

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

OPÉRATEURS COMBINATOIRES DIFFÉRENTIELS
GÉNÉRALISÉS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

NICOLAS SNEY-LACASSE

JUIN 2007

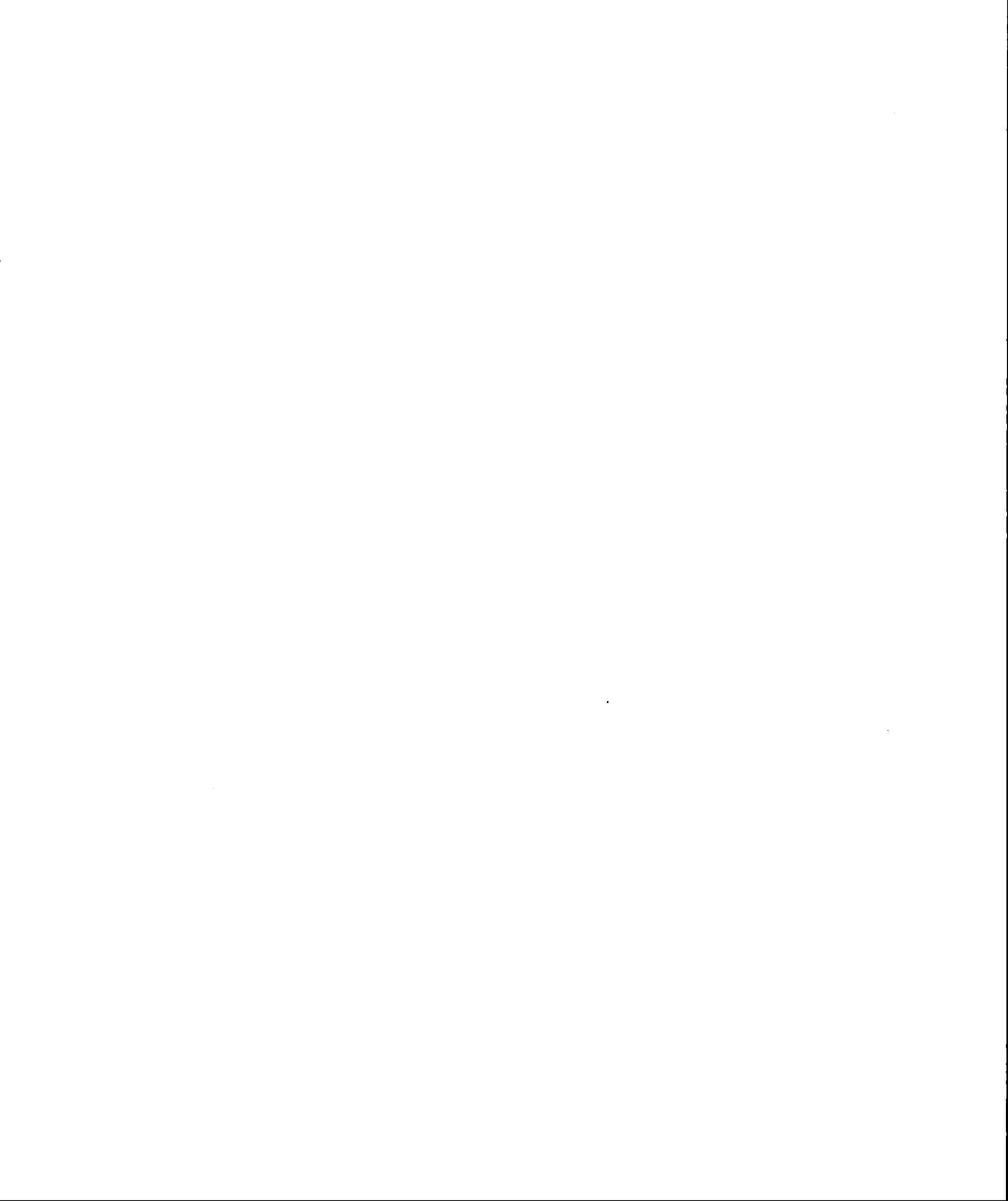
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

*En vérité, le chemin importe peu,
la volonté d'arriver suffit à tout.*

- Albert Camus



REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur, Gilbert Labelle, pour avoir cru en moi, pour sa présence, sa disponibilité et le soutien financier qu'il m'a apporté et qui m'a permis de mener à bien ce projet, et mon co-directeur, Robert Bédard, sans qui ce projet n'aurait pas été possible.

