

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : PROPOSITION D'UN MODÈLE
CONCEPTUEL POUR L'APPRENTISSAGE ET L'ENSEIGNEMENT AU
PRIMAIRE ET AU SECONDAIRE

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN ÉDUCATION

PAR
DORIS JEANNOTTE

AOUT 2015

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

*À Sébastien, qui a su me rendre la pareille, à
mes enfants qui sont ma source d'inspiration, à
mes parents qui ont pavé le chemin*

*C'est lorsque nous croyons savoir quelque chose
qu'il faut justement réfléchir un peu plus
profondément*

Isaac Asimov

REMERCIEMENTS

Je tiens sincèrement à remercier ma directrice Carolyn Kieran qui, malgré sa retraite, m'a accordé tant d'heures en lectures et en rencontres, qui a su témoigner de patience devant mon impatience, qui a su me motiver et me soutenir dans les moments difficiles. Merci du fond du cœur pour tout ce que j'ai pu apprendre à vos côtés, ce fut un honneur pour moi de travailler avec une grande didacticienne, ce fut un honneur d'être dirigée par vous.

Je tiens également à remercier mon codirecteur Stéphane Cyr. Merci pour tes commentaires pertinents, merci pour nos discussions enflammées, merci pour ta patience. Je sais que je ne suis pas toujours facile à suivre (et à vivre). J'ai beaucoup appris à tes côtés. C'est avec joie que je deviens ta collègue.

Merci aux membres du jury de thèse d'avoir pris le temps pour apprécier mon travail, pour vos commentaires judicieux et éclairants, merci pour vos questions plus que pertinentes qui m'ont aussi aidée à cheminer, à pousser ma réflexion. Tout ceci me permettra de bonifier ce travail. Je compte bien approfondir plusieurs points par d'autres projets de recherche.

Merci à tous mes collègues didacticiens, Caroline Lajoie, Mireille Saboya, Fabienne Venant, Stéphane Cyr, Phillippe Jonnaert, Jean-François Maheux, Jérôme Proulx, Fernando Hitt, Denis Tanguay, Louis Charbonneau, Michel Coupal (et Luis Saldanha qui s'est ajouté à la liste) pour avoir cru en moi et m'avoir permis de m'épanouir par le plus beau métier du monde. En particulier merci à Caroline avec qui j'ai partagé

mes craintes et mes frustrations durant les deux dernières années. C'est beaucoup grâce à toi que j'ai trouvé la motivation de terminer ce projet.

Je ne peux passer à côté de deux personnes qui ont su m'épauler dans cette aventure, m'écouter dans les moments difficiles. À Claudia, mon amie, une grande didacticienne, je te remercie pour tout, ta présence, ton écoute attentive, tes idées formidables, tes réflexions profondes, nos discussions fécondes, nos projets en cours et futurs. Je suis vraiment heureuse d'avoir croisé ton chemin. À Sarah, merci pour ton amitié, ta présence chaleureuse, tes encouragements, nos discussions profondes, et surtout ton écoute. À nos projets futurs! Tu es toujours là quand j'en ai besoin. C'est avec impatience que j'attends le jour où nous serons amenées à collaborer.

C'est aussi grâce à mes parents que j'ai pu entreprendre ce beau voyage. Merci d'avoir généré en moi ce goût du dépassement. Merci d'avoir et de prendre encore le temps pour m'aider à réaliser mes rêves. Merci d'être là pour les enfants. Je vous aime profondément. De même, l'accomplissement de ce projet n'aurait pas été possible sans la présence de Sébastien qui a su garder le fort dans les moments de tempêtes. Merci de ne pas avoir lâché prise, merci de ton amour, de ton soutien, merci pour nos discussions, merci d'avoir cru en moi. Je tiens aussi à remercier Angélie, Renaud et Jean-Nicolas qui ont accepté que leur maman réalise son rêve. Merci pour votre compréhension, votre amour inconditionnel, vos questions stimulantes, vos désirs, vos aspirations. Vous êtes pour moi une source d'inspiration.

Enfin, un grand merci à la Faculté d'Éducation de l'UQAM et au Conseil de recherches en sciences humaines (CRSH) qui par l'octroi d'une bourse m'ont permis de réaliser mes études doctorales dans les meilleures conditions possible. Sans ce support financier, la conciliation étude-famille aurait été impossible.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES.....	x
LISTE DES TABLEAUX.....	xiii
LISTE DES ACRONYMES	xiv
RÉSUMÉ	xvi
L'INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I LA PROBLÉMATIQUE.....	6
1.1 L'origine du questionnement	6
1.2 Le contexte.....	8
1.2.1 Le RM dans l'éducation à l'international.....	9
1.2.2 Le contexte canadien.....	16
1.2.3 Le contexte québécois	16
1.2.4 De l'importance du RM dans l'éducation mathématique	22
1.3 Les fondements paradigmatiques de ma recherche.....	23
1.3.1 Des énoncés relatifs aux fondements des mathématiques.....	24
1.3.2 Des énoncés relatifs aux fondements de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques.....	29
1.4 Le RM dans la littérature	31
1.4.1 La diversité de vocabulaire entourant le RM.....	32
1.4.2 Des convergences et des divergences dans certaines définitions de RM	38
1.4.3 La diversité des processus associés au RM.....	47

1.4.4 La formulation du problème de recherche	48
1.5 L'objectif général de recherche.....	50
CHAPITRE II LA DÉMARCHE MÉTHODOLOGIQUE.....	53
2.1 La vision sous-jacente de la recherche.....	53
2.2 Des précisions typologiques.....	55
2.3 La démarche globale préconisée : l'anasynthèse	56
2.3.1 L'ensemble de départ.....	57
2.3.2 L'analyse de l'ensemble de départ.....	58
2.3.3 La synthèse.....	63
2.3.4 Le prototype	63
2.3.5 La validation à court terme	63
2.3.6 Le modèle.....	66
2.3.7 Les boucles de rétroaction.....	66
2.3.8 Influence des fondements paradigmatiques sur la construction et la validation du modèle.....	66
2.4 Le concept de modèle	68
2.5 La mise en œuvre de la méthodologie pour la construction du modèle théorique.....	69
2.5.1 La constitution du corpus.....	71
2.5.2 L'analyse de la littérature.....	73
2.5.3 La synthèse et le prototype.....	80
CHAPITRE III LE RM D'UN POINT DE VUE GÉNÉRAL	83
3.1 La nature discursive du RM.....	84
3.2 Les apports et les limites de quatre modèles pour étudier le RM	88
3.2.1 Les analyses du raisonnement de Duval	88
3.2.2 Le RM selon Lithner	94
3.2.3 Le raisonnement en mathématiques selon Cabassut	98

3.2.4	Le modèle de <i>reasoning-and-proving</i> de G. J. Stylianides	101
3.2.5	Ce que l'on retient de ces modèles.....	105
3.3	Les caractéristiques du RM revisitées.....	107
3.3.1	Produit intellectuel vs processus de pensée	108
3.3.2	La nature inférentielle du RM.....	110
3.3.3	Les buts et les fonctions du RM.....	112
3.3.4	L'aspect structurel du RM.....	116
3.3.5	L'aspect processuel du RM.....	117
3.4	La synthèse des idées clés relatives à la conceptualisation du RM	120
3.5	Les objectifs spécifiques	122
CHAPITRE IV L'ASPECT STRUCTUREL DU RAISONNEMENT		124
4.1	Deux modèles structurels pour l'analyse du RM	126
4.1.1	Le modèle de Toulmin	127
4.1.2	Le modèle de Peirce	133
4.1.3	L'union des modèles de Peirce et de Toulmin.	135
4.1.4	Le concept de raisonnement valide	139
4.2	Les structures du RM	141
4.2.1	La déduction.....	142
4.2.2	L'induction.....	148
4.2.3	L'abduction	151
4.2.4	Le cas de l'analogie.....	154
4.3	Conclusion	158
CHAPITRE V LES PROCESSUS DE RM		161
5.1	Le concept de processus.....	162
5.1.1	Le concept de processus commognitif de RM	167
5.2	Les différents processus de RM présents dans la littérature	170

5.2.1	Les processus répertoriés dans la littérature qui traitent du RM en didactique des mathématiques.	171
5.3	Les processus de recherche de similitudes et de différences	179
5.3.1	Abstraire.....	179
5.3.2	Généraliser	188
5.3.3	Conjecturer.....	198
5.3.4	Identifier une régularité.....	208
5.3.5	Comparer.....	214
5.3.6	Classifier	216
5.3.7	Les processus de recherche de similitudes et de différences en tant que processus de RM.	219
5.4	Les processus de recherche de validation	219
5.4.1	Valider.....	220
5.4.2	Les quasi-synonymes de processus de recherche de validation : argumenter, expliquer et vérifier	222
5.4.3	Justifier.....	227
5.4.4	Prouver	238
5.4.5	Démontrer	248
5.4.6	Les processus de recherche de validation en tant que processus de RM	253
5.5	Un processus de support du RM: Exemplifier	254
5.5.1	Exemplifier dans la littérature sur le RM en didactique des mathématiques	255
5.5.2	Exemplifier en tant que processus de RM	260
5.6	Les quasi-synonymes de RM	262
5.6.1	Découvrir	262
5.6.2	Explorer.....	264
5.6.3	Investiguer.....	265
5.7	Synthèse : les processus de RM retenus.....	268

CHAPITRE VI DISCUSSION ET CONCLUSION.....	274
6.1 Proposition d'un modèle conceptuel du RM.....	275
6.1.1 L'aspect structurel et ses liens avec l'aspect processuel.....	277
6.1.2 L'aspect processuel.....	279
6.1.3 Un exemple pour illustrer la valeur euristique du modèle.....	282
6.1.4 Le RM en tant que discours.....	291
6.2 Conclusion.....	293
6.2.1 La validation interne du modèle.....	294
6.2.2 Une première validation externe du modèle.....	296
6.2.3 Limites.....	297
6.2.4 Retombées et prolongements possibles.....	299
ANNEXE A CORPUS D'ANALYSE DU CHAPITRE III.....	303
ANNEXE B DÉFINITIONS DU RM.....	319
ANNEXE C UNE SOLUTION D'ÉLÈVE.....	323
RÉFÉRENCES.....	328

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1. 1 La schématisation du problème de recherche.....	50
2. 1 La démarche d'anasynthèse adaptée de Legendre (1993, 2005)	57
2. 2 La place et les étapes de l'analyse de contenu dans la démarche d'anasynthèse.....	61
2. 3 Les sous-étapes du processus de catégorisation et de classification.....	62
2. 4 La base de données	74
2. 5 Une liste des entrées	79
2. 6 La démarche d'anasynthèse menant à l'élaboration du modèle conceptuel de RM.....	82
3. 1 Les différents types de raisonnement selon Lithner (2008).....	97
3. 2 Le raisonnement selon Cabassut (2005, p. 24)	100
3. 3 Traduction du modèle de G. J. Stylianides (2005, p. 21)	102
3. 4 Réponse de Janet, tirée de Kieran et Drijvers (2006)	104
3. 5 Deux aspects structurant le concept de RM.....	121

4. 1	Modèle de Toulmin.....	129
4. 2	Un exemple de schéma d'argument de Toulmin (modifié de Pedemonte, 2002, p. 95)	131
4. 3	Trois exemples d'arguments élémentaires à l'aide du modèle unifié.....	138
4. 4	Un exemples de modus ponens et de modus tollens.....	144
4. 5	Le schéma d'un pas déductif	145
4. 6	Un exemple de raisonnement par l'absurde.....	146
4. 7	Un exemple de preuve directe par disjonction de cas.....	147
4. 8	Un exemple de pas inductif	149
4. 9	Le schéma d'un pas inductif.....	150
4. 10	Schéma inductif proposé par Pólya (1958).....	151
4. 11	Un exemple d'abduction tiré de Reid (2003)	153
4. 12	Deux schémas de pas abductif.....	154
4. 13	Un exemple de raisonnement par analogie.....	157
5. 1	Tâche tirée de Point de vue mathématique (S. Guay et al., 2007, p.100).....	207
5. 2	Tâches : les nombres triangulaires.....	210
5. 3	Une solution d'élève	211
5. 4	Cadre de Simon et Blume (1996)	234
5. 5	Un exemple du processus justifier.....	237

5. 6 Exemples de validation.....	252
5. 7 Les processus de recherche de validation.....	254
5. 8 Exemplifier en tant que processus de support de conjecturer.....	256
5. 9 Un exemple de processus d'exemplification lié à valider.....	259
5. 10 La suite des nombres triangulaires	260
5. 11 Ensemble des processus de RM.....	269
6. 1 Les deux aspects du RM d'un point de vue conceptuel.....	277
6. 2 Processus exemplifier	283
6. 3 Une conjecture suivie d'un processus exemplifier	284
6. 4 Énoncé généré par un processus de conjecture et de justification.....	285
6. 5 Processus justifier	286
6. 6 Exemplification pour la seconde partie de la tâche	287
6. 7 Règle générée par le processus conjecturer	288
6. 8 Processus justifier	289
6. 9 Processus de preuve, supporté par un processus d'exemplification.....	290

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	page
2. 1 Les critères de scientificité de la recherche théorique (tableau tiré et modifié de Charland, 2008; d'après Gohier, 1998)	65
2. 2 Les bases de données et les catalogues consultés	70
2. 3 Un premier champ notionnel	71
2. 4 Une classification des périodiques en didactiques des mathématiques par Toerner et Arzarello (2012)	73
2. 5 Un n ^e champ notionnel	75
2. 6 Des exemples d'éléments formels, axiologiques, praxiques et explicatifs	77
3. 1 Les quatre pas de raisonnements ou les quatre organisations possibles de l'expansion discursive d'une ou de plusieurs propositions (tiré de Duval, 1995, p. 238)	91
4. 1 Le champ notionnel du chapitre IV	126
4. 2 Un exemple de syllogisme	128
4. 3 Trois exemples de pas d'inférence élémentaire de Peirce (1878; tiré de Reid, 2003).	134

LISTE DES ACRONYMES

A :	(résultat) Affirmation
CAS :	Computer Algebra System
D	Données
EA :	Élément axiologique
EE :	Élément explicatif
EMF :	Espace Mathématique Francophone
EF :	Élément formel
EP :	Élément praxique
F :	Fondement (backing)
GDM :	Groupe de didactique des mathématiques
GDT :	Grand dictionnaire terminologique
MELS :	Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport
MEO :	Ministère de l'Éducation de l'Ontario
MEQ :	Ministère de l'Éducation du Québec
NCTM:	National Council of Teachers of Mathematics
OCDE :	Organisation de Coopération et de Développement économique
PFEQ :	Programme de formation de l'école québécoise

PISA :	Program for International Student Assessment
PME:	Psychology of Mathematics Education
PME-NA:	Psychology of Mathematics Education, North-American chapter
PONC:	Protocole de l'Ouest et du Nord canadiens
PSSM:	Principles and Standards for School Mathematics
QCA :	Qualifications and Curriculum Authority
R:	Règle (garantie)
Ré :	Réfutation
RM :	Raisonnement mathématique
TIMSS :	Trends in International Mathematics and Science Study

RÉSUMÉ

Que ce soit au Québec ou ailleurs dans le monde, le raisonnement mathématique [RM] occupe une place centrale dans les programmes de formations au primaire et au secondaire. Le développement de ces programmes s'appuie entre autres sur des recherches en didactique des mathématiques. En fait, plusieurs études en didactique des mathématiques s'intéressent à différentes problématiques entourant le développement du RM en classe. Toutefois, le concept de RM est souvent utilisé de façon intuitive sans définition ou caractérisation (Duval, 1995; Yackel et Hanna, 2003). Une première analyse de la littérature a permis de constater qu'une pléthore de termes est associée au RM et que certains de ces termes ont plusieurs sens. De même, l'analyse des définitions du RM dans la littérature en didactique des mathématiques met au jour certaines convergences, divergences et absences. Entre autres, le RM y est parfois défini comme un produit et parfois comme une activité. Certaines définitions insistent sur les formes que le RM peut prendre, d'autres sur les activités mises en œuvre. De même, les formes et activités liées au RM varient énormément d'un auteur à l'autre. Ce flou conceptuel entourant le RM et son importance dans l'apprentissage des mathématiques mènent à un besoin de conceptualisation du RM. Ce projet cherche à répondre à ce problème en se penchant sur le sens du concept de RM du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage au primaire et au secondaire, à une meilleure compréhension de ce qu'est le raisonnement en mathématique.

Cette étude théorique, du développement de la problématique jusqu'à la proposition du modèle conceptuel, est sous-tendue d'une perspective commognitive (Sfard, 2008). Afin de supporter le développement de ce modèle, la démarche d'anasynthèse (Legendre, 2005) a été privilégiée. Un corpus composé de textes du domaine de la recherche en didactique des mathématiques qui s'intéressent au RM a été analysé, puis synthétisé avec une lunette commognitive, afin de proposer un modèle conceptuel du RM pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire.

Dans cette perspective, le RM est conceptualisé comme un processus commognitif qui permet d'inférer des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés. Il s'agit d'une activité métadiscursive qui permet un développement de niveau objet, c'est-à-

dire que le RM permet un développement en extension du discours et non le développement d'un nouveau discours, ce qui le différencie de l'abstraction. La valeur épistémique de ces énoncés est un élément important qui met en jeu différentes règles discursives.

La synthèse de la littérature a dégagé deux aspects principaux qui caractérisent le RM : l'aspect structurel et l'aspect processuel. L'aspect structurel est associé à la forme du RM, qui est traditionnellement définie comme déductive et inductive. L'anasynthèse de la littérature a permis de caractériser trois structures élémentaires du RM à savoir la structure déductive, inductive, abductive. L'analogie a aussi un aspect structurel important, mais nécessite l'appel à l'aspect processuel pour bien la définir. L'aspect processuel fait référence au RM en tant qu'activité discursive. La synthèse de la littérature a permis de conceptualiser l'aspect processuel autour de deux pôles et de proposer une définition pour chacun des 9 processus retenus. Les processus de recherche de similitudes et de différences font référence à généraliser, identifier une régularité, conjecturer, classer et comparer. Les processus de recherche de validation se déclinent en : justifier, prouver, démontrer. Enfin, un dernier processus peut être considéré comme support des processus de recherche de similitudes et de différences et des processus de recherche de validation. Il s'agit d'exemplifier.

Construit à l'aide d'une littérature hétéroclite, ce modèle est constitué d'un réseau conceptuel du RM cohérent avec la perspective commognitive. Chacun des deux aspects (structurel et processuel) et les liens qu'ils entretiennent éclairent le RM en tant qu'activité métadiscursive. Enfin, ce modèle pourrait apporter certains éléments de réflexions et certaines pistes de recherche associés au développement du RM en classe du primaire et du secondaire.

Mots-clés : raisonnement mathématique, didactique des mathématiques, modèle conceptuel, commognition, anasynthèse, primaire, secondaire

L'INTRODUCTION¹

L'étude du raisonnement puise ses origines dans l'antiquité et n'a cessé depuis d'éveiller les passions. Il en est de même pour l'étude du raisonnement mathématique [RM] qui, ces dernières années, est omniprésente dans la littérature scientifique en didactique des mathématiques. Ce projet cherche à contribuer, en se penchant sur le sens du concept de RM du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage au primaire et au secondaire, à une meilleure compréhension de ce qu'est un raisonnement en mathématique.

Derrière cet objectif se trouvent une ontologie et une épistémologie commognitive où la recherche est définie comme une forme de communication :

research, [...], can be defined as a particular, well-defined kind of discourse producing cogent narrative with which other human practices can be mediated, modified, and gradually improved in their effectiveness and productivity... (Sfard, 2008, p. 35).

Les règles d'acceptabilité des discours à l'intérieur d'une communauté donnée se font, implicitement ou explicitement, par les membres de cette communauté. L'avancement d'un champ d'études passe alors par une clarification des concepts relatifs à ce champ. C'est en fait ces propos qui m'ont amenée, entre autres, à

¹ Ce document utilise la nouvelle orthographe, seules les citations conservent l'orthographe d'origine.

m'intéresser au concept de RM. Par ailleurs, le socioculturalisme mène aussi à l'idée de développement du discours en posant comme prémisse que le nouveau discours se construit toujours à partir des anciens, qui eux, sont socialement acceptés. De ce fait, la littérature scientifique, en tant que réalisation des discours présents dans la communauté de didacticiennes et de didacticiens des mathématiques, apparaît comme une source riche pour mieux comprendre le sens du concept de RM et ainsi en proposer un modèle conceptuel.

Le présent document correspond à l'aboutissement d'un long travail d'analyse et de synthèse de la littérature en didactique des mathématiques. Il répond à l'objectif de développement d'un modèle conceptuel du RM. Ainsi, dans le premier chapitre, je discute l'origine du projet qui s'enracine dans mon expérience à la formation des maitres. Ensuite, le contexte particulier du projet est présenté, c'est-à-dire un contexte où le système scolaire vient de vivre une réforme curriculaire qui s'est étendue sur une période de dix années. L'implantation de nouveaux programmes de formation du primaire au secondaire a débuté en 2001 et s'est terminée en 2011. Un programme de formation en mathématiques, au primaire comme au secondaire, axé sur trois compétences, dont celle de *déployer un raisonnement mathématique*², est maintenant en place (ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport [MELS], 2003, 2007). Ce programme est en phase avec d'autres réformes curriculaires qui ont eu lieu ailleurs dans le monde ainsi qu'avec certains documents régissant la construction de tests de classement mondiaux tel PISA [Program for International Student Assessment]. J'expose ensuite le problème qui mène à la nécessité d'un modèle de RM tel qu'il se présentait avant l'élaboration du cadre conceptuel. La littérature en didactique des mathématiques regorge d'écrits sur le sujet, mais certains éléments, tel le manque de conceptualisation du terme RM dans une perspective participationniste, freinent le

² Au primaire, on lira plutôt *raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques*.

développement de la recherche sur le RM à l'école obligatoire. Ce chapitre se termine par l'objectif principal de ce projet qui est d'élaborer un modèle conceptuel du RM du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage au primaire et au secondaire.

Je tiens ici à préciser que l'écriture de ce document pose un grand défi. La nature interprétative de cette thèse ainsi que la démarche méthodologique privilégiée, l'anasynthèse, amènent l'idée de cycles, d'un travail de va-et-vient entre l'analyse et la synthèse, dont il est extrêmement difficile de rendre compte sur papier. C'est un défi que je tente de relever ici. C'est la raison pour laquelle cette thèse n'est pas présentée selon le modèle standard d'élaboration de la problématique, suivi du cadre conceptuel et de la méthodologie.

Le deuxième chapitre présente plutôt la démarche méthodologique qui encadre cette recherche. Toutefois, le lecteur doit prendre note que cette démarche encadre en partie le développement de la problématique. En partie, puisque, bien que n'étant pas présente dès le début du projet, les boucles de rétroactions nécessaires à cette démarche méthodologique sont venues enrichir la problématique. Ce chapitre aurait donc pu être placé avant le chapitre qui présente la problématique de recherche. Par ailleurs, le choix de placer ce chapitre en deuxième est aussi dans l'intérêt du lecteur. En effet, pour bien comprendre l'apport de l'anasynthèse pour ce projet, il s'avère essentiel de déjà avoir une idée du problème de recherche, problème qui sera éclairé par l'élaboration du modèle qui débute au chapitre III. Je décris aussi comment la théorie commognitive³ (Sfard, 2008) contribue à l'élaboration du modèle et je

³ Commognition est un néologisme formé des termes cognition et communication. Ces deux concepts sont vus comme la même activité, la cognition étant une forme individualisée de communication.

présente l'anasyntèse (Legendre, 2005) comme une démarche encadrant tout le processus de développement du modèle.

Le troisième chapitre expose une synthèse de la littérature de laquelle se dégage une structure qui mènera à l'élaboration d'un modèle de RM. Cette synthèse débute par la présentation du cadre commognitif qui guide l'analyse et la synthèse de la littérature. Puis, quatre modèles de RM développés par Duval (1995), Lithner (2000, 2003, 2008), Cabassut (2005) et G. J. Stylianides (2005) sont analysés. Différents éléments sont alors mis en lumière. Enrichie de l'apport du reste du corpus, la synthèse mène à définir le RM en tant qu'activité commognitive inférentielle, c'est-à-dire que le RM est une activité de communication, avec les autres ou avec soi-même, qui permet d'inférer des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés. Ce processus est organisé en une certaine structure qui est contingentée par des règles discursives partagées et il est porteur d'une certaine valeur épistémique.

Cette synthèse dégage deux aspects au RM, à savoir un aspect structurel et un aspect processuel. Elle permet ainsi de spécifier les objectifs de recherche et de (re)cadrer l'élaboration d'un modèle du RM pour l'apprentissage et l'enseignement à l'école. Ces objectifs sont de proposer une élaboration et une structuration des aspects structurel et processuel du RM, et d'établir les liens entre l'aspect structurel et l'aspect processuel du RM. C'est donc autour de ces objectifs que sont structurés les chapitres suivants.

Les quatrième et cinquième chapitres sont le cœur de la thèse en exposant les deux aspects principaux du modèle, à savoir l'aspect structurel (chapitre IV) et l'aspect processuel (chapitre V) du RM. Ces deux aspects se dégagent de la littérature et l'argumentation qui est présentée au chapitre III fait état de l'importance de chacun pour bien comprendre ce qu'est le RM. L'aspect structurel est associé à la forme du

RM qui est traditionnellement définie comme déductive et inductive. L'anasynthèse de la littérature a permis de caractériser quatre structures du RM à savoir la structure déductive, inductive, abductive et analogique. L'aspect processuel fait référence au RM en tant qu'activité discursive. Plusieurs processus sont associés au RM dans la littérature. Une liste a été retenue pour l'analyse. Une synthèse basée sur la littérature est présentée pour chacun des termes retenus. Ce chapitre se termine par la synthèse qui présente les processus de RM proposés : des *processus de recherche de similitudes et de différences*, à savoir généraliser, identifier une régularité, conjecturer, classer, comparer; *des processus de recherche de validation* qui se déclinent en justifier, prouver, démontrer; et un *processus de support des autres RM*, exemplifier.

Le dernier chapitre présente la discussion et la conclusion. J'y discute des liens existants entre les deux aspects essentiels du modèle ainsi que les autres caractéristiques ressorties au chapitre III. Pour ce faire, un RM d'élève est analysé à l'aide du modèle pour montrer sa valeur euristique, c'est-à-dire comment, potentiellement, il pourrait être utilisé en recherche et en enseignement. Je reviens sur les critères de validité interne et externe du modèle et termine par la présentation des limites, des retombés et des prolongements possibles et souhaités.

CHAPITRE I

LA PROBLÉMATIQUE

1.1 L'origine du questionnement

Dès mes toutes premières expériences à la formation des maitres, je me suis questionnée quant à la nature du RM. Mes étudiants et étudiantes devaient apprendre à le développer et à l'évaluer puisque telle était la visée du programme de formation de l'école québécoise. Tout en les amenant à voir ce que n'était pas le RM (il était clair pour moi à ce moment-là que d'apprendre par cœur des tables de multiplication ou des algorithmes de calcul n'était pas apprendre à raisonner mathématiquement), tout en les poussant vers la recherche de sens et la résolution de problèmes, je me sentais incapable d'offrir un portrait complet de ce qu'était le RM. La plupart des descripteurs de cours que j'offrais étant orientés vers des contenus spécifiques (arithmétique, géométrie, algèbre, statistiques et j'en passe), il me semblait difficile d'explicitier ce qu'était le RM. En effet, les contenus primaient dans les tâches à faire, dans nos réflexions et nos discussions.

Au départ, comme les questions de mes étudiants tournaient surtout autour de l'évaluation de la compétence « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques » (ministère de l'Éducation du Québec [MEQ], 2000, p. 128), celle-ci me semblait problématique. J'ai donc cherché à développer des outils pour permettre

de faire l'évaluation de cette compétence. Mais avant d'évaluer, encore faut-il savoir ce qui est à évaluer. En amont de cette réflexion, il faut également être en mesure de favoriser le développement de ce raisonnement. Développer le RM, qu'est-ce que cela signifie vraiment? Plus je lisais et réfléchissais à ce qu'était le RM, et plus ce concept me semblait complexe et difficilement caractérisable.

Dans un autre ordre d'idée, un aspect important de la profession enseignante, et auquel devaient préparer mes cours, est le développement (ou le choix) de tâches qui amèneront les élèves vers les apprentissages désirés, dans le cas qui nous intéresse, le développement du RM. Plusieurs types de savoirs peuvent influencer le choix d'une tâche. En particulier, une compréhension de ce qu'est le RM s'avère essentielle pour juger si un ensemble de tâches est pertinent ou non à son développement. Puisque la preuve est souvent associée au développement du RM, on peut, par exemple, faire un parallèle avec les savoirs mathématiques requis par les enseignants pour choisir et utiliser des tâches développant la compréhension de la preuve chez les élèves. Le choix de ces tâches, selon A. J. Stylianides et Ball (2008), nécessite entre autres une conception riche de la preuve, une compréhension de diverses stratégies de preuves, une compréhension de comment le contexte influence l'activité de prouver. Il en va de même pour n'importe quel type de tâches, en particulier, les tâches visant le développement du RM.

Mes diverses réflexions ne faisaient qu'alimenter mon questionnement sans le satisfaire. Il semblait nécessaire de développer chez les futurs enseignants une compréhension adéquate du RM, mais j'étais incapable de répondre à mes interrogations. Les mêmes questions revenaient : que signifie développer le RM chez des élèves? Qu'est-ce que le RM? En tant que formatrice des maitres, j'ai voulu enrichir ma réflexion par la lecture d'écrits scientifiques sur le sujet. Toutefois, malgré la pléthore de textes associés au mot-clé RM, ayant le terme RM dans le titre

ou disant l'étudier, les projets qui caractérisaient explicitement le RM se faisaient plutôt rares. Il n'y avait pratiquement pas de modèle satisfaisant pouvant m'aider dans ma tâche de formatrice. Mais avant de discuter autour de ces publications sur le RM et d'exposer les problèmes nécessitant l'élaboration d'un modèle du RM, il semble pertinent d'explorer le contexte dans lequel ce projet a pris naissance.

1.2 Le contexte

Les différents programmes de formation à travers le monde ont subi de grands changements dans les vingt dernières années. En fait, les programmes de mathématiques du Québec et d'ailleurs dans le monde placent le développement du RM au premier plan dans l'enseignement primaire et secondaire (MELS, 2003, 2007; MEO, 2005; NCTM, 1995, 2000; QCA, 2007).

La mise de l'avant du RM par les politiques éducationnelles et les recherches sur les RM sont souvent justifiées par sa relation avec la compréhension et le sens (donner du sens au monde qui nous entoure). C'est par l'utilisation de différents RM que les élèves donnent du sens aux contenus mathématiques rencontrés en classe et aux processus mathématiques nécessaires à la résolution de problèmes mathématiques.

Restructuring the high school mathematics program around reasoning and sense making enhances students' development of both the content and process knowledge they need to be successful in the continuing study of mathematics and in their lives (Martin *et al.*, 2010, p. 8).

Les nouvelles exigences ministérielles dans les programmes du Québec, à savoir le développement de compétences, se répercutent évidemment sur les manuels scolaires et les méthodes d'enseignement. En effet, les manuels doivent être approuvés par le MELS et de ce fait devraient en principe aider les élèves à développer la compétence

liée au RM. De même, le programme prescrit aux enseignants de favoriser le développement du RM chez leurs élèves, et ce, dès le primaire. Ces changements, quoique pouvant sembler mineurs, ont aussi un impact sur la formation des maîtres et la formation continue. La communauté universitaire doit s'assurer que les formations offertes aux enseignants leur permettent de favoriser et de juger le développement du RM chez leurs élèves. Pour ce faire, une bonne compréhension de ce qu'est le RM est nécessaire. Mais qu'entend-on par RM dans les différents programmes? Avant d'analyser les programmes de formation du Québec, un bref survol des programmes et cadres internationaux permet de mieux comprendre le contexte dans lequel les programmes québécois ont été développés tout en commençant à mettre au jour le flou entourant le concept de RM en éducation des mathématiques.

1.2.1 Le RM dans l'éducation à l'international

Afin de tracer un portrait de ce qui est entendu par « raisonnement mathématique » dans différentes institutions à l'international, les prochains paragraphes portent sur trois documents qui influencent plusieurs pays à savoir le cadre d'évaluation PISA de l'OCDE [Organisation de Coopération et de Développement économique], le cadre d'évaluation TIMSS [Trends in International Mathematics and Science Study] et le *Principles and Standards for School Mathematics* du NCTM [National Council of Teachers of Mathematics]. La présentation de chacun de ces documents permet de souligner différentes convergences et divergences, de même que certaines absences. Cette synthèse sera présentée à la suite de l'analyse de l'ensemble des trois documents.

1.2.1.1 Le cadre d'évaluation PISA

L'OCDE propose un cadre d'évaluation des compétences mathématiques pour les élèves de 15 ans, âge auquel les mathématiques ne font plus partie de l'enseignement obligatoire dans la plupart des pays membres de l'OCDE. Le Canada, dont la province de Québec, participe à l'étude PISA qui a lieu tous les trois ans et qui vise à comparer les performances des différents systèmes éducatifs en évaluant les acquis développés par les élèves en fin de parcours scolaire obligatoire. Ce cadre reflète les politiques des différents pays membres de l'OCDE et table sur l'expertise développée par les chercheurs en éducation des mathématiques (OCDE, 2006). On peut constater, par les nombreux articles de presse consacrés aux résultats de cette évaluation, que l'étude PISA a une certaine influence sur ce qu'est apprendre les mathématiques dans notre société.

Par la participation à PISA, les pays participants cherchent à évaluer « la capacité des élèves à analyser, à raisonner et à communiquer efficacement des idées lorsqu'ils posent, formulent et résolvent des problèmes mathématiques ou en interprètent les solutions, dans des contextes variés (OCDE, 2006, p. 82). Ce cadre s'articule autour de la définition de culture mathématique :

La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi (OCDE, 2006, p. 82).

Tout au long du document, le terme raisonnement est utilisé, souvent accolé à d'autres termes tels : mathématique, quantitatif, spatial, analytique, direct, indirect et proportionnel. Il est aussi fait mention que les démonstrations mathématiques sont un

type particulier de RM. Dans ce document, on retrouve la compétence *pensée et raisonnement* qui se libelle comme suit :

Savoir poser des questions à caractère mathématique, comme “Y a-t-il...?”, “Si oui, combien...?” ou “Comment puis-je trouver...?”; connaître le genre de réponse que les mathématiques donnent à de telles questions; faire la distinction entre différentes sortes d'énoncés (définitions, théorèmes, conjectures, hypothèses, exemples, assertions, conditions, etc.); et comprendre la portée et les limites de concepts mathématiques donnés et pouvoir en tenir compte (OCDE, 2006, p. 110).

Par ailleurs, le mot raisonnement se retrouve aussi dans la définition de la compétence *Argumentation* :

Savoir ce que sont des démonstrations mathématiques et en quoi elles diffèrent des autres types de raisonnement mathématique; suivre et évaluer des enchainements d'arguments mathématiques de nature diverse; posséder un sens heuristique (« Qu'est-ce qui peut – ou ne peut pas – se passer? » et « Pourquoi? »); et savoir développer et exprimer des arguments mathématiques. (OCDE, 2006, p. 110).

Dans ce document, *pensée* et *raisonnement* semblent à plusieurs égards synonymes. Le raisonnement quantitatif, par exemple, est associé à diverses composantes telles avoir le sens des nombres, pouvoir représenter les nombres sous diverses formes, « sentir » l'ordre des grandeurs et l'élégance d'un calcul mathématique. À un autre moment, le terme *pensée quantitative* est utilisé pour référer à ces diverses composantes.

Pour évaluer la culture mathématique, différentes tâches sont construites et associées à des contextes et contenus particuliers. Toutefois, ces tâches ne ciblent pas une compétence en particulier, mais un groupe de compétences. Les groupes de compétences sont alors associés à trois groupes : le groupe de la reproduction, le

groupe des connexions et le groupe de réflexion. Dans chacun de ces groupes, le raisonnement est présent, mais associé à différentes activités de l'élève. Dans le groupe reproduction, il est associé à l'utilisation de concepts dans des contextes où ils ont été appris, à des questions comme « combien y a-t-il de...? », à faire la distinction entre des définitions et des affirmations. Dans le groupe connexion, il est associé à l'utilisation de concepts dans des contextes qui diffèrent légèrement de ceux rencontrés lors de l'apprentissage, à des questions comme « comment peut-on trouver...? » ou à faire la distinction entre différents types d'affirmations. Enfin, dans le groupe réflexion, le raisonnement est associé, en plus de ce qui est présent dans les autres groupes, à pouvoir réfléchir sur les distinctions entre hypothèse, théorème, conjecture, pouvoir comprendre la portée et les limites des concepts mathématiques en jeu ou pouvoir généraliser des résultats. Il aurait été intéressant de pouvoir analyser quels items sont reliés au raisonnement par les auteurs, mais ces derniers sont classés par groupe et non par compétences.

1.2.1.2 Le cadre d'évaluation TIMSS

Le TIMSS regroupe un ensemble de pays qui désirent, par la comparaison entre autres de la réussite des élèves, évaluer leur système d'enseignement. Tout comme pour PISA, le cadre du TIMSS est développé par des experts de différents domaines (curriculum, mesure et évaluation, éducation) de plusieurs pays participants à l'enquête. Le test a lieu tous les quatre ans en 4^e et 8^e année (2^e secondaire au Québec).

Pour le TIMSS, « Students should be educated to recognize mathematics as an immense achievement of humanity, and to appreciate its nature » (Mullis, Martin, Ruddock, Sullivan et Preuschoff, 2009, p. 19). Par ailleurs, il ne s'agit pas de la raison centrale pour inclure les mathématiques dans le curriculum obligatoire.

Prime reasons for having mathematics as a fundamental part of schooling include the increasing awareness that effectiveness as a citizen and success in a work place are greatly enhanced by knowing and, more important, being able to use mathematics (Mullis *et al.*, 2009, p. 19).

La nature utilitaire des mathématiques est donc mise de l'avant ici. Le cadre met de l'avant un apprentissage des mathématiques centré sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou relié à la vie courante.

Le cadre d'évaluation en mathématiques est organisé par domaine mathématique (par exemple, nombre, géométrie) et par processus de pensée. Chaque item est associé à un domaine et un processus. Les trois processus de pensée mentionnés dans le cadre sont : savoir, appliquer et raisonner. Savoir fait référence aux faits, concepts et procédures que l'élève doit savoir. Appliquer fait référence à l'habileté d'appliquer ces savoirs pour résoudre des problèmes. « Reasoning goes beyond the solution of routine problems to encompass unfamiliar situations, complex contexts, and multiple step problems » (Garden *et al.*, 2006, p. 117). Dans ce cadre, raisonner signifie aussi la « capacity for logical, systematic thinking. It includes intuitive and inductive reasoning based on patterns and regularities that can be used to arrive at solutions to non-routine problems » (Mullis *et al.*, 2009, p. 45). On relie le raisonnement à l'analyse, à la généralisation et la spécialisation, à l'intégration et la synthèse, à la justification et à la résolution de problèmes non routiniers. La capacité à apprécier et à construire des conjectures est aussi mentionnée. Ce cadre définit le problème non routinier comme des « problems that are very likely to be unfamiliar to students » (Mullis *et al.*, 2009, p. 44). Comme le mentionne ce cadre, le processus de « raisonner » dépend donc des deux autres processus (savoir et appliquer). Encore une fois, l'analyse des items s'avère difficile, car ces derniers sont présentés en vrac et non reliés à un ou des processus.

1.2.1.3 Le *Principles and Standards for School Mathematics* du NCTM

Le *Principles and Standards for School Mathematics* [PSSM] du NCTM est un programme-cadre qui, jusqu'à 2012, était le document de référence officiel aux États-Unis⁴ et qui a influencé d'autres pays à travers le monde dont le Canada. En particulier, les programmes de mathématiques du Québec citent ce document dans leurs références. Le cadre du NCTM propose cinq principes et dix standards qui chapeautent la vision de l'enseignement des mathématiques dans les écoles américaines de la maternelle (5 ans) à la douzième année (18 ans). Ces standards ont été conçus pour fixer les buts de l'enseignement obligatoire en mathématiques, pour servir de ressources aux enseignants, guider le développement de curriculums et stimuler les discussions sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (NCTM, 2000). Dans ce programme-cadre, cinq standards sont consacrés à cinq sous-domaines mathématiques et cinq sont d'ordre plus général. Entre autres, un standard (reasoning and proving) est consacré au raisonnement :

Instructional programs pre-kindergarten through grade 12 should enable all students to –

- recognize reasoning and proofs as fundamental aspects of mathematics;
 - make and investigate mathematical conjectures;
 - develop and evaluate mathematical arguments and proofs;
 - select and use various types of reasoning and methods of proofs
- (NCTM, 2000, p. 56)

Le PSSM (NCTM, 2000) mentionne différents types de raisonnements possibles : raisonnement inductif, raisonnement déductif, raisonnement algébrique, probabiliste, géométrique, proportionnel, statistique. Dans ce document, le raisonnement est lié à

⁴ En 2012, le *Common Core State Standards Initiative* a étendu la vision présentée dans le PSSM à un document curriculaire qui prescrit un contenu mathématique pour chaque niveau scolaire.

différentes activités de l'élève tels l'exploration de phénomènes et le développement d'idées, la justification de résultats, l'utilisation de conjectures. Le niveau de rigueur est établi en fonction du niveau scolaire. Le RM est directement lié à la compréhension. Le développement du RM chez l'élève passe par la réalisation, chez ce dernier, que le RM se base sur des énoncés et des règles spécifiques. En mathématique, une assertion demande toujours une raison mathématique. Le développement du RM s'appuie aussi sur l'apprentissage de faire et tester des conjectures et sur la réalisation de preuves qui deviennent de plus en plus formelles. Par exemple, le NCTM mentionne que l'élève de la 5^e à la 8^e année doit vivre différentes expériences liées au RM tel, examiner des relations et des structures pour détecter des régularités, formuler des généralisations et des conjectures à propos de ces régularités, évaluer des conjectures, construire et évaluer des arguments mathématiques.

1.2.1.4 En bref

Dans ces trois cadres, on remarque que le RM prend différents sens. TIMSS évalue la compétence à raisonner par le biais de la résolution de problèmes non routiniers. La flexibilité semble donc être une caractéristique importante du RM pour le TIMSS. Pour sa part, l'OCDE n'associe pas directement « raisonner » et « résolution de problèmes non routiniers ». Par ailleurs, elle ne donne pas non plus de définition propre au RM. Ce dernier est soit accolé à « pensée » ou à « argumentation ». Pour les cadres du TIMSS et du NCTM, le RM se décline en diverses activités : analyser, généraliser, spécialiser, intégrer, synthétiser, justifier, identifier une régularité, conjecturer, évaluer, argumenter, prouver. Si plusieurs de ces termes peuvent être intuitivement définis, il n'est pas toujours clair en quoi ils font référence au RM. Sont-ils associés au RM tous sur la même base? Ont-ils des caractéristiques qui leur sont propres? Ces questions méritent d'être approfondies pour mieux comprendre le

RM dans l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire. Qu'en est-il maintenant des contextes canadiens et québécois?

1.2.2 Le contexte canadien

Chacune des provinces du Canada a son propre système d'éducation. Par ailleurs, l'Ouest canadien et l'Est canadien se sont chacun dotés d'un cadre commun pour guider l'élaboration des programmes. Dans ces deux cadres, on retrouve le concept de raisonnement. Dans le protocole de l'Ouest et du Nord canadiens [PONC] (2006), le raisonnement est associé à la pensée logique et le développement de sens. Il s'agit d'un des sept processus présents dans le protocole. Deux formes de raisonnement doivent être favorisées, à savoir le raisonnement déductif (qui s'appuie sur ce qui est déjà connu ou supposé vrai) et le raisonnement inductif (qui permet de généraliser des régularités et de les tester).

Dans le programme-cadre des provinces atlantiques (Department of Education, 2000), le raisonnement est relié à ce qui est appelé « unifying ideas » avec résolution de problèmes, établir des liens et communiquer. Par ailleurs, dans le document, on semble s'appuyer sur ce qui est déjà établi par le NCTM pour définir le RM en classe de mathématique. Il n'y a aucun cadre pour guider le développement du raisonnement en classe de mathématiques dans ce document.

1.2.3 Le contexte québécois

Du côté du Québec, le MELS implante, depuis le début des années 2000, des programmes de mathématiques qui demandent aux enseignantes et aux enseignants du primaire et du secondaire de développer trois compétences mathématiques chez leurs élèves. Pour le primaire et le secondaire, les trois compétences se libellent

ainsi : *résoudre des situations problèmes, déployer un raisonnement mathématique*⁵ et *communiquer à l'aide du langage mathématique*. Le MELS (2007) anciennement le ministère de l'Éducation du Québec [MEQ], mentionne aussi que la compétence *déployer un raisonnement mathématique* « est la pierre angulaire de toute activité mathématique (p. 2) ». Ces nouvelles orientations apportent des changements importants dans les pratiques d'enseignement et d'évaluations puisque le RM, déjà présent depuis les programmes des années 1990, semble maintenant au premier plan puisqu'il y a prescription d'évaluation.

1.2.3.1 Le programme de formation de l'école québécoise du primaire

Dans le Programme de formation de l'école québécoise [PFEQ] du primaire, la compétence *raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques* amène le MELS à définir le raisonnement comme suit :

Raisonner, c'est organiser de façon logique un enchaînement de faits, d'idées ou de concepts pour arriver à une conclusion qui se veut plus fiable que si elle était le seul fait de l'impression ou de l'intuition. Non pas que l'intuition et la créativité n'y aient leur place; elles doivent toutefois trouver leur aboutissement dans l'expression formelle de la conclusion du raisonnement (MEQ, 2000, p. 128).

Cette définition correspond à peu de chose près à la définition d'inférence de Legendre⁶ (2005). D'ailleurs, il est spécifié que « [L]e raisonnement mathématique

⁵ Au primaire, la cette compétence se libelle plutôt « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ».

⁶ « Inférence : Opération mentale qui consiste à établir des liens logiques entre des propositions jugées comme vraies et d'autres propositions dont la vérité dépend de leur filiation avec les premières » (Legendre, 2005, p. 770).

que vise à développer l'école primaire est à la fois déductif, inductif et créatif » (MEQ, 2000, p. 124). Le raisonnement peut donc prendre une forme déductive ou inductive, les deux formes les plus usitées d'inférence (Legendre, 2005).

Remarquons dans la citation précédente que le RM, selon le MEQ (2000), peut aussi être créatif. Par créatif, le MELS entend que l'organisation des différents enchainements pour arriver à une conclusion est nouvelle pour l'élève. L'élève doit imaginer cette organisation, il ne doit pas l'avoir imitée. Notons que l'adjectif « créatif » choisi pour qualifier le raisonnement porte sur la nature de l'organisation logique et non sur la forme de l'organisation, tel que c'est le cas pour les adjectifs inductif et déductif. Par *nature*, il est entendu que la forme de l'inférence importe peu; c'est le fait qu'un enchainement est nouveau pour celui qui raisonne qui permet de qualifier le raisonnement de « créatif ». C'est donc dans la nature du raisonnement d'être créatif et non dans sa forme. Par ailleurs, on peut se demander en quoi cet adjectif est pertinent pour qualifier le raisonnement. Tout apprentissage implique éventuellement un raisonnement nouveau pour l'élève, une nouvelle organisation des objets du discours pour en arriver à comprendre. Dans un même ordre d'idée, le terme « créatif » est, selon Lithner (2008), un *hooray word*, c'est-à-dire un mot défini de façon floue.

Par ailleurs, le discours entourant le RM est essentiellement sur le type d'inférences menées par les élèves. On ajoute quelques éléments sur le fait que raisonner c'est « établir des relations, à les combiner entre elles et à les soumettre à diverses opérations pour créer de nouveaux concepts et pousser plus loin l'exercice de la pensée mathématique » (MEQ, 2000, p. 124) ou encore, que par organiser il est entendu « des activités mentales telles qu'abstraire, coordonner, différencier, intégrer, construire et structurer » (MEQ, 2000, p. 128). Toutes ces activités requièrent de la créativité de la part de l'élève.

De plus, une analyse des attentes de fin de cycle amène à se questionner sur l'interprétation faite de ces éléments de définition, comme permet de le constater l'extrait suivant :

À la fin du troisième cycle, l'élève mobilise des processus personnels et conventionnels de calcul mental et écrit pour les quatre opérations sur les nombres naturels et les nombres décimaux. À l'aide de matériel concret et de schémas, il commence à additionner et à soustraire des fractions, et à multiplier des fractions par des nombres naturels (MEQ, 2000, p. 131).

Tout en mentionnant que les techniques et les algorithmes sont nécessaires au RM, on peut dire qu'ils ne sont pas suffisants, qu'il manque certains liens entre les éléments de définition du raisonnement donnés par le MELS et les attentes d'évaluation. Par exemple, qu'entend-on par processus? Quels liens y a-t-il avec les formes inductives, déductives et les techniques d'opérations sur les nombres? Ensuite, il peut y avoir glissement et réduction à une évaluation uniquement centrée sur la maîtrise des techniques et des algorithmes, d'un point de vue mécanique, sans que l'organisation des idées ou le RM ne soit présent. Quels liens y a-t-il entre la définition donnée par le MELS et ces attentes? Cette dernière question ne peut être répondue sans avoir bien circonscrit ce qui est entendu par RM. C'est d'abord à la question de définition que je suis ici confrontée : mais qu'est-ce que le RM? Une inférence? Un ensemble d'algorithmes? Un ensemble d'activités mentales? Comme il sera exposé dans les paragraphes qui suivent, les propos du programme du secondaire en ce qui concerne le RM se complexifient quelque peu.

1.2.3.2 Le programme de formation de l'école québécoise du secondaire

Pour ce qui est du secondaire, le MELS stipule que la compétence *déployer un raisonnement mathématique* « consiste à émettre des conjectures, à critiquer, justifier

ou à infirmer une proposition en faisant appel à un ensemble organisé de savoirs mathématiques » (MELS, 2003). Au deuxième cycle du secondaire, le MELS, tout comme le NCTM (2000), précise que « cette compétence sollicite en outre les raisonnements propres à chacun des champs mathématiques ainsi que différents types de raisonnements plus généraux... » (MELS, 2007, p. 28). Par raisonnements généraux, le MELS entend alors : raisonnement inductif, raisonnement déductif et raisonnement par analogie. Il prend le soin d'ajouter aussi le raisonnement par disjonction de cas, par contradiction et par réfutation à l'aide de contreexemple. Par raisonnements propres à chacun des champs, le MELS entend : raisonnement algébrique, arithmétique, géométrie, statistique et probabiliste⁷.

Il est spécifié ce qui peut être réalisé par un élève qui déploie ces raisonnements spécifiques. Toutefois, les raisonnements spécifiques des différents champs de savoirs ne sont pas clairement définis ni les liens qui existent entre eux. Par exemple, le passage suivant fait référence à des exemples d'utilisation du raisonnement dans le sous-domaine de l'algèbre :

Pour déployer un raisonnement algébrique, l'élève *explore et compare différentes possibilités, puis justifie ses choix*. Il repère diverses relations et exploite, selon les buts visés, des processus d'interpolation, d'extrapolation ou d'optimisation en s'appuyant sur la compréhension qu'il a des liens de dépendance et des concepts de fonction et de réciproque. Il exploite des procédés algébriques afin *de dégager des lois, des règles et des propriétés* qui, à leur tour, servent à *valider des conjectures*, par exemple en *démontrant par déduction* l'équivalence de deux expressions (MELS, 2007, p. 29, accent ajouté).

⁷ Ces types de raisonnement spécifiques sont aussi mentionnés dans le programme du 1^{er} cycle du secondaire, mais uniquement en note de bas de page.

Dans cet extrait, et contrairement aux extraits des autres sous-domaines mathématiques où le terme raisonnement n'est pas repris, le terme raisonnement algébrique est utilisé. Toutefois, à l'exception faite des concepts liés à l'algèbre, il est difficile de percevoir la particularité du raisonnement algébrique. Il y a les termes relations, lois, règles, valider, conjectures et déduction qui sont eux liés à la définition de RM d'un point de vue général. Le terme « algébrique » semble ajouter une précision à la nature des contenus impliqués dans le raisonnement et non sur la forme du raisonnement lui-même, ni sur la nature des processus.

Contrairement aux programmes du secondaire des décennies précédentes⁸, qui ne parlaient que des formes déductives et inductives du RM, la caractérisation du RM par le MELS va plus loin en faisant mention du raisonnement par analogie⁹ ainsi que de types de raisonnements spécifiques propres à chacun des sous-domaines mathématiques, éléments importants quant à la forme et à la nature des raisonnements utilisés en classe de mathématique. En spécifiant quelques formes et quelques types de RM, le MELS reconnaît que le RM n'est pas que déductif, mais diversifié de par sa forme et sa nature.

Dans un même ordre d'idées, le PFEQ du secondaire met l'accent sur un autre aspect du raisonnement à savoir des actions qui sont effectuées lorsqu'on raisonne : émettre des conjectures, critiquer, justifier et infirmer une proposition. En fait, contrairement au primaire, où le discours porte essentiellement sur les formes d'inférences, ces processus sont mis au premier plan. L'expression « raisonnement créatif » a

⁸ Par exemple, voir le programme de mathématiques de troisième secondaire (MEQ, 1995, p. 128).

⁹ Le raisonnement par analogie est associé par Oléron (1977) à la forme du raisonnement, ce qui semble être le cas dans le PFEQ.

complètement été effacée du programme du secondaire. En fait, la créativité est toujours mentionnée dans le programme, mais ne qualifie plus le raisonnement comme tel, mais bien la pensée mathématique en général.

Il y a donc trois aspects différents du RM qui apparaissent à la lecture du PFEQ à savoir les formes (déductive, inductive, par analogie, par réfutation), la nature des inférences (créative ou non), ainsi que les actions (par exemple, conjecturer, justifier, abstraire, valider, mettre en relation) liées aux RM. Par ailleurs, le PFEQ du secondaire, tout comme celui du primaire, ne présente pas de réflexion théorique sur le RM. Ceci n'est pas un reproche en soi, mais on peut penser que même si elles ne sont pas explicitées dans les documents ministériels, les programmes de formation s'appuient sur certaines assises conceptuelles.

1.2.4 De l'importance du RM dans l'éducation mathématique

Il s'avère que le RM a une place très importante dans les différents cadres et programmes présentés ici, et par le fait même, dans la classe de mathématiques. Tout en donnant différents éléments de définition du RM, un cadre davantage axé sur le RM qui mettrait en relation ces différents éléments pourrait favoriser une meilleure compréhension du développement du RM chez l'élève. Conceptualiser le RM est essentiel pour la communauté de didactique des mathématiques, et ce, autant pour la contribution aux savoirs scientifiques que pour l'amélioration de la formation des maîtres et de l'apprentissage des élèves : « The aim of developing mathematical reasoning in classrooms calls on the research community to clarify what is mathematical reasoning and what it looks like in school contexts » (Reid, 2002, p. 7). La littérature scientifique, s'intéressant à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques, devrait nous éclairer sur le sujet. Qu'en est-il vraiment? Une analyse de différents écrits scientifiques permettra de mettre en lumière les convergences, les

divergences et les potentialités d'une conceptualisation du RM. Mais avant de s'attarder à cette analyse, la prochaine section fait état de ma vision des mathématiques, de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Cette vision influence mon interprétation de la littérature. L'explicitation de ces présupposés épistémologiques permettra au lecteur de mieux comprendre l'interprétation qui a été faite de la littérature.

1.3 Les fondements paradigmatiques de ma recherche

Legendre (2005) définit un paradigme, d'un point de vue général, comme une « [I]dée générale, [une] vision d'ensemble particulière et unifiante d'une réalité. [Un] [E]nsemble des présupposés généraux que partagent les membres d'un groupe sur un objet particulier » (p. 981). D'un point de vue spécifique à la recherche, il définit le paradigme comme un

[E]nsemble d'énoncés ayant fonction de prémisses, présentant une vision globale d'un domaine, facilitant la communication, l'évolution et la créativité, situant en contexte l'étude des phénomènes concernés, guidant l'élaboration de théorie et suggérant les pratiques appropriées (p. 981).

C'est dans ces deux sens, général et spécifique, qu'il faut comprendre ce qui est traité dans cette section. En ce sens, un paradigme précise l'ontologie et l'épistémologie du chercheur par rapport à son champ d'études.

Mon projet portant sur l'élaboration d'un modèle de RM pour l'enseignement primaire et secondaire, je présente ici différents énoncés qui sous-tendent ma vision des mathématiques, de l'enseignement et de l'apprentissage. Ces différents énoncés guident la réalisation de l'objectif de ce projet et permettent de comprendre ce qui a pu influencer la lecture des différents textes et certains choix qui seront faits tout au

long du projet. De ce fait, j'ai choisi de présenter ces fondements après le contexte mais avant le développement du problème de recherche pour donner au lecteur (qui s'est déjà fait une idée d'où se situe ma recherche) les clés d'interprétation qui ont guidées ma propre lecture.

Pour permettre de mieux me situer, je prendrai position par rapport à d'autres énoncés qui eux font partie d'autres paradigmes. Je préciserai la position paradigmatique de chercheuse dans le chapitre II, lors de la présentation de la démarche méthodologique qui sous-tend ce projet.

1.3.1 Des énoncés relatifs aux fondements des mathématiques

Avant d'introduire les différents énoncés qui fondent ma vision des mathématiques, je présente un survol des fondements des mathématiques les plus importants qui sont présents dans la société occidentale afin de mieux contraster mon positionnement. Les philosophies proposent différents fondements qui font référence à différents paradigmes. Le platonisme, le logicisme et le constructivisme^{10,11} (Dionne, 1982; Hersh, 1999) s'appuient sur une ontologie qui attribue une réalité objective aux objets mathématiques. Le formalisme, pour sa part, ne reconnaît pas l'existence réelle des objets mathématiques. Pour les tenants du formalisme, il n'y a qu'axiomes, définitions et théorèmes, créations de l'esprit humain. Toutefois, ces objets mathématiques sont tout de même absolus en ce sens que pour de mêmes axiomes et

¹⁰ Il faut noter que le constructivisme présenté ici n'est pas celui normalement discuté en didactique des mathématiques, mais bien une école de pensée particulière des mathématiques et de l'acceptation des savoirs mathématiques. Le savoir n'est pas considéré ici comme relatif à l'individu, mais bien comme absolu. C'est l'acceptabilité des savoirs qui s'appuie sur des constructions mathématiques, de là le terme constructivisme.

¹¹ Aussi nommé intuitionniste (Dionne, 1982; Ernest, 1993)

définitions, les mêmes mathématiques seront créées. Les mathématiques se fondent alors sur un langage formel et des règles d'inférences afin que « toute preuve puisse être présentée dans une dérivation formelle comportant un nombre fini d'étapes toutes vérifiables de façon purement mécanique » (Dionne, 1982, p. 22). Chacun de ces quatre fondements posent donc les mathématiques comme absolues, infaillibles.

En contraste, différentes philosophies ont voulu fonder les mathématiques comme faillibles, c'est le cas du quasi-empirisme supporté par Lakatos et du socioconstructivisme supporté par Ernest (Hersh, 1999) ainsi que du socioculturalisme développée par Sfard (2008). Comme l'on pourra constater, les fondements des mathématiques développés par Ernest (1993) et Sfard (2008) sont entre autres influencés par des préoccupations éducationnelles; préoccupations ignorées par les philosophies précédentes (Hersh, 1999).

Selon le premier courant, le quasi-empirisme, les objets et théories mathématiques, tout comme ceux des sciences, sont le résultat de l'activité humaine, et les fondements des mathématiques se trouvent donc dans cette activité hypothéticodéductive et son histoire. Les savoirs mathématiques évoluent et changent. Les mathématiques se développent par la résolution de problèmes et par la génération de conjectures qui peuvent être prouvées puis réfutées, modifiées puis prouvées de nouveau. C'est grâce à ces activités que les mathématiques évoluent.

To a formalist or Platonist who presents an inhuman picture of mathematics, I ask "If this were so, how could anyone learn it" [...] Mathematics is learned by computing, by solving problems, and by conversing, more than by reading and listening (Hersh, 1999, p. 27).

Selon Hersh (1999) et Ernest (1993), une limite du quasi-empirisme est que la nature des objets mathématiques, bien qu'étant le résultat d'une activité humaine, n'est pas spécifiée.

Le socioconstructivisme, proposé par Ernest (1993) et développé à partir du quasi-empirisme de Lakatos, tente de le compléter en qualifiant la nature des objets mathématiques. Pour ce second courant, les objets mathématiques sont des construits sociaux et l'objectivité des savoirs mathématiques se trouvent dans l'acceptation publique de ces derniers et non dans leur existence « réelle ». Les fondations des mathématiques, c'est-à-dire leur justification et validation, se trouvent donc dans le discours, les conventions et les règles sociales. Ce courant, introduit en philosophie des mathématiques par Ernest (Hersh, 1999) et fortement influencé par la pensée vygotskienne, s'intéresse non seulement aux justifications des savoirs, mais à leurs genèses et à leur nature. La (re)création des savoirs se fait par un va-et-vient entre les savoirs subjectifs (propres à un individu) et objectifs (construit socialement accepté) :

In summary, the social constructivist thesis is that objective knowledge of mathematics exists in and through the social world of human action, interactions and rules, supported by individuals' subjective knowledge of mathematics (and language and social life), which need constant re-creation. Thus subjective knowledge recreates objective knowledge, without the latter being reducible to the former (Ernest, 1993, p. 83).

Les savoirs individuels se développent pour donner du sens au monde social et physique. Ceci résulte en une négociation du sens (Ernest, 1993). Tout comme chez Vygotsky, les interactions sociales sont la clé pour le développement de la compréhension et l'évolution des processus mentaux.

Sous l'influence du socioculturalisme comme fondement des mathématiques, Sfard (2008) a développé la théorie commognitive¹² qui s'appuie sur une définition particulière des mathématiques. Cette théorie définit les mathématiques (la pensée mathématique) comme une activité de communication (avec soi-même). Sfard (2008) définit la communication comme :

a collectively performed patterned activity in which action A of an individual is followed by action B of another individual so that

1. A belongs to a certain well-defined repertoire of actions known as communicational
2. Action B belongs to a repertoire of re-actions, that fit A, that is, actions recurrently observed in conjunction with A. This latter repertoire is not exclusively a function of A, and it depends, among others, on factors such as the history of A (what happened prior to A), the situation in which A and B are performed, and the identities of the actor and re-actor (p.87).

Ainsi, selon Sfard (2012), ce qui découle de cet énoncé est que les mathématiques, ou la pensée mathématique, peuvent être vues comme un discours. Les mathématiques sont en premier lieu une activité discursive, et donc, elles se développent par un changement dans le discours. Le discours mathématique a son propre vocabulaire, ses propres médiateurs visuels, ses routines distinctes, ses énoncés généralement acceptés par la communauté mathématique. Dans le cadre de cette théorie, les objets mathématiques sont définis comme des objets abstraits qui sont construits à partir de la réification de processus discursifs¹³.

¹² On se souviendra que le terme commognition est un néologisme formé des mots cognition et communication. Quelques mots seront ajoutés à ce propos au chapitre 3.

¹³ La réification est un processus par lequel l'acteur remplace le discours sur un processus par un discours sur un objet (Sfard, 2008).

De définir les mathématiques comme une forme particulière de communication mène à des énoncés épistémologiques quelque peu différents de ceux stipulés par Ernest (1993). L'évolution du discours mathématique passe par la communauté mathématique. Dans un mouvement d'individualisation du discours, puis de (re)communication, des changements dans le vocabulaire, les routines ou encore les médiations visuelles sont proposés, rejetés, négociés.

En se positionnant dans un paradigme socioculturel, on accepte aussi qu'il puisse coexister plusieurs discours et qu'il n'y a pas de version « ultime » ou un seul vrai discours, mais seulement des discours plus convaincants que d'autres. Les différents fondements des mathématiques peuvent donc être vus comme différents discours coexistant dans la communauté mathématique et étant perçus comme plus ou moins convaincants selon les buts et les expériences des acteurs impliqués.

C'est sur la définition des mathématiques en tant que discours construit socialement que se fonde ma vision des mathématiques. Le discours ne donne pas accès aux mathématiques, il *est* les mathématiques. D'un point de vue ontologique, ceci est très différent d'autres fondements des mathématiques qui placent les mathématiques comme ayant une existence en soi, ou à tout le moins comme étant des savoirs absolus. D'un point de vue épistémologique, poser que les mathématiques sont des construits sociaux change le regard que l'on pose sur la validation des mathématiques. En effet, c'est la communauté mathématique qui détermine les règles à suivre, les médiateurs visuels acceptables, le vocabulaire à utiliser. Il peut donc y avoir différentes interprétations et évolutions de ces règles, médiateurs, mots de vocabulaires et énoncés acceptés. La création des géométries non euclidiennes en est un exemple.

Pour continuer sur les fondements de cette recherche, les paragraphes suivants montrent comment ces énoncés ontologiques et épistémologiques influencent la définition de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques.

1.3.2 Des énoncés relatifs aux fondements de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques

Pour établir le fondement de ma vision de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, je pars de la définition des mathématiques en tant que discours, une forme de communication particulière, un discours construit par une communauté mathématique qui en régit le vocabulaire, les règles, les médiateurs visuels et les énoncés acceptés. Dans la théorie commognitive, l'apprentissage (mathématique ou autre) est équivalent à un développement du discours, à une modification de l'activité discursive. Ce développement peut être étudié, jugé et décrit.

Comme le discours mathématique évolue historiquement et individuellement, on peut parler d'un développement des mathématiques autant historique que chez un individu (Sfard, 2012). Le terme apprentissage réfère alors à un type particulier de développement du discours chez un individu, celui qui fait tendre le discours de l'élève vers un discours déjà établi (socialement). Ce développement peut être, selon la théorie commognitive, de deux natures : reproductif ou productif.

La théorie commognitive (Sfard, 2008; 2012) définit deux types de processus d'apprentissage. Le premier relève du développement de niveau objet. En explorant différents objets mathématiques, il y a expansion du discours par l'acceptation de nouveaux énoncés à leur propos. Le second développement est de nature métadiscursive. Le développement métadiscursif se fait par une réflexion sur le discours déjà existant (et non uniquement sur ses objets). Le nouveau discours développé n'est pas uniquement une extension du discours existant; il est plus

complexe, les règles discursives auront changé et certaines règles de l'ancien discours devront être rejetées.

De voir l'apprentissage comme un changement de discours implique que l'acte d'enseigner consiste à amener l'élève à : (1) communiquer et (2) changer son discours. Il s'avère qu'enseigner les mathématiques, ce n'est pas une transmission des savoirs d'une autorité compétente à un *tabula rasa*. Il s'agit plutôt de permettre aux élèves de vivre cette culture mathématique, cette activité discursive. C'est amener les élèves à (re)construire les mathématiques en participant au discours mathématique. C'est leur permettre de partager les règles sociales, le vocabulaire, les médiateurs visuels de ce discours.

La classe devient une communauté mathématique où un discours émerge. Il y a individualisation de ce discours chez l'élève. Le discours mathématique d'une classe n'est pas une copie d'une partie du discours tenu par des mathématiciens d'expérience, il a ses propres règles, son vocabulaire, ses médiateurs visuels, ses routines.

L'enseignant a alors un rôle central à jouer en étant responsable de supporter et de guider l'élève dans son propre apprentissage, mais aussi de mettre en place des conditions favorables à l'apprentissage des mathématiques et de vivre cette activité avec lui. De plus, l'enseignant est porteur de cette culture mathématique afin que les mathématiques que les élèves développent soient les plus cohérentes possibles. Pour ce faire, le questionnement, les discussions et la négociation avec le groupe sont de mise, tout comme la mise en place d'activités d'exploration mathématiques riches pour chacun des élèves. « It is through communication with others that a person develops uniquely human forms of life and turns into an integral part of the human community » (Sfard, 2008, p. 280). Il est essentiel pour moi, mais aussi pour la

cohérence du projet, que ma vision du RM concorde avec cette vision. C'est donc avec ces lunettes que j'ai interprété la littérature portant sur le RM, et c'est en ce sens qu'il faut interpréter mon analyse de la littérature, c'est-à-dire que les mathématiques sont vues comme un discours particulier et que l'apprentissage est posé comme un développement de ce discours.

1.4 Le RM dans la littérature

À la suite de la présentation du contexte de la recherche, le constat suivant a été fait : le RM a une place importante dans la formation obligatoire, au Québec, tout comme mondialement. Ceci a mené à la question suivante : qu'est-ce que le RM -- question à laquelle il semble essentiel de répondre du point de vue de la formation des enseignants, des programmes, mais surtout du point de vue de la recherche en didactique des mathématiques. En effet, la recherche en didactique des mathématiques s'intéressant particulièrement à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques, il s'avère nécessaire de définir les objets qu'elle étudie. Le raisonnement étant un élément central à l'appropriation d'une culture mathématique par chaque individu, il s'impose en incontournable.

Il en résulte un ensemble impressionnant de textes portant (à divers degrés) sur le raisonnement dans le domaine de la didactique des mathématiques. Un tour d'horizon de ce qui concerne le RM dans la littérature en didactique des mathématiques est présenté ici. Par ailleurs, précisons que le raisonnement n'est pas l'apanage des mathématiques. En effet, « [l]a raison serait donc la faculté qui permet d'établir des "raisonnements", c'est-à-dire, à partir d'une [sic] certain nombre de jugements, d'en produire un nouveau, par ce qu'on appelle des mécanismes de pensée... » (Baruk, 1995, p. 1010). Comme l'humain établit de nouveaux jugements à partir d'ancien ailleurs qu'en mathématique, il s'en suit donc que l'humain raisonne dans plusieurs

sphères de sa vie. Néanmoins, le terme « raisonnement » est fortement lié au terme « logique » qui, lui, a connu un essor certain dans le domaine des mathématiques ces deux-cents dernières années avec la naissance de la logique mathématique au XIX^e siècle. Ainsi, l'étude de la logique (ou encore l'étude des raisonnements) a quelque peu quitté le joug de la philosophie pour devenir aussi mathématique (Baruk, 1995).

Le but ici est de commencer à dégager les informations pertinentes pour définir le RM en didactique des mathématiques, mais surtout de circonscrire le problème de recherche qui résulte en la pertinence d'un modèle théorique du RM. Même si le raisonnement ne se limite pas aux mathématiques, nous nous centrons sur la façon dont le RM est discuté en didactique des mathématiques. En effet, les prochains paragraphes font état des convergences, des divergences et des absences qui se retrouvent dans la littérature scientifique concernant le RM.

1.4.1 La diversité de vocabulaire entourant le RM

Dans la littérature sur le RM, on retrouve énormément d'adjectifs accolés au terme raisonnement : raisonnement déductif, raisonnement inductif, raisonnement abductif, raisonnement par analogie, raisonnement analytique, raisonnement par récurrence, raisonnement par l'absurde, raisonnement conditionnel, raisonnement abstrait, raisonnement algébrique, raisonnement statistique, raisonnement probabiliste, raisonnement quantitatif, raisonnement qualitatif, raisonnement spatial, raisonnement géométrique, raisonnement graphique, raisonnement proportionnel, pour ne nommer que ceux-là. Pour chacun de ces adjectifs, tout un pan de la littérature s'y attarde. Toutefois, peu de réflexions théoriques sont publiées, et ce, autant pour le RM d'un point de vue général que pour les raisonnements spécifiques. En effet, même si certains textes disent s'intéresser au développement de ces raisonnements chez les élèves, on s'attarde rarement à les définir (Yackel et Hanna, 2003).

Les deux prochaines sections décrivent un portrait des différents synonymes de raisonnement utilisés dans la littérature et mettent au jour le flou conceptuel entourant leur définition. Il faut noter que plusieurs définitions, tout comme le vocabulaire associé au raisonnement, sont ambiguës.

1.4.1.1 Quelques synonymes de RM

Selon delMas (2004), qui argumente à partir des propos de Galotti (1989, dans delMas, 2004), les expressions « pensée », « résolution de problèmes », « prise de décision », « pensée critique » et « *brainstorming* » s'utilisent souvent comme des synonymes des termes « raisonner » ou « raisonnement ». Prenons le cas de « pensée ». Dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques, certains auteurs établissent une différence entre « raisonnement » et « pensée », d'autres non. Par exemple, Peressini et Webb (1999) mentionnent que « mathematical reasoning can also be viewed as a dynamic activity that includes a variety of modes of thinking. We see mathematical reasoning [...] as an integral component of mathematical thinking (p. 157). » Ici, Peressini et Webb utilisent, dans la première partie de la citation, le terme « mode de pensée » pour faire référence à différents modes de raisonnement tel le raisonnement inductif, déductif, graphique, spatial ou abstrait. Toutefois, dans la seconde partie, ils considèrent le RM comme un élément jouant un rôle central de la pensée mathématique et non comme son équivalent. Pour eux, la pensée mathématique comprend, entre autres, la compréhension d'idées, la découverte des relations entre ces idées et la résolution de problèmes impliquant ces idées à partir d'habiletés de pensée mathématique. Le MELS (2003, 2007), pour sa part, fait une différence entre pensée mathématique et le RM. En effet, la pensée mathématique réunit, selon le MELS, les trois compétences du programme (résoudre,

raisonner et communiquer)¹⁴. L. F. Lee (1997), pour sa part, traduit *algebraic thinking* par raisonnement algébrique dans le résumé de sa thèse. La position prise ici sera que la pensée mathématique est synonyme de mathématiques, tout comme Sfard (2008) le définit, c'est-à-dire que la pensée mathématique est une individualisation de communication interpersonnelle. Le RM est ainsi plus restreint que la pensée mathématique, il reste donc à déterminer son champ conceptuel.

Ensuite, le fait que le terme « résolution de problèmes » est, selon delMas (2004), utilisé comme synonyme de RM rend la conceptualisation du RM davantage difficile. Premièrement, le terme résolution de problèmes est déjà lié à la compétence à résoudre une situation-problème aussi présente dans le PFEQ. Comment différencier ces deux compétences si les termes de leur libellé sont synonymes? Deuxièmement, le terme « problème » est aussi ambigu que celui de RM. Il existe diverses définitions du terme « problème » et un champ notionnel aussi, sinon plus large, qui entoure ce dernier. Certains associent le terme « problème » à une approche pédagogique, l'apprentissage par résolution de problèmes, d'autres parlent de démarches, de méthodes, de stratégies, de modèles de résolution de problèmes. Par exemple, Lithner (2000), pour sa part, associe le RM à une séquence en quatre étapes similaires aux étapes de résolution de problème de Pólya (1965) : une situation problématique est rencontrée, une stratégie de résolution est choisie, implantée, puis une conclusion est obtenue. On peut se demander si le RM suit nécessairement ces étapes (même non linéaires). De ne pas distinguer « résolution de problèmes » et RM pourrait éventuellement limiter l'activité mathématique de l'élève. Même si des liens forts peuvent exister entre résolution de problèmes et RM et afin de ne pas limiter

¹⁴ Le PFEQ, autant au primaire qu'au secondaire, ne consacre qu'une phrase au lien entre les trois compétences et la pensée mathématique. Par exemple, le MELS stipule que « [B]ien que ces compétences soient concrètement réunies dans la pensée mathématique, elles se distinguent en ce sens qu'elles en ciblent différents aspects » (2007, p. 1).

l'exploration du champ notionnel du RM, ces deux termes ne seront pas considérés comme synonymes.

