 10 au dénominateur ».

D'autres encore, pour $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$, ont analysé le ratio entre chacun des numérateurs et ont tenté de voir comment celui-ci s'applique aux dénominateurs, qui devaient, pour produire une égalité, être dans le même ratio que les numérateurs. Donc, si 6 est le double de 3, alors x est le double de 5, donc vaut 10. Ici encore, on sent l'idée de se raconter l'équation pour la faire parler et comprendre sa signification. Dans ce dernier cas, la réponse 10 vient d'elle-même.

Cette approche réinvestit les idées de raisonnement proportionnel, mais aussi travaille le principe d'égalité. C'est en effet parce qu'il y a une égalité que les ratios doivent être conservés entre numérateurs ou entre dénominateurs ou encore entre numérateur et dénominateur. Il y a aussi le fait qu'on analyse l'expression de l'intérieur, c'est-à-dire en essayant de comprendre son lien et de l'appliquer à l'autre partie de l'égalité, qui doit alors avoir elle aussi ce lien interne.

Cette dernière partie sur les équations algébriques de forme fractionnaire complète l'illustration de la panoplie d'entrées possibles ayant émergé dans ce contexte de calcul mental. L'objet de la sous-section suivante est la signification donnée à la résolution d'équations algébriques à travers ces diverses stratégies.

5.4. Significations données à résoudre une équation algébrique

En plus de l'émergence d'une variété de stratégies, on voit apparaître des significations différentes attribuées à « résoudre une équation algébrique ». Celles-ci émergent de la création des divers « contextes » mis en avant pour résoudre les équations proposées, offrant des façons différentes de concevoir l'équation et sa résolution. Ces différentes significations conduisent à une vision élargie de ce que peut vouloir dire « résoudre une équation algébrique ». En voici quelques-unes :

- Résoudre une équation signifie *rechercher la ou les valeurs pour lesquelles l'égalité, si elle est vérifiée, est vraie*. Il y a sous-jacente une idée d'égalité conditionnelle, alors qu'on retrouve non seulement l'idée de trouver une réponse ou une valeur, mais de rechercher toutes valeurs qui peuvent vérifier l'égalité (e.g. lorsque l'étudiant réalise que $(-3)^2$ donne aussi 9).
- Résoudre une équation signifie *rechercher la valeur du nombre auquel on a appliqué une série d'opérations* et donc défaire ces opérations pour retrouver le nombre. On pense à l'idée de lire l'équation (« $4x+2=10$: quel est le nombre qui multiplié par 4 et ajouté de 2 vaut 10 ? ») ou de défaire les opérations (« unwinding ») pour retrouver la valeur du départ. On est ici davantage dans une idée d'isoler le x.
- Résoudre une équation signifie que *chacun des deux côtés de l'égalité sont égaux* et donc que l'opération faite d'un côté doit l'être de l'autre pour

conserver l'égalité et obtenir « x=quelque chose ». L'entrée par la lecture globale de l'équation, où on se permet d'éliminer les valeurs identiques à gauche et à droite de l'égalité, et le regroupement des mêmes termes d'un côté ou l'élimination des mêmes termes des deux côtés de l'égalité sont des exemples. On parle en effet en termes des « deux côtés de l'égalité » ou du principe souvent appelé de la « balance ».