Merci aux membres de mon jury, Cédric Lamathe et Pierre Leroux, pour avoir pris le temps de corriger mon mémoire, et d'y avoir apporté des remarques pertinentes et constructives.

J'aimerais aussi dire un gros merci à ma collègue et amie Geneviève, sans qui je serais encore fort probablement en train de taper mon premier chapitre en Latex et sans qui je serais sûrement mort de faim avant de terminer ma maîtrise : merci Geneviève pour ton amitié, tes judicieux conseils mathématiques... et ton pâté chinois sans pareil ! Sans toi, mon parcours universitaire aurait été beaucoup plus terne.

Merci à Lise Tourigny et André Lauzon du Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique (LaCIM), pour leur soutien et leur bonne humeur : Lise, ton sourire était mon rayon de soleil quotidien. Merci aussi à Gisèle Legault pour sa patience, sa gentillesse, et pour l'aide qu'elle m'a apportée dans le dernier droit avant mon dépôt final, et Manon Gauthier, pour qui il n'y a point de problèmes administratifs sans solutions : merci Manon pour ton efficacité et ta disponibilité.

Bien entendu, j'aimerais remercier du fond du coeur famille et amis, sans qui ma vie n'aurait tout simplement aucun sens. Merci de votre patience, de votre compréhension et du support que vous m'avez apporté tout au long de cette aventure : merci à mon père, Gilles, de m'avoir dit un jour de sauter dans le train au lieu de le regarder passer... ; merci Valou pour m'avoir supporté alors que je ne me supportais pas moi-même,

de ne pas t'être découragée et de m'avoir fait confiance ; merci à ma mère, Aline, que j'ai quelque peu négligée au cours de ces années passées à l'université mais qui a toujours été là quand j'en avais besoin ; merci à ma soeur, Karina, et sa petite famille, qui m'ont toujours encouragé à persévérer malgré les embûches ; à mon frère, David, mon danseur de ballet préféré ! ; merci à mon meilleur ami, Mart, avec qui je me permets de lâcher mon fou comme pas un ; à mon sensei, Josée Patenaude, qui, sans le savoir, m'a insufflé une force et une confiance qui ont eu énormément d'impact dans ma vie et par le fait même, dans mes études ; merci Mag, Ti-minou, Sylvain, Gab, Aaron, aux membres du LaCIM et tous ceux que j'oublie au moment d'écrire ces lignes et qui ont fait en sorte de rendre cette aventure si merveilleuse !

Finalement, j'aimerais remercier quelqu'un de très spécial à mes yeux qui, même s'il n'est plus, reste très présent dans mon coeur : merci Ben d'avoir un jour croisé ma vie et de m'avoir tant apporté. Je sais que tu serais fier de moi. Ben, la boucle est bouclée, j'ai maintenant terminé ce que j'avais commencé.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xiii
RÉSUMÉ	xv
INTRODUCTION	1
 CHAPITRE I	
ESPÈCES DE STRUCTURES	5
1.1 Notion d'espèce de structures et d'égalité combinatoire	5
1.1.1 Espèce de structures	5
1.1.2 Égalité combinatoire	9
1.2 Principales séries associées aux espèces	10
1.2.1 Série génératrice exponentielle : $F(x)$	11
1.2.2 Série génératrice des types d'isomorphie : $\tilde{F}(x)$	12
1.2.3 Série indicatrice de cycles : Z_F	13
1.2.4 Contact d'ordre n	16
1.3 Opérations sur les espèces	18
1.3.1 Somme d'espèces de structures	18
1.3.2 Produit d'espèces de structures	20
1.3.3 Substitution d'espèces de structures	22
1.3.4 Pointage dans une espèce de structures	25
1.4 Espèces multisortes	27
1.4.1 Notion d'espèce multisorte	28
1.4.2 Séries associées aux espèces multisortes	31
1.4.3 Passage aux types selon une sorte	33
1.5 Espèces moléculaires	36
 CHAPITRE II	
OPÉRATEURS COMBINATOIRES DIFFÉRENTIELS	45
2.1 Produit cartésien et formes combinatoires bilinéaires	45
2.1.1 Produit cartésien d'espèces de structures	45