Enfin, pour ce qui est de la prise de décision, toujours soulignée comme synonyme de raisonnement par delMas (2004), sans exclure le rôle du raisonnement dans la prise de décision, on peut affirmer qu'il est possible de prendre une décision autrement, par exemple par automatisme ou par hasard. Cabassut (2005) souligne que les processus de raisonnement aident à faire des choix. Par ailleurs, même si certaines décisions bénéficient de ces derniers, ils ne sont pas nécessaires. Prenons l'exemple suivant : au retour à la maison, deux chemins peuvent être empruntés pour retourner chez vous. Les deux sont équivalents en distance, en temps et en danger. Le choix de prendre l'un ou l'autre risque fort bien de ne pas se faire sur la base d'un raisonnement. Dans ce cas précis, le raisonnement ne permet pas de faire un choix entre les deux chemins, mais bien de déterminer qu'un n'est pas mieux que l'autre. Le raisonnement se situe ailleurs que dans le choix d'un chemin.

1.4.1.2 RM et concepts associés

Dans un même ordre d'idée, la terminologie entourant le RM (en didactique des mathématiques comme ailleurs) diffère grandement d'un auteur à l'autre (Cabassut, 2005). Ce constat nécessite une attention particulière pour bien circonscrire le réseau notionnel entourant le RM et cheminer vers un modèle cohérent et pertinent.

Un premier exemple des différentes significations de concepts associés au raisonnement est le terme « argumentation ». L'argumentation est définie par Duval (1995) comme un type de raisonnement. Il s'agit, selon l'auteur, d'un type de raisonnement particulier qui vise à convaincre un interlocuteur et qui ne vise pas la validation d'une proposition, ce qui serait tout à fait le contraire pour la

démonstration. Ces propos sont différents de ceux de Pedemonte (2002) qui, considérant l'argumentation comme un raisonnement, mentionne que celle-ci « en mathématiques a toujours un objectif : la recherche de la vérité » (p. 30). Pour Pedemonte, la démonstration est un cas particulier d'argumentation qui, dans sa recherche de la vérité, a aussi un objectif de validation dans une théorie donnée. Ces deux concepts ne sont pas placés par Pedemonte (2002) en opposition, mais en continuité. Contrairement à Duval (1995), cette auteure n'oppose pas « démonstration » et « argumentation » d'un point de vue général, en précisant que certaines argumentations sont en rupture avec certaines démonstrations et en continuité avec d'autres. Par exemple, elle parle d'argumentation déductive comme une argumentation qui est en continuité avec la démonstration déductive. Tout comme la démonstration déductive, l'argumentation déductive vise la recherche de vérité et a une structure déductive. Toutefois, elle ne s'appuie pas nécessairement sur une théorie mathématique.

L'explication est aussi un bon exemple. Pour Duval (1995), l'explication n'est pas un raisonnement :

[...] une explication donne une ou plusieurs raisons pour rendre compréhensible une donnée (un phénomène, un résultat, un comportement...). Or ces raisons avancées ont une fonction quasi descriptive : elles contribuent à présenter le système de relations (mécaniques, théoriques, téléologique) au sein duquel la donnée à expliquer se produit ou trouve sa place. Et comme dans toute description, la valeur épistémique des raisons énoncées ne joue aucun rôle (Duval, 1992-1993, p. 40)¹⁵.

¹⁵ La valeur épistémique est le degré de fiabilité que possède ce qui est énoncé dans la proposition [...] le contenu d'une proposition apparaît évident, ou certain ou seulement vraisemblable, ou plausible ou simplement possible, ou impossible, ou encore absurde (Duval, 1995, p. 218).

Contrairement à Duval, Jones (2000) considère l'explication comme une forme de raisonnement :

A range of research has documented that even after considerable teaching input, many students fail to see a need for deductive proving and/or are unable to distinguish between different forms of mathematical reasoning such as explanation, argument, verification and proof (p. 55).

Yackel (2001), quant à elle, souligne l'importance de l'explication dans le développement du raisonnement. Pour cette dernière, la mise en place de normes sociomathématiques liées aux explications des élèves favorise le développement de ce dernier. La conception que ces auteurs ont du RM et de l'explication contribue sûrement à ces différences.

Dans un autre ordre d'idées, les définitions divergentes mènent vers la considération d'autres éléments qui diffèrent d'un auteur à l'autre, comme les liens entre les différents types de raisonnements généraux en mathématiques retrouvés dans la littérature en didactique des mathématiques. Par exemple, le MELS (2007), à l'instar de Pólya (1958), considère les raisonnements inductif et analogique comme différents, tandis que Christou et Papageorgiou (2007) incluent l'analogie dans le raisonnement inductif. Il faut noter que la définition de chacun de ces termes pourrait expliquer les divergences de points de vue. Malheureusement, le raisonnement par analogie n'est pas une notion clairement définie (Pólya, 1958). Pólya (1958) et Oléron (1977), quoique reconnaissant l'importance de cette forme de raisonnement, parlent même d'un statut ambigu.

Tout ce flou bénéficierait entre autres d'une réflexion théorique spécifique au RM et sur son champ notionnel. Étant donné la place que prend le RM dans nos programmes, ainsi que dans les discours institutionnels, il est nécessaire pour la

communauté de se pencher sur la signification du concept de RM et d'en circonscrire la nature et le champ notionnel.

1.4.2 Des convergences et des divergences dans certaines définitions de RM

L'importance du raisonnement dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques n'est pas à démontrer, mais ce qui est entendu par RM reste en partie à expliciter. En effet « [C]e qui frappe dans presque toutes les études psychologiques et didactiques du raisonnement est l'absence d'une réflexion théorique sur ce qu'est le raisonnement » (Duval, 1995, p. 214). En fait, le terme raisonnement « is widely used with the implicit assumption that there is universal agreement on its meaning. On this assumption, in fact, most mathematicians and mathematics educators use this term without any clarification or elaboration » (Yackel et Hanna, 2003, p. 228).

Ceci ne signifie pas pour autant que rien n'a été fait du point de vue théorique. Il existe quelques définitions et modèles partiels du raisonnement en mathématiques. Certains modèles de raisonnement mathématique se veulent plus généraux que d'autres. Chacun a ses particularités, ses finalités et permet de définir ce qu'est en partie le (ou un mode de) raisonnement en mathématiques de façon plus ou moins cohérente. Cette section traite en particulier des définitions présentées dans la littérature en didactique des mathématiques et détaille différents éléments de définitions. L'analyse des différents éléments de définitions sera présentée selon cinq angles : la double nature du RM (activités versus produit), RM et inférence, les buts du RM, RM et formes, ainsi que RM et processus. Ces angles ont émergé lors de l'analyse de la littérature sur le RM en didactique des mathématiques.

1.4.2.1 RM : Activités *versus* produit

Arsac *et al.* (1992), dans leur étude du raisonnement déductif, débutent par définir le RM de façon générale avant d'en arriver à l'étude du raisonnement déductif. Ils mentionnent qu'« il [le raisonnement] présente une ambiguïté (qui est aussi une commodité) : *il est à la fois l'activité intellectuelle qui aboutit au but visé et le résultat écrit ou oral de cette activité* » (je souligne, p. 9-10). Arsac *et al.* (1992) mettent ici en lumière deux sens du terme raisonnement à savoir que l'on nomme « raisonnement » l'activité intellectuelle et son produit. Arsac (1996) fait aussi cette distinction entre produit et activité. Le RM a donc, pour ces auteurs, une double nature. On retrouve un approfondissement de ce qui est entendu par activité et produit en tant que RM chez Arsac (1996).

Tout comme Arsac et ses collaborateurs (1992) et Arsac (1996), Cabassut (2005) souligne la double nature du raisonnement (activité et produit). Le cadre qu'il a développé dans sa thèse serait, selon ses propos, utile à l'analyse des raisonnements produits par les élèves. Il reprend les propos de Blanché et définit le RM comme :

[...] une certaine activité de l'esprit une opération discursive pour laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières : en ce sens, c'est un processus qui se déroule dans la conscience d'un sujet, et quand enfin il se stabilisera par l'écriture, il sera devenu une sorte de chose impersonnelle et intemporelle, objet pour une analyse structurale [...] (Cabassut, 2005, p. 24).

Balacheff (1988), tout en soulignant que le terme est utilisé aussi comme produit, limite la définition du RM à « l'activité intellectuelle, en général non complètement explicite, de manipulation d'informations, données ou acquises, pour produire de nouvelles informations » (p. 31).

1.4.2.2 RM et inférence

Duval (1995) a fourni différentes analyses du concept de raisonnement dans le but d'étudier le développement de démonstration chez les élèves. En particulier, il définit les raisonnements qui sont liés à l'utilisation du langage comme une :

[...] forme d'expansion discursive¹⁶ qui est orientée vers un énoncé-cible dans le but :

- de modifier la valeur épistémique, sémantique ou théorique, que cet énoncé-cible a dans un état de connaissance donnée, ou dans un milieu social donné,
- et, par voie de conséquence, d'en modifier la valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation discursive sont remplies (Duval, 1995, p. 233).

Ces raisonnements consistent, selon l'auteur, en des inférences dites explicites. Les différentes analyses qu'il fait du raisonnement sont directement liées à l'idée d'inférence et aussi de démonstration. L'énoncé-cible, ou « conclusion », semble connu à l'avance puisque le discours est orienté vers cet énoncé. Cet aspect diffère des définitions de Arsac *et al.* (1992), Arsac (1996) et Lithner (2000, 2003, 2008), qui elles, admettent la construction de la conclusion. Cette définition se limite donc aux raisonnements qu'on pourrait qualifier d'à postériori, c'est-à-dire qu'on sait déjà vers où on doit aller. Ceci se passe souvent ainsi dans le cas de la démonstration (intérêt de Duval), c'est toutefois quelque peu différent en résolution de problèmes. La réflexion théorique de Duval à propos du raisonnement sera présentée plus en détail à la section 3.2.1.

¹⁶ L'expansion discursive est la fonction du discours qui articule un ensemble d'énoncés en un tout cohérent sémantiquement.

Toujours au sujet de l'inférence, Cabassut (2005) mentionne que raisonner c'est entre autres inférer une proposition à partir de prémisse, élément aussi souligné par Christou et Papageorgiou (2007). Le lien est ici clair avec le concept d'inférence, comme c'était le cas avec la définition du PFEQ du primaire. Le raisonnement est alors vu comme synonyme d'inférence. Même si ce lien est moins évident, on retrouve ce lien aussi chez Arsac *et al.* (1992) et chez Lithner (2000).

La définition de Brousseau et Gibel (2005) met aussi cet aspect en évidence en spécifiant que les inférences qui respectent la définition suivante sont des raisonnements :

We define, therefore, a reasoning as a relation R between two elements A and B such that, — A denotes a condition or an observed fact, which could be contingent upon particular circumstances; — B is a consequence, a decision or a predicted fact; — R is a relation, a rule, or, generally, something considered as known and accepted. The relation R leads the acting subject (the reasoning "agent"), in the case of condition A being satisfied or fact A taking place, to make the decision B, to predict B or to state that B is true (p. 17).

1.4.2.3 Buts du RM

Pour plusieurs auteurs, la production de nouvelles informations semble le but premier du RM. En effet, Arsac (1996) et Arsac *et al.* (1992) définissent le RM en spécifiant que « le but du raisonnement est de découvrir par l'examen de ce que l'on sait déjà quelque autre chose que l'on ne sait pas encore [...] » (p. 9). C'est aussi les propos de Balacheff (1988). De même, la définition de Lithner (2000, 2008) est centrée sur les buts. Ce dernier a développé un modèle de RM pour analyser les raisonnements à la fin du secondaire. Ce modèle sera présenté plus en détail à la section 3.2.2. Il définit le raisonnement comme « the line of thought adopted to produce assertions and reach

conclusions » (Lithner, 2000, p. 166). Ici, on retrouve une définition centrée sur la production d'affirmations ou l'atteinte de conclusions. Il s'agit aussi d'une définition assez vague¹⁷ qui permet d'inclure à peu près tout processus¹⁸ qui permet d'atteindre une conclusion.

Les propos de Duval (1995) diffèrent en partie. Ce dernier précise dans sa définition que le but du RM est de modifier la valeur épistémique, sémantique ou théorique d'un énoncé et même, dans certains cas, d'en modifier la valeur de vérité. De même, pour Cabassut (2005), qui a, tout comme Duval, étudié le RM afférent à la démonstration, tout RM vise à valider, ce qui revient à changer la valeur épistémique d'un énoncé. Évidemment, en mathématiques tout comme dans bien d'autres domaines, la validité des savoirs est un enjeu important. Toutefois, limiter les RM à ceux qui visent à établir la vérité d'une proposition présuppose que cette proposition est déjà construite. Il y a alors une argumentation, une justification, une preuve ou une démonstration à construire pour arriver à déterminer la valeur de vérité de cette proposition. Mais comment alors qualifier les raisonnements qui permettent la construction de cette proposition? Le but de validation n'est clairement pas suffisant pour décrire les RM. On pourrait aussi faire un parallèle avec le but attribué à l'argumentation par Pedemonte (2002), à savoir la recherche de vérité. Pour cette auteure, le but n'est pas uniquement la validation, mais la recherche de vérité. En ce sens, on peut qualifier tout RM comme ayant un but de recherche de vérité, que ce soit dans la phase de construction ou de validation d'une proposition. Il est vrai que la recherche de vérité est toujours une visée, mais comme le souligne la revue de la littérature, la création de nouvelles informations est aussi importante.

¹⁷ On pourrait penser que par assertion, il veut dire conjecture et par conclusion, il veut dire preuve, mais ce n'est pas aussi clair, comme nous le verrons lors de la présentation du modèle.

¹⁸ Pour le moment, le terme processus est utilisé dans le sens d'un ensemble d'actions.

Notons par ailleurs que les différents termes employés pour définir les buts du raisonnement (par exemple valider, justifier, etc.) peuvent avoir des sens très semblables, ou encore, qu'un même terme peut avoir des sens différents d'un auteur à l'autre, ce qui constitue un obstacle en soi pour la synthèse des écrits de recherche en didactique des mathématiques. La démarche méthodologique permettra de surmonter celle-ci.

1.4.2.4 RM et formes

Plusieurs auteurs s'intéressent aux formes que le RM peut prendre. Ceci cadre bien avec l'idée de raisonnement en tant que produit puisque les formes sont souvent à postériori attribuées à un raisonnement en tant que produit. Duval (1995) et Cabassut (2005), dont les réflexions théoriques sont présentées à la section 3.2.3 s'intéressent particulièrement à la forme du raisonnement, à sa structure. En fait, chez ces deux auteurs, mais aussi chez beaucoup d'autres, le RM est étudié en contexte d'apprentissage de la démonstration. Ceci amène une perspective particulière. De cette perspective découlent deux intérêts : les formes que peut prendre le RM et l'étude du raisonnement déductif. En effet, le raisonnement déductif en tant que forme particulière de raisonnement entretient un lien étroit avec la démonstration, activité centrale en mathématique. Comme l'apprentissage de la démonstration est l'intérêt de Duval (1991, 1992-1993, 1995), le raisonnement déductif occupe une place particulière dans son modèle. La définition de Duval, citée précédemment, n'est pas celle du RM, mais du raisonnement tout court. Le raisonnement déductif dans le reste de ses écrits devient si important que certains auteurs le citent comme exemple d'auteur disant que le RM n'est que déductif (c'est le cas entre autres de Lithner, 2008).

Néanmoins, d'autres formes de RM sont identifiées comme importantes en classe de mathématiques chez d'autres auteurs. Pólya (1958), sans négliger la valeur du raisonnement déductif pour les mathématiques, mentionne que le raisonnement plausible, dans lequel il inclut les raisonnements inductif et analogique, est tout aussi important dans la découverte de nouveaux savoirs mathématiques et doit être développé en classe de mathématiques. Reid (2003), Hoffmann (1999), Rivera (2008) et Meyer (2010) font état, quant à eux, de la place de l'abduction comme forme de raisonnement importante dans les découvertes mathématiques. Ainsi, dans la littérature sur le RM, dans le contexte particulier de l'enseignement obligatoire, plusieurs formes de raisonnement sont mises en évidence.

Dans un même ordre d'idées, Arsac *et al.* (1992) mentionnent que : « le raisonnement mathématique emploie d'autres outils que la logique formelle : le raisonnement par récurrence, mais aussi le calcul algébrique sont des moyens typiques pour arriver en mathématiques au but défini par Pierce [raisonner] » (p. 10). La logique formelle renvoie habituellement à des formes bien établies, telle la forme déductive.

Arsac *et al.* (1992) et Lithner (2000, 2008) prennent aussi le temps de préciser que le raisonnement déductif, central pour la démonstration, n'est pas le seul raisonnement utile en mathématique. Le premier parle de raisonnement spécifique, et le second, de raisonnement plausible ou basé sur l'expérience. Il s'agit de propos qui se détachent de l'idée que « raisonner en mathématiques, c'est traditionnellement démontrer des théorèmes » (Duquesne, 2003, p. 20), position prise par Aliseda¹⁹ (2003) qui compare la structure des RM (qu'elle considère comme des raisonnements déductifs) et des raisonnements abductifs (une autre forme de RM). Cette concordance entre RM et

¹⁹ Aliseda (2003) dit qu'il y a d'autres raisonnements en mathématiques, mais donne tout de même le sens de raisonnement déductif au RM dans son article.

raisonnement déductif tend à changer. Toutefois, lorsque l'analyse se poursuit plus loin que les définitions fournies par certains auteurs, l'étude du raisonnement déductif en mathématiques prend beaucoup de place. C'est le cas de Arsac *et al.* (1992) et de Duval (1995). L'intérêt de plusieurs chercheurs étant l'apprentissage de la démonstration, il s'avère que rapidement il y a limitation du RM au seul raisonnement déductif. Ce n'est pas le cas de Cabassut qui, contrairement à Duval (1995), considère que le RM peut prendre des formes abductives et inductives.

1.4.2.5 RM et processus

Dans les définitions présentées jusqu'ici, le lien entre le raisonnement et la notion d'inférence est mis de l'avant au point que l'un puisse même devenir synonyme de l'autre. Dans ces mêmes définitions, un accent est placé sur la forme des raisonnements. D'autres auteurs mettent en évidence une facette du raisonnement correspondant à l'activité. C'est le cas de Mason (1994) et de G. J. Stylianides (2005, 2008) qui parlent du raisonnement plutôt en termes de processus. Mason le définit comme un « processus dynamique qui permet de manipuler des idées de plus en plus complexes et, par là, d'étendre la compréhension » (Mason, 1994, p. 133). Il faut, pour raisonner, exemplifier, généraliser, conjecturer, convaincre. Cette vision du raisonnement est semblable à celle de G. J. Stylianides (2005, 2008). Celui-ci définit le raisonnement comme un ensemble de quatre activités²⁰ : identifier des régularités²¹, conjecturer, fournir une preuve et fournir un argument. De même, pour O'Daffer et Thornquist (1993), « Mathematical reasoning is part of mathematical thinking that

²⁰ Terme de l'auteur.

²¹ Le terme régularité a été préféré au terme « pattern » puisqu'en langue française, il s'agit d'un anglicisme.

involves forming generalization and drawing valid conclusion about ideas and how they are related » (cité par Artzt (1999) p. 117). On retrouve aussi cet élément chez Perressini et Webb (1999) qui qualifient le RM d'activité dynamique tels investiguer, conjecturer, généraliser, argumenter, valider. C'est aussi les propos de Ball et Bass (2003) qui utilisent le terme processus de raisonnement (*process of reasoning*). Une nette différence peut être soulignée entre ces dernières définitions et celles présentées précédemment. Le lien entre forme et raisonnement n'est pas mis de l'avant, mais c'est davantage l'idée d'activités ou de processus qui est priorisée.

1.4.2.6 Constats

Ces différentes définitions du raisonnement mettent de l'avant ses divers aspects : les buts du RM (la production de savoirs nouveaux, la validation, l'atteinte d'une conclusion), sa double nature (produit, processus), les liens avec l'inférence, les liens avec une forme (déductive, inductive ou abductive) ainsi que les liens avec plusieurs processus (conjecturer, généraliser, exemplifier, prouver, argumenter, convaincre). Chacun des auteurs insiste davantage sur l'un ou l'autre de ces aspects. Par ailleurs, ces définitions ne permettent pas de situer le concept de raisonnement à l'intérieur d'un champ conceptuel. On constate que les buts sont variés, que les auteurs parlent aussi des visées, des fonctions du RM. La nature inférentielle met l'accent sur la forme et laisse davantage les processus de côté. Tout en soulignant qu'il y a plusieurs formes au RM, la forme déductive est celle qui est davantage mise de l'avant. Le raisonnement en tant que processus est souligné par plusieurs, mais peu exploré d'un point de vue épistémologique. Pour ce faire, une exploration plus approfondie des propos sur le RM est nécessaire pour mieux comprendre les convergences et les divergences présentes dans ces définitions.

1.4.3 La diversité des processus associés au RM

Afin de brosser un portrait des convergences et des divergences sur le RM, disons quelques mots sur un élément souligné par Mason (1994) et G. J. Stylianides (2005), à savoir, les processus de raisonnement. Il s'agit d'un élément présent autant dans les programmes de formation que chez ces deux auteurs, et qui ne ressort pas particulièrement de l'analyse des définitions mêmes, mais que l'on retrouvera dans certains écrits. En fait, quelques définitions de raisonnement pointent vers l'idée de processus. Toutefois, outre ces définitions, plusieurs processus caractérisent le RM dans la littérature. Comme mentionné à la section précédente, Mason (1994) en présente quatre : l'exemplification, la généralisation, l'émission de conjectures et la persuasion. Par ailleurs, une diversité d'autres processus est aussi associée au RM par différents auteurs. On retrouve par exemple les processus suivants : justifier, définir, explorer, abstraire, catégoriser, particulariser, analyser, prouver, démontrer, schématiser, représenter, expliquer, argumenter, anticiper, valider. Le PFEQ (MELS, 2007) parle aussi de processus d'interpolation, d'extrapolation ou d'optimisation pour le raisonnement en algèbre. Au primaire, le PFEQ (MEQ, 2000) mentionne coordonner, différencier, intégrer, construire et structurer. Une analyse de la littérature ne peut qu'allonger la liste des verbes d'action associés au RM.

On peut par exemple constater la richesse des liens entre les termes justification, justifié, raisonnement, preuve et argument, dans la citation de Mueller (2009), mais aussi la complexité de ces liens :

This paper highlights the value of student collaboration in doing mathematics, demonstrates how urban, middle-school students, working together, co-constructed justifications for their solutions, and shows that certain conditions are associated with the promotion of a culture of reasoning. It is documented that students collaboratively built arguments that took the form of proof, challenged each others' arguments, and justified these arguments in small groups and whole class discussions. In producing their mathematical justifications, students included the input of others. Finally, the way in which students, by expanding on the arguments of others, also used alternative forms of reasoning which in many cases led to even more refined arguments is discussed (p. 138).

Dans un autre ordre d'idées, chacun de ces termes nécessite une définition précise pour le situer dans le champ notionnel du RM. Ceci est plus ou moins présent dans la littérature. G. J. Stylianides (2005), tel que discuté dans la section 3.2.4, définit le raisonnement comme l'union de deux grands types de processus mathématiques : faire des généralisations mathématiques et fournir un support à des affirmations mathématiques. Il établit alors des liens entre généraliser, identifier des régularités et conjecturer, et entre fournir un support, et prouver, et argumenter. G. J. Stylianides n'est pas le seul à définir le raisonnement par deux processus complémentaires. Ball et Bass (2003) parlent du raisonnement d'investigation (reasoning of inquiry) et du raisonnement de justification. Des liens se dessinent, mais beaucoup de travail reste à faire pour mieux comprendre comment ces différents processus se situent par rapport au RM.

1.4.4 La formulation du problème de recherche

Les changements de programme au primaire et au secondaire, en visant le développement de la compétence liée au RM, ont créé le besoin de repenser la formation des maîtres. Ceci m'a conduit à m'intéresser à la signification du concept de RM dans la littérature scientifique en didactique des mathématiques.

Une analyse partielle de la littérature rend manifestes certaines convergences, divergences et absences quant à une conceptualisation du RM. Plusieurs auteurs s'entendent sur le lien entre le raisonnement et la notion d'inférence, au point où l'un devient synonyme de l'autre. De plus, la double nature (activité/produit) du RM est soulignée par plusieurs, mais le produit est davantage étudié, car, comme le souligne Arsac (1996), la nature processuelle serait moins accessible. Aussi, les formes que prennent les RM sont mises de l'avant chez une majorité d'auteurs et éclipsent d'autres aspects importants du raisonnement présents chez d'autres. C'est le cas de Mason (1994) et G. J. Stylianides (2005) qui mettent l'accent sur les liens avec différents processus mathématiques et laissent de côté les formes que peut prendre le RM. Ceci constitue une divergence assez importante avec des auteurs comme Duval (1995) ou encore Cabassut (2005). Peu de liens sont présents entre les définitions axées sur la forme et celles axées sur les processus. Les buts du RM sont aussi diversifiés. On retrouve différents buts à travers les définitions et une analyse de la littérature pourrait aider à conceptualiser autour de ce thème pour mieux caractériser le RM.

Dans cette même littérature, le champ notionnel entourant le raisonnement apparaît diversifié et flou. Un même terme est polysémique ou, tout simplement, indéfini chez certains auteurs. Un flou conceptuel se dessine donc autour du concept de raisonnement. Ceci se traduit par un vocabulaire éclaté et une explosion de processus entourant le RM. Ces processus, présents dans les programmes et quelques définitions, ne sont pas bien caractérisés. Il devient alors difficile de comparer de telles définitions ou encore des résultats d'études.

L'importance que prend le RM dans l'enseignement primaire et secondaire mène donc à la pertinence de réfléchir de nouveau à ce qu'est le RM d'un point de vue conceptuel. La figure 1.1 présente une schématisation du problème de recherche.

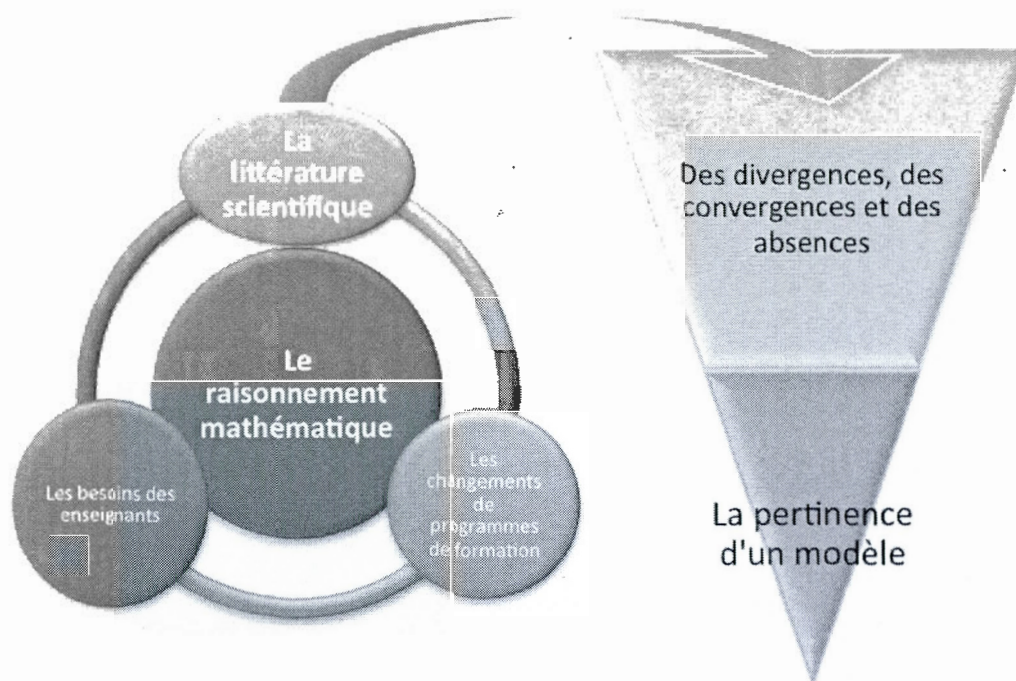


Figure 1.1 La schématisation du problème de recherche

1.5 L'objectif général de recherche

L'objectif de ce projet est *d'élaborer et de valider un modèle conceptuel du raisonnement mathématique pour l'enseignement et l'apprentissage primaire et secondaire*. Ce modèle permettra de structurer et de préciser la nature du RM et les relations entre les différents aspects du RM pour l'enseignement primaire et secondaire. Il posera ainsi un champ notionnel entourant le RM. La réflexion théorique précisera les caractéristiques du RM, telles que les formes qu'il peut prendre et les processus impliqués.

Comme le souligne Karsenti et Savoie-Zajc (2004), la problématique aboutit habituellement à une question générale de recherche, parfois à un objectif de recherche, parfois les deux. La nature de la problématique invite ici à formuler un objectif général qui se traduira par une proposition théorique, cet objectif se suffit à

lui-même. Il ne s'agit pas d'une recherche qui vise à vérifier des hypothèses découlant d'une question de recherche. En ce sens, l'objectif sera précisé ultérieurement par des objectifs spécifiques.

Il ne s'agit pas non plus d'une étude cognitive ou psychologique au sens qu'elle ne spécule pas sur les conditions d'apprentissage du raisonnement par les élèves, ni sur les processus cognitifs que les élèves qui raisonnent utilisent. Il ne s'agit pas non plus d'une étude praxéologique au sens où elle ne prescrit pas des interventions qui mèneraient au développement du RM. Ce modèle se veut toutefois important pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en se penchant sur la nature du RM d'un point de vue conceptuel. Le contexte de l'école obligatoire est ici important pour deux raisons. Premièrement, le contexte d'apprentissage d'une classe du primaire ou du secondaire peut avoir une influence sur le type de RM qui peut y prendre place. Deuxièmement, le contenu mathématique à apprendre est aussi particulier à ces niveaux et peut tout aussi bien influencer le raisonnement. Le modèle pourrait peut-être s'avérer à d'autres niveaux scolaires, mais l'exercice réalisé ici ne validera pas ce dernier pour d'autres niveaux que le primaire et le secondaire.

Le raisonnement (en général) est étudié par différents champs de recherche telles la philosophie, la psychologie, l'éducation et la didactique (des mathématiques). Chacun l'étudie avec des buts différents. La philosophie s'intéresse surtout au raisonnement en soi, d'un point de vue épistémologique, c'est-à-dire aux conditions de validité du raisonnement, comment on en vient à accepter une conclusion d'un point de vue de la science par exemple. La psychologie s'intéresse surtout au développement du raisonnement chez un individu, et quelquefois dans une société (psycho sociale). L'éducation s'intéresse à son enseignement et à son apprentissage, et la didactique des mathématiques à son enseignement et à son apprentissage dans un contexte bien particulier, celui du domaine des mathématiques.

Par ailleurs, le problème de recherche conduit à la nécessité de réflexion théorique sur la nature du RM pour l'enseignement et l'apprentissage puisqu'une telle réflexion pose les fondements à tout travail didactique. L'étude du concept de raisonnement, tel que développé ici, n'est pas philosophique et se situe bien en didactique des mathématiques par le contexte de l'enseignement des mathématiques.

L'apport de ce modèle sera de mieux comprendre ce qu'est le raisonnement pour l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire, dans le but de favoriser la réflexion des didacticiens, des formateurs des maîtres et des enseignants sur le RM. Par ailleurs, deux défis se révèlent très importants pour répondre à cet objectif. Le premier consiste, étant donné la diversité du vocabulaire entourant le RM, à circonscrire le champ notionnel de celui-ci et à bien définir chacun des termes. Le second défi sera d'en arriver à un portrait qui met en évidence une structure pertinente pour l'enseignement primaire et secondaire.

Avant de présenter la réflexion théorique ainsi qu'un raffinement de l'objectif par des objectifs spécifiques, la démarche méthodologique qui encadre ce projet est présentée puisqu'elle est utilisée pour construire le cadre de référence qui vient appuyer la construction du modèle théorique. Le concept de modèle sera aussi précisé dans le prochain chapitre.

CHAPITRE II

LA DÉMARCHE MÉTHODOLOGIQUE

Tel que mentionné en introduction, la démarche méthodologique a encadré l'ensemble de l'écriture de ce projet. Il est donc important de la décrire avant même de poser les bases conceptuelles de ce projet. Toutefois, avant d'aller de l'avant avec la description de cette démarche, mes postures épistémologiques sous-jacentes concernant la recherche seront explicitées puisqu'elles influencent l'élaboration du modèle. Quelques précisions typologiques seront aussi présentées.

2.1 La vision sous-jacente de la recherche

En sciences de l'éducation, les chercheurs sont influencés par différents paradigmes de recherche tels les paradigmes positiviste, interprétatif et critique. Selon le paradigme positiviste, le savoir développée par la science vise l'énoncé de lois généralisables qui traitent d'une réalité objective. En effet, pour les positivistes, une réalité existe à l'extérieur des chercheurs. La science décrit ces faits extérieurs (Karsenti et Savoie-Zajc, 2004). Pour expliquer cette réalité, le chercheur doit donc se placer en situation de neutralité face à cette réalité pour ne pas l'influencer. Il doit « écarter tout jugement préconçu des faits, toute *prénotion* » (Gauthier, 1997, p. 40 souligné dans le texte). De plus, on ne peut étudier que des faits observables et mesurables (empirisme) de cette réalité.

Le paradigme interprétatif (aussi nommé compréhensif) est opposé au paradigme positiviste en ce sens que le chercheur qui adopte la perspective de ce paradigme rejette l'existence d'une réalité extérieure au sujet, « la réalité est construite par les acteurs d'une situation [...] le savoir est le résultat d'une construction interprétative des personnes » (Chavez, 2005, p. 35). Ceci implique la non-objectivité du chercheur. En fait, la subjectivité est acceptée, voire même valorisée. Il s'avère donc primordial pour ce chercheur de bien clarifier son rôle, sa position dans la recherche, ses influences (Chavez, 2005). Le chercheur interprétatif est à la recherche de sens et de la signification des réalités.

Le paradigme critique amène une prise de position politique par une remise en question de la classe opprimante. Selon ce paradigme,

[...] l'être humain a développé une compréhension de la réalité, masquée par un ensemble de structures qu'il importe de dénoncer, car elles impliquent des rapports de domination et de pouvoir entre les personnes : structurés par le genre, par l'ethnie, par les rôles sociaux ou culturels, politiques (Karsenti et Savoie-Zajc, 2004, p. 115).

Le changement et la prise de position critique sont des enjeux majeurs de ce paradigme, le chercheur est partie prenante de ces transformations.

Cette recherche est principalement influencée par le paradigme interprétatif de la recherche. Le savoir y est vu comme une construction interprétative à partir de l'observation de la réalité à travers les yeux du chercheur. Le modèle construit se veut donc une interprétation de ce qu'est le RM à travers l'interprétation de textes écrits par différents chercheurs intéressés par la didactique des mathématiques et implique qu'il existe plusieurs interprétations possibles.

2.2 Des précisions typologiques

Notre recherche est de nature fondamentale puisqu'elle « vise prioritairement le développement de nouveaux savoirs, de théories et de principes généraux » (Legendre, 2005, p. 1150). Selon Legendre, les résultats de ce type de recherche peuvent être une loi, une théorie ou un modèle de l'objet à l'étude. Toutefois, la recherche fondamentale n'est pas nécessairement théorique, cela dépend du type de données recueillies et de l'analyse qui en est faite. La recherche effectuée par L. F. Lee (1997), visant l'élaboration d'un modèle de compréhension de l'algèbre, est de type fondamental et empirique. L. F. Lee a utilisé une approche qualitative inspirée de l'ethnographie. Cette approche interprétative est divisée en quatre étapes : le choix des participants, les entrevues, la synthèse validée par une confrontation avec les participants et l'élaboration du modèle final. À deux moments la littérature a été prise en compte : pour choisir les chercheurs qui ont participé à son étude et pour l'élaboration du modèle final.

Notre recherche et celle de L. F. Lee (1997) ont plusieurs points en commun : la nature fondamentale et interprétative de la recherche et le type de modèle désiré. Toutefois, l'approche ethnographique utilisée par L. F. Lee, tout en permettant un rapport direct avec les participants et une validation auprès de ces derniers, circonscrit la collecte de données à un nombre très limité d'entrevues et à un moment précis dans le temps. Il s'avère que la littérature regorge d'écrits sur le RM qui nous apparaissent nécessaires à l'élaboration d'un modèle global. De plus, le discours véhiculé par la littérature en didactique des mathématiques en est un cautionné par la communauté de didacticiens et de didacticiennes de par le processus d'évaluation que traverse la majorité des écrits publiés. Ces textes peuvent donc faire état de discours.

Ainsi, cette recherche vise le développement d'un modèle de ce qu'est le RM lié à l'enseignement à partir d'éléments théoriques et empiriques tirés de la documentation scientifique. Elle correspond donc à une recherche de type théorique. Legendre (2005) définit la recherche théorique comme une « [r]echerche dont le projet consiste à élaborer des relations conceptuelles en vue de faire des prédictions ou d'expliquer certains aspects d'un phénomène » (p. 1157). L'intention qui soutient ce modèle n'est par ailleurs pas de faire des prédictions quant au RM, mais bien de connaître, de comprendre et d'expliquer la nature du RM, ainsi que de décrire les relations conceptuelles entre les différents aspects du RM.

Le chercheur théorique construit sa théorie (ou son modèle théorique) en interprétant des textes écrits par d'autres (Martineau, Simard et Gauthier, 2001; Van der Maren, 1996). Cette interprétation des textes se doit d'être supportée par une méthodologie bien définie pour permettre de juger de la recevabilité et de la validité du construit théorique émergeant de cette interprétation.

2.3 La démarche globale préconisée : l'anasynthèse

Selon Martineau, Simard et Gauthier (2001) et Legendre (2005), très peu d'ouvrages méthodologiques traitent de la recherche théorique. Par contre, plusieurs thèses théoriques rédigées à l'UQAM (Charland, 2008; Chavez, 2005; M.-H. Guay, 2004; Rocque, 1994; Sauvé, 1992; Villemagne, 2005) utilisent l'anasynthèse comme démarche méthodologique. Par la description donnée par ces auteurs, cette démarche méthodologique est adaptée à l'objectif de ce projet qui est d'élaborer un modèle du RM. En effet, cette démarche permet d'éclairer le flou conceptuel soulevé au chapitre précédent. Selon Legendre (2005), l'anasynthèse permet l'élaboration d'un modèle théorique par l'analyse et la synthèse des écrits (voir figure 2.1). Cette démarche englobe un ou plusieurs types d'analyse de documents. Elle constitue un « cadre

général qui permet de baliser l'analyse et la synthèse d'une pluralité de données conceptuelles ou empiriques pour la conceptualisation de modèles théoriques » (M.-H. Guay, 2004, p. 19). Les prochaines sections présentent d'un point de vue théorique la démarche d'anasynthèse. La mise en œuvre de cette démarche est par la suite exposée dans une section ultérieure.

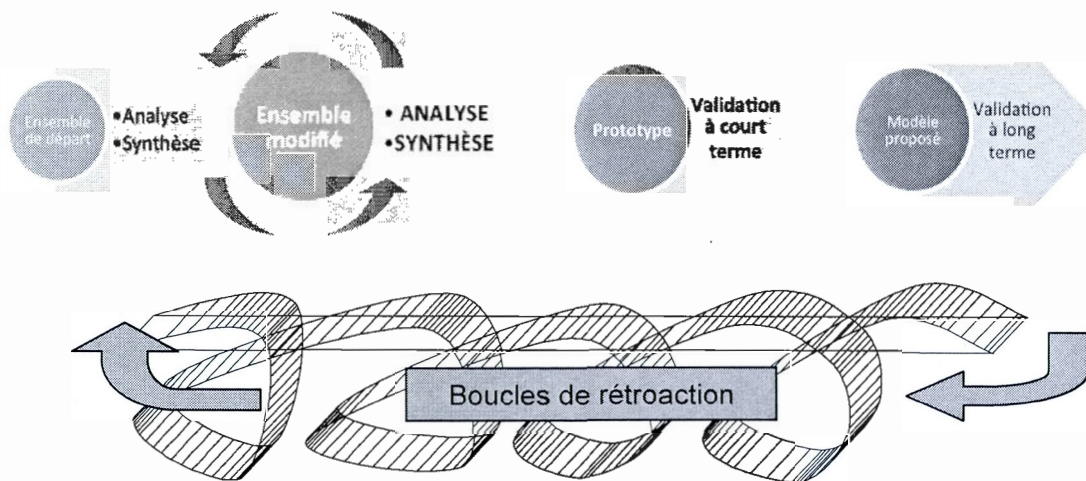


Figure 2. 1 La démarche d'anasynthèse adaptée de Legendre (1993, 2005)

2.3.1 L'ensemble de départ

La première étape de l'anasynthèse consiste à élaborer un ensemble de départ par une revue de la littérature pour identifier les éléments qui se retrouvent dans la documentation scientifique qui porte sur l'objet d'étude. Il y a alors recensement, établissement d'un premier champ notionnel et recension des écrits. Le recensement permet de déterminer les écrits scientifiques relatifs à l'objet d'étude et d'établir un premier champ notionnel. « La construction de ce champ notionnel fait appel à l'identification de l'ensemble des termes et concepts qui sont liés à l'objet de

recherche » (Charland, 2008, p.77). Ce champ notionnel sert à la recension des écrits par la génération de descripteurs pour les banques de données.

La recension permet de sélectionner, à partir de critères, les écrits qui feront partie du corpus d'analyse, corpus qui évolue pendant l'élaboration du modèle. Ce corpus servira à l'élaboration du modèle conceptuel de RM. Van der Maren (1996) nomme quatre critères pour s'assurer de la qualité et de la validité du corpus : l'accès aux sources, l'exhaustivité, l'actualité et l'authenticité. L'accès aux sources fait référence à l'idée de préconiser les sources accessibles et de première main. Cette description est aussi liée à l'authenticité qui nécessite aussi de prendre en compte le contexte dans lequel se situe le texte. L'exhaustivité fait référence à la sélection de textes qui portent sur le problème de recherche. Il est donc, comme le mentionne Van der Maren (1996), relatif. Le critère de l'actualité nécessite la prise en compte d'extraits représentatifs de l'état actuel du problème. À l'instar de M.-H. Guay (2004), le critère suivant est ajouté : auteurs majeurs du domaine. « Ce critère implique que l'on retienne les écrits des auteurs qui apparaissent le plus fréquemment dans la bibliographie des différentes sources consultées ou ceux jugés incontournables par d'autres chercheurs du champ » (M.-H. Guay, 2004, p. 21).

2.3.2 L'analyse de l'ensemble de départ

L'analyse de l'ensemble de départ permet l'identification et la cueillette des données pertinentes à l'élaboration des différentes parties du projet (Legendre, 2005). La problématique est en partie construite lors des premières analyses de cet ensemble pour en arriver à poser le problème de recherche présenté au chapitre I. Les analyses successives permettent, de surcroît, de poser les bases conceptuelles nécessaires à l'élaboration du modèle théorique de RM visé par ce projet.

Durant tout le processus, différents types d'analyses sont utilisés. L'analyse de contenu permet d'extraire l'information du corpus sélectionné pour mieux comprendre ce que les auteurs disent du RM. Il est alors possible, lors de la synthèse, de mettre les divergences, les convergences et les absences en relief. L'analyse conceptuelle permet de faire émerger le sens des concepts.

2.3.2.1 L'analyse de contenu et l'analyse conceptuelle

Dans l'anasynthèse, l'analyse du corpus de départ se fait à partir de l'analyse de contenu. Il existe différentes analyses de contenu et plusieurs débats persistent encore quant à leur validité (L'Écuyer, 1990). Ces controverses portent entre autres sur le contenu manifeste, le contenu latent du matériel analysé et sur le traitement quantitatif et qualitatif des données. Par contenu manifeste, il est entendu l'analyse exclusive de ce qui est ouvertement dit ou écrit (L'Écuyer, 1990; Van der Maren, 1996). Le contenu latent fait référence aux non-dits, aux sens cachés (L'Écuyer, 1990; Van der Maren, 1996). Ce contenu peut même être inconscient à l'auteur lui-même.

En ce qui a trait au traitement quantitatif, il consiste à effectuer une analyse statistique sur la fréquence des différentes entrées. Les tenants de cette forme d'analyse de contenu mentionnent que les résultats statistiques permettent de donner un sens aux données tout en s'assurant du caractère objectif de la démarche (L'Écuyer, 1990). L'analyse qualitative, pour sa part, consiste plutôt à décrire la signification des différentes entrées, à souligner la spécificité de chacune.

Dans le cadre de ce projet, une analyse des contenus manifestes est préconisée. Ce choix est fait, car le but de l'analyse est de souligner les différents sens du concept de RM dans la documentation scientifique. C'est ce que Van der Maren appelle

« l'analyse conceptuelle ». Par ailleurs, le contenu latent faisant référence aux sens cachés, il est très utile en psychanalyse, mais s'avère ici peu pertinent. En effet, dans un texte scientifique, il serait particulier, voire même impensable, que l'auteur stipule quelque chose, et qu'en fait, veule dire son contraire.

L'analyse qualitative sera aussi privilégiée pour bien décrire le RM et pouvoir ensuite élaborer une synthèse novatrice. Étant donné l'objectif de ce projet, la quantification des diverses catégories utilisées ou des différents sens donnés au RM dans la littérature n'apporterait pas d'éléments supplémentaires favorisant l'élaboration du modèle.

L'analyse de contenu comporte différentes étapes. À la suite d'une synthèse de différents écrits sur le sujet, L'Écuyer (1990, p. 57) en énumère six :

- étape 1 : Lectures préliminaires et établissement d'une liste des énoncés;
- étape 2 : Choix et définition des unités de classification;
- étape 3 : Processus de catégorisation et de classification;
- étape 4 : Quantification et traitement statistique;
- étape 5 : Description scientifique
- étape 6 : Interprétation des résultats.

Puisque nous visons l'élaboration d'un modèle de RM à partir de la littérature et que le traitement statistique ne semble pas opportun à cette élaboration, à l'instar de M.-H. Guay (2004) et de Rocque (1994), nous avons choisi d'adapter le modèle de L'Écuyer (1990) pour ne garder que cinq étapes (voir figure 2.2). Les quatre premières étapes du processus d'analyse de contenu coïncident avec le processus d'analyse de l'anasynthèse (en gris foncé). La dernière étape correspond à la synthèse (en gris pâle).

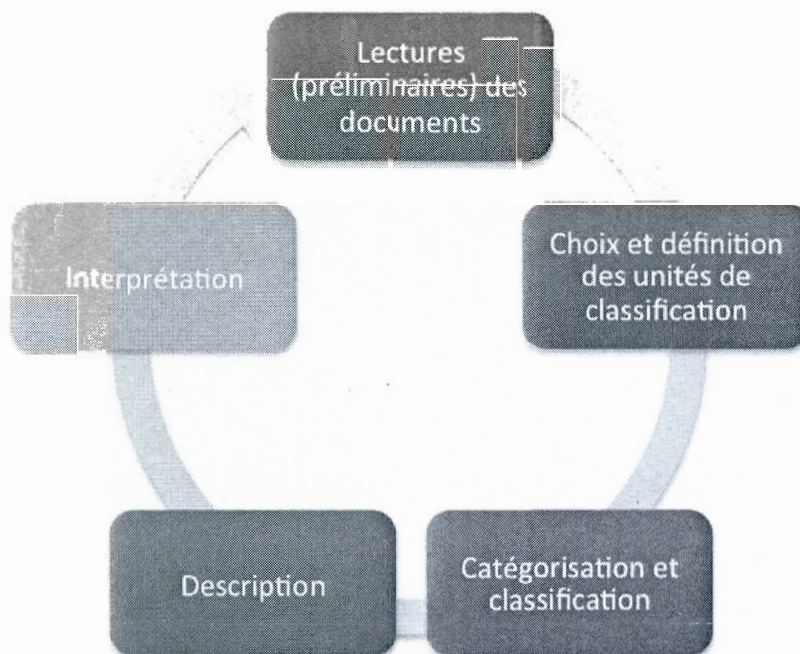


Figure 2.2 La place et les étapes de l'analyse de contenu dans la démarche d'anasynthèse

Lorsque le corpus d'analyse est construit (figure 2.2, case du haut), plusieurs lectures sont effectuées pour se donner une vue d'ensemble et pressentir les énoncés (unité de catégorisation) qui seront retenus (L'Écuyer, 1990). La seconde étape consiste à déterminer quel type d'unité de classification sera sélectionné. Pour une analyse qualitative, l'unité de sens sera privilégiée. L'unité de sens est un segment d'information (un mot, une phrase, un paragraphe, un groupe de phrases) qui a un sens complet en lui-même (L'Écuyer, 1990). L'information doit être un élément clé du texte analysé et pertinent quant à l'objectif de la recherche qui est d'élaborer un modèle du RM. Le corpus est alors découpé en unités de sens.

La troisième étape de l'analyse de contenu consiste à catégoriser et classer les unités de sens. Une catégorie est un thème général dans lequel un groupe d'unités de sens peut être regroupé pour condenser les données permettant l'analyse. Trois types

de catégorisation sont alors possibles : catégories émergentes (il n'y a pas de catégorie au départ); catégories déterminées (elles sont fixées au départ et immuables); catégories mixtes (une partie est fixée au départ et la seconde est émergente). Dans le cas des catégories fixes et mixtes, les lectures préliminaires peuvent aider à déterminer les catégories qui serviront à la classification à l'étape trois. Dans le cadre de cette recherche, une catégorisation mixte est préconisée. Les détails seront présentés dans la mise en œuvre de la démarche (section 2.5).

Selon L'Écuyer (1990), une catégorisation mixte se fait en quatre sous-étapes (voir figure 2.3) : a) un premier regroupement des énoncés à partir des catégories fixées et émergentes; b) une élimination des catégories redondantes et la formation de catégories distinctes; c) l'identification définitive et la définition des catégories de la grille d'analyse; d) une classification finale de tous les énoncés à partir de la grille.



Figure 2.3 Les sous-étapes du processus de catégorisation et de classification

La quatrième étape (figure 2.2), description scientifique (analyse qualitative), permet de décrire qualitativement ce qui peut être tiré des catégorisations. Ici, un logiciel de gestion de bases de données peut favoriser cette analyse en permettant à l'utilisateur de créer des rapports selon ses besoins. Ces rapports amènent une meilleure vue d'ensemble des données et permettent d'émettre des constats et d'en arriver à l'étape cinq, l'interprétation des résultats. L'étape cinq correspond à la synthèse décrite dans la prochaine section.

2.3.3 La synthèse

Sur la base de ces analyses, une synthèse est effectuée. À ce moment, les données recueillies lors des analyses sont réunies pour former un discours cohérent et structuré. Dans cette synthèse, les convergences, les divergences et les absences seront mises en évidence. Elle permet aussi de préciser les relations entre les descripteurs. La synthèse est ensuite étudiée pour y repérer les manques et les sections vagues. L'ensemble de départ est alors modifié (ensemble modifié) et des retours à l'analyse permettront d'améliorer le champ notionnel. Ce cycle d'analyse et de synthèse se continue jusqu'à saturation des données, c'est-à-dire, lorsque « l'ajout de données nouvelles dans sa recherche n'occasionne pas une meilleure compréhension du phénomène étudié » (Mucchielli, 1996, p. 204). Opérationnellement, cela signifie que la synthèse sera considérée comme optimale lorsqu'aucune information supplémentaire n'émergera des textes.

2.3.4 Le prototype

Lorsque les retours à l'ensemble de départ et à l'analyse n'amènent plus aucun élément nouveau et que les nouvelles lectures tendent à confirmer la synthèse déjà élaborée, il y a alors phénomène de saturation des données. La synthèse se transforme alors en prototype du modèle (prémodèle). Le prototype peut comporter des « éléments, absents du corpus d'analyse, mais issus d'une démarche réflexive ou spéculative » (Charland, 2008, p. 83) pour pallier les manques ou les incohérences dans la documentation. Ce prototype est accompagné d'une validation à court terme.

2.3.5 La validation à court terme

À court terme, la validation de ce prototype peut prendre différentes formes. Une première forme possible est une validation, par l'auteur même du prototype, effectuée

en fonction de certains critères (voir tableau 2.1). Tout au long du processus d'anasynthèse, ces critères doivent être gardés en tête et si certains critères ne sont pas respectés, des retours aux étapes antérieures sont alors nécessaires pour modifier le prototype et arriver à respecter chacun des critères. Toujours à court terme, une validation du prototype par des experts fait partie du processus d'anasynthèse. Cette validation permet de s'assurer par un second moyen que les critères de scientificité sont bien respectés. Dans le cas d'un modèle théorique, Charland (2008) suggère que les experts sont des chercheurs liés au domaine d'étude dans lequel le modèle s'inscrit. Toutefois, la notion d'experts peut inclure d'autres personnes selon les buts du modèle développé. Cette validation peut se faire par des échanges, des questionnements, des commentaires ou une grille d'évaluation.

Selon Legendre (2005), la pertinence d'une recherche correspond au degré de liens entre les résultats obtenus et les besoins à satisfaire. Dans le cadre de ce projet, la pertinence de ce modèle prend racine dans l'insuffisance de construits théoriques présenté dans la problématique. La valeur euristique du modèle se situera dans la réflexion engendrée par le modèle et sa fécondité en nouveaux savoirs pour l'enseignement. Par cohérence, il est entendu une non-contradiction des présupposés épistémologiques, théoriques et du modèle, par une mise au jour des présupposés de la chercheuse, tel que fait au début de ce chapitre. La cohérence entre les divers éléments théoriques et conceptuels à l'intérieur même du modèle est aussi très importante. Les boucles de rétroaction viennent en partie assurer cette cohérence.

Tableau 2. 1

Les critères de scientificité de la recherche théorique (tableau tiré et modifié de Charland, 2008; d'après Gohier, 1998)

1. **Pertinence** : les énoncés sont pertinents par rapport au domaine
2. **Valeur euristique** : les données donnent à connaître
3. **Cohérence** : non-contradiction entre les énoncés
4. **Circonscription** : délimitation du domaine d'objets
5. **Complétude** : exhaustivité par rapport au domaine d'objets
6. **Irréductibilité** : simplicité ou caractère fondamental
7. **Crédibilité**
 - a) Crédibilité des sources utilisées
 - b) Mise en place d'une méthode dialectique (argumentation et sens critique)
 - Argumentation
 - i. Rhétoriquement efficace
 - ii. Logiquement solide
 - iii. Dialectiquement transparente
 - Doute méthodologique
 - i. Mise à l'épreuve des thèses avancées : explicitement et implicitement suscitées chez le lecteur
 - c) Exposition des présupposés épistémologiques et théoriques
 - Paradigme
 - Grille d'analyse

Par circonscription, on entend la délimitation de l'objet d'étude. Il faut s'assurer que les raisonnements se voulant traités par le modèle sont clairement énoncés. Par ailleurs, la circonscription est liée à la complétude. Pour juger de la complétude du modèle, il faut s'assurer que tous les RM se voulant pris en charge par le modèle le sont bien et si le modèle ne prend en charge que ces raisonnements et aucun autre. L'irréductibilité fait référence à la simplicité du modèle proposé.

Le dernier critère de validité énoncé est la crédibilité et il regroupe trois sous-critères : la crédibilité des sources, la crédibilité de l'argumentation déployée par l'auteur et la crédibilité du sens critique de l'auteur (Berryman, 2002, dans Charland 2008). La crédibilité des sources pourra être jugée par les évaluateurs de la thèse. Pour ce qui est des deux derniers sous-critères, la crédibilité de l'argumentation et du

sens critique de l'auteur, la mise au jour des présupposés épistémologiques et théoriques qui ont supporté l'élaboration de cette thèse favorise l'évaluation de la crédibilité.

2.3.6 Le modèle

Lorsque le prototype a passé par le processus de validation à court terme, il peut être proposé à titre de modèle. Il contribue alors à l'avancée de recherches empiriques ou théoriques. Un processus cyclique s'enclenche. Ces nouvelles recherches viennent valider ou invalider le modèle, le modifier, l'améliorer. Cet autre processus de validation est effectué à plus ou moins long terme et dépasse le cadre de cette recherche.

2.3.7 Les boucles de rétroaction

À chacune des étapes de l'anasynthèse, il y a des boucles de rétroaction qui permettent de valider le modèle. En effet, les boucles de rétroaction utilisées à chacune des étapes de l'anasynthèse permettent de s'assurer des critères de scientificité, par un retour aux textes, par la saturation des données et par la validation par des experts.

2.3.8 Influence des fondements paradigmatiques sur la construction et la validation du modèle

La présentation de différents énoncés fondateurs de ma vision des mathématiques de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques ont des répercussions sur

mon interprétation des textes, ainsi que sur le développement²² du modèle de raisonnement mathématique pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire. La présente section fait état de certains fondements théoriques qui guideront l'analyse de la littérature et l'élaboration des prochains chapitres.

Déjà en introduction, je présentais le fait que la recherche est pour moi une forme de discours particulier avec son vocabulaire et ses règles propres. L'évolution d'un domaine de recherche passe par la construction d'un vocabulaire commun et bien défini afin de pouvoir comparer et synthétiser différents résultats de recherche. Tout comme pour l'apprentissage des élèves, le développement de la recherche se construit à partir des objets précédemment développés, dans un processus d'individualisation du discours et de « re » communication.

La littérature en didactique des mathématiques contient plusieurs discours sur le RM. L'analyse de ce discours peut s'avérer utile pour mieux comprendre ce qu'on entend par RM, mais surtout pour construire un nouveau discours sur le raisonnement. Par discours, on entend un type particulier de communication, à savoir un type qui « draws some individuals together while excluding some others » (Sfard, 2008, p. 91). On se rappellera que la communication implique des actions et des réactions de participants à celle-ci. Afin de m'intégrer au discours sur le RM en didactique des mathématiques relatif à l'enseignement primaire et secondaire, je m'intéresserai donc, dans un premier temps, à comment les différents auteurs discutent du RM dans le contexte de l'enseignement primaire et secondaire. Cette analyse générera des énoncés à propos du RM que l'on veut cohérents avec la vision discursive des

²² Il faut toujours garder en tête que le terme développement réfère, dans le cadre de ce projet, à un changement dans le discours.

mathématiques et la vision socioculturalisme adoptées pour l'enseignement et l'apprentissage.

2.4 Le concept de modèle

L'analyse nécessite de clarifier ce qui est entendu par modèle. Legendre (2005) définit le modèle, dans le domaine de la recherche en éducation, comme une

représentation fonctionnelle et simplifiée d'une classe d'objets ou de phénomènes à l'aide de symboles, organisés en une forme plus ou moins structurée, dont l'exploration et la manipulation, effectuées de manière concrète ou abstraite, entraînent une compréhension accrue et permettent l'énoncé d'hypothèses de recherche (p. 892).

Un modèle permet donc, selon cette définition, une réflexion sur l'objet d'étude (ici le RM) par une simplification du réel, en s'attardant sur les composantes et relations jugées pertinentes dans le contexte de la recherche (Sauvé, 1992). Le modèle devient alors un outil particulièrement approprié pour capturer la complexité du réel. Par ailleurs, le mot « simplifié » ne porte pas sur les représentations déjà existantes qui peuvent être plus simples que le modèle proposé, mais bien avec le RM lui-même en tant que concept. Le modèle vise ainsi une meilleure et plus complète compréhension de ce qu'est le RM pour l'enseignement au primaire et au secondaire. Il y a ici deux idées. La première est que le modèle doit permettre d'appréhender le concept de RM dans toute sa complexité en mettant en évidence ses aspects essentiels sans négliger une partie de sa signification. La seconde est qu'il doit rendre accessible ce concept par une simplification. Plus simple, ce n'est pas moins complexe, mais bien moins compliqué, c'est-à-dire organisé en un réseau cohérent.

Un modèle permet aussi une meilleure communication sur l'objet d'étude en fournissant un vocabulaire et des symboles communs (L. F. Lee, 1997). À l'instar du modèle élaboré par L. F. Lee (1997), le modèle attendu doit permettre une meilleure communication et alimenter la réflexion à l'intérieur de la communauté d'éducation mathématique. Cette communauté inclut autant des chercheurs et des formateurs des maîtres que des enseignants des niveaux primaire et secondaire. Ce sont entre autres ces différents acteurs qui, par leur réflexion et leur action, peuvent influencer, directement ou indirectement, l'apprentissage des élèves. De plus, comme le mentionnent Kieran (1998), Sauvé (1992), L. F. Lee (1997) et Legendre (2005), le modèle pourra favoriser la tenue de recherches empiriques qui permettront d'améliorer le modèle théorique : « [w]ithout a theoretical model, research remains piecemeal or eclectic and without empirical research the diverse models or theories stagnate » (L. F. Lee, 1997, p. 42).

Par ce modèle, nous désirons répondre au besoin d'un modèle de RM pour l'enseignement à l'école comme posé dans la problématique. Le vocabulaire utilisé et les exemples fournis devront donc être pertinents pour l'enseignement au primaire et au secondaire. Ce modèle sera alors un réseau notionnel en précisant les concepts connexes au RM et en les qualifiant.

2.5 La mise en œuvre de la méthodologie pour la construction du modèle théorique

Le processus d'anasynthèse est utilisé à toutes les étapes de la recherche, de la construction de la problématique à l'élaboration du modèle. Ainsi, c'est l'intérêt pour le RM qui m'a menée à un recensement des écrits dans plusieurs banques de données et catalogues de bibliothèque (voir le tableau 2.2) à partir de descripteurs qui, au départ, s'appuyaient sur le programme de formation de l'école québécoise (MELS,

2007) et quelques lectures préliminaires. Ces descripteurs étaient le premier champ notionnel (ou premières catégories de codification) et sont présentés au tableau 2.3. Les premiers descripteurs font référence au concept de RM. La seconde liste de descripteurs permet de raffiner la recherche pour s'assurer de capturer les textes qui portent sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au primaire et au secondaire ainsi que les textes qui théorisent le concept de RM. L'utilisation de thésaurus a permis de raffiner le premier champ notionnel par l'ajout de nouveaux mots-clés (en gras souligné dans le tableau 2.3). En plus des banques et des catalogues, des chercheurs intéressés par le RM ont aussi été consultés.

Tableau 2. 2
Les bases de données et les catalogues consultés

Catalogues de bibliothèques	- Virtuose (UQAM) - Crésus (Université de Sherbrooke) - Ariane (Université Laval) - Atrium (Université de Montréal) - Muse (Université McGill)
Banques de données	- ERIC - FRANCIS - MathEduc - ProQuest Dissertations and Theses
Moteur de recherche	- Google - Google Scholars

Tableau 2. 3
Un premier champ notionnel

Raisonnement ou *pensée* mathématique (mathematical reasoning or *thinking*)

Raisonnement déductif (deductive reasoning)

Raisonnement inductif (inductive reasoning)

Raisonnement par analogie (analogical reasoning)

Raisonnement logique (logical reasoning)

Enseignement secondaire (middle or secondary or high school)

Enseignement primaire (elementary or primary school)

Mathématiques (mathematics)

Caractérisation (characterization)

Modèle (model/framework)

Définition (definition)

L'élaboration de la problématique a débuté dès ce premier recensement par une mise en évidence d'un certain besoin de structuration théorique et s'est poursuivie au fur et à mesure que le corpus d'analyse a été sélectionné (recension). C'est ce besoin de structuration qui mène à l'objectif de ce projet qui se traduit par la nécessité d'élaborer un modèle du RM du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage au primaire et au secondaire. Par ailleurs, les écrits sélectionnés lors de la recension se font dans le but de répondre à cet objectif. Pour ce faire, un écrit est sélectionné s'il contient un minimum de conceptualisation du raisonnement ou du RM (une réflexion théorique, une définition, une caractérisation, un modèle, un cadre de référence).

2.5.1 La constitution du corpus

Le choix des écrits constituant le corpus d'analyse se fait aussi dans le but que celui-ci réponde aux cinq critères de qualité et de validité mentionnés à la section 2.3.1 : l'accès aux sources, l'exhaustivité, l'actualité, l'authenticité et les auteurs majeurs du domaine. C'est ici que l'utilisation des banques de données prend tout son sens en

permettant de s'assurer le respect des quatre premiers critères. Étant donnée la nécessité d'actualité des sources, la collecte a débuté en 1990. Par ailleurs, la saturation des données ayant débuté avant l'analyse des textes publiés après 2010, le corpus est limité aux années 1990 à 2010, à l'exception d'auteurs clés ayant publié avant 1990 et cité par plusieurs autres. Afin de s'assurer d'avoir les auteurs majeurs du domaine (cinquième critère), les références des textes sélectionnés ont été consultées de façon à repérer les auteurs qui sont souvent cités et qui pourraient ne pas avoir été trouvés par les banques de données. De plus, toujours pour s'assurer d'avoir un corpus le plus complet possible, certains experts dans le domaine ont aussi été consultés. Enfin, pour s'assurer de la qualité et validité des sources, la classification de Toerner et Arzarello (2012) a permis de raffiner la sélection des périodiques scientifiques. À moins qu'un texte soit cité par plusieurs auteurs comme base de discussion sur le RM, seuls ces périodiques ont été considérés (voir tableau 2.4).

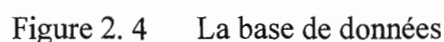
Tableau 2. 4
Une classification des périodiques en didactique des mathématiques par Toerner et Arzarello (2012)

A+	Educational Studies in Mathematics Journal for Research in Mathematics Education
A	For the Learning of Mathematics Journal of Mathematical Behavior (The) Journal of Mathematics Teacher Education Mathematical Thinking and Learning ZDM: The International Journal on Mathematics Education
B	International Journal of Mathematical Education in Science and Technology International Journal of Science and Mathematics Education Mathematics Education Research Journal Recherches en Didactique des Mathématiques Research in Mathematics Education
C	Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education Journal für Mathematik-Didaktik Nordisk matematikdidaktikk / Nordic Studies in Mathematics Education, NOMAD Technology, Knowledge and Learning (formerly: International Journal of Computers for Mathematical Learning) The Montana Math Enthusiast

Comme l'ensemble des écrits d'autres domaines ne s'intéresse pas au RM en contexte d'enseignement au primaire et au secondaire, il s'avère peu pertinent d'inclure cette littérature dans le corpus d'analyse. C'est pour cette raison que le corpus se limite à la littérature en didactique des mathématiques. Par ailleurs, certains écrits d'autres domaines ont été pris en compte à certains moments. La raison est que l'auteur en question a été cité par plusieurs auteurs du corpus. Par exemple, pour définir le RM, certains auteurs en didactique des mathématiques s'appuient sur des philosophes ou logiciens tels Pierce, Toulmin, Aristote et Blanché. C'est le cas entre autres de Duval (1995), Reid (2003), Cabassut (2005). Un retour aux sources originales a été privilégié dans les cas où c'était possible.

2.5.2 L'analyse de la littérature

En parallèle de la constitution du corpus, l'analyse de la littérature a débuté. Les lectures successives et répétées permettent un premier repérage des unités de sens à



2.5.2.1 Un premier niveau de codage

Dans un premier temps, un ou plusieurs descripteurs sont attribués à l'unité en fonction de son contenu. C'est le champ notionnel présenté au tableau 2.3. Dans un deuxième temps, ce travail de codification fait émerger de nouveaux descripteurs qui amènent un retour à lecture des textes précédemment lus, puis à la recodification, mais aussi un retour à la construction du corpus. Il y a alors modification du champ notionnel. Le tableau 2.5 présente un de ces champs notionnels modifié.

Tableau 2. 5
Un n° champ notionnel

Raisonnement ou pensée mathématique (mathematical reasoning or thinking)
Raisonnement ou pensée déductif(ve) (deductive reasoning or thinking)
Raisonnement ou pensée inductif(ve) (inductive reasoning or thinking)
Raisonnement abductif (abductive reasoning)
Généralisation (generalization)
Raisonnement ou pensée analogique (analogical reasoning or thinking)
Conjecture
Investigation (inquiry)
Argumentation mathématique (mathematical argumentation)
Justification mathématique (mathematical justification)
Validation mathématique (mathematical validation)
Inférence (inference)
Enseignement secondaire (middle or secondary or high school)
Enseignement primaire (elementary or primary school)
Mathématiques (mathematics)
Caractérisation (characterization)
Modèle (model/framework)
Définition (definition)

2.5.2.2 Un second niveau de codage

Parallèlement à ce premier codage, un second est effectué. À chaque unité de sens est attribué un code selon la nature quadripartite du message (Legendre, 2005). L'information concernant chacun des descripteurs peut faire référence à des éléments formels, axiologiques, praxiques ou explicatifs.

Par éléments formels [EF], il est entendu des unités qui portent sur la précision, la description, l'expression, la définition d'un concept, d'un terme, d'une notion. Par éléments axiologiques [EA], il est entendu des unités qui portent sur les finalités, les buts, les principes. Par éléments praxiques [EP], il est entendu des unités qui portent sur les normes, les prescriptions, les pratiques théoriques ou expérimentales, les us et coutumes. Par éléments explicatifs [EE], il est entendu les unités qui viennent expliquer les trois autres types d'éléments. Une unité de sens peut recevoir plus d'un code. La citation suivante est un exemple d'unité de sens ayant reçu le code EF et EA :

A symbolic representation is external written or spoken, usually with the aim of making communication about the concept easier. A mental representation, on the other hand, refers to internal schemata or frames of reference which a person uses to interact with the external world (Dreyfus, 1991, p. 31).

Il s'agit ici d'un élément de définition de ce qu'est une représentation symbolique qui parle aussi des fonctions des représentations symboliques. Afin de permettre de contraster la définition de représentation symbolique, la seconde partie de la citation a été gardée dans cette unité de sens. Le tableau 2.6 donne quelques exemples d'unités de sens classifiées selon la nature quadripartite du message.

Tableau 2. 6
Des exemples d'éléments formels, axiologiques, praxiques et explicatifs

EF	« In order to detect instances of reasoning within these categories we used the definition of reasoning presented by O'Daffer and Thornquist (1993): "Mathematical reasoning is part of mathematical thinking that involves forming generalization and drawing valid conclusions about ideas and how they are related" (p. 43) » (Artzt, 1999, p. 117).
	« Reasoning, as we use it, comprises a set of practices and norms that are collective, not merely individual or idiosyncratic, and rooted in the discipline. Making mathematics reasonable entails making it subject to, and the result of such reasoning. That an idea makes sense to me is not the same as reasoning toward understandings that are shared by others with whom I discuss and critically examine that idea toward a shared conviction » (Ball et Bass, 2003, p. 29).
	« reasoning is the line of thought adopted to produce assertions and reach conclusions in task solving » (Lithner, 2008)
EA	« According to him (Peirce (1931-1935)), there are three basic types of logical reasoning: deduction, induction and abduction. While deductive [sic] reasoning is for making predictions, inductive [sic] reasoning is for verifying those predictions; and abductive reasoning is for constructing hypotheses for puzzling phenomena » (Aliseda, 2003, p. 308).
	« Abduction and induction play an important role in generalizing knowledge from a finite, incomplete class of particular instances (whether figural, numerical, or everyday objects) » (Rivera et Becker, 2007, p. 151)
	« Le premier type de raisonnement vise à établir la connaissance de la vérité d'une proposition; cette vérité peut être certaine, nécessaire, probable, plausible,... Nous précisons ces différentes conceptions de la vérité plus loin » (Cabassut, 2005, p.26).
EP	« It is a typical inductive procedure to examine the consequences of a conjecture and to judge it on the basis of such an examination » (Pólya, 1968, p. 22).
	« Quand plusieurs cas particuliers ont été examinés et qu'une relation semble perçue entre les éléments, il s'ensuit l'énonciation d'une conjecture. La manipulation deviendra plus systématique et permettra une vérification de l'hypothèse émise » (White, 1993, p. 18).
EE	« In all Peirce described abduction in three distinct ways in 1867, 1878 and 1903. Eco also offers three varieties of abduction, one of which is close to Peirce's 1878 description. These different readings of abduction can be classified across three dimensions: Logical form, specific versus general cases, and the use of reasoning (see Table 1) » (Reid, 2003, p. 1).
	« The fictitious mathematical example (Fig. 6) indicates the existence of different types of abductions (and thus different degrees of creativity): It makes a difference if this abduction is performed by a mathematical expert (who knows such a rule) or by a novice (who did not know the rule before) » (Meyer, 2010, p. 191).

L'attribution de ces codes favorise l'élaboration de la synthèse en décortiquant l'information recueillie en quatre grandes catégories. « Cette distinction a pour double but de focaliser la lecture analytique sur des éléments importants, et de faciliter éventuellement la synthèse globale » (Legendre, 2005, p. 63). Dans le cadre de cette étude, les codes EF et EA sont ceux que l'on cherche le plus à répertorier

puisque l'on s'intéresse à la nature du RM. Ainsi, les éléments de définitions et les éléments axiologiques sont les plus pertinents. En effet, nous sommes à la recherche d'éléments de définitions et non d'un modèle praxéologique. Toutefois, comme le raisonnement est intimement lié à l'individu, certains éléments praxiques peuvent à posteriori apparaître pertinents, cette catégorie a donc été gardée et s'est révélée pertinente pour les synthèses.

2.5.2.3 Un troisième niveau de codage

Pour ce qui est du troisième niveau de codification, il débute un peu plus tard dans le processus de catégorisation. Il va plus loin que les descripteurs et a été instauré pour favoriser l'élaboration du modèle. Ce niveau de codification se veut plus près du modèle en s'approchant des construits théoriques qui le constituent. Les codes de ce troisième niveau font donc référence aux différents aspects du RM. Trois exemples de ces codes sont : forme, processus et finalité. Les deux premiers codes ont permis de mettre en lumière deux aspects du raisonnement, à savoir l'aspect structurel et l'aspect processuel. Le troisième a permis de contraster différentes finalités du RM à travers les écrits.

Le processus de codification implique beaucoup de va-et-vient entre les unités de sens et les textes pour s'assurer que les descripteurs sont pertinents et que la synthèse correspond bien aux informations répertoriées. L'utilisation de la banque de données aide à l'élaboration des synthèses en permettant de rapidement compiler les unités de sens en fonction de chacun des niveaux de codification. Il est possible de demander une liste d'entrée en fonction d'un certain code pour ensuite avoir une vue d'ensemble des unités de sens reliées à celui-ci. La figure 2.5 présente une capture d'écran d'une telle liste.