- Résoudre une équation signifie *comparer (graphiquement) deux parties d'un système d'équations* ou de deux fonction partageant le même y. On ne cherche pas la valeur qui rend l'égalité vraie, mais plutôt la coordonnée en x à laquelle les deux fonctions font correspondre une même coordonnée en y, ce qui donne un point d'intersection pour les deux fonctions.
- Résoudre une équation signifie *rechercher les valeurs qui font que la valeur en* y *est nulle*, comme pour la recherche des « zéros d'une fonction ». On retrouve cette entrée avec l'équation $x^2 – 4 = 5$, transformée en $x^2 – 9 = 0$. Le 0 devient, dans la fonction $y = x^2 – 9$, la valeur de y qui est nulle ; on peut aussi dire que le 0 devient la valeur de l'image.
- Résoudre une équation signifie *se donner avant tout une idée de ce qui se passe dans l'équation donnée* et évaluer alors les approches possibles. On retrouve ceci dans l'essai numérique lors de la résolution de $5x + 6 + 4x + 3 = –1 + 9x$ et même dans l'idée de lecture globale de l'équation ou ce que Arcavi (1994) nomme la lecture du sens des symboles ou l'inspection *a priori* des symboles, pour analyser une expression et prendre des décisions avant d'entrer dans le processus de résolution.
- Résoudre une équation signifie *trouver la valeur manquante dans une proportion*, où le ratio entre numérateurs et dénominateurs est le même pour les deux côtés de l'égalité. Dans ce cas, l'égalité n'est pas conditionnelle mais plutôt tenue pour acquise, menant à vouloir conserver le ratio trouvé entre le numérateur et le dénominateur, par exemple, pour les deux proportions mises en égalités.
- Résoudre une équation signifie *trouver des équations équivalentes* à l'équation de départ, plus simples, pour se diriger vers une équation équivalente de la forme « x = quelque chose » et, dans l'idée d'Arcavi (1994), lire de l'information qui n'était pas visible dans l'expression originale. On retrouve ceci lorsqu'on crée des équations équivalentes en multipliant les deux côtés de l'égalité par un facteur spécifique (e.g. en doublant les deux membres de l'égalité, en créant des coefficients doublés, en éliminant par le fait même la fraction).

Cette diversité de significations accordées à la résolution d'une équation algébrique agit déjà comme démonstration du potentiel du calcul mental en algèbre, alors que ces différentes significations offrent des portes d'entrées différentes sur la résolution d'équations algébriques et ne restreint pas à une vision unique de son interprétation. En ce sens, ces significations sont mathématiquement riches et contribuent à approfondir la compréhension de ce que « résoudre une équation algébrique » représente.

6. Retour sur les stratégies déployées et l'activité mathématique mobilisée

6.1. Potentiel du calcul mental en algèbre

Malgré le fait que je me sois limité à offrir quelques illustrations, il y a une diversité et un foisonnement assez exceptionnel d'approches pour la résolution mentale de ces équations algébriques simples. C'est le contexte du calcul mental, et ses contraintes inhérentes (rapidité, sans papier-crayon pour garder des traces, etc.), qui a permis de faire émerger cette variété de stratégies, qui en retour ont contribué à bonifier, voire transformer, la compréhension de ce que signifie « résoudre une équation algébrique ». Ces stratégies de résolution ne sont pas nécessairement toutes « nouvelles », et plusieurs peuvent apparaître dans différents contextes de résolution impliquant l'algèbre. Toutefois, ce qui est significatif est le fait que ce contexte de calcul mental a permis de les faire émerger, de faire émerger toute cette diversité, durant la même activité avec des équations fort simples ; les participants ont été conduits à voir le potentiel de ce contexte et les réinvestissements possibles pour établir des liens entre stratégies et solutions. On voit, dans ce contexte de calcul mental, une pratique qui a du potentiel pour *élargir l'espace du possible* (Sumara et Davis, 1997) au niveau de ce que signifie résoudre une équation algébrique, ainsi que de la variété des entrées possibles pour résoudre. De la même façon que le contexte de calcul mental pour Threlfall (2002) permet de faire émerger des « *possibilities for numbers* », ce contexte de calcul mental en algèbre a fait émerger des « possibilités pour l'algèbre ». Cette variété de résolutions a beaucoup de portée pour l'enseignement-apprentissage de l'algèbre, parce qu'elle offre différentes voies pour la résolution d'équations algébriques et ne restreint pas à une seule interprétation du comment ceci peut se faire.