2.1.2	Formes combinatoires bilinéaires	50
2.2	Opérateur combinatoire différentiel $\frac{d}{dX}$ et propriétés	51
2.3	Opérateurs combinatoires différentiels purs $G(\frac{d}{dX})$ et propriétés	61
CHAPITRE III		
	OPÉRATEURS COMBINATOIRES DIFFÉRENTIELS GÉNÉRAUX	77
3.1	Opérateurs combinatoires différentiels généraux $\Omega(X, D)$ et propriétés	77
3.2	Exemples, applications et tables diverses.	92
3.2.1	Opérateurs auto-adjoints et Λ -pointage	92
3.2.2	Opérateurs de petits degrés	94
3.2.3	Opérateurs de différences finies	96
3.2.4	Opérateurs séparables	97
	CONCLUSION	99
APPENDICE A		
	DÉFINITIONS ET NOTATIONS DES ESPÈCES DE STRUCTURES RENCONTRÉES DANS CE MÉMOIRE	101
APPENDICE B		
	QUELQUES SÉRIES GÉNÉRATRICES ET INDICATRICES	103
APPENDICE C		
	ESPÈCES MOLÉCULAIRES ET LEURS DÉRIVÉES, ($N \leq 4$)	106
APPENDICE D		
	TABLES GÉNÉRATRICES ET LISTE EXHAUSTIVE DES OPÉRATEURS MOLÉCULAIRES $\frac{X^N D^K}{H}$, POUR $N + K \leq 4$	107
APPENDICE E		
	TABLE DE SIMPLIFICATION POUR LA \odot -SUBSTITUTION	112
APPENDICE F		
	MÉTHODE DE CALCUL SIMPLIFIÉ POUR LA \odot -SUBSTITUTION POUR LES ESPÈCES MOLÉCULAIRES $\frac{X^N D^K}{H}$, $N + K \leq 4$	113
	RÉFÉRENCES	119

LISTE DES FIGURES

1.1 Un graphe orienté sur $\{a, b, c, d, e, f\}$	6
1.2 Un graphe simple sur $U = \{a, b, c, d, e, f\}$	6
1.3 Transport d'un graphe simple le long d'une bijection.	7
1.4 Une permutation sur 9 éléments.	8
1.5 Représentation générale d'une F -structure.	9
1.6 Représentation générale d'une $(F + G)$ -structure.	19
1.7 Une partition partielle sur 11 éléments	20
1.8 Représentation générale d'une $(F \cdot G)$ -structure.	21
1.9 a) Une haie sur U . b) Une liste d'arborescences disjointes sur U	23
1.10 Représentation générale d'une $(F \circ G)$ -structure.	24
1.11 Représentation générale d'une F^* -structure.	26
1.12 Une F -structure à 4 sortes.	29
1.13 Une bijection entre deux arbres bicolores.	30
1.14 Une $\mathcal{C}_{alt}(\mathcal{G}(X + T), \mathcal{A}(X))$ -structure.	32
1.15 Deux structures ayant même type d'isomorphie selon le type Y	34
1.16 Classe d'équivalence de \sim_Y correspondant à θ	34
1.17 Une $\Gamma[U, V]$ -structure sur $U = [5]$ et $V = \{a, b, c, d\}$ (a)) et la $T_Y\Gamma$ - structure lui correspondant (b)).	35