Enfin, le processus de synthèse s'enclenche un peu après le début de la codification et, après plusieurs boucles de rétroaction, il en résulte un prototype du modèle. En ce qui a trait à la validation à court terme du prototype, deux éléments de validation permettront de s'assurer que le modèle respecte bien les critères de scientificité du modèle présenté au tableau 2.1. D'abord, le processus dans lequel s'insère ce projet, à savoir mes études doctorales, comprend déjà des modalités de validation de ce modèle par des experts (cours, séminaires, présentations orales, stages, soutenance de la thèse) qui m'ont permis d'échanger à propos du modèle en cours de développement et d'ainsi peaufiner le modèle en raffinant mon discours. En fait, à l'instar de Villemagne (2005), mon comité de direction est constitué d'experts de premier choix habilités à valider le prototype étant données leur compréhension approfondie des écrits en didactique des mathématiques portant sur les différents types de RM et du projet lui-même. Ensuite, une section de la thèse sera consacrée à la discussion entourant le respect de ces critères. En particulier, pour le critère concernant la valeur euristique du modèle, une discussion autour d'un raisonnement d'élève sera présentée à l'aide du modèle élaboré afin de montrer comment ce dernier permet de générer des énoncés pertinents et cohérents à propos de ce RM.

2.5.3 La synthèse et le prototype

Il faut indiquer que le modèle qui sera présenté dans les prochains chapitres s'est développé pendant le processus d'analyse et de synthèse et non avant. Il s'agit de l'extension des nombreuses lectures et relectures du corpus. Les chapitres qui suivent représentent aussi une photo dans le temps. Des écrits sur le RM s'ajoutent chaque année et pourront venir enrichir le modèle subséquemment. Par ailleurs, les changements futurs risquent de s'avérer mineurs puisqu'il y a eu phénomène de

saturation. Les lectures²³ tendent à n'ajouter aucun élément conceptuel inédit et à confirmer les informations présentes dans la synthèse déjà produite.

La figure 2.6 présente l'interaction entre les cycles d'analyses et de synthèses. Pour rendre compte du processus d'anasynthèse, une synthèse globale de la littérature qui concerne le RM dans l'enseignement primaire et secondaire est présentée au chapitre III (deuxième bulle). Cette première synthèse m'a permis de poser les jalons d'un modèle de RM à la lumière des écrits en didactique des mathématiques. Cette section débute par l'analyse et la synthèse de quatre modèles de RM trouvés dans la littérature. Ces modèles ont été choisis sur la base du degré de la théorisation et du lien avec l'enseignement primaire ou secondaire explicite. La synthèse se poursuit en revisitant les différents aspects déjà soulignés dans la problématique afin d'enrichir la réflexion les concernant : la dichotomie activité-produit, la nature inférentielle du RM, les éléments axiologiques du RM, l'aspect structure du RM et l'aspect processus du RM. Cette fois-ci, l'ensemble des textes a été considéré et non uniquement les définitions.

Guidées par les éléments formels, axiologiques, pratiques et explicatifs, mais aussi par les fondements commognitifs, l'analyse et la synthèse de la littérature en didactique des mathématiques éclairent cinq aspects du champ conceptuel du RM. Premièrement, la dichotomie activité-produit présente dès la problématique est remise en question et repositionnée à l'intérieur d'un cadre commognitif. Deuxièmement, la nature inférentielle du RM est réaffirmée, mais recadrée afin de prendre en compte davantage que la forme des RM. Troisièmement, les éléments axiologiques permettent de conceptualiser autour des buts, des visées, des fonctions.

²³ Correspondant aux descripteurs du champ notionnel présenté au tableau 2.5.

Quatrièmement, la réflexion est amorcée sur les aspects structurels et processuels. Cette réflexion sera approfondie aux chapitres IV et V (quatrième bulle).

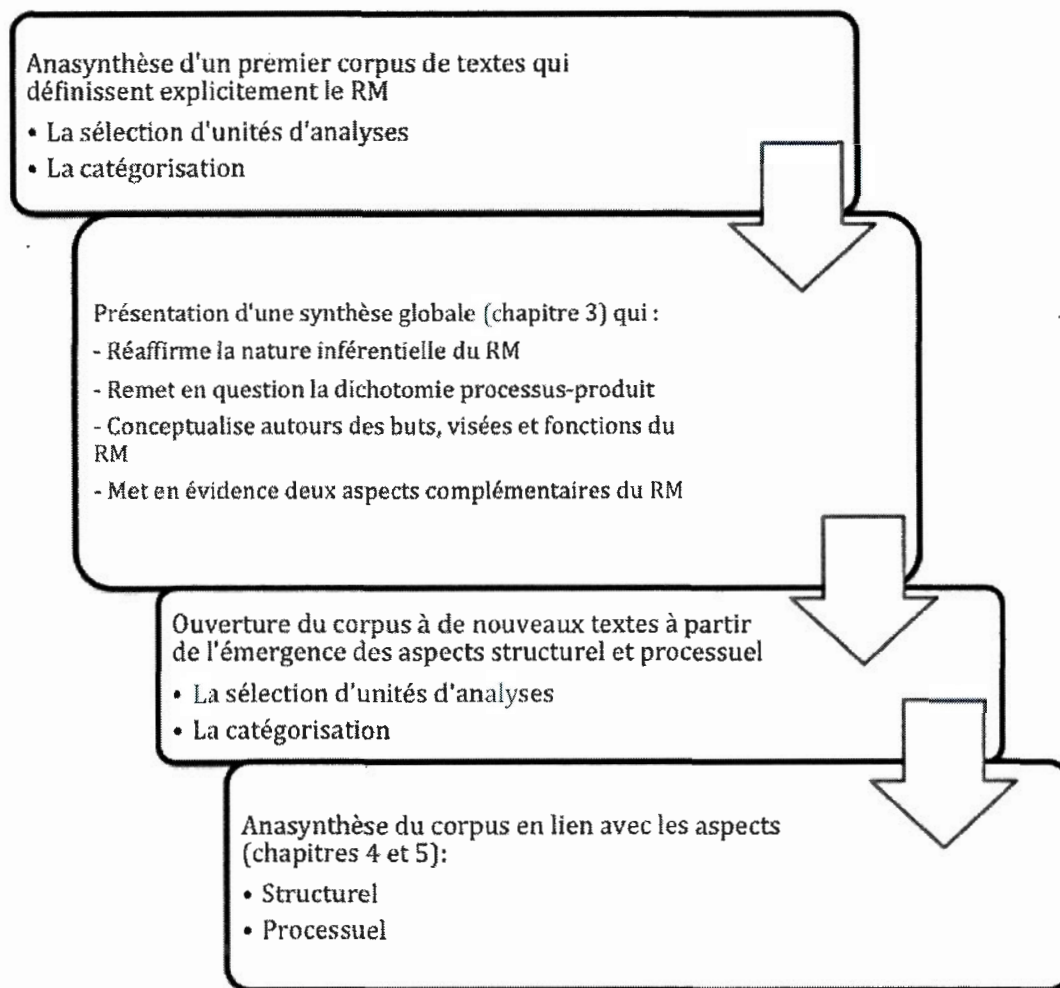


Figure 2.6 La démarche d'anasynthèse menant à l'élaboration du modèle conceptuel de RM

CHAPITRE III

LE RM D'UN POINT DE VUE GÉNÉRAL

Le premier chapitre circonscrit le problème de recherche en survolant la littérature en didactique des mathématiques. Ce problème met en relief le flou conceptuel entourant le RM et mène à l'objectif de recherche qui est d'élaborer un modèle conceptuel du RM pour l'enseignement primaire et secondaire. Ce troisième chapitre fait état d'une analyse plus profonde de la littérature et présente la synthèse d'un corpus (voir annexe A) respectant les critères d'accès aux sources, d'exhaustivité²⁴, d'actualité et d'authenticité (Van der Maren, 1996) ainsi que d'auteurs majeurs (M.-H. Guay, 2004), afin de préciser l'objectif de recherche en objectifs spécifiques.

Toute cette démarche mène à une synthèse globale du RM qui pose les bases d'un modèle conceptuel du RM pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire. Deux éléments qui devront être davantage approfondis, à savoir l'aspect structurel et processuel du RM, émergent de cette synthèse. Il s'agit des deux objectifs spécifiques qui clôturent ce chapitre : 1) Proposer une élaboration et une structuration des aspects structurel et processuel du RM; 2) Établir les liens entre l'aspect processuel et l'aspect structurel du RM. Ces objectifs ouvrent sur

²⁴ On se souviendra que la recherche dans les banques de données se limite aux écrits de 1990 à 2010.

l'élargissement du corpus en tenant compte d'un nouveau pan de la littérature, qui, à priori, ne définit pas directement le RM, mais qui traite de certaines de ces composantes. C'est le cas, par exemple, de textes qui portent sur la généralisation, la justification ou la conjecture en mathématiques sans parler directement de RM.

3.1 La nature discursive du RM

Au premier chapitre, j'ai présenté ma vision des mathématiques qui s'appuie sur la théorie commognitive développée par Sfard (2008). Le terme commognition, néologisme formé des termes cognition et communication, met en évidence que la communication interpersonnelle et la pensée sont deux facettes d'un même phénomène (Sfard, 2008). Ce positionnement théorique a plusieurs implications. J'ai abordé celles sur la méthodologie de recherche au chapitre II. Je détaille ici comment la commognition et la vision discursive du RM influencent la construction du modèle, ce qui aidera à réconcilier certaines divergences entre les propos des auteurs, et à combler certains vides théoriques.

Comme il a été spécifié au premier chapitre, la commognition s'appuie sur la prémisse que les mathématiques sont un discours, une activité de communication. Comme tout discours, elles ont donc leurs propres vocabulaires, règles, médiateurs visuels, routines distinctes, énoncés généralement acceptés par la communauté mathématique.

Qu'est-ce qui est entendu par discours ici? Premièrement, le discours, tel que défini par la commognition, ne se limite pas aux textes écrits ou parlés. Cette communication ne se limite pas non plus aux interactions langagières. En fait, tout acte de communication est une composante du discours mathématique : langage corporel, indices contextuels, histoire des interlocuteurs.

Pour Sfard (2002), deux éléments sont spécifiques au discours mathématique : une utilisation exceptionnelle de symboles comme outil de communication et les règles discursives particulières qui le régissent. Ceci mène à deux niveaux de discours, le niveau objet et le niveau méta. Le niveau objet est un discours qui porte sur les objets de ce discours. Cette affirmation demande un petit détour sur ce qui est entendu par objet du discours. Sfard définit l'objet discursif comme suit : « The (discursive) objet signified by S (or simply object S) in a given discourse on S is the realization tree of S within this discourse » (Sfard, 2008, p.166). Elle précise cette définition en 2012 :

a mathematical object can be defined as a mathematical signifier together with its realization tree, where the realization tree is a hierarchically organized set of all the realizations of the given signifier, together with the realizations of these realizations, as well as the realizations of these latter realizations, and so forth (Sfard, 2012, p. 4).

Plusieurs termes de cette définition méritent que je m'y attarde.

Premièrement, le terme « signifiant » est défini par Sfard (2008) comme étant des mots ou des symboles qui jouent le rôle de noms dans les énoncés du discours. Deuxièmement, le terme « réalisation d'un signifiant » réfère à un objet accessible par la perception sur lequel on peut opérer pour développer de nouveaux énoncés à propos du signifiant. « Realization of the signifier S is a perceptually accessible thing S' so that every endorsed narrative about S can be translated according to well defined rules into an endorsed narrative about S' » (Sfard, 2008, p. 154). Les réalisations peuvent prendre différentes formes : mots écrits ou parlés, symboles algébriques, dessins, objets concrets, gestes. Comme un signifiant peut avoir plusieurs réalisations, Sfard relie métaphoriquement le signifiant à la racine d'un arbre de réalisation. Ainsi, l'objet discursif est défini à partir de réalisations dites accessibles à la perception et plusieurs réalisations peuvent être liées à un même signifié (Sfard 2008). Enfin, comme le souligne Sfard, qu'un mot, symbole ou

schéma soit nommé « signifiant » ou « réalisation d'un signifiant » est une question d'usage et non une propriété intrinsèque de ses éléments du discours. C'est donc pour illustrer la nature récursive du discours mathématique que chaque réalisation d'un arbre de réalisation peut être vue comme le signifiant des réalisations qui y sont attachées.

Les objets discursifs sont dits concrets ou abstraits. Les objets discursifs concrets découlent de l'action de nommer un objet dit « premier », de réunir sous un même nom un ensemble d'objets, puis dans certain cas, de traiter l'ensemble en tant qu'un seul objet. Par exemple, dans l'expression « la pomme est un fruit », le mot pomme est un objet discursif qui fait référence à l'ensemble des objets (physiques) que l'on appelle pomme. L'objet abstrait ne fait référence à aucun objet physique. Pour construire un objet abstrait, l'objectivation est nécessaire. L'objectivation²⁵ est « a discursive process of double elimination, which results in freeing the evolving narratives from the extension in time and from human agency » (Sfard, 2008, p. 51-52). Les objets mathématiques sont des objets abstraits. Par exemple, le nombre en tant qu'objet mathématique ne fait référence à aucun objet physique. Il est constitué des différentes réalisations qui lui sont attachées.

Le second type de discours (le premier étant celui de niveau objet) est celui de niveau méta. Le discours dit « de niveau méta » est un discours qui porte sur un autre déjà existant. Par exemple, Sfard (2008) considère l'algèbre élémentaire comme un discours qui subsume l'arithmétique. L'algèbre élémentaire est alors vue comme un méta discours. Comme le discours est récursif, l'algèbre élémentaire devient ensuite

²⁵ L'objectivation est définie différemment par Radford (2011). Ce dernier la définit plutôt comme un « processus social de prise de conscience progressive de l'édifice homérique, c'est-à-dire de quelque chose qui se dresse en face de nous, une figure, une forme, quelque chose dont nous percevons graduellement la généralité, en même temps que nous lui donnons un sens » (p. 68).

un discours en soi sur lequel on peut de nouveau porter un regard méta, et ainsi de suite. Ce type de discours met en lumière le deuxième élément caractéristique du discours mathématique que Sfard (2002) souligne, c'est-à-dire, les règles métadiscursives qui le régissent. Ces règles métadiscursives sont ce qui permet qu'il y ait communication effective, et sont, selon Sfard (2002), le véhicule premier de la culture mathématique. Ces règles sont rarement explicitées. Sfard donne comme exemple, de ces règles métadiscursives, les façons dont on définit et prouve en mathématique.

Ceci mène à deux types de développement du discours. Prenons quelques lignes pour y revenir, car ces types de développement s'avèrent importants dans la différenciation du RM des autres activités de pensée mathématique. Premièrement, l'apprentissage comme développement du discours sur les objets mathématiques est en extension, c'est-à-dire qu'on ajoute des énoncés à propos d'un objet déjà construit. Les règles du discours ne changent pas. Deuxièmement, l'apprentissage comme développement du métadiscours sur le discours amène la création d'un nouveau discours qui subsume les précédents, et génère de nouveaux objets et de nouvelles règles.

Sfard (2012) définit deux types de développement de nouveaux discours (développement métadiscursif). Le premier, qu'elle qualifie de vertical, est le développement d'un nouveau discours par la combinaison d'un ancien discours et de son métadiscours. Le second, qu'elle qualifie d'horizontal, est le développement d'un nouveau discours, par la combinaison de plusieurs discours sur des objets mathématiques pour aboutir à la création d'un nouvel objet. Cette distinction semble plus ou moins pertinente dans la mesure où un discours, sur le ou les discours, est toujours nécessaire. Dans les deux cas, le développement métadiscursif permet la création d'un discours qui est incohérent, incommensurable avec chacun des discours qui en ont permis la création.

C'est donc en considérant le RM en tant qu'activité discursive que les textes du corpus seront analysés afin de mettre en évidence les convergences, divergences et absences associées à cette perspective.

3.2 Les apports et les limites de quatre modèles pour étudier le RM

Afin de mieux cerner le discours sur le RM et d'en faire émerger un modèle conceptuel, quatre modèles ont été analysés afin d'en construire une synthèse. Un modèle permet de situer un concept à l'intérieur d'un réseau conceptuel, c'est-à-dire que le modèle définit des relations entre divers concepts et d'autres aspects (fonction, nature, principe) qu'il est impossible de circonscrire dans une définition concise de quelques lignes. Une revue de la littérature a permis de trouver quatre modèles de RM exposés dans des écrits qui correspondent aux critères de sélection du corpus. Par modèle, il est entendu, dans cette section, des textes qui rapportent plus qu'une définition du raisonnement, en fournissant une réflexion théorique ainsi que certains outils d'analyse de ces raisonnements, utiles pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

3.2.1 Les analyses du raisonnement de Duval

Duval (1995) s'est intéressé aux raisonnements (mathématique) qui peuvent s'écrire sous la forme d'un texte, ce qu'il nomme discours. Pour Duval, « le discours est l'emploi d'une langue pour "dire quelque chose", c'est-à-dire pour parler d'objets physiques, idéaux, ou imaginaires, qui ne sont pas seulement les potentialités

signifiantes d'une langue » (p. 88). On remarquera que le terme « discours » employé par Duval est différent de celui que j'ai défini plus haut²⁶.

Duval (1995) contribue par ses différentes analyses du raisonnement à la réflexion théorique liée au RM. Il fait une quadruple analyse, c'est-à-dire, selon les mots de l'auteur : une analyse fonctionnelle (portant sur sa nature), structurale (portant sur ses formes), logique (portant sur les conditions de validité) et épistémologique (portant sur sa reconnaissance théorique).

Selon l'analyse fonctionnelle de Duval (1995), un discours est un raisonnement s'il est orienté vers la proposition à justifier et s'il est centré sur la valeur logique ou épistémique de cette proposition (et non sur son contenu).

La valeur épistémique est le degré de fiabilité que possède ce qui est énoncé dans la proposition [...] le contenu d'une proposition apparaît évident, ou certain ou seulement vraisemblable, ou plausible ou simplement possible, ou impossible, ou encore absurde (Duval, 1995, p. 218).

Cette valeur épistémique peut dépendre du sens accordé au contenu de la proposition par la personne qui raisonne, ou encore du contexte d'énonciation. La valeur logique fait plutôt référence à la valeur de vérité dérivée par des procédés logiques (vraie, fausse, indéterminée) de cette même proposition. Duval en arrive donc à définir le raisonnement comme une forme d'expansion discursive qui a comme fonction de modifier la valeur épistémique (certitude de l'énoncé), sémantique (le sens de l'énoncé) ou théorique (sa place dans une théorie donnée) d'une proposition et, de

²⁶ Il est lié à l'emploi d'une langue pour dire quelque chose à propos d'un objet extérieur à ce discours. Pour la commognition, il s'agit d'un acte de communication et les objets sont proprement discursifs. Les objets sont constitués par le discours.

surcroît, logique (vrai ou faux) lorsque certaines conditions sont remplies. De plus, l'analyse fonctionnelle de Duval stipule qu'une proposition a un statut qui peut varier selon le contexte d'énonciation. Ce statut détermine la place de la proposition dans le discours. Duval associe deux types de statuts à une proposition. Le statut théorique fait référence à son statut dans un cadre théorique (par exemple définition, axiome, règle). Le statut opératoire détermine son statut à l'intérieur même du raisonnement à savoir prémisses, conclusion ou énoncé-tiers²⁷. Lorsque l'énoncé possède un statut théorique, c'est ce statut qui détermine le statut opératoire de cet énoncé et non son contenu.

Selon son analyse structurale, le raisonnement a deux niveaux d'organisation : le pas de raisonnement et l'enchaînement. Le pas de raisonnement est la plus petite unité d'analyse d'un raisonnement possible. Il est composé de prémisses, d'une conclusion, et dans certains cas, d'un énoncé-tiers. L'enchaînement fait plutôt référence à l'articulation de plusieurs pas de raisonnement. Duval parle de quatre organisations possibles d'un pas de raisonnement (voir figure 3.1). Il définit chacune de ces organisations par rapport au statut opératoire des propositions (déterminé ou non par un statut théorique) et à la présence ou non d'un énoncé-tiers. L'inférence sémantique et l'inférence discursive seraient des organisations propres à l'argumentation, tandis que la déduction, telle qu'il la définit, serait propre à la démonstration mathématique.

Duval (1995) définit l'inférence sémantique par le passage direct des prémisses à la conclusion sans énoncé-tiers. Cette inférence s'appuie sur le sens des propositions. Il s'agit d'un pas de raisonnement dont les propositions n'ont pas de statut opératoire déterminé par un statut théorique. Par exemple, le raisonnement : « J'ai réussi à

²⁷ Un énoncé-tiers est un énoncé qui permet le passage des prémisses à la conclusion. Pedemonte (2002) l'appelle plutôt « permis d'inférer », Cabassut (2005), « règle de validation. ».

résoudre ce problème. J'ai donc choisi la bonne stratégie » est qualifié d'inférence sémantique par Duval, car l'énoncé-tiers « Pour résoudre un problème, il faut avoir une bonne stratégie » est implicite. Dans l'inférence discursive, les propositions n'ont pas de statut opératoire prédéterminé, mais il y a recours à un énoncé-tiers. Cet énoncé ne fait pas partie d'un corpus théorique au sens de Duval. Il peut s'agir par exemple d'une norme sociale ou d'un constat local. C'est l'explicitation des raisons.

Tableau 3. 1

Les quatre pas de raisonnement ou les quatre organisations possibles de l'expansion discursive d'une ou de plusieurs propositions (tiré de Duval, 1995, p. 238)

	Sans statut opératoire	Avec statut opératoire
Sans énoncé-tiers	I. Inférence sémantique	II. Syllogisme aristotélicien
Avec énoncé-tiers	III. Inférence discursive	IV. Déduction

Le syllogisme aristotélicien n'a pas d'énoncé-tiers, mais les propositions ont, soit le statut opératoire de prémisses, ou de conclusion; ce statut est régi par la théorie des syllogismes. C'est la forme des énoncés qui est régie par la théorie et non la valeur des énoncés. Duval définit ensuite la déduction comme l'organisation d'un pas de raisonnement qui attribue un statut opératoire par le statut théorique (conféré par la théorie mathématique) et utilise un énoncé-tiers.

La distinction entre syllogisme aristotélicien et déduction paraît particulière en ce sens que, classiquement, les syllogismes sont des exemples typiques de déductions. Le fameux syllogisme de Socrate est utilisé pour représenter une déduction. Duval justifie cette distinction entre autres par le fait que le syllogisme contient des prémisses qui ne peuvent être indépendantes l'une de l'autre puisqu'elles doivent avoir un terme commun pour permettre l'inférence de la conclusion. Toutefois, comme Pedemonte (2002) le souligne, il est possible d'explicitier l'énoncé-tiers dans les syllogismes, tout comme, d'ailleurs, dans les inférences sémantiques. La forme

ternaire des raisonnements ne se limite pas à la déduction. Toute inférence peut être décrite avec une forme ternaire (Pedemonte, 2002).

L'analyse logique fait référence à l'étude des conditions de validité d'un raisonnement. Selon Duval, un raisonnement valide « est un raisonnement dont l'organisation des propositions entre elles produit nécessairement une et une seule conclusion » (1995, p. 269). Au sens de Duval, les organisations de pas de raisonnement autre que la déduction ne peuvent donc être valides. Les inférences sémantiques et discursives doivent plutôt répondre à un critère de pertinence de contenu des propositions.

L'analyse épistémologique amène Duval (1995) à discuter de comment les raisonnements permettent de changer le statut théorique des propositions, et ainsi de faire évoluer la théorie dans lesquelles elles s'insèrent. Pour lui, le contenu des propositions n'est en rien responsable de ce changement. Seule la valeur épistémique théorique importe. Par ailleurs, cette partie de réflexion semble principalement axée sur la déduction qui est la seule forme qui prend en compte, selon Duval, la valeur épistémique théorique.

Comme le discours mathématique est posé dans cette thèse comme une activité commognitive, et donc construite socialement, l'interprétation du contenu des propositions est nécessaire pour positionner ces dernières à même le discours construit. Comment déterminer le statut théorique d'une proposition sans positionner cette dernière à même la théorie développée? Le contenu est ce qui permet de donner du sens à la proposition et de la positionner à même une théorie.

Il est à remarquer que ces différentes analyses du raisonnement permettent ensuite à Duval de positionner son approche didactique de la démonstration. L'auteur prend

aussi le temps de mentionner que le raisonnement inductif ne fait pas parti de son analyse, car, selon les dires de l'auteur, ce type de raisonnement est trop dépendant de l'expérience de la personne qui raisonne pour pouvoir être étudié à partir du discours. On pourrait penser que, pour Duval, le raisonnement inductif fait appel à trop d'éléments non explicités dans le discours de la personne qui raisonne. Toutefois, un modèle conceptuel du RM pour l'enseignement primaire et secondaire ne peut faire l'économie du raisonnement inductif. Ce type de raisonnement est important pour les activités de découverte mathématique, ainsi que, particulièrement, dans l'étude de l'algèbre élémentaire. Il est donc essentiel d'élaborer un modèle qui permet aussi de rendre compte de ce type de raisonnement.

Si l'on se positionne en termes commognitifs, le modèle de Duval (1995) est trop restrictif en se limitant aux textes rédigés par les élèves. Par ailleurs, Richard (2004) a étendu la portée de ce modèle en considérant les graphiques, schémas et autres représentations figurales. En ajoutant cet aspect, la définition de discours se rapproche davantage de celle adoptée dans cette thèse. Toutefois, de prendre en compte d'autres éléments du discours que les textes ne permet pas à ce modèle de s'ouvrir à d'autres formes de discours que la déduction, ainsi qu'à des raisonnements sur des énoncés qui ne sont pas donnés à priori. Ensuite, la différence entre valeur épistémique et valeur théorique en est une de point de vue. Comme le souligne Duval lui-même, la valeur théorique est liée à un contexte d'énonciation. En termes commognitifs, la valeur théorique est déterminée par une compréhension des règles de discours propres aux mathématiques. Ce statut théorique dépend aussi de la construction du discours qui le supporte. Un élément, souligné par Duval, porteur pour l'analyse qui suivra, est l'idée de décomposer le RM en pas et qu'un RM est un enchainement de pas d'inférence.

3.2.2 Le RM selon Lithner

Le modèle développé par Lithner a beaucoup évolué à travers ses écrits. Pour bien comprendre cette évolution, deux versions seront discutées ici. Tout au long de cette évolution, le raisonnement est défini comme « the line of thought adopted to produce assertions and reach conclusions » (2000, p. 166). Cette définition se précise dans les écrits subséquents. En effet, l'auteur ajoute, dès 2003, que le raisonnement n'a pas nécessairement une forme déductive et peut être incorrect. Il nécessite toutefois des raisons (pour la personne qui raisonne) qui supportent le raisonnement. Le concept de raison prend alors beaucoup d'importance. Un peu plus tard (Lithner, 2008), l'idée de résolution de tâches vient préciser la définition. Par tâche, il est entendu ce que l'on demande de faire à l'élève en classe. Un peu plus tard, Lithner parle de résolution de tâches mathématiques (non-routinières). Il ajoute qu'il ne prend en compte que le raisonnement en tant que produit qui s'observe comme une séquence de raisonnement, qui débute avec la tâche et se termine avec la réponse. Ainsi, le modèle de Lithner semble se situer dans un contexte de résolution de problèmes. En effet, dès les premiers écrits, le raisonnement est associé à une séquence de quatre étapes (non nécessairement linéaire) à savoir : une situation problématique est rencontrée, une stratégie de résolution est choisie, implantée, puis une conclusion est obtenue. Un parallèle peut être fait avec le modèle de résolution de problème de Pólya (1965). Par ailleurs, cette séquence est plutôt réductrice en ce qui a trait à l'activité de résolution de problème telle qu'elle peut se développer. On peut voir un bel exemple d'activité mathématique chez Lakatos (1977, 1984) où le RM, tel que le définit Lithner, est présent, mais ne suit pas ces étapes.

Dans les premiers écrits, l'auteur précise deux types de RM : le raisonnement plausible et le raisonnement basé sur l'expérience de l'apprenant. Ces deux types de raisonnement ont la même finalité : mener vers une conclusion qui est probablement vraie. On retrouve ici la valeur épistémique de Duval (1995). Ce qui différencie ces

deux types de raisonnement est ce que Toulmin (Pedemonte, 2002) appelle le permis d'inférer²⁸ (la raison). Lithner définit le raisonnement plausible comme suit :

A version of the reasoning structure (1-4) will be called plausible reasoning (abbreviated PR) if the argumentation:

(i) is founded on mathematical properties of the components involved in the reasoning, and

(ii) is meant to guide towards what probably is the truth, without necessarily having to be complete or correct. (Lithner, 2000, p. 166-167)

Contrairement à Pólya (1968), Lithner ne relie pas directement le raisonnement plausible et la conjecture. Il le relie plutôt à une version moins « rigoureuse » de démonstration mathématique, selon les dires de l'auteur. Par ailleurs, il mentionne aussi que le raisonnement plausible inclut la preuve en tant que cas spécial qui nécessite un plus haut niveau de certitude.

Le raisonnement basé sur l'expérience s'appuie, pour sa part, sur des notions ou procédures développées par l'étudiant lors d'expériences passées. Une expérience passée s'appuie, par exemple, sur les problèmes résolus dans le manuel, ou encore sur ce que l'enseignant a pu fournir comme information. Un lien peut ici être fait avec le raisonnement par analogie (English, 1998). Selon l'auteur, ce type de raisonnement peut être superficiel mathématiquement, c'est-à-dire que l'étudiant peut s'appuyer sur un permis d'inférer qui n'a aucun lien avec l'activité mathématique comme telle, mais uniquement sur le fait que « c'est comme ça dans le manuel ».

Dès 2003, deux nouveaux concepts sont introduits dans le modèle afin d'éclairer la définition de raisonnement plausible : les composantes du raisonnement et les

²⁸ Le mot « garantie » est utilisé comme traduction de warrant dans le livre de Toulmin (1958), mais Pedemonte utilise plutôt l'expression « permis d'inférer. ».

propriétés mathématiques. Les composantes du raisonnement sont les objets, les transformations, les procédures, les concepts. Les objets font référence aux objets mathématiques auxquelles ont fait subir des transformations (nombres, fonctions, diagrammes, etc.) Une transformation est ce que l'on fait subir à un objet, le produit est un nouvel objet. Calculer l'addition de deux nombres serait une transformation. Une séquence définie de transformations est nommée procédure. Un concept est un ensemble d'objets et de transformations ainsi que leurs propriétés. Soulignons que Lithner (2003) relie les composantes du RM à l'individu qui raisonne et qualifiera une composante d'acceptée si elle est acceptée par les mathématiciens. Une propriété mathématique est dite acceptée si elle ne dépend pas du contexte, c'est-à-dire, selon l'auteur, si elle peut être vérifiée par déduction. En ce sens, la propriété mathématique aurait une valeur épistémique théorique de vraie. Elle est dite plausible si elle peut découler d'un raisonnement plausible.

Dans les derniers écrits (Bergqvist, Lithner et Sumpter, 2008; Boesen, Lithner et Palm, 2010; Lithner, 2008), le raisonnement est toujours subdivisé en deux grandes classes, mais on parle plutôt de raisonnement par imitation et de raisonnement créatif (voir figure 3.1). Un raisonnement est qualifié d'imitatif s'il est fondé sur la mémoire, l'imitation d'un algorithme ou d'un processus déjà rencontré, par exemple dans un manuel. Lithner en propose trois types : familier, circonscrit ou guidé. On peut relier cette classe au raisonnement basé sur l'expérience défini antérieurement. Un raisonnement est qualifié de créatif (raisonnement créatif mathématiquement fondé) s'il répond aux trois critères suivants : 1. La séquence de raisonnement est nouvelle; 2. la validité ou la plausibilité de la conclusion est supportée par des arguments; 3. les arguments sont fondés sur les mathématiques pertinentes au raisonnement. Le terme « créatif » semble ici différer de l'utilisation qu'en fait le PFEQ (MEQ, 2000) puisque l'auteur, même s'il parle d'une combinaison originale, insiste sur la nature de la raison. Les principales différences entre raisonnement par imitation et

raisonnement créatif se retrouvent toujours dans les raisons guidant le raisonnement. En ce qui concerne le vocabulaire, le terme « créatif » peut être controversé. Il s'agit d'un terme qui, tout comme le terme raisonnement, manque de fondement théorique et dont la définition varie d'un auteur à l'autre.

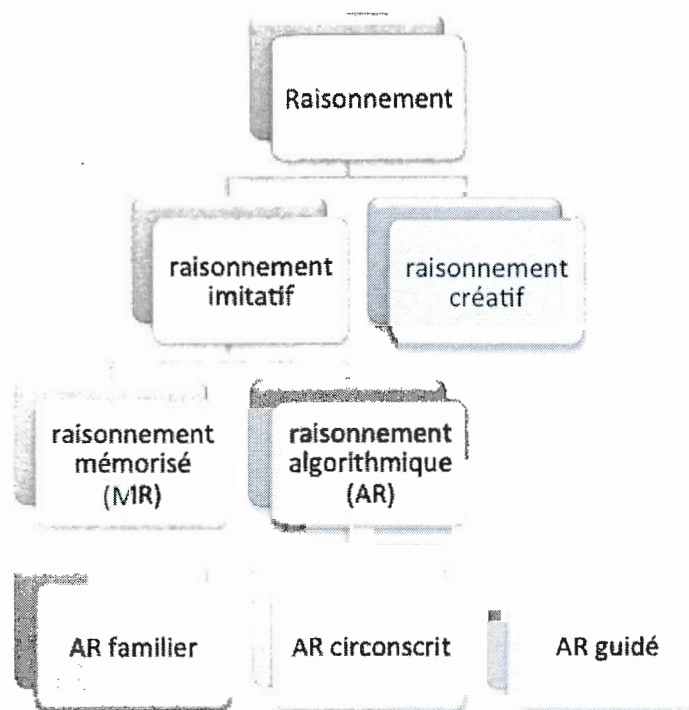


Figure 3. 1 Les différents types de raisonnement selon Lithner (2008)

Ces textes comprennent beaucoup d'éléments théoriques concernant le raisonnement imitatif, et presque tous les termes introduits sont définis, ce qui ajoute à la clarté du modèle. Je remarque toutefois que ce modèle permet d'analyser surtout les raisonnements que l'auteur qualifie de raisonnements par imitation et non pas les raisonnements créatifs. J'ajouterais aussi qu'il est dans la nature de tout apprentissage d'avoir sa part d'imitation. « Imitation, which evidently is a natural human property, is the obvious, indeed, the only imaginable way to enter new discourse » (Sfard,

2008, p. 250). La rétroaction fournie par nos interactions sociales donne du sens au monde qui nous entoure. Cette imitation n'est pas dénuée de créativité. Au contraire, « the thoughtful imitator, while constantly fine-tuning her performance to that of others, is also pondering the expert mathematicians' reasons for doing what they do » (Sfard, 2008, p. 251). Ensuite, il ne situe pas différents types de raisonnement telles la déduction, l'induction ou l'analogie. Si l'on compare la forme des raisonnements étudiés par Lithner au modèle de Duval, ils semblent tous être de la forme prémisses-énoncé-tiers-conclusion, où l'énoncé-tiers est la raison permettant l'inférence (donc inférence discursive et déduction, tel que défini par Duval, 1995).

3.2.3 Le raisonnement en mathématiques selon Cabassut

Pour son étude de la démonstration en France et en Allemagne, Cabassut (2005, 2006) a développé un modèle du RM qu'il dit philosophique et axé sur le cadre de Toulmin (1958). Tout comme nous l'avons constaté par une revue de la littérature, Cabassut mentionne que la terminologie liée au raisonnement est très variable d'un auteur à l'autre, et d'un pays à l'autre. Il y a donc nécessité de définir chacun des termes utilisés lorsqu'un écrit porte sur le raisonnement pour favoriser une bonne communication. Pour sa part, Cabassut définit le raisonnement à partir de la définition de Blanché (1995, tiré de Cabassut, 2005) :

un raisonnement, c'est d'abord une certaine activité de l'esprit, une opération discursive pour laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières : en ce sens, c'est un processus qui se déroule dans la conscience d'un sujet selon l'ordre du temps [...] Pour se préciser et se communiquer, le raisonnement devra bientôt s'extérioriser dans le langage parlé, et quand enfin il se stabilisera par l'écriture, il sera devenu une sorte de chose impersonnelle et intemporelle, objet pour une analyse structurale... Raisonner, c'est inférer une proposition, appelée conclusion, à partir de certaines autres prises comme prémisses [...] L'office de la logique est de déterminer les conditions de validité d'une inférence (p. 24).

Selon Cabassut, il y a deux types de raisonnement (voir figure 3.2) : les raisonnements de validation (ou uniquement validation) visent « à établir la connaissance de la vérité d'une proposition » (p. 26) (certaine, nécessaire, probable, plausible); les raisonnements qui ne valident pas la vérité d'une proposition visent plutôt « la connaissance d'une proposition suivant certains critères de bien, de beau, de souhaitable ou autres » (p. 26). Il classe parmi ce deuxième type de raisonnement les raisonnements pour décider, pour persuader ou pour découvrir. Toutefois, il mentionne que ces visées peuvent aussi être celles du raisonnement de validation, mais qu'elles ne sont pas nécessaires. Remarquons que Cabassut situe sa réflexion sur le raisonnement à l'extérieur des mathématiques. Il n'y a aucun élément dans sa définition qui fait référence aux mathématiques. Toutefois, elle est, selon cet auteur, utile à l'analyse de la démonstration, puisque l'idée de validation y est primordiale. Ici, Cabassut semble utiliser l'idée de validation différemment de Duval (1995). En effet, pour Duval, seule la déduction est un raisonnement qui vise la validation, puisque, pour être valide, le raisonnement doit être nécessaire. Tout autre raisonnement ne vise que la persuasion.

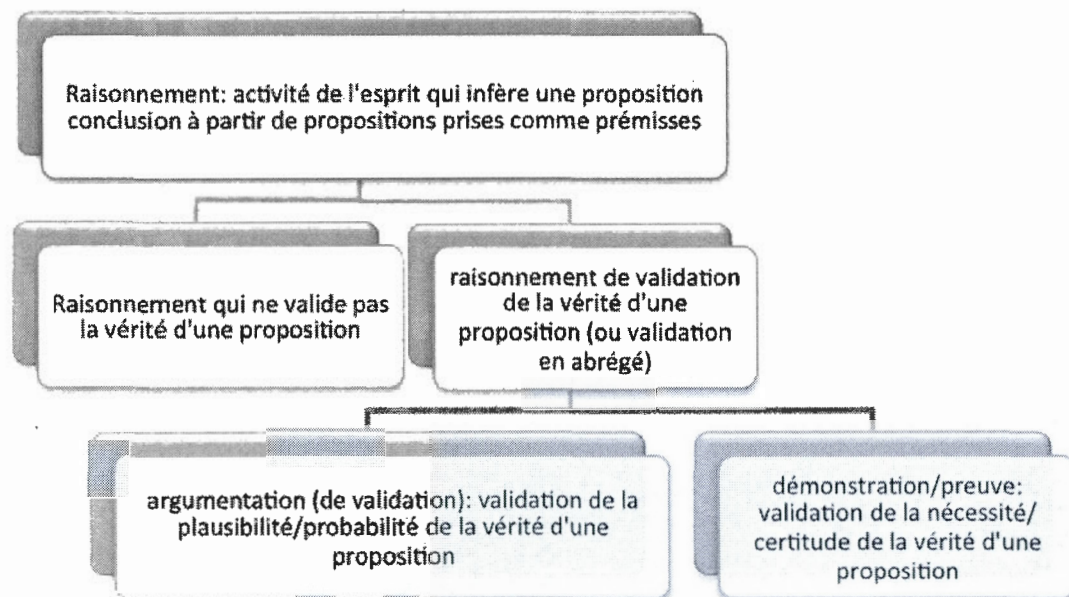


Figure 3. 2 Le raisonnement selon Cabassut (2005, p. 24)

À l'instar de Pólya (1968), Cabassut différencie deux types de raisonnement de validation : le raisonnement de nécessité et le raisonnement de plausibilité. Le premier type est associé à la démonstration en mathématiques. Le second serait, selon lui, inexistant dans les mathématiques savantes comme raisonnement de validation puisque la notion de plausibilité n'est pas définie, mais serait présent dans l'institution scolaire élémentaire.

Pour étudier un raisonnement, Cabassut décompose le raisonnement en arguments, tel que défini par Toulmin (1958). Ce découpage prend la forme suivante : donnée, permis d'inférer, conclusion. Chacun des arguments peut être enchaîné en graphe pour permettre de mettre au jour la structure du RM. De plus, selon Cabassut, pour étudier un raisonnement, il est nécessaire de déterminer les conditions

institutionnelles dans lesquelles il a été produit, le cadre théorique dans lequel il se situe (les règles, conditions d'utilisation, critères, conception de la vérité, etc.).

Son cadre permet de prendre en compte différents types de raisonnement en mathématiques (nécessaire ou plausible) selon l'institution dans laquelle il a été produit. Le cadre de Cabassut (2005) se limite donc à l'étude des raisonnements qui valident un énoncé construit, à priori, tout comme Duval (1995), du point de vue de la structure de l'inférence ou de la séquence d'énoncé du discours. Il est donc situé dans un contexte de démonstration en cherchant à étudier les raisonnements qui ont une visée de validation. Il laisse de côté toute activité d'exploration ou d'action mise de l'avant par d'autres définitions comme celle de Mason (1994) ou encore de G. J. Stylianides (2005).

3.2.4 Le modèle de *reasoning-and-proving* de G. J. Stylianides

Pour sa thèse de doctorat, G. J. Stylianides a élaboré un modèle du RM et de la preuve qui, selon lui, est cohérent avec la nature des activités de raisonnement et de preuve en mathématique²⁹. Ce modèle est, selon l'auteur, issu d'une analyse de la littérature et s'appuie aussi sur la nature du RM. Il se veut utile pour l'analyse de manuels pour l'enseignement des mathématiques à la fin du primaire et au début du secondaire (middle school). Ces analyses ont pour but de déterminer quelles sont les opportunités pour les élèves de développer le RM rencontrées dans les manuels scolaires. Sa définition se veut applicable à l'analyse de manuels d'aucun niveau scolaire en particulier, dans tous les champs de la mathématique, ainsi que pour d'autres types d'analyse (par exemple, réponse d'élève, intervention d'enseignant).

²⁹ G. J. Stylianides utilise l'expression « reasoning-and-proving » pour représenter l'importance de la relation entre ces deux processus en mathématiques.

Pour lui, le *reasoning-and-proving* couvre une vaste étendue d'activités mathématiques qu'il a séparées en quatre groupes (voir figure 3.3) : identifier une régularité, conjecturer, fournir une preuve et fournir un argument (autre qu'une preuve). Chacun de ces types d'activités permet, selon G. J. Stylianides (2005), de favoriser le développement d'un type de raisonnement en particulier. Les tâches qui amènent les élèves à identifier une régularité et conjecturer favorisent le développement du raisonnement inductif. Les tâches qui demandent aux élèves de fournir une preuve développent principalement le raisonnement déductif. Il a regroupé les deux premiers types d'activités sous l'étiquette *faire des généralisations mathématiques* et les deux derniers sous l'étiquette *appuyer des affirmations mathématiques*. Ces activités peuvent être subdivisées en sous-composantes. De même, chacune de ces activités peut être liée à une visée (objectifs du RM) et est liée à un contexte de réalisation.

	<i>Reasoning-and-proving</i>			
	Faire des généralisations mathématiques		Appuyer des affirmations mathématiques	
Composantes et sous-composantes du raisonnement et de la preuve	Identifier une régularité	Établir des conjectures	Fournir une preuve	Fournir un argument (autre qu'une preuve)
	• <i>Pattern</i> plausible • <i>Pattern</i> défini		• Preuve générique • Démonstration	• Argument empirique • Argument rationnel
Visée du <i>pattern</i> , de la conjecture et de la preuve	• Précurseur de conjecture • Non-précurseur de conjecture	• Précurseur de preuve • Non-précurseur de preuve	• Explication • Vérification • Réfutation • Génération de nouveaux savoirs	
Contexte	• Extra-mathématique • Quasi-mathématique • Mathématique			

Figure 3. 3 Traduction du modèle de G. J. Stylianides (2005, p. 21)

La composante « Identifier une régularité » est liée à la généralisation d'une relation et à deux sous-composantes. « *Pattern* plausible » fait référence à une régularité qui est possible pour une situation donnée, mais qui n'est pas unique. « *Pattern* défini » fait référence à une régularité qui est déterminée de façon unique. L'élève peut être conscient ou non de ce caractère lié au *pattern* qu'il aura identifié.

La composante « établir des conjectures » est liée aux activités où on attend de l'élève qu'il génère une hypothèse sur une relation. Cette hypothèse n'est pas considérée par l'élève comme vraie ou fausse, mais comme vérifiable. L'hypothèse doit aussi étendre le domaine d'application du *pattern* identifié.

La composante « fournir une preuve » inclut les activités où l'élève doit fournir une preuve. Par preuve, il est entendu un argument valide et effectué à partir de prémisses vraies, pour ou contre un énoncé mathématique. Il doit y avoir référence explicite à toutes les prémisses vraies utilisées. Ainsi, fournir une preuve implique plusieurs déductions. Une application de procédure n'est pas, selon l'auteur, une preuve.

G. J. Stylianides considère deux sous-composantes à « fournir une preuve » : la preuve générique et la démonstration. Ces deux composantes sont dites mutuellement exclusives. Par preuve générique, G. J. Stylianides (2005) entend une activité où il est attendu que l'élève fournisse un argument général illustré par un cas particulier. Ce cas est choisi comme représentant de tous les cas de façon explicite. Pour illustrer ce type de preuve, la figure 3.4 présente le cas de Janet. Janet utilise un cas particulier (ici $n = 8$) pour prouver que $(x - 1)$ et $(x + 1)$ sont toujours des facteurs de $x^n - 1$ lorsque n est pair. Durant sa présentation de la preuve qu'elle a préalablement développé avec son coéquipier, elle explicite le fait que $x^8 - 1$ est pris comme exemple et que cela fonctionne pour tout n pair parce qu'il y a toujours un nombre pair de termes dans le second facteur de la première ligne.

Prouve que $x + 1$ est toujours un facteur de $x^n - 1$ lorsque n est pair. $n = \text{even number}$ $\begin{aligned} x^8 - 1 &= (x - 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ &= (x - 1)(x^6(x + 1) + x^4(x + 1) + x^2(x + 1) + (x + 1)) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^6 + x^4 + x^2 + 1) \end{aligned}$
--

Figure 3. 4 Réponse de Janet, tirée de Kieran et Drijvers (2006)

Par démonstration, G. J. Stylianides entend les activités où il est attendu de l'élève qu'il fournisse une argumentation logique, basée sur des propriétés ou sur la structure des relations en jeux, qui relie les prémisses à la conclusion, en ne s'appuyant sur aucun exemple. Il inclut dans cette composante les différentes formes de démonstrations mathématiques telles la preuve par contre-exemple, la contradiction, l'induction, la contraposition et l'exhaustion de cas.

La quatrième composante de G. J. Stylianides (2005) inclut les tâches qui demandent aux élèves de fournir un argument pour ou contre un énoncé mathématique, sans que celui-ci ne puisse être considéré comme une preuve (selon la définition du paragraphe précédent). Dans ces composantes se retrouvent les arguments empiriques, c'est-à-dire, les arguments basés sur des exemples. Selon G. J. Stylianides (2005), ce type d'argument (basé sur des exemples) peut nuire au développement du raisonnement déductif en confortant les élèves dans leur confiance en des exemples afin de prouver. Par argument rationnel, il considère les arguments qui ne sont ni des arguments empiriques, ni une preuve.

Le modèle de G. J. Stylianides (2005) fait un lien entre le type d'activités demandé à l'élève et les raisonnements inductifs et déductifs et, selon les dires de l'auteur, pour tous les champs mathématiques et pour différents niveaux scolaires. Ce modèle pourrait alors être utilisé dans le contexte québécois pour s'assurer de fournir aux élèves une variété d'activités mathématiques touchant ces deux types de

raisonnements. Toutefois, il faudrait approfondir le lien entre les activités de généralisation et le raisonnement inductif. On pourrait par exemple argumenter qu'il existe d'autres formes d'inférences, telle l'abduction, qui sont particulièrement importantes pour ce genre d'activités.

Le modèle détermine aussi le lien entre « raisonnement inductif » et « raisonnement déductif », en ce sens que les activités liées au raisonnement inductif précèdent (ou peuvent précéder) les activités liées au raisonnement déductif. Ceci pointe cependant sur une limite du modèle qui ne met pas en évidence cette idée de va-et-vient entre la conjecture et la preuve telle que présentée par Lakatos (1977).

Le modèle, malgré une conception de la preuve cohérente avec les recherches dans le domaine de l'apprentissage et de l'enseignement de la preuve, ne permet pas d'analyser le raisonnement par analogie. Il se limite aussi à quatre processus : identifier des régularités, conjecturer, prouver et argumenter. Un survol de la littérature permet de réaliser que ces quatre activités sont effectivement des composantes essentielles de l'activité mathématique. Toutefois, d'autres activités pouvant être incluses dans l'activité mathématique ne sont pas mises en évidence par ce modèle. Par exemple, on peut penser que pour identifier des régularités, la classification, l'établissement de liens, la comparaison et l'abstraction peuvent jouer des rôles importants.

3.2.5 Ce que l'on retient de ces modèles

Plusieurs éléments émergent de l'analyse de ces quatre modèles. Avant tout, il est important de préciser que deux de ces modèles visent l'étude de la démonstration. Les modèles de Duval (1995) et de Cabassut (2005) mettent donc de l'avant une conception du RM qui vise à valider des énoncés mathématiques construits à priori.

Ensuite, deux modèles se situent en contexte de résolution de problèmes : Les modèles de Lithner (2000, 2003, 2008) et G. J. Stylianides (2005), mais adoptent des perspectives différentes qui peuvent être mises en parallèle avec le niveau scolaire étudié (fin du secondaire, dans le cas de Lithner et fin primaire, début du secondaire pour G. J. Stylianides) ainsi que le contexte géographique (Europe et États-Unis).

Que pouvons-nous tirer de ces modèles? Premièrement, trois des modèles présentés mettent de l'avant le RM en tant qu'inférence avec une prédominance de la forme : prémisse, permis d'inférer et conclusion; tandis que le quatrième, développé par G. J. Stylianides (2005), pointe vers le raisonnement en tant qu'activité. Lithner et Cabassut traitent, si l'on s'appuie sur le modèle de Duval (1995), uniquement de deux types de pas de raisonnement, à savoir les inférences discursives et les déductions. Il faut aussi se questionner sur la place que prend le contexte de l'école obligatoire dans ces caractérisations du RM. Par exemple, lorsque Duval (1995) définit la déduction, il est clairement dans une vision formaliste des mathématiques. Le RM en tant que déduction s'appuie sur une théorie mathématique déjà bien établie. Le contexte du primaire et du secondaire nécessite d'ouvrir la définition de déduction que Duval présente pour couvrir une plus vaste étendue de formes de RM puisque les mathématiques y sont beaucoup plus embryonnaires. Le discours mathématique ne répond que partiellement aux règles du discours mathématique tel qu'on le retrouve chez les mathématiciens.

Mentionnons également que, dans la littérature en didactique des mathématiques, le RM semble plus diversifié que ce qui est présenté dans ces modèles. La réflexion théorique de Duval (1995) porte sur la nature du RM, mais laisse de côté tout raisonnement qui n'est pas caractérisable uniquement par sa fonction d'expansion discursive, tel le raisonnement inductif. Les modèles de Lithner et de Cabassut

semblent se limiter aux formes « inférences discursives » et « déduction de raisonnement ».

Le modèle de G. J. Stylianides (2005) se limite aussi à quatre activités, alors que la littérature semble en lier une multitude. Mason (1994) nomme aussi « exemplifier », Ball et Bass (2003) « investiguer » et « justifier ». Toutes ces observations mènent à un besoin de réflexion théorique.

Enfin, du point de vue commognitif, la différence entre la valeur épistémique théorique et le statut théorique n'a plus vraiment de sens puisque les mathématiques y sont vues comme une construction sociale qui est sous-tendue par un processus d'individualisation et de (re)communication. Je ne peux juger du statut théorique d'un énoncé qu'à partir de ma propre compréhension de la théorie mathématique, et donc de la valeur épistémique théorique que je lui accorde moi-même. De même, la valeur épistémique théorique que j'accorde à un énoncé sera alignée, ou non, sur la valeur que la communauté dans laquelle j'évolue lui accorde.

3.3 Les caractéristiques du RM revisitées

Dès le chapitre I, plusieurs caractéristiques à approfondir étaient mises en évidences par l'analyse d'une partie de la littérature en didactique des mathématiques portant sur le RM : la nature inférentielle du RM, la dichotomie *produit* versus *activité de pensée*, les fonctions et les buts du RM, les formes et le RM en tant qu'activité. À la lumière des quatre modèles, de la théorie commognitive et de la constitution du corpus d'analyse (voir annexe A), je revisite ici ces éléments caractéristiques afin de brosser un portrait cohérent du RM pour l'enseignement et l'apprentissage à l'école obligatoire. Je cherche ainsi à construire le réseau conceptuel entourant le RM. L'annexe B présente différentes définitions du RM retrouvées dans le corpus

d'analyse. Ces dernières ne sont pas suffisantes pour décrire l'ensemble du corpus, mais donnent certains points d'ancrage. C'est à partir de ces définitions et de l'ensemble des textes de l'annexe A que la synthèse suivante a été produite.

Par l'utilisation d'une catégorisation à deux niveaux, chacun des textes a été analysé. Pour le premier niveau, chaque unité a reçu un descripteur (thème du champ notionnel) correspondant à son contenu. Ensuite, chacune des unités était catégorisée selon la nature quadripartite du discours : formel, axiologique, praxique et explicatif. À partir de lectures successives et d'aller-retour aux textes originaux, des regroupements ont été faits jusqu'à ce qu'émergent différents thèmes : le RM en tant que produit intellectuel, versus en tant que processus de pensée; la nature inférentielle du RM; les buts et les fonctions du RM; l'aspect structurel du RM; et l'aspect processuel du RM. Les prochaines sections posent donc les bases d'un modèle de RM pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au primaire et au secondaire à partir de ces thèmes.

3.3.1 Produit intellectuel vs processus de pensée

Tel que mentionné au premier chapitre, le RM est considéré par plusieurs auteurs comme « à la fois l'activité intellectuelle qui aboutit au but visé et le résultat écrit ou oral de cette activité » (Arsac *et al.*, 1992). Ce sont aussi les propos d'Arsac (1996). Ce dernier présente une réflexion sur le RM qui se veut utilisable en didactique des mathématiques et qui s'appuie sur la pratique actuelle et passée du mathématicien. Il précise dans cet écrit ce qui est entendu par produit et activité associé au RM. Pour Arsac (1996), la prédominance du raisonnement déductif en mathématiques vient du fait que le raisonnement en tant que produit final est celui le plus accessible par les écrits mathématiques. Le raisonnement final est ce qu'Arsac appelle « démonstration ». Il nomme le RM, en tant qu'activité, raisonnement euristique. Par

ailleurs, pour Arsac, l'heuristique comporte des phases qui ne font pas partie du raisonnement : l'expérimentation et la recherche d'informations supplémentaires. Ainsi, pour cet auteur, le raisonnement en tant qu'activité se fait sur des informations que l'on a déjà en mains. Il nuance ses propos en ajoutant que l'expérience mentale est une activité de RM. Le raisonnement euristique, l'activité, est régi par des règles. Par exemple, l'appel au dessin chez Euclide est une règle du raisonnement qui a été axiomatisée par la suite.

On associe souvent le produit au discours verbal (écrit ou oral) présenté comme la solution à un problème ou comme démonstration. C'est en ce sens que Balacheff (2008) mentionne que Duval ne s'intéresse qu'aux textes de démonstration. Selon cette perspective, seules les traces de cette activité sont accessibles, qu'elles soient écrites en mots, schématisées ou orales (on peut même parler de gestuelle). Il n'est possible que de spéculer sur l'activité intellectuelle qui se produit chez un individu à partir du résultat observable du raisonnement. Si l'on associe le produit à toutes traces d'activités intellectuelles, c'est la nature de ce produit qu'il faut chercher à qualifier pour l'enseignement en explicitant ses divers aspects. En fait, cette idée de produit d'une activité intériorisée n'a pas de sens dans une perspective commognitive. En effet, les mathématiques se constituent dans un mouvement d'individualisation et de (re)communication. Le but de l'enseignement est de favoriser une (re)communication mathématique acceptable. Il n'y a plus cette idée de produit extérieur et d'activité intérieure. L'objet d'étude du didacticien commognitif est le développement du discours mathématique et le RM fait partie de ce discours. La dichotomie produit-activité n'a donc plus lieu d'être. Développer un modèle du RM cohérent avec une approche commognitive ne demande pas une caractérisation du RM en tant que produit et en tant qu'activité, mais plutôt de qualifier ce qui a trait au RM dans le discours mathématique, par exemple les règles qui sous-tendent les activités

discursives propres au RM pour ensuite être en mesure de mieux comprendre comment cette activité discursive se développe.

On peut ainsi reformuler les propos d'Arsac (1996) dans cette perspective. Quand ce dernier dit que la prédominance du raisonnement déductif vient du fait que le produit final est le plus accessible à travers les publications scientifiques, on peut plutôt dire que la prédominance du raisonnement déductif vient du fait que les règles discursives qui encadrent ce type de communication réduisent les formes possibles de RM à pratiquement une seule, à savoir la déduction à partir d'un corpus d'énoncés accepté par la communauté mathématique (les axiomes et ce qui en découlent). Les règles discursives encadrant les communications orales des mathématiciens, ou encore le discours mathématique dans son ensemble, sont beaucoup moins contraignantes. De plus, les publications scientifiques ne font pratiquement état que d'un seul type d'activités mathématiques, à savoir « démontrer ». Il est donc difficile d'avoir accès à tout un pan de l'activité du mathématicien, car elle a lieu en privé ou à huit-clos où seul un petit groupe de mathématiciens sont admis, un groupe de travail par exemple. Le travail de Lakatos (1977) est un bel exemple de cette activité. Le RM est donc, avant tout, une activité de communication avec les autres et avec soi-même qui suit des règles particulières, une partie intégrante du discours mathématique.

3.3.2 La nature inférentielle du RM

Comme il a pu être constaté dès le chapitre I, le RM et l'inférence sont deux termes très liés dans la littérature. En analysant de nouvelles définitions, suite à la constitution du corpus, ce lien n'est pas contredit par aucun auteur. Certains précisent des formes ou encore un domaine d'inférence. C'est le cas de Thompson (1996) qui définit le RM comme « *purposeful inference, deduction, induction, and association in the areas of quantity and structure* » (p. 267). Cette définition, comme bien d'autres,

permet de constater que le discours entourant le RM, se rapportant à l'inférence, met l'accent sur les formes que peut prendre cette dernière. C'est le point de vue de Duval (1995) qui est clairement axé sur la structure de la relation entre des propositions. C'est cette prise de position qui s'explique dans le fait qu'il ne prend en compte que les raisonnements intrinsèquement liés au langage. De cet angle, l'accent est mis sur les relations entre des propositions. Par ailleurs, même si l'inférence est étudiée depuis longtemps en termes de forme, de structure par le biais de la logique, on peut penser qu'il y a davantage que la forme du RM qui le lie à l'inférence. Que souligne ce lien?

En fait, lorsqu'on cherche la définition d'inférence dans le dictionnaire, on retrouve la même définition que celle donnée par de nombreux auteurs à propos du RM. Par exemple, le Merriam-Webster définit l'inférence comme suit : « the act or process of reaching a conclusion about something from known facts or evidence » (Dictionary and Thesaurus - Merriam-Webster Online, s.d.). Cette définition n'est pas sans rappeler celle de Lithner (2008), de Cabassut (2005) ou encore de Balacheff (1987). C'est aussi ce que l'on retrouve dans la définition que Sfard donne du raisonnement : « reasoning can be described as the art of systematic derivation of utterances from other utterances » (Sfard, 2008, p. 110). Ainsi, le raisonnement est une activité inférentielle. Cette activité, le RM, a lieu sur des objets et des relations mathématiques. Comme il a été précisé en début de chapitre, les objets mathématiques sont des objets dits abstraits, c'est-à-dire « mathematical objects are abstract discursive objects with distinctly mathematical signifiers » (Sfard, 2008, p. 172). Ceci étant dit, comment caractériser cette activité? Trois éléments viennent éclairer cette activité inférentielle : les buts et les fonctions, l'aspect structurel et l'aspect processuel. C'est ce qui fera l'objet des prochaines sections.

3.3.3 Les buts et les fonctions du RM

Lors de l'analyse des textes portant sur le RM, l'aspect axiologique est apparu comme essentiel à la compréhension du RM. L'analyse de la littérature permet de constater que le RM a différents buts et différentes fonctions. On retrouve, entre autres, les termes « buts », « visées », « rôles », « objectifs » et « fonctions » ou encore les expressions « raisonner pour », « le raisonnement sert à ». Une des difficultés ici est le fait que, pour certains auteurs, des termes servent à définir le RM, et pour d'autres, les mêmes termes servent plutôt à qualifier les rôles du RM. Par exemple, pour Arsac *et al.* (1992) et Balacheff (1988), l'explication est un RM alors que pour Brousseau et Gibel (2005), un des rôles du RM est d'expliquer.

La littérature en didactique des mathématiques attribue différentes fonctions au RM : valider, expliquer, découvrir, prendre une décision, agir, juger, convaincre, trouver une solution à un problème, démontrer, reconstituer un fait, évaluer, justifier. Plusieurs auteurs reprennent les propos de De Villiers (1999) en ce qui concerne les fonctions du RM dont Cabassut (2005) et Lithner (2008). Par ailleurs, de Villiers s'est intéressé aux fonctions de la preuve. Ces auteurs ont donc repris en partie cette typologie pour le RM.

La typologie de De Villiers comprend six fonctions : 1) vérification; 2) explication; 3) découverte; 4) systématisation; 5) communication; 6) défi intellectuel. Vérifier, expliquer et découvrir semblent davantage liés à l'action d'un RM en particulier. La systématisation semble davantage liée au rôle joué par le RM dans le développement des mathématiques. De même, on se souviendra que dans ce modèle le RM est une activité commognitive et donc une activité de communication par définition. Enfin, le défi intellectuel est, selon De Villiers, lié à un aspect émotif, et donc, ne fait pas

référence à une action comme c'est le cas pour les trois premières fonctions. Analysons chacune de ces fonctions proposées par De Villiers.

Selon cette typologie, le RM permet donc de vérifier l'exactitude d'énoncés mathématiques. Cabassut (2005) ajoute que cette fonction est autant liée à la vérification de la validité que de la plausibilité d'un énoncé. C'est ici l'enjeu de la valeur épistémique. De Villiers souligne que cette fonction est, dans le cas de la preuve, la seule qui est prise en compte dans l'enseignement. C'est aussi cette fonction qui est liée à l'idée de se convaincre (Arsac *et al.*, 1992; Brodie, 2010; Mason, 1994) ou de convaincre les autres de la validité d'un énoncé. Pour De Villiers, il est réducteur de limiter le RM, ou plutôt la preuve, à ce rôle. En fait, il dit que c'est plutôt parce qu'on est convaincu qu'un énoncé est vrai qu'on tentera de le prouver. Par ailleurs, comme le RM ne se réduit pas seulement à prouver, on peut aussi lier cette idée de convaincre à la valeur épistémique portée par le RM.

Le RM peut aussi fournir un aperçu de pourquoi un énoncé est vrai (ou plausible); c'est ce que De Villiers appelle la fonction explicative. Yackel et Hanna (2003), en s'intéressant au RM et à la preuve, insistent aussi sur l'importance des fonctions d'explication. On retrouve un rôle similaire chez Ball et Bass (2003) qui discutent du fait que le RM permet aux mathématiciens de développer une compréhension mathématique, ou encore chez Mason (1994), qui dit que le raisonnement permet « d'étendre la compréhension » (p. 24).

Le RM a aussi, selon De Villiers (1999), un rôle de découverte : la création de nouveaux résultats. C'est le but souligné par Arsac *et al.* (1992) et aussi par Ball et Bass (2003) qui spécifient que le RM permet aux mathématiciens de construire de nouveaux savoirs (*knowledge*) mathématiques.

Ces trois premières fonctions sont aussi associées dans la littérature à des éléments praxiques (EP) en ce sens qu'ils font référence à des pratiques mathématiques reliées au RM davantage qu'à des éléments axiologiques (EA). Comme il sera abordé plus loin, vérifier, expliquer et découvrir seront plutôt touchés lorsque je développerai sur l'aspect processuel du RM.

La fonction de systématisation (quatrième fonction) est liée par De Villiers (1999) à la déduction. La systématisation joue un rôle important dans le développement des mathématiques. Cinq éléments sont soulignés par De Villiers : 1) l'identification d'inconsistances et d'assomption; 2) l'unification et la simplification de théories mathématiques; 3) le développement d'une perspective globale; 4) l'application à l'extérieur des mathématiques; 5) le développement de nouveaux systèmes plus économiques, plus élégants et plus puissants. Cette fonction est aussi soulignée par Brodie (2010) pour qui le RM permet d'intégrer « a number of ideas into a more coherent whole » (p. 7). Effectivement, dès le primaire, le RM permet le développement du discours mathématique des élèves et ainsi de systématiser ce développement par la formation de liens entre les différentes constituantes de ce discours. Le RM joue un rôle important dans la systématisation du discours mathématique de par sa nature inférentielle. Comme le pose Mariotti (2005), les mathématiques ne peuvent être réduites à une théorie, mais sa nature théorique est fondamentale.

La cinquième fonction présentée par De Villiers est celle de la communication. Comme les mathématiques sont ici vues comme un discours, le RM est considéré, d'un point de vue commognitif, comme une activité de communication avec les autres ou avec soi-même. Cabassut, qui reprend la typologie de De Villiers en utilisant le terme communication de façon plus classique, met en évidence que le RM

permet aux mathématiciens de communiquer entre eux, de débattre de l'acceptation de certains résultats. Il souligne la nature sociale du RM.

La sixième fonction énoncée par De Villiers n'a pas été reprise par Cabassut ou Lithner. Le défi intellectuel fait référence au fait que les mathématiciens éprouvent un plaisir à faire des preuves et jouent donc un rôle dans le dépassement de soi. Cet aspect est certes important pour le développement du RM (Mason, 1994) en favorisant, ou en nuisant, à son développement; mais il n'est pas de même nature que les actions de vérification, d'explication et de découverte, de par sa nature plus statique.

Ainsi, la seule fonction (à l'exception du défi intellectuel) qui ne peut être prise en charge, soit par la définition du RM, soit par l'aspect processuel, est la fonction de systématisation. En plus de la systématisation du discours mathématique, c'est aussi par la systématisation que la théorie mathématique se développe.

D'autres auteurs abordent plutôt les buts du RM. Pour Duval (1995), le but du raisonnement est de modifier la valeur épistémique d'un énoncé-cible : passer de vraisemblable à plus vraisemblable, de vraisemblable à vrai. C'est aussi les propos de Boero, Douek, Morselli et Pedemonte (2010) qui étudient les processus de conjectures et de preuves à l'aide du modèle de rationalité d'Habermas. Ce modèle met de l'avant trois composantes de la rationalité : épistémique, téléologique³⁰ et communicative. La composante épistémique fait référence à « the conscious validation of statements according to shared premises and legitimate ways of reasoning » (Boero *et al.*, 2010, p. 8). Cette idée de valeur épistémique est très

³⁰ La composante téléologique fait référence à : « the conscious choice of the tools to achieve the aim of the activity » (Boero *et al.*, 2010, p. 2).

importante pour une caractérisation du RM. Toute activité de RM est porteuse d'une valeur épistémique, non en tant que but du RM, mais dans sa nature même. De plus, comme il sera exposé au chapitre V, pour certains RM le changement de valeur épistémique est un enjeu central, pour d'autres non.

3.3.4 L'aspect structurel du RM

Dans la littérature en didactique des mathématiques, on peut constater, à partir de ce qui a déjà été traité dans les sections précédentes, mais aussi à la lumière du corpus d'analyse, que l'aspect structurel est dépeint de différentes façons par les auteurs. Cabassut (2005) et Pedemonte (2002) utilisent le modèle développé par Toulmin (1958) pour analyser la structure du RM. Lithner (2000, 2008), Duval (1995) et Cabassut (2005) parlent de représenter un enchaînement de pas de RM en graphe orienté. Pedemonte introduit les inférences élémentaires de Peirce. Duval parle plutôt de quatre structures de raisonnement, mais Pedemonte (2002) souligne que ces quatre structures sont en fait des déductions. Il s'agit d'un aspect souvent abordé, mais dont la conceptualisation diffère grandement d'un auteur à l'autre. Une analyse plus approfondie du corpus est requise afin de proposer un aspect structurel du RM cohérent avec une approche commognitive.

Une analyse des écrits en didactique des mathématiques permet de constater que plusieurs structures peuvent être associées au RM. Duval (1995) parle de quatre pas de raisonnement. D'autres auteurs, tel Meyer (2010), Reid (2003) et Pedemonte (2002) utilisent les termes de Pierce en spécifiant que le RM peut prendre une forme déductive, inductive ou abductive. Le raisonnement analogique est aussi souligné par Reid (1995) et Pólya (1968) comme ayant une place dans le RM. Avant de pousser plus loin la réflexion sur l'aspect structurel du RM, quelques mots sont de mises pour spécifier le choix de ce terme. Plusieurs auteurs se réfèrent à la déduction, ou à

l'induction, en tant que forme du RM. Par ailleurs, comme c'est le cas chez Duval (1995), il y a davantage que la forme qui permet de qualifier, par exemple, une déduction. Par exemple, Duval différencie l'inférence discursive de la déduction, non pas en termes de forme (les deux sont de la forme prémisses-énoncé-tiers-conclusion), mais sur la base que l'énoncé-tiers de l'inférence discursive n'a pas de statut théorique. Pour différencier les différents raisonnements, la forme ne suffit donc pas.

Ainsi, l'aspect structurel fait référence à la manière dont les éléments discursifs s'agencent entre eux, en un système ordonné qui décrit à la fois les éléments et les relations qu'ils entretiennent entre eux. Il s'agit d'un aspect central du RM, mais qui ne peut à lui seul le définir.

3.3.5 L'aspect processuel du RM

Dès le chapitre I, l'aspect processuel du RM a été problématisé de deux façons. Avant de revenir sur ce point, quelques mots sont nécessaires pour présenter ce que j'entends par processus. Cet aspect est plutôt lié au fait que l'on peut considérer le RM du point de vue des différents processus. Par « processus », il est entendu un ensemble d'actions orientées vers un but. Soulignons aussi que nous n'entendons pas, par « processus », un ensemble d'actions qui se succèdent toujours de la même manière, tel que défini dans d'autres domaines, aussi appelé procédures (Legendre (2005). Il ne faut pas confondre « processus » et « procédure ». Le processus n'est pas linéaire et ni prédéfini comme la procédure, mais il est orienté vers un but. Chez certains auteurs, le terme activité est associé à ce que nous qualifions de processus de raisonnement (par exemple chez G. J. Stylianides, 2005). Toutefois, en didactique des mathématiques, le terme activité renvoie principalement à la théorie de l'activité de Leontiev (voir par exemple Folcher, 1999), ce qui n'est pas notre intention ici.

Ainsi, les écrits qui portent directement sur le RM rapportent en partie cet aspect processuel. Premièrement, le raisonnement est considéré comme un processus chez plusieurs auteurs, mais peu conceptualisé. Par exemple, Balacheff (1988) s'intéresse aux processus de RM qui sont des processus de preuves. L'étude des modèles permet aussi de constater que l'aspect structurel du RM est celui qui est mis de l'avant par les modèles, à l'exception de G. J. Stylianides (2005). Deuxièmement, plusieurs processus semblent reliés au RM. Les programmes de formations de l'école québécoise disent que raisonner c'est conjecturer, c'est justifier. Certains auteurs, dont Pedemonte (2002) et Pólya (1968), associent diverses formes du raisonnement³¹ à des processus tels que faire des analogies, particulariser, généraliser.

Arsac *et al.* (1992) mentionnent que raisonner c'est « découvrir par l'examen de ce que l'on sait déjà quelque autre chose que l'on ne sait pas encore » (p. 9). On retrouve ici une certaine idée d'action. Lorsque quelqu'un examine, il n'est pas passif, il agit.

De plus, il y a chez Duval (1995) l'idée de déroulement temporel (associé aux termes « vise » et « éventuellement »), laquelle est aussi présente chez Lithner (2008). Ce dernier associe le raisonnement à « the line of thought adopted to produce assertions and reach conclusions in task solving » (p. 257). En effet, la production et l'atteinte d'une conclusion mènent forcément à un déroulement temporel.

Cabassut (2005), pour sa part, se base sur la définition de Blanché pour définir le raisonnement en mathématiques :

³¹ Dans le cas particulier de Pedemonte (2002), elle fait plutôt référence à différents type d'argument, mais elle relie l'argument au raisonnement.

un raisonnement, c'est d'abord une certaine activité de l'esprit, une opération discursive pour laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières : en ce sens c'est un processus qui se déroule dans la conscience d'un sujet selon l'ordre du temps [...] Pour se préciser et se communiquer, le raisonnement devra bientôt s'extérioriser dans le langage parlé, et quand enfin il se stabilisera par l'écriture, il sera devenu une sorte de chose impersonnelle et intemporelle, objet pour une analyse structurale... Raisonner, c'est inférer une proposition, appelée conclusion, à partir de certaines autres prises comme prémisses [...] L'office de la logique est de déterminer les conditions de validité d'une inférence (p. 24, soulignement ajouté).

Cette définition précise qu'il s'agit d'une activité de l'esprit, aussi appelée une opération discursive. L'opération discursive fait référence en logique à « un travail sur un donné qui a pour but un changement du donné » (Salavastru, 2007, p. 159). La définition de Blanché implique donc une personne qui agit, qui fait quelque chose (ici mentalement) pour mettre en lien des énoncés. Le mouvement est présent dans le verbe « passe ». Par ailleurs, cette définition met aussi l'accent sur la dichotomie pensée/discours -- le discours étant la façon d'exprimer sa pensée.