Sans encore une fois stigmatiser le contexte papier-crayon, le contexte de calcul mental peut être perçu comme ayant permis ou provoqué l'émergence de stratégies et significations algébriques qui diffèrent du contexte habituel de résolution papier-crayon. Un bon exemple est la stratégie d'établir des équations équivalentes (e.g. $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{5}x=1$), raisonnement à la base de la résolution d'équations par écrit. Toutefois, cette démarche diffère de la façon usuelle de résoudre, car l'équation n'est pas transformée pour arriver à isoler *x*, mais l'est plutôt pour obtenir des équations plus simples, plus faciles à lire. En fait, même si plusieurs des stratégies déployées ressemblent à certaines stratégies retrouvées en contexte papier-crayon, la différence majeure est qu'il n'y avait pas de papier-crayon et que les solveurs avaient à inventer leurs propres façons de résoudre, à interpréter l'équation dans leurs termes à eux, pour arriver à résoudre cette équation. Ceci est relié à ce qu'affirment Butlen et Pézard (1992) concernant le fait que la pratique du calcul mental peut permettre le développement de nouvelles façons de résoudre en mathématiques que le contexte papier-crayon traditionnel offre rarement parce qu'il se centre sur des techniques et des algorithmes qui sont efficaces et ne créent pas le besoin de s'en éloigner. Ceci semble aussi être ici le cas, alors que la résolution d'équations algébriques a fait émerger des façons très diverses et non-usuelles de résoudre.

Ce contexte de calcul mental en algèbre a amené en fait au développement de façons *locales* de résoudre les équations. Tel que l'expliquent Butlen et Pézard (1990), les tâches de calcul mental font souvent émerger des stratégies spécifiques, qui n'ont pas toujours des propriétés « universelles » (i.e. pour résoudre des classes de problèmes) : les solveurs développent des stratégies particulières, pour des problèmes particuliers, efficaces de façon locale. Ceci est aussi mentionné par Plunkett (1979), qui réfère aux stratégies mentales comme étant « *fleeting* and often difficult to catch hold of […as] *variable* […and] *active* » (p. 3). Faisant référence aux travaux de Plunkett, Murphy (2004) explique que ces stratégies sont vues comme étant :

> Invented 'on the spot' by the user for that calculation and may not even be remembered for future use […] mental calculation strategies [are] seen as 'active' as they are created by the user to suit the numbers involved (pp. 3-4).

Ainsi, ces stratégies, développées sur-le-champ, n'avaient pas pour but d'être universelles ou optimales, mais uniquement de réussir à résoudre, d'être capable de faire entrer dans la tâche en générant une façon de donner un sens à la tâche et la résoudre. Cet aspect « dynamique » et « émergent » des stratégies mène à la prochaine sous-section concernant le processus de résolution et la nature de l'activité mathématique déployée en contexte de calcul mental.

6.2. Pistes de compréhensions sur le phénomène de résolution en contexte de calcul mental

Ces stratégies « actives » ont émergé en fonction des équations proposées et des contraintes du contexte de calcul mental. La plupart de ces stratégies n'existaient pas vraiment « avant » que l'équation soit donnée et ont été provoquées par l'interaction de l'équation posée et du solveur, qui en a développé une façon adéquate pour entrer, pour résoudre. Le contexte du calcul mental force une certaine entrée, souvent rapide, pour résoudre l'équation. Pour la majorité des stratégies proposées, les solveurs sont passés par des chemins inattendus pour arriver à la réponse, alors qu'ils ne pouvaient pas garder leurs traces et devaient trouver des façons de faire « économiques », mais efficaces et adaptées, pour résoudre l'équation : ils ont cherché une façon adéquate d'entrer, qui permette de résoudre l'équation.