1.18	Deux 6-cycles isomorphes.	36
1.19	Quatre \mathcal{A}_4 -structures non isomorphes.	37
1.20	Correspondance entre les structures de \mathcal{G} et les espèces moléculaires pour $n \leq 4$	39
1.21	Transport de structures de l'espèce $\frac{X^n}{H}$	40
1.22	Isomorphisme naturel entre les espèces H_4 et $\frac{X^4}{H} = \mathcal{C}_4$	40
2.1	Représentation générale d'une $(F \times G)$ -structure.	46
2.2	Une $(\mathcal{P}^{[m]} \times \mathcal{P}^{[n]})$ -structure.	47
2.3	Différence entre une $F \times G$ -structure (a)) et une $\langle F, G \rangle$ -structure (b)).	50
2.4	Trois formes bilinéaires combinatoires $\langle\langle$ partielles $\rangle\rangle$	52
2.5	Représentation générale d'une F' -structure.	53
2.6	$\frac{d}{dX} \mathcal{A} = \mathcal{F}$	53
2.7	$\mathcal{C}'' = L^2$	54
2.8	Preuve de la Proposition 2.2.1 d).	54
2.9	$E(H) \cdot (F' + H' \cdot F) = D(E(H) \cdot F)$	55
2.10	$F^* = X \cdot F'$	55
2.11	Représentation d'une $\frac{\partial}{\partial X_i} F(G_1, G_2, \dots, G_m)$ -structure.	57
2.12	$\frac{\partial}{\partial X_1} F(G_1, G_2, \dots, G_m) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial Y_j}(G_1, G_2, \dots, G_m) \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} G_j$	58
2.13	Une $(E(X) \cdot T) \times F(X + T)$ -structure.	59
2.14	Une $(E(X) \cdot T) \times F(X + T) _{T:=1}$ -structure.	60
2.15	$\frac{d}{dX} F(X) \simeq (E(X) \cdot T) \times F(X + T) _{T:=1}$	60
2.16	$\langle DF, G \rangle = DF \times G _{X:=1}$	61

2.17	$\langle F, X \cdot G \rangle = F \times (X \cdot G) _{X:=1}$	61
2.18	Forme générale d'une $F(X, T) \times_T G(X, T)$ -structure.	62
2.19	Équivalence entre les deux définitions de la G -dérivation de F .	64
2.20	Une $\mathcal{C}_5(\frac{d}{dX})F(X)$ -structure sur $\{a, b, c, d\}$.	65
2.21	$E_2(\frac{d}{dX})(F \cdot G) = (E_2(\frac{d}{dX})F)G + F'G' + FE_2(\frac{d}{dX})G$.	67
2.22	$E_2(\frac{d}{dX})(E \circ F) = (E \circ F) \cdot (E_2(\frac{d}{dX})F + E_2(F'))$.	68
2.23	$E_2(\frac{d}{dX})(S) = E_2(\frac{d}{dX})(E \circ \mathcal{C}) = S \cdot (E_2(\frac{d}{dX})\mathcal{C} + E_2(L))$.	68
2.24	$E_2(\frac{d}{dX})(C) = \sum_{n=0}^{\infty} E_2(X^n) + L_+(X) \cdot L(X)$.	69
2.25	$G(\frac{d}{dX})(H(\frac{d}{dX}) \cdot F(X)) = (G \cdot H)(\frac{d}{dX})F(X)$.	69
2.26	$\langle G(\frac{d}{dX})F(X), H(X) \rangle = \langle F(X), G(X)H(X) \rangle$.	70
2.27	Une H -structure sur le multiensemble $([n], [k])$.	71
2.28	Une $\mathcal{C}_2(\frac{d}{dX})\mathcal{A}(X)$ -structure.	75
3.1	Deux représentations d'une $\Omega(X, T)$ -structure.	78
3.2	Une $\Omega(X, D)F(X)$ -structure sur 9 points.	79
3.3	Une $\mathcal{A}(X, T)$ -structure.	79
3.4	Une $\mathcal{A}(X, D)\mathcal{C}_{10}(X)$ -structure.	80
3.5	Une $E(L_{\geq 2}(X)T)$ -structure.	80
3.6	$Pieu(X) = E(L_{\geq 2}(X)D)\mathcal{C}(X)$.	81
3.7	$G(X + XD)F(X) = F(X + XD)G(X)$.	81
3.8	Une $\frac{X^7 D^5}{K}F(X)G(X)$ -structure.	82
3.9	Une $E_2(XT)$ -structure.	83
3.10	Une $E_2(XD)H(X)$ -structure.	83