La définition de Balacheff (1988) s'appuie sur Blanché quant au raisonnement mathématique, mais ne retient que l'aspect activité intellectuelle de sa définition, et met de côté le raisonnement en tant qu'objet analysable par sa structure. Il se situe donc clairement du côté de l'aspect processuel du raisonnement. Pour lui, le raisonnement c'est « l'activité intellectuelle, en général non complètement explicite, de manipulation d'informations données ou acquises pour produire de nouvelles informations » (p. 31). Par ailleurs, il semble situer l'explicitation du raisonnement du côté du produit. Il y a raisonnement, puis explicitation de son produit sous forme d'un « discours ». Il y a distinction entre ces deux aspects, tout comme pour Cabassut (2005). On passe de ce qui se produit à l'intérieur de l'élève vers ce qui est

extériorisé. Or, dans cette vision, on a accès à ce qui se produit à l'intérieur que par ce qui est extériorisé.

Sfard (2008) tente de résoudre ce conflit interne/externe en définissant les processus cognitifs comme d'une forme individualisée de communication. Elle définit le RM comme une « activity of exploring relations between sentences » (p.110), et aussi comme « the art of systematic derivation of utterances from other utterances » (p.110). Elle aussi se situe bien dans l'aspect processuel de par le recours au terme activité, mais contrairement à Balacheff, cette « activité » est autant interne qu'externe. Chez Sfard, il n'y a pas cette idée que nous n'avons pas accès à toute l'information. Le raisonnement ne se manifeste pas à l'intérieur de l'élève pour ensuite être extériorisé. Le raisonnement se manifeste pendant une communication avec autrui ou avec soi-même.

Donc, même si plusieurs auteurs théorisent surtout l'aspect structurel du raisonnement, on retrouve dans la majorité des définitions des éléments liés à l'aspect processuel du raisonnement. Chez certains auteurs, tels Sfard et Balacheff, l'aspect processuel est mis de l'avant, mais sans cerner de processus en particulier (chez Sfard) ou en n'en ciblant qu'un seul (le processus de validation chez Balacheff). Afin d'être en mesure de comprendre et de favoriser le développement du RM chez l'élève, cet aspect processuel a besoin d'être approfondi.

3.4 La synthèse des idées clés relatives à la conceptualisation du RM

L'analyse des différents écrits relatifs au raisonnement en didactique des mathématiques permet de remarquer qu'il est possible de qualifier la nature du raisonnement autant du point de vue de la structure que du point de vue plus général des processus (voir figure 3.5).

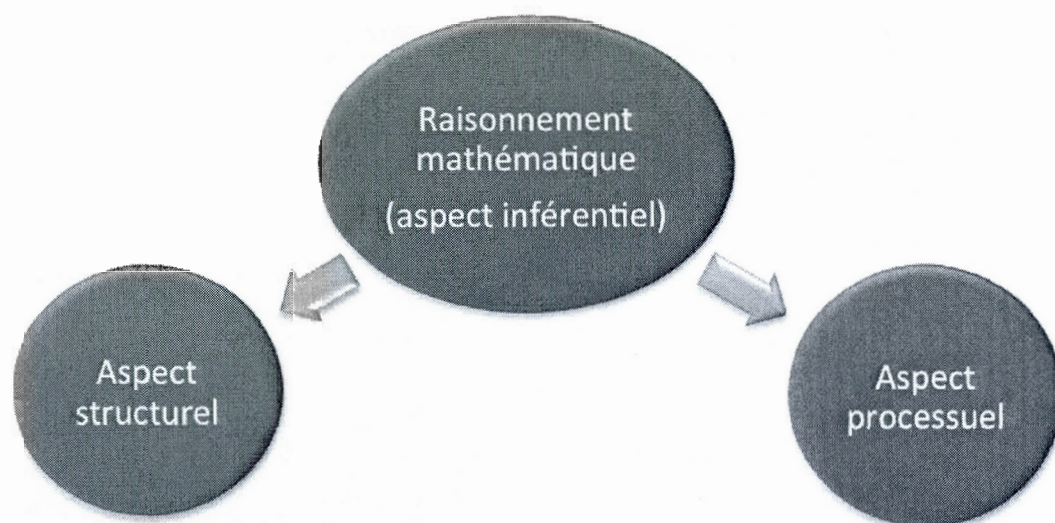


Figure 3. 5 Deux aspects structurant le concept de RM

Le RM est donc un processus de communication avec les autres ou avec soi-même qui permet d'inférer des énoncés à partir d'autres énoncés. Ces énoncés font partie du discours mathématique. Ils portent sur des objets mathématiques. Cette définition permet de sortir de la dichotomie activité/produit que l'on retrouve dans la littérature puisque le discours est à la fois produit et activité. Tout acte de communication présente à la fois les deux natures qui seront, comme il sera présenté plus loin, capturé par les aspects structurels et processuels du RM. De même, ceci met en exergue la nature inférentielle du RM puisque le RM amène la mise en évidence de nouveaux énoncés mathématiques construits à partir d'autres énoncés. Le but est alors la construction de ces énoncés mathématiques. Ce processus est organisé en une certaine structure qui est contingentée par des règles discursives partagées et est porteur d'une valeur épistémique. Le RM peut alors avoir une fonction de systématisation. Le but de changer la valeur épistémique d'un énoncé souligné par Duval (1995) devra être éclairé par les aspects structurel et processuel.

La synthèse de la littérature exposée dans les prochains chapitres permettra de prendre position quant à cette dernière. Est-ce que le changement de valeur épistémique est le but de tout RM ou est-ce que certains processus ou certaines structures ne sont que porteurs d'une valeur épistémique contingentée par les règles du discours?

Pour mieux comprendre ce qu'est le RM, l'aspect structurel qu'il reste à élaborer n'est pas suffisant. Ce n'est que lorsque l'aspect processuel ainsi que les liens entre ces deux aspects seront caractérisés qu'il sera possible d'avoir un modèle cohérent de RM. Actuellement, les écrits qui traitent directement du RM traitent de façon plus importante de l'aspect structurel, cependant, l'aspect processuel est tout aussi important. Cet aspect pourra aussi venir éclairer les fonctions du RM en classe de mathématiques. Le corpus d'analyse regorge de verbes d'action qui touchent le RM. G. J. Stylianides (2005) n'en nomme que quatre qu'il regroupe sous deux catégories générales, les activités de généralisation et les activités qui appuient une affirmation. Une conceptualisation de cet aspect permettra de mieux comprendre ce qu'est le RM en classe de mathématiques au primaire et au secondaire.

3.5 Les objectifs spécifiques

L'analyse du concept de RM de façon générale vient éclairer notre questionnement initial et permet de préciser l'objectif général qui est d'élaborer et de valider un modèle du RM pour l'enseignement primaire et secondaire par des objectifs spécifiques.

Ce projet cible deux objectifs spécifiques :

1. Proposer une élaboration et une structuration des aspects structurel et processuel du RM;
2. Établir les liens entre l'aspect processuel et l'aspect structurel du RM

CHAPITRE IV

L'ASPECT STRUCTUREL DU RAISONNEMENT

Afin de dégager les éléments conceptuels relatifs à l'aspect structurel, le corpus initial a été enrichi de nouveaux textes permettant de mieux cerner cet aspect fortement influencé par le domaine de la philosophie et de la logique. On se souviendra que l'aspect structurel du RM fait référence, entre autres, à la manière dont les éléments discursifs s'agencent entre eux, en un système ordonné qui décrit à la fois les éléments et les relations qu'ils entretiennent entre eux. L'aspect structurel permet donc de décrire les éléments constitutifs d'un pas ou d'un enchaînement de pas et les relations qu'ils entretiennent entre eux. En ce sens, il met l'accent sur les objets impliqués qui seront soit données, affirmation, règles, fondements, réfutations, valeur épistémique et sur la relation qui les unissent. Toutefois, il donne l'impression que le raisonnement est fixe et un objet en soi. En d'autres mots, il objective le raisonnement en lui enlevant sa temporalité et son lien avec la communauté qui le pratique. Le raisonnement mathématique est une activité commognitive, il reste lié à un déroulement dans le temps. C'est l'aspect processuel, élaboré dans le prochain chapitre, qui met davantage de l'avant cette temporalité.

Il est possible de décrire le discours mathématique en terme de pas élémentaires et d'enchaînements de pas (combinaison de plusieurs pas élémentaires). L'enchaînement de pas est nommé par Knipping (2003) « la structure globale ».

Ainsi, ce chapitre fait état des différents éléments constitutifs d'un RM, décrit des structures élémentaires de RM et porte un regard sur certains enchainements (structures globales) possibles.

Afin d'explorer et de bien décrire l'aspect structurel du RM, ce chapitre sera subdivisé en différentes parties. Premièrement, l'aspect structurel du RM a beaucoup été étudié par la logique qui a défini différents structures possibles. Deux modèles d'analyse de la structure des RM utilisés en didactique, qui proviennent du domaine de la logique (philosophie), seront présentés. Il s'agit des modèles de Toulmin et de Peirce repris par plusieurs auteurs en didactique des mathématiques. Deuxièmement, un regard sera posé sur le concept de raisonnement valide, fortement lié à l'aspect structurel dans la littérature. Enfin, une analyse de différentes structures du RM permettra de les distinguer en termes de « pas de raisonnement » ou « d'enchainement de pas »: déductif, inductif, abductif et par analogie.

Le tableau 4.1 présente les descripteurs qui ont permis d'analyser les textes pour construire la synthèse de l'aspect structurel. Les textes du premier corpus qui font référence aux mots-clés indiqués dans le tableau 4.1 ont été analysés. De même, de nouveaux textes ne traitant pas directement de RM, mais faisant référence aux mots-clés se rapportant à l'aspect structurel se sont ajoutés. Par exemple, les textes originaux de Toulmin (1958, 2007) et Peirce (s.d.) ont été ajoutés au corpus afin de respecter le critère d'authenticité des sources.

Tableau 4. 1
Le champ notionnel du chapitre IV

Raisonnement déductif (deductive reasoning), déduction (deduction)
Raisonnement inductif (inductive reasoning), induction
Raisonnement par analogie (analogical reasoning), analogie (analogy or analogies)
(Modèle de) Toulmin (Toulmin's Model)
(Modèle de) Peirce (Peirce's Model)

4.1 Deux modèles structurels pour l'analyse du RM

Au chapitre III, différents modèles pour analyser la structure du RM ont été explorés. Par exemple, Duval (1995) présente quatre structures du raisonnement : l'inférence sémantique, le syllogisme aristotélicien, l'inférence discursive et la déduction. Seules les deux dernières sont de nature ternaire selon l'auteur, c'est-à-dire qu'elles comportent une prémisse, un énoncé-tiers et une conclusion³². Mais cette vision est remise en question par Pedemonte (2002) qui spécifie que chacune des structures de Duval peut être ramenée à une structure ternaire. La structure ternaire est aussi mise de l'avant par Lithner (2008) qui définit les différents RM en fonction des raisons qui appuient ce dernier (l'expérience ou les mathématiques), ce qu'il associe à l'énoncé-tiers. Chez Lithner, seules l'inférence discursive et la déduction présente chez Duval, qui se différencient principalement par le fait que le permis d'inférer appartient ou non à un corpus théorique, sont prises en compte par son modèle.

Par ailleurs, Pedemonte (2002) et Reid (2003) proposent d'autres structures ternaires en s'appuyant sur les inférences élémentaires de Peirce. De plus, Cabassut (2005),

³² Termes de l'auteur.

tout comme Pedemonte, s'appuie sur le modèle de Toulmin, modèle qui peut avoir une représentation ternaire. Ainsi, les modèles de Toulmin et de Peirce sont utilisés par plusieurs auteurs afin d'étudier ce que j'appelle la structure du RM, c'est-à-dire la manière dont les éléments discursifs s'agencent entre eux en un système ordonné qui décrit à la fois les éléments et les relations qu'ils entretiennent entre eux. Afin de mieux comprendre comment les modèles de Peirce et de Toulmin permettent d'analyser le RM du point de vue de la structure et de mieux le conceptualiser, tous deux seront présentés.

4.1.1 Le modèle de Toulmin

Depuis Aristote, la forme « prémisses » - « conclusion » est souvent de mise lorsque vient le temps d'étudier le raisonnement d'un point de vue logique. Il s'agit de l'étude des syllogismes. Un syllogisme est constitué de deux propositions dont en découle une troisième. De ce fait, le terme syllogisme est parfois utilisé comme synonyme de déduction. Toutefois, il peut aussi signifier, dans un sens plus large, tout raisonnement de la forme prémisses-conclusion. Ainsi, les prémisses et la conclusion sont des propositions, c'est-à-dire des énoncés, qui peuvent recevoir une valeur de vérité (valeur logique). Le tableau 4.2 présente deux exemples de syllogisme. On nomme la prémisse la plus générale « majeure », et la seconde « mineure ». Pour le premier syllogisme, la prémisse « Socrate est un homme » est de nature particulière et la prémisse « tous les hommes sont mortels » est universelle. Pour le second, quoique les deux prémisses soient universelles, la première prémisse est moins universelle que la seconde.

Tableau 4. 2
Un exemple de syllogisme

Prémisses	Socrate est un homme.	Tous les carrés sont des rectangles.
	Tous les hommes sont mortels.	Tous les rectangles sont des parallélogrammes.
Conclusion	Donc, Socrate est mortel.	Donc, tous les carrés sont des parallélogrammes.

Un modèle qui pousse plus loin l'idée de syllogisme, et qui est utilisé par Cabassut (2005) et Pedemonte (2002) pour étudier le RM, est celui de Toulmin (1958). Ce modèle permet de représenter un ou plusieurs pas de raisonnement à partir de différents éléments, mais cette fois-ci à partir d'un graphe. La figure 4.1 présente un graphe du modèle. Afin que le lecteur ait accès aux termes originaux, la terminologie anglaise a été mise entre parenthèse dans la figure. La structure des pas de raisonnement peut alors être mise en évidence à l'aide de ce modèle (Pedemonte, 2002; Cabassut, 2005), puis analysée. Selon Knipping (2008), le modèle de Toulmin permet de mettre en évidence une structure plus complète que ce que permet la logique formelle, en pouvant prendre en compte le contexte de développement des argumentations. En effet, le modèle de Toulmin permet d'enchaîner les différents pas de raisonnement selon différentes structures globales (plusieurs pas élémentaires). Par exemple, à la figure 4.1, on peut penser qu'un autre pas de raisonnement pourrait permettre de construire les données (data) ou encore la garantie (warrant).

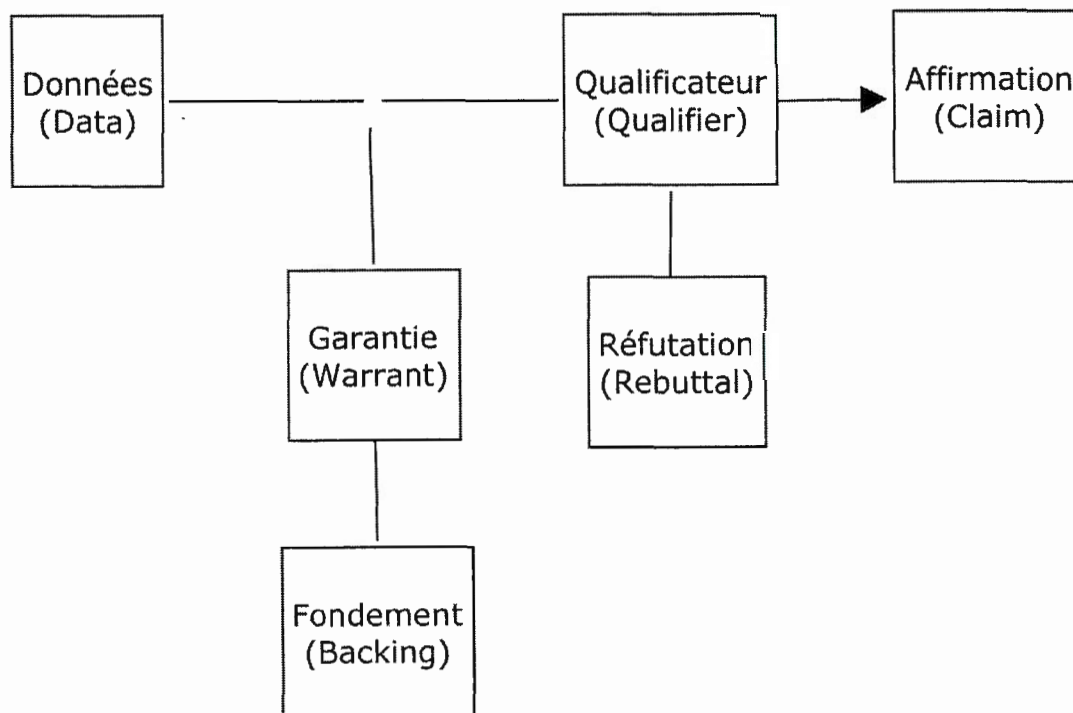


Figure 4. 1 Modèle de Toulmin

Selon ce modèle, un pas de raisonnement est minimalement composé de données et d'une affirmation³³ (Knipping, 2008; Krummheuer, 1995). Pour justifier l'affirmation, une garantie³⁴, similaire au concept d'énoncé-tiers chez Duval (1995) et de permis d'inférer chez Pedemonte (2002), peut être fournie. La garantie n'est pas toujours présente et apparaît souvent lorsque l'affirmation est mise en doute. Pour Toulmin (1958), ces trois éléments constituent la structure élémentaire de l'argument. Les données et la garantie sont parfois difficiles à différencier, mais chacun joue un rôle différent dans le pas de raisonnement. Pour Toulmin, les données supportent

³³ claim

³⁴ warrant

l'affirmation, c'est-à-dire que, si l'affirmation est mise en doute, l'acteur doit produire des faits qui l'appuient. Ces faits constituent les données. Si les faits sont acceptés comme vrais, le lien entre les données et l'affirmation peut toutefois être remis en question. Le rôle de la garantie est alors de supporter l'inférence des données vers l'affirmation.

Chacun des éléments pour un pas donné peut avoir un autre rôle dans un autre pas. Une affirmation peut, par exemple, servir de donnée dans un autre pas. Ou encore, si les données sont remises en doute, un argument peut être fourni où celles-ci en sont l'affirmation. Ce processus est similaire à ce que Duval (1995) appelle le recyclage lors de l'enchaînement de pas déductifs. Par ailleurs, il en diffère par le fait que l'enchaînement n'est pas nécessairement déductif au sens de Duval.

De même, d'autres éléments peuvent venir enrichir l'analyse. Le pas de raisonnement peut inclure un fondement. Le fondement³⁵ supporte la garantie. Il s'agit habituellement des convictions qui sont difficilement remises en question (Krummheuer, 2007) et qui sont fortement dépendantes du champ³⁶ de raisonnement (Toulmin, 2007). Ce même argument peut aussi inclure un qualificateur³⁷ de la vérité de l'affirmation (ce qui est ici associé à la valeur épistémique) et une réfutation³⁸ possible de l'affirmation.

³⁵ backing

³⁶ field of reasoning (Toulmin, 2007)

³⁷ qualifier

³⁸ rebuttal

Le schéma de la figure 4.2 représente, à l'aide du modèle de Toulmin, le raisonnement d'un élève qui conclut que les aires de deux triangles différents sont nécessairement différentes face à deux triangles non-congrus (malgré un calcul d'aires effectué correctement). La garantie utilisée (ou permis d'inférer selon les termes de Pedemonte) a déjà été inférée antérieurement à partir de l'expérience de l'élève qui a calculé l'aire de nombreux triangles différents et dont les résultats étaient différents, ce que Pedemonte (2002) appelle l'héritage de l'inégalité. Le graphe met en évidence les données (D), la garantie (G) et son fondement (F), l'affirmation (A) ainsi qu'une réfutation (R) possible. L'affirmation (la conclusion) est en gras. Le qualificateur n'est pas représenté. Son ajout pourrait permettre de mettre en évidence si l'affirmation est considérée comme vraie ou vraisemblable.

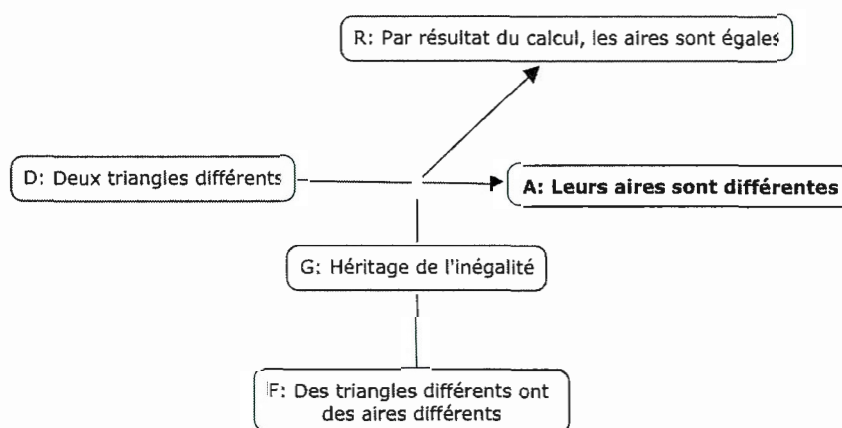


Figure 4.2 Un exemple de schéma d'argument de Toulmin (modifié de Pedemonte, 2002, p. 95)

Il faut noter que le graphe présenté à la figure 4.2 ne représente pas nécessairement le pas discursif tel qu'il peut avoir lieu. En effet, le temps semble ici suspendu, on ne peut ainsi juger de l'ordre d'énonciation des différents éléments qui structurent le pas du RM. La garantie peut être venue après l'énonciation des données et de l'affirmation, ou les données et une garantie peuvent mener à une nouvelle

affirmation. Il permet de mettre en évidence les éléments qui constituent le raisonnement de l'élève, tel qu'ils se présentent au chercheur.

Originellement, le modèle de Toulmin (2007) permet de représenter un pas élémentaire de raisonnement. Toulmin (2007) spécifie que la fonction première de tout argument est de justifier. De plus, le type d'argument et de données fournies dépend grandement du problème à résoudre. Pour différencier les types d'arguments, Toulmin introduit le concept de « *field of argument* » que je traduis ici par « champ de raisonnement ». Son modèle tente donc de mettre en lumière les éléments qui sont invariants d'un domaine à l'autre, et ceux qui dépendent du domaine. Ainsi, ce modèle pourrait mettre en lumière différents éléments du discours mathématique, par exemple, les règles discursives et les énoncés généralement acceptés.

Cabassut (2005), Knipping (2003; 2008) et Krummheuer (1995) ont utilisé le modèle de Toulmin pour représenter l'enchaînement de plusieurs pas de raisonnement. Knipping et Krummheuer étudient l'argumentation du point de vue de la classe. Plus particulièrement, Knipping a utilisé l'argumentation pour étudier ce qu'elle appelle les processus de preuve en classe. L'utilisation du modèle de Toulmin permet à Knipping (Knipping, 2003, 2008; Reid et Knipping, 2010) de mettre en lumière différentes structures globales (enchaînements de plusieurs pas) du raisonnement dans le contexte de l'apprentissage de la preuve. On peut donc penser que le modèle de Toulmin pourrait favoriser une meilleure compréhension du RM en classe, de façon plus générale, en mettant de l'avant les différents éléments structurels du raisonnement pour l'enchaînement de pas de raisonnement. Par ailleurs, le modèle de Toulmin, tel que discuté ici, ne permet que de représenter ce que Toulmin appelle les *warrant-using arguments*. Toulmin introduit aussi les *warrant-establishing arguments* qui établissent une garantie à partir de données et d'une affirmation, mais

sans développer autour de ce concept. Le modèle de Peirce pourrait aider à le caractériser.

4.1.2 Le modèle de Peirce

Un deuxième modèle qui est utilisé en didactique des mathématiques pour étudier le RM est le modèle de Peirce (s.d.). Peirce s'est penché sur différents types de syllogisme, à savoir la déduction, l'induction et l'abduction, dans ses premiers écrits sur le sujet. Tout comme Pólya (1968), il a utilisé le syllogisme au sens large pour décrire différentes formes de raisonnement plausible ou de raisonnement démonstratif.

Peirce (s.d.), dans ces premiers écrits, a fait évoluer la formulation des syllogismes pour parler de règles (*rules*), cas (*case*) et résultats (*results*) et non plus uniquement de « prémisses (majeure et mineure)-conclusion ». Il y a alors un schéma ternaire associé à chacune des structures de raisonnement élémentaires énoncées en termes de cas, de règles et de résultats. Le cas peut être associé à la prémisse mineure en ce sens qu'il est de nature moins universelle que la règle. La règle fait référence à un énoncé de nature générale. Le résultat découle de l'application de la règle sur le cas particulier. Contrairement au syllogisme d'Aristote, le vocabulaire de Peirce différencie la conclusion selon le type d'inférence impliquée. On remarquera que la conclusion peut prendre la forme d'une règle, d'un cas ou d'un résultat. Dans ces premiers écrits, le raisonnement déductif génère un résultat, le raisonnement inductif génère une règle et le raisonnement abductif génère un cas.

Le tableau 4.3 présente trois exemples d'inférence élémentaire que Peirce donne dans le cadre de la situation suivante : vous entrez dans une pièce où il y a des sacs de fèves de différents types. Sur une table, près des sacs, il y a un paquet de fèves

blanches. Seul le pas déductif mène à un résultat nécessaire. Les deux autres types de pas sont plutôt porteurs d'une valeur épistémique de vraisemblance. En effet, dans le premier cas, la conclusion (le résultat) est nécessairement vraie si la règle et le cas le sont. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de voir le contenu du paquet de fèves. Si la règle et le cas sont vrais, les fèves sont nécessairement blanches.

Dans le cas du pas inductif, il se pourrait que l'échantillon de fèves (cas) ne soit pas représentatif du contenu du sac. La conclusion (la règle) est donc vraisemblable. On peut faire ici un parallèle entre le pas inductif chez Peirce et le *warrant-establishing argument* de Toulmin (2007). D'autres informations contextuelles peuvent aussi venir enrichir la vraisemblance de la conclusion. De même, pour l'abduction, d'autres conclusions (d'autres cas) pourraient être possibles. Par exemple, une autre conclusion possible serait que des fèves blanches de chacun des sacs ont été sélectionnées. On peut alors penser que le contexte est très important pour juger de la vraisemblance d'une conclusion. Mais le contexte est important aussi pour juger de la valeur épistémique de la conclusion dans le cas d'un pas déductif. En effet, le contexte nous informe quant à la vérité de la règle et du cas. Si la règle ou le cas ne sont que vraisemblables, on ne peut que conclure que les fèves du paquet sont vraisemblablement blanches.

Tableau 4. 3

Trois exemples de pas d'inférence élémentaire de Peirce (1878; tiré de Reid, 2003).

Pas déductif	<i>rules</i> – All the beans from this bag are white <i>case</i> – These beans are from this bag <i>result</i> – These beans are white
Pas inductif	<i>case</i> – These beans are from this bag <i>result</i> – These beans are white <i>rules</i> – All the beans from this bag are white
Pas abductif	<i>rules</i> – All the beans from this bag are white <i>result</i> – These beans are white <i>case</i> – These beans are from this bag

À une période ultérieure³⁹, Peirce considère les trois pas d'inférence élémentaire comme trois étapes du processus d'investigation. Les trois types d'inférence sont alors définis en fonction de leur rôle dans ce processus. On voit ici apparaître l'aspect processuel du RM. L'abduction permet alors d'inférer des faits qui, selon Peirce, expliquent un résultat. L'induction permet de tester la règle et la déduction permet de générer les conséquences découlant nécessairement des cas et de la règle. Les fonctions des différents pas d'inférences sont alors complémentaires à l'intérieur de l'activité d'investigation. Il reformulera alors l'abduction comme suit : « The surprising fact, C, is observed; but if A were true, C would be a matter of course, hence, there is reason to suspect that A is true » (Peirce, s.d., V5.189). Afin de qualifier l'aspect structurel du RM, seuls les premiers écrits de Peirce sont utiles puisqu'ils font le lien entre les différents éléments d'un pas de RM. Toutefois, comme il sera traité dans le prochain chapitre, l'aspect processuel est tout aussi important, mais demande un autre type de conceptualisation.

4.1.3 L'union des modèles de Peirce et de Toulmin.

Les modèles de Peirce et de Toulmin mettent chacun de l'avant différents aspects structurels d'un pas de raisonnement. Cette section présentera l'apport des deux modèles et comment l'union de ces derniers permet d'éclairer le RM tel qu'il se présente à un observateur.

Une union des modèles de Toulmin et de Peirce est proposée par Pedemonte (2002) et Pedemonte et Reid (2011) pour qualifier les RM développés par les élèves. Afin de représenter l'apport de l'union de ces modèles, ces auteurs mettent en évidence la

³⁹ Les écrits de Peirce (s.d.) ont été rédigés à divers moments de sa vie et regroupés sous forme de Collected papers.

nature de la conclusion du pas de RM (à savoir données, garantie ou affirmation) à l'intérieur du schéma développé par Toulmin.

Le modèle de Toulmin ne permet pas de représenter ce qui est donné à priori de ce qui est inféré par le pas de RM. Pour Toulmin, l'argument (*warrant using*) vient justifier une affirmation à postériori, il vient donc après que celle-ci soit posée. Ainsi, « ces étapes [celle de justifier une assertion] ne correspondent pas nécessairement à celles du processus qui nous a effectivement permis d'atteindre les conclusions que nous tentons maintenant de justifier » (Toulmin, 1958). Par ailleurs, chez Peirce, la nature de la conclusion varie d'une inférence élémentaire à une autre. Il peut s'agir d'une règle (garantie), d'un cas (ou donnée) ou d'un résultat (affirmation). En ce sens, le syllogisme de Peirce, contrairement au modèle de Toulmin, ne représente pas nécessairement une justification à postériori.

À l'aide du modèle de Toulmin, la figure 4.3 présente toujours l'exemple des fèves de Peirce, mais cette fois-ci avec l'union des deux modèles. Quelques modifications sont apportées à la proposition de Pedemonte et Reid (2011). On se souviendra que la situation suivante sous-tend les pas élémentaires de la figure 4.3 : vous entrez dans une pièce où il y a des sacs de fèves de différents types. Sur une table, près des sacs, il y a un paquet de fèves blanches.

Le vocabulaire de Toulmin et de Peirce étant différent, un choix est nécessaire afin d'unir les modèles. Un parallèle peut être fait entre les termes « données » et « cas ». De même, la garantie et la règle semblent de même nature puisqu'elles permettent le passage des données à l'affirmation (et des cas au résultat). Les termes « données », « règle » et « affirmation » ont été choisis. Les données prennent en compte le contexte dans lequel le raisonnement se développe de même que le discours dans lequel il évolue. La règle est un énoncé de nature générale qui peut éventuellement

être ajouté à l'ensemble des énoncés généralement acceptés du discours mathématique. L'affirmation est un énoncé qui découle des données et de la règle. Dans la figure 4.3, les lettres ont les significations suivantes : D : données, A : affirmation, Ré : réfutation, R : règle, Q : qualificateur et F : fondement. Des fondements, des réfutations et des qualificateurs ont été ajoutés afin de montrer comment l'union des modèles de Toulmin et de Peirce vient enrichir l'analyse structurelle d'un pas élémentaire de raisonnement. Cette représentation en graphe permet donc de mettre en lumière un qualificateur, mais aussi un fondement et une réfutation possible, sans contredire le modèle de Peirce.

Remarquons, comme mentionné ci-dessus, que chacun des pas élémentaires infère un élément différent (données, énoncé ou règle) identifié par les caractères gras dans la figure 4.3. Il s'agit de la conclusion du raisonnement. Le fondement est toujours attaché à une règle. Donc, dans le cas du pas inductif, il reste à construire. Tel que défini par Toulmin, le fondement est fortement dépendant du champ de raisonnement. Le qualificateur est toujours attaché au lien qui mène à la conclusion du pas de raisonnement. La réfutation est attachée au qualificateur puisque la réfutation vient changer ce dernier. Ainsi, dans le cas de l'abduction, ils sont attachés aux données, et dans le cas de l'induction, à la règle. Ceci est différent de la proposition de Pedemonte et Reid (2011) qui les rattachent plutôt à l'affirmation. Ce changement est proposé, car c'est la valeur épistémique ainsi qu'une réfutation de la conclusion d'un pas qui amèneront à le rejeter, et non celle de l'affirmation.

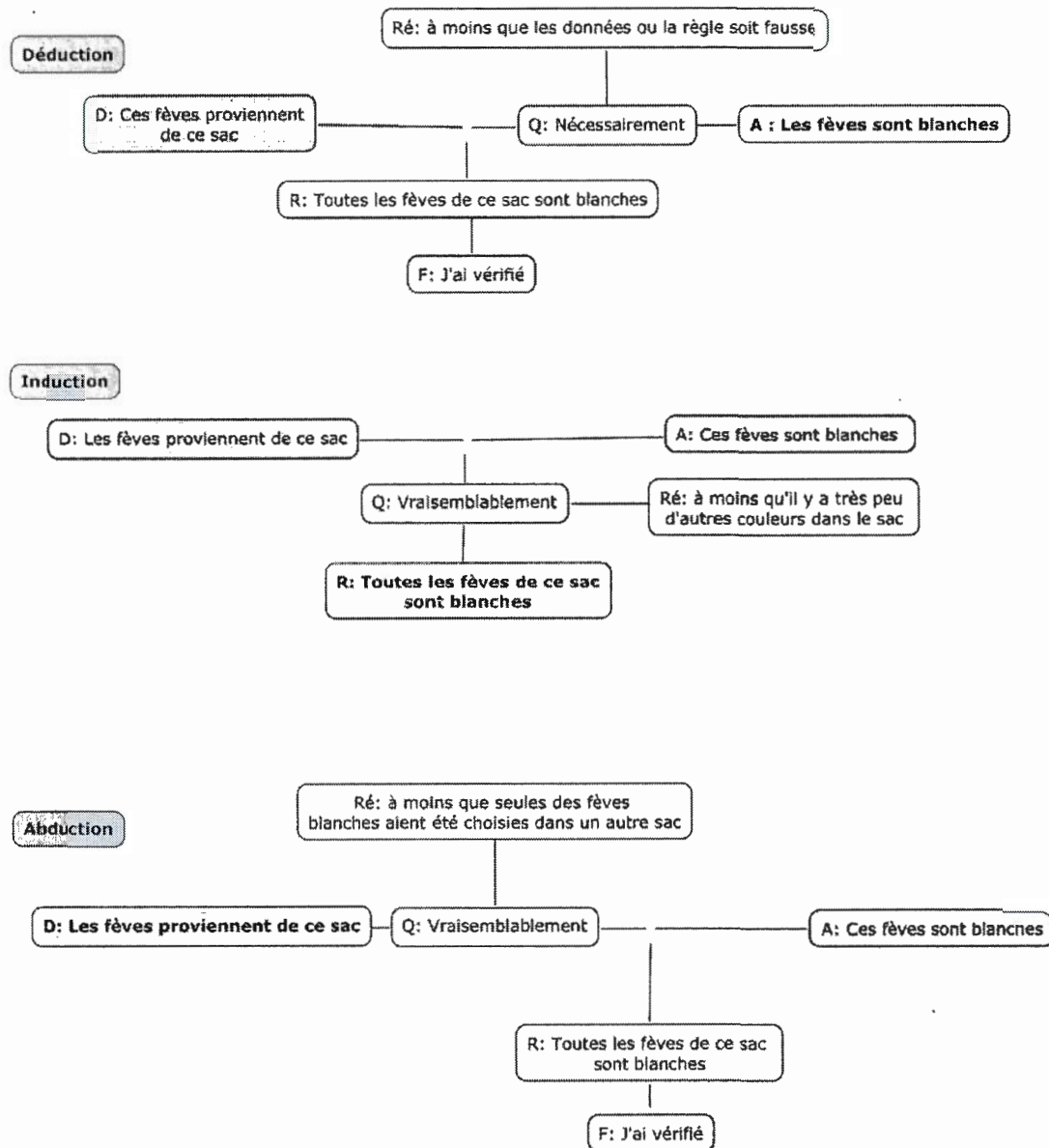


Figure 4.3 Trois exemples d'arguments élémentaires à l'aide du modèle unifié

Si l'on reprend l'enchaînement de Knipping (2003, 2008) à l'aide des trois pas d'inférence de Peirce, il peut être possible de modéliser la construction d'un raisonnement en mettant de l'avant les va-et-vient du discours. Cette modélisation a l'avantage de présenter le raisonnement, non pas comme une succession linéaire de

pas, mais comme une combinaison de pas où les propositions peuvent avoir différents statuts et plusieurs chemins peuvent mener à la conclusion. L'union des modèles présentés permet d'analyser la structure des raisonnements produits, autant localement (le pas) que globalement (l'enchaînement).

4.1.4 Le concept de raisonnement valide

Avant de passer à la synthèse des différents pas de RM dans la littérature, il est nécessaire de discuter de la validité d'un pas de RM. En effet, le concept de validité, ou plutôt de raisonnement valide, prend beaucoup d'importance lorsque vient le temps de discuter de raisonnement (mathématique ou non) d'un point de vue structurel. C'est traditionnellement la structure du RM qui permet de juger de la validité d'un raisonnement. Je m'intéresse ici au concept de raisonnement valide, et non à la validité des savoirs développés par le RM; ce concept sera discuté au chapitre V en termes de processus de recherche de validation.

Valider est associé à une idée de conformité, d'acceptabilité dans le langage courant. Selon Duval (1995), la validité d'un raisonnement est un caractère qui est associé à sa forme. Il s'agit de la définition usuelle donnée au terme valide : « caractère d'un raisonnement qui est formellement valable, indépendamment de la vérité de ses propositions » (Nouveau Petit Robert, 2009, p. 2673). La validité d'un raisonnement reposerait donc, selon Duval (1995), sur une structure déductive. Ce sont aussi les propos de G. J. Stylianides et A. J. Stylianides (2008) qui associent le raisonnement déductif à la notion de raisonnement valide : « The conceptualization denotes that the modes of argumentation used in an argument that qualifies as a proof need to be valid and, therefore, need to support logically necessary inferences from a given set of premises. According to commonly accepted notions of deductive reasoning, logically necessary inferences directly implicate the use of deductive reasoning » (p. 107).

Arsac (1996) et Lithner (2008) abondent aussi en ce sens. Pour ces auteurs, seul le raisonnement déductif est valide en mathématique.

Selon Peirce, cette vision du raisonnement valide est trop restrictive. Ce dernier qualifie un raisonnement de valide lorsqu'il ne prétend pas plus que ce que lui permet sa structure. Ainsi, un raisonnement inductif ou abductif est valide si sa conclusion a une valeur épistémique probable ou possible (qualificateur de vérité de Toulmin). De même, un raisonnement déductif est valide si sa conclusion a la même valeur épistémique que les données et la règle. Ainsi, si les données ou la règle sont probables, alors la conclusion d'un pas déductif ne peut être, au mieux, que probable. Ce qui différencie les raisonnements inductif, abductif et déductif, selon Peirce, n'est pas la validité ou non de ces trois formes, mais la nécessité de leur conclusion par rapport aux prémisses. Seul le raisonnement déductif permet d'inférer une conclusion nécessaire. Il n'y a alors qu'une conclusion possible qui ne peut être fausse si les données et la règle sont vraies ou vraisemblables.

Pour permettre aux différentes structures de prendre la place qui leur revient dans le RM, il est nécessaire d'ouvrir la notion de raisonnement valide comme le fait Peirce. Ainsi, le type de pas de raisonnement est directement lié à la valeur épistémique permise (ce qui est lié au qualificateur de la conclusion), qui est reliée à la conclusion de ce dernier. La validité d'un raisonnement dépend uniquement du fait que le pas transporte la valeur épistémique permise par la structure élémentaire, et non du type de structure du pas. De réduire la validité d'un pas de RM à la nécessité de la conclusion par rapport aux données et à la garantie, c'est du même coup restreindre l'apport des raisonnements inductifs, abductifs et analogiques dans le développement du discours mathématique. Chacune de ces structures permet d'enrichir le discours mathématique de nouveaux énoncés à propos d'objets mathématiques déjà existants.

Les prochaines sections tentent de mettre en lumière les apports de chacune des structures en termes de discours.

4.2 Les structures du RM

Le modèle unifié met en lumière trois pas élémentaires de RM qui pourraient être combinés de différentes façons avec l'enchaînement de différents pas dans un graphe. Les trois pas élémentaires (déductif, inductif et abductif) sont les plus cités dans la littérature. La déduction y joue un rôle très important étant donné qu'il s'agit du seul type de pas d'inférence qui permet de systématiser la théorie mathématique, puisqu'il s'agit du seul pas qui, en s'appuyant sur des prémisses vraies, permet de passer à une valeur épistémique vraie (Duval, 1995, Meyer, 2010). En plus des trois structures élémentaires de pas de RM, l'analogie est reconnue comme un type de RM entre autres par Pólya (1958), mais aussi dans le programme de formation (MEQ, 2000; MELS, 2007). Par ailleurs, les termes « déductif », « inductif », « abductif » et « par analogie » sont aussi traités différemment selon les auteurs. Même si l'analogie n'est pas abordée à travers les écrits de Toulmin, elle est apparue à plusieurs reprises liée à l'aspect structurel lors de l'analyse du corpus, par exemple, chez Reid (2010) et English (1997). De plus, Peirce (s.d.), sans la considérer comme structure élémentaire du raisonnement, y consacre quelques mots qui seront aussi analysés. Les prochaines sections font état de la conceptualisation d'une perspective commognitive de chacune des quatre structures de raisonnement (déductive, inductive, abductive et par analogie) ainsi que de certaines structures qui englobent plusieurs pas d'une même structure.

4.2.1 La déduction

Dans la littérature sur le sujet, « raisonnement déductif » et « déduction » semblent deux termes interchangeables. Le terme « déduction » peut parfois être utilisé comme synonyme de la conclusion d'un raisonnement déductif, parfois comme synonyme du raisonnement déductif lui-même. Il n'y a pas de consensus. La définition que Duquesne (2003) offre du raisonnement déductif résume bien le sens attribué à ce terme par plusieurs. Pour elle, il s'agit d'« un mécanisme qui, à partir de propositions considérées comme vraies, donne naissance à d'autres qui en sont les conséquences et qui sont aussi considérées comme vraies » (p. 18). Selon cette vision, le raisonnement déductif, s'il suit certaines règles, mène toujours à un résultat vrai. Il s'agit d'un raisonnement dans lequel les prémisses impliquent nécessairement la conclusion. Par nécessairement, il est entendu que les prémisses, si elles sont vraies, incluent une condition qui ne rend qu'une seule conclusion possible. Plusieurs définitions font aussi référence au fait que la déduction est un raisonnement qui procède du général vers le particulier (Duquesne, 2003; Legendre, 1993; Oléron, 1977). Par ailleurs, plusieurs démonstrations mathématiques passent du général au général. Il est donc réducteur de définir la déduction en termes du passage du général au particulier.

Comme discuté à la section 4.1.2, Peirce (s.d.) considère que la déduction est de la forme *données – règles - résultat*, ce qui peut sembler identique au pas de déduction de Duval (1995) où l'énoncé-tiers tient le rôle de règle. Toutefois, pour Peirce, la règle associée à la déduction n'est pas nécessairement déterminée par un statut théorique tel que défini par Duval. Par ailleurs, pour lui, le raisonnement déductif est toujours nécessaire, mais la vérité de la conclusion peut être incertaine. Cette vision est particulière. En effet, on différencie souvent les raisonnements déductifs des autres raisonnements en spécifiant que les premiers sont nécessaires et les autres probables. C'est ce que fait Cabassut (2005). Pour ce dernier, les raisonnements

probables de la forme « données – règles – résultat » ne sont pas qualifiés de déductions.

Pedemonte (2002) parle d'argument déductif lorsqu'il s'agit d'une forme déductive qui n'est pas fondée sur une théorie mathématique. On pourrait rapprocher le discours de Pedemonte de celui de Peirce puisque, pour celle-ci, l'argument déductif ne s'appuie pas nécessairement sur une théorie.

La structure du pas déductif n'est donc pas nécessairement liée à une théorie comme le stipule Duval (1995). La règle qui permet le passage des données à l'affirmation peut, comme le formule Peirce ou Pedemonte (2002), se fonder sur l'expérience. J'ajouterais que la règle s'appuie sur le discours déjà développé par l'individu qui raisonne. Ce discours n'est pas nécessairement systématisé en une théorie mathématique, surtout si l'on se situe dans l'enseignement primaire et secondaire. Il reste que différentes règles à propos d'objets mathématiques font partie de ce discours et peuvent permettre le passage de données à une affirmation. La structure demeure déductive. C'est cette position qui sera prise ici afin de permettre d'inclure davantage du discours de l'élève en tant que raisonnement mathématique. L'aspect processuel permettra de contraster davantage ce point de vue pour rester cohérent avec ce qui est considéré en mathématiques comme un raisonnement de validation.

Le pas déductif est associé à plusieurs formes logiques qui ne demandent pas de statut théorique aux éléments du discours. Le raisonnement déductif, dit direct, est celui de la forme *modus ponens*. Pólya (1958) parle de *modus tollens* qui s'appuie sur la contraposée d'une implication, forme que Mueller (2007, 2009) a pu observer comme structure du raisonnement chez des élèves du primaire. Il s'agit des deux formes logiques les plus nommées lors de l'étude du RM en didactique des mathématiques. La figure 4.4 présente ces deux structures déductives à l'aide d'un graphe. Le *modus*

ponens et le *modus tollens* sont des pas de structure déductive comme permet de le constater la figure 4.4. Le A joue le rôle de données, le B de l'affirmation et l'énoncé « Si A alors B » est la règle qui permet le passage de A à B.

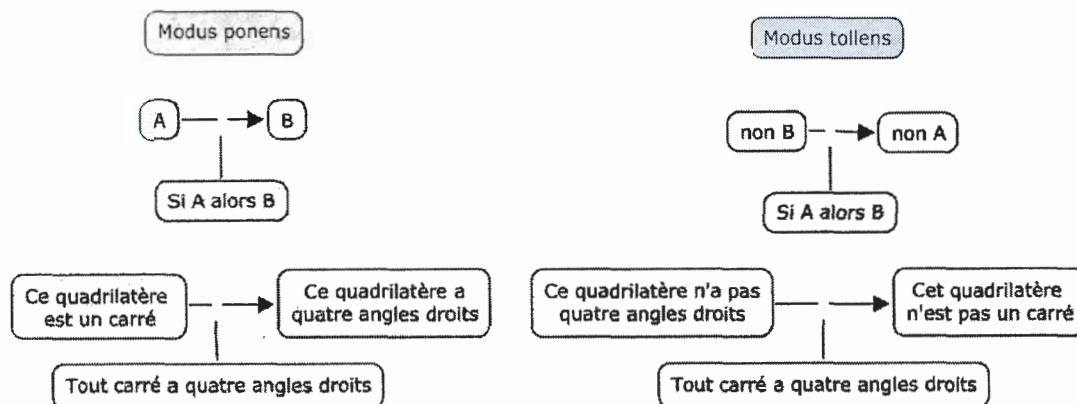


Figure 4. 4 Un exemple de *modus ponens* et de *modus tollens*

Ainsi, tout pas déductif peut être réécrit selon le schéma présenté à la figure 4.5. Les données et la règle permettent le passage vers l'affirmation et le qualificateur peut prendre une valeur épistémique vraisemblable ou vraie selon celle portée par les données et la règle. La nature du qualificateur dépend pour sa part de règles métadiscursives. Il s'agit de la seule structure en mathématiques qui permette d'inclure un énoncé à propos d'objets mathématiques dans le discours par le biais du RM, c'est-à-dire que, si l'on cherche à systématiser notre discours, la structure déductive du RM est la structure à privilégier.

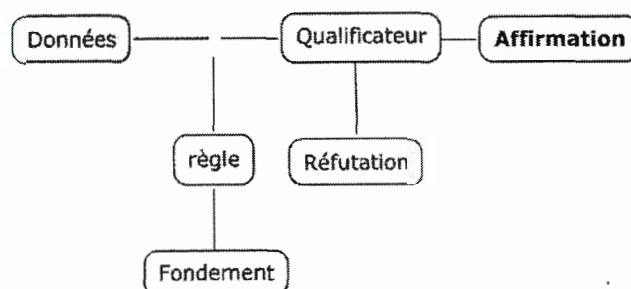


Figure 4. 5 Le schéma d'un pas déductif

Les pas déductifs peuvent être enchainés de façon à former de longue chaîne déductive. Certaines de ces chaînes portent des noms particuliers. C'est le cas des raisonnements par l'absurde et par disjonction des cas, tous deux présents dans le PFEQ (MELS, 2007). Ces deux cas répondent aux règles logiques du raisonnement déductif et comportent plusieurs pas déductifs.

4.2.1.1 Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde se base sur la règle du tiers exclu, à savoir qu'un énoncé est soit vrai, soit faux. Par exemple, un nombre est soit pair, soit il ne l'est pas. Il ne peut être à la fois pair et impair. Le raisonnement par l'absurde, aussi nommé raisonnement par contradiction, est qualifié de raisonnement indirect. Voulant prouver un énoncé p , on démontre que de considérer $non-p$ comme étant vrai mène à une contradiction. Par exemple, considérons l'énoncé suivant suivi d'une preuve qui découle d'un raisonnement par l'absurde (voir figure 4.6) : Si n est parfait, alors n n'est pas premier. Pour Duval (1995), ce raisonnement contient plusieurs pas de raisonnement. Les premiers pas mènent à l'énoncé de contradiction et le dernier utilise le principe du tiers exclu pour conclure à la contradiction.

On peut, à l'aide du schéma de Toulmin, observer la boucle dans le raisonnement par l'absurde, ainsi que le jeu entre les différents arguments élémentaires où la conclusion est « recyclée » (pour utiliser la terminologie de Duval (1995)) en donnée d'un autre argument élémentaire. La conclusion du raisonnement est en gras. Soulignons aussi qu'il s'agit d'une justification à postériori, à savoir que l'énoncé cible, le résultat, est connu dès le départ.

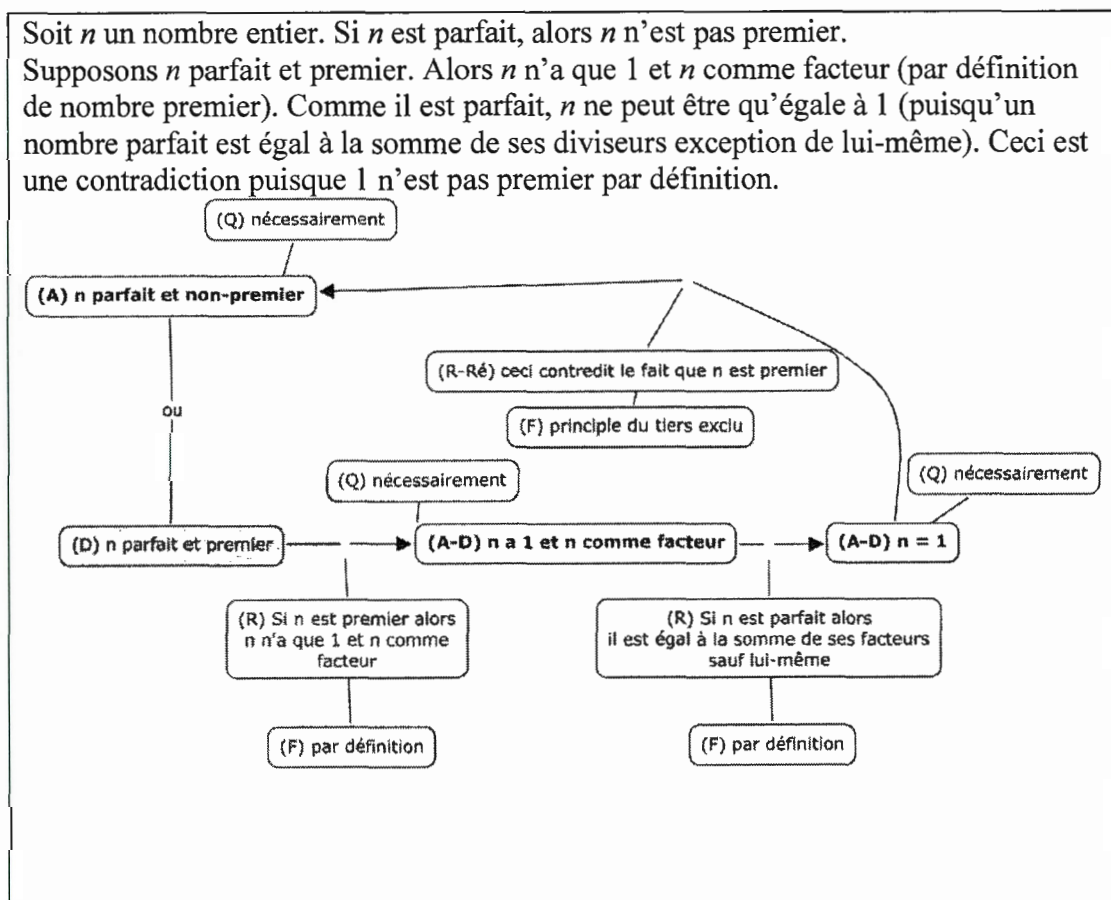


Figure 4. 6 Un exemple de raisonnement par l'absurde

4.2.1.2 Le raisonnement par disjonction des cas

Le raisonnement par disjonction des cas se base sur l'étude de tous les cas possibles par la partition d'un ensemble. Il peut être dit direct ou par l'absurde (la preuve de l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré est un bon exemple de preuve par l'absurde par disjonction de cas). Par ailleurs, la figure 4.6 ne présente pas un exemple de raisonnement par disjonction des cas, car l'idée n'est pas de partitionner pour prouver pour l'ensemble des nombres, mais bien pour éliminer la possibilité d'une des parties de la partition. Voici un exemple de preuve directe par disjonction de cas (voir figure 4.7). Ici, la disjonction de cas permet de prouver que l'énoncé est vrai pour le sous-ensemble des nombres pairs et pour le sous-ensemble des nombres impairs et donc, pour l'ensemble de tous les nombres.

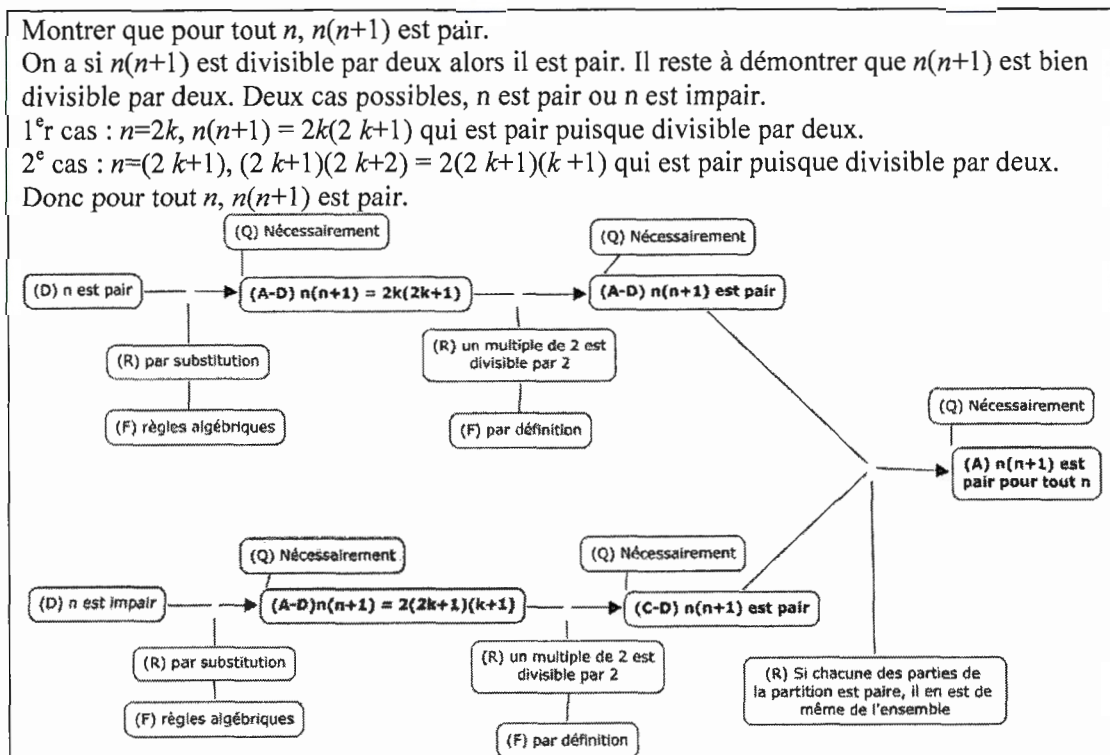


Figure 4. 7 Un exemple de preuve directe par disjonction de cas

4.2.2 L'induction

Le terme « induction » ou « raisonnement inductif » prend différents sens dans la littérature en didactique des mathématiques. Selon Reid (2010), il est utilisé de façon inconsistante, en partie parce qu'il réfère à tout raisonnement qui n'est pas déductif, ce qui couvre un large spectre de raisonnements complexes. Cette section conceptualise le raisonnement inductif en termes de structure.

Comme spécifiée à la section 4.1.2, une seconde forme élémentaire de raisonnement, selon Peirce (s.d.), est l'induction. Pedemonte (2002) et Cabassut (2005) reprennent tous deux une des caractérisations de Peirce pour définir le pas inductif comme un raisonnement de la forme *données-résultat donc règle*.

Selon plusieurs, le raisonnement inductif joue un rôle dans la généralisation de régularités : « L'inférence inductive s'exerce sur des régularités observées à partir desquelles on peut tirer des conclusions plus générales » (Duquesne, 2003, p. 18). Ainsi, il s'agirait de passer du particulier au général. On observe des données particulières. Des régularités sont dégagées. De plus, Pedemonte (2002) mentionne que l'induction « est une inférence ampliative qui conduit à la construction de connaissances nouvelles à partir de l'observation de cas particuliers que l'on généralise à un ensemble plus vaste de cas » (p. 70-71). En plus de la généralisation, l'abstraction, l'analogie et la particularisation sont aussi nécessaires, selon elle, au processus d'induction. La comparaison se fait par analogie, la règle est généralisée par abstraction et testée par particularisation. Ces propos sont semblables à ceux de Pólya (1968) et peuvent être mis en parallèle avec la définition de RM de Mason (1994). Par ailleurs, il faut noter que Mason lie ces processus au RM en général, et non à l'induction en particulier. Je souligne ici que les termes généralisation,

abstraction et particularisation sont plutôt liés à l'aspect processuel du RM et seront discutés au chapitre V.

Comme on peut le constater, les auteurs qui traitent du raisonnement inductif, comme Pedemonte (2002), Rivera (2008) et Cabassut (2005), combinent l'aspect processuel à l'aspect structurel. Toutefois, si l'on s'en tient à la structure du raisonnement, la figure 4.8 présente un exemple d'inférence inductive où une règle est inférée à partir de données (le chiffre des unités de certains nombres) et d'un résultat (tous ces nombres sont pairs). La conclusion, ou règle, est représentée en gras. Le raisonnement inductif mène à une inférence vraisemblable du point de vue épistémique. En effet, les règles du discours mathématiques font en sorte qu'il est impossible de dire si cette règle est vraie. La conclusion n'a qu'une certaine possibilité d'être vraie. Il s'agit donc d'une forme de raisonnement plausible, tel que qualifié par Pólya (1968).

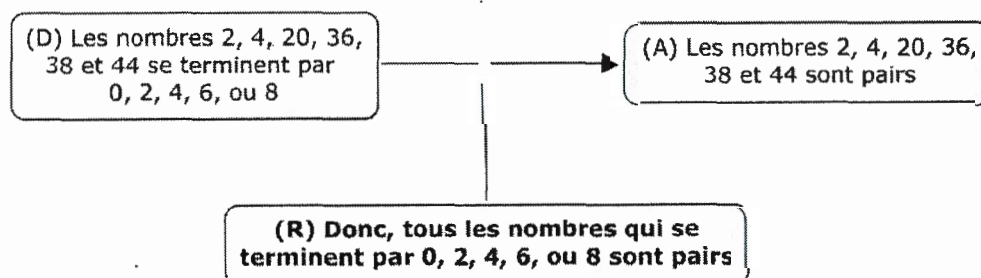


Figure 4. 8 Un exemple de pas inductif

La caractéristique du raisonnement inductif de construire de nouveaux savoirs est remise en question par différents écrits sur l'abduction (Meyer, 2010; Rivera et Becker, 2007). La création de nouveautés est, selon ces auteurs, réservée à l'inférence abductive, tandis que l'inférence inductive a plutôt un rôle de vérification : « while abduction involves discovering a new hypothesis, induction establishes the strength

of the hypothesis through an experimental confirmatory process that produces tendencies in support of the hypothesis and are, thus, not novel facts » (Rivera, 2008, p. 20). Il s'agit d'une caractérisation du raisonnement inductif que Peirce a développée dans un deuxième temps. Ainsi, pour certains suivants de Peirce, l'induction ne crée rien; elle ne fait que confirmer ou infirmer une règle par l'observation de résultats prédits (ou impliqués) par celle-ci. La règle inférée lors de l'induction ne serait pas nouvelle en soi puisqu'observée sur un nombre restreint de cas. Toutefois, ces propos mettent davantage de l'avant l'aspect processuel du RM, et pour caractériser l'aspect structurel, c'est le schéma de pas inductif tel que présenté à la figure 4.9 qui sera retenu. La conclusion (en gras) est une règle qui permet le passage des données à l'affirmation. Cette règle est de nature générale. De plus, la valeur épistémique et une réfutation possible permettent de mettre en évidence les règles métadiscursives du discours mathématique.

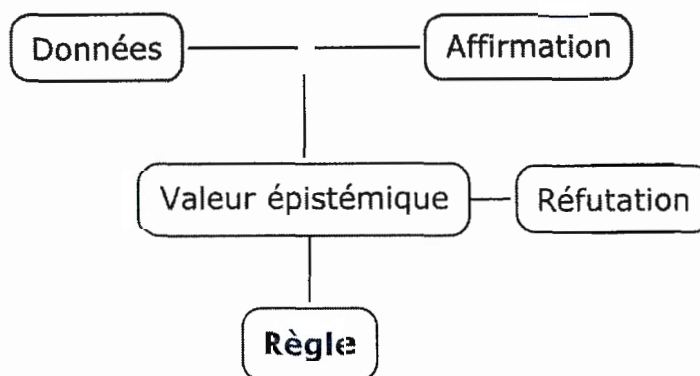


Figure 4. 9 Le schéma d'un pas inductif

Toutefois, cette structure ne permet pas de capter l'aspect processuel du RM qui est lié à la nature générale de la règle. Il sera développé davantage en ce sens au chapitre V.

4.2.3 L'abduction

Le concept de raisonnement abductif (aussi nommé abduction, inférence abductive ou argument abductif) a été introduit par Aristote, puis repris par Peirce⁴⁰ qui l'a défini de différentes façons au cours du développement de sa théorie (Meyer, 2010; Reid, 2003; Rivera et Becker, 2007). Le fait que certains auteurs ne prennent pas en compte l'abduction, mais uniquement l'induction et la déduction, permet de comprendre pourquoi l'abduction et l'induction sont difficiles à différencier. Par exemple, Pólya (1958; 1968) propose différents schémas de raisonnement plausible dont celui qui est présenté à la figure 4.10, et qui peut clairement être lié au raisonnement abductif tel que proposé par Peirce dans ses premiers écrits, où B est le résultat, A implique B la règle et A le cas.

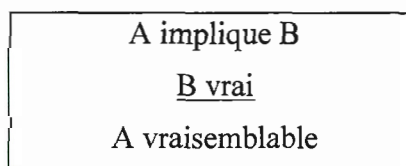


Figure 4. 10 Schéma inductif proposé par Pólya (1958)

Le raisonnement abductif joue, selon Peirce (s.d.), un rôle particulièrement important dans les découvertes et a ainsi été repris par plusieurs didacticiens travaillant sur l'apprentissage en classe de mathématiques. Tout comme l'induction, l'abduction n'est pas un type d'inférence dont la conclusion est nécessairement inférée des prémisses. Il ne peut jouer que sur la valeur épistémique « probable » de la conclusion.

⁴⁰ Peirce a aussi nommé l'abduction hypothèse et rétroduction.

Dans les écrits de Peirce, l'argument abductif infère des données à partir d'une affirmation et d'une règle. La figure 4.11 présente un exemple de schéma d'un pas abductif tiré de Reid (2003). Dans le schéma, la conclusion du raisonnement est en gras. Cet exemple est tiré d'un épisode où des élèves ont à prouver le théorème de Pythagore. Ils ont déjà déterminé que ABCD est un losange, ce qui sert de donnée au pas. Ils doivent montrer qu'une figure géométrique est un carré (résultats) sachant que celle-ci est un losange. Toutefois, pour réussir à valider le résultat voulu, il leur faut d'autres données. L'épisode suivant a alors lieu :

1 Professeur : « C'est un losange. » C'est une condition suffisante pour avoir un losange, on n'a pas besoin d'avoir autre chose... Alors ce n'est pas ce que je vous avais demandé de démontrer, je vous avais demandé de démontrer que c'était un...

2 Élève : Carré

3 Professeur : Carré. Alors, à quelle condition un carré, eh un losange est-il un carré?

4 Élèves : S'il a, s'il a un angle droit

5 Professeur : S'il a...?

6 Élèves : Un angle droit.

7 Professeur : Un angle droit, ça suffit (Reid, 2003, p. 10)

L'élève abduit de la règle suivante « si un losange a un angle droit alors c'est un carré » que la figure en question doit avoir un angle droit. La conclusion du raisonnement abductif est une donnée qui permettra, si la donnée est confirmée par d'autres pas de RM, de déduire que la figure est bien un carré. Ici, le résultat et la règle sont les prémisses.

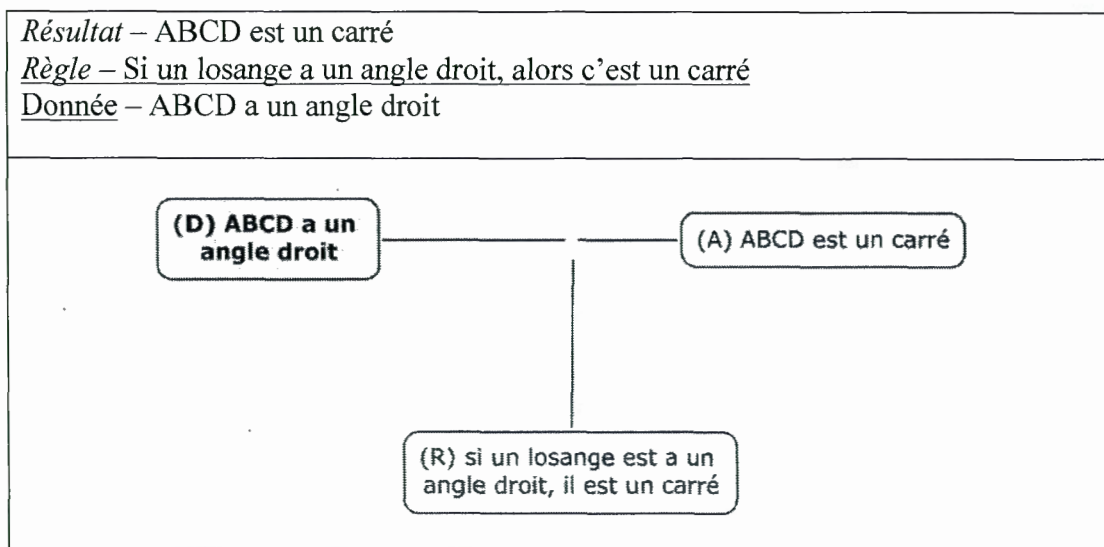


Figure 4. 11 Un exemple d'abduction tiré de Reid (2003)

Toujours en termes de structure, Meyer (2010), Pedemonte (2002) et Reid (2003) parlent aussi d'abduction créative, concept repris de Eco (1983, dans Meyer, 2010), où la règle est créée dans le but d'inférer les données, et la règle à partir uniquement du résultat. Il y a un élément créateur important. Ce type d'abduction concorde avec une définition ultérieure que Peirce fait de l'abduction : « the process of forming an explanatory hypothesis. It is the only logical operation which introduces any new idea » (s.d., V5.171). Il y a donc un résultat devant nous et on cherche une explication plausible. Il ne s'agit pas de chercher une règle en observant des données et un résultat par induction, mais bien de rechercher une explication, une règle et des données qui expliqueraient un résultat. Dans un pas d'abduction créative, les données et la règle sont inférées.

Ainsi, en s'appuyant sur les propos suivants:

[t]he great difference between induction and hypothesis [abduction] is, that the former infers the existence of phenomena such as we have observed in cases which are similar, while hypothesis supposes something of a different kind from what we have directly observed, and frequently something which it would be impossible for us to observe directly (Peirce, s.d., V2-640).

il est possible de différencier le pas inductif et le pas abductif de par la nature des éléments inférés. Le pas inductif permet de générer une règle à partir de données et d'un résultat. Le pas abductif permet de générer des données ou des données et une règle à partir d'un résultat (voir figure 4.12).

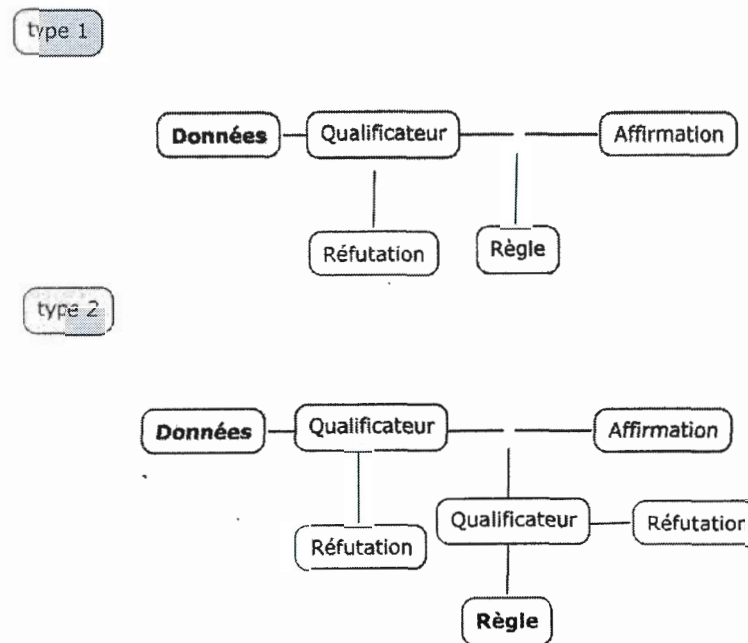


Figure 4. 12 Deux schémas de pas abductif

4.2.4 Le cas de l'analogie

Un quatrième type de raisonnement différencié de la déduction et de l'induction est l'analogie (aussi nommé raisonnement analogique). Toutefois, peu d'écrits en

didactique des mathématiques l'abordent. Selon Pólya (1958) et Oléron (1977), le raisonnement par analogie n'est pas une notion clairement définie. Ces auteurs parlent même d'un statut ambigu. Ce statut viendrait de la surutilisation du terme analogie par les pseudos ou les paras sciences qui font analogie à partir de ressemblances que certains qualifieraient de superficielles, par exemple, entre les astres et le corps humain. Le mot analogie vient du terme grec *analogia* qui désigne une proportion mathématique du type : A est à B ce que C est à D (English, 2004). Donc au sens large, un raisonnement par analogie s'appuie sur des ressemblances entre les objets considérés. Pour Sfard (1997), l'analogie demande la comparaison entre deux concepts déjà construits, un étant peut-être davantage familier que l'autre. En ce sens, l'analogie permet une extension du discours et non un changement de discours.

Comme le souligne Reid (2010), l'analogie est différente des pas élémentaires de raisonnement, car elle comporte plus d'un pas. Reid (2010, p.84) l'exprime ainsi :

$$\begin{aligned}(A \approx C) \wedge A \Rightarrow C \\ (A \approx C) \wedge (B \approx D) \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow (C \rightarrow D)\end{aligned}$$

Le premier pas consiste à faire le lien entre une donnée source (A) et une donnée cible (C) et d'en inférer que, ce qui est vrai pour A est vraisemblable pour C. Le pas est composé de deux prémisses et d'une conclusion. Si l'on reforme en termes du modèle unifié, les deux prémisses joueraient le rôle de données : A a une certaine propriété; A et C sont similaires. Une règle implicite permet alors d'inférer que C possède (probablement) cette propriété. Cette règle pourrait être formulée comme suit : Si A est similaire à C, C possède (probablement) les mêmes propriétés que A. Le second pas fait le lien entre les données sources et une relation ainsi que des données cibles en inférant que la relation tiendrait dans le second cas. Si l'on reformule en termes du modèle unifié, il y a trois données : A est similaire à C, B est

similaire à D et A implique B. Le premier pas sert alors de règle pour en arriver au résultat que C implique D (probablement).

Pólya et Peirce, quoique ne s'attardant que brièvement à l'analogie dans leurs écrits, proposent chacun des structures du raisonnement analogiques. La structure proposée par Pólya est la suivante : H implique A et H qui implique B, B est vrai donc A est vraisemblable. Selon Pólya, les deux premières prémisses peuvent être changé par A est analogue à B et se réécrire comme suit : A est analogue à B, B est vrai donc A vraisemblable. Toutefois, comme le souligne Pólya, cette structure nécessite des similarités entre A et B. On pourrait donc ajouter un pas préalable qui infère ces similitudes. La structure serait alors composée de deux pas, comme il est proposé par Reid (2010).

Peirce propose deux structures du raisonnement par analogie composées de deux pas élémentaires. Dans le premier cas, un pas inductif est suivi d'un pas déductif. La figure 4.13 illustre un raisonnement par analogie, selon le premier cas de figure de Peirce (s.d.), pour le problème qui demande de trouver le nombre de points constituant le n^{e} nombre triangulaire. Le premier pas inductif consiste à faire le lien entre la donnée nombre triangulaire et l'affirmation qu'il peut être disposé en triangle. Il permet de générer une règle plausible (R : le n -ième nombre triangulaire suggère une similarité avec la mesure de l'aire qui le représente) à propos du nombre triangulaire et de l'aire du triangle qui le représente. Le second pas déductif déduit la formule pour calculer le n^{e} nombre triangulaire à partir de la formule d'aire du triangle (données) et de la règle inférée au pas précédent. Ainsi, la conclusion (probable) du premier pas sert de règle dans le second.