L'activité mathématique dans ce contexte de calcul mental est alors centrée sur la façon d'entrer dans la tâche, de trouver une façon d'y arriver, d'avancer dans la tâche. Le défi, le but premier, n'est pas de trouver la réponse elle-même. On veut arriver à résoudre, et non pas uniquement donner une réponse. On veut évidemment trouver la réponse, mais ce n'est pas le défi premier, qui est plutôt de trouver une façon d'entrer dans la tâche. L'activité mathématique en est donc affectée. Ceci contraste avec l'utilisation des procédures et algorithmes traditionnels, ceux souvent utilisés en contexte de papier-crayon, où le défi n'est pas de se demander comment entrer, mais de les utiliser/appliquer correctement pour arriver à la réponse. Le contexte de calcul mental amène à faire les mathématiques différemment, en étant centré sur la recherche de façons d'entrer (et non l'application méthodique d'une procédure quelconque).

Dans la résolution des équations, les étudiants ont tenté de développer des façons de résoudre, des façons d'entrer pour résoudre ces équations. Ces entrées se sont souvent faites, tel qu'expliqué plus haut, en créant leurs propres contextes de résolution, en se créant leurs histoires : on voit l'équation comme un système d'équations, comme un contexte arithmétique où « défaire » les opérations, comme une recherche des zéros de fonction, comme une proportion à résoudre, etc. Le premier travail mathématique est alors de trouver un contexte pour entrer, un contexte pour résoudre. C'est en trouvant ces entrées que par la suite la résolution a pu se faire, que le tout a pu continuer. De plus, la création de ces contextes transforme l'équation, qui n'est plus la même dans ces contextes, car elle se fait donner un sens spécifique : on « pose » l'équation...

Ces considérations sur la création d'un contexte de résolution ramènent effectivement à la question de la « pose des problèmes », à la Varela, telle qu'expliquée dans la partie théorique. Cette variété mise en avant par les solveurs illustre bien comment les différentes façons de « poser » les tâches ont mené à des stratégies différentes et comment des sens différents sont attribués à ce que signifie « résoudre une équation algébrique ». La même équation a permis de faire émerger une variété de « poses », de stratégies, de sens. Ceci souligne le fait que les stratégies de résolution émergent à l'interaction du solveur et de la tâche, où le solveur joue un grand rôle à travers la pose de la tâche, mais où la nature de la tâche joue aussi un rôle (voir e.g. l'effet des formes fractionnaires ou du second degré sur la nature des stratégies déployées). Tout émerge de façon contingente où, ainsi que Davis (1995) l'explique, les stratégies sont inséparables du solveur et de la tâche résolue, émergeant des deux et de leur interaction. En ce sens, et bâtissant sur le travail de Simmt (2000), les situations données n'étaient pas des tâches mais plutôt des incitatifs. Les équations ne sont devenues des tâches que lorsque les solveurs se sont engagés dans ces dernières, lorsque les solveurs en ont *fait* un système d'équations, des fonctions, des rapports, etc., lorsqu'ils ont fait émerger leur histoire/contexte, lorsqu'ils ont trouvé une façon de résoudre, lorsqu'ils ont « posé » leur tâche. En tentant d'entrer dans la tâche, le solveur a posé cette tâche en ses propres termes et y a développé sa façon de résoudre. Ceci a fait émerger cette variété de stratégies et de façons de résoudre, focalisant de plus directement le potentiel de cette activité de calcul mental.