3.11	Une $E_2(XD)(F \cdot G)$ -structure.	84
3.12	$E(XD)F(X) = F(2X)$	85
3.13	Une $\Omega_3(X, T)$ -structure.	86
3.14	a) $\Omega_2(X, D)[\Omega_1(X, D)F(X)]$ et $[\Omega_2(X, D) \odot \Omega_1(X, D)]F(X)$	87
3.15	$\langle \Omega(X, D)F(X), G(X) \rangle = \langle F(X), \Omega(D, X)G(X) \rangle$	90
3.16	Une $\Lambda(XD)F(X)$ -structure.	92
3.17	Une $(XD)^2F(X)$ -structure.	94
3.18	Une $((XD) \odot (XD))F(X)$ -structure.	94
3.19	Une $\mathcal{C}(\widehat{XD})F(X)$ -structure.	95
3.20	Représentation générale d'un opérateur différentiel de degré 2.	96
3.21	Une $\mathcal{C}_3(X)D^2F(X)$ -structure.	96
3.22	Une $E_2(XD)F(X)$ -structure.	97

LISTE DES TABLEAUX

B.1	Séries génératrices exponentielles : $F(x)$	103
B.2	Séries génératrices exponentielles : $F(x)$	104
B.3	Séries génératrices des types d'isomorphies : $\tilde{F}(x)$	104
B.4	Séries indicatrices de cycles : $Z_F(x_1, x_2, \dots)$	105
C.1	Espèces moléculaires et leurs dérivées, ($n \leq 4$)	106
D.1	Tables génératrices des opérateurs moléculaires $\frac{X^n D^k}{H}$, pour $n + k \leq 4$.	108
D.2	Liste des opérateurs moléculaires $\frac{X^n D^k}{H}$, pour $n + k \leq 4$	111
E.1	Table de simplification pour la \odot -substitution	112
F.1	Formules d'addition pour les espèces moléculaires $B(T)$ de degrés ≤ 4 .	114
F.2	Formules d'addition pour les espèces moléculaires $A(X)$ de degrés ≤ 4 .	115
F.3	Formules d'addition pour $E_2(X \cdot (T + T_0))$ et $E_2((X + T_0) \cdot T)$	115

RÉSUMÉ

Dans un article (Labelle et Lamathe, 2007) qu'ils présenteront sous peu à Tainjin (Chine) dans le cadre de la conférence mathématique *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Tianjin, China 2007*, les auteurs Gilbert Labelle et Cédric Lamathe ont développé une théorie d'opérateurs combinatoires différentiels de la forme $\Omega(X, D)$, où $\Omega(X, T)$ est une espèce de structures arbitraire construite sur deux sortes, X et T , d'éléments sous-jacents. Ces opérateurs agissent sur des espèces, $F(X)$, plutôt que sur des fonctions. L'objectif de ce travail est donc d'explicitier et de concrétiser cette théorie. Pour ce faire, nous détaillons les preuves apparaissant dans le dit article, démontrons des résultats qui y sont uniquement énoncés, donnons plusieurs exemples non triviaux, construisons plusieurs tables (tables des opérateurs moléculaires, de simplification pour la \odot -substitution, etc.) et développons une méthode de calcul simplifié pour la \odot -substitution.

Mots clés : opérateurs combinatoires différentiels, opérateurs moléculaires, espèces de structures.

INTRODUCTION

Depuis son introduction par A. Joyal au début des années 1980 (Joyal, 1981), la théorie des espèces a fait l'objet de nombreux développements et un ouvrage de références en la matière est le livre publié en 1998 par F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux (Bergeron, Labelle et Leroux, 1998). L'importance combinatoire de cette théorie tient entre autre au fait qu'elle permet d'analyser des structures combinatoires étiquetées et non étiquetées.