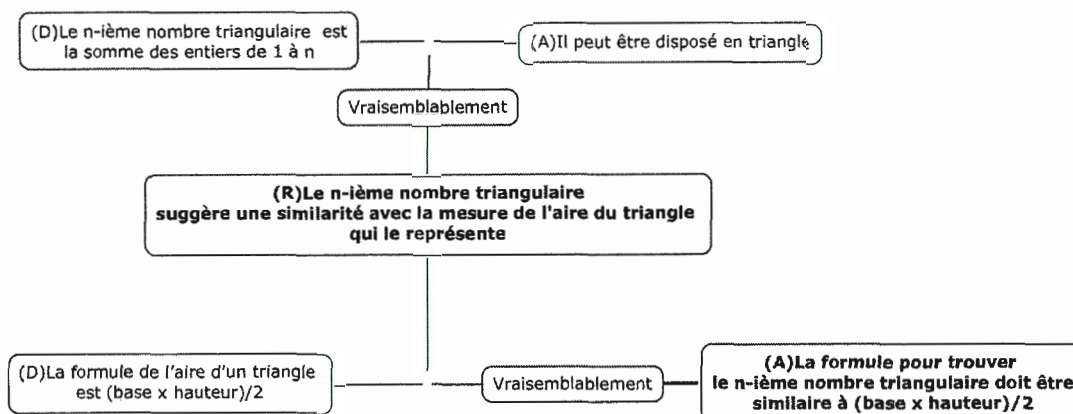


Figure 4.13 Un exemple de raisonnement par analogie

La structure analogique présentée à la figure 4.13, quoique composée d'un pas déductif, ne peut prétendre à une valeur épistémique vraie. Elle permet seulement à la conclusion finale d'être vraisemblable.

Dans le second cas, la structure analogique proposée par Peirce (s.d.) est composée d'un pas abductif, suivi d'un pas déductif. On pourrait lier cette structure à la résolution de problème à l'aide d'un problème analogue tel que discuté par English (1997). En effet, le raisonneur doit résoudre un problème, il a un processus de résolution qui a nécessité l'utilisation de certaines propriétés et un résultat à sa disposition. La comparaison des deux problèmes peut suggérer la recherche de certaines données qui viendraient expliquer l'affirmation. Prenons le cas du problème déjà exposé à la figure 4.13. Il a été inféré que la formule sera vraisemblablement similaire à la formule d'aire d'un triangle (affirmation) puisque le nombre triangulaire suggère une similarité avec la mesure de l'aire du triangle qui le représente (règle). Si l'on continue le raisonnement présenté à la figure 4.13 à l'aide d'un second raisonnement par analogie, le raisonneur doit chercher l'équivalent de la base et de la hauteur pour le nombre triangulaire (les données). On peut associer ce pas à un pas

abductif. Quelles données lui permettront de construire sa formule? Ce pas de raisonnement établit les données nécessaires à résoudre le problème. En effet, le rang du nombre triangulaire peut être associé à la hauteur et le rang plus un ($n + 1$) à la base. Ce pas suggère quelles données sont requises, données qui seront inférées à partir d'un nouvel enchaînement de pas de raisonnement. Il sera possible à l'aide d'un nouveau pas déductif d'en arriver à la formule $n(n+1)/2$. Ces deux pas forment un raisonnement par analogie.

Ainsi, le raisonnement par analogie n'est pas une forme élémentaire de raisonnement, mais il est tout de même important en mathématiques et dans l'apprentissage des mathématiques. D'un point de vue structurel, il semble composé d'au moins deux pas qui peuvent eux être de différents types (inductif, déductif ou abductif). Par ailleurs, l'aspect structurel ne met pas en lumière la recherche de similitude associée au raisonnement par analogie. Le raisonnement par analogie est souvent comparé à la déduction et à l'induction. Par exemple, le PFEQ (2007) les met sur un même pied en tant que raisonnements généraux. Toutefois, le raisonnement par analogie apparaît ici comme différent des trois pas élémentaires puisqu'il ne peut être représenté par un seul pas. Il est alors nécessaire de prendre en compte d'autres éléments présents dans la littérature en didactique des mathématiques afin de le caractériser. Il y a davantage que la structure.

4.3 Conclusion

L'aspect structurel permet d'analyser localement chacun des pas élémentaires de raisonnement, mais aussi globalement, l'enchaînement de plusieurs pas élémentaires de raisonnement. D'un point de vue commognitif, il met en lumière les règles de construction du discours mathématique ainsi que ses diverses composantes, les éléments qui le constituent. Il met en évidence la nature de la conclusion du pas et la

valeur épistémique qui lui est attachée. La validité du raisonnement n'est pas jugée en fonction de cette structure, mais bien en fonction de la valeur épistémique attachée à la conclusion d'un ou de plusieurs pas. Ainsi, le pas déductif permet d'inférer une affirmation à partir de données et d'une règle. Le pas inductif permet d'inférer une règle à partir de données et d'une affirmation. Le pas abductif permet, soit d'inférer des données à partir d'une affirmation et d'une règle, soit d'inférer des données et une règle qui a le potentiel d'expliquer l'affirmation.

Le raisonnement par analogie est particulier puisqu'il ne peut être caractérisé par un seul pas de RM. Il ne prend forme que dans un enchaînement de pas. Cet enchaînement peut être composé d'un pas inductif et d'un pas déductif, ou encore, d'un pas abductif ou d'un pas déductif. Toutefois, un élément lié au raisonnement par analogie qui n'est pas pris en charge par l'aspect structurel est la recherche de similitudes et de différences entre l'objet mathématique source et l'objet mathématique cible. L'aspect processuel est alors nécessaire pour mieux caractériser le raisonnement par analogie en tant que RM.

En résolution de problème, plusieurs pas de différentes structures s'enchaînent. Les règles qui régissent le discours mathématique demandent toutefois à ce que le discours soit éventuellement structuré en pas déductif. C'est l'unique structure qui permet la théorisation du discours mathématique. Toutefois, limiter le RM au raisonnement déductif, c'est diminuer la portée du RM dans l'activité mathématique à un processus qui infère à propos d'affirmations déjà générées, à la théorisation du discours mathématique. Sans nier l'importance de la systématisation en mathématique, le présent chapitre met de l'avant l'apport des autres structures de raisonnement dans l'activité mathématique.

Par ailleurs, la structure n'est pas suffisante pour qualifier le RM. Déjà, la synthèse de la littérature relative à l'aspect structurel trace des liens entre le raisonnement inductif, et potentiellement, la généralisation. Toutefois, le raisonnement inductif en tant que structure ne caractérise pas à lui seul le processus « généraliser ». De même, dans la littérature, le raisonnement abductif est lié à l'investigation, et à la découverte. Toutefois, sa structure ne peut à elle seule caractériser ces derniers. Enfin, même si le raisonnement déductif semble suffisamment développé par l'aspect structurel, étant donné qu'historiquement il est défini comme l'idéal de raisonnement, cette structure ne peut caractériser à elle seule les processus de validation. En fait, comme le soulignent Mariotti, Knipping, Küchemann et Nordstrom (2005), une analyse des raisonnements à partir de la structure ne permet pas de mettre au jour les différences culturelles entre différentes communautés. Le discours mathématique développé à l'école est culturellement situé. Il est déjà possible de voir, à la lecture du chapitre IV, que la structure ne suffit pas à caractériser le RM en tant que discours. Une perspective commognitive appelle à caractériser le RM à l'aide d'un second aspect, l'aspect processuel.

Tout en étant nécessaire à un modèle de RM pour l'enseignement primaire et secondaire, l'aspect structurel n'est pas suffisant pour bien comprendre ce qu'est le RM dans les mathématiques scolaires. Le prochain chapitre tentera donc de mettre en lumière l'aspect processuel du RM et comment cet aspect vient éclairer le concept de RM pour l'enseignement primaire et secondaire.

CHAPITRE V

LES PROCESSUS DE RM

Au chapitre III, j'ai mis en évidence deux aspects du RM complémentaire à savoir l'aspect structurel et l'aspect processuel. L'aspect structurel a été développé au chapitre IV. Il met en évidence les différents éléments constitutifs d'un pas de raisonnement et les relations qui les unissent. Toutefois, cet aspect est insuffisant à lui seul pour caractériser le RM. Le présent chapitre est consacré au développement de l'aspect processuel du RM. Déjà lors de la problématique, un panorama des processus présents dans la littérature portant sur le RM a été esquissé et a mis en évidence le flou conceptuel les entourant. On note la présence de ces processus dans différents documents institutionnels (PFEQ, PISA, OCDE, NCTM), dans quelques définitions du RM et aussi dans certains textes où aucune définition, à proprement parler, du RM n'est fournie.

Afin de structurer l'aspect processuel du raisonnement, ce chapitre est constitué de plusieurs sections. Dans la première section, je définirai ce que j'entends par processus commognitif en général et par processus de RM en particulier. Si l'on veut élaborer et structurer l'aspect processuel du raisonnement, il est nécessaire d'avoir une définition opérationnelle du concept de processus de RM. Cette définition aidera à traiter, retenir et qualifier les processus afin de les lier (ou non) au concept de RM. Dans la deuxième section, je dresserai un canevas des différents processus que l'on

retrouve dans la littérature qui traite du RM. Le corpus présenté à l'annexe A a été analysé pour cette section.

Ensuite, chacun des processus relevés dans la littérature sera analysé en tentant de caractériser ceux qui sont des RM d'un point de vue commognitif. Pour ce faire, le corpus a été élargi par différents textes qui portent sur ces processus sans nécessairement mentionner explicitement le RM. Les caractéristiques des processus de RM seront mises en évidence.

5.1 Le concept de processus

Déjà, depuis la problématique, le terme processus a été introduit sans qu'il ne soit défini. Implicitement, l'usage que l'on fait de ce terme en langage « familier » était considéré comme suffisant pour comprendre l'argumentation présentée. Toutefois, il prend ici une place importante qui nécessite que l'on s'y penche sérieusement, premièrement, parce que l'usage « familier » est relativement flou, et deuxièmement, parce que dans le milieu de la recherche ce terme peut avoir des significations non isomorphes. Il faut noter que tout comme pour le concept de raisonnement, le terme processus est utilisé sans nécessairement qu'il soit défini par les auteurs qui l'emploient. Je cherche à le rendre opérationnel, c'est-à-dire à fournir une définition qui me permettra de discriminer ce qui est un processus de ce qui ne l'est pas, mais aussi de discriminer les processus potentiels de RM d'autres processus. Opérationnaliser le terme processus permettra d'éclairer l'analyse des processus de RM dans la littérature. Par l'exercice qui suit, je cherche à mettre en évidence les différentes caractéristiques que j'accorde à ce mot. Notons dès maintenant que, comme le RM a été situé dans une perspective commognitive, les processus qui sont ici d'intérêt sont des processus commognitifs. L'argumentaire qui suit pose donc les jalons de ce qui est entendu par processus commognitifs.

Dans le langage courant, le terme processus est associé, selon le Petit Robert (2009), à un « [E]nsemble de phénomènes se déroulant dans le même ordre; façon de procéder » (p. 2030) ou encore à une « [S]uite ordonnée d'opérations aboutissant à un résultat » (p. 2030), ce qui est associé, dans ce même dictionnaire, à une procédure. En éducation, le terme processus n'est pas toujours associé à une procédure. En fait, Legendre (2005) l'en distingue en spécifiant que le terme *processus* est un ensemble d'actions orientées vers un but et qui, contrairement à la procédure, ne se succèdent pas toujours de la même manière. Le processus n'est pas linéaire et ni prédéfini comme la procédure; il n'est pas fixe. Le sens de processus n'est pas spécifique à l'action humaine, l'intérêt est ici de définir le terme processus comme un ensemble d'actions effectuées par un être humain (ou, à tout le moins, sous son contrôle).

Dans le Grand Dictionnaire Terminologique [GDT] (GDT, 2012), le processus est un « [E]nsemble de fonctions plus ou moins coordonnées et régulières et aboutissant à un phénomène qui en est le produit ». Le terme processus y est aussi fortement associé à la psychologie où l'on parle de processus mentaux et cérébraux. Le processus (mental) est alors défini comme une

[F]onction complexe multiple regroupant l'ensemble des activités mentales (pensée, perception, action, volonté, mémorisation, rappel, apprentissage) impliquées dans la relation de l'être humain avec son environnement et qui lui permettent d'acquérir et de manipuler des connaissances (associations, rétroaction, traitement de l'information, résolution de problèmes, prise de décision, etc.) (GDT, 2012).

Il dépend des structures du système nerveux central. Tout se passe alors dans le cerveau de l'humain et il est possible d'inférer ce qui s'y passe à partir de ce que l'acteur extériorise. On remarquera l'utilisation du terme « fonction » qui, selon le dictionnaire Petit Robert 2009, fait référence à l'action.

Vygotsky (1978) a développé une théorie pour étudier le développement des processus psychologiques et donc par rapport à l'être humain. Pour lui, l'aspect important du processus est qu'il n'est ni stable ni fixe. Il est non stable dans le sens qu'il est en constant développement. L'analyse du processus, selon Vygotsky (1978), nécessite donc des outils pour documenter l'aspect dynamique du processus, son historicité. Ce sont ces aspects du RM que je cherche à caractériser par l'introduction du terme « processus » à savoir que le raisonnement n'est ni stable ni fixe.

Pour Sfard (2008), un processus cognitif « may thus be defined as individualized forms of interpersonal communication, whereas communication itself is described as a collectively performed rule-driven activity that mediates and coordinates other activities of actors. » (Sfard, 2008, p. 92). Le processus est contraint par des règles, mais il peut évoluer (tout comme les règles qui le sous-tendent); il y a création de nouvelles actions. Les actions et les réactions sont fonction de l'agent qui les accomplit. Il y a un contexte à prendre en compte. Il est possible de lui attribuer des critères qui nous permettent de dire qu'il s'agit bien d'un processus tout en tenant compte de son aspect dynamique.

Par ailleurs, la définition de Sfard parle de processus cognitif et je tente, pour ma part, de caractériser ce qu'est un processus commognitif et non un processus cognitif. En effet, contrairement au processus cognitif, qui est vu comme un processus individualisé de communication interpersonnelle, la position prise ici est que le RM n'est pas qu'individuel. Il s'agit d'un processus commognitif. Rappelons que le concept de commognition, introduit précédemment, regroupe des idées liées à la communication et à la cognition. Il peut être associé aussi bien à des processus individualisés qu'interpersonnels. Ainsi, l'élément important à retenir de cette définition est qu'un processus est, du point de vue de la théorie commognitive, une activité de communication individualisée et interpersonnelle.

Vygotsky (1978) souligne aussi la double nature du processus. Pour lui, les processus psychologiques sont une combinaison de deux types d'activités⁴¹ de natures différentes à savoir des activités internes à la personne (intrapersonnelles) et des activités externes à la personne (interpersonnelles)⁴². Par ailleurs, malgré la similarité de ces conceptions, trois éléments de disparité sont ici à souligner. Premièrement, Vygotsky ne relie pas processus cognitif et processus de communication comme le fait Sfard. Pour lui, les fonctions mentales de haut niveau (higher functions) se développent à deux niveaux, sur le plan interpersonnel (interaction avec d'autres) puis sur le plan intrapersonnel (cognitif).

Deuxièmement, ces deux développements sont nécessaires à l'apprentissage, ils ne sont pas l'apprentissage. Ceci n'est pas le cas du point de vue commognitif où l'apprentissage est le développement du discours, interpersonnel comme individuel.

Troisièmement, il parle d'activités internes et externes, tandis que Sfard parle d'activités individualisées et interpersonnelles. Le choix de termes différents chez Sfard⁴³, et que je reprends ici, n'est pas sans importance en ce sens que ce choix traduit l'effort de sortir de la dichotomie interne/externe à la personne, interne étant inobservable par définition (si l'on exclut l'imagerie cérébrale). En parlant de version

⁴¹ Prenons notes qu'« activité » et « processus » semblent utilisés par Vygotsky et Sfard comme quasi-synonymes.

⁴² On se souviendra que l'aspect social est très important pour Vygotsky.

⁴³ « The term individualization refers to the process of gradual overtaking of the roles of others, accompanied by an enhancement of one's agency over the given activity. It may be viewed as a version of what Vygotsky called internalization and what Bakhtin and Leont'ev renamed appropriation so as to capture both the active nature and the bidirectionality of the process (Cazden, 2001, p. 76). In my work I have opted for the term individualization as one that is free of objectifying, acquisitionist undertones of both internalization and appropriation and also implies the inevitability of personal variations » (Sfard, 2007, p. 569).

individualisée et interpersonnelle du même processus, on opérationnalise la définition du RM pour qu'elle soit utile à un chercheur en didactique des mathématiques et à un enseignant. En effet, pour sortir de la dichotomie internalisé/extériorisé présente chez plusieurs auteurs, par exemple chez Balacheff (1988), Sfard (2008) a orienté son discours autour des aspects sociaux et individuels. De situer les processus sur les plans individuel et social est en cohérence avec le fait de définir les processus commognitifs comme une activité de communication avec d'autres ou avec soi-même. Sans nier l'existence de processus internes et même cérébraux, c'est l'aspect accessible à l'enseignant qui m'intéresse ici pour conceptualiser le raisonnement. C'est le seul qui est accessible à l'enseignant dans le feu de l'action. C'est le seul sur lequel l'enseignant peut agir directement.

Vygotsky insiste sur la nature non stable du processus, mais Sfard sur sa nature régie par des règles. Ceci pourrait sembler incohérent, mais chacun ne fait pas référence au même concept. Lorsque je reprends la caractéristique d'instabilité de Vygotsky, c'est pour mettre en lumière que les processus que je cherche à caractériser sont évolutifs et ne peuvent être traités comme un produit fini. Par ailleurs, ce que Sfard met de l'avant par l'aspect régulé du processus est que, tout en étant variable d'un moment à l'autre, le processus est contraint par des règles discursives de niveau objet (relation entre les objets du discours)⁴⁴ et métadiscursives, c'est-à-dire des régularités dans l'activité des raisonneurs⁴⁵. Contrairement aux règles discursives, les règles

⁴⁴ Par exemple, dans le théorème de l'angle au centre, l'angle inscrit est un exemple de règle discursive de niveau objet.

⁴⁵ Par exemple, on soustrait toujours un nombre plus petit d'un plus gros serait une règle métadiscursive que l'on pourrait observer dans plusieurs classes du primaire et même du secondaire. Cette règle, quoique métadiscursive, est parfois explicitée sous la forme d'une injonction (tu ne peux pas soustraire un plus grand d'un plus petit) et sera modifiée lors de l'introduction des entiers relatifs. Elle pourrait devenir une règle discursive en algèbre abstraite lorsque l'on prouve que la soustraction n'est pas une loi de composition interne dans $\mathbb{IN}$.

métadiscursives sont rarement explicitées par les acteurs, mais plutôt le fruit d'une observation des acteurs. Ces dernières, tout en conférant une certaine contingence (et non une nécessité) aux choix d'actions dans une communication donnée, laissent à cette communication toute la flexibilité nécessaire à son aboutissement. Le processus, comme il est le fruit d'individus ayant libre arbitre, évolue selon la rétroaction entre le social et l'individuel à tout moment.

Lorsque le terme processus sera utilisé concernant l'activité mathématique d'individus, il fera maintenant référence à la définition suivante :

Un processus commognitif est une activité commognitive (communication individualisée ou interpersonnelle) régie par un ensemble de règles.

La communication fait référence à ce qui a déjà été écrit au chapitre méthodologique et qui définit ce terme dans une perspective commognitive à savoir : une activité dans laquelle une action A d'un individu est suivie d'une action B d'un autre individu (ou du même), telles que les actions font partie d'un répertoire d'action de communication, et les réactions font partie d'un répertoire d'actions qui sont liées aux premières. Par ailleurs, il faut souligner de nouveau que les actions de communication ne déterminent pas une réaction. Les actions et réactions sont régies par des règles, ces règles ne dictent pas une unique réaction, mais un ensemble de réactions (Sfard, 2008). Il y a donc ici des variations possibles.

5.1.1 Le concept de processus commognitif de RM

Nous avons jusqu'à maintenant défini le concept de processus commognitif au sens large. Par ailleurs, l'intérêt est ici de définir ce qu'est un processus commognitif de RM. Sfard (2008) parle du raisonnement comme d'un processus de nature métadiscursive : « Because reasoning can be described as the art of systematic

derivation of utterances from other utterances, its metadiscursive nature is implied in its very definition » (Sfard, 2008, p. 110). Pour bien comprendre ce qu'elle entend par métadiscursif, le concept de discours devient central et nécessite d'être défini.

Comme présenté dans le chapitre méthodologique, le discours est un type particulier de communication qui se distingue par son répertoire d'actions admissibles et la façon dont ces actions sont associées à des réactions. Un discours se caractérise par son vocabulaire, ses médiateurs visuels, ses routines et ses narrations⁴⁶ approuvées. Un discours peut porter sur des objets bien précis, par exemple les nombres naturels. Dans ce cas, Sfard (2008) parle de discours de niveau-objet. Il peut aussi porter sur un discours⁴⁷, par exemple, un discours sur des objets arithmétiques. Sfard (2008) le nomme alors métadiscours. Lorsque le discours porte sur des relations entre des objets, nous sommes déjà au niveau méta.

Ainsi, Sfard (1997, 2008) considère le raisonnement comme un métadiscours, c'est-à-dire un processus métadiscursif, puisque par définition, il (le raisonnement) explore des énoncés d'un discours donné pour en dériver de nouveaux énoncés. Par exemple, si je cherche à inférer un énoncé à propos des nombres divisibles par 4, je dois nécessairement aller au-delà des multiples de 4 et chercher des éléments communs à ces multiples afin d'en inférer un nouvel énoncé. De même, si je cherche ensuite à

⁴⁶ Une narration fait référence à un récit et à sa structure. En mathématique, on peut associer la preuve à une narration, c'est-à-dire que les preuves sont construites à partir de certains énoncés et ont une structure qui leur est propre. Seules les preuves s'appuyant sur certains énoncés ET ayant une certaine structure sont approuvées par la communauté mathématique.

⁴⁷ Le discours sur lequel porte le métadiscours peut porter sur des objets ou sur d'autres discours. C'est ce que Sfard (2008) appelle la récursivité de la cognition humaine, c'est-à-dire que tout discours est multi-niveau et qu'il peut lui-même mener à d'autres niveaux de discours.

valider cet énoncé, je dois aller au-delà des éléments communs et chercher des éléments qui me permettront d'endosser l'énoncé.

Même si l'énoncé généré par ce processus peut porter sur un objet mathématique⁴⁸, le processus lui-même nécessite une prise de recul par rapport aux différents objets impliqués, il doit aller au-delà de l'énoncé pour inférer une information additionnelle pour la personne qui raisonne ou son interlocuteur.

Les processus de raisonnement sont alors des processus commognitifs qui sont métadiscursifs, c'est-à-dire, qui dérivent des énoncés à partir d'autres énoncés par l'exploration des relations qui les unissent.

Soulignons que cette définition met l'accent sur l'aspect inférentiel du RM, tel que discuté au troisième chapitre. Toutefois, cette dernière ne précise en rien sur quoi portent les énoncés ce qui ne permet pas de différencier les processus de raisonnement des processus de RM. On voit ici apparaître l'importance de la nature des énoncés en question. Les énoncés impliqués dans ces processus doivent porter sur des objets mathématiques ou des relations mathématiques. La définition suivante est donc adoptée :

Les processus de RM sont des processus commognitifs qui sont métadiscursifs, c'est-à-dire, dérivent des énoncés à propos d'objets ou de relations mathématiques par l'exploration des relations qui les unissent.

Les objets mathématiques sont des objets particuliers. Tel que décrit au chapitre III, les objets mathématiques sont abstraits, au sens où ils ne font pas référence à un objet concret. Ils sont définis par Sfard comme un arbre de réalisations et un signifiant. La

⁴⁸ Voir section 3.1 du chapitre III pour une définition d'objet mathématique.

nature réursive du discours mathématique fait qu'une réalisation peut aussi être un signifiant.

5.2 Les différents processus de RM présents dans la littérature

À partir de la définition de processus de RM présentée à la section précédente, la littérature en didactique des mathématiques, recensée dans le corpus présenté à l'annexe A, a été analysée afin d'en ressortir un ensemble de processus associé au RM. Ainsi, tout terme pouvant être défini en termes d'activités inférentielles sera dans un premier temps répertorié. Ayant défini les processus commognitifs comme une activité de communication (individuelle ou interpersonnelle), la communication implique donc des actions particulières. En effet, les actions de communication sont, selon Sfard (2008), des actions discursives à propos des objets ou des relations entre ces objets. L'analyse s'est alors principalement attardée aux verbes d'action présentés dans les textes sur le RM ainsi qu'aux éléments praxiques (EP)⁴⁹ des textes. Les noms et les adjectifs qui y sont associés⁵⁰, qui peuvent être associés à un processus « à propos » d'objets mathématiques ou de relations entre ces objets, ont donc aussi été pris en compte. Par exemple, pour le verbe « valider », on aura aussi retenu aux fins d'analyse des énoncés de types faire une *validation*, utiliser aux fins de *validation*, créer un argument *valide*. Je spécifie immédiatement que des différences sémantiques peuvent exister entre ces expressions et que mes écrits en feront part. Ces verbes (ou catégories) seront pris comme étant des processus dans le but de les répertorier.

⁴⁹ On se souviendra que, selon Legendre (2005), un texte a quatre types d'éléments (EF, EA, EP, EE) qui permet d'analyser son contenu.

⁵⁰ L'idée ici est que certains auteurs utilisent les noms associés au verbe d'action. Toutefois, l'idée d'action doit être clairement présente dans l'unité choisie.

Ensuite, les processus qui peuvent être qualifiés de processus de RM seront retenus aux fins du modèle. Ainsi, il sera discuté en quoi, s'il y a lieu, chacun des termes est métadiscursif et en quoi, s'il y a lieu, il explore la relation entre différents énoncés d'un discours. Par ailleurs, rappelons que l'objectif de ce chapitre est d'élaborer et de structurer l'aspect processuel et non de faire une liste exhaustive des processus de RM. L'idée est donc de répertorier les processus dans la littérature recensée dans le but de dégager les différentes caractéristiques de chacun. Je débute donc par exposer cette synthèse.

5.2.1 Les processus répertoriés dans la littérature qui traitent du RM en didactique des mathématiques.

À la lumière de la définition de processus commognitif, l'analyse de l'annexe A a permis de répertorier 21 processus potentiels de RM. Les prochaines sections présentent ces processus sans entrer en profondeur dans leur analyse, ce qui sera fait plus loin. Lorsqu'un processus est retenu pour analyse ultérieure, il apparaît en italique dans le texte.

Un premier élément qui permet de débiter à répertorier les processus est le fait que plusieurs auteurs caractérisent le RM en deux grandes classes de processus. Par exemple, le modèle de G. J. Stylianides (2005) définit le RM du point de vue des activités de généralisation et d'appui d'une affirmation. Brodie (2010) fait de même en ressortant deux processus clés pour le RM à savoir *justifier* et *généraliser*. Le modèle de G. J. Stylianides associe la généralisation à l'*identification* de régularités et l'émission de *conjectures*. L'appui d'une affirmation est, pour sa part, associé à fournir une *preuve* et fournir un *argument* (autre qu'une preuve), ce que d'autres auteurs, dont Brodie (2010) et Ball et Bass (2003), appellent plutôt *justifier*. Les termes *généraliser*, *identifier une régularité*, *conjecturer*, *argumenter*, *prouver* et *justifier* font partie des processus analysés.

On peut remarquer que les caractérisations de G. J. Stylianides (2005) et de Brodie (2010) associent deux processus fondamentaux au RM, à savoir *généraliser* et *justifier*. Ball et Bass (2003) qualifie aussi le RM selon deux processus, à savoir les raisonnements *d'investigation* et les raisonnements de *justification*. Les premiers sont liés à la *découverte* et l'*exploration* et les seconds à la *justification* et la *preuve*. Les termes *investiguer*, *découvrir* et *explorer* sont aussi ajoutés à la liste des processus analysés.

Les propos de G. J. Stylianides sont également similaires à ceux de Mason (1994) qui définit le RM comme un processus dynamique de manipulation d'idées qui comprend quatre, et non deux, activités : *exemplifier*, *généraliser*, *conjecturer* et *convaincre*. Les termes « exemplifier », « généraliser » et « conjecturer » se retrouvent dans plusieurs textes du corpus A. « Exemplifier » consiste, selon Mason, à étudier un problème à l'aide d'un certain nombre d'exemples. Ces exemples peuvent donner accès à la nature du problème. « Généraliser », « c'est tirer des conclusions valables pour tous les cas à partir de quelques exemples » (Mason, 1994, p. 7). Pedemonte (2002), tout comme Pólya (1968), donne un rôle important à la généralisation dans le processus de RM⁵¹. Mason associe le processus de conjecturer à un processus cyclique qui passe par les phases suivantes : exprimer la conjecture, vérifier la conjecture, essayer de réfuter la conjecture, trouver pourquoi elle est vraie ou la modifier. Enfin, le dernier processus que Mason relie explicitement au RM est « convaincre », qui se traduit par se convaincre soi-même, un ami ou un ennemi. Il appelle aussi ce processus « démontrer ». Le terme « démontrer » sera retenu plutôt que « convaincre », car le premier est clairement associé à un processus de RM dans la littérature, tandis que le second est plutôt associé à une fonction du RM, tel que

⁵¹ Pedemonte (2002) traite plutôt d'argumentation, mais pour cette dernière, l'argumentation est un type de raisonnement.

discuté au chapitre III. De plus, « démontrer » est très présent dans les textes francophones du corpus A. Les termes « exemplifier » et « démontrer » sont donc ajoutés à la liste de processus potentiels.

Cabassut (2005), pour sa part, ne parle que de raisonnement de *validation* en mathématiques. Tous les raisonnements traités par son modèle peuvent être, selon lui, qualifiés ainsi. Le terme « validation désignera les raisonnements qui établissent la connaissance de la vérité d'une proposition. Une validation pourra évoquer aussi bien une argumentation, une justification, une preuve ou une démonstration » (Cabassut, 2005, p. 27-28). Le processus de validation est aussi traité par Balacheff (1988) qui s'y intéresse dans le contexte de la preuve au collège (France). Pour ce dernier, le processus de validation est un raisonnement dont la finalité est de valider une proposition et éventuellement de produire une *explication*, une *preuve* ou une *démonstration* selon le cas. Plusieurs autres auteurs utilisent des termes correspondant à valider (construire une conclusion valide, validation) dont Brousseau et Gibel (2005), Peressini et Webb (1999), Jones (2000), Artzt (1999), Lithner (2008). Le sens pris ici par valider est différent de celui discuté au chapitre III. Il ne fait pas référence à une caractéristique structurée du raisonnement en soi, mais plutôt au processus qui permet d'établir qu'un énoncé est vrai. Le terme *valider* est donc ajouté à la liste.

Toujours se rapportant au RM, Pedemonte (2002) développe un cadre d'analyse de *l'argumentation* et de la démonstration chez les élèves. À l'instar de Duval (1995), elle qualifie l'argumentation et la démonstration de type de raisonnement. Ces termes ont déjà été pris en compte. Par ailleurs, elle mentionne aussi l'idée que le processus d'argumentation permet *d'abstraire* de l'information. L'importance de *l'abstraction* dans le RM apparaît aussi chez English (1997), dans son étude des raisonnements analogiques et mathématiques chez l'enfant. « Abstraire » est donc analysé.

Brodie (2010) introduit d'autres termes liés au RM en tant que processus : « other mathematical practices such as symbolizing, representing, and communicating, are key in supporting these (Ball 2003; Ball and Bass 2003; Davis and Maher 1997; Triandafillidis and Potari 2005) » (Brodie, 2010, p. 8). La communication ne sera pas analysée comme processus puisque les processus qui nous intéressent sont par définition des processus de communication. Mason (1994), tout en ne les spécifiant pas dans sa définition du RM, mentionne aussi les processus « symboliser » et « représenter » dans sa discussion sur le RM. « Symboliser » et « représenter » sont intrinsèquement liés à l'acte de communication conformément à la définition précédemment introduite du RM.

It is the discursive activity, including its continuous production of symbols, that creates the need for mathematical objects; and these are mathematical objects (or rather the object-mediated use of symbols) that, in turn, influence the discourse and push it into new directions (Sfard, 2000, p. 47).

Ils ne seront donc pas traités de façon spécifique, mais sous-tendent l'ensemble des processus de RM.

Brodie (2010) ajoute aussi « verification, explanation, systematization, discovery », souvent vue comme fonction du raisonnement (de Villiers, 1999) à la liste des processus de RM. Mason (1994) mentionne aussi le terme *vérifier* comme support au RM en contexte de résolution de problème. Un terme qui semble associé fortement à vérifier est « tester ». Il est introduit relatif au RM par Artzt (1999) et Mason (1994) comme processus lié au RM. Ces deux auteurs discutent de tester une *conjecture* dans le sens de vérifier qu'elle fonctionne sur un cas particulier. Plusieurs textes y font référence en citant le NCTM (1995; 2000), par exemple Ball et Bass (2003). Le terme « *expliquer* » est aussi introduit par Jones (2000) et Mueller (2007) pour parler d'un type de processus de RM de nature semblable à prouver. Les termes

« *vérifier/tester* », « *expliquer* » sont aussi présents dans plusieurs textes du corpus A et traités comme ce que j'associe à un processus. Ils seront analysés dans les prochaines sections.

Deux termes aussi liés au processus *conjecturer* sont « *particulariser* » et « *spécialiser* ». Pour Reid (2002), vérifier une conjecture est un raisonnement qui demande une *spécialisation* et une *comparaison*. « *Comparer* » est aussi utilisé dans 30 autres textes du corpus A. Pedemonte (2002) cite Pólya (1968) pour souligner le rôle de la particularisation dans le processus de RM. Pólya définit la *particularisation* comme le passage de la considération d'un ensemble donné à un ensemble plus petit ou même à un seul objet. Les termes « *spécialiser* », « *particulariser* » et « *comparer* » sont donc retenus aux fins d'analyse.

Un terme qui est employé par quelques auteurs (sept) est « *classifier* » (classer)⁵². Pour Mason (2001), « Classification is not just about making distinctions and describing properties, but about justifying conjectures that all possible objects with those properties have been described or otherwise captured » (p. 6-7). Jones (2000) s'est intéressé à l'activité de classification de quadrilatère pour étudier le raisonnement déductif des élèves. *Classifier* est ajouté à la liste.

Le dernier terme mis en évidence par l'analyse du corpus A est « *contrôler* ». Il est peu, sinon pas, conceptualisé dans ces textes. On retrouve une conceptualisation du contrôle chez Saboya (2010). Cette dernière met de l'avant un aspect processuel dans la composante valider et vérifier, deux termes déjà retenus aux fins d'analyse. De plus, Saboya définit le contrôle comme une activité où l'élève est en mesure de

⁵² Les textes qui font référence à ce terme sont en langue anglaise. Le terme « *classify* » se traduit en français par classer ou classifier.

prendre des décisions de façon rationnelle. Par ailleurs, Arsac (1996) souligne que « lorsqu'un raisonnement est donné en langue naturelle, il n'est pas toujours facile de contrôler directement sa conformité aux règles de la logique ». Cabassut (2005) écrit que vérifier est un contrôle de la vérité. Dans leur étude du RM, Brousseau et Gibel (2005) soulignent que pour qu'un observateur puisse qualifier l'activité de l'élève de raisonnement, il doit être en mesure de dire que l'activité est sous le contrôle de l'élève. Le mot contrôle semble donc faire référence à différentes activités reliées au RM, tantôt c'est contrôler un RM produit par d'autres, tantôt un processus lié à la valeur épistémique d'un énoncé, tantôt une aptitude de la personne qui raisonne. C'est donc dire que le RM joue un rôle important dans l'activité de contrôle. Ce dernier n'est donc pas un processus de RM au sens où l'activité de contrôle met de l'avant davantage un aspect intentionnel qu'un aspect inférentiel (voir définition donnée au chapitre III).

Jusqu'à présent, l'exploration des différents modèles et définitions ont permis de mettre en évidence une liste de 21 verbes qui sont tous liés d'une façon ou d'une autre au RM :

- | | |
|-----------------------|------------------------------|
| • Abstraire | • Explorer |
| • Argumenter | • Généraliser |
| • Classer, classifier | • Identifier une régularité |
| • Comparer | • Investiguer |
| • Conjecturer | • Justifier |
| • Découvrir | • Prouver |
| • Démontrer | • Spécialiser/particulariser |
| • Exemplifier | • Valider |
| • Expliquer | • Vérifier/tester |

Pour chacun de ces termes, j'expose les points de vue des différents auteurs qui les utilisent pour chercher à en circonscrire le sens. Premièrement, il s'avère difficile

d'introduire un processus sans l'associer à d'autres. Il est donc nécessaire d'introduire un terme avant de l'avoir circonscrit. Par ailleurs, je tente de bien distinguer chacun. Deuxièmement, je propose des définitions des processus en fonction de la définition de processus de RM précédemment développée dans une perspective commognitive. Enfin, le dernier défi est de proposer une classification simple, pertinente et cohérente des processus de RM tel que décrit dans le chapitre méthodologique concernant les qualités d'un bon modèle. Par ailleurs, il faut prendre note que chacun des processus sélectionnés se veut un processus de RM en soi qui peut aussi constituer une composante d'un RM plus complexe. On peut faire un parallèle avec le pas de RM de l'aspect structurel. Tout comme un RM peut être composé d'un ou de plusieurs pas de raisonnement, il peut être composé d'un seul ou de plusieurs processus de RM.

Chacun de ces verbes d'action est associé au RM d'une façon ou d'une autre dans la littérature. Dans un même discours, chacun peut alors avoir cours et se stimuler. Une analyse plus fine permet de mieux les caractériser et d'en rejeter certains; les raisons seront fournies plus tard. Il est difficile de justifier l'ordre de présentation des processus puisque ces derniers ont été analysés en parallèle et en plusieurs boucles successives. L'ordre qui a été choisi permet de tabler sur ce qui a été synthétisé lors de la présentation d'un premier processus à la présentation du prochain. De plus, lors de la mise en œuvre des différentes boucles de rétroaction, une classification a émergé et guidé la présentation des différents processus. Cette classification prend naissance dans deux catégorisations existantes, celle de Ball et Bass (2003) qui distinguent les processus d'investigation des processus de justification et deux de Stylianides (2005) qui distingue les processus de généralisation de ceux qui appuient une affirmation. Toutefois, elle s'en distingue afin de prendre en compte l'ensemble des termes retenus. Ce sont les caractéristiques communes à plusieurs processus qui ont guidé mon choix.

Ainsi, une première section (5.3) portera sur les processus qui semblent liés aux recherches de similitudes et de différences. Il s'agit des processus : abstraire, généraliser, conjecturer, chercher et identifier une régularité, comparer et classifier. La présentation des processus de recherche de similitudes et de différences débute avec « abstraire » qui permet de contraster un processus commognitif qui n'est pas un processus de RM. « Généraliser » est souvent lié à abstraire dans la littérature et vient naturellement par la suite. De même, G. J. Stylianides (2005), tout comme d'autres auteurs, relie « généraliser » à « conjecturer » et « identifier une régularité ». Ils seront donc présentés à la suite de « généraliser ». De même, « comparer » et « classifier » semblent liés à ces derniers processus. Pour cette section, il a été nécessaire d'ouvrir le corpus pour les termes « abstraire » et « généraliser » ; il y a donc une section supplémentaire pour ces deux termes qui couvre un corpus élargi qui n'est pas directement en lien avec le RM. Cette section fait la synthèse de textes qui traitent d'abstraire ou de généraliser en didactique des mathématiques sans les lier à RM.

Ensuite, une deuxième section (5.4) présente les processus de recherche de validation : valider, argumenter, expliquer, vérifier, justifier, prouver, démontrer. Ces derniers suivent les processus de recherche de similitudes et de différences puisque « généraliser », « conjecturer » et « identifier une régularité » sont souvent présentés comme complémentaires à ces derniers dans la définition du RM. Après, un processus qui peut être positionné comme support au RM, « exemplifier » est caractérisé. Les termes « spécialiser » et « particulariser » seront traités dans cette même section étant donné les similitudes de sens qui ont émergé de l'analyse. Enfin, une dernière section est consacrée à « découvrir », « explorer » et « investiguer » qui peuvent être définis comme quasi synonymes du RM.

5.3 Les processus de recherche de similitudes et de différences

5.3.1 Abstraire

Tel que mentionné précédemment, les liens entre l'abstraction et le raisonnement se retrouvent chez quelques auteurs. J'ai choisi de présenter ce processus en premier, non pas parce qu'il est le plus présent, mais parce que sa présentation me permet d'emblée de le rejeter comme processus de RM tout en posant quelques jalons pour les présentations subséquentes. Les prochaines pages débutent par une présentation du processus « abstraire » tel qu'il s'actualise dans la littérature en didactique des mathématiques portant sur le RM. Comme le terme « abstraire » y est peu conceptualisé, c'est-à-dire que peu d'auteurs le définissent ou discutent du sens qu'ils lui donnent, l'analyse se poursuit à l'aide d'un corpus plus large qui porte explicitement sur l'abstraction en tant que processus. À partir des différents éléments ressortis, le processus « abstraire » sera positionné en tant que processus commognitif, mais en le différenciant du RM.

5.3.1.1 Abstraction et RM

Dans les textes sur le RM, des auteurs spécifient que le processus de RM se fait sur des objets abstraits, ou encore sur des concepts abstraits : « [M]athematical reasoning requires that young children recognize how a given term (or object or symbol) represents some abstract concept that is not directly conveyed » (English, 2004, p. 16). Soulignons ici que le terme abstrait est associé à l'objet et non au processus en soi. Cet élément a une importance dans la définition de l'abstraction et, à certains moments, il est difficile de comprendre, comme dans la définition d'English (2004), si l'abstraction est un processus ou une qualité d'un objet mathématique. Le glissement entre ces deux sens de l'abstraction pourrait nuire à l'interprétation de

certains résultats. Pour Duquesne (2003), les raisonnements se construisent à partir d'éléments familiers, mais ces éléments deviennent de plus en plus indépendants de la réalité, de *plus en plus abstraits*. Encore ici, l'abstraction est associée aux objets mathématiques. Toutefois, l'idée de processus (déroulement dans le temps) est présente. On verra plus loin que cette vision de l'abstraction comme d'un processus qui rend indépendant de la réalité est remise en question par d'autres.

Pour Peressini et Webb (1999), l'abstraction est un mode de RM tout comme l'induction, la déduction, le raisonnement proportionnel et le raisonnement spatial. English (2004), pour sa part, mentionne que

despite the definitional variations in the literature, there appear to be basic processes that underlie mathematical reasoning, as Dreyfus and Eisenberg (1996) posited. Those basics include quantification, patterning, abstraction and generalisation, and representation and translation (p. 35).

Ces différents auteurs associent clairement « abstraction » et « processus ». Mentionnons toutefois qu'English utilise, pour parler du RM, des propos qui sont plutôt liés à la pensée mathématique par Dreyfus et Eisenberg (1996). Comme discuté dans la problématique, le terme « *pensée* » est parfois synonyme de raisonnement chez certains auteurs, mais le manque de théorisation ne permet pas toujours de savoir ce qu'il en était dans les textes. Dans le cas de Dreyfus et Eisenberg (1996), c'est bien l'étude de la pensée qui est au cœur de leur réflexion théorique et non le RM.

Pedemonte (2002), qui s'intéresse au processus d'argumentation en tant que RM, utilise le terme « abstraction » en association avec la généralisation pour parler de la génération d'une règle : « L'abstraction de la règle est faite à partir d'une généralisation sur un ou plusieurs cas » (p. 71). Ici, on peut penser que le terme

abstraction est utilisé au sens d'extraire tel que décrit par White (1993) : « procédé qui consiste à “extraire” une propriété commune à des objets ou des ensembles d'objets » (p. 34). White rapporte aussi que l'abstraction peut prendre un second sens, à savoir l'abstraction comme processus d'idéalisation. Il illustre ses propos à l'aide de l'idéalisation d'une droite tracée au crayon. Le processus d'abstraction permet d'en arriver à la création du concept de droite « parfaite », de droite géométrique.

Même si certains auteurs associent RM et abstraction, très peu d'éléments théoriques sont fournis quant aux sens qui sont accordés à ce concept. C'est ce que j'illustre dans la brève synthèse présentée dans les paragraphes précédents. Ceci a nécessité l'ouverture du corpus à une littérature plus large et hétéroclite. Dans ce nouveau corpus, l'abstraction est mise en relation, entre autres, avec les mathématiques ou la pensée mathématique. Je commencerai donc cette section par un tour d'horizon, puis poserai les balises qui encadreront le sens qui sera ici accordé au processus d'abstraction et de sa place dans le réseau conceptuel du RM.

5.3.1.2 L'abstraction dans la littérature en didactique des mathématiques

Comme le mentionnent Mason (1989) et Gray et Tall (2007), le terme « abstraction » et ses dérivées sont associés à un adjectif (un objet abstrait), un nom (une abstraction) et un processus (abstraire). C'est tout particulièrement le processus qui nous intéresse ici afin de déterminer si celui-ci peut être qualifié de processus de RM.

Le sens accordé au processus « abstraire » est souvent celui d'un processus de création de concepts qui ne font pas référence à un objet tangible, concret (Sfard, 2008). Par ailleurs, il est aussi associé à isoler des attributs spécifiques à un concept pour pouvoir les considérer séparément ou encore à la séparation de la réalité (Nouveau Petit Robert, 2009). Pour Mason (1989), abstraire est un processus qui met

en œuvre « a delicate shift of attention from seeing an expression as an expression of generality, to seeing the expression as an object or property » (p. 2). Pour cet auteur, l'abstraction se situe dans le passage de l'action d'exprimer une généralité, à l'action d'utiliser, de manipuler cette généralité pour construire un argument convaincant. On peut lier ce passage à la conceptualisation que fait Sfard (1991) de la double nature « processus/objet » des concepts mathématiques. Mason (1989) souligne l'importance d'ignorer certains éléments afin de mettre en évidence la forme, cette idée que la structure émerge et devient manipulable. Il signale aussi l'importance de la réification que l'on voit bien dans cette idée de manipuler la généralité précédemment développée, la généralité devient objet. Ainsi, pour Mason (1989), le processus d'abstraction est ce passage entre le fait d'exprimer un énoncé général et celui de considérer cet énoncé en tant qu'objet.

Pour Dreyfus (1991), l'abstraction est un élément central à la pensée mathématique. Il s'agit d'un processus de construction qui nécessite d'autres processus tels représenter, généraliser et synthétiser :

Abstracting is first and foremost a constructive process – the building of mental structures from mathematical structures, i.e. from properties of and relationships between mathematical objects. This process is dependent on the isolation of appropriate properties and relationships. It requires the ability to shift attention from the objects themselves to the structure of their properties and relationships (Dreyfus, 1991, p. 37).

Tout comme chez Mason, il y a un changement (plus ou moins) soudain d'attention, mais ici des objets à la structure. Dreyfus traite l'abstraction comme un processus de construction (mental) qui permet d'isoler des propriétés et des relations d'objet. Étant donné la posture commognitive adoptée dans cette thèse, cette idée de mettre de l'avant une structure semble importante et pointe vers des aspects déjà soulevés pour le RM.

Pour Gray et Tall (2007), l'abstraction en tant que résultat du processus est une image mentale. Le processus d'abstraction qui mène à cette image a comme mécanisme sous-jacent la compression d'un phénomène en un concept « pensable ». Selon ces auteurs, il existe trois types de concepts provenant de trois types de processus d'abstraction : 1) un processus qui se concentre sur les propriétés d'objets perceptibles; 2) un processus qui se concentre sur les actions faites sur les objets; 3) un processus qui se concentre sur les propriétés d'objets mentaux.

Dreyfus (1991) et Gray et Tall (2007) se situent dans une approche cognitive et s'intéressent donc à des processus mentaux. L'approche qui a été privilégiée ici est plutôt l'approche commognitive (Sfard, 2008) et nécessite donc une nouvelle conceptualisation du concept d'abstraction se rapportant au RM qui prend en compte la nature commognitive de ce processus. De plus, les visions de Gray et Tall (2007) et Dreyfus (1991) sont, selon Noss et Hoyles (1996), des visions classiques de l'abstraction, « one of decontextualisation, a process of extricating the mathematics from the problem, removing it from action to cognition » (p. 19). Ces derniers remettent cette vision en question. « Where can meaning reside in a decontextualised world? If meanings reside only within the world of real objects, then mathematical abstraction involves mapping from one world to another, meaningless, world » (p. 21).

Pour Noss et Hoyles (1996), le processus d'abstraction a une dimension épistémologique, une dimension psychologique et une dimension sociale. Lorsque la dimension sociale est prise en compte, il devient alors impossible de penser à l'abstraction en termes de développement de savoirs indépendants du contexte. De plus, la conceptualisation qu'ils ont développée de l'abstraction leur fait aussi remettre en question le développement hiérarchique des savoirs. Ainsi, pour eux, l'abstraction est plutôt un processus de « connexions » que d'ascension. Le processus

d'abstraction est un processus qui demande à l'élève de construire une multitude de liens entre différentes expériences similaires (Noss et Hoyles, 1996). Enfin, tout processus d'abstraction est situé : « We intend by the term situated abstraction to describe how learners construct mathematical ideas by drawing on the webbing of a particular setting which in turn, shapes the way the ideas are expressed » (p. 122). Déjà, la vision de Noss et Hoyles (1996) est plus compatible avec l'approche commognitive en prenant en compte l'aspect social et situé du processus. En effet, l'aspect social et situé est intrinsèque au concept de RM en ce sens qu'il est important lorsqu'on étudie le RM de prendre en compte l'histoire de l'élève, des mathématiques, de la communauté dans laquelle il évolue.

Un peu dans le même courant, Schwarz, Dreyfus et Hershkowitz (2009) ont développé un cadre théorique qui donne une place importante au contexte dans le développement de l'abstraction et qui définit l'abstraction comme un processus qui nécessite des actions épistémiques⁵³, c'est-à-dire des actions « that pertain to the knowing of the participants and that are observable by participants and researchers » (Schwarz, Dreyfus et Hershkowitz, 2009, p. 23). Plus précisément, ils définissent l'abstraction « as an activity of vertically reorganizing previous mathematical constructs within mathematics and by mathematical means so as to lead to a construct that is new to the learner » (p. 24). L'organisation verticale est mise en contraste avec l'organisation horizontale. Dans une organisation verticale, les savoirs mathématiques sont réorganisées pour en arriver à un nouveau construit plus abstrait que les premiers construits utilisés. Dans l'organisation horizontale, des construits non mathématiques sont associés à des construits mathématiques. Il s'agit ici de concepts empruntés au Realistic Mathematics Education développé par Freudenthal (1991). Contrairement à

⁵³ « Épistémique » tel qu'utilisé par les auteurs, ne fait pas référence à la valeur épistémique d'un énoncé tel que le définit Duval (1995).

Noss et Hoyles (1996) qui parlent d'organisation des savoirs comme d'une toile (web), Hershkowitz, Schwarz et Dreyfus (2001) hiérarchisent l'organisation et associent l'abstraction à une organisation où les savoirs mathématiques gagnent, ce que je nommerais, une nouvelle cohérence mathématique.

Dans le cadre de Schwarz, Dreyfus et Hershkowitz (2009), le contexte est un élément important qui influence le développement du processus d'abstraction tout comme dans celui de Noss et Hoyles (1996). Le développement de celui-ci est influencé par la tâche sur laquelle l'élève travaille, les outils à sa disposition, l'histoire de l'élève et celle de l'enseignant, le lieu où il travaille et les conditions sociales dans lesquelles il travaille (Hershkowitz, Schwarz et Dreyfus, 2001). Leur modèle, le *nested epistemic actions model of abstraction in context*, s'appuie sur trois actions épistémiques, *Recognizing* (reconnaître), *Building-with* (construire-avec), et *Constructing* (construire). Pour Schwarz, Dreyfus et Hershkowitz (2009), cette dernière action est l'élément central du processus d'abstraction. Elle consiste à combiner et intégrer différents savoirs préalablement construits par l'élève à partir d'une mathématisation verticale pour produire un nouveau construit. Pour les deux autres actions épistémiques, les auteurs les définissent comme suit. L'élève « *reconnait* » lorsqu'il est en mesure de dire si un savoir qu'il a précédemment construit est utile dans un nouveau contexte. De même, l'élève « *construit-avec* » lorsqu'il combine les savoirs reconnus pour en arriver à un but local dans ce nouveau contexte. Le processus d'abstraction passe par trois stades : le besoin d'une nouvelle construction, l'émergence d'une nouvelle construction et la consolidation.

Le cadre développé par Hershkowitz, Schwarz et Dreyfus (2001) est intéressant en mettant en lumière l'aspect processuel mis de l'avant par d'autres auteurs. Par ailleurs, est-ce qu'il permet de bien caractériser ce qu'est l'abstraction et en quoi est-il ou non du RM? Qu'est-ce qui permet de construire un nouveau concept? Les

actions épistémiques, au sens de Hershkowitz, Schwarz et Dreyfus (2001), de reconnaître et de construire-avec apparaissent comme des actions épistémiques de RM, mais certains éléments manquent en ce qui a trait à l'action épistémique de construire afin de s'assurer qu'il s'agisse bien d'un RM et non d'un autre processus de pensée mathématique. C'est que qui sera discuté dans la prochaine section. De plus, l'aspect discursif, qui est implicite dans l'idée d'action épistémique, nécessite d'être exploré davantage pour pouvoir situer la réflexion dans une approche commognitive.

5.3.1.3 L'abstraction en tant que processus commognitif

Mais alors, comment parler d'abstraction dans une approche commognitive et comment situer ce processus dans un modèle de RM? Sfard (2008) circonscrit ces deux processus, raisonnement et abstraction, en les reliant à des objets commognitifs, c'est-à-dire l'ensemble des réalisations de cet objet dans un discours donné. Le processus d'abstraction fait alors référence à l'activité discursive de création de concepts. Plus précisément, abstraire demande de déritualiser et d'objectiver pour subsumer un ou des discours existants en un nouveau discours. L'objectivation est « a discursive process of double elimination, which results in freeing the evolving narratives from the extension in time and from human agency » (Sfard, 2008, p.51-52), à savoir réifier et aliéner, éléments précédemment soulignés par Mason (1989). Ceci demande donc un va-et-vient entre le discours sur les objets et le discours sur le discours (métadiscours). On retrouve ici cette idée de changement, de passage présent chez d'autres auteurs.

Les types de développement du discours ont été présentés au chapitre III (voir section 3.1), mais prenons quelques lignes pour y revenir puisqu'ils permettent de faire une distinction entre RM et abstraction. Premièrement, l'apprentissage comme

développement du discours sur les objets mathématiques est en extension, c'est-à-dire qu'on ajoute des énoncés à propos d'un objet déjà construit. Les règles métadiscursives du discours ne changent pas. Deuxièmement, l'apprentissage comme développement du métadiscours sur le discours amène la création d'un nouveau discours, qui subsume les précédents et génère de nouveaux objets et de nouvelles règles. En fait, Sfard (2012) définit deux types de développement de nouveaux discours. Le premier, qu'elle qualifie de vertical, est le développement d'un nouveau discours par la combinaison d'un ancien discours et de son métadiscours. Le second, qu'elle qualifie d'horizontal, est le développement d'un nouveau discours par la combinaison de plusieurs discours sur des objets mathématiques pour aboutir à la création d'un nouvel objet. Ces propos correspondent à ceux de Hershkowitz, Schwarz et Dreyfus (2001). Ainsi, un discours sur le ou les discours est toujours nécessaire. Dans les deux cas, le processus mis en place permet la création d'un discours qui est incohérent, incommensurable, selon les dires de Sfard (2008), avec chacun des discours qui en ont permis la création.

Même si Sfard (2008) ne fait pas le lien directement entre les types de développements, le RM et l'abstraction, j'associe le premier type (celui d'extension) au RM et le second (développement vertical et horizontal) à l'abstraction. Le RM crée des énoncés à propos des relations et des objets mathématiques déjà existants. L'abstraction fait plus, elle rend le nouveau discours incommensurable avec les anciens discours. L'abstraction, tout en étant liée au RM par le fait même que les deux sont des processus d'apprentissage des mathématiques, peut être différenciée de ce dernier sur la base du type de développement qu'elle génère.

Évidemment, le processus d'abstraction peut impliquer à certains moments des processus de raisonnements, mais celui-ci sera local et ne pourrait à lui seul permettre

de comprendre l'ensemble du processus d'abstraction, ce passage à un nouveau discours, avec de nouvelles règles et de nouveaux objets.

Le résultat n'est pas un enrichissement du discours, mais un nouveau discours. L'idée de construire un discours plus complexe, présente dans la littérature qui porte sur l'abstraction, peut donc être liée à un changement de discours de niveau méta. En d'autres mots, « abstraire » est un processus discursif de création de concept et de discours. Comme Ohlsson et Lehtinen (1997) l'affirment, le processus « abstraire » mène à une nouvelle structure, en termes commognitifs, un nouveau discours qui est plus complexe que les discours dont il est issu. Le processus abstraire mène donc à un nouveau discours sous-tendu de nouvelles règles discursives. L'ancien discours semble alors limité, même dépassé lorsque comparé au nouveau. Il y a donc ici une distinction importante entre le RM et l'abstraction en tant que processus qui pourrait permettre de mieux comprendre l'apprentissage des élèves. La définition adoptée dans ce modèle stipule que le RM permet une extension du discours, mais non la création d'un nouveau discours. De ce fait, l'abstraction ne sera pas retenue comme processus de RM puisque ce processus va au-delà du RM.

5.3.2 Généraliser

« Généraliser » est un processus qui est abondamment abordé en didactique des mathématiques, en particulier en ce qui touche l'algèbre chez Radford (2003, 2006) et qui est aussi très associé au RM et à abstraire. Les concepts de généralisation et d'abstraction sont souvent mis en parallèle, comme c'est le cas chez Pedemonte (2002), Dreyfus (1991) ou encore Piaget (1977). En fait, comme Davis et Hersh (1985) le mentionnent, ces deux mots sont souvent employés comme synonymes. Je reviendrai sur les liens entre ces deux processus un peu plus tard, mais attardons-nous encore un peu au concept de généralisation dans la littérature qui porte sur le RM.

Les prochaines sections proposent donc une analyse du sens accordé à « généraliser » par des auteurs qui lient le processus « généraliser » au RM. Ensuite, pour enrichir la synthèse, certains auteurs clés, qui traitent du processus « généraliser » selon une lunette cohérente avec l'approche commognitive, seront analysés. Ces derniers ne lient pas explicitement RM et « généraliser ». Mais avant cette synthèse, afin de mieux comprendre les sens du concept « généraliser » dans la littérature en didactique des mathématiques, quelques mots à propos du sens qu'on lui accorde dans la vie de tous les jours.

Selon le Nouveau Petit Robert (2009), généraliser c'est rendre général, étendre, appliquer à, ou affecter d'une extension ou d'une portée plus grande. Si l'on se réfère à l'entrée « généralisation », il est question alors d'action de généraliser, d'extension, d'opération intellectuelle par laquelle on étend à l'ensemble d'une classe, d'opération par laquelle reconnaissant des caractéristiques communes entre plusieurs objets, on les réunit. Il est aussi question du résultat de cette action. Il n'y est pas directement question de raisonnement. Toutefois, un rapport de sens est souligné entre certaines utilisations du terme « généralisation » et des termes « analogie » et « induction ». On peut aussi se questionner sur la nature du processus discursif qui permet d'étendre, de réunir. Est-ce de nature inférentielle et donc un processus de RM? Qu'en est-il des sens qu'on attribue à « généraliser » en didactique des mathématiques et comment est-ce relié au RM?

5.3.2.1 Généraliser et le RM

Pour G. J. Stylianides (2005) et Artzt (1999), raisonner mathématiquement, c'est généraliser et appuyer des affirmations valides. Généraliser est donc, pour ces deux auteurs, un processus central de RM et complémentaire à celui de construire des conclusions valides. Pour G. J. Stylianides (2005), qui reprend les propos de Pólya,

« making mathematical generalizations is the passing from the consideration of a restricted set to that of a more comprehensive set containing the restricted one » (p. 18). Comme déjà détaillé au chapitre III (voir section 3.2.4), identifier une régularité et conjecturer sont des types de généralisation. Pour lui, la régularité est observée sur un nombre limité de cas, mais est considérée d'un point de vue général. De même, la conjecture est un énoncé général accompagné de la conviction, selon les termes de G. J. Stylianides (2005), que cet énoncé est vrai. Cet énoncé général est obtenu par l'étude de quelques cas. On retiendra de G. J. Stylianides que le processus « généraliser » est l'ensemble des actions qui permet de passer d'un ensemble restreint à un autre qui le contient, dans le but de générer des énoncés de nature générale.

Contrairement à G. J. Stylianides et Artzt qui considèrent que conjecturer est un processus de généralisation, Reid (2002) et M. C. Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid et Yevdokimov (2007) sont plutôt d'avis que généraliser est une étape du processus de conjecture, juste avant la justification. Pour Reid (2002) et M. C. Cañadas *et al.* (2007) le processus de généralisation permet de changer le statut d'une conjecture inférée : « Generalizing the conjecture involves a change in what Duval (1990) calls its "epistemic value", from a possible conjecture to an accepted general rule. This is a change in what is believed about the statement » (M. C. Cañadas *et al.*, 2007, p. 64). Du point de vue de ces auteurs, « généraliser » est une étape qui permet de se convaincre que la conjecture émise est bien vraie, sans nécessairement que la vérité de l'énoncé ne soit prouvée. « Généraliser » serait alors un processus qui change la valeur épistémique de l'énoncé (de vraisemblable à certain) et non sa valeur de vérité. Ce processus fournit des raisons pour se convaincre que cet énoncé est « vrai » ou non plus seulement vraisemblable. Il faut ensuite fournir des raisons pour expliquer cet énoncé; M. C. Cañadas *et al.* parlent alors de justifier.

Pour Pedemonte (2002), les processus d'argumentation qui utilisent la généralisation permettent de passer à un ensemble plus grand et fournissent des raisons de croire en l'énoncé : « L'argumentation en mathématiques a toujours un objectif : la recherche de la vérité » (Pedemonte, 2002, p. 30). Pedemonte (2002) inclut donc les deux visions de « généraliser », soit le passage à un ensemble plus grand et la recherche d'un énoncé valide.

Plusieurs auteurs, tels G. J. Stylianides (2005), Pedemonte (2002) ou encore Pólya (1958), définissent le processus de généralisation comme « passing from the consideration of a given set of objects to that of a larger set, containing the given one » (Pólya, 1958, p. 12). Cette définition est similaire à celle de Dreyfus (1991) qui relie « généraliser » entre autres à l'extension du domaine de validité d'un énoncé par l'identification de similitudes entre des cas particuliers: « To generalize is to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity » (p. 35). Par ailleurs, les propos sur le processus « généraliser » de Dreyfus et Pólya semblent différents en ce qui concerne le domaine de validité. Pour Pólya, ce n'est pas le domaine de validité qui est en cause, mais plutôt ce qui est considéré comme ensemble d'objets mathématiques par la personne qui raisonne. Pour contraster sa définition de généralisation, Pólya (1968) l'oppose à spécialisation qu'il définit comme « passing from the consideration of a given set of objects to that of a smaller set, contained in the given one » (p. 13). L'idée n'est pas alors de réduire (pour la spécialisation) ou d'augmenter (pour la généralisation) le domaine de validité du raisonnement, mais bien de raisonner sur un ensemble plus restreint ou plus large d'objets mathématiques. Pour illustrer ce passage d'un ensemble d'objets à un ensemble plus large, Pólya donne deux exemples :

1. Passer d'un triangle à un polygone qui a un nombre quelconque de côtés.
2. Passer de l'étude des fonctions trigonométriques d'un angle aigu à celle des fonctions trigonométriques d'un angle.

Dans le premier, un processus de RM qui est effectué sur un polygone particulier est élargi à un polygone quelconque. En ce sens, c'est le processus lui-même qui a maintenant cours en prenant appui sur un polygone particulier, mais non spécifique, si l'on reprend les propos de Mason et Pimm (1984). Il ne s'agit pas de considérer un ensemble plus grand, mais un cas non spécifique. Le processus de RM n'a donc pas lieu sur un ensemble plus grand, mais sur un cas non spécifique.

Dans le second exemple de Pólya (1968), l'étude des fonctions trigonométriques sur les angles aigus est élargie à un ensemble d'angles plus grand qui comprend le premier. Le domaine d'étude est donc étendu à un ensemble plus « grand » d'angles. Dans ce second cas, il est plus facile de faire un lien avec le domaine de validité tel que Dreyfus (1991) le considère. En effet, lors de l'étude de fonctions sur un ensemble d'angles plus grands, des énoncés sont construits et validés pour un ensemble nécessairement plus grand. Toutefois, c'est le passage de l'étude d'un ensemble restreint à un ensemble plus large qui est la principale caractéristique mise en lumière. La valeur épistémique n'est pas l'enjeu central et son changement pourrait nécessiter la mise en œuvre d'autres processus de RM. Qu'en est-il si on ouvre le corpus à d'autres auteurs?

5.3.2.2 Généraliser dans la littérature en didactique des mathématiques

Pour élargir notre compréhension de ce qu'est le processus de généralisation, les écrits d'auteurs, qui portent sur celui-ci sans que le RM soit au premier plan, ont été explorés. Je débiterai avec les propos de Mason (1994, 1996), Mason et Pimm (1984) et Ellis (2007a, 2007b). Les trois premiers textes, c'est-à-dire Mason (1994, 1996) et Mason et Pimm (1984), positionnent le processus de généralisation par rapport à la pensée mathématique. Les deux derniers le positionnent plutôt par rapport à la pensée

algébrique. Ensuite, les propos de Radford (2003) seront introduits ainsi que ceux de Kaput (1999).

Mason (1996) considère que la « [G]eneralization is the heartbeat of mathematics, and appears in many forms » (p. 65). Pour cet auteur, « généraliser » est un processus important du RM qui permet de tirer des conclusions valables pour un ensemble de cas à partir de quelques exemples (Mason, 1994). « [L]a généralisation commence dès qu'on pressent un cheminement sous-jacent, même si on est encore incapable de le formuler » (Mason, 1994, p. 7). On voit ici apparaître l'aspect processuel, en développement du RM. Par ailleurs, Mason ne caractérise pas seulement un processus, mais aussi ce qui est généré par ce dernier. Il parle alors de développer chez l'élève la conscience de la généralité : « seeing a generality through the particular and seeing the particular in the general » (Mason, 1996, p. 65).

En fait, après différentes lectures (Mason et Pimm, 1984; Mason, 1994; 1996), je note que Mason parle de deux types de processus. Le premier type peut être qualifié de processus de généralisation, et se traduit par une construction d'un énoncé général par l'observation, la manipulation et l'expression de cas particuliers. Le second type regroupe différents processus qui permettent d'apprécier la généralité d'un phénomène, d'un objet mathématique. Ainsi, pour apprécier la généralité, il est nécessaire, selon Mason, de spécialiser notre investigation, de tester à partir de cas particuliers. Mason (1994) mentionne que le processus « généraliser » est un processus de découverte qui permet d'en arriver à : « ce qui semble vraisemblable (une conjecture); au pourquoi cela semble vraisemblable (une démonstration); là où cela semble vraisemblable, c'est-à-dire à un énoncé plus général du problème (un autre problème) » (1994, p. 19, les parenthèses sont de Mason).

Plusieurs éléments sont à retenir de Mason. Chez cet auteur comme chez d'autres, « généraliser » peut être traité comme un processus ou comme une qualité d'une proposition. Évidemment, les deux sont liés. Toutefois, c'est le processus que l'on cherche ici à caractériser. En tant que processus de RM, il se doit d'être d'une façon ou d'une autre lié à l'inférence, ce que Mason souligne en mentionnant que « généraliser » permet d'arriver à une conjecture, une démonstration ou une solution d'un problème plus large. On peut ici constater que le changement de valeur épistémique n'est toujours pas au premier plan. En effet, comme il sera développé plus tard, conjecturer et démontrer sont fortement liés à la valeur épistémique de l'énoncé généré par eux. Par ailleurs, Mason, tout en liant « généraliser » et RM, qualifie le premier de processus de découverte. Je reviendrai sur ce terme un peu plus tard. Pour l'instant, notons que la découverte a une connotation passive tout comme le verbe « voir » (« see through ») ou encore « prendre conscience ». Une découverte peut être l'aboutissement d'une recherche, mais l'aspect processuel est dans la recherche d'éléments nouveaux.

Ellis (2007a, 2007b) s'est intéressée au processus de généralisation portant sur le développement du raisonnement algébrique. Elle conçoit le processus de généralisation comme une pratique sociale enracinée dans le discours. Elle définit celui-ci comme

an activity in which people in specific sociomathematical contexts engage in at least one of three actions: (a) identifying commonality across cases, (b) extending one's reasoning beyond the range in which it originated, or (c) deriving broader results from particular cases (p. 311).

Ellis (2011) considère que l'observation des interactions entre élèves, ou entre élèves et enseignants, permet d'étudier le développement du processus de généralisation puisque ce dernier se construit, selon elle, par le biais des interactions. Celui-ci, qui a

un aspect dynamique et statique, serait fortement dépendant du contexte, de l'histoire des élèves, de leurs interactions et des artéfacts disponibles.

Radford, entre autres dans ses articles de 2003 et de 2006, s'intéresse aux types de généralisation développés par les élèves dans une perspective sémiotique et culturelle, dans un contexte de tâches qui implique la généralisation de *patterns*. Pour ce dernier, « a generalization is not always a straightforward process but rather the actualization of one of the potential ways that particular cases may insinuate » (Radford, 2003, p. 38).

Plus particulièrement,

the algebraic generalization of a pattern rests on the noticing of a local commonality that is then generalized to all the terms of the sequence and that serves as a warrant to build expressions of elements of the sequence that remain beyond the perceptual field (Radford, 2006, p. 5).

Chez les deux derniers auteurs, l'identification d'éléments communs semble centrale au processus « généraliser ». Par ailleurs, Ellis mentionne que cette identification est suffisante pour parler de processus « généraliser ». Pour Radford (2006), l'identification ne semble qu'une première étape.

Pour Kaput (1999)

Generalization involves deliberately extending the range of reasoning or communication beyond the case or cases considered, explicitly identifying and exposing commonality across cases, or lifting the reasoning or communication to a level where the focus is no longer on the cases or situations themselves but rather on the patterns, procedures, structures, and the relations across and among them (which, in turn, become new, higher-level objects of reasoning or communication) (p. 136).

La seconde partie de la définition de Kaput semble faire référence à ce qui a précédemment été défini comme un processus d'abstraction. La seconde partie peut aussi être mise en relation avec ce que Piaget (Fondation Jean Piaget, 2014) appelle les généralisations constructives. Les généralisations constructives, qui s'opposent à la généralisation empirique, permettent de construire de nouveaux concepts ou de nouvelles structures. Par ailleurs, la première partie fait référence à un processus qui étend les énoncés précédemment inférés à un plus grand domaine de validité, tout comme souligné par les autres auteurs cités, et ne nécessitent donc pas de construire de nouveaux objets au sens où cette structure, qui est mise au jour, table sur des objets mathématiques qui font déjà partie du discours.

5.3.2.3 Généraliser en tant que processus commognitif de RM

De l'analyse des textes portant sur la généralisation en didactique des mathématiques, plusieurs éléments peuvent être retenus pour caractériser « généraliser » en tant que processus de RM. Les aspects « inférence » et « expansion » apparaissent comme importants dans la littérature. Le processus de généralisation est parfois lié à l'expansion du domaine de validité d'un énoncé, parfois à la construction d'un énoncé de nature générale à partir d'un ou deux cas. Ainsi, d'un point de vue commognitif, on peut lier le processus de généralisation au RM puisqu'il est clairement associé à l'inférence et au discours, sans qu'il y ait nécessairement

création d'un nouveau discours incommensurable avec le premier. Étendre le domaine de validité d'un énoncé n'amène pas un changement au niveau des règles du discours. C'est cette position qui sera prise ici. Ainsi, en tant que processus de RM, « généraliser » permet d'inférer un énoncé à propos d'une relation, d'un objet, d'une propriété, du discours mathématique :

Généraliser, en tant que processus de RM, infère un énoncé à propos d'un ensemble d'objets mathématiques ou d'une relation entre différents objets de cet ensemble à partir d'un ensemble plus restreint d'objets contenus dans ce premier.

Le discours développé est en extension puisque les énoncés inférés amènent plus d'informations à propos des objets du discours sans en changer les règles métadiscursives. Il s'agit clairement d'un processus de recherche de similitudes et de différences. Cette recherche permet de générer un énoncé qui met en évidence des éléments communs à un ensemble d'objets.

Si l'on compare « généraliser » et « abstraire » en ne perdant pas de vue que l'on s'intéresse à la généralisation en tant que RM, on peut noter qu'il n'y a pas, contrairement à l'abstraction, de changement de discours, mais extension de ce dernier. Les objets existent déjà, les règles métadiscursives aussi. Lorsqu'une règle est inférée, il s'agit d'une règle de niveau objet (à propos de relation entre des objets) et non d'une règle métadiscursive. Par exemple, on retrouve dans Kaput (1999) un exemple du processus (de RM) « généraliser ». Dans cet exemple, des élèves d'une classe du primaire ont observé que $3 \times 12 = 12 \times 3$. Ils se demandent si $4 \times 9 = 9 \times 4$ puis si cette relation est toujours vraie. Après avoir exploré d'autres cas et observé que cette relation est vraie pour plusieurs, ils étendent cette relation à tous les nombres. Si l'on se concentre sur le processus « généraliser » ici, c'est en inférant à partir de l'observation de cette relation sur plusieurs cas qu'ils sont en mesure d'étendre la

relation à tous les nombres. On pourrait alors comprendre les difficultés liées aux activités qui visent à mettre en œuvre un processus généraliser en classe par le fait que les élèves doivent arriver à participer à un nouveau discours, qui n'est pas celui qu'ils ont individualisé pour parvenir à les résoudre. Ceci nécessite alors d'abstraire, de développer ce nouveau discours. Les règles méta-discursives changent.

Contrairement à ce que souligne Reid (2002), la position retenue ici est qu'il n'y a pas de valeur épistémique particulière associée au processus de généralisation. Ce processus peut mener à un énoncé vraisemblable, mais aussi certain. Enfin, il n'y a pas de structure particulière associée au processus « généraliser », les différents pas qui le constituent s'enchainent de différentes façons et la structure de chacun varie. Toutefois, on peut souligner que le pas inductif y joue un rôle important de par le fait que la conclusion de ce pas est une règle d'inférence, et donc, est un énoncé qui est habituellement général. Enfin, soulignons que le terme « généraliser », lorsqu'utilisé en tant que processus de RM, n'est pas ce qui est entendu par Piaget (1977, "Fondation Jean Piaget", 2014) par généralisation constructive. On peut donc dire qu'un processus de généralisation est un processus de RM lorsqu'il n'y a pas construction d'un nouvel objet mathématique.

Le processus « généraliser » est souvent lié à « conjecturer » et à « identifier une régularité » dans la littérature. Les deux prochaines sections traitent donc de ces derniers.