Conclusion

Cette étude exploratoire permet d'illustrer le potentiel d'une entrée en calcul mental sur la résolution d'équations algébriques et d'offrir un démarrage de caractérisation de l'activité mathématique mobilisée dans ce contexte. Ce potentiel s'est illustré par la diversité des entrées développées pour résoudre, et les significations données à la résolution d'équations par l'activité mathématique mobilisée. Ces entrées sont de belles illustrations du fait que le travail du calcul mental force le solveur à trouver ses façons personnelles de résoudre, de comprendre et de donner une signification à la résolution d'équations algébriques. De cette façon, la résolution d'équation et sa signification se transforment en cours de tâche, prenant des visages mathématiques différents d'un étudiant à l'autre et d'une résolution à l'autre. Les résolutions d'équations deviennent fortement personnifiées, ce qui contraste avec les approches souvent standardisées de résolutions algébriques. On peut même dire qu'on ne résout plus les équations de la même manière dans ces deux cas – résoudre ne veut plus dire la même chose – l'une étant normalisée par une façon de faire que tous adoptent sans toujours en avoir le choix, alors que l'autre permet de créer une entrée adaptée à la tâche et à la façon pour le solveur d'y donner un sens. On permet donc au solveur d'entrer dans le problème, de le transformer à sa façon, pour arriver à résoudre l'équation. Comme l'expliquent Butlen et Pézard (1992), le travail du calcul mental permet de faire avancer des compréhensions mathématiques que le calcul écrit traditionnel n'arrive que peu à faire car souvent trop cadré, avec l'apprentissage de techniques et d'algorithmes qui sont suffisamment performants et qui ne font pas ressortir le besoin de penser plus loin qu'eux. Le contexte de résolution mentale, et ses contraintes, a fait sortir des sentiers déjà battus des approches traditionnelles de résolution d'équations algébriques pour ouvrir vers des entrées moins habituelles, adaptées, et plus « bricolées », comme le dit Hazelkemp (1986), mais personnifiées et permettant tout autant de résoudre l'équation.

La situation de calcul mental en algèbre semble avoir engendré un contexte différent de résolution, ouvrant des espaces d'explorations, des « possibilités pour l'algèbre », desquelles on peut tirer avantage pour l'enseignement-apprentissage (pour y faire ressortir les sens sous-jacents, les liens, les différentes conceptions, etc.). L'émergence de cette variété de stratégies montre aussi que le contexte de calcul mental a offert des possibilités pour penser différemment la résolution d'équations algébriques. L'ouverture de cet espace de possibles, qui ne restreint pas à une façon unique de résoudre, peut avoir des retombées importantes sur la compréhension des solveurs et sur leur attitude de résolution. Évidemment, ces stratégies et sens divers ont émergé dans ce contexte spécifique, avec ces étudiants, et rien ne garantit que ceci se représentera dans un autre contexte. Mais là n'est pas la question, car ce qui importe est de générer une compréhension plus approfondie des occasions d'apprentissages que la résolution d'équations algébriques en contexte de calcul mental peut offrir, et d'en savoir davantage sur la nature des stratégies mobilisées.

Au niveau de pistes futures de recherche, en plus d'offrir une caractérisation de la nature de l'activité mathématique déployée, et les stratégies, ces résultats apportent des précisions importantes sur le sens à attribuer aux différentes déclinaisons de stratégies en contexte de calcul mental (calcul réfléchi/raisonné, automatisé, approché, exact, rapide) avec d'autres objets mathématiques que les nombres, ici avec l'algèbre. Ceci enrichit et étend l'application de ces déclinaisons pour l'analyse et la compréhension de l'activité mathématique déployée en contexte de calcul mental, en plus d'offrir un cadre, une certaine lunette, à l'intérieur duquel faire sens de ces stratégies. D'autres études sur d'autres objets mathématiques permettront de clarifier encore plus finement l'apport possible et la signification de ces déclinaisons pour l'analyse des stratégies de calcul mental.

Ces résultats soulignent le besoin de conduire des recherches sur ces aspects, ainsi que de continuer à scruter par des analyses fines et précises les processus de résolution mobilisés par les solveurs dans ces contextes de calcul mental et l'impact de ce travail sur les processus écrits et de résolution de problèmes. Entre autres, est-ce que le travail du calcul mental en algèbre (et pour d'autres objets) peut avoir une influence sur le travail écrit en algèbre (et pour d'autres objets), de la même façon que ceci semble le cas pour les nombres (voir e.g. Butlen, 2007) ? Beaucoup en ce sens reste à investiguer. Mais, déjà, cette variété de stratégies et de significations fait foi de belles promesses pour l'enrichissement des compréhensions algébriques par le calcul mental.