5.3.3 Conjecturer

Avant de débiter la synthèse de la littérature sur le processus de conjecturer, rappelons, tel que décrit à la section 1.2, qu'il est présent dans les programmes de formation de plusieurs pays du monde et qu'on semble s'entendre sur son importance

dans l'enseignement des mathématiques en général, et pour le RM en particulier. Dans la littérature en didactique des mathématiques, ce processus est mentionné comme important au développement du RM chez plusieurs auteurs dont White (1993), Pólya (1968), Peressini et Webb (1995), Ball et Bass (2003), Rivera et Becker (2007), Meyer (2010), M. C. Cañadas *et al.* (2007), Calder *et al.* (2006), Bergqvist (2005), et Cabassut (2005). Des liens entre « généraliser » et « conjecturer » sont spécifiés par plusieurs. De même, plusieurs auteurs soulignent que le processus « conjecturer » mène à un énoncé dit général. Toutefois, le processus « conjecturer », lorsque défini, n'est pas circonscrit de la même manière par tous les auteurs. D'ailleurs, les auteurs utilisent d'autres expressions que conjecturer, telles que faire une conjecture, émettre une conjecture, énoncer une conjecture, construire une conjecture, formuler une conjecture.

Pour cette thèse, l'expression « conjecturer » est retenue pour mettre l'accent sur l'aspect processuel. Par ailleurs, la plupart des auteurs (surtout dans les textes francophones) utilisent plutôt le terme « conjecture » associé à un verbe d'action, la conjecture étant vue comme le produit de l'activité associée (construire, émettre, formuler). Ces différents verbes d'action éclairent d'autant de nuances le terme « conjecture ». Par exemple, le verbe « énoncer » n'implique pas nécessairement qu'il y ait construction de ladite conjecture. De plus, certains auteurs conceptualisent autour de l'aspect processuel en le nommant autrement, même s'ils soulignent l'importance de la conjecture. C'est le cas de Pedemonte (2002) qui s'intéresse au processus argumentatif qui aurait lieu pendant la construction d'une conjecture. Chacun des textes sera donc traité selon le vocabulaire mis de l'avant par l'auteur. Ainsi, je débiterai par tracer un portrait sommaire des significations des processus associés à « conjecturer » dans la littérature. Puis, je présenterai une conceptualisation avec une lunette commognitive.

5.3.3.1 Conjecturer et le RM

Dans les modèles présentés au chapitre III, seul le modèle de G. J. Stylianides (2005) met clairement de l'avant le processus « conjecturer ». Cabassut (2005) se limite aux processus de validation en ne traitant pas directement les processus de formulation d'une conjecture. Il souligne toutefois qu'un processus de validation dans une communauté donnée pourrait être plutôt un processus de conjecture dans une autre communauté. G. J. Stylianides (2005) parle d'un processus⁵⁴ où l'on génère une conjecture ou des conjectures que l'on raffine (souvent sous forme d'énoncés) à propos d'une relation générale à partir d'évidences incomplètes. Pour cet auteur, le processus de faire une conjecture doit mener à une conjecture « raisonnée », c'est-à-dire qu'il exclut les conjectures qui se basent uniquement sur l'action de deviner (guesses) et/ou de soupçonner (hunches). La conjecture en tant qu'énoncé est, pour cet auteur, toujours associée à une valeur épistémique autre que vraie ou fausse et ainsi nécessite que le processus de RM se poursuive pour en arriver à déterminer si elle est vraie ou fausse. Une autre caractéristique importante pour cet auteur est que ce processus mène à une conjecture qui généralise les cas que l'on a générés, c'est-à-dire que l'on étend son domaine d'application.

Quatre éléments sont à souligner chez cet auteur. Le premier est le fait que le processus « conjecturer » est un type de processus de généralisation. On verra que cette conception est nuancée par d'autres. Le second est la valeur épistémique qui est associée à l'énoncé produit par le processus « conjecturer ». Le troisième est le fait que cette conceptualisation du processus « conjecturer » peut facilement s'associer à une vision discursive du RM. En effet, le modèle de G. J. Stylianides (2005), sans mettre de l'avant la nature discursive du RM, nécessite un discours public pour être

⁵⁴ Cet auteur utilise en fait le terme activité et l'expression "making a conjecture".

opérationnalisable. C'est par une formulation attendue d'une résolution de tâches que le modèle de G. J. Stylianides permet de juger qu'une tâche encourage ou non le processus « conjecturer ». Enfin, le quatrième est la nécessité de rechercher une relation, une régularité pour énoncer une conjecture. Même si G. J. Stylianides distingue ces deux processus, il n'en reste pas moins que conjecturer s'appuie sur l'identification d'une régularité, d'une relation. Comme il le mentionne, il y a des tâches qui visent l'identification d'une régularité qui mène à une conjecture, et d'autres non.

Pour Mason (1994), « [C]onjecturer, c'est pressentir ou deviner que quelque chose pourrait être vrai et chercher si c'est vrai » (p. 54). Cette conception semble différer de celle de G. J. Stylianides (2005), à tout le moins en ce qui a trait aux mots utilisés. Par ailleurs, je doute que Mason considère le processus « conjecturer », si l'on reprend les termes de G. J. Stylianides, comme « non raisonné ». Il s'agit en effet, pour cet auteur, d'un processus essentiel au RM. Mason (1994) associe le processus de conjecturer à un processus cyclique où l'on doit 1) énoncer clairement une conjecture; 2) vérifier que la conjecture couvre tous les cas et les exemples connus; 3) se méfier de la conjecture en tentant de la réfuter; et 4) trouver pourquoi la conjecture est vraie ou la modifier (ce qui nous ramène à 1). Mason parle premièrement d'énoncer une conjecture et non de construire une conjecture. Deuxièmement, contrairement à G. J. Stylianides (2005), il situe la vérification de la conjecture dans le processus même de conjecturer. Enfin, Mason considère, tout comme G. J. Stylianides, qu'il existe des liens étroits entre généraliser et conjecturer. Selon Mason, généraliser permet de découvrir un cheminement qui conduit à une conjecture (1994, p. 19).

Reid (2002) différencie généraliser et conjecturer à partir de la valeur épistémique rattachée à chacun des produits de ces processus. Selon cet auteur, un processus de

conjecture produit un énoncé vraisemblable, qui peut être testé; un processus de généralisation produit un énoncé vrai, accepté dans une communauté donnée. Cependant, la différence soulignée par Reid (2002) n'est que sur le produit de ces processus, à savoir un énoncé. On peut se demander s'il existe d'autres différences fondamentales entre ces deux processus. Dans un autre ordre d'idée, Reid (2002) traite le processus « conjecturer » comme une composante possible d'un RM et non comme un RM en soi. En effet, chez Reid (2002), le RM nécessite une phase essentiellement déductive. Tout comme chez G. J. Stylianides (2005), conjecturer peut suivre un processus d'identification de régularités (observation de régularités). Même si Reid positionne la généralisation et la conjecture de façons différentes, conjecturer est pour lui un processus qui permet d'appliquer une régularité de façon générale.

Pour Reid (2002), s'il n'y a pas de phase déductive associée au processus de conjecture, il ne s'agit pas d'un processus de RM. Cette position est légèrement différente de celle de G. J. Stylianides (2005) qui considère « conjecturer » comme un processus de RM en lui-même. C'est aussi cette dernière position qui est retenue pour le développement de ce modèle puisque conjecturer est une activité mathématique en soi, et ce, sans diminuer l'importance des activités de démonstration. Notons aussi que Reid (2002) ne semble pas, à priori, subordonner conjecturer et généraliser en différenciant leur nature respective.

Il en va autrement de M. C. Cañadas *et al.* (2007). En effet, ces derniers décrivent le processus « conjecturer » en termes d'étapes parmi lesquelles on retrouve « généraliser ». Cinq types de processus de conjecture en termes d'étapes sont soulignés par ces auteurs : l'induction empirique basée sur un nombre fini de cas discrets; l'induction empirique basée sur un cas dynamique; l'analogie; l'abduction et le processus de conjecturer basé sur la perception. La généralisation apparaît comme

étape du processus « conjecturer » pour chacun des cas qu'ils décrivent. Il s'agit alors d'un processus lié au changement de valeur épistémique d'un énoncé (la conjecture) qui passe de vraisemblable à vraie pour une communauté donnée.

Si l'on prend le premier type (l'induction empirique basée sur un nombre fini de cas discrets), il se décline en 7 étapes, comparativement à 4 pour Mason (1994) à savoir :

- On observe les cas;
- On organise les cas;
- On cherche et prédit une régularité;
- On formule la conjecture (énoncé à propos de tous les cas possibles);
- On valide la conjecture (on teste la conjecture par exemple, un nouveau cas);
- On généralise la conjecture (la généralisation est liée ici à un changement valeur épistémique);
- On justifie la généralisation (on donne des raisons qui expliquent la conjecture, la justification peut être une preuve mathématique).

Comme chez plusieurs autres auteurs, l'observation et l'identification d'une régularité sont, dans l'exemple précédent, soulevées comme composantes du processus « conjecturer ». La description en étapes qui est faite par ces auteurs peut être associée à des processus discursifs. Par ailleurs, plusieurs de ces étapes sont associées par d'autres à des processus de RM. On pourrait même stipuler que chacune de ces étapes est un processus de RM. Mais le processus de conjecture inclut-il le processus de justification? Tout comme le stipulent ces auteurs, il est possible de conjecturer sans nécessairement se rendre à un processus de validation. On peut donc penser que l'un et l'autre sont plutôt complémentaires et souhaitables, plutôt que le dernier soit inclus dans le premier.

Quelques mots peuvent être ajoutés à propos des types de processus de conjecture mis en lumière par M. C. Cañadas *et al.* (2007). Premièrement, selon eux, conjecturer ne semble pas impliquer nécessairement l'étude de plusieurs cas. On peut conjecturer

à partir d'un seul cas, d'une représentation ou encore à partir d'un ensemble infini de cas (géométrie dynamique). Cette classification permet d'approfondir ce que G. J. Stylianides (2005) appelle une base d'évidence incomplète.

Un des auteurs cités dans la littérature en didactique des mathématiques pour discuter du processus de conjecture est Pólya (1968). Ce dernier parle du raisonnement plausible comme du raisonnement qui permet de construire une conjecture et de la supporter. Il y a donc cette idée que la conjecture est construite puis testée, idée que l'on retrouve aussi chez M. C. Cañadas *et al.* (2007) et Mason (1994). Pólya mentionne aussi l'importance de la généralisation, mais aussi de la spécialisation et de l'analogie dans le raisonnement plausible. Pour Pólya (1968), une conjecture s'obtient lorsque : « We collected relevant observations, examined and compared them, noticed fragmentary regularities, hesitated, blundered, and eventually succeeded in combining the scattered details into an apparently meaningful whole » (p. 68). Ainsi, tout comme chez les autres auteurs traités jusqu'à présent, le processus « conjecturer » nécessite l'observation et l'identification d'une régularité. De plus, ce processus mène à un énoncé vraisemblable et général.

Un dernier élément qui ne ressort pas des écrits traités jusqu'à maintenant, et qui mérite exploration, est le lien entre la conjecture et le théorème. Pedemonte (2002) fait un parallèle entre la conjecture et le théorème. Selon cette auteure, l'argumentation est liée à la conjecture et la démonstration au théorème. L'argumentation mobilise les conceptions⁵⁵ des élèves, et la démonstration, une théorie mathématique. Cabassut (2005), pour sa part, rattache toujours une théorie mathématique (dépendante de l'institution) au RM. En fait, le processus de

⁵⁵ Au sens de Balacheff, voir Balacheff et Gaudin (2010).

conjecture, chez Pedemonte (2002) et Cabassut (2005), est fortement lié à la théorisation mathématique. Lorsqu'on conjecture, c'est pour enrichir non seulement le discours mathématique, mais une théorie mathématique, c'est-à-dire un discours mathématique systématisé. Les éléments soulevés dans cette section permettront d'articuler une définition du processus « conjecturer » cohérente avec les autres définitions, ainsi qu'avec une perspective commognitive.

5.3.3.2 Conjecturer en tant que processus commognitif de RM

Contrairement à la présentation des deux processus précédents, la littérature qui s'intéresse au RM en didactique des mathématiques procure suffisamment d'information pour permettre de statuer sur la nature du processus de conjecture.

Ainsi, plusieurs éléments sont retenus pour construire une définition du processus « conjecturer » en tant que RM. Premièrement, un des éléments centraux du processus « conjecturer » est la recherche de régularités, la recherche d'une relation. Mais en fait, la recherche porte sur les similitudes et les différences. C'est la recherche de similitudes et de différences qui permet la mise au jour d'une relation. Cette recherche peut se faire sur différents plans : objets, opérations, relations. Lorsqu'on conjecture, on se doit d'être à la recherche de similitudes et de différences, afin de construire un énoncé qui décrit un phénomène mathématique.

Deuxièmement, le processus de conjecture met en lumière une valeur épistémique vraisemblable de l'énoncé généré. L'énoncé construit fait état d'une relation, d'une régularité vraisemblable; il reste une incertitude quant à sa validité.

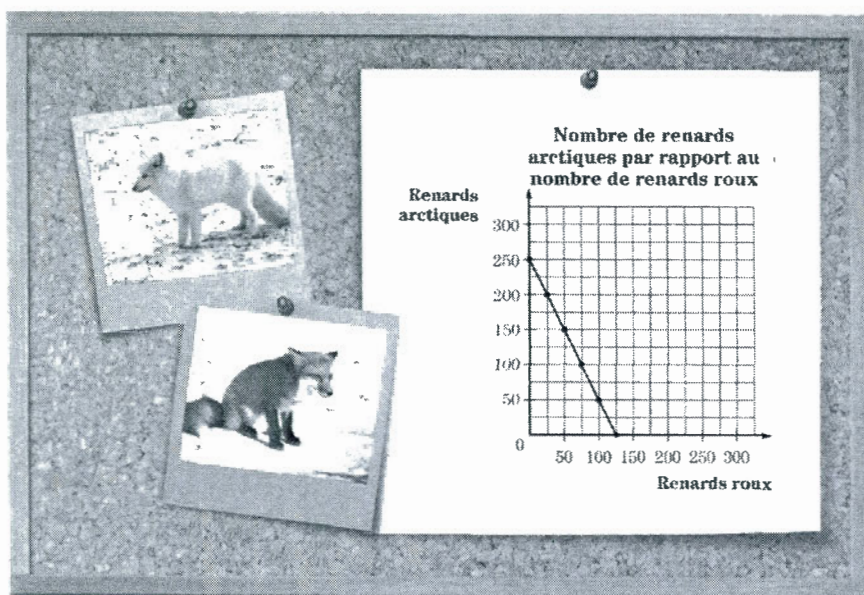
Troisièmement, le processus de conjecture mène au développement d'un discours de nature générale, « conjecturer » est un processus de généralisation lorsqu'il étend une relation observée, sur un ou plusieurs cas, à un ensemble plus grand de cas. Ce qui le distingue d'autres processus de généralisation est la valeur de vraisemblance rattachée à ce dernier.

Ainsi, le processus de conjecture amène une extension du discours par la construction d'énoncés vraisemblables, par la recherche de régularités et de relations qui sera défini comme suit :

Conjecturer est un processus de RM qui, par la recherche de similitudes et de différences, permet d'inférer un énoncé à propos d'une régularité ou d'une relation pour lequel la valeur épistémique qui lui est rattachée est vraisemblable et qui a un potentiel de théorisation mathématique.

Le processus de conjecture cherche à construire des énoncés qui ont un potentiel de théorisation mathématique. Par la recherche d'informations qui relient différents objets mathématiques, le processus « conjecturer » génère des énoncés, les raffine. Le processus recycle diverses inférences dans le but de générer un énoncé vraisemblable et ayant un potentiel de théorisation. Par ailleurs, ce n'est pas parce qu'un énoncé produit une valeur épistémique vraisemblable qui lui est rattachée que l'élève a nécessairement conjecturé (d'un point de vue mathématique). Prenons le problème suivant où le point e), selon le manuel du maître (S. Guay *et al.*, 2007), demande à l'élève de formuler une conjecture (voir figure 5.1).

- 19 Depuis le début du 20^e siècle, les populations de renards roux se déplacent vers le nord du Canada. Après avoir été vus pour la première fois sur l'île de Baffin en 1918, les renards roux se sont déplacés encore plus au nord, atteignant l'île Bylot en 1977. Guillaume Szor, un étudiant à la maîtrise à l'Université Laval, a effectué une étude sur la compétition entre le renard roux et le renard arctique. Le renard roux étant plus gros et plus agressif que le renard arctique, il risque d'influer négativement sur la population de ce dernier. Voici une hypothèse graphique illustrant l'influence que peut avoir la population de renards roux sur celle des renards arctiques sur l'île Bylot.



- Trouve une équation reflétant la situation représentée par le graphique.
- Que vaut la variable dépendante lorsque la variable indépendante vaut 0? Que représente cette valeur dans la situation?
- Combien de renards arctiques y aurait-il s'il y avait 50 renards roux sur l'île?
- S'il n'y avait que 50 renards arctiques sur l'île, combien de renards roux y aurait-il alors?
- Décris, selon l'hypothèse illustrée, l'avenir de la population des renards arctiques advenant une augmentation continue de la population des renards roux. De quelles données du graphique tires-tu tes conclusions?

Figure 5.1 Tâche tirée de Point de vue mathématique (S. Guay *et al.*, 2007, p. 100)

Dans le cadre présenté ici, l'élève qui résout cette tâche n'a pas conjecturé en mathématiques. Deux éléments sont à souligner. Premièrement, l'élève qui résout cette tâche, en s'appuyant sur le graphique et sur le fait que la population de renards roux ira toujours en augmentant, conclut à l'extinction des renards arctiques. Le caractère de vraisemblance de la conclusion ne vient pas du processus, mais d'une des données fournies. Deuxièmement, cet énoncé ne vient pas enrichir une théorie mathématique. Il est lié à ce problème bien particulier dont le contexte est plutôt situé en écologie.

De plus, la vraisemblance d'un énoncé n'est pas liée à son approximation. Il s'agit bel et bien d'un énoncé qui pourrait venir s'ajouter de façon cohérente à un ensemble d'énoncés déjà rassemblés de façon cohérente. Ceci exclut donc des processus comme estimer et anticiper. Ces deux processus ne permettent que de construire une solution approximative (et non vraisemblable).

5.3.4 Identifier une régularité

Le terme « identifier » (employé seul) peut prendre différents sens dans la littérature tels que nommer un objet mathématique comme on le constate dans les écrits de Maher et Martineau (1996) ou écrire une hypothèse, chez Mariotti (2000). « Identifier » dans ce sens, quoi que clairement un acte de communication (avec soi ou avec d'autres), n'est pas nécessairement un processus de RM. Lorsque lié au terme « régularité », le lien avec le RM devient plus fort. D'ailleurs, l'identification de régularité est un élément important de l'activité mathématique, les mathématiques étant souvent définies comme l'étude des régularités.

5.3.4.1 Identifier une régularité et le RM

Les différents auteurs parlent de *identifying a pattern* (G. J. Stylianides, 2005), *looking for a pattern* (Artzt, 1999), *observing a pattern* (Reid, 2002), *searching and predicting pattern* (M. C. Cañadas *et al.*, 2007), *locating and extending a pattern* (Ellis, 2007a). Pour G. J. Stylianides, une régularité c'est « a general relation that fits a given set of data » (p. 31). On remarque ici l'utilisation du terme relation générale dans la définition de régularité. Pour G. J. Stylianides (2005), il s'agit d'une composante du RM qui est un type de processus de généralisation. Dreyfus (1991), Radford (2003), Rivera et Becker (2008), et Ellis (2007a, 2007b) lient aussi « identifier une régularité » à « généraliser ». Selon eux, pour généraliser, il faut identifier des éléments communs entre des cas spécifiques, la régularité en faisant partie.

On peut donc constater qu'identifier une régularité, tout en étant lié à plusieurs termes associés au RM, prend une place importante dans l'activité mathématique. La question se pose donc de savoir s'il est possible de le qualifier de processus de RM, différemment de, ou complémentirement à, conjecturer ou généraliser.

5.3.4.2 Identifier une régularité en tant que processus commognitif de RM

Afin de définir « identifier une régularité » en tant que processus de RM, on tentera premièrement de le différencier de « conjecturer » et de « généraliser » puis de ressortir les éléments inférentiels qui lui sont propres.

On peut penser qu'identifier une régularité revient à conjecturer, est-ce vrai? Y a-t-il quelques différences que ce soit entre ces deux processus? Par exemple, l'identification d'une régularité a-t-elle un caractère de vraisemblance? Pour G. J.

Stylianides, identifier une régularité peut mener à conjecturer, mais les deux ne se confondent pas. Chez M. C. Cañadas *et al.* (2007), la troisième étape du premier type de processus de conjecture (*empirical induction from a finite number of discrete cases*) est la recherche et la prédiction d'une régularité, ce que nous pouvons lier à identifier une régularité. Identifier une régularité, en ce sens, tout comme chez G. J. Stylianides (2005), va plus loin que la simple observation d'une régularité. Il y a une recherche active, une prise de recul nécessaire, qui peut en faire un processus de RM. Par ailleurs, la valeur épistémique attachée à l'énoncé inféré lors d'un processus d'identification de régularité peut être différente que celle de vraisemblable.

Prenons le cas de la suite des nombres triangulaires (voir figure 5.2) :

Soit la suite des nombres triangulaires suivante où T_n représente le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite. Exprime T_n en fonction de n .					
T_1	T_2	T_3	T_4	...	T_n
1	3	6	10	...	?

Figure 5. 2 Tâches : les nombres triangulaires

Afin d'exprimer T_n en fonction de n , l'élève doit chercher et identifier une régularité. Il peut passer par un processus de conjecture. Par exemple, un élève pourrait réorganiser les données telles que présentées à la figure 5.3 et, à partir de la régularité identifiée pour les positions paires, généraliser un énoncé vraisemblable pour les positions impaires. Par ailleurs, en ce qui a trait à la régularité associée aux positions paires, il pourrait ne pas s'agir d'un processus de conjecture comme tel. Imaginons que l'élève ait raisonné comme suit :

À chaque fois que j'ai une position paire, je peux les regrouper deux à deux, le premier avec le dernier, le second avec l'avant-dernier et ainsi de suite. Par exemple, prenons la position 4. Je formerai ainsi un certain nombre de sommes (la moitié de 4, donc 2) toutes égales (un de plus que 4, donc 5). Si j'avais plutôt utilisé la position 6, j'aurais obtenu 3×7 . Ça fonctionne, la relation est donc $(n+1)n/2$.

Handwritten work showing the derivation of the formula for the sum of the first n natural numbers:

$$1$$

$$1+2$$

$$1+2+3$$

$$1+2+3+4 = 2 \cdot 5$$

$$1+2+3+4+5$$

$$1+2+3+4+5+6 = 3 \cdot 7$$

The formula $\frac{n}{2} \cdot (n+1)$ is circled in a cloud shape.

Figure 5.3 Une solution d'élève

Ici, l'élève a raisonné à partir de la structure de la suite ayant comme point de départ un élément connu, à savoir que si j'ai un nombre pair de termes dans une somme, je peux les grouper deux à deux. Il n'y a pas de valeur épistémique de vraisemblance de rattachée au processus en cours. L'énoncé produit est une régularité qui est directement justifiée par la structure de la suite (ce qui ne signifie pas qu'un autre élève puisse avoir conjecturé pour le même problème). Par ailleurs, dans cet exemple, ce n'est pas le cas pour les positions impaires, il reste une certaine incertitude. Vérifier sur un cas particulier peut venir diminuer cette incertitude, mais ne l'élimine pas d'emblée. On pourrait penser doubler le terme central, mais la structure n'est tout de même pas identique, la formule ne donne pas un accès direct à ce doublon. Le processus d'identification d'une régularité n'est pas toujours un processus de

conjecture. L'exemple présenté précédemment montre que la valeur épistémique de vraisemblance n'est pas nécessaire à l'identification d'une régularité. Du moment que la régularité identifiée colle aux données, l'énoncé peut être considéré comme vrai, même si plus d'une régularité pourrait être identifiée.

On peut donc penser qu'identifier une régularité est un processus particulier de RM qui permet d'inférer un énoncé à propos d'une relation récursive entre différents objets mathématiques dont la valeur de vérité n'a pas à être celle de vraisemblance. Le terme récursif amène l'idée que la relation se répète de façon indéfinie et pourrait mener à dire qu'identifier une régularité est un processus de généralisation. Pour G. J. Stylianides (2005), identifier un *pattern* est effectivement un cas particulier de processus de généralisation.

Par ailleurs, Reid (2002; 2010), C. S. Cañadas et Martinez (2005) et M. C. Cañadas *et al.* (2007) distinguent pour leur part, « identifier une régularité » de « généraliser ». En particulier, C. S. Cañadas et Martinez (2005) mentionnent que lorsque les élèves cherchent et prédisent des régularités, « students are thinking about a possible pattern just for the cases they are observing. They are not thinking about applying the pattern to all cases » (p. 402). Ils avancent qu'identifier une régularité ne nécessite pas une généralisation, mais plutôt une mise en évidence des différences et des similarités entre les cas à l'étude. Ainsi, « identifier une régularité » semble ici en partie distinct du processus « généraliser ». En fait, dans les tâches de généralisation de régularités, le processus « généraliser » prend racine dans le processus d'identification de la régularité en étendant son domaine d'application. On peut bien noter chez Radford (2006), qui parle de la généralisation d'un pattern algébriquement :

Generalizing a pattern algebraically rests on the capability of grasping a commonality noticed on some elements of a sequence S , being aware that this commonality applies to all the terms of S and being able to use it to provide a direct expression of whatever term of S (p. 5).

Le premier élément mentionné par Radford est lié à l'identification d'une régularité, mais pour généraliser, il faut davantage. On doit être en mesure d'étendre cette régularité à tout l'ensemble.

Le processus « identifier une régularité » peut donc être distingué de « généraliser » sur la base de ce qui est inféré et sera donc défini ainsi :

Identifier une régularité, en tant que processus de RM, infère un énoncé à propos d'une relation récursive entre différents objets ou relations mathématiques par la recherche de similitudes et de différences entre ces objets ou relations mathématiques.

Ainsi, « identifier une régularité » n'est pas toujours accompagné du processus « conjecturer » ni « généraliser » et vice versa. Il est possible d'identifier une régularité sans que cette dernière ne soit, ni vraisemblable, ni qu'il soit possible de l'étendre à un ensemble plus large d'objets mathématiques.

Pour identifier une régularité, il est nécessaire de rechercher des similitudes et des différences entre des objets, ce qui est fortement lié à l'idée de comparer. La prochaine section traite donc du terme « comparer », aussi retrouvé dans la littérature en relation avec le RM.

5.3.5 Comparer

5.3.5.1 Comparer et le RM

Le terme comparer est associé à un processus de RM par différents auteurs. Pour Duquesne (2003), comparer c'est raisonner. Pólya (1968) et Pedemonte (2002) mentionnent que lors d'un RM, on doit éventuellement comparer des cas, des exemples. Pour Bjuland, Cestari et Borgersen (2008), il s'agit d'une stratégie (terme des auteurs) de RM. J'associe ici le terme « stratégie » à « processus » puisqu'il s'agit d'action que l'on entreprend lorsqu'on raisonne. Le terme « comparer » est par certains lié à l'analogie (Pedemonte, 2002), à l'induction (Simon, 1996), ou encore à la déduction (Duval et Egret, 1993). À l'instar de Pedemonte (2002), English (2004) relie aussi analogie et comparaison: « analogical reasoning entails the comparison of conceptual and perceptual experiences based on recognized relationships or shared attributes (Cas, 1985; Holyoak & Thagard, 1995) » (p.27). Il s'agit de trois termes (analogie, induction, déduction) qui ont été traités dans cette thèse d'un point de vue structurel et qui mettent en lumière l'aspect inférentiel présent dans le processus « comparer ».

5.3.5.2 Comparer en tant que processus commognitif de RM

En mathématique, nous sommes souvent amenés à comparer différents objets ou relations. Par exemple, à la fin du primaire les élèves apprennent à comparer des fractions. On peut aussi comparer la cardinalité d'ensembles, des fonctions, des polygones etc. Ainsi, « comparer » peut aussi prendre le sens d'ordonner. Dans ce cas, on sait déjà le critère de différence, en terme ordinal ou cardinal qui est à rechercher. Par exemple, lorsqu'on cherche à comparer des fractions, on cherche leur différence du point de vue de la relation d'ordre. On parle alors de comparaison

additive. Si je compare $5/7$ et $6/8$, je peux m'y prendre comme suis. Je peux dire que si je compare les compléments à 1, je pourrai comparer ces deux fractions. En sachant que $2/7$ est plus grand que $2/8$, alors je peux conclure que $5/7$ est plus petit que $6/8$. Comparer en mathématiques peut aussi se faire multiplicativement. Je peux chercher combien de fois un segment est plus grand qu'un autre. J'ai ici besoin de chercher la différence en m'appuyant sur l'opération de multiplication ou la proportion. Comparer en tant que processus nécessite ici une inférence afin de dégager des éléments de comparaisons.

Mais comparer n'est pas toujours ordonner. Si je compare des figures géométriques, je ne cherche pas à les ordonner. Je cherche des similitudes et des différences entre ces figures. Richard (2004) mentionne que pour comparer deux segments, on peut se servir du théorème de Thalès; il y a ici un élément de comparaison à partir d'énoncés acceptés mathématiquement. Pour parler de la recherche de similitudes et de différences, d'autres auteurs utilisent plutôt l'expression identifier des similitudes et des différences. C'est le cas d'Ellis (2007a, 2007b) et Dreyfus et Eisenberg (1996).

Ainsi comparer sera défini comme suit :

Comparer, en tant que processus de RM, permet d'inférer par la recherche de similitudes et de différences un énoncé à propos d'objets et de relations mathématiques.

Le processus de RM « comparer » peut être mis en œuvre avec une pléthore d'autres processus de RM : généraliser, identifier une régularité, valider. Il permet alors, soit de chercher une relation (on cherche ce qu'il y a de commun pour le mettre de l'avant), ou encore de chercher une validation. Par exemple, le processus « identifier une régularité » nécessite la comparaison des différents cas à l'étude pour mettre en lumière une régularité. Mais le processus « identifier une régularité » est davantage

que comparer puisque comparer ne fait qu'inférer des énoncés portant sur les similitudes et les différences. De même, comme le souligne Balacheff (1987), les processus de validation nécessitent aussi de comparer. On cherche ce qu'il y a de communs entre les prémisses et le permis d'inférer. De plus, les processus de validations demandent la comparaison de différentes données et énoncés généralement acceptés pour sélectionner ceux qui sont pertinents de ceux qui ne le sont pas. Pedemonte (2002) souligne que comparer peut permettre de réfuter un énoncé par la mise au jour de différence entre ce qui est attendu et ce qui ne l'est pas.

Reid (2002) mentionne que tester une conjecture demande de spécialiser et de comparer. Ici, « comparer » n'est pas nécessairement un processus de RM, il n'y a pas nécessairement inférence d'un énoncé à propos des similitudes et des différences entre les cas étudiés. La simple perception permet de dire si le cas testé est bon ou non. Ce n'est pas ce qui est entendu lorsqu'on dit que comparer est un processus de RM. On peut nommer un processus de RM « comparer » s'il permet d'inférer un énoncé à propos de similitudes et de différences entre des objets ou des relations mathématiques. De même quand Stéphanie, dans l'étude de Máher et Martineau (1996) compare les tours pour savoir si elle a déjà construit l'une d'entre elles, la perception est suffisante. Ce n'est pas dire que cet acte commognitif n'est pas utile à générer des données pour effectuer un RM, mais il ne s'agit pas d'un RM en soi; il faut coupler cet acte de perception avec d'autres actes commognitifs pour juger s'il s'agit d'un RM.

5.3.6 Classifier

Classifier est un processus que quelques auteurs associent au RM. Mason (2001) est l'un de ceux-là. Pour lui, « Classification is not just about making distinctions and

describing properties, but about justifying conjectures that all possible objects with those properties have been described or otherwise captured » (2001, p. 7).

Selon Côté, Gagnon, Perreault et Rogiers (2002), « classier » fait, pour sa part, référence à l'action de former des classes. Le ou les critères de classement ne sont pas préalablement fournis, mais bien déterminés pendant le processus lui-même. Par exemple, on peut demander de classier les triangles sans fournir de critères préalables. Nous serons alors à la recherche de critères communs, d'une régularité qui permettrait de former un nombre restreint de classes. K. H. Lee et Sriraman (2011) ont noté qu'il est difficile pour des élèves de 14 ans de classier les triangles à partir de leurs propriétés plutôt qu'en s'appuyant sur des éléments de similarités basés sur la perception. Il y a ici des propos qui peuvent être liés au RM. Classifier demande davantage que la perception. Il doit y avoir un processus métadiscursif qui permet de s'appuyer sur des énoncés mathématiquement valides.

En même temps, le processus de classification est toujours couplé à un processus de classement. En effet, au fur et à mesure que des critères sont mis de l'avant pour classier des objets mathématiques en jeu, il y a classement de ces objets dans les classes. Le processus de classement joue alors un rôle de test. On teste la classification établie pour s'assurer qu'elle est fonctionnelle, que chacun des objets mathématiques y trouve sa place. Ce qui est inféré lors du processus de classification est un ou des critères de classement.

5.3.6.1 Classifier et le RM

Jones (2000), tout comme Mason (2001), met en lien classier et définir. Mason (2001), par exemple, doute que les élèves aient rencontré beaucoup d'opportunités d'élaborer les propriétés d'objets mathématiques puis d'utiliser ces propriétés en tant

que définition afin de s'engager dans une classification de ces objets à partir de ces propriétés. Jones (2000) met en relief les difficultés rencontrées par des élèves à utiliser des définitions inclusives pour classer les quadrilatères. Ces deux auteurs mettent de l'avant une règle métadiscursive qui contingente le processus « classer » en mathématique, à savoir que l'on s'appuie sur des propriétés et des définitions mathématiques afin de classer des objets mathématiques.

5.3.6.2 Classifier en tant que processus commognitif de RM

Si l'on reformule la définition de classer en termes de RM, on obtient :

Classifier : processus de RM qui, par la recherche de similitude et de différences entre des objets mathématiques, permet d'inférer des énoncés à propos de classes en s'appuyant sur des propriétés ou des définitions mathématiques.

Classifier est un processus important qui permet un développement au niveau objet du discours mathématique en permettant la mise en relation de différents objets discursifs, les uns par rapport aux autres. Il permet de structurer le discours. Il peut être associé à d'autres processus comme « comparer », « conjecturer », « généraliser ». En effet, tout comme « comparer », il s'appuie sur la recherche de similitudes et de différences, mais contrairement à lui, il infère des énoncés à propos de classes. On peut alors le lier à « conjecturer » puisque ces classes peuvent être vraisemblables. De même, si les classes inférées sont étendues à tous les objets de même nature, le processus « généraliser » est mis à contribution. Il peut aussi être mis en relation avec les processus de validation, qui seront présentés plus tard puisqu'il s'appuie sur des propriétés et définitions mathématiques, énoncés généralement acceptés par les mathématiciens.

5.3.7 Les processus de recherche de similitudes et de différences en tant que processus de RM.

Lors de l'analyse des processus « conjecturer », « généraliser », « identifier une régularité », « comparer » et « classifier », on en est venu à différencier chacun de ces processus sur la base, entre autres, de ce qui est généré par chacun: conjecturer, construire un énoncé vraisemblable; généraliser, étendre le domaine d'application d'un énoncé; identifier une régularité, construire un énoncé à propos d'une relation récursive entre des objets mathématiques; comparer : construire un énoncé qui identifie des similitudes et des différences entre des objets ou des relations mathématiques; classifier : construire un énoncé à propos de classes d'objets ou de relations mathématiques. L'élément commun à chacun de ces processus est la recherche de similitudes et de différences entre les objets mathématiques en jeux et le développement d'un discours mathématique de niveau objet, c'est-à-dire en extension, en générant des énoncés à propos d'objets déjà développés. Ces processus sont interreliés. Toutefois, même si des liens étroits les unissent, il est impossible de réduire un de ces processus à un autre. Un de ces processus en peut recycler un autre ou recycler ce qui a été généré par d'autres.

5.4 Les processus de recherche de validation

L'analyse a jusqu'ici laissé de côté un ensemble très important de processus qui sont souvent vus comme le cœur des mathématiques, à savoir les processus qui sont présentés comme garants de la validité d'un énoncé mathématique. Balacheff (1988) définit le RM comme un processus de validation lorsque sa finalité est de déterminer la validité d'une proposition et éventuellement de produire une explication. Dans la littérature, on parle, entre autres, de démontrer, prouver, justifier, argumenter, expliquer et vérifier, comme de processus de validation. La problématique de la

validité d'un énoncé traitée lors du chapitre IV, section 4.1.4 (l'aspect structurel du RM) est alors mise au premier plan.

À travers l'exploration du corpus, différents sens semblent accordés à chacun de ces termes qui sont parfois utilisés comme synonyme. L'objectif est ici de construire une synthèse cohérente dans une perspective commognitive du RM. Même si de traiter de façon séparée chacun de ces termes peut créer une certaine redondance de par les liens qui existent entre chacun d'eux, j'ai préféré une telle présentation afin de

- 1) soulever les différents problèmes rencontrés dans l'analyse de la littérature,
- 2) permettre un regard fin sur chacun.

Dans un premier temps, les termes « expliquer » et « vérifier » seront traités. Dans un second temps, les termes « justifier » et « justification » seront abordés. Dans un troisième temps, la synthèse fera état des différents sens des termes « prouver » et « preuves ». Enfin, dans un quatrième temps, la problématique entourant les termes « démontrer » et « démonstration » seront présentés. Mais avant, je présente quelques mots sur « validation » ainsi que sur les termes « argumenter » et « argumentation ». Par le fait même, un retour sera fait sur le terme « argument » en tant que pas de RM déjà introduit dans la section 4.1 sur l'aspect structurel.

5.4.1 Valider

En mathématique, le concept de validité en est un très important qui a amené le développement de règles strictes du discours mathématique. Ces fameuses règles sont, selon Arsac *et al.* (1992), souvent difficiles à faire apprendre aux élèves. Il faut aussi noter que les termes « valide » ou « validation » sont autant liés au raisonnement en entier (voir chapitre IV) qu'à la conclusion d'un raisonnement.

Tel que présenté au chapitre III, section 3.2.3, Cabassut définit les raisonnements de validation comme des raisonnements qui « établissent la connaissance de la vérité d'une proposition » (p. 28). Pour Cabassut (2005), ceci peut se faire plausiblement ou nécessairement. Ainsi, ces raisonnements de validation ne sont pas tous des raisonnements ayant une structure déductive. Toutefois, tout comme Duval, il spécifie qu'en mathématiques seules certaines formes sont reconnues comme valides par la logique mathématique. Mais en classe du primaire et du secondaire, d'autres formes de processus de validation se construisent. Spécifions que la validité est alors rattachée à un cadre théorique mathématique, c'est-à-dire que les raisonnements valides sont ceux qui permettent de conclure qu'un énoncé est vrai ou vraisemblable selon certaines règles et critères de vérité.

M. C. Cañadas *et al.* (2007), dans leur étude du processus de conjecture, relie valider à tester la conjecture : « [it] involves both making a prediction and verifying the correctness of that prediction by some independent method. This establishes the truth of the conjecture for a new specific case but not in general » (p. 63-64). On retrouve ici aussi la valeur de vérité associée au processus de validation. Par ailleurs, elle est ici très restreinte. Lithner (2008), quant à lui, reprend les propos de Selden et Selden (2003) et définit la validation comme un

mental process of determining the correctness of a sequence of reasoning, which is only partly conscious and can include asking and answering questions, asserting to claims, constructing sub proofs, remembering and interpreting other theorems and definitions, complying with instructions, and feeling of rightness or wrongness » (p.260).

De ce point de vue, le processus de validation est associé à la validation d'un processus de RM, et non uniquement de sa conclusion (même si les deux sont nécessairement liés). Artzt (1999) parle du RM comme de la partie de la pensée mathématique qui comprend entre autres construire des conclusions valides.

De ces écrits, on peut mettre en évidence le lien entre le processus de recherche de validation et la valeur épistémique d'un énoncé. Il est alors possible de construire la définition suivante :

Un RM est un processus de recherche de validation s'il vise à changer la valeur épistémique (c'est-à-dire la vraisemblance ou la vérité) d'un énoncé mathématique.

Contrairement au processus « conjecturer » qui est d'inférer un énoncé vraisemblable, le processus de recherche de validation vise à changer cette valeur d'une façon ou d'une autre. Ce changement peut-être de vraisemblable à plus vraisemblable, de vraisemblable à vrai ou encore, de vraisemblable à faux. Les règles discursives du discours mathématique contingentent le changement de valeur épistémique. C'est en partie cette définition qui permettra de mettre en lumière les particularités des différents processus de recherche de validation répertoriés dans la littérature.

5.4.2 Les quasi-synonymes de processus de recherche de validation : argumenter, expliquer et vérifier

5.4.2.1 Argumenter en tant que synonyme de processus de recherche de validation

Un terme très lié au processus de recherche de validation est celui d'argumentation. La majorité des auteurs de didactiques des mathématiques qui discutent d'argumentation/argumenter le font relativement à la preuve. Boero (2011) inclut autant « conjecturer » que « prouver » dans « argumenter ». Par ailleurs, « justifier » est très fortement lié à « argumenter » chez cet auteur. La majorité des auteurs français différencie « argumenter » de « prouver » sur la base qu'argumenter serait l'art de convaincre et que le RM s'intéresse à la valeur de vérité d'un énoncé. Duval

(1995) soutient que l'on peut convaincre sans se soucier de la véritable valeur de vérité d'un énoncé. Même si raisonner, en mathématiques, n'a pas comme fonction première de convaincre (par exemple, conjecturer a comme fonction première de construire un énoncé vraisemblable), il reste que la fonction de convaincre est toujours inhérente à tout processus de recherche de validation. Comme Pedemonte (2002) le soutient, argumenter en mathématiques est un processus qui sert à se convaincre qu'un énoncé est vrai. Comme il sera développé dans les prochaines sections, lorsque l'on justifie, prouve, démontre, il y a toujours d'une certaine façon une fonction de convaincre qui peut être associée à ces processus de RM, même si cette fonction n'est pas nécessairement mathématique (se convaincre que la solution à un problème est la bonne, se convaincre que l'énoncé construit a du sens, convaincre un collègue que l'énoncé est vrai, convaincre notre enseignant que l'on a compris, etc.)

Les auteurs tels Douek et Scali (2000) et Krummheuer (1995) positionnent le processus « argumenter » comme un processus discursif qui visent à soutenir ou à contredire un énoncé mathématique. Il s'agit donc clairement d'un processus de recherche de validation puisque la valeur épistémique est visée ici. Par ailleurs, comme il semble difficile de différencier « argumenter » de « raisonnement de validation » à partir des écrits en didactique des mathématiques, le choix a été fait de discuter davantage des autres processus de recherche de validation traités dans la littérature. Ce terme sera donc considéré comme synonyme de processus de recherche de validation dans la mesure où il vise à se convaincre que la valeur épistémique associée à un énoncé est bien celle qui y est associée.

5.4.2.2 Expliquer et processus de RM

Les unités d'analyse concernant le terme « expliquer » sont parfois liées à des éléments théoriques (par exemple dans les écrits de Yackel, 2001), parfois axiologiques (c'est le cas de De Villiers (1999) qui attribue au RM une fonction explicative), parfois pratiques (comme dans l'expression « explique ta réponse » qui est présente dans plusieurs tâches scolaires comme de recherche).

Il y a dans l'expression « expliquer » une forte connotation aux discours avec d'autres. Yackel (2001) l'associe à un construit social. Pour Krummheuer (1995), on explique un raisonnement pendant ou après sa réalisation. On explique habituellement à quelqu'un d'autre. Pour Arsac *et al.* (1992), qui reprennent les propos de Balacheff (1987), l'explication est « tout discours tenu par une personne ou un groupe dont l'objectif est de communiquer à d'autres le caractère de vérité d'un énoncé mathématique » (p. 5). Il s'agit alors d'un processus de RM qui, s'il respecte certains critères, pourra être considéré comme preuve ou démonstration. Par ailleurs, expliquer n'est pas toujours considéré comme un raisonnement. Pour Duval (1992-1993), l'explication n'est pas un raisonnement. Tout en étant complémentaires, ces deux démarches, pour reprendre les propos de l'auteur, sont radicalement différentes. « L'explication donne une ou plusieurs raisons pour rendre compréhensible une donnée [...] Or ces raisons avancées ont en réalité une fonction quasi descriptive » (p. 40). Le raisonnement est alors tout autre puisque la valeur épistémique y joue un rôle central⁵⁶. En effet, un processus de recherche de validation vise à changer la valeur épistémique d'un énoncé.

⁵⁶ Ce que Duval associe au raisonnement est associé dans ce modèle au processus de validation.

On peut associer les propos de Duval (1992-1993) à l'expression « expliquer comment ». Par exemple, ce dernier donne l'exemple de l'explication de la règle des signes pour la multiplication de nombres rationnels à l'aide d'un modèle physique. « Expliquer comment » n'est pas un RM. « Expliquer comment » ne demande qu'une description de ce qui a été, est ou sera fait ou encore une description des propriétés d'un objet mathématique sans que ces dernières expliquent pourquoi le résultat est vraisemblable ou vrai. Par exemple, pour diviser deux fractions, j'inverse une des deux et je les multiplie ensemble. Ceci n'est pas un RM, mais une explication du comment.

La conceptualisation de Balacheff (1987), tout comme les propos de Krummheuer (1995), est davantage liée à l'expression « expliquer pourquoi ». L'importance de la valeur épistémique permet alors de l'associer à un processus de recherche de validation qui est un RM et même de le définir comme synonyme de processus de recherche de validation.

À ces deux sens du processus « expliquer » peut être ajouté « expliquer quoi ». « Expliquer quoi » pourrait, en mathématiques, être un processus de RM. En effet, lorsqu'on explique ce qu'est un taux de variation ou une dérivée, l'attente peut être de s'appuyer sur la définition mathématique ou sur les propriétés (Zandieh et Knapp, 2006). Dans ce cas, il y a clairement étude du discours mathématique afin d'inférer sur le quoi en question, la valeur épistémique est alors en jeu.

Des trois sens du terme « expliquer », deux peuvent être synonymes de processus de recherche de validation. Comme il sera discuté plus loin, ce processus de recherche de validation pourra alors être considéré comme un processus de justification, de preuve ou de démonstration.

5.4.2.3 Vérifier et processus de RM

Le terme « vérifier » est aussi polysémique. Premièrement, Arsac (1996) associe le terme « vérifier » à la vérification de la conformité des règles mathématiques lors de la rédaction de démonstrations. Duval (1995) mentionne aussi que la validité d'un raisonnement déductif se fait par vérification de chacun des pas déductifs. D'une certaine façon, cette vérification ne fait que confirmer ce qui a été obtenu par validation. Aucune information additionnelle n'est vraiment ajoutée. Il s'agirait ici davantage d'une activité de contrôle, au sens de Saboya (2010).

Deuxièmement, pour Artzt (1999), une vérification requiert de l'élève d'examiner sa solution finale pour s'assurer que la réponse a du sens. Par ailleurs, cet auteur associe « vérifier » à une stratégie de résolution de problème et non à un processus de RM. On semble ici se situer entre le sens validation d'un énoncé et vérification de raisonnement qui a mené à la validation. Encore ici, l'activité de contrôle (cette fois-ci sémantique) semble mise à contribution.

Troisièmement, « vérifier » est souvent associé à la vérité d'un énoncé. Différents auteurs citent ici de Villiers. Par exemple, pour Brodie (2010) « Verification establishes that something is the case, i.e. sufficient justification has been produced to confirm that a claim is true » (p. 11). De même, Cabassut (2005) souligne le fait qu'en mathématique, on vérifie par le raisonnement. Dans un même ordre d'idées, Bergqvist (2005) s'est intéressé aux attentes des enseignants face à comment les élèves vérifient leur conjecture. Pour ce faire, il a utilisé les quatre niveaux de preuve de Balacheff. Il relie donc « vérification » et « preuve » (au sens de Balacheff) et conséquemment, « vérification » et « validation ». Ici, le processus de vérification est synonyme de processus de recherche de validation.

Un quatrième sens est aussi associé à vérifier. Il s'agit de tester la conjecture sur un ou plusieurs cas, ou encore à l'aide d'une méthode indépendante : « Having verified the conjecture in the case of the even number 60, you cannot reach such a definite conclusion. You certainly do not prove the theorem by a single verification » (Pólya, 1968, p. 6). On peut aussi citer M. C. Cañadas *et al.* (2007) : « Validating the conjecture, like Reid's "testing," involves both making a prediction and verifying the correctness of that prediction by some independent method. This establishes the truth of the conjecture for a new specific case but not in general » (M. C. Cañadas *et al.*, 2007, p. 63-64). Posons un exemple. Dans Hitt et Kieran (2009), une tâche demande aux élèves de vérifier leur calcul en utilisant CAS. L'idée est de juger si la réponse est différente ou similaire. On peut ici associer ce processus à une activité de contrôle, dans le cas d'une réponse similaire, tout va bien. Par ailleurs, si la réponse est différente, il peut y avoir RM pour être en mesure de vérifier que c'est effectivement différent, ou en quoi les deux réponses sont équivalentes. Donc, « vérifier » tel que défini dans ce paragraphe peut mener au RM, mais ce n'est pas nécessairement le cas.

Donc, pour conclure, vérifier peut être synonyme de valider, mais est davantage associé au contrôle de son activité mathématique qu'à un processus de RM.

5.4.3 Justifier

Le terme « justifier » semble un élément central au RM, comme souligné par la catégorisation de Ball et Bass (2003), et se décline de différentes façons dans la littérature en didactique des mathématiques qui s'intéresse au RM. On retrouve entre autres un ensemble de termes associés à ce dernier comme « prouver » et « démontrer » ou encore « vérifier », « valider », « expliquer » traités précédemment. Par ailleurs, il n'est pas toujours abordé comme un processus de RM en soi. Souvent,

comme il en sera question dans les prochaines sections, le sens qu'on lui accorde s'associe davantage au rôle des différents éléments d'un pas de RM.

Dans les prochains paragraphes, une première section mettra en lumière différents sens associés à « justification », « justifier » et « justifié ». Ces termes sont parfois substitués aux termes « preuve », « prouver » et « prouvé ». C'est le cas chez certains auteurs tels Harel et Sowder (1998, 2007) qui, dans une présentation de leur cadre d'analyse de la preuve (centré sur l'élève), mentionnent que leur étude s'intéresse « in how individuals prove or justify » (Harel et Sowder, 1998, p.243) et dans une autre mentionnent qu'ils s'intéressent à « proof in mathematics, both informal justifications and the types of justification usually called mathematical proofs » (Harel et Sowder, 2007, p.805). Ensuite, une synthèse de comment « justifier » peut s'insérer dans un modèle conceptuel du RM sera présentée. Cette synthèse permettra de construire une caractérisation du processus justifier campée dans une perspective commognitive.

5.4.3.1 Les différents sens associés aux termes justification, justifier et justifié.

Peu d'auteurs définissent les termes « justifier » ou « justification ». Maher et Martino (1996), Ball et Bass (2003) et Yackel (2001), tout en liant d'une façon ou d'une autre le RM et le terme justification, le font.

Maher et Martino (1996) se sont intéressées au développement des justifications mathématiques d'une élève sur une période de cinq ans. Afin de caractériser ce qu'ils entendent par « justification », ils reprennent les propos de Balacheff (1987) à propos de la différence entre « explication » (ce que Maher et Martino appellent une justification), « preuve » et « démonstration » ainsi :

In his research, Balacheff makes a distinction among different kinds of proof. These differences are with respect to providing a justification, offering a proof and providing a mathematical proof. Balacheff considers justification as a form of discourse that takes place for the purpose of establishing the validity of a statement for another individual. He refers to a proof as it is conveyed as an explanation that is accepted by a community at a given time. For him, a mathematical proof is one that must be accepted by a mathematician » (Maher et Martino, 1996, p. 198).

Ainsi, la justification est ici associée à une production discursive qui vise à établir la validation d'un énoncé. Ce discours est dirigé vers un autre individu. En s'appuyant sur les propos de Balacheff, ces auteurs définissent la justification comme un discours moins contraignant que la preuve (formel ou non).

Ball et Bass (2003) ont développé un cadre pour l'étude des raisonnements de justification qu'ils appellent aussi « preuve ». Dans ce cadre, le raisonnement de justification est défini comme suit : « A process of reasoning typically consists of a sequence of steps, each of which has the form of justifying one claim by invocation of another, to which the first claim is logically reduced » (p.32). On voit ici l'idée de processus dans l'enchaînement des différents pas de RM. De plus, ce qui est entendu par « logically reduced » semble associé à une forme déductive, telle que définie au chapitre IV. De même, l'emploi du terme *justifying* dans la définition du raisonnement de justification semble lié à l'aspect structurel, à savoir que la conclusion d'un pas sert de données ou de règle dans un pas subséquent. Pour davantage caractériser le processus de justification, ces auteurs ajoutent que ce dernier s'appuie sur deux fondations :

One foundation is a body of public knowledge on which to stand as a point of departure and that defines the granularity of acceptable mathematical reasoning within a given context or community. The second foundation of mathematical reasoning is language - symbols, terms, and other representations and their definitions - and rules of logic and syntax for their meaningful use in formulating claims and the networks of relationships used to justify them. (Ball et Bass, 2003, p. 30).

Ces deux éléments sont fortement liés à la définition de discours mathématique énoncée par Sfard (2008) qui est, un type particulier de communication qui se distingue par son répertoire d'actions permises et la façon dont ces actions sont associées à des réactions. Un discours se distingue d'un autre par son vocabulaire, ses médiateurs visuels, ses routines et les énoncés qu'il appuie. Les deux fondements du raisonnement de justification semblent faire référence à ce qui distingue un discours d'un autre.

Yackel (2001) s'intéresse à la justification en tant que construit social. Il s'agit alors d'un aspect du discours qui a une fonction bien particulière. « They give [les élèves et l'enseignant] mathematical justifications in response to challenges to apparent violations of normative mathematical activity (Cobb *et al.*, 1992) » (Yackel, 2001, p. 5). De cette perspective, les normes sociales et sociomathématiques deviennent alors objets d'étude, puisque ce sont ces normes qui s'actualisent à travers le processus de justification. Ainsi, le processus de justification est « the means by which assertions are legitimized (i.e., by which assertions become mathematical truths for a community) » (Yackel et Hanna, 2003, p. 234). Ici, le changement de valeur épistémique est mentionné. On remarquera aussi que c'est à travers l'actualisation des normes sociales et sociomathématiques que l'on peut observer le processus de justification.

De ces premiers auteurs, il est possible de retirer que le processus « justifier » est un processus social qui permet de valider des énoncés du discours pour un individu ou un groupe d'individus. Il semble donc être lié au changement de valeur épistémique d'un énoncé en plus d'être un processus social. Que ce soit chez Martino et Maher (1996), chez Ball et Bass (2003) ou chez Yackel (2001), l'aspect social apparaît dans l'idée que l'on justifie un énoncé aussi pour quelqu'un d'autre en s'appuyant sur un corpus de savoirs, de règles, de normes, qui est publiquement reconnu.

Plusieurs auteurs utilisent les termes « justifier », « justification » et « justifié » sans nécessairement les définir. En particulier, dans les écrits portant sur les quatre modèles du RM présentés au chapitre III, il est possible de ressortir quelques sens de ces termes. Bien qu'aucun de ces quatre auteurs n'ait théorisé autour du concept de processus de justification, il est possible de ressortir de l'analyse de ces écrits quelques éléments intéressants pour mieux comprendre ce qui est entendu par justifier ou justification. Ces éléments, exposés dans les prochains paragraphes, permettront de mieux caractériser ce processus d'un point de vue commognitif en enrichissant ce qui a été ressorti jusqu'ici.

Duval (1992-1993) introduit le terme « justification » pour différencier l'explication du raisonnement. Comme discuté plus haut, l'« explication » est pour lui un type de description. Pour Duval, toute argumentation (ce qui est associée ici à processus de recherche de validation) est justification :

Les formes de raisonnement intrinsèquement liées à l'utilisation d'un langage, naturel ou formel, sont très variées. On distingue classiquement le syllogisme aristotélicien, la déduction à partir d'un système d'axiomes et de définitions, le raisonnement par l'absurde, les inférences sémantiques et l'argumentation c'est-à-dire toute justification ou toute réfutation spontanée d'un propos dans une discussion ou un débat (Duval, 1995, p.211).

Pour Duval, la justification d'un énoncé implique deux opérations : la production des raisons et l'examen du pas de RM. Un point important, que je relie à l'idée de justifier dans le modèle de Duval, est l'idée qu'un processus de raisonnement change la valeur épistémique d'un énoncé. Le passage des données à la conclusion est un passage qui permet le changement de valeur épistémique associée à l'énoncé. On peut ici faire un lien avec la règle qui permet ce passage. Ce que Duval (1995) nomme la production des raisons pourrait donc être lié à la règle d'un pas déductif.

Lithner (2008), pour sa part, associe directement la justification à la règle d'un pas de raisonnement. Pour qu'une justification soit acceptable, elle doit être fondée mathématiquement. L'auteur fait ici référence au *permis d'inférer* du modèle de Toulmin, qui doit être fondé mathématiquement. C'est pour clarifier l'idée de justification acceptable qu'il introduit le concept d'ancrage (anchoring). Pour Lithner, l'acceptabilité d'une justification s'appuie sur les liens entre la règle et les propriétés pertinentes des composantes du RM, ce qu'il appelle « ancrage ». Il est possible d'associer le concept d'ancrage au fondement (backing) dans le modèle de Toulmin.

Pour Cabassut (2005), les termes « justifier », « prouver/démontrer », « vérifier » sont tous associés à la démonstration. Lorsque lui-même utilise le terme « justifier » ou « justification » pour analyser certains raisonnements mathématiques, ces propos semblent être reliés à l'utilisation d'un type particulier de règles: « Mais nous considérons que le recours à une action, par exemple une observation ou une manipulation, pour justifier une conclusion à partir de prémisses ne relève pas de l'intuition » (p.57). À d'autres occasions, justifier fait référence à un pas de RM qui valide l'utilisation de cette règle. Ce deuxième cas pourrait être associé au fondement (backing) dans le modèle de Toulmin.

Pour G. J. Stylianides (2005), l'utilisation d'une preuve ou d'un argument permet de justifier une conjecture (au sens de la rendre valide mathématiquement). Contrairement à Lithner (2008) et Cabassut (2005), il ne relie pas directement « justification » à « permis d'inférer », l'aspect processuel semble davantage sous-jacent. Pour cet auteur, les processus d'argumentation ou de preuve sont vus comme des processus de justification. En ce sens, c'est l'ensemble des pas de raisonnement constituant le processus de preuve ou d'argumentation qui permet de justifier la validité d'un énoncé et non uniquement la règle d'un pas. Ce processus ne revêt pas nécessairement une structure déductive.

Pour Duval (1995) et Lithner (2008), « justifier » ou plutôt la justification peut être associé à un élément d'un pas de raisonnement, à savoir le permis d'inférer. Par ailleurs, chez Cabassut (2005) et G. J. Stylianides (2005), l'aspect processuel transparaît dans l'utilisation qu'ils font de ces termes. En effet, « justifier » ou « justification » fait alors référence à, soit un pas de raisonnement ou à un enchaînement de pas de raisonnement. La caractéristique principale rattachée à ce processus est toujours le changement de valeur épistémique de l'énoncé.

On peut remarquer le même phénomène dans le cadre de Simon et Blume (1996) développé pour étudier les justifications des élèves en géométrie, cadre qui a été réutilisé par Lannin (2009) dans le domaine de l'algèbre. Ce cadre classifie les justifications (en tant que discours) selon 5 niveaux (0 à 4). La figure 5.4 présente une description de ces différents niveaux. Par l'analyse du discours construit par la communauté de la classe, ce cadre permet de voir l'évolution des enchaînements de pas de raisonnement utilisés par différents membres de la communauté. L'aspect processuel, même s'il présente peu de transparence dans la description des différents niveaux, le devient par l'utilisation qui en est faite dans l'analyse. Pour ces auteurs, la justification est le processus qui permet de valider un énoncé. De plus,

an argument to justify an idea must proceed from knowledge that is taken-as-shared in the community, must be seen by the community as logical (i.e., each assertion following reasonably from the previous one), and the idea must fit with knowledge that has previously been accepted by that community (Simon et Blume, 1996, p.7).

Ici encore apparaît le concept de validité. De même, il est clair, dans les écrits de ces auteurs, que les niveaux souhaités sont les niveaux 3 et 4, et que l'enseignement devrait amener les élèves à développer leur processus de justification en ce sens. Ce sont, pour ces auteurs, les types de justifications acceptables en mathématiques scolaires.

Niveau 0	Aucune justification
Niveau 1	Appel à une autorité extérieure
Niveau 2	Démonstration empirique ⁵⁷
Niveau 3	Justification déductive qui s'appuie sur un exemple générique
Niveau 4	Justification déductive indépendante de tout cas particulier

Figure 5. 4 Cadre de Simon et Blume (1996)

Dans un même ordre d'idée, Boero *et al.* (2010), sans définir les termes « justifications », « justifier » et « justifié », utilisent ces termes en rapport avec le modèle de Toulmin. Ils diront que la preuve, selon l'approche de Toulmin, est « a set of rational justifications expressed as inferences » (p. 3). En fait, les auteurs qui traitent du modèle de Toulmin, tel Boero *et al.* (2010), emploient le terme « justifier » ou « justification » pour parler du rôle des différents éléments d'un pas de RM : les données d'un pas de RM justifient la conclusion; le permis d'inférer justifie le lien

⁵⁷ L'énoncé est testé sur quelques cas particuliers

entre les données et la conclusion; le fondement justifie le permis d'inférer. Par ailleurs, lors de la description de l'activité mathématique des élèves, Boero *et al.* (2010) associent le terme « justifier » à la recherche par l'élève des différents éléments du pas de RM. On retrouve des expressions comme *l'élève a trouvé des données qui justifient la conclusion* ou encore, *l'élève est capable de justifier chacune des étapes de la preuve*.

Ainsi, le processus de justification est vu par plusieurs auteurs d'un point de vue social au sens où plus d'un individu peut être impliqué et que le processus s'appuie sur un corpus de savoirs publiquement admis. Ce processus est lié à un changement de valeur épistémique d'un énoncé par la recherche de données, d'un permis d'inférer ou d'un fondement qui permet ce changement. De plus, certains auteurs semblent qualifier que ce que j'appellerais la restructuration finale du processus de justification, à savoir que ce dernier doit prendre une forme strictement déductive et s'appuyer uniquement sur des énoncés mathématiques préalablement acceptés par la communauté. On considèrera alors comme non acceptables les processus de justification qui s'appuient sur l'appel à l'autorité, ou encore sur l'exemplification qui n'est pas associée à l'exemple générique.

5.4.3.2 Justifier d'un point de vue commognitif

Plusieurs éléments qui émergent de l'analyse de la littérature contribuent à conceptualiser le processus « justifier » dans une perspective commognitive. Comment une perspective commognitive pourrait-elle permettre de parler du processus de justification de façon cohérente avec ce qui est présent dans la littérature synthétisée? En tant que processus de RM, la revue de la littérature permet de définir le processus « justifier » comme un processus commognitif qui oriente le discours (l'activité de communication) vers la recherche de données, de permis d'inférer et de

fondements qui permettent de changer la valeur épistémique d'un énoncé de vraisemblable à vraie et qui aboutit à une réorganisation du discours à l'aide d'une structure déductive.

« Justifier » serait un processus moins contraignant que « prouver » et « démontrer », mais la validation à partir de plusieurs exemples (ou même d'un seul), à l'exception d'un processus qui s'appuie sur un exemple générique, serait considérée comme non souhaitable dans une classe de mathématiques. Une question se pose alors, existe-t-il des « situations » où le discours mathématique permet de justifier un énoncé (ou un RM) sans la réorganisation en une forme déductive? Si oui, quelles sont les caractéristiques de ces « situations »? Lorsque l'on construit une conjecture, pouvons-nous être en mesure de la justifier, mais sans la prouver? Comme le mentionne Pólya (1958), « Nous assurons la validité de nos connaissances mathématiques par un raisonnement démonstratif, tandis que nous *justifions* nos hypothèses par des raisonnements “plausibles” » (p. ix, italique ajouté)⁵⁸. Lors d'un processus de conjecture, le discours est orienté vers la recherche d'un énoncé vraisemblable. Par ailleurs, je peux justifier cet énoncé en m'appuyant sur le processus de conjecture que j'ai préalablement effectué. Prenons l'exemple présenté à la figure 5.5. La personne qui raisonne justifie sa conjecture à l'aide des exemples qu'elle a utilisés pour construire sa conjecture. Une partie du processus de conjecture est recyclée et vient alors jouer le rôle de données dans un nouveau pas de RM. Par ailleurs, ce processus « justifier » ne sera pas accompagné d'un changement de valeur épistémique de vraisemblable à vraie, mais d'un changement de valeur épistémique de vraisemblable à plus vraisemblable.

⁵⁸ Dans la version anglaise, on lit plutôt « we secure our mathematical knowledge by demonstrative reasoning, but we support our conjectures by plausible reasoning » (p.v).

Problème : quels nombres sont décomposables en une somme de nombres consécutifs?

Discours possible :

Essayons avec 5 : $5 = 3 + 2$. 5 est possible.

$9 = 5 + 4$. 9 est aussi possible.

$15 = 7 + 8$. 15 est aussi possible.

Je peux donc conjecturer que les nombres impairs sont décomposables. En effet, 5, 9 et 15 sont des nombres impairs et sont tous décomposables en une somme de nombres consécutifs. Ma conjecture tient la route.

Figure 5. 5 Un exemple du processus justifier

Il y aurait donc deux « plans » au processus justifier. Le premier serait un processus associé à la recherche de justification d'une conjecture qui prendrait naissance dans ledit processus. Ce processus de justification permet de changer la valeur épistémique vraisemblable d'un énoncé à plus vraisemblable, un peu comme le souligne Cabassut (2005) à propos des processus de validation qui peuvent être plausibles. Le second serait un processus associé à la recherche de justification qui changerait la valeur épistémique d'un énoncé de vraisemblable à vraie sans être considéré nécessairement comme un processus de preuve. Si l'on reprend l'exemple présenté à la figure 5.5, on peut continuer le processus discursif en se penchant maintenant sur la structure des nombres impairs et en dégagant un permis d'inférer qui permet de changer la valeur épistémique de l'énoncé de vraisemblable à vraie, à savoir que tout nombre impair peut s'écrire comme $2x + 1 = x + (x + 1)$, soit deux nombres consécutifs. Ce processus colle davantage avec ce qui est reporté dans la littérature en tant que processus de justification (qui serait ici un processus de preuve), mais le premier est tout aussi important. Le processus de justification joue sur la valeur épistémique d'un énoncé, mais ne transforme pas nécessairement en énoncé vrai par rapport à un discours déjà construit. Ainsi, on peut définir le processus justifier comme :

Justifier est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique permet de modifier la valeur épistémique d'un énoncé.

Le changement de valeur épistémique n'est pas nécessairement un changement de vraisemblable à vraie. Les éléments sur lesquels s'appuie le processus justifier sont contingentés par des règles discursives qui sont partagées par une certaine communauté. Par exemple, le changement de valeur épistémique de vraisemblable à vrai se fait selon certaines règles, la structure déductive caractérise ce passage. Le discours doit passer par une restructuration déductive. De même, de vraisemblable à plus vraisemblable ne peut se faire sur n'importe quelle base, mais le discours n'est plus contraint par une structure déductive.

5.4.4 Prouver

Depuis la Grèce Antique, « prouver » est considéré comme une activité essentielle des mathématiques (Hanna et Jahnke, 1993). Il y a déjà plusieurs années que les chercheurs en didactique des mathématiques s'intéressent au processus de preuve. Le site Internet *La lettre de la preuve*⁵⁹ créé entre autres par Balacheff en 1997 permet de le constater par sa richesse en textes de diverses natures portant sur la preuve. Pour tenter de faire le lien entre le concept de RM et le processus de preuve, les textes qui portent explicitement sur le RM et le relient à la preuve ont été analysés.

Dans un écrit synthèse, Reid (2010) met en évidence trois sens différents du terme « *proof* ». Le premier est son utilisation en tant que concept mathématique, sans définir ce qu'il entend par concept mathématique. Il souligne que même s'il est

⁵⁹ www.lettrede lapreuve.org

possible d'inférer que l'auteur se réfère à la preuve en tant que concept, il est difficile de qualifier ce dernier. Le deuxième sens est l'utilisation du terme « *proof* » en tant qu'objet mathématique qui peut être distingué d'autres objets par sa forme et ses fonctions. En particulier, la preuve en tant qu'objet a une fonction de convaincre. Enfin, le troisième sens est celui de preuve en tant que processus psychologique ou social. Reid (2010) différencie les processus psychologiques et les processus sociaux.

Quelques éléments peuvent ici être soulignés. Le concept de preuve peut aussi bien faire référence à un objet qu'à un processus, et le souligner ne semble pas jeter un éclairage différent sur le sens que l'on accorde à « preuve ». On se souviendra d'ailleurs que les objets mathématiques sont des objets abstraits d'un point de vue commognitif et donc, que la ligne entre concepts et objets mathématiques semble bien mince, sinon inexistante. Le sens objet fait référence entre autres aux textes qui jouent le rôle de preuve, ce qui est, d'un point de vue commognitif, une réalisation.

La différence entre processus psychologiques et sociaux, soulignée par Reid (2010) est plus ou moins pertinente dans la perspective adoptée ici, à savoir la perspective commognitive. En effet, dans cette perspective, les processus psychologiques sont une version individualisée de processus sociaux. Les caractéristiques de chacun se retrouvent être les mêmes. Par ailleurs, Reid (2010) donne deux caractéristiques au processus « prouver », qu'il soit psychologique ou social : la forme (déductive ou non) et le but (valider la vérité d'une proposition). L'aspect structurel présenté au chapitre IV peut être mis en parallèle avec la forme telle que Reid la présente. Toutefois, dans le cadre de cette thèse, les processus de RM peuvent être caractérisés par différentes structures. Une structure n'est pas réservée à un processus en particulier. Ainsi, selon la synthèse de Reid (2010), la validité d'un énoncé et la structure déductive semblent des caractéristiques très importantes associées au processus de preuve.

Dans un autre écrit synthèse, Balacheff (2008) s'est intéressé aux différentes épistémologies sous-jacentes aux façons d'aborder la preuve (ou le processus « prouver ») dans la littérature en didactique des mathématiques. Il souligne cinq positions épistémologiques, ainsi que les différents apports de chacune sur le concept de preuve. Pour l'ensemble de ces positions, il souligne que peu importe le sens donné au terme preuve, cette dernière ne prend existence qu'après la formulation d'un énoncé : « Only once a statement has been articulated can one enter the process of validating it, proving it, arguing about it, or justifying it » (p. 502). La première position épistémologique s'appuie sur l'apport des mathématiques sur le processus de preuve en général, la preuve en mathématiques étant vue comme le meilleur exemple de rationalité. Cette position a mis l'accent sur l'aspect formel de la preuve et a placé l'organisation déductive comme centrale. L'importance du formalisme met l'accent sur l'exactitude syntaxique (Cyr, 2006).

La seconde position a trait à la nature idiosyncrasique de la preuve. Harel et Sowder (1998) qualifient le processus de preuve d'idiosyncrasique, c'est-à-dire que l'élève développe son propre processus de preuve en réaction à son environnement. Chez Harel et Sowder, la nature cognitive et la nature située du développement du processus de preuve sont mises de l'avant. Pour eux, le processus de preuve se développe individuellement en réaction à son environnement et non discursivement dans un mouvement d'individualisation et de (re)communication.

La troisième position voit la preuve en tant qu'élément central de la pensée mathématique, ce qui différencie les mathématiques des autres domaines :

The process of building a valid proof is clearly a complex one: it involves sorting out what is given—the mathematical properties that are already known or can be assumed—from what is to be deduced, and then organising the transformations necessary to infer the second set of properties from the first into a coherent and complete sequence. (Healy et Hoyles, 1998, p. 1).

On peut y noter l'organisation particulière du processus, il s'agirait d'une caractéristique propre aux processus de preuve en mathématiques.

La quatrième position place la preuve en tant qu'outil essentiel et non en tant qu'élément central : Hanna et Jahnke (1996) suggèrent que la preuve est née d'un besoin de justification. C'est donc un outil que se donnent les mathématiciens pour valider leur construction de la réalité : « In particular proof cannot be taught or learned without taking into consideration the relationships of mathematics to reality » (Hanna et Jahnke, 1996, p. 902). Peu importe que la preuve soit vue comme un élément central ou comme un outil, il n'en demeure pas moins qu'il s'agit d'une activité incontournable du travail de mathématicien (Cyr, 2001).

Enfin, la cinquième fait le lien entre le théorème, la preuve et la théorie. Mariotti (1997, dans Balacheff, 2008) situe l'importance de la preuve dans la construction de la théorie mathématique. Ici, l'organisation particulière des mathématiques tout comme la nature dialogique de la preuve sont mises en lumière, en tant que construits sociaux. La structuration du discours mathématique se fait en fonction d'une théorie en développement.

De ces différentes épistémologies sous-jacentes à la preuve, plusieurs éléments sont ici à souligner et à replacer dans une perspective commognitive : la construction préalable d'un énoncé à valider, la forme particulière que prend une preuve, la

complexité du processus de preuve, le rôle de la preuve dans la validation et les liens entre la théorie mathématique et le processus de preuve.

5.4.4.1 Quelques définitions liées au processus prouver

Avant de caractériser le processus prouver d'un point de vue commognitif, voici une analyse de définitions du terme « prouver », ou preuve, retrouvées dans la littérature. Reid et Zack (2009) associent tout raisonnement déductif au processus de preuve : « We use the words prove and proving to refer to the activity of reasoning deductively, regardless of how this reasoning is expressed, and what purpose it serves » (p. 134). Pour ces deux auteurs, la forme déductive est nécessaire à la preuve. Par ailleurs, le formalisme et la fonction du RM ne caractérisent pas le processus de preuve en tant que tel. Seule la structure est mise de l'avant. L'importance de la structure déductive est aussi mise de l'avant par Maher (2009) : « Proof making is a special type of mathematical activity in which children attempt to justify their claims by deductive argumentation » (p.121).

Pour Mariotti (2000), « [p]roving consists in providing both logically enchainned arguments which are referred to a particular theory, and an argumentation which can remove doubts about the truths of a statement » (p. 30). En plus de la structure déductive (*logically enchainned arguments*), deux autres éléments sont ici soulignés : l'encrage dans une théorie mathématique et la valeur de vérité de l'énoncé à prouver. Par ailleurs, Mariotti (2000) ajoute que « any mathematical theorem is characterised by a statement and a proof and that the relationship between statement and proof makes sense within a particular theoretical context, i.e. a system of shared principles and inference rules » (p. 29). Ainsi, le processus de preuve n'a de sens que si l'on situe l'énoncé à prouver à l'intérieur d'une théorie mathématique. Le lien est ici important entre « prouver » et la construction d'une théorie mathématique. Par

ailleurs, l'aspect social est aussi important. Même si l'aspect social est souligné par plusieurs auteurs, ce n'est pas le cas de la place de la théorie, par exemple chez Reid et Zack (2009).