BIBLIOGRAPHIE

ARCAVI, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

BEDNARZ, N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *1*(1), 61-80.

BEDNARZ, N. & JANVIER, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. *Actes du colloque international « Didactique des mathématiques et formation des enseignants »*, 21-40, 20 au 22 mai 1992, École normale supérieure de Marrakech.

BEDNARZ, N. & JANVIER, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee. (Eds.) *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching,* 115-136, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

BEDNARZ, N., KIERAN, C. & LEE, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

BOULE, F. (2008). *Le calcul mental au quotidien. Cycles 2 et 3*. Dijon, France : SCÉREN, CRDP de Bourgogne.

BRYAN, T.J. (1999). The conceptual knowledge of preservice secondary mathematics teachers: How well do they know the subject matter they will teach? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal. Volume 1: Content Knowledge*. http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/journal.shtml

BUTLEN, D. (2007). *Le calcul mental: entre sens et technique*. Presses universitaires de France-Comté: France.

BUTLEN, D. & PÉZARD, M. (1990). Calcul mental, calcul rapide. *Grand N*, *47*, 35-59.

BUTLEN, D. & PÉZARD, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une experimentation du CP en CM2. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*, 319-68.

BUTLEN, D. & PEZARD, M. (2000). Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège. *Repères IREM n° 41*, 5-24.

CARLOW, C.D. (1986). Critical balances and payoffs of an estimation program. In H.L. Schoen et M.J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation. 1986 NCTM Yearbook,* 93-102, Reston, VA : NCTM.

DAVIS, B. (1995). Why teach mathematics? Mathematics education and enactivist theory. *For the Learning of Mathematics*, *15*(2), 2-9.

DESGAGNE, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative: illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, *18*, 77-105**.**

DOUADY, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM n° 15*, 25 pages.

FILLOY, E. & ROJANO, T. (1989). Solving equations : the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

HAZELKEMP, D.W. (1986) Components of mental multiplying. In H.L. Schoen et M.J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation. 1986 NCTM Yearbook*, 116-126. Reston, VA : NCTM.

HEIRDSFIELD, A.M. & COOPER, T.J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: case studies of flexible and inflexible computers. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 443-463.

HEWITT, D. (1996). Mathematical fluency: the nature of practice and the role of subordination, *For the Learning of Mathematics*, *16*(2), 28-35.

HITT, F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*(1), 7-26.

KAHANE, J.-P. (2003). *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques — rapport d'étape sur le calcul*. Paris, Centre national de documentation pédagogique, document disponible au http://smf4.emath.fr/en/Enseignement/CommissionKahane/

LEUTZINGER, L.P., RATHMELL, E.C. & URBATSCH, T.D. (1986). Developing estimation skills in the primary grades. In H.L. Schoen et M.J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation. 1986 NCTM Yearbook*, 82-92, Reston, VA : NCTM

MARY, C. (2003). *Les hauts et les bas de la validation dans une classe de mathématiques au secondaire!* Éditions Bande Didactique: Trois-Rivières, Qc, Canada.

MATURANA, H.R (1987). Everything is said by an observer. In W.I. Thompson (Ed.) *GAIA: A way of knowing*, 65-82, Hudson, NY: Lindisfarne Press.

MATURANA, H.R (1988). Reality: The search for objectivity of the quest for a compelling argument. *Irish Journal of Psychology*, *9*(1), 25-82.

MATURANA, H.R. & VARELA, F.J. (1992). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding* (Rev. ed.). Boston, MA: Shambhala.

MATURANA, H.R. & VARELA, F.J. (1994). *L'arbre de la connaissance: racines biologiques de la compréhension humaine*. Addison-Wesley: Paris.