Dans son étude des processus de validation, Balacheff (1988) définit la preuve comme une explication qui est acceptée socialement. Pour ce dernier, l'explication permet d'abord à une personne d'établir et de garantir la vérité d'un énoncé. La garantie de vérité a déjà été soulignée par Mariotti (2005). La preuve vise, lorsque communiquée à un autre interlocuteur, à « rendre intelligible [...] la vérité de la proposition déjà acquise pour le locuteur » (p. 28). On peut tirer des écrits de Balacheff que des règles plus strictes encadrent le processus de preuve que celles qui encadrent d'autres processus de validation. Plusieurs informations pertinentes peuvent être retenues de ce dernier dans le cadre du processus de preuve. Pour cet auteur, le processus de validation est intrinsèquement lié à la situation au sens de la TSD (Brousseau, 1998). Ainsi, certaines situations appellent l'élève à mettre en œuvre des processus de validation (c'est-à-dire produire une explication, une preuve ou une démonstration) et d'autres non. Par ailleurs, la situation peut amener différents processus de validation, mais ne les détermine pas non plus, ce que je peux associer à la contingence du discours mathématique.

Pour Harel et Sowder (2007),

a proof is what establishes truth for a person or a community. With this interpretation, "proof" connotes an activity that can permeate the whole mathematics curriculum, from kindergarten on as well as throughout the historical development of mathematics (p. 807).

De plus, « [p]roving is the process employed by an individual (or a community) to remove doubts about the truth of an assertion. The process of proving includes two

subprocesses: ascertaining and persuading » (p. 808). Cette définition est très large et la nature idiosyncrasique, mise en relief par Balacheff (2008), la centre surtout sur l'individu, influencé par une tradition cognitiviste.

Dans un même ordre d'idées, Stylianiou, Blanton et Knuth (2009) définissent la preuve de façon à ce que l'on puisse étudier son développement au primaire.

But, by "proof in the elementary grades", we are not referring to how a mathematician might view proof. Instead, this section adopts a broader interpretation of proof as a socially constructed process whose norms for what constitutes "acceptable" arguments have fluid boundaries that are, to an extent, unique to the community it serves. What it takes to convince a child is different than what it takes to convince a mathematician (p. 65).

Cette définition se rapproche des propos de Harel et Sowder (2007), mais l'aspect social y est davantage mis de l'avant.

Chez ces trois derniers auteurs, la nature sociale du processus « prouver » est présente et la valeur épistémique de l'énoncé aussi. Par ailleurs, la cohérence entre le discours mathématique scolaire et celui des mathématiciens est plus ou moins tenue en compte. C'est ce qu'a voulu faire A. J. Stylianides (2007a, 2007b) dans le but d'étudier la preuve à l'élémentaire. Ce dernier a cherché à définir la preuve de façon cohérente, autant avec ce qui est typiquement accepté par les mathématiciens que ce qui est à la portée des élèves, en fonction de leur niveau scolaire. Il définit *proof* comme suit :

Proof is a mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics:

1. It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification;

2. It employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and
3. It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community (2007a, p. 291).

Selon les dires de l'auteur, sa définition met l'accent sur le produit final d'une exploration mathématique. Contrairement à certaines définitions, telles celles de Harel et Sowder (2007), de Balacheff (1988) et Stylianiou, Blanton et Knuth (2009), la définition de A. J. Stylianides (2007a) ne considère pas comme processus de preuve les raisonnements qui sont considérés comme invalides du point de vue de la communauté des mathématiciens, telle la preuve à partir d'un exemple (non générique). Le terme « raisonnement valide » réfère à la forme déductive et non à ce qui a été précédemment établi dans cette thèse au chapitre IV. Tout comme pour Reid et Zack (2009), le formalisme n'est pas mis de l'avant. Le terme approprié laisse une certaine latitude aux réalisations du RM.

Ainsi, la définition de A. J. Stylianides (2007a) synthétise bien plusieurs points soulignés par d'autres auteurs : l'importance de la structure déductive, de la théorisation, du changement de valeur épistémique de vraisemblable à vraie (ou faux). Ceci me permettra de caractériser le processus « prouver » d'un point de vue commognitif.

5.4.4.2 Prouver d'un point de vue commognitif

Dans les écrits précédemment analysés, plusieurs insistent sur l'aspect social de la preuve. D'un point de vue commognitif, les règles qui régissent le discours mathématique le contingentent, mais ne le déterminent pas : « It is important to understand that the claim of contingency does not regard the proof as such but rather

the metadiscursive rules that govern the activity of proof construction » (Sfard, 2008, p. 207).

La définition de A. J. Stylianides (2007a, 2007b) peut être reformulée en termes commognitifs sans trop de changements :

Le processus prouver est un processus métadiscursif qui dérive des énoncés pour statuer de la validité d'un énoncé et qui a les caractéristiques suivantes :

1. il s'appuie sur des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et disponible sans autre justification;
2. il s'appuie sur des règles du discours valides (du point de vue du discours mathématique) et connues ou accessibles à la classe;
3. il utilise des réalisations appropriées et connues ou accessibles à la classe.

En fait, formulée de cette façon, la définition de A. J. Stylianides (2007a, 2007b) est très similaire à la définition que Sfard (2008) donne de preuve : « a sequence of endorsed narratives, each of which is deductively inferred from previous ones and the last of which is the narrative that is being endorsed » (p. 232). La reformulation met davantage en évidence la composante située du RM ainsi que les réalisations propres au discours qui peuvent être utilisées. Par ailleurs, cette définition, tout en se positionnant dans une perspective commognitive, ne caractérise en fait que la phase finale du processus prouver, comme le souligne Mariotti (2005). Le processus qui mène à la construction d'une preuve ne possède pas tout au long de son déroulement l'ensemble des caractéristiques présentes dans cette définition. La définition de Boero *et al.* (2010) aide à faire ce pas de plus.

Boero *et al.* (2010) définissent le processus « prouver »

as a cognitive, culturally situated activity engaging three modes of reasoning:

- Mode 1: exploration and production of reasons for validity of the statement;
- Mode 2: organisation of reasoning into a cogent argumentation;
- Mode 3: production of a deductive text according to specific cultural constraints concerning the nature of propositions and their chaining (p. 14).

Contrairement aux définitions précédentes, cette définition met en évidence les caractéristiques d'un processus en se centrant sur un déroulement dans le temps (exploration, organisation, production).

En s'appuyant sur les éléments présents chez plusieurs auteurs et sur la définition donnée de processus de recherche de validation, toujours dans une perspective commognitive, il est donc possible de définir le processus « prouver » comme suit :

Prouver est un processus de RM qui, par la recherche de données, de règles et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique de vraisemblable à vraie d'un énoncé. Ce processus est contingenté par :

1. des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et disponibles sans autre justification;
2. une restructuration finale déductive;
3. des réalisations appropriées et connues ou accessibles à la classe.

La structure déductive est un élément important du processus de preuve qui est associé ici à l'idée de rigueur mathématique. Les règles, du discours mathématique qui est à développer, demandent que tout processus de recherche de validation soit restructuré de façon déductive. Il est ici important de souligner que le processus de preuve n'est pas à tout moment caractérisé par une structure déductive. Ensuite, l'idée de théorisation soulignée entre autres par Mariotti (2000, 2005) est associée ici au fait

que le processus s'appuie sur un corpus d'énoncés acceptés comme vrai. La fonction de systématisation du processus de preuve (de Villiers, 1999) est ici prise en compte. De même, par l'ouverture à des réalisations non formalisées, le processus « prouver » peut se développer dès l'école primaire.

Je terminerai en soulignant que le processus « prouver » se différencie du processus « justifier » par son lien avec un potentiel de théorisation. Le processus « prouver » est davantage contingenté que le processus « justifier ». Il doit nécessairement être restructuré déductivement, il doit s'appuyer sur un ensemble d'énoncés cohérents avec le discours mathématique de l'expert, même si réalisé différemment.

5.4.5 Démontrer

Les termes « démonstration » et « démontrer » sont utilisés essentiellement dans la littérature francophone. En anglais, on utilisera plutôt *formal proof*, *proof* ou encore *proving* en distinguant plus ou moins les trois. Comme la littérature qui porte sur le *formal proof* est surtout centrée sur l'enseignement universitaire, je me concentrerai sur la littérature francophone. Les cas de *proof* et *proving* ont été traités dans la section précédente.

Un premier élément à souligner est que le terme « démonstration » est davantage présent que le terme « démontrer ». Cette remarque met en relief la nature objectivée de la démonstration. Les propos l'entourant sont donc davantage sur ce que certains auteurs, tel Balacheff (1988), appellent le produit du raisonnement ou encore la démonstration en tant que texte (Reid, 2010). Il convient alors de préciser que d'un point de vue commognitif, la démonstration comme entendue par plusieurs peut être posée comme une composante du processus « démontrer », à savoir la réalisation finale qui en découle. L'étude de la littérature qui aborde la question de la

démonstration permet de ressortir plusieurs caractéristiques qui peuvent éclairer le processus « démontrer ».

On note beaucoup de similitudes entre preuve et démonstration. Par exemple, Pedemonte (2002) définit la démonstration comme suit : « la démonstration est une chaîne déductive de pas constitués par trois termes : les données, un énoncé conclusion, un théorème qui permet le passage des données à la conclusion » (p.46). On retrouve ici la structure déductive associée précédemment au processus « prouver ». De même, Balacheff (1988) accorde une structure particulière à la démonstration qui doit suivre des règles déterminées. Arsac *et al.* (1992), en s'appuyant sur les propos de Balacheff, soulignent la nature sociale de cette structure qui s'appuie sur une théorie mathématique. Ceci peut être lié aux règles qui contingentent le processus de preuve, ainsi qu'à la fonction de systématisation du processus de preuve. De plus, les propos de Francisco et Maher (2005) sur la preuve pourraient certainement qualifier le processus « démontrer » : « Proofs are paramount in mathematics and mathematical learning. They provide legitimacy to mathematical solutions, claims and forms of reasoning » (p.368).

Par ailleurs, plusieurs auteurs considèrent que la preuve est moins rigoureuse que la démonstration. C'est le cas de Cabassut (2005), de Balacheff (1987) et d'Arsac *et al.* (1992). Elle (la preuve) sera acceptée par une communauté comme valable, mais pas nécessairement par les mathématiciens. Ainsi, le terme « démontrer » dans la littérature, couvre aussi un processus discursif plus contraint que le processus « prouver ». Un élément souvent souligné est le fait que sur le plan du formalisme et de la rigueur, ce qui couvre autant le plan du symbolisme que de la théorie mathématique, le processus « démontrer » est régi par plus de règles : « ce qui caractérise les démonstrations comme genre de discours est leur forme strictement codifiée » (Balacheff, 1988, p. 30).

Ceci nous ramène à la notion de validité discutée au chapitre IV. Pólya (1958) mentionne « nous assurons la validité de nos connaissances mathématiques par un raisonnement démonstratif » (p. ix). Duval souligne que « pour qu'un raisonnement puisse être une démonstration, il est nécessaire qu'il soit un raisonnement valide » (1992-1993, p. 42). C'est parce que la démonstration s'appuie sur des règles et une structure particulières qu'elle est considérée par la communauté mathématique comme l'unique moyen de contrôle du savoir mathématique. La structure qui est socialement acceptée comme démonstration est la forme déductive. Par ailleurs, la structure ne suffit pas. Comme le soulignent Arsac *et al.* (1992) et Duval (1995), les objets mathématiques sur lesquels opèrent les démonstrations ont un statut théorique. La démonstration trouve sa validité dans la théorie sur laquelle elle s'appuie.

Le problème de la validité éclaire donc d'un côté l'aspect structurel du raisonnement, mais aussi, d'un autre côté, l'aspect processuel du raisonnement. « Démontrer » en tant que processus discursif s'insère dans une région du discours mathématique particulière où les règles de ce qui peut faire partie de ce discours, et ce qui ne peut pas en faire partie, sont socialement déterminées, codifiées et rigides. Pour une communauté donnée, le discours mathématique ne se restreint pas à celle-ci, mais vise à étendre cette région à l'ensemble du discours.

5.4.5.1 Démontrer d'un point de vue commognitif

Jusqu'ici, il n'y a pas ou peu de différences avec le processus « prouver » puisque le rôle du processus « prouver » est aussi de statuer sur la valeur épistémique d'un énoncé. La différence est dans la rigueur et le formalisme nécessaires au processus « démontrer ». Si du point de vue du processus « prouver », le discours s'appuie sur des énoncés vrais mathématiquement, du point de vue du processus « démontrer », ces énoncés doivent s'insérer dans une théorie mathématique de façon explicite par la

communauté. Le but ultime du processus « démontrer » est de construire une théorie mathématique. En ce sens, les propos de Mariotti (2005) sur le processus « prouver » se rapprochent davantage du processus « démontrer » que du processus « prouver ». De plus, le processus « démontrer » demande un niveau de formalisme plus élevé que la preuve.

On peut donc définir le processus « démontrer » comme suit :

Démontrer est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique de vraisemblable à vraie d'un énoncé. Ce processus est contingenté par :

1. des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et systématisés dans une théorie mathématique;
2. une restructuration finale déductive;
3. des réalisations formalisées et acceptées par la communauté de la classe et par la communauté mathématique.

Ce processus se différencie du processus « prouver » de par le fait qu'il s'appuie sur une théorie mathématique construite à priori et sur des réalisations formalisées. L'exemple générique ne peut donc pas être utilisé dans un processus de démonstration, mais bien dans un processus de preuve. Le processus « prouver » accepte l'utilisation d'un exemple générique, ce qui n'est pas le cas de la démonstration.

Reprenons l'exemple de Janet. Pour prouver que la factorisation d'un binôme de la forme $(x^n - 1)$, où n est un nombre pair, comporte les facteurs $(x-1)$ et $(x+1)$, Janet (voir figure 5.6) s'appuie sur un exemple générique où $n = 8$. Il est clair, dans la présentation rapportée dans Kieran et Drijvers (2006), que l'élève en question ne traite pas du cas 8 en particulier, mais s'en sert pour prouver que l'énoncé est vrai

pour tout n pair. La figure 5.6 présente trois traces de RM qui visent à valider l'énoncé que la factorisation sera composée des facteurs $(x-1)$ et $(x+1)$. Le cas 2 représente une preuve qui s'appuie sur la structure des nombres pairs. Cette restructuration finale s'appuie sur des énoncés vrais d'un point de vue mathématique, mais les réalisations utilisées ne sont pas suffisamment formalisées. Le cas 3 pourrait être considéré comme une démonstration en sachant que tous les énoncés utilisés ont bien été démontrés préalablement.

Cas 1 : Preuve qui s'appuie sur un exemple générique de Janet $n = \text{even number}$ $x^8 - 1 = (x - 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ $= (x - 1)(x^6(x + 1) + x^4(x + 1) + x^2(x + 1) + (x + 1))$ $= (x - 1)(x + 1)(x^6 + x^4 + x^2 + 1)$
Cas 2 : Preuve qui s'appuie sur la structure des nombres pairs $(x^n - 1) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ comme n est pair, nous avons un nombre pair de termes que l'on peut regrouper deux à deux : $(x^n - 1) = (x - 1)((x^{n-2})(x + 1) + (x^{n-4})(x + 1) + \dots + x^2(x + 1) + (x + 1))$ $(x^n - 1) = (x - 1)(x + 1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \dots + x^2 + 1)$
Cas 3 : Une preuve algébrique Sachant que n est pair, que $(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$ et que $(x^n - 1) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)$ Soit $n = 2k$, $(x^n - 1) = (x^{2k} - 1) = ((x^2)^k - 1)$ $= (x^2 - 1)((x^2)^{k-1} + (x^2)^{k-2} + \dots + (x^2)^2 + x^2 + 1)$ $= (x - 1)(x + 1)((x^2)^{k-1} + (x^2)^{k-2} + \dots + (x^2)^2 + x^2 + 1)$

Figure 5. 6 Exemples de validation

5.4.6 Les processus de recherche de validation en tant que processus de RM

En tant que processus de RM, les différents processus de validation sont nés de pratiques sociales, ce qui est souligné par Mariotti (2006), et se développent chez l'individu dans un mouvement d'individualisation et de (re)communication. Il s'agit des processus qui permettent d'intégrer de nouveaux énoncés au corpus d'énoncés généralement accepté du discours mathématique. De ce fait, ils sont très importants. La nature sociale du RM y est davantage marquée; les processus de validation sont les processus où les règles, le vocabulaire, les médiateurs visuels et les énoncés généralement acceptés, propres au discours mathématique, ressortent le plus. En effet, le contingentement du discours y est plus fort et les règles plus rigides, plus codifiées (Pólya, 1968).

Notons tout d'abord que le terme « processus de validation » comporte trois quasi-synonymes. C'est le cas d'argumenter, d'expliquer et de vérifier. Ensuite, l'enjeu majeur de l'ensemble des processus de validation est le changement de valeur épistémique de l'énoncé. La figure 5.7 représente les liens entre les trois processus de validation : justifier, prouver et démontrer. À la manière de Balacheff (1988), ces trois processus de validation s'emboîtent et sont régis par des règles discursives de plus en plus rigides. Du changement de valeur épistémique pour le processus « justifier », on arrive à un changement de valeur épistémique de vraisemblable à vraie pour le processus « prouver » qui s'appuie sur une restructuration déductive, mais aussi sur un ensemble d'énoncés généralement acceptés par la communauté mathématique. Cet ensemble d'énoncés n'est pas nécessairement construit systématiquement. Certains sont donnés, d'autres systématisés. Le processus démontrer nécessite que l'ensemble des énoncés sur lequel il s'appuie soit préalablement théorisé, c'est-à-dire systématisé rigoureusement et formellement en un ensemble cohérent d'énoncés qui découlent d'un ensemble restreint d'axiome. Le niveau de formalisme est aussi davantage présent.

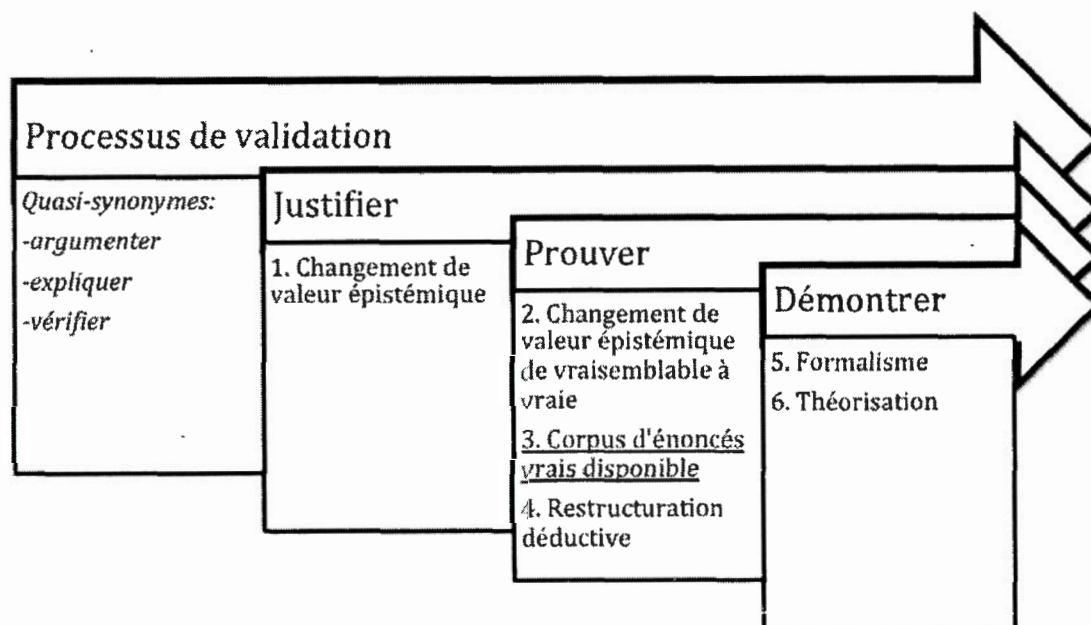


Figure 5. 7 Les processus de recherche de validation

5.5 Un processus de support du RM: Exemplifier

L'utilisation et la production d'exemples sont énormément traitées en didactique des mathématiques. Par ailleurs, ce processus est étudié de plusieurs points de vue : de l'enseignement (Watson et Mason, 2005), de l'apprentissage (Bills *et al.*, 2006; Mason et Spence, 1999; Watson et Mason, 2005), et enfin, du RM (Pólya, 1968; Mason, 1994). Sans nier les liens entre chacun de ces points de vue, c'est au RM en tant que concept auquel je m'intéresse ici, afin de mieux comprendre comment se situe le processus d'exemplification par rapport au RM. Un défi qui se pose ici est de départager, au cours de l'analyse, les éléments se rapportant au RM et ceux s'y rapportant moins. Je ne m'intéresserai pas aux difficultés des élèves, mais plutôt à en quoi le processus d'exemplification peut être considéré comme un processus de RM, comment il peut être caractérisé. Dans un premier temps, une synthèse de la

littérature qui s'intéresse au RM et au processus d'exemplification sera présentée. Dans un second temps, le processus d'exemplification sera considéré à l'intérieur du modèle conceptuel du RM.

5.5.1 Exemplifier dans la littérature sur le RM en didactique des mathématiques

Le terme « exemplifier » est peu traité dans la littérature avant les années 2010. Un des auteurs majeurs qui étudie le processus « exemplifier » est Mason (1994). Ce terme est tiré de la définition de RM de Mason (1994). Pour Mason, exemplifier fait référence à deux types de processus : 1) l'utilisation de plusieurs exemples dans le but d'explorer un problème et d'en arriver à une conjecture; 2) l'utilisation d'exemple pour vérifier la conjecture et la raffiner. Pour le premier type, on cherche, à partir d'exemples, à inférer un énoncé se rapportant au problème à résoudre. L'exemplification permet alors l'exploration du problème et peut mener à une généralisation. C'est aussi l'avis de Pólya (1958) qui, sans utiliser le mot « exemplifier », positionne l'utilisation et la production d'exemples comme pouvant mener à la généralisation. L'observation de cas particuliers suggère alors une conjecture, un énoncé général à propos de la situation. On peut alors dégager que pour le type 1 de Mason, « exemplifier » c'est rechercher à partir d'exemples quelque chose de commun, une régularité pour inférer un énoncé de nature générale. On reconnaîtra ici la caractéristique des processus de recherche de similitudes et de différences.

La figure 5.8 présente une exemplification du premier type effectué par une élève de cinquième année. Dans ce processus, trois exemples sont utilisés dans le but de générer un énoncé de nature générale. Malgré que l'on constate une erreur conceptuelle (6, 7 et 9 ne sont pas consécutifs) et une erreur de calcul ($6 + 7 + 9$ ne fait pas 27), les trois exemples ont amené l'élève à faire un constat qui peut agir

comme première conjecture. Le processus d'exemplification supporte, dans ce cas, le processus de conjecture.

Énonce une relation à propos de la somme de trois nombres consécutifs.

$$2 + 3 + 4 = 9 \quad 6 + 7 + 8 = 27$$

$$22 + 23 + 24 = 69$$

Je pense que c'est
toujours un multiple de 9

Figure 5. 8 Exemplifier en tant que processus de support de conjecturer

Dans ce processus d'exemplification, les exemples permettent d'inférer des données à propos du problème en place. Ces données pourront ensuite être recyclées pour la recherche de similitudes, de régularité et de relations. Exemplifier, dans ce cas-ci, permet de générer les éléments qui serviront à généraliser, à conjecturer ou même à valider.

Le processus présenté à la figure 5.8 permet de commencer l'exploration du problème comme stipulé par Mason. « Les exemples choisis sont des cas particuliers du problème » (Mason, 1994, p. 3). Le processus d'exemplification peut dans ce cas être mis en parallèle avec le terme « particulariser » décrit par White (1993) en ces termes :

Un moyen efficace de s'approprier une question ou un problème, c'est d'examiner des cas particuliers. Cette façon de faire est une approche naturelle chez les enfants. Que ce soit des objets réels ou des idées, chaque exemple fournit l'occasion de manipuler des éléments permettant une meilleure compréhension de la situation problématique donnée. (p.18)

Le second type d'exemplification que Mason souligne est relatif à la validation d'un énoncé. La figure 5.5 présente un exemple de processus « exemplifier » qui vient supporter le processus de recherche de validation (justifier) que pourrait réaliser un élève. Dans cette résolution, l'élève recycle les exemples générés par le processus « exemplifier » pour justifier la conjecture que tout nombre impair est la somme de deux nombres consécutifs. L'exemplification permet alors de rendre plus vraisemblable la première conjecture. On pourrait imaginer un prolongement du RM présenté à la figure 5.8 où de nouveaux exemples permettent la mise en œuvre d'un processus de recherche de validation en invalidant la conjecture (la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 9). Le processus d'exemplification supporte alors le processus de recherche de validation.

On peut relier le second type de processus d'exemplification de Mason (1994), à savoir exemplifier pour vérifier et raffiner une conjecture, à ce que Pedemonte (2002) appelle la particularisation : « la particularisation permet de vérifier la règle sur un cas particulier » (p. 71). Ceci est différent de la définition donnée par White (1993) et cité précédemment. Pólya (1958) utilise aussi le terme « spécialisation » pour parler de ce type d'exemplification. Le but de ces exemples est alors de vérifier ou de rejeter ladite conjecture. On parlera de contrexemple dans le cas du rejet de la conjecture. Lorsque le processus mène à un contrexemple, la conjecture peut être complètement rejetée ou modifiée. Un élément est à souligner ici. Dans le processus de RM présenté à la figure 5.8, le processus d'exemplification peut potentiellement remplir deux rôles. Premièrement, il permet de supporter le processus de conjecture en générant

des données à étudier. Deuxièmement, il pourrait permettre de supporter le processus de recherche de validation en vérifiant la conjecture préliminaire à l'aide d'une nouvelle exemplification. Il permettrait alors de justifier le rejet ou la modification de la conjecture. Ces propos ne sont pas sans rappeler ceux de Lakatos (1977) sur la découverte mathématique et le processus de preuve. Selon cet auteur, le contrexemple est très important pour permettre de raffiner, à la fois la conjecture et la preuve, dans un jeu de va-et-vient entre le processus de preuve et le processus de conjecture.

Fait à noter, le processus « valider à l'aide d'exemples » n'a pas toujours bonne réputation en enseignement mathématique. Arsac *et al.* (1992) y font référence comme d'un mauvais outil de preuve, à savoir qu'un élève se contente de vérifier une conjecture sur quelques exemples pour conclure qu'elle est vraie, ce que Balacheff (1988) appelle « empirisme naïf ». Évidemment, ce qui est remis en question ici n'est pas le processus comme tel, mais la valeur épistémique qu'il génère. Ceci peut être lié à ce qui a été développé au chapitre IV à propos d'un raisonnement valide. En effet, les règles métadiscursives des mathématiques contingentent fortement les processus de validation (à l'exception de la preuve générique). Ces dernières ne peuvent permettre le passage de vraisemblable à vraie que sous certaines conditions. Trouver un contrexemple étant suffisant pour invalider une conjecture : il en est tout autrement de l'utilisation d'exemples. Il s'agit là d'une règle du discours mathématique avec laquelle plusieurs élèves achoppent, selon Arsac *et al.* (1992). Cette règle doit toutefois être nuancée. En effet, en mathématiques scolaires, les quantificateurs sont souvent implicites. Par exemple, lorsque l'on dit « un carré est un losange », il y a un quantificateur universel d'implicite. On comprend que tout carré est un losange. Lorsqu'un quantificateur existentiel est ajouté à un énoncé, le processus d'exemplification change de rôle et peut supporter le processus de recherche de validation en permettant de statuer sur la valeur de vérité de cet énoncé.

Il peut alors y avoir processus de preuve. La figure 5.9 présente un cas où exemplifier est un processus de support pour la validation d'un énoncé.

Vrai ou faux : la moyenne d'une distribution peut-être supérieure à 99 % des données d'une distribution.

Réponse : Prenons l'exemple d'une distribution composée de 99 données de valeur 1 et d'une donnée de valeur 100. La moyenne sera alors de 199/100, ce qui est supérieur à 99 % des données.

Figure 5. 9 Un exemple de processus d'exemplification lié à valider

Toujours concernant « exemplifier » et la validation, Balacheff (1988) met de l'avant la nature générale de certains exemples utilisés dans le processus de preuve par les élèves, processus qu'il nomme l'exemple générique. La généralité de la preuve réside alors dans les actions (commognitives) posées sur l'exemple choisi :

l'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe. La formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une classe en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants (Balacheff, 1988, p. 57).

Jusqu'à présent les exemples utilisés étaient numériques. Toutefois, elles peuvent être d'autres natures : des symboles, des schémas, des objets géométriques ou encore des actions physiques. Le type d'exemples choisi supporte le processus de RM que l'élève effectue. La figure 5.10 présente un processus d'exemplification où un schéma favorise l'inférence. Dans la résolution de ce problème, un schéma représente un cas particulier et c'est à partir de ce schéma que la structure est dégagée pour inférer la conjecture. La formule de l'aire du triangle vue comme la moitié d'un quadrilatère a

pu mener à l'utilisation de ce schéma. On peut entre autres y observer des liens entre le processus d'exemplification et le processus d'identification d'une régularité.

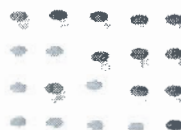
Soit la suite des nombres triangulaires suivante où T_n représente le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite. Exprime T_n en fonction de n .

T_1	T_2	T_3	T_4	...	T_n
1	3	6	10	...	?

On peut représenter les quatre premiers nombres de cette suite ainsi :



Si je double un des triangles, disons T_4 , j'obtiens le rectangle suivant :



J'ai alors $(4 \times 5)/2 = 10$, qui est bien T_4 . Je remarque qu'en doublant mon triangle, j'ai ajouté un à ma longueur. Pour un certain rang n , j'aurai alors $nx(n+1)/2$.

Figure 5. 10 La suite des nombres triangulaires

5.5.2 Exemplifier en tant que processus de RM

Dans les différents écrits rapportés jusqu'à maintenant, on remarque que l'exemplification, en tant que processus, est toujours associée à d'autres processus, à savoir conjecturer, généraliser ou encore prouver et justifier. Ceci amène un questionnement quant à savoir si l'exemplification est un processus de RM en soi, ou un support au RM. Pour qu'un processus soit considéré comme RM en soi, il doit, à partir de l'étude d'objet ou de relation, inférer un nouvel énoncé et ainsi permettre une extension du discours. Est-ce le cas de l'exemplification?

Exemplifier génère un ou plusieurs exemples et réalise un objet mathématique par l'exhibition d'un cas particulier. La personne qui exemplifie sera donc à la recherche de relations entre l'exemple à choisir et la situation à exemplifier. Il y a donc bien inférence et extension du discours. La réalisation d'objets mathématiques par l'exemplification ajoute des éléments au discours qui pourront être recyclés dans de nouvelles boucles de processus de RM. Ainsi, exemplifier est à la fois un processus de RM et un processus de support du RM.

Soulignons que dans les illustrations données ci-dessus, le processus d'exemplification supporte différents processus de RM, autant de recherche de similitudes et de différences que de recherche de validation. Les inférences peuvent produire un énoncé à propos d'un objet ou d'une relation mathématique, ou un énoncé à propos de la valeur de vérité d'un énoncé déjà existant. La nature des énoncés inférés ne semble donc pas un enjeu important pour le processus « exemplifier ».

Un élément central serait plutôt en quoi les processus supportés peuvent influencer les exemples qui seront traités. Pour les processus de recherche de similitudes et de différences, ils peuvent être moins systématiques; puis différents cas peuvent être utilisés pour conjecturer. Exemplifier de façon plus systématique prépare à généraliser (Mason, 1994). On peut s'intéresser à l'exemple lui-même ou au lien entre plusieurs exemples.

Pour les processus de recherche de validation, Pólya (1958) et Pedemonte (2002) discutent de l'utilisation d'un exemple « extrême » pour vérifier une conjecture. Selon Balacheff (1988), certains élèves utilisent un dérivé de ce principe dans le processus de preuve par expérience cruciale. L'élève choisit alors « un cas pour lequel “on ne se fait pas de cadeau” en affirmant que “si cela marche, alors cela

marchera toujours” » (Balacheff, 1988). Le processus d'exemplification vient alors supporter ce qui est appelé dans ce modèle un processus de justification.

En ce qui concerne le concept de processus de RM, on peut donc définir exemplifier ainsi :

Exemplifier est un processus de RM qui supporte la mise en œuvre d'autres processus de RM par l'inférence d'exemples qui favorisent

1. la recherche de similitudes et de différences
2. la recherche de validation

Ainsi, il est à la fois lié aux processus de recherche de similitudes et de différences et aux processus de recherche de validation. Tous les processus mathématiques peuvent s'appuyer sur le processus « exemplifier » afin de favoriser l'émergence d'inférence, que ce soit les processus de recherche de similitudes ou les processus de recherche de validation. De même, la mise en œuvre de ces processus de recherche viendra enrichir le processus « exemplifier ». Le choix des exemples, mais aussi comment ils seront traités, organisés et comparés, est dépendant du processus qu'ils viennent supporter.

5.6 Les quasi-synonymes de RM

Trois termes, à savoir découvrir, explorer et investiguer ont émergé comme quasi-synonymes du RM. Les prochaines sections conceptualisent chacun d'eux et expliquent pourquoi ils sont positionnés comme quasi-synonymes du RM.

5.6.1 Découvrir

Dans la littérature en didactique des mathématiques, plusieurs auteurs associent le RM au processus « découvrir ». Il est donc nécessaire de faire le point sur la place de

ce processus en tant que processus de RM. Malgré le fait que certains auteurs mentionnent « découvrir » comme processus de RM, ces derniers élaborent très peu autour de celui-ci. Illustrons notre propos à l'aide de quelques exemples. Premièrement, Ball et Bass (2003) mentionnent qu'il y a deux types de RM, les raisonnements comme outil d'investigation dans la découverte et l'exploration de nouvelles idées, et les raisonnements comme outils de justification ou de preuve d'un énoncé mathématique. Ces auteurs n'élaborent que le second type. Deuxièmement, Brodie (2010), Lithner (2008) et Cabassut (2005) précisent qu'une des fonctions du RM est la découverte. Ces trois auteurs, en s'appuyant sur de Villiers (1990), Hanna (2001) ou Yackel et Hanna (2003), transposent les rôles que ces derniers attribuent au processus de preuve directement au processus de RM. Pour Brodie (2010), « mathematical reasoning is a key part of mathematical discovery » (p.11). Toutefois, rien de plus n'est amené aux propos de De Villiers.

Pour de Villiers (1990), la découverte (ou l'invention) de nouveaux résultats est une parmi plusieurs fonctions que peut remplir un processus de preuve pour les mathématiciens. Pour cet auteur, certaines découvertes peuvent être faites de façon purement déductive (structure associée au processus de preuve). Par ailleurs, comme il le mentionne lui-même, le processus de découverte est plus souvent associé à d'autres processus qu'à celui de prouver. Par exemple, pour Pedemonte (2002), les processus de découverte font référence aux processus déployés pendant la résolution de problème, ceux qui permettent de construire une conjecture et de l'explorer. On reconnaît ici le premier type de RM de Ball et Bass (2003). Pedemonte associe les processus de découverte à l'argumentation en mathématiques en y associant différentes structures, telles l'abduction et l'induction.

On peut donc noter que ce qui semble caractériser les processus de découverte est la création d'un savoir nouveau. Le processus de découverte est associé par différents

auteurs autant aux processus de recherche d'une régularité qu'au processus de recherche d'une justification. Il y a divergence de point de vue quant à savoir s'il est possible de caractériser de façon particulière un processus de découverte en tant que processus de RM, ou si tout processus de RM peut remplir à un moment ou à un autre une fonction de découverte. On l'associe tantôt à la structure abductive du RM, tantôt aux trois structures élémentaires.

En associant l'idée de nouveauté au processus de découverte, il est alors possible, d'une perspective commognitive, d'envisager tout processus de RM comme un processus de découverte. Par définition, un processus de RM infère un énoncé à propos d'un objet ou d'une relation mathématique. Que ce soit dans le processus de conjecture, de généralisation, d'exemplification ou de preuve, il y a nécessairement des éléments additionnels mis en lumière. Il y a extension du discours, donc création d'éléments nouveaux. En effet, le RM amène un développement au niveau objet « [I]n commognitive terms, this means exploring the objects so as to be able to formulate and endorse new narratives about them » (Sfard, 2012, p.3). De ce fait, « découvrir » ne sera pas retenu comme processus de RM. Il s'agit d'une caractéristique intrinsèque à tout RM. Toute inférence amène un élément additionnel dans le discours.

5.6.2 Explorer

L'épistémologie du terme « explorer » est parcourir en cherchant. Il est parfois traduit par *investigate* en anglais, terme qui sera traité dans la prochaine section. Il est souvent utilisé en conjonction avec raisonner dans la littérature en didactique des mathématiques. Il est lié au RM entre autres par le truchement de la résolution de problème. Artzt (1999), dans son étude de l'utilisation du RM lors de la résolution de problème par de petits groupes d'élèves, associe neuf processus à la résolution de

problème, dont « explorer ». Lithner (2008), aussi dans une perspective de résolution de problème, associe l'exploration à une fonction du RM. Yackel et Hanna (2003) vont dans le même sens en accordant au processus de preuve une fonction d'exploration. En mathématiques, on peut explorer un problème, un objet, une conjecture, une relation, une régularité, une idée, une preuve. De plus, l'exploration peut prendre différentes structures. Rivera (2010) la lie à l'abduction. Les propos de Balacheff (1988) lient l'exploration à la structure déductive, ceux de Duquesne (2003), à la structure inductive.

En fait, pour Sfard (2008), le raisonnement est une « activity of exploring relations between sentences » (p. 110). Ainsi, le raisonnement explore des énoncés d'un discours donné pour en dériver de nouveaux énoncés. De plus, le terme processus de RM a été défini plus tôt comme « un processus commognitif qui est métadiscursif, c'est-à-dire, qui dérive des énoncés à propos d'objets ou de relations mathématiques par l'exploration des relations qui les unissent » (p. 156). Ainsi, le RM en tant que processus est constitué par l'exploration (la recherche) de relations entre les objets, les énoncés mathématiques. Donc, tout comme « découvrir », « explorer » est une caractéristique intrinsèque à tout RM.

5.6.3 Investiguer

Le terme « investiguer » (*inquiry, investigate* en anglais) est présent chez quelques auteurs anglophones intéressés par le RM (ou des traductions d'œuvres anglophones). Ball et Bass (2003) stipulent que « Mathematical reasoning can serve as an instrument of inquiry in discovering and exploring new ideas, a process that we call the reasoning of inquiry » (p.30). Par ailleurs, ils ne développent pas ce qui est entendu par raisonnement d'investigation dans cet écrit. Par le biais du NCTM (2000), un lien est établi entre « conjecturer » et « investiguer ». Le *Standard* lié au

raisonnement et à la preuve (*reasoning-and-proof*) mentionne que les programmes d'enseignement devraient amener l'élève à faire et à investiguer des conjectures mathématiques (NCTM, 2000).

Mason (1994), pour sa part, associe les processus d'investigation à une stratégie d'amélioration du raisonnement. Il s'agit d'un des trois facteurs qu'il relie à la puissance du RM. Il s'agirait, pour cet auteur, d'une activité dans laquelle le raisonnement se déploie. Les propos de Francisco et Maher (2005) rejoignent ceux de Mason « [A]s a context for research on the development of mathematical ideas and ways' of reasoning, the participants engaged in mathematical investigations throughout their public school and early university years » (p. 361). Pour ces auteurs, un groupe d'élèves qui investiguent un problème explorent une régularité, conjecturent, réfléchissent à leur solution, expliquent et justifient, tous des processus liés au RM.

On retrouve aussi dans la littérature qui s'intéresse au RM différents liens avec la structure du raisonnement. En effet, les auteurs tels Rivera et Becker (2007) et Meyer (2010) utilisent, pour étudier la structure du raisonnement, la théorie de Pierce. Ce dernier propose les trois pas élémentaires (abduction, induction et déduction) comme les trois étapes du processus d'investigation.

Afin de caractériser le processus d'investigation en tant que RM, le corpus a été ouvert à la littérature qui s'y intéresse directement sans nécessairement avoir comme objet d'étude le RM.

Un défi qui se pose à la lecture de cette littérature est de différencier ce que les auteurs associent au RM en tant que processus d'investigation et l'approche pédagogique privilégiée lors de la planification d'activités d'enseignement

apprentissage en classe. En effet, en prolongement des écrits de Richards (1991), le terme « *inquiry* » a été associé à celui de « communauté d'investigation » (Goos, 2004) ou encore à celui de « communauté de pratique » (Hunter, 2007; Kennedy, 2009). Il fait alors référence à une approche pédagogique qui vise, entre autres, le développement du raisonnement ou de la pensée mathématique : « the teacher promoted the evolution of an inquiry mathematics classroom (Voigt, 1995), that is, a classroom that fosters mathematics as reasoning » (Yackel et Hanna, 2003, p. 230). Il s'agit d'une approche qui place l'élève au centre de ses apprentissages en l'amenant à se poser des questions, à les investiguer, à créer de nouveaux savoirs, à discuter et à réfléchir sur ces nouveaux savoirs (Inquiry Page, 2010).

Mais que peut-on tirer de ces écrits à propos du processus d'investigation en tant que RM? Comment ce processus cadre-t-il dans un modèle conceptuel du RM? Richards (1991) définit *Inquiry Math* comme un domaine du discours mathématique qui fait référence aux mathématiques des adultes compétents en mathématiques (*mathematically literate*). Ce domaine inclut :

participating in a mathematical discussion, and acting mathematically - asking mathematical questions; solving mathematical problems that are new to you; proposing conjectures; listening to mathematical arguments; and, reading and challenging popular articles containing mathematical content (p. 15).

Il s'agit selon cet auteur d'un discours très près du discours du mathématicien. Comme la commognition définit les mathématiques comme un discours propre à une communauté, le concept d'*inquiry math* proposé par Richards (1991) cadre bien avec la commognition. En ce sens, le RM est un processus de ce discours parmi d'autres.

Pour Calder *et al.* (2005), étudier le processus d'investigation revient à étudier les processus de conjecture, de généralisation, d'explication et de justification, misent en

œuvre par les élèves. De même, Goos (2004) associe la communauté d'investigation à une approche d'enseignement qui permet de promouvoir différents processus tels conjecturer, généraliser, réfuter, spécialiser, convaincre, expliquer, justifier.

À la lumière de l'analyse de la littérature, on constate que le processus d'investigation recouvre plusieurs processus de RM, sinon l'ensemble de ces processus. Investiguer un problème mathématique revient à raisonner mathématiquement. La recherche systématique, qui sous-tend le processus d'investigation, implique autant des processus de recherche de similitudes et de différences, que des processus de recherche d'une justification. Comme il est lié autant à l'aspect structurel que processuel du RM, il se positionne comme quasi-synonyme de RM. Il n'est pas nécessaire de se situer dans une approche pédagogique particulière pour que l'élève investigue un objet mathématique, une relation mathématique. Il s'agit d'un processus qui nécessite l'établissement de liens, des inférences.

5.7 Synthèse : les processus de RM retenus

La démarche d'anasynthèse a permis de retenir neuf processus de RM qui peuvent être différenciés selon plusieurs éléments théoriques et axiologiques. Ce sont ces éléments qui ont permis d'arriver aux définitions et à la classification. Huit de ces derniers peuvent être regroupés en deux grandes classes : les processus de recherche de similitudes et de différences et les processus de recherche de validation. Les processus de recherche de similitudes et de différences, à savoir généraliser, conjecturer, identifier une régularité, comparer et classer, mettent en jeu différents actes commognitifs. La visée de ces processus est d'inférer un énoncé à propos d'objets ou de relations mathématiques en s'appuyant sur des similitudes et des différences. Les processus de recherche de validation, à savoir justifier, prouver et démontrer, visent plutôt à inférer un énoncé à propos de la valeur épistémique d'un

énoncé. L'énoncé est donné ou construit à priori. La figure 5.11 représente l'ensemble des processus de RM. Le processus exemplifier est un processus de RM qui supporte autant les processus de recherche de similitudes et de différences, que les processus de recherche de validation.

Les processus « découvrir », « explorer » et « investiguer » sont définis comme quasi-synonymes de RM. Tout RM comporte les caractéristiques de ces trois processus puisque tout RM demande d'inférer des éléments nouveaux, d'explorer et d'investiguer les liens entre différents énoncés mathématiques afin d'enrichir le discours mathématique. Ces processus n'ajoutent donc pas d'éléments nouveaux à la conceptualisation du RM.

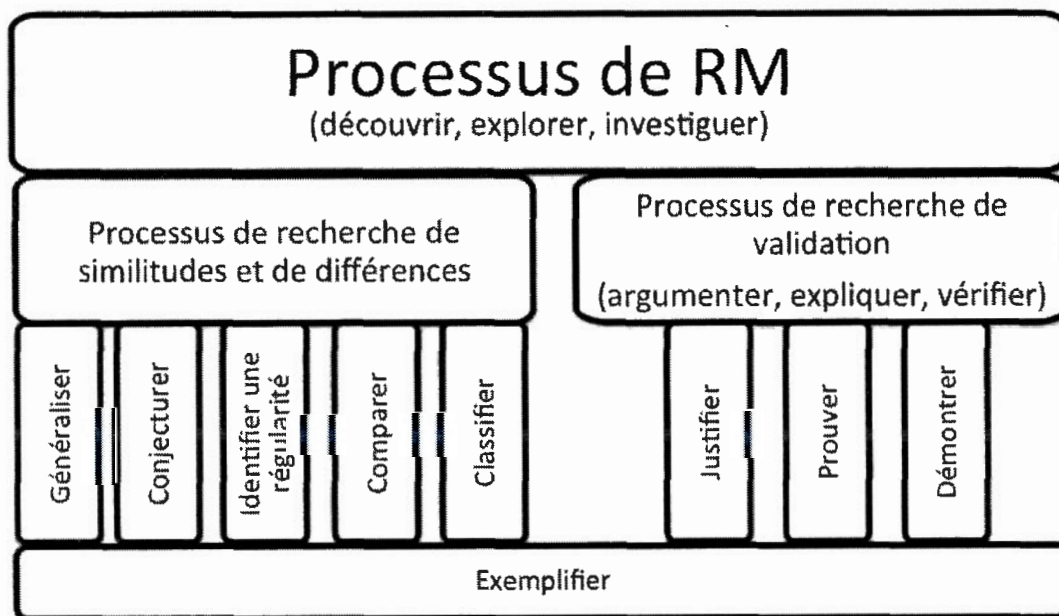


Figure 5. 11 Ensemble des processus de RM

Chacun des neuf processus peut être défini de façon à les différencier par leurs visées et les types d'énoncés qu'ils génèrent. Les définitions suivantes ont émergé de l'anasynthèse.

Les processus de recherche de similitudes et de différences :

Généraliser : Généraliser, en tant que processus de RM, infère un énoncé à propos d'un ensemble d'objets mathématiques, ou d'une relation entre différents objets de cet ensemble, à partir d'un ensemble plus restreint d'objets contenus dans ce premier.

Conjecturer : Conjecturer est un processus de RM qui, par la recherche de similitudes et de différences, permet d'inférer un énoncé à propos d'une régularité, ou d'une relation, pour lequel la valeur épistémique qui lui est rattachée est vraisemblable, et qui a un potentiel de théorisation mathématique.

Identifier une régularité : Identifier une régularité, en tant que processus de RM, infère un énoncé à propos d'une relation récursive entre différents objets ou relations mathématiques, par la recherche de similitudes et de différences entre ces objets ou relations mathématiques.

Comparer : Comparer, en tant que processus de RM, permet d'inférer, par la recherche de similitudes et de différences, un énoncé à propos d'objets et de relations mathématiques.

Classifier : Classifier : processus de RM qui, par la recherche de similitude et de différences entre des objets mathématiques, permet d'inférer des énoncés à propos de classes en s'appuyant sur des propriétés ou des définitions mathématiques.

Des liens unissent ces processus de recherche de similitudes et de différences, mais ils se différencient tous d'une façon ou d'une autre. De plus, ce qu'un processus génère peut être recyclé par un autre. Par exemple, un processus de comparaison peut générer un énoncé à propos d'une propriété commune à tous les cas étudiés. Cette propriété peut mener à une conjecture pour un ensemble similaire, ou pour un

ensemble plus large, qui pourrait par la suite servir pour classer des objets mathématiques. De même, cette propriété peut servir de base à un processus de validation.

Les processus de validation se définissent comme suit :

Processus de validation : un RM est un processus de validation s'il vise à changer la valeur épistémique (c'est-à-dire la vraisemblance ou la vérité) d'un énoncé mathématique.

Comme présenté à la figure 5.7, le processus « démontrer » est un cas particulier du processus « prouver » et le processus « prouver » un cas particulier du processus « justifier ». Ils se définissent comme suit :

Justifier : Justifier est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique d'un énoncé.

Prouver : Prouver est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique de vraisemblable à vraie d'un énoncé. Ce processus est contingenté par :

1. des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et disponibles sans autre justification;
2. une restructuration finale déductive;
3. des réalisations appropriées et connues ou accessibles à la classe.

Démontrer : Démontrer est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique de vraisemblable à vraie d'un énoncé. Ce processus est contingenté par :

1. des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et systématisés dans une théorie mathématique;

2. une restructuration finale déductive;
3. des réalisations formalisées et acceptées par la communauté de la classe et mathématique.

Exemplifier est un processus commognitif particulier qui vient supporter les processus de recherche de similitudes et de différences, ainsi que les processus de recherche de validation. « It is not examples as such which are important to mathematicians, but what is done with those examples, how they are probed, generalised, and perceived » (Mason, 2001, p. 6)

Il se définit comme suit :

Exemplifier : Exemplifier est un processus de RM qui supporte la mise en œuvre d'autres processus de RM par l'inférence d'exemples qui favorisent

- 1) la recherche de similitudes et de différences
- 2) la recherche de validation.

Lors de la résolution d'un problème, plusieurs processus de RM peuvent s'enchaîner et s'interféconder. Il faut se rappeler que la communication est une combinaison d'actions et de réactions. Ces différentes actions et réactions se combinent lors du développement de différents processus. Par ces actes de communication, les acteurs explorent, investiguent les relations entre différents objets et énoncés mathématiques, elles y découvrent les liens qui les unissent afin de construire de nouveaux énoncés mathématiques à propos de ces derniers. Il n'est alors pas exclu qu'un même pas de raisonnement (structure) puissent être relié à plus d'un processus. De même, plusieurs processus peuvent se dérouler en même temps, s'enchevêtrer. Par exemple, un processus de conjecture s'accompagne d'un processus de généralisation, mais aussi d'un processus de justification. Par ailleurs, en discriminant chacun des processus de RM, tel que fait ci-haut, il est maintenant possible d'étudier les RM d'élèves et d'en comprendre les différentes subtilités afin d'éclairer le processus d'apprentissage et

d'enseignement des mathématiques. L'historicité des élèves tout comme le processus de RM à un temps donné prennent alors beaucoup d'importance.

L'aspect processuel met au jour des caractéristiques que l'aspect structurel ne capture pas. En particulier, c'est à travers l'aspect processuel que l'on met au jour les éléments qui permettent la mise en œuvre du RM. Toutefois, des liens restent à élaborer entre ces deux aspects du RM. C'est ce qui sera traité au prochain chapitre.

CHAPITRE VI

DISCUSSION ET CONCLUSION

Au premier chapitre, il a été exposé que le RM occupe une place centrale dans les programmes de formations au primaire et au secondaire. Le développement de ces programmes s'appuie entre autres sur des recherches en didactique des mathématiques. Toutefois, la revue de la littérature a permis d'exposer que le concept de RM est souvent utilisé de façon intuitive sans définition ou caractérisation (Duval, 1995; Yackel et Hanna, 2003). Cette revue a mis au jour une pléthore de termes associée au RM, certains de ces termes revêtant plusieurs sens. De même, l'analyse des définitions du RM dans la littérature en didactique des mathématiques permet d'observer certaines convergences, divergences et absences. Entre autres, le RM y est parfois défini comme un produit et parfois comme une activité. Certaines définitions insistent sur les formes que le RM peut prendre, d'autres sur les activités mises en œuvre. De même, les formes et activités liées au RM varient énormément d'un auteur à l'autre. Ce flou conceptuel entourant le RM et son importance dans l'apprentissage des mathématiques a mené à un besoin de conceptualisation du RM.

L'exposé de la problématique établit la pertinence didactique et justifie l'objectif de cette thèse, qui est d'élaborer et de valider un modèle conceptuel du RM pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au primaire et au secondaire. Elle s'inscrit dans une perspective commognitive qui pose 1) le développement de la

recherche en tant que développement de discours qui s'appuie sur le discours déjà construit et 2) les mathématiques en tant que discours, c'est-à-dire comme une activité de communication avec son propre vocabulaire, ses propres médiateurs visuels, ses routines distinctes et ses énoncés généralement acceptés par la communauté mathématique. Pour répondre à cet objectif, une conceptualisation du RM selon deux aspects fondamentaux est proposée. Cette conceptualisation, exposée aux quatrième et cinquième chapitres, est supportée par une démarche d'anasyntèse (Legendre, 2005). Elle permet de répondre à notre premier objectif spécifique qui était de proposer une élaboration et une structuration des aspects structurel et processuel du RM. Le présent chapitre expose le modèle en traçant des liens entre l'aspect structurel et l'aspect processuel. Je réponds ainsi à mon second objectif spécifique qui était d'établir les liens entre l'aspect processuel et l'aspect structurel du RM.

Afin d'illustrer le potentiel du modèle, un exemple de RM est ensuite présenté à l'aide des différents concepts qui composent le modèle. Il s'en suit une réflexion sur diverses implications de ce modèle. Ces réflexions sont soutenues par un questionnement critique pour un souci de rigueur. Un retour est ensuite fait sur les critères de validité liés à la méthodologie. Enfin, ce chapitre est clos par la présentation des limites de l'étude et des prolongements possibles.

6.1 Proposition d'un modèle conceptuel du RM

La démarche d'anasyntèse a permis d'en arriver à définir le RM comme un processus commognitif, c'est-à-dire de communication avec les autres ou avec soi-même, qui permet d'inférer des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés mathématiques. Ces énoncés portent sur les objets mathématiques. Ce processus est organisé en une certaine structure qui est contingentée par des règles discursives

partagées et est porteur d'une valeur épistémique. Le RM peut alors être caractérisé selon deux aspects qui sont à la fois complémentaires et liés dialectiquement : l'aspect structurel et l'aspect processuel (voir figure 6.1). La mise en œuvre de différents processus structure ces derniers au fur et à mesure de leur développement. Toutefois, le fait que plusieurs processus peuvent se développer en concomitance, en recyclant des éléments générés antérieurement par d'autres processus, rend difficile, voire impossible, de ne s'appuyer qu'uniquement sur la structure pour caractériser le RM, aspect traditionnellement mis de l'avant pour étudier le RM. La caractérisation de l'aspect processuel permet un nouveau regard sur le RM en mettant de l'avant la nature temporelle du RM, ainsi que les différents processus qui constituent ce dernier.

Un élément central au RM, autant du point de vue structurel que processuel, est la valeur épistémique des énoncés générés. Tout énoncé mathématique généré par un RM est porteur d'une valeur épistémique pour la personne qui raisonne, mais aussi pour la communauté dans laquelle s'insère cette personne. Pour qu'un raisonnement soit valide, la valeur épistémique ne peut correspondre qu'à celle permise par sa structure et par les règles métadiscursives sous-jacentes. D'un point de vue structurel, seule la structure déductive peut inférer une valeur épistémique vraie. Toutefois, d'un point de vue mathématique, des règles métadiscursives encadrent le changement de valeur épistémique, de vraisemblable à vraie, tout comme de vraisemblable à faux. Par exemple, du point de vue du discours mathématique, un exemple ne peut servir de règle d'inférence dans un pas déductif. De même, dans un processus de démonstration, les données et la règle d'inférence, qui constituent les différents pas déductifs, doivent tous porter une valeur épistémique vraie du point de vue du discours mathématique.

Pour l'aspect processuel, certains processus visent explicitement à changer la valeur épistémique d'un énoncé. C'est le cas des trois processus de recherche de validation.

« Justifier » permet le passage d'une valeur épistémique vraisemblable à plus vraisemblable, ou vraisemblable à vraie; prouver et démontrer, de vraisemblable à vraie. De même, le seul processus de recherche de similitudes et de différences qui est contingenté par la valeur épistémique de l'énoncé qu'il génère est « conjecturer ». Toutefois, tous les autres génèrent des énoncés dont la valeur épistémique est contingentée par la structure des pas de raisonnement qui le composent, ainsi que des règles métadiscursives du discours mathématique.

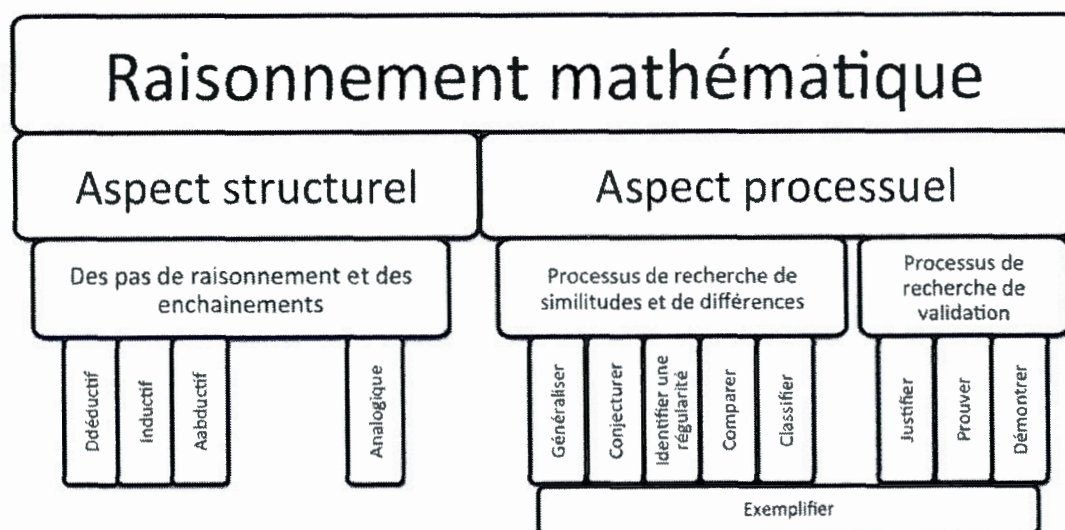


Figure 6. 1 Les deux aspects du RM d'un point de vue conceptuel

6.1.1 L'aspect structurel et ses liens avec l'aspect processuel

L'aspect structurel fait référence à la manière dont les éléments discursifs s'agencent entre eux en un système ordonné qui décrit à la fois les éléments et les relations qu'ils entretiennent entre eux. Un pas de raisonnement est composé de données, d'une affirmation et d'une règle qui permet le passage des données à l'affirmation. En s'appuyant sur la littérature, et en particulier sur Peirce (s.d.), trois pas élémentaires

de raisonnement ont été retenus : le pas déductif, le pas inductif et le pas abductif. L'analogie est pour sa part caractérisée par une structure qui combine au moins deux pas de RM. Il ne s'agit donc pas d'une structure élémentaire. Le modèle de Toulmin (2007) permet de schématiser les différents pas et d'ajouter d'autres éléments qui éclairent la structure : le qualificateur (lié à la valeur épistémique), le fondement (lié à la communauté dans laquelle a lieu le RM) et une réfutation possible de l'affirmation.

Les pas déductif, inductif et abductif infèrent chacun une conclusion de nature différente. Le pas déductif infère une affirmation à partir de données et d'une règle. Il joue un rôle très important dans les processus de validation, en particulier prouver et démontrer, qui tous deux nécessitent une restructuration en un enchaînement de pas déductif. Il s'agit d'une règle métadiscursive du discours mathématique. Le pas inductif infère une règle à partir de données et d'affirmation à propos de ces données. Les processus « généraliser », « conjecturer » et « identifier une régularité » peuvent à un moment ou à un autre de leur développement être structurés en pas inductif. Par ailleurs, la structure initiale et la structure finale de ces processus n'ont pas nécessairement une structure inductive. Le pas abductif est de deux types. Un premier infère des données à partir d'une affirmation et d'une règle. Un deuxième infère des données et une règle à partir d'une affirmation. Pour Peirce (s.d.), l'abduction permet d'inférer des éléments qui cherchent à expliquer l'affirmation. En ce sens, elle joue un rôle dans les processus de validation en permettant d'inférer des données à explorer pour valider un énoncé. En fait, le pas abductif peut composer tout processus de RM en générant des données et des règles qui seront explorées pour en chercher les similitudes et les différences, par exemple, pour généraliser (Rivera, 2008, 2010) et conjecturer (Pedemonte, 2002), mais aussi pour en chercher la validation (Reid, 2003).

L'analogie, pour sa part, combine au moins deux pas élémentaires. Toutefois, la caractérisation selon l'aspect structurel est insuffisante pour le définir. En effet, dans un premier temps, ces deux pas peuvent être de différentes structures élémentaires : inductif et déductif, abductif et déductif. Deuxièmement, pour être en mesure de structurer le RM analogiquement, comparer des objets ou des ensembles d'objets mathématiques est nécessaire. Le raisonnement par analogie nécessite d'inférer des énoncés à propos d'un objet source et d'un objet cible dépendant de leurs similitudes et de leurs différences. L'analogie en tant que structure peut ensuite faire partie d'un processus de conjecture ou de généralisation.

Ceci m'amène à discuter de l'enchaînement de pas de RM. Tout processus est composé d'un enchaînement de pas de RM. Comme discuté au chapitre IV, certains de ces enchaînements ont été objectivés en prototype de démonstration. Il s'agit d'enchaînement de pas déductifs tels les raisonnements par l'absurde ou par disjonction de cas. De même, Knipping (2003, 2008; Reid et Knipping, 2010) a étudié le processus de preuve d'élèves du secondaire pour mettre au jour différentes structures globales, quelques-unes mettant en jeu des pas abductifs et déductifs ont émergé de ces analyses. Le modèle proposé pourrait éclairer de nouveaux enchaînements de pas de RM relatifs à d'autres processus.

6.1.2 L'aspect processuel

Les processus de RM sont des processus commognitifs qui sont métadiscursifs, c'est-à-dire, dérivent des énoncés à propos d'objets ou de relations mathématiques par l'exploration des relations qui les unissent. En tout, neuf processus de RM ont émergé de l'analyse, et huit ont été classés en deux grandes catégories : les processus de recherche de similitudes et de différences et les processus de recherche de validation.

Le neuvième processus, « exemplifier », agit comme support à chacune des catégories.

Les processus de recherche de similitudes et de différences, au nombre de cinq, se différencient sur la base de ce qui est généré à partir de la recherche de similitudes et de différences :

Généraliser : généraliser, en tant que processus de RM, infère un énoncé à propos d'un ensemble d'objets mathématiques, ou d'une relation entre différents objets de cet ensemble, à partir d'un ensemble plus restreint d'objets contenus dans ce premier.

Conjecturer : conjecturer est un processus de RM qui, par la recherche de similitudes et de différences, permet d'inférer un énoncé à propos d'une régularité ou d'une relation pour lequel la valeur épistémique qui lui est rattachée est vraisemblable et qui a un potentiel de théorisation mathématique.

Identifier une régularité : identifier une régularité, en tant que processus de RM, infère un énoncé à propos d'une relation récursive entre différents objets ou relations mathématiques, par la recherche de similitudes et de différences entre ces objets ou relations mathématiques.

Comparer : comparer, en tant que processus de RM, permet d'inférer par la recherche de similitudes et de différences un énoncé à propos d'objets et de relations mathématiques.

Classifier : classifier, en tant que processus de RM, permet d'inférer par la recherche de similitude et de différences entre des objets mathématiques des énoncés à propos de classes en s'appuyant sur des propriétés ou des définitions mathématiques.

Les processus de validation sont définis de façon inclusive et se définissent comme suit :

Processus de validation : un RM est un processus de validation s'il vise à changer la valeur épistémique (c'est-à-dire la vraisemblance ou la vérité) d'un énoncé mathématique.

Justifier : justifier est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique permet de modifier la valeur épistémique d'un énoncé.

Prouver : prouver est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique de vraisemblable à vrai d'un énoncé. Ce processus est contingenté par :

- 1) des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et disponible sans autre justification;
- 2) une restructuration finale déductive;
- 3) des réalisations appropriées et connues ou accessibles à la classe.

Démontrer : démontrer est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique de vraisemblable à vrai d'un énoncé. Ce processus est contingenté par :

- 1) des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et systématisés dans une théorie mathématique;
- 2) une restructuration finale déductive;
- 3) des réalisations formalisées et acceptées par la communauté de la classe et mathématique.

À la fois lié aux processus de recherche de similitudes et de différences et aux processus de recherche de validation, le processus « exemplifier » vient supporter chacun des processus de RM définis précédemment.

Exemplifier : exemplifier est un processus de RM qui supporte la mise en œuvre d'autres processus de RM par l'inférence d'exemples qui favorisent

1. la recherche de similitudes et de différences
2. la recherche de validation.

Ces processus de RM sont interreliés, se stimulent, s'influencent et permettent un développement de plus en plus complexe du discours mathématique par la génération d'énoncés à propos d'objets mathématiques.

En particulier, les processus « conjecturer » et « prouver » jouent un rôle essentiel dans la théorisation mathématique. En effet, le premier infère des énoncés qui ont le potentiel d'enrichir une théorie mathématique et le processus « prouver » permet de systématiser le discours, toujours dans l'idée de théoriser le discours mathématique. Même si les mathématiques du primaire et du secondaire ne sont pas formalisées au même niveau que les mathématiques du mathématicien, la systématisation, quoique locale, du discours peut se retrouver à travers les processus « conjecturer » et « prouver ».

Enfin, le processus « exemplifier », par la génération d'exemples, permet de supporter tous les processus de RM. Les exemples sont recyclés et systématisés afin d'inférer des liens entre eux lors de la recherche de similitudes et de différences, mais aussi lors de la recherche de validation.

6.1.3 Un exemple pour illustrer la valeur euristique du modèle

Afin d'illustrer le potentiel du modèle conceptuel proposé, un exemple sera analysé à la lumière des construits théoriques qui le composent. Il s'agit d'un RM d'une élève de quatrième année du primaire qui travaille accompagnée d'un adulte sur un problème ouvert à propos des nombres divisibles par quatre (voir annexe C pour le document original). La tâche est tirée de Del Notaro (2011). Seul le document écrit était disponible aux fins d'analyse.

La tâche demande premièrement à l'élève de trouver toutes les façons de compléter le nombre 2_7_ pour que la division par 4 ne donne pas de reste. Deuxièmement, l'élève doit déterminer combien de cas sont possibles si l'on remplace le 7 par un autre chiffre (1, 2, 3,...). Enfin, l'élève est amené à générer une loi à l'aide de ce qu'elle a fait précédemment.

Les prochaines lignes décrivent, en utilisant les aspects structurels et processuels, le RM de l'élève. Premièrement, face à la tâche, l'élève débute par mentionner qu'elle ne veut pas essayer tous les cas. Elle effectue donc un processus d'exemplification afin de trouver des éléments qui lui permettraient de générer tous les cas possibles sans essayer tous les nombres (figure 6.2). Elle essaye trois nombres pairs différents en variant à chaque fois le chiffre à la position des centaines, mais dont deux avaient le chiffre deux à la position des unités. L'exemplification joue ici le rôle d'un prélude au processus de conjecture qui suivra. Elle permet de supporter un processus de recherche de similitudes et de différences.

$\begin{array}{r} 2378 \quad 4 \\ - 20 \downarrow \\ \hline 37 \downarrow \\ - 36 \downarrow \\ \hline 18 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2472 \quad 4 \\ - 24 \downarrow \\ \hline 7 \downarrow \\ - 4 \downarrow \\ \hline 32 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2572 \quad 4 \\ - 24 \downarrow \\ \hline 17 \downarrow \\ - 16 \downarrow \\ \hline 12 \end{array}$
--	--	--

Figure 6.2 Processus exemplifier

On peut ici penser qu'un processus de comparaison des trois exemples a été mis en œuvre par l'élève pour en dégager les similitudes et les différences puisque, des trois exemples générés, elle infère rapidement une première règle (voir figure 6.3). On pourrait ici caractériser le RM selon une structure inductive. Les trois exemples

servant à la fois de données et d'affirmation (ils sont ou non divisibles par 4). La règle inférée est alors « pour que ça marche, il faut un 2 (à l'unité) ». C'est la similitude du chiffre 2 à la position des unités qui a été prise en compte pour énoncer la règle.

Elle génère alors à l'aide de cette règle (sans calcul), le nombre 2372. Lors de la génération de cet exemple, le RM prend alors une structure déductive. Elle ne valide toutefois pas ce nouvel exemple par un calcul. Ceci éclaire sur la valeur épistémique que l'élève attribue à la règle générée. D'un point de vue mathématique, la valeur épistémique de l'énoncé « pour que ça marche, il faut un 2 (à la position des unités) » ne peut être que vraisemblable, et nécessiterait donc la mise en œuvre d'un processus de justification.

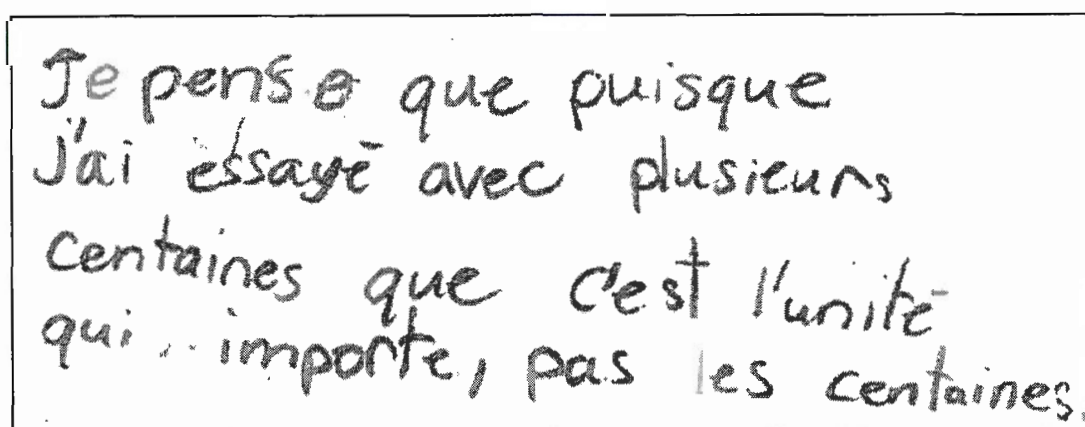
pour que ça marche il
faut un 2. 2372-2376-
2472-2476-2572-2576-

Figure 6. 3 Une conjecture suivie d'un processus exemplifier

Son processus d'exemplification se systématise à partir de l'exemple 2372. En gardant la centaine fixe, elle n'a plus à faire de calculs, mais s'appuie plutôt sur une structure déductive où les exemples générés précédemment servent de données et la règle « si j'ajoute 4 à un multiple de 4, j'obtiens un multiple de 4 » pour générer les exemples subséquents. Ces nouveaux exemples, générés à l'aide d'une structure déductive, permettent 1) de générer un contrexemple à la première règle; 2) la mise en œuvre d'un nouveau cycle du processus de conjecture; mais aussi 3) d'un

processus de justification. Ainsi, en s'appuyant sur une règle qu'elle a précédemment générée (comme l'élève est en quatrième année, elle a déjà rencontré différentes situations mettant en jeu la multiplication de nombre par 4), elle génère des informations au sujet de la tâche demandée, des informations qui lui permettent aussi d'étendre son propre discours mathématique. Par ailleurs, elle ne rejette pas la règle générée, mais la modifie pour inclure les nouveaux exemples.

Ainsi, à la suite de ces six nouveaux exemples générés sans calcul, l'élève génère alors l'énoncé « Je pense que puisque j'ai essayé avec plusieurs centaines que c'est l'unité qui importe, pas les centaines » (voir figure 6.4). Cet énoncé est moins précis que le premier, mais à la fois plus spécifique puisqu'il précise 1) que les centaines ne jouent pas un rôle dans la règle, et 2) la valeur épistémique de l'énoncé (« je pense que »). Comme l'élève n'a utilisé que le 2 et le 6 à la position des unités, on peut aussi penser qu'elle considère que seuls ces deux cas sont possibles. De même, ce processus de conjecture est accompagné d'un processus de justification puisque les actions posées (« j'ai essayé avec plusieurs centaines ») lui permettent de rendre l'énoncé vraisemblable.

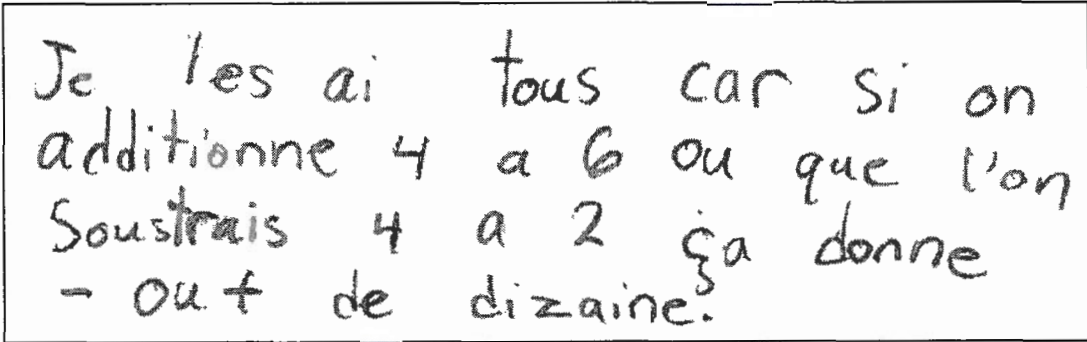


Je pense que puisque
j'ai essayé avec plusieurs
centaines que c'est l'unité
qui importe, pas les centaines.

Figure 6. 4 Énoncé généré par un processus de conjecture et de justification

Par la suite, l'élève se sert de la règle énoncée à la figure 6.4 pour générer tous les cas possibles de nombres de la forme 2_7_. Soulignons qu'elle demande alors l'accès à une calculatrice pour valider chacun des exemples générés. Ainsi, en plus des mots « je pense que », l'utilisation de la calculatrice pourrait être liée à la valeur épistémique que l'élève associe à l'énoncé généré par le processus de conjecture. La première partie de la tâche est alors complétée, c'est-à-dire que l'élève a généré l'ensemble des nombres de la forme 2_7_ qui sont divisibles par 4.

Pour justifier qu'elle a tous les nombres qui répondent aux conditions demandées, elle utilise de nouveau le discours développé sur les multiples de 4 (voir figure 6-5). Le processus « justifier » recycle des éléments générés ou utilisés précédemment et prend une forme déductive. Elle peut donc affirmer qu'elle a tous les cas possibles.



Je les ai tous car si on
additionne 4 à 6 ou que l'on
Soustrais 4 à 2 ça donne
- ou + de dizaine.

Figure 6. 5 Processus justifier⁶⁰

⁶⁰ Par l'expression « - ou + de dizaine », l'élève fait ici référence au fait que si l'on additionne 4 à un nombre de la forme 2_76, on obtient un nombre de la forme 2_80 et si l'on soustrait 4 à 2_72, on obtient un nombre de la forme 2_68.

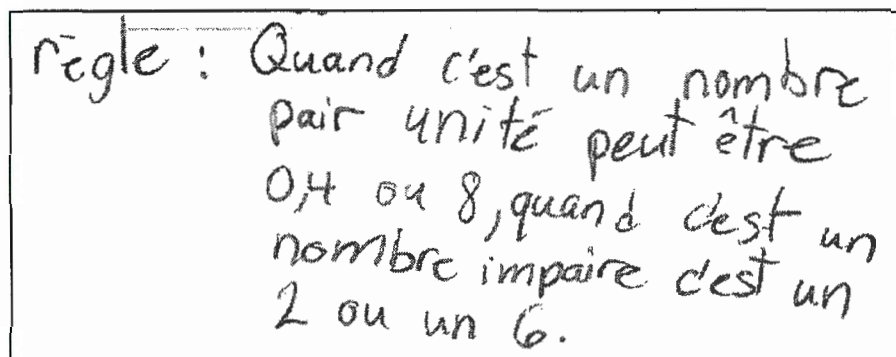
Par ailleurs, il ne s'agit pas ici d'un processus de preuve puisque le fait d'avoir répondu à la première partie de la tâche ne vient pas enrichir le discours mathématique d'un nouvel énoncé qui pourra être utilisé plus tard.

Dans la seconde partie de la tâche, l'élève devait générer tous les cas possibles si le chiffre à la position des dizaines peut lui aussi varier. Elle exemplifie alors en s'appuyant sur les résultats précédemment obtenus. En effet, on remarquera que les trois exemples choisis se rapportent toutes à ce qui a été généré par le processus de justification présenté à la figure 6.5. Toutefois, elle utilise tout de même le calcul pour se valider. La figure 6.6 présente les trois exemples.

The figure shows three examples of division and one equation, all handwritten. The first example is $2668 \div 4 = 667$ with a long division layout: 2668 over 4 , 24 under 26 , 26 under 26 , 24 under 26 , and 28 under 28 . The second example is $2680 \div 4 = 670$ with a long division layout: 2680 over 4 , 24 under 26 , 28 under 28 , and 00 under 00 . The third example is the equation $2664 \div 4 = 666$.

Figure 6.6 Exemplification pour la seconde partie de la tâche

La dernière partie de la tâche permettait de revenir en processus de conjecture et potentiellement, d'en arriver à un processus de preuve. À priori, si l'élève avait généré l'ensemble des cas possibles dans la deuxième partie, ces derniers pourraient servir à conjecturer une règle, puis à tenter de la prouver. Par ailleurs, l'élève n'a pas répondu à la deuxième partie de la tâche avant de conjecturer une règle. En s'appuyant sur tous les résultats de la première partie, et sur les exemples présentés à la figure 6.6, l'élève a généré la règle présentée à la figure 6.7.



règle : Quand c'est un nombre
pair unité peut être
0, 4 ou 8, quand c'est un
nombre impaire c'est un
2 ou un 6.

Figure 6. 7 Règle générée par le processus conjecturer⁶¹

Le RM prend ici une structure inductive où les cas servent de données et d'affirmation. Il est difficile ici de savoir si la règle ne s'applique qu'au cas que l'élève a devant les yeux ou à tous les nombres. Toutefois, on peut tout de même qualifier ce processus de processus de conjecture puisque la règle a, du point de vue du discours mathématique de la classe (un élève et un adulte dans ce cas), un potentiel de théorisation. Devant ce potentiel, l'adulte a prié l'élève de se justifier. Dans un premier temps, l'adulte qui avait remarqué que les nombres impairs avaient été écartés du RM dès le début a demandé à l'élève de justifier pourquoi. La figure 6.8 montre ce que l'élève a communiqué.

⁶¹ L'élève fait ici référence à la parité du nombre de dizaines, si le nombre de dizaines est pair, alors le chiffre des unités peut être 0, 4 ou 8; si le nombre de dizaines est impair, alors le chiffre des unités peut être 2 ou 6.

par exemple : Parce que dans la table de 4 il n'y a pas de nombre qui finit par 3 à l'unité

Dans la table de 4 ça fait toujours à l'unité 0, 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6 etc.

Figure 6. 8 Processus justifier

Il s'agit ici d'un processus de justification. Elle s'appuie sur un énoncé mathématique, une régularité de la table de multiplication par quatre qu'elle a déjà rencontrée, explorée. Par ailleurs, d'un point de vue du discours mathématique, on ne peut le qualifier de processus de preuve. En effet, malgré le fait que la règle créée peut potentiellement venir enrichir le discours mathématique, il est impossible d'y associer une valeur épistémique vraie du point de vue de la théorie mathématique. Il faut pousser davantage. L'adulte intervient encore afin de pousser l'élève vers un processus de preuve en demandant à l'élève d'expliquer pourquoi la table de multiplication par 4 se comporte comme tel. La figure 6.9 présente le processus de preuve de l'élève.

Si on a 2 dizaines les 2 qui restent vont ensemble et donne 4. Si on fait $20 + 20 + 20 + 20$ ça va toujours se diviser par 4. Alors si exemple on fait $20 + 4$ ça va donner $2\textcircled{4} + 4 = 2\textcircled{8}$. Si c'est un nombre impair à la dizaine il va rester 2 que l'on devra transférer au unité, cela va donner exemple $3\textcircled{2} + 4 = 3\textcircled{6}$.

Figure 6. 9 Processus de preuve, supporté par un processus d'exemplification

L'élève supporte ici son processus de preuve d'un processus d'exemplification. En fait, on peut nommer ce dernier exemple générique puisque les nombres ne servent que de support au processus de preuve qui a cours. Ils mettent en lumière la structure des nombres. Ainsi, l'élève débute par discuter du reste de la division par 4 de deux dizaines, en remarquant que pour chacune des dizaines, il reste 2 unités, lorsque divisée par 4. Elle illustre le fait que peu importe le nombre pair de dizaines, il n'y aura jamais de reste puisque la réunion de deux dizaines permet de former un paquet de 4 unités avec les restes. Le $20 + 20 + 20 + 20$ sert de médiateurs visuels pour représenter un nombre quelconque comportant un nombre pair de dizaines. De même, lorsqu'elle utilise $20 + 4$, c'est le fait de partir d'un nombre divisible par 4 (n'importe lequel) qu'elle met au jour, et non le cas particulier de 20. De plus, en tablant sur des énoncés généralement acceptés dans la classe (si un nombre est divisible par 4, alors je peux le grouper en un certain nombre de paquets de quatre; si j'ajoute 4 à un multiple de 4, alors j'obtiens un nombre divisible par 4) elle structure son processus

déductivement. Elle prouve donc que la règle qu'elle a générée est vraie pour tous les nombres.

Cet exemple de RM d'élève permet d'illustrer comment les aspects processuel et structurel s'interfécondent et comment les éléments générés lors des processus précédents sont recyclés. De même, il met en lumière le rôle important que revêt le processus d'exemplification en tant que support des processus de conjecture, de justification et de preuve. On peut constater comment la gestion des exemples générés par un processus d'exemplification vient mettre en lumière différentes similitudes et différences qui mènent à la conjecture, et comment les mêmes exemples, ou de nouveaux, sont utilisés pour justifier, mais aussi prouver les énoncés générés par ces processus de RM. Ce rôle de l'exemplification est aussi mis en évidence par les analyses tirées de Hitt et Kieran (2009). Dans cet article, deux élèves du secondaire travaillent la factorisation d'expressions algébriques. Ces derniers exemplifient pour conjecturer une technique de factorisation et pour la justifier. Au primaire, tout comme au secondaire, exemplifier peut être un support très important des processus de RM.

À la lumière de cet exemple, il est possible d'entrevoir le potentiel du modèle conceptuel développé pour l'analyse d'un RM d'élève. Il offre un réseau conceptuel cohérent avec la perspective commognitive qui permet de « parler » du RM de l'élève, de mieux comprendre sa nature et peut-être, éventuellement, de mieux comprendre comment le développer.

6.1.4 Le RM en tant que discours

Certains diront que l'élève qui rapporte un raisonnement n'est pas en train de le faire, mais la perspective discursive prise ici fait que ce dernier actualise son RM à chacun

des moments. Que ce dernier parle au passé ou au présent n'a pas d'importance, il y a tout de même RM. Ainsi, étudier le RM d'un point de vue discursif permet de considérer des parties du discours disponibles comme processus de RM. Il sera alors possible, pour le chercheur, de mettre en lumière certaines régularités et, à l'aide d'outils d'analyse qu'il reste à développer ou à emprunter, d'étudier comment ce processus se développe. Cette thèse propose un modèle de RM qui permet de qualifier le RM en tant que concept et non de proposer un modèle de son développement. De plus, elle va un peu plus loin en proposant de qualifier certains processus de RM selon des caractéristiques qui s'actualiseront différemment selon les élèves, l'enseignant ou la classe. En effet, une autre implication de considérer le RM d'un point de vue discursif est le fait qu'il s'agit alors, comme tout discours, d'un phénomène situé.

Un autre aspect important de considérer le RM en tant que discours est le fait que l'enseignant ne peut évaluer que le discours de l'élève. Il y a donc un intérêt aussi pour l'enseignement de définir le RM en particulier, et les mathématiques en général en tant qu'activité discursive. Si on est en mesure de comprendre comment le RM se développe du point de vue discursif, des implications pour l'enseignement pourront être proposées.

Enfin, l'anasynthèse des discours de différents chercheurs d'une même communauté a permis de réunir dans un même modèle des termes qui au départ étaient utilisés, mais peu théorisés sous la forme d'un réseau de concept cohérent avec la perspective commognitive.

6.2 Conclusion

L'aboutissement de cette recherche est le résultat d'un long processus réflexif. À l'aide d'une démarche d'anasynthese, plus spécifiquement en s'appuyant sur une analyse de contenu, un modèle conceptuel du RM pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire est proposé. À la suite de nombreuses boucles de rétroaction, le modèle qui est présenté ici s'est stabilisé. En effet, l'ajout de textes n'ajoutait aucun élément nouveau pour éclairer le concept du RM. Ce modèle propose de caractériser le RM selon une perspective commognitive, en posant le RM en tant que processus commognitif. En tant que processus inférentiel, il permet d'étendre le discours mathématique en générant des énoncés à partir d'autres énoncés. Il a ainsi comme principale fonction d'étendre le discours mathématique, la systématisation permettant la théorisation du discours.

Deux aspects sont apparus comme fondamentaux dans l'élaboration du modèle : l'aspect structurel et l'aspect processuel. Le premier aspect fait référence à la manière dont les éléments discursifs s'agencent entre eux en un système ordonné, qui décrit à la fois les éléments et les relations qu'ils entretiennent entre eux. La valeur épistémique des énoncés générés est associée au qualificateur dans un pas de RM. Chaque structure élémentaire est régie par des règles métadiscursives quant au qualificateur permis. Le second aspect s'intéresse au RM en tant que processus commognitif métadiscursif, c'est-à-dire, qui dérive des énoncés à propos d'objets ou de relations mathématiques par l'exploration des relations qui les unissent. Chacune des deux catégories qui ont émergé a un but différent dans le RM. Les processus de recherche de similitudes et de différences visent à générer des énoncés qui viendront potentiellement enrichir le discours mathématique et éventuellement la théorie mathématique. Les processus de recherche de validité visent à changer la valeur épistémique des énoncés, toujours afin d'étendre le discours mathématique et, potentiellement, la théorie mathématique.

L'exemple présenté à la section 6.1.3 met en lumière les deux aspects du RM et comment ils s'articulent entre eux. En particulier, cet exemple met au jour comment le processus « exemplifier » peut supporter les processus de recherche de similitudes et de différences, ainsi que les processus de recherche de validation. Il est aussi possible de constater les variations de valeur épistémique associées aux différents énoncés tout au long du RM de l'élève.

6.2.1 La validation interne du modèle

Comme spécifié au chapitre II (section 2.3.5), différents critères ont été utilisés pour valider à l'interne le modèle proposé. Le tableau 2.1 spécifie sept critères à prendre en compte : la pertinence, la valeur euristique, la cohérence, la circonscription, la complétude, l'irréductibilité et la crédibilité. Les prochains paragraphes font état de comment chacun a été pris en compte pour valider le modèle proposé.

La pertinence de proposer un modèle de RM pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire provient du constat du flou conceptuel lié à ce terme dans la littérature en didactique des mathématiques, et de la nécessité d'explorer le concept RM d'un point de vue épistémologique. En ce sens, le modèle répond bien à ce problème en proposant un champ conceptuel du RM.

La valeur euristique du modèle se situera dans la réflexion engendrée par le modèle et sa fécondité en nouveaux savoirs pour l'enseignement. Premièrement, ce modèle vient enrichir la réflexion des chercheurs en didactique des mathématiques ainsi que des enseignants à propos du RM en proposant des définitions de différents termes associés au RM dans une perspective commognitive. De plus, l'exemple présenté précédemment permet de donner un aperçu du potentiel du modèle quant à notre compréhension du RM chez les élèves. Par ailleurs, en tant que modèle conceptuel, la

puissance du modèle sera davantage exploitée lorsqu'une pléthore de données aura été étudiée. Il permettra de mettre en lumière diverses régularités du discours, telles les règles discursives développées à l'école et leur évolution.

L'élaboration des synthèses a été supportée par un souci de cohérence interne. Les éléments proposés sont liés à la perspective commognitive par la mise au jour des présupposés épistémologiques et théoriques qui sous-tendent ce dernier.

Le concept de RM a été circonscrit par la délimitation de ce qui est et de ce qui n'est pas un RM. Pour ce faire, les raisonnements traités par le modèle ont été définis à l'aide d'énoncés qui se veulent les plus clairs possible. De plus, des contrexemples (s'appuyer sur des exemples n'est pas prouver, abstraire, conjecturer en science) de RM ont été abordés afin de favoriser la compréhension de ce qui est entendu par RM. Cette démarche nous a permis de préciser les balises du RM afin d'éclairer le flou conceptuel problématisé au premier chapitre.

Le critère de complétude est relié au critère de circonscription. Pour les processus traités, le corpus couvre les écrits de 1990 à 2010. La saturation des données permet d'affirmer que les éléments présents dans le corpus ont bien été pris en compte. Évidemment, l'évolution du discours didactique ne pourra que venir enrichir le modèle et le garder vivant, comme il est spécifié par L. F. Lee (1997).

L'irréductibilité fait référence à la simplicité du modèle proposé. Le modèle est composé de deux aspects fondamentaux du RM. L'aspect structurel se décompose en trois structures élémentaires (déductive, inductive et abductive), l'analogie étant une composition d'au moins deux pas élémentaires. L'aspect processuel se décompose en deux catégories, les processus de recherche de similitudes et de différences (généraliser, conjecturer, identifier une régularité, comparer et classer) et les

processus de recherche de validation (justifier, prouver et démontrer); « exemplifier » est alors défini comme un processus de support de ces derniers. Ceci en fait un modèle simple à gérer tout en faisant état de la complexité du concept de RM.

Afin de s'assurer de la crédibilité du modèle proposé, deux stratégies ont été utilisées. Premièrement, le corpus a été constitué de sources validées par la communauté de didactique des mathématiques (classement de Toerner et Arzarello (2012), base de données, actes de colloques reconnus) et a pris en compte les auteurs reconnus du domaine. Deuxièmement, mes présupposés théoriques ont été explicités afin d'éclairer la démarche d'argumentation tout au long de la thèse. Enfin, la remise en question a fait partie intégrante de toute la démarche, ce qui a mené à plusieurs boucles de rétroaction. Les différentes synthèses étaient confrontées à une relecture du corpus ainsi qu'à la recherche de versions, d'interprétation, plus convaincantes (Sfard, 2012).

6.2.2 Une première validation externe du modèle

À l'instar de Villemagne (2005), le comité de direction a été choisi comme expert pour la validation externe. De plus, les séminaires et différentes présentations ont aussi servi de validation par des experts. En effet, les nombreuses rencontres autour de la constitution du corpus, des analyses et des synthèses, ont permis d'éprouver le modèle en me permettant de modifier mon discours en cohérence avec les éléments émergents de l'analyse et la théorie commognitive. De plus, différentes sections de ce modèle ont été présentées à EMF 2009 et 2012 (Jeannotte, Kieran et Cyr, 2010; Jeannotte, 2012), au GDM 2010 et 2013 (Jeannotte, 2010, 2013b, 2013c), au colloque du doctorat réseau (Jeannotte, 2011), au colloque Formation à la recherche en didactique des mathématiques (Jeannotte, Kieran et Cyr, 2012), à PME-NA 2013 (Jeannotte, 2013a), à la journée d'étude du Cercle épistémologique (Jeannotte, 2014a)

et à PME-2014 (Jeannotte, 2014b). Les commentaires recueillis lors de ces rencontres et de ces présentations ont été pris en compte dans les boucles subséquentes. Au cours de ces différentes présentations, différentes interactions à propos du modèle ont permis à mon discours, mais aussi à celui de la communauté, de se développer.

6.2.3 Limites

Cette thèse ne permet pas de comprendre le développement du RM chez l'élève d'un point de vue conceptuel, tel n'en était pas l'objectif. Elle permet plutôt de comprendre ce qu'est le RM. Comprendre comment se développe le RM nécessite une étude approfondie du développement du discours chez les élèves, du lien entre le RM et d'autres processus commognitifs, telle l'abstraction, et nécessite une méthodologie tout autre. Le RM tablant sur l'ensemble des mathématiques (en tant que discours), ce modèle pourra servir de point de départ à l'étude du développement du RM chez les élèves en mettant au jour le vocabulaire, les règles discursives, les médiateurs visuels, les routines et les énoncés utilisés et gérés lors des RM.

Une seconde limite est le fait que ce modèle ne prescrit pas une méthode d'enseignement. Il fournit un vocabulaire, des énoncés, un discours pour approfondir la réflexion sur cet objet d'enseignement aux enseignants. Il ne leur dit pas comment enseigner pour que le RM se développe chez les élèves.

Une troisième limite de cette thèse est que les données ne me donnent pas accès à l'ensemble du « texte » comme unité d'analyse, c'est-à-dire accès à tout le contexte d'écriture qu'il soit social, culturel ou historique. Il ne s'agit que d'une histoire partielle construite à partir de la littérature scientifique. Il était parfois difficile de comprendre le sens que les auteurs associaient à tel ou tel terme. Par exemple, Dreyfus utilise davantage le terme « pensée » que « raisonnement », mais il est cité

par certains, dont English (2004) en lien avec le RM. Pour pallier à cette limite, j'ai tenté, le plus possible, de faire des liens entre les différents textes, de prendre en compte le contexte historique, social et culturel de l'auteur et sa position épistémologique ou théorique. Toujours en lien avec cette limite, la didactique des mathématiques française diffère de la didactique anglo-saxonne (*mathematics education*). Toutefois, les outils technologiques actuels amènent une globalisation et une convergence des savoirs qui permettent de dire que ces deux communautés de recherche n'ont pas évolué en vases clos. En particulier, le Québec a une position bien particulière. En ayant accès aussi bien aux textes francophones qu'anglophones, la didactique des mathématiques québécoise s'est développée à la jonction des deux communautés. La prise en compte d'un corpus bilingue dans la construction de ce modèle était alors incontournable.

Une quatrième limite est liée à la composition des données qui ont mené à la construction de ce modèle. Premièrement, ce modèle ne s'appuie pas sur l'ensemble du discours de la communauté en didactique des mathématiques, mais uniquement sur les écrits de ces derniers. À l'instar de L. F. Lee (1997), des entrevues de groupe composé de didacticiens pourraient faire émerger des sens cohérents avec une perspective commognitive, mais qui ne trouvent pas sa place dans les écrits jusqu'à ce jour. Deuxièmement, malgré que le corpus soit aussi composé de philosophes (Peirce, Toulmin) et de mathématiciens (Pólya) intéressés par l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, tous les acteurs de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques n'ont pas voix au chapitre. Tout comme pour L. F. Lee (1997), les enseignants pourraient favoriser l'élaboration d'un modèle de RM plus riche épistémologiquement en prenant en compte, toujours d'une perspective commognitive, les différents sens présents dans leur discours.

6.2.4 Retombées et prolongements possibles

Cette thèse a des retombées sur le champ de la didactique des mathématiques, d'une part, par la mise en évidence du flou conceptuel entourant le RM, élément pourtant central dans plusieurs curriculums et recherches en didactique des mathématiques; d'autre part, par sa proposition théorique, elle permet d'alimenter le débat autour du développement du RM. Je discuterai ici des retombées d'un point de vue théorique et d'un point de pratique de même que des prolongements possibles.

6.2.4.1 La commognition et le développement du RM

La perspective commognitive prise dans cette thèse mène à différents énoncés théoriques pouvant favoriser l'étude du développement du RM chez les élèves. En effet, du point de vue de la recherche, de poser le RM comme une activité commognitive qui amène un développement de niveau objet mène à d'autres questionnements.

On pourrait penser que les domaines des mathématiques donnent lieu à différentes relations et structures, à l'utilisation de médiateurs visuels, routines et énoncés généralement acceptés distincts. Par ailleurs, certains éléments du RM pourraient s'avérer invariants. Dans la majorité des domaines, plusieurs règles du jeu mathématique sont les mêmes. Un contreexemple suffit à réfuter un énoncé universel, conjecturer nécessite de prouver pour pouvoir inclure l'énoncé construit dans une théorie mathématique, généraliser étend le domaine d'application d'un énoncé (vraisemblable ou vrai). En s'attardant à un domaine en termes de processus de RM et en ressortant comment l'élève raisonne mathématiquement dans ce domaine en particulier, il serait possible de mieux comprendre comment il apprend et comment construire un enseignement qui permettrait de l'aider à développer son RM. C'est un

des potentiels de ce modèle, donner les outils théoriques qui permettront de mieux comprendre comment se développe le RM et comment, par le fait même, en favoriser le développement par l'enseignement.

De prendre une perspective commognitive demande aussi que l'utilisation de ce modèle soit contextualisé au milieu étudié, de prendre en compte l'histoire des élèves, des mathématiques, des tâches utilisées.

6.2.4.2 L'enseignement des mathématiques

Un élément de l'activité de l'enseignant est le choix des tâches et de l'évaluation. Lorsque vient le temps d'amener les élèves à raisonner mathématiquement, certaines tâches pourraient favoriser différents processus de RM. Le fait de mieux comprendre les aspects structurel et processuel, ainsi que leur relation, permet de porter un regard sur les activités visant le développement du RM. Par exemple, il est impossible, à l'aide uniquement de tâches, d'amener avec certitude un élève à raisonner à l'aide d'un processus de RM particulier. D'autres éléments sont importants : entre autres, les règles discursives partagées par la classe, le contexte de résolution de la tâche, le bagage de l'élève, les ressources à sa disposition, les exemples qu'il met en place s'il y a lieu.

Si les aspects processuels et structurels ont différentes caractéristiques, il faudrait se pencher sur comment construire des tâches qui mettent de l'avant ces aspects, et comment amener les élèves à participer à un discours mathématique où le RM est l'élément central. La complexité du RM appelle à l'étude systématique des processus de RM et à la construction de tâches visant l'un ou l'autre de ces processus. Par ailleurs, construire une tâche visant le concept de nombre ou visant un processus de RM a peut-être des éléments communs, mais certainement plusieurs éléments

différents. On peut spéculer à l'aide de ce modèle sur différents choix pouvant mener au développement du RM. Une recherche collaborative avec des enseignants pourrait permettre de mettre d'autres éléments en lumière et de modifier le modèle de RM tout en permettant de mieux comprendre son développement.

Le réseau conceptuel proposé par ce modèle pourrait aussi éclairer le développement curriculaire. Par exemple, il pourrait venir bonifier la compétence liée au RM autant au primaire qu'au secondaire en éclairant l'aspect structurel et processuel et les liens qui les unissent. Au primaire (MEQ 2000), l'aspect processuel du RM est peu développé et le RM est davantage lié à une application des concepts mathématiques (comme l'addition de fraction). Une étude plus approfondie des différents processus de RM pourrait mener à un enseignement, dès le primaire, axé sur le développement de ces derniers. De même, la position adoptée dans cette thèse voulant que l'analogie ne soit pas de même nature que les raisonnements abductifs, inductifs et déductifs vient questionner le PFEQ pour le secondaire (MELS, 2003), dans lequel ces différents RM sont placés au même niveau. Toujours pour le secondaire, même si les deux aspects sont présents dans le PFEQ, le modèle proposé pourrait favoriser les liens entre les deux et par le fait même offrir une conceptualisation encore plus cohérente. La création de ce modèle pourrait ainsi paver la voie à un développement plus systématique et plus cohérent du RM plus tôt dans le parcours scolaire.

6.2.4.3 Une deuxième validation externe : ajouter la voix des enseignants

Pour terminer, afin d'enrichir le modèle proposé, la voix des enseignants est à prendre en compte. Ce modèle s'appuie sur le discours des experts en didactique des mathématiques du point de vue de la recherche. La perspective discursive adoptée dans le projet met de l'avant la centralité des activités discursives et sociales dans la construction de sens. Dans un contexte où les enseignantes et enseignants cherchent à

favoriser le développement du RM chez leurs élèves, il est important, autant du point de vue de la recherche fondamentale en didactique des mathématiques que pour la recherche à visée pratique, de développer des outils conceptuels qui tiennent compte du sens construit par les intervenants de première ligne, le sens étant construit à partir du discours partagé. L'objectif de ce prolongement serait donc double : enrichir et valider le modèle conceptuel de RM à partir du discours que les enseignantes et les enseignants tiendront sur, et à partir du modèle construit lors de cette thèse, mais aussi, documenter et mieux comprendre le processus de construction de sens autour du concept de RM chez le groupe d'enseignantes et d'enseignants. Ce prolongement permettrait de garder ce modèle vivant et de le faire évoluer conjointement au discours de notre communauté.

ANNEXE A

CORPUS D'ANALYSE DU CHAPITRE III⁶²

*Arsac, G. (1996). Un cadre d'étude du raisonnement mathématique. *Séminaire Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques*. Grenoble, France : IMAG.

*Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. et Mante, M. (1992). Initiation au raisonnement déductif au collège : une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique. Lyon : Presses universitaires de Lyon.

Arsac, G. et Mante, M. (1997). Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 21-43.

*Artzt, A. F. (1999). Mathematical reasoning during small-group problem solving. Dans L. V. Stiff et F. R. Curcio (dir.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 Yearbook* (p. 115-127). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ayalon, M. et Even, R. (2006). Deductive reasoning: Different conceptions and approaches. Dans J. Novotna, H. Moraova, M. Kratkaet N. Stehilkova (dir.), *Actes de la 30e Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 89-96).

⁶² Une définition de raisonnement est présente dans les références précédées d'un astérisque.

Ayalon, M. et Even, R. (2008). Deductive Reasoning: In the Eye of the Beholder. *Educational Studies in Mathematics*, 69(3), 235–247.

*Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147–176.

*Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves du Collège. (Thèse non publiée). Université de Grenoble 1.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM*, 40(3), 501–512.

Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. Dans G. Hanna, H. N. Jahnke et H. Pulte (dir.), *Explanation and proofs in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (p. 115–135). Boston, MA : Springer US. doi:10.1007/978-1-4419-0576-5

Ball, D. L. et Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. Dans J. Kilpatrick, W. G. Martin et D. Schifter (dir.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (p. 27–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Barbin, E. (2010). Explanation and Proof in Mathematics. Dans G. Hanna, H. N. Jahnke et H. Pulte (dir.), *Explanation and proofs in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (p. 237–251). Boston, MA : Springer US.

*Bergqvist, T. (2005). How Students Verify Conjectures: Teachers' Expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(2), 171–191.

*Bergqvist, T., Lithner, J. et Sumpter, L. (2008). Upper Secondary Students' Task Reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(1), 1–12.

- Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics : Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351–382.
- Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. et Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. Dans J. Novotna (dir.), *Actes du 30e Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education*. Prague, République Tchèque.
- *Bjuland, R., Cestari, M. L. et Borgersen, H. E. (2008). The Interplay between Gesture and Discourse as Mediating Devices in Collaborative Mathematical Reasoning: A Multimodal Approach. *Mathematical Thinking and Learning : An International Journal*, 10(3), 271–292.
- Blum, W. et Kirsch, A. (1991). Preformal proving: examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, 22(2), 183–203.
- Boero, P., Douek, N., Morselli, F. et Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. Dans M. F. F. Pinto et T. F. Kawasaki (dir.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 1–30).
- *Böesen, J., Lithner, J. et Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 89–105.
- *Brodie, K. (2010). Teaching mathematical reasoning: A challenging task. Dans K. Brodie (dir.), *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms* (p. 7–22). Boston, MA : Springer US.
- *Brousseau, G. et Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(2-3), 13–58.

- *Cabassut, R. (2005). *Savoir scientifique : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines*. (Thèse de doctorat non publiée). Université Paris Diderot.
- Cai, J. (2000). Mathematical Thinking Involved in U.S. and Chinese Students' Solving of Process-Constrained and Process-Open Problems. *Mathematical thinking and learning*, 2(4), 309–340.
- Calder, N., Brown, T., Hanley, U. et Darby, S. (2006). Forming Conjectures within a Spreadsheet Environment. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 100–116.
- Carlsen, M. (2009). Reasoning with Paper and Pencil: The Role of Inscriptions in Student Learning of Geometric Series. *Mathematics Education Research Journal*, 21(1), 54–84.
- Cartiglia, M., Furinghetti, F., & Paola, D. (2004). Patterns of reasoning in classroom. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 287–294). Bergen, Norvège.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359–387.
- De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with sketchpad. Dans M. de Villiers (dir.), *Rethinking proof with sketchpad* (p. 3–10). Key Curriculum Press.
- De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. Dans G. Hanna, H. N. Jahnke et H. Pulte (dir.), *Explanation and proofs in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (p. 205–221). Boston, MA : Springer US.

- DelMas, R. C. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. Dans D. Ben-Zvi et J. Garfield (dir.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (p. 79–96). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Douek, N. (1999). Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 89–110.
- Douek, N. et Scali, E. (2000). About argumentation and conceptualisation. Dans T. Nakahara et M. Koyama (dir.), *Proceeding of the 24th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 249–256). Hiroshima.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Dans D. Tall (dir.), *Advanced mathematical thinking* (p. 25–41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove (with apologies to Morris Kline). *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3), 85–109.
- Dreyfus, T. et Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. Dans R. J. Sternberg et T. Ben Zeev (dir.), *The nature of mathematical thinking* (p. 253–284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Duquesne, F. (2003). *Apprendre à raisonner en mathématiques à l'école et au collège* (2e ed.). Suresnes, France : Éditions du Centre national d'études et de formation pour l'enfance inadaptée.
- *Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 233–261.
- Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer : Continuité ou rupture cognitive? *petit x*, (31), 37–61.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Suisse : P. Lang.

- Duval, R. (2001). Écriture et compréhension : Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves? Dans *Produire et lire des textes de démonstration* (p. 183–205).
- Duval, R. et Egret, M. A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères-Irem*, 12, 114–140.
- English, L. D. (1997). Analogies, metaphors, and images: Vehicles for mathematical reasoning. Dans L. D. English (dir.), *Mathematical reasoning : Analogies, metaphors and images* (p. 4–18). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- English, L. D. (1998a). Editorial mathematical reasoning: Nature, form, and development. *Mathematical Cognition*, 4(2), 81–83.
- English, L. D. (1998b). Reasoning by Analogy in solving comparison problems. *Mathematical Cognition*, 4(2), 125–146.
- English, L. D. et Watters, J. J. (2005). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 58–79.
- Farmaki, V. et Paschos, T. (2007). The interaction between intuitive and formal mathematical thinking: A case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(3), 353–365.
- Ferrando, E. (2005). *Abductive processes in conjecturing and proving*. (Thèse de doctorat non-publiée). West Lafayette : Purdue University.
- Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3), 11–50.
- Francisco, J. M. et Maher, C. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(3), 361–372.

- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(4), 258–291.
- Gutstein, E. (2003). Teaching and learning mathematics for social justice in a urban, latino school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 37–73.
- Hadas, N., Hershkowitz, R. et Schwarz, B. B. (2001). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 127–150.
- Hanna, G. (2001). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 5–23.
- Hanna, G. et Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of mathematical knowledge. Dans G. Hanna, H. N. Jahnke et H. Pulte (dir.), *Explanation and proofs in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (p. 85–100). Boston, MA : Springer US. doi:10.1007/978-1-4419-0576-5
- Hanna, G. et Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 421–438.
- Harel, G. et Sowder, L. (1998). Students ' proof schemes : Results from exploratory studies. *Research in Collegiate Mathematics Education III*, 7, 234–283.
- Harel, G. et Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27–50.
- Harel, G. et Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. Dans F. K. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, p. 805–842). Charlotte : Information Age Pub.
- Healy, L. et Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics [Rapport de recherche]* (p. 1–6). Londre: Mathematical Sciences, Institute of Education, University of London.

- Healy, L. et Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428.
- Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving : A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education* 33(3), 176–203.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389–399.
- Hitt, F. et Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a task-technique-theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14(2), 121–152.
- Houssart, J. et Sams, C. (2008). Developing mathematical reasoning through games of strategy played against the computer. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 15(2), 59–71.
- Hunter, R. (2010). Changing roles and identities in the construction of a community of mathematical inquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(5), 397–409.
- *Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 55–85.
- Knipping, C. (2003). Argumentation structures in classroom proving situations. Dans *Actes de la 3e conference of the European society in Mathematics Education*. Bellaria, Italy : ERME.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM*, 40(3), 427–441.

- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. Dans P. Cobb et H. Bauersfeld (dir.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (p. 229–269). NJ, England: Lawrence Erlbaum associates.
- Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), 60–82.
- Lampert, M. (1986). Knowing, doing, and teaching multiplication, *Cognition and Instruction*. 3(4), 305–342.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29–63.
- Lee, K.-H. et Sriraman, B. (2011). Conjecturing via reconceived classical analogy. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 123–140.
- Leinhardt, G. et Schwarz, B. B. (2009). Seeing the problem : An explanation from Pólya. *Cognition and Instruction*, 15(3), 395–434.
- Leng, M. (2010). Preaxiomatic mathematical reasoning : An algebraic approach. Dans G. Hanna et al (dir.), *Explanation and proofs in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (p. 47–57). New York : Springer.
- Lin, F.-L., Yang, K.-L. et Chen, C.-Y. (2004). The features and relationships of reasoning, proving and understanding proof in number patterns. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2(2), 227–256.
- *Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 165–190.
- *Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255–276.

- Maher, C. (2009). Children's reasoning: discovering the idea of mathematical proof. Dans D. A. Stylianou, M. L. Blanton et E. J. Knuth (dir.), *Teaching and learning proof across the grades* (p. 120–132). New York : Routledge.
- Maher, C. et Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: a 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194–214.
- Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 25–53.
- Mariotti, M. A. (2005). *Proof and proving in algebra*. Récupéré de <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/06Hiver/Mariotti-GARME.pdf>
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. Dans A. Gutiérrez et P. Boero (dir.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (p. 173–204). Rotterdam: Sense Publishers.
- Mariotti, M. A., Knipping, C., Küchemann, D. et Nordstrom, K. (2005). Argumentation and proof. Dans M. Bosch (dir.), *Proceeding of the 4th Conference of European Research in Mathematics Education* (vol. 4, p. 383–478). Sant Feliu de Guixols, Espagne.
- Mason, J. (1994). *L'esprit mathématique*. Mont-Royal, QC : Modulo.
- Mason, J. (2001). Questions about mathematical reasoning and proof in schools. Opening address to QCA Conference, UK. Récupéré de http://xtec.cat/centres/a8005072/articles/proof_and_reasoning.pdf
- *Meyer, M. (2010). Abduction - A logical view for investigating and initiating processes of discovering mathematical coherences. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 185–205.

- Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 47–68.
- *Mueller, M. F. (2007). *A study of the development of reasoning in sixth grade students*. Rutgers University, New Brunswick, NJ.
- Mueller, M. F. (2009). The co-construction of arguments by middle-school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 138–149.
- Mueller, M. F. et Maher, C. (2009). Learning to reason in an informal math after-school program. *Mathematics Education Research Journal*, 21(3), 7–35.
- Oner, D. (2008). A comparative analysis of high school geometry curricula : What do technology-intensive, standards-based, and traditional curricula have to offer in terms of mathematical proof and reasoning? *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 27(4), 467–487.
- Parnafes, O. et Disessa, A. (2004). Relations between types of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 251–280.
- Pedemonte, B. (2002). Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques. (Thèse de doctorat non publiée). Université Joseph Fourier, Grenoble.
- *Peressini, D. et Webb, N. (1999). Analyzing mathematical reasoning in students' responses across multiple performance assessment tasks. Dans L. V Stiff et F. R. Curcio (dir.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (p. 156–174). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pólya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning* (2e ed., vol. 1). Princeton, NJ : Princeton University Press.
- Powell, A. B., Francisco, J. M. et Maher, C. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 405–435.

- Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6), 595–610.
- Rasmussen, C. et Marrongelle, K. (2006). Pedagogical content tools: Integrating student reasoning and mathematics in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(5), 388–420.
- Reid, D. A. (1995). *The need to prove*. (Thèse de doctorat non publiée). University of Alberta, Edmonton.
- Reid, D. A. (2002a). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), 5–29.
- Reid, D. A. (2002b). Describing young children's deductive reasoning. Rapport : ED476102.
- Reid, D. A. (2003). Forms and uses of abduction. Dans M. A. Mariotti (dir.), *Proceedings of the 3th conference of the European society in Mathematics Education* (p. 1–10). Bellaria, Italy.
- Reid, D. A. (2005). The Meaning of Proof in Mathematics Education.
- Reid, D. A. (2010). *Proof in mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Reid, D. A. et Zack, V. (2009). Aspects of teaching proving in upper elementary school. Dans D. A. Stylianou, M. L. Blanton et E. J. Knuth (dir.), *Teaching and learning proof across the grades* (p. 133–146).
- Reiss, K. et Germany, O. (2002). Learning to prove : The idea of heuristic examples. *ZDM*, 34(1), 29–35.
- *Richard, P. R. (2004). L'inférence figurale : Un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics*, 57(2), 229–263.

- Rivera, F. D. (2008). On the pitfalls of abduction: Complicities and complexities in patterning activity. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 17–25.
- Rivera, F. D. et Becker, J. R. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 140–155.
- Rodd, M. M. (2000). On mathematical warrants : Proof does not always warrant, and a warrant may be other than a proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 37–41.
- Schliemann, A. D. et Carraher, D. W. (2002). The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Developmental Review*, 22(2), 242–266.
- Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being-Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. Dans P. Cobb (dir.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (p. 37–98). New York: Routledge.
- Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York : Cambridge University Press.
- Sfard, A. (2009). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 157–189.
- Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 30(2), 197–210.
- Simon, M. A. et Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(1), 3–31.
- Stacey, K. et Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 72(3), 271–288.

- Steen, L. A. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. Dans L. V Stiff et F. R. Curcio (dir.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 Yearbook* (p. 270-285). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Sternberg. (1999). The nature of mathematical reasoning. Dans L. V Stiff et F. R. Curcio (dir.), *Developing mathematical reasoning in Grades K-12* (p.37-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stiff, L. V et Curcio, F. R. (dir.). (1999). *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (1999 Yearbook). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stylianides, A. J. (2007a). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.
- Stylianides, A. J. (2007b). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1–20.
- Stylianides, A. J. et Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(4), 307–332.
- *Stylianides, G. J. (2005). Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: a curricular perspective. (Thèse de doctorat non publiée). University of Michigan.
- *Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9–16.
- Stylianides, G. J. et Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(2), 103–133.

- Stylianides, G. J. et Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314–352.
- Tall, D. et Mejia-ramos, J. P. (2010). The long-term cognitive development of reasoning and proof. Dans G. Hanna, H. N. Jahnke et H. Pulte (dir.), *Explanation and proofs in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (p. 137–149). Boston, MA : Springer US.
- *Thompson, P. (1996). Imagery and the development of mathematical reasoning. Dans L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin et B. Greer (dir.), *Theories of mathematical learning* (p. 267–283). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Tillema, E. et Hackenberg, A. (2011). Developing systems of notation as a trace of reasoning. *For the Learning of Mathematics*, 31(3), 29–35.
- Tirosh, D. et Stavy, R. (1999). Intuitive rules : a way to explain and predict students' reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3), 51–66.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Weyers, D. et Verschaffel, L. (2004). The predictive power of intuitive rules: A critical analysis of the impact of “more A--more B” and “same A--same B.” *Educational Studies in Mathematics*, 56(2-3), 179–207.
- Wares, A. (2004). Conjectures and proofs in a dynamic geometry environment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(1), 1–10.
- Watson, J. M. et Moritz, J. B. (2001). Development of reasoning associated with pictographs: representing, interpreting, and predicting. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 47–81.
- Weber, K., Maher, C., Powell, A. et Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics*, 68(3), 247–261.

- White, C. S., Alexander, P. A. et Daugherty, M. (1998). The relationship between young children's analogical reasoning and mathematical learning. *Mathematical Cognition*, 4(2), 103–123.
- Whitenack, J. W. et Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and students' mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses. *Mathematical Behavior*, 21, 441–457.
- Wyndhamn, J. et Saljo, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning--A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, 7(4), 361–382.
- *Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. Dans M. van den Heuvel-Panhuizen (dir.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 9–24). Utrecht, The Netherlands.
- Yackel, E. et Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. Dans J. Kilpatrick, W. G. Martin et D. Schifter (dir.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (p. 227–236). Reston : NCTM.
- Zandieh, M. J. et Knapp, J. (2006). Exploring the Role of Metonymy in Mathematical Understanding and Reasoning: The Concept of Derivative as an Example. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 1–17.

ANNEXE B

DÉFINITIONS DU RM

- Arsac *et al.* (1992) « le but du raisonnement est de découvrir par l'examen de ce que l'on sait déjà quelque autre chose que l'on ne sait pas encore [...] il présente par ailleurs une ambiguïté (qui est aussi une commodité) : il désigne à la fois l'activité intellectuelle qui aboutit au but visé et le résultat écrit ou oral de cette activité » (p. 9-10, repris dans Arsac, 1996).
- Artzt (1999) « Mathematical reasoning is part of mathematical thinking that involves forming generalization and drawing valid conclusions about ideas and how they are related » (O'Daffer and Thornquist (1993), tirée de Artzt, p.117)
- Balacheff (1988) « Nous réserverons ici le mot raisonnement pour désigner l'activité intellectuelle, en général non complètement explicite, de manipulation d'informations, données ou acquises, pour produire de nouvelles informations » (p.31)
- Ball et Bass (2003) « A process of reasoning typically consists of a sequence of steps, each of which has the form of justifying one claim by invocation of another, to which the first claim is logically reduced » (p.32)
- Bergqvist (2005) « I will focus on the aspect of mathematical reasoning that can be described using Balacheff's four levels. The students' level of reasoning will be related to the hierarchy of proof levels, in such a way that work at Level 1 and Level 2 will be called lower level reasoning and work at Level 3 and Level 4 will be called higher level reasoning » (2005, p.176).
- Bjuland, Cestari et Borgersen (2008) « Reasoning strategies are defined as a branch of strategies well-known in problem-solving research, which are cognitive operations that are typically helpful in solving mathematical problems » (p.272)

- Brodie (2010) « When we “reason”, we develop lines of thinking or argument, which might serve a number of purposes – to convince others or ourselves of a particular claim; to solve a problem; or to integrate a number of ideas into a more coherent whole » (p.7)
- Brousseau et Gibel (2005) « We define, therefore, a reasoning as a relation R between two elements A and B such that, — A denotes a condition or an observed fact, which could be contingent upon particular circumstances; — B is a consequence, a decision or a predicted fact; — R is a relation, a rule, or, generally, something considered as known and accepted. The relation R leads the acting subject (the reasoning "agent"), in the case of condition A being satisfied or fact A taking place, to make the decision B, to predict B or to state that B is true » (p. 17).
- Cabassut (2005) « un raisonnement, c'est d'abord une certaine activité de l'esprit, une opération discursive pour laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières : en ce sens, c'est un processus qui se déroule dans la conscience d'un sujet selon l'ordre du temps [...] Pour se préciser et se communiquer, le raisonnement devra bientôt s'extérioriser dans le langage parlé, et quand enfin il se stabilisera par l'écriture, il sera devenu une sorte de chose impersonnelle et intemporelle, objet pour une analyse structurale... Raisonner, c'est inférer une proposition, appelée conclusion, à partir de certaines autres prises comme prémisses [...] L'office de la logique est de déterminer les conditions de validité d'une inférence » (Blanché, 1995, dans Cabassut, 2005 p. 24).
- Duval (1995) « forme d'expansion discursive qui est orientée vers un énoncé-cible dans le but :
de modifier la valeur épistémique, sémantique ou théorique, que cet énoncé-cible a dans un état de connaissances donné, ou dans un milieu social donné,
et, par voie de conséquence, d'en modifier la valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation discursive sont remplies » (p. 233, repris dans Richard, 2004).
- Francisco et Maher (2005) « Mathematics is often construed as a system of complex relationships involving mathematical concepts. Mathematical reasoning is also associated with the ability to discern and articulate such relationships » (p.364).
- Jones (2000) « In the analysis the term 'mathematical reasoning' is used to denote

- logical inference and deduction of a form appropriate to lower secondary (junior high) school students (and should not be taken to mean the use of abstract symbolic notation, truth tables or formal axiomatic proofs, for example) » (p.69).
- Lithner (2000) « the line of thought adopted to produce assertions and reach conclusions » (p. 166; repris dans Bergqvist, Lithner et Sumpter, 2008, Boesen, Lithner et Palm, 2008)
- Mason (1995) « processus dynamique qui permet de manipuler des idées de plus en plus complexes et, par là, d'étendre la compréhension » (p. 133)
- Meyer (2010) « According to Peirce, abduction, deduction and induction are the only elementary inferences: "Reasoning is of three elementary kinds; but mixed reasonings are more common. These three kinds are induction, deduction, and presumption (for which the present writer proposes the name abduction) (Peirce, CP : 2774)." » (p.192)
- Perressini et Webb (1995) « mathematical reasoning can also be viewed as a dynamic activity that includes a variety of modes of thinking. We see mathematical reasoning situated in this notion of mathematical power, as well as an integral component of mathematical thinking. In particular, "mathematical thinking involves using mathematically rich thinking skills to understand ideas, discover relationships among the ideas, draw or support conclusions about the ideas and their relationships, and solve problems involving the ideas" (O'Daffer and Thornquist, 1993, p.43). Accordingly, mathematical reasoning - which plays an imperative role in this thinking process - involves gathering evidence, making conjectures, establishing generalizations, building arguments, and drawing (and validating) logical conclusions about these various ideas and their relationships. To this end, the variety of modes of mathematical reasoning include, but are not limited to, inductive (including the identification and extension of patterns), deductive, conditional, proportional, graphical, spatial and abstract reasoning » (p.157)
- Sfard (2008) « activity of exploring relations between sentences »; « reasoning can be described as the art of systematic derivation of utterances from other utterances » (p. 110)
- Stylianides (2005) « I define reasoning and proving to encompass the breadth of the activity associated with identifying patterns, making conjectures, providing proofs, and providing non-proof arguments » (p. 19)

Thompson (1996) « purposeful inference, deduction, induction, and association in the areas of quantity and structure » (p.267, repris dans Mueller, 2007)

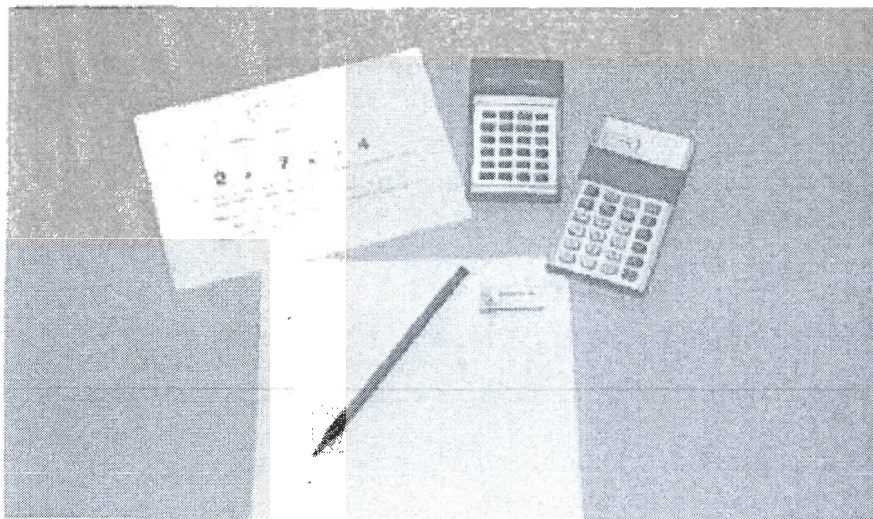
ANNEXE C

UNE SOLUTION D'ÉLÈVE

La situation Charrière

EXEMPLE 35

DIVISIBILITE



2	.	7	.	:	4
milliers	centaines	dizaines	unités		

- A. Trouve (et écris) toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste.
- B. Remplace le 7 des dizaines par un autre chiffre (1, 2, 3, ...).
- Combien y aura-t-il, dans chaque cas, de nombres divisibles par 4?
- Essaie d'énoncer des lois.

Note : pour B, utilise une calculatrice de poche ou bien travaille avec deux autres camarades et répartissez vous la tâche.

Activité tirée de Del Norato, C. (2011) Une situation ouverte en mathématiques : rapports dialectiques entre Théorie - Expérimentation - Contingence. *Recherches en éducation*, no. 10, p. 56-68.

$$\begin{array}{r}
 2378 \quad \overline{14} \\
 - 20 \downarrow \\
 \hline
 37 \\
 - 36 \downarrow \\
 \hline
 18
 \end{array}$$

pour que ça marche il
faut un 2. 2372-2376-
2472-2476-2572-2576-

$$\begin{array}{r}
 2472 \quad \overline{14} \\
 - 24 \downarrow \\
 \hline
 7 \\
 - 4 \downarrow \\
 \hline
 32
 \end{array}$$

Je pense que puisque
j'ai essayé avec plusieurs
centaines que c'est l'unité
qui importe, pas les centaines.

$$\begin{array}{r}
 2572 \quad \overline{14} \\
 - 24 \downarrow \\
 \hline
 17 \\
 - 16 \downarrow \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

Prend une suite 1 trice

2672 2676 2772

2776 2872 2876

2972 2976 2272

2276 2172 2176

2072 2076

Je les ai tous car si on
additionne 4 a 6 ou que l'on
soustrais 4 a 2 ça donne
- out de dizaine.

$$\textcircled{B} \begin{array}{r} 2668 \quad | \begin{array}{l} 4 \\ 667 \end{array} \\ \underline{24} \downarrow \\ \underline{26} \\ \underline{24} \downarrow \\ 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2680 \quad | \begin{array}{l} 4 \\ 670 \end{array} \\ \underline{24} \downarrow \\ \underline{28} \\ \underline{280} \\ 00 \end{array}$$

$$2664 \div 4 = 666$$

Règle : Quand c'est un nombre pair unité peut être 0 ou 8, quand c'est un nombre impaire c'est un 2 ou un 6.

Pourquoi ?

Pourquoi ça ne finit pas par un 3 par exemple ? Parce que dans la table de 4 il n'y a pas de nombre qui finit par 3 à l'unité

Dans la table de 4 ça fait toujours au unité 0, 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6 etc.

Si on a 2 dizaines les 2 qui
 reste vont ensemble et donne 4. Si on
 fait $20+20+20+20$ ça va toujours se
 diviser par 4. Alors si exemple on fait $20+4$
 ça va donner $24+4=28$. Si c'est un
 nombre impair à la dizaine il va
 rester 2 que l'on devra transférer
 au unité, cela va donner exemple 32
 $+4=36$.

RÉFÉRENCES

- Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: a structural approach. *Synthese*, 134(1), 25–44.
- Arsac, G. (1996). Un cadre d'étude du raisonnement mathématique. *Séminaire Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques*. Grenoble, France: IMAG.
- Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. et Mante, M. (1992). Initiation au raisonnement déductif au collège: une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique. Lyon: Presses universitaires de Lyon.
- Artzt, A. F. (1999). Mathematical reasoning during small-group problem solving. Dans L. V. Stiff et F. R. Curcio (dir.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 Yearbook* (p. 115–127). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147–176.
- Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves du Collège. (Thèse non publiée). Université de Grenoble 1.
- Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM*, 40(3), 501–512.
- Balacheff, N. et Gaudin, N. (2010). Modeling students' conceptions: The case of function. *Research in Collegiate Mathematics Education VII*, 16, 207–234.

- Ball, D. L. et Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. Dans J. Kilpatrick, W. G. Martin et D. Schifter (dir.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (p. 27–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Baruk, S. (1995). Dictionnaire de mathématiques élémentaires pédagogie, langue, méthode, exemples, étymologie, histoire, curiosités. Paris: Éditions du Seuil.
- Bergqvist, T. (2005). How students verify conjectures: teachers' expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(2), 171–191.
- Bergqvist, T., Lithner, J. et Sumpter, L. (2008). Upper secondary students' task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(1), 1–12.
- Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. et Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. Dans J. Novotna (dir.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education*. Prague, République Tchèque.
- Bjuland, R., Cestari, M. L. et Borgersen, H. E. (2008). The interplay between gesture and discourse as mediating devices in collaborative mathematical reasoning: A multimodal approach. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(3), 271–292.
- Boero, P. (2011). Argumentation and proof: Discussing a “successful” classroom discussion. Dans M. Pytlak, T. Rowland et E. Swoboda (dir.), *Actes de la 7e Conférence of European Research in Mathematics Education* (vol. 7). Pologne.
- Boero, P., Douek, N., Morselli, F. et Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. Dans M. F. F. Pinto et T. F. Kawasaki (dir.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 1–30). Belo Horizonte, Brésil.

- Boesen, J., Lithner, J. et Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 89–105.
- Brodie, K. (2010). Teaching mathematical reasoning in secondary schools. New York: Springer.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques* [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. et Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(2-3), 13–58.
- Cabassut, R. (2005). *Savoir scientifique: épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines*. (Thèse de doctorat non publiée). Université Paris Diderot.
- Calder, N., Brown, T., Hanley, U. et Darby, S. (2006). Forming conjectures within a spreadsheet environment. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 100–116.
- Cañadas, C. S. et Martínez, E. C. (2005). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. Dans M. Bosch et T. Dreyfus (dir.), *Proceedings of the 4th Conference of European Research in Mathematics Education* (p. 401–408). Sant Feliu de Guixols, Espagne.
- Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. A. et Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5(1), 55–72.
- Charland, P. (2008). Proposition d'un modèle éducationnel relatif à l'enseignement interdisciplinaire des sciences et de la technologie intégrant une préoccupation d'éducation relative à l'environnement. (Thèse de doctorat non publiée). Université du Québec à Montréal.

- Chavez, M. (2005). L'éthique de l'environnement comme dimension transversale de l'éducation en sciences et en technologies: proposition d'un modèle éducationnel. (Thèse de doctorat non publiée). Université du Québec à Montréal.
- Christou, C. et Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction*, 17(1), 55–66.
- Côté, R., Gagnon, M., Perreault, N. et Rogiers, X. (2002). *Leximath: Lexique mathématique de base*. Laval, QC: Beauchemin.
- Cyr, S. (2001). Vers un enseignement signifiant de la preuve au secondaire. *Bulletin AMQ*, 41(4), 19–27.
- Cyr, S. (2006). Les conceptions de la preuve chez les futurs maîtres de mathématiques au secondaire. (Thèse de doctorat non-publiée). Université Laval, Québec.
- Davis, P. J. et Hersh, R. (1985). *L'univers mathématique*. Paris: Gauthier-Villars.
- De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17–24.
- De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with sketchpad. Dans M. de Villiers (dir.), *Rethinking proof with sketchpad* (p. 3–10). Emeryville, USA: Key Curriculum Press.
- Del Notaro, C. (2011). Une situation ouverte en mathématiques: Rapports dialectiques entre théorie-expérimentation-contingence. *Recherches en éducation*, (20), 56–68.
- delMas, R. C. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. Dans D. Ben-Zvi et J. Garfield (dir.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (p. 79–96). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Department of Education. (2000). *Atlantic Canada Mathematics Curriculum, grade 9*. Halifax: Department of Education, Province of Nova Scotia.

Dictionary and Thesaurus - Merriam-Webster Online. (s.d.). Récupéré de <http://www.merriam-webster.com/>

Dionne, J. J. (1982). Aperçu historique de la philosophie des mathématiques. *Bulletin AMQ*, 22(2), 17–25.

Douek, N. et Scali, E. (2000). About argumentation and conceptualisation. Dans T. Nakahara et M. Koyama (dir.), *Proceeding of the 24th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 249–256). Hiroshima.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Dans D. Tall (dir.), *Advanced mathematical thinking* (p. 25–41). Dordrecht: The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. et Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. Dans R. J. Sternberg et T. Ben Zeev (dir.), *The nature of mathematical thinking* (p. 253–284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duquesne, F. (2003). *Apprendre à raisonner en mathématiques à l'école et au collège* (2e ed.). Suresnes, France: Éditions du Centre national d'études et de formation pour l'enfance inadaptée.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 233–261.

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer: Continuité ou rupture cognitive? *petit x*, (31), 37–61.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Exploration,. Berne, Suisse: P. Lang.

- Duval, R. et Egret, M. A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères-Irem*, 12, 114–140.
- Ellis, A. B. (2007a). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, 16(2), 221–262.
- Ellis, A. B. (2007b). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 194–229.
- Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4), 308–345.
- English, L. D. (1997). Analogies, metaphors, and images: Vehicles for mathematical reasoning. Dans L. D. English (dir.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (p. 4–18). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- English, L. D. (1998). Reasoning by Analogy in Solving Comparison Problems. *Mathematical cognition*, 4(2), 125–146.
- English, L. D. (2004). *Mathematical and analogical reasoning of young learners*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ernest, P. (1993). *The philosophy of mathematics education* (2e ed.). London, UK: The Falmer Press.
- Folcher, V. (1999). *Des formes de l'activité aux formes des instruments : un exemple dans le champ du travail collectif assisté par ordinateur*. (Thèse non-publiée). Université Paris 8.
- Fondation Jean Piaget. (2014). Récupéré de <http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/accueil/index.php>

- Francisco, J. M. et Maher, C. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(3), 361–372.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Garden, R. A., Lie, S., Robitaille, D. F., Angell, C., Martin, M. O., Mullis, I. V., ... Arora, A. (2006). *TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks*. Boston, MA: International Study Center.
- Gauthier, B. (1997). *Recherche sociale: de la problématique à la collecte de données* (3e ed.). Québec: Presses de l'Université du Québec.
- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(4), 258–291.
- Grand dictionnaire terminologique. (2012). Gouvernement du Québec. Récupéré de <http://www.granddictionnaire.com/>
- Gray, E. et Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 23–40.
- Guay, M.-H. (2004). Proposition de fondements conceptuels pour la structuration du champ de connaissances et d'activités en éducation en tant que discipline. (Thèse de doctorat non publiée). Université du Québec à Montréal.
- Guay, S., Ducharme, M., Van Moorhem, A., Amideneau, S., Dionne, F., Frève, A., ... Pichette, J. (2007). *Point de vue mathématique, 2e cycle, 1e année, vol 1*. Montréal, QC: Hwr.
- Hanna, G. (2001). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 5–23.

- Hanna, G. et Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 421–438.
- Hanna, G. et Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. Dans A. Bishop et M. A. Clements (dir.), *International handbook of mathematics education* (p. 877–908). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Harel, G. et Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *Research in Collegiate Mathematics Education III*, 7, 234–283.
- Harel, G. et Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. Dans F. K. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, p. 805–842). Charlotte: Information Age Pub.
- Healy, L. et Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics [Rapport de recherche]* (p. 1–6). Londre: Mathematical Sciences, Institute of Education, University of London.
- Hersh, R. (1999). *What is mathematics, really?*. New York: Oxford University Press.
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. et Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195–222.
- Hitt, F. et Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a task-technique-theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14(2), 121–152.
- Hoffmann, M. (1999). Problems with Peirce's concept of abduction. *Foundations of Science*, 4(3), 271–305.
- Hunter, R. (2007). Facilitating Communities of Mathematical Inquiry. Dans M. Goos, R. Brown et K. Makar (dir.), *Navigating currents and charting directions* (p. 31–39). Brisbane: Merga.

- Inquiry Page. (2010). Inquiry page. Récupéré de http://www.cii.illinois.edu/InquiryPage/us/inquiry_page.html
- Jeannotte, D. (2010). L'apport pour la formation et la pratique enseignante : analyse et synthèse de différents modèles de raisonnement mathématique dans la littérature scientifique. Dans V. Freiman (dir.), *Colloque du Groupe de didactique des mathématiques*. Moncton, N.-B.
- Jeannotte, D. (2011). Processus d'élaboration d'un modèle de raisonnement mathématique. Communication par affiche au Colloque du doctorat Réseau, Trois-Rivière.
- Jeannotte, D. (2012). Le raisonnement mathématique, portrait de la littérature scientifique et synopsis d'un modèle. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Acte du Colloque International Espace Mathématique Francophone* (p. 2011). Genève.
- Jeannotte, D. (2013a). Abstracting and generalizing : Processes of mathematical thinking. Dans M. V. Martinez et A. C. Superfine (dir.), *Proceedings of the 35th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 322). Chicago, IL.
- Jeannotte, D. (2013b). Conjecturer et prouver en tant que processus de raisonnement mathématique. Dans L. Bacon (dir.), *Communication au Pré-colloque du Groupe des didactiens du Québec*. Val d'or, QC.
- Jeannotte, D. (2013c). L'aspect processuel du raisonnement mathématique. Dans L. Bacon (dir.), *Communication au Colloque du Groupe des didacticiens du Québec*. Val d'or, QC.
- Jeannotte, D. (2014a). L'entreprise d'une recherche théorique et l'incessant appel des fondements. Dans R. I. Barrera Curin (dir.), *Communication donnée à la journée d'étude La construction de fondements épistémologiques par les chercheurs en didactique des mathématiques*. UQAM.

- Jeannotte, D. (2014b). Processes of mathematicaion reasoning : Framing from math educator discourses. Dans P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle et D. Allan (dir.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. 6, p. 117). Vancouver, BC.
- Jeannotte, D., Kieran, C. et Cyr, S. (2010). Réflexion sur le raisonnement mathématique pour l'enseignant secondaire. Dans A. Kuzniak et M. Sokhna (dir.), *Actes du Colloque International Espace Mathématique Francophone* (p. 1–11). Dakar.
- Jeannotte, D., Kieran, C. et Cyr, S. (2012). Composantes d'un modèle du raisonnement mathématique : un aperçu. Dans F. Hitt et C. Cortés (dir.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (p. 72–77). Montréal.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 55–85.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. Dans E. Fenema et T. A. Romberg (dir.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (p. 133–155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Karsenti, T. et Savoie-Zajc, L. (2004). *La recherche en éducation: étapes et approches*. Sherbrooke, QC: Éditions du CRP.
- Kennedy, N. S. (2009). Towards a dialogical pedagogy : Some characteristics of a inquiry. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 5(1), 71–78.
- Kieran, C. (1998). Models in mathematics education research: a broader view of research results. Dans A. Sierpiska et J. Kilpatrick (dir.), *Mathematics education as a research domain: a search for identity* (p. 213–225). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Kieran, C. et Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: a study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(2), 205–263.
- Knipping, C. (2003). Argumentation structures in classroom proving situations. Dans *Actes de la 3e conference of the European society in Mathematics Education*. Bellaria, Italy: ERME.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM*, 40(3), 427–441.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. Dans P. Cobb et H. Bauersfeld (dir.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (p. 229–269). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- L'Écuyer, R. (1990). Méthodologie de l'analyse développementale de contenu méthode GPS et concept de soi. Sillery, QC: Presses de l'Université du Québec.
- Lakatos, I. (1977). *Proofs and refutations*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutation*. Paris: Hermann.
- Lannin, J. K. (2009). Generalization and justification : The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, (June 2013), 37–41.
- Lee, K.-H. et Sriraman, B. (2011). Conjecturing via reconceived classical analogy. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 123–140.
- Lee, L. F. (1997). *La compréhension algébrique: La recherche d'un modèle dans la communauté d'éducation mathématique*. (Thèse de doctorat non publiée). Université du Québec à Montréal.

- Legendre, R. (1993). *Dictionnaire actuel de l'éducation* (2e ed.). Montréal, QC: Guérin.
- Legendre, R. (2005). *Dictionnaire actuel de l'éducation* (3e ed.). Montréal, QC: Guérin.
- Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 165–190.
- Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52(1), 29–55.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255–276.
- Maher, C. (2009). Children's reasoning: discovering the idea of mathematical proof. Dans D. A. Stylianou, M. L. Blanton et E. J. Knuth (dir.), *Teaching and learning proof across the grades* (p. 120–132). New York: Routledge.
- Maher, C. et Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: a 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194–214.
- Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 25–53.
- Mariotti, M. A. (2005). *Proof and proving in algebra*. Récupéré de <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/06Hiver/Mariotti-GARME.pdf>
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. Dans A. Gutiérrez et P. Boero (dir.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (p. 173–204). Rotterdam: Sense Publishers.

- Mariotti, M. A., Knipping, C., Küchemann, D. et Nordstrom, K. (2005). Argumentation and proof. Dans M. Bosch (dir.), *Proceeding of the 4th Conference of European Research in Mathematics Education* (vol. 4, p. 383–478). Sant Feliu de Guixols, Espagne.
- Martin, G., Carter, J., Forster, S., Howe, R., Kader, G., Kepner, H., ... Valdez, P. (2010). *Focus in high school mathematics: reasoning and sense making*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Martineau, S., Simard, D. et Gauthier, C. (2001). Recherches théoriques et spéculatives: considérations méthodologiques et épistémologiques. *Recherches qualitatives*, 22, 3–32.
- Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 2–8.
- Mason, J. (1994). *L'esprit mathématique*. Mont-Royal, QC: Modulo.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. F. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 85–86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Mason, J. (2001). Questions about mathematical reasoning and proof in schools. Opening address to QCA Conference, UK. Récupéré de http://xtec.cat/centres/a8005072/articles/proof_and_reasoning.pdf
- Mason, J. et Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15(3), 277–289.
- Mason, J. et Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: the importance of knowing-to-act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1), 135–161.
- MELS. (2003). *Programme de formation de l'école québécoise: enseignement secondaire, premier cycle*. Québec: Ministère de l'Éducation.

- MELS. (2007). *Programme de formation de l'école québécoise enseignement secondaire, deuxième cycle*. Québec: Ministère de l'Éducation.
- MEO. (2005). *Curriculum de l'Ontario 9e et 10e année, mathématiques*. Récupéré de <http://www.edu.gov.on.ca/fre/curriculum/secondary/math910curr.pdf>
- MEQ. (1995). *Programmes d'études: mathématique 314, enseignement secondaire*. Québec: Gouvernement du Québec.
- MEQ. (2000). *Programme de formation de l'école québécoise éducation préscolaire, enseignement primaire*. Québec: Ministère de l'éducation.
- Meyer, M. (2010). Abduction - A logical view for investigating and initiating processes of discovering mathematical coherences. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 185–205.
- Microsoft Corporation. (2007). *Microsoft Access* [logiciel]. USA: Microsoft Corporation.
- Mucchielli, A. (1996). *Dictionnaire des méthodes qualitatives en sciences humaines et sociales*. Paris: A. Colin.
- Mueller, M. F. (2007). *A study of the development of reasoning in sixth grade students*. (Thèse de doctorat non-publiée). Rutgers University, New Brunswick, NJ.
- Mueller, M. F. (2009). The co-construction of arguments by middle-school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 138–149.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., Sullivan, C. Y. et Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011 Assessment Frameworks*. Boston, MA: Library of Congress.
- NCTM. (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Noss, R. et Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- OCDE. (2006). *Compétences en sciences, lecture et mathématiques: Le cadre d'évaluation de PISA 2006*. Paris: OCDE.
- Ohlsson, S. et Lehtinen, E. (1997). Abstraction and the acquisition of complex ideas. *International Journal of Educational Research*, 27(1), 37–48.
- Oléron, P. (1977). *Le raisonnement* (1e ed.). Paris: Presses Universitaires de France.
- Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. (Thèse de doctorat non publiée). Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Pedemonte, B. et Reid, D. A. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 281–303.
- Peirce, C. S. (s.d.). *The collected papers of Charles Sanders Peirce*. Electronic edition. Charlottesville, VA: InteLex Past Master. Récupéré de http://library.nlx.com/xtf/view?docId=peirce/peirce.00.xml;chunk.id=div.peirce.pmpreface.1;toc.depth=1;toc.id=div.peirce.pmpreface.1;brand=default&fragment_id=
- Peressini, D. et Webb, N. (1999). Analyzing mathematical reasoning in students' responses across multiple performance assessment tasks. Dans L. V. Stiff et F. R. Curcio (dir.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (p. 156–174). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Piaget, J. (1977). Recherches sur l'abstraction réfléchissante: L'abstraction des relations logico-arithmétiques. *Etudes d'Epistémologie Génétique*, 34(5-147).

- Pólya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible*. Paris: Gauthier-Villars.
- Pólya, G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème* (2e ed.). Paris: Éditions Jacques Gabay.
- Pólya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning* (2e ed., vol. 1-2). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- PONC. (2006). *Cadre commun des programmes d'études de mathématiques M-9*. Edmonton, Alberta: Alberta Education.
- QCA. (2007). *National Curriculum, Mathematics*. Récupéré de http://curriculum.qca.org.uk/uploads/QCA-07-3338-p_Maths_3_tcm8-403.pdf?return=/key-stages-3-and-4/subjects/mathematics/keystage3/index.aspx?return=/key-stages-3-and-4/subjects/index.aspx
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-41.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. Dans S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz et A. Méndez (dir.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 2-21). Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Eléments*, 53-87.
- Reid, D. A. (1995). *The need to prove*. (Thèse de doctorat non publiée). University of Alberta, Edmonton.
- Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), 5-29.

- Reid, D. A. (2003). Forms and uses of abduction. Dans M. A. Mariotti (dir.), *Proceedings of the 3th conference of the European society in Mathematics Education* (p. 1–10). Bellaria, Italy.
- Reid, D. A. (2010). *Proof in mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Reid, D. A. et Knipping, C. (2010). Argumentation structures. Dans *Proof in mathematics education* (p. 179–192). Rotterdam: Sense Publishers.
- Reid, D. A. et Zack, V. (2009). Aspects of teaching proving in upper elementary school. Dans D. A. Stylianou, M. L. Blanton et E. J. Knuth (dir.), *Teaching and learning proof across the grades* (p. 133–146). New York: Routledge.
- Richard, P. R. (2004). L'inférence figurale: Un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics*, 57(2), 229–263.
- Richards, J. (1991). Mathematical discussion. Dans *Radical constructivism in mathematics education* (p. 13–51). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Rivera, F. D. (2008). On the pitfalls of abduction: complicities and complexities in patterning activity. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 17–25.
- Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 297–328. Récupéré de <http://search.proquest.com/docview/742858597?accountid=14719>
- Rivera, F. D. et Becker, J. R. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 140–155.
- Robert, P., Rey, A. et Rey-Debove, J. (2009). *Nouveau Petit Robert de la langue française*. Paris: Dictionnaire Le Robert.

- Rocque, S. (1994). *Conception, élaboration et validation d'un schème conceptuel de l'écologie de l'éducation*. (Thèse de doctorat non publiée). Université du Québec à Montréal.
- Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique coconstruite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. (Thèse de doctorat non publiée). Université du Québec à Montréal, Montréal.
- Salavastu, C. (2007). *Logique, argumentation, interprétation*. Paris: L'Harmattan.
- Sauvé, L. (1992). *Éléments d'une théorie du design pédagogique en éducation relative à l'environnement élaboration d'un supramodèle pédagogique*. (Thèse de doctorat non publiée). Université du Québec à Montréal.
- Schwarz, B., Dreyfus, T. et Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. Dans B. Schwarz, T. Dreyfus et R. Hershkowitz (dir.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (p. 11–41). New York: Routledge.
- Selden, A. et Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4–36.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.
- Sfard, A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. Dans L. D. English (dir.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (p. 339–371). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being-Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. Dans P. Cobb (dir.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (p. 37–98). New York: Routledge.

- Sfard, A. (2002). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1-3), 13-57.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.
- Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse - some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 1-9.
- Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 30(2), 197-210.
- Simon, M. A. et Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(1), 3-31.
- Stylianides, A. J. (2007a). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- Stylianides, A. J. (2007b). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20.
- Stylianides, A. J. et Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(4), 307-332.
- Stylianides, G. J. (2005). *Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: a curricular perspective*. (Thèse de doctorat non publiée). University of Michigan.
- Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16.

- Stylianides, G. J. et Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(2), 103–133.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L. et Knuth, E. J. (2009). *Teaching and learning proof across the grades* (p. 388). New York: Routledge.
- Thompson, P. (1996). Imagery and the development of mathematical reasoning. Dans L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin et B. Greer (dir.), *Theories of mathematical learning* (p. 267–283). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Toerner, G. et Arzarello, F. (2012). Grading mathematics education research journals. *Newsletter of the European Mathematical Society*, (86).
- Toulmin, S. E. (1958). *Les usages de l'argumentation. L'interrogation philosophique*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Toulmin, S. E. (2007). *The uses of argument*. New York: Cambridge University Press.
- Van der Maren, J.-M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation* (2e ed.). Montréal, QC: Les presses de l'Université de Montréal.
- Villemagne, C. (2005). *L'éducation relative à l'environnement en milieu communautaire urbain: un modèle théorique en émergence enrichi de l'exploration collaborative de pratiques éducatives*. (Thèse de doctorat non publiée). Université du Québec à Montréal.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Watson, A. et Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity* (p. 228). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- White, H. (1993). *Étude exploratoire relative à la "pensée mathématique" chez de futurs enseignants et enseignantes*. (Thèse de doctorat non publiée). Université Laval, Québec.
- Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. Dans M. van den Heuvel-Panhuizen (dir.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 9–24). Utrecht, The Netherlands.
- Yackel, E. et Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. Dans J. Kilpatrick, W. G. Martin et D. Schifter (dir.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (p. 227–236). Reston: NCTM.
- Zandieh, M. J. et Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: The concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 1–17.