MEWBORN, D. (2003). Teaching, teachers' knowledge, and their professional development. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to the Principles and Standards for School Mathematics,* 45-52, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

MJER [Ministre Jeunesse Éducation Recherche]. (2008). *Les nouveaux programmes de l'école primaire. Mathématiques. Document d'accompagnement. Le calcul mental*. Direction de l'enseignement scolaire. France. 22 pages.

MURPHY, C. (2004). How do children come tu use a taught mental calculation strategy? *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 3-18.

NATHAN, M. J. & KOEDINGER, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(*2*), 168-190.

PLUNKETT, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in Schools*, *8*(3), 2-5.

PROULX, J. (soumis). *Mental calculations with/in a graph : operating on functions*. Article soumis pour publication.

PROULX, J. & BEDNARZ, N. (2010). Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 1 : Réflexions fondées sur une analyse des recherches. *Revista de Educação Matemática e Tecnologica Ibero-americana*, *1*(1), http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia

RENE DE COTRET, S. (1999). Perspective bio-cognitive pour l'étude des relations didactiques. In G. Lemoyne et F. Conne (Eds.), *Le cognitive en didactique des mathématiques* (pp. 103-120). Montréal, Qc: Presses de l'Université de Montréal.

REYS, R.E. & NOHDA, N. avec SHIMIZU, K. & SMITH, D. (Eds.) (1994). *Computational alternatives for the 21st century: Cross-cultural perspectives from Japan and the United States*. Reston, VA: NCTM.

REZAT, S. (2011). Mental calculation stratefies for addition and subtraction in the set of rational numbers. *Proceedings of CERME-7.* Rseszow, Pologne: CERME.

SABOYA, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement du contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal, Montreal, Canada.

SCHMIDT, S. & BEDNARZ, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes: Difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 127-155.

SCHOEN, H.L. & ZWENG, M.J. (Eds.) (1986). *Estimation and mental computation. 1986 NCTM Yearbook*. Reston, VA : NCTM.

SIMMT, E. (2000). *Mathematics knowing in action: A fully embodied interpretation*. Thèse de doctorat. University of Alberta, Canada.

SUMARA, D.J. & DAVIS, B. (1997). Enlarging the space of the possible: Complexity, complicity, and action-research practices. In T.R. Carson et D.J. Sumara (Eds.), *Action research as a living practice*, 299-312, New York: Peter Lang.

THOMPSON, I. (1999). Getting your head around mental calculation, in I. Thompson (ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools*, 145-156, Open University Press, Buckingham.

THOMPSON, I. (2000). *Understanding and assessing children mathematical understanding through mental calculations*. Texte présenté à ICME-9. 10p.

THOMPSON, I. (2009). Mental calculation. *Mathematics Teaching*, *213*, 40-42.

THRELFALL, J. (2002). Flexible mental calculations. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29-47.

THRELFALL, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, *41*, 541-555.

TRAFTON, P.R. (1986). Teaching computational estimation : establishing an estimation mind-set. In H.L. Schoen et M.J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation. 1986 NCTM Yearbook*, 16-30, Reston, VA : NCTM.

VAN DOOREN, W., VERSCHAFFEL, L. & ONGHENA, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(1), 27-52.

VARELA, F. J. (1996). *Invitation aux sciences cognitives*. Paris: Seuil.

VARELA, F.J. (1999). *Ethical Know-how*. Stanford: Stanford University Press.

VARELA, F.J., THOMPSON, E. & ROSCH, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. Cambridge, MA: MIT Press.

WHITMAN, B.S. (1982). Intuitive équation-solving skills. In Silvey, L & Smart, J.R. (Eds.), *Mathematics for the middle grades (5-9). 1982 NCTM Yearbook*, (p. 199-204), Reston, VA : NCTM.

JEROME PROULX
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case Postale 8888, succ. Centre-Ville
Montréal, Qc
H3C 3P8 Canada
proulx.jerome@uqam.ca