Dans l'article (Labelle et Lamathe, 2007) qu'ils présenteront sous peu à Tianjin (Chine) dans le cadre de la conférence mathématique *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Tianjin, Chine 2007*, les auteurs G. Labelle et C. Lamathe ont introduit une généralisation de l'opérateur différentiel classique $\frac{d}{dX}$ en développant une théorie d'opérateurs combinatoires différentiels de la forme $\Omega(X, D)$, où $\Omega(X, T)$ est une espèce de structures arbitraire construite sur deux sortes, X et T , d'éléments sous-jacents. Ces opérateurs agissent sur des espèces $F(X)$ plutôt que sur des fonctions. Les auteurs montrent comment composer ces opérateurs, comment calculer leurs adjoints et les opérateurs qui leur correspondent dans le contexte des fonctions symétriques et des séries génératrices. Ils analysent aussi le comportement de ces opérateurs lorsqu'ils sont appliqués au produit d'espèces ainsi qu'à d'autres opérations combinatoires.

L'objectif de ce travail est d'abord de bien comprendre les résultats introduits par G. Labelle et C. Lamathe, puis d'explicitier les preuves succinctes apparaissant dans leur article en donnant les détails nécessaires à la bonne compréhension des résultats donnés et de démontrer ceux qui ne sont qu'énoncés. Par la suite, nous donnerons une série d'exemples et d'applications, concrétisant ainsi la théorie introduite tout au long de cet

ouvrage.

Ce travail est divisé en trois chapitres. Le premier, basé sur l'ouvrage de F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux (Bergeron, Labelle et Leroux, 1998), introduit les notions de base de la théorie des espèces : définition des concepts d'espèce de structures et des principales séries que l'on peut leur associer, d'égalités combinatoires, d'opérations sur les espèces, d'espèces multispécifiques et moléculaires.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons en premier lieu des notions plus spécifiques à notre étude (produit cartésien d'espèces de structures, formes combinatoires bilinéaires et concept de dérivation d'espèces) qui seront, ainsi que leurs généralisations ultérieures, utilisées par la suite pour définir des concepts clés de ce travail. En deuxième lieu, nous présentons une récente catégorie d'opérateurs combinatoires différentiels due à A. Joyal (Joyal, 1981) : les opérateurs combinatoires différentiels purs. Ces opérateurs sont en quelque sorte une prémisses à ceux du chapitre suivant, qui portera sur une généralisation de ces opérateurs combinatoires différentiels purs.

Finalement, le troisième et dernier chapitre est consacré à l'étude de la théorie des opérateurs combinatoires différentiels généraux introduite dans (Labelle et Lamathe, 2007). Nous présentons donc dans un premier temps les notions relatives à $\Omega(X, D)$. Dans un deuxième temps, nous élaborons une série d'exemples et d'applications qui explicitent la théorie des opérateurs combinatoires différentiels généraux.

En annexe, nous présentons les tables génératrices et la liste exhaustive des opérateurs moléculaires $\frac{X^n D^k}{H}$, pour $n + k \leq 4$ (Appendice D), une table de simplification pour la \odot -substitution (Appendice E), une méthode de calcul simplifié (pour certaines espèces moléculaires de degrés totaux ≤ 4 en X et en T) pour la \odot -substitution (Appendice F), ainsi que diverses tables (définitions et notations des espèces de structures rencontrées

dans ce travail (Appendice A), quelques séries génératrices et indicatrices d'espèces (Appendice B) et les espèces moléculaires et leurs dérivées, pour $n \leq 4$ (Appendice C).

CHAPITRE I

ESPÈCES DE STRUCTURES

1.1 Notion d'espèce de structures et d'égalité combinatoire

Dans cette première section, nous débutons par introduire formellement le concept d'espèce de structures (1.1.1) et nous précisons par la suite le sens que prendra le concept d'égalité entre espèces de structures dans le présent ouvrage (1.1.2).

1.1.1 Espèce de structures

Informellement, on peut définir une structure s comme étant la donnée d'un couple $s = (\gamma, U)$, où γ correspond à une « construction » sur les éléments d'un ensemble donné U . On dit alors que U est l'ensemble sous-jacent à la structure s , ou encore que s est une structure étiquetée par l'ensemble U .

Par exemple, pour $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $\gamma = \{(a, b), (a, d), (b, c), (b, f), (c, f), (e, d), (e, f)\}$, alors $s = (\gamma, U)$ décrit un graphe orienté (voir Figure 1.1) où chaque élément de γ correspond à un arc de s .

Notons que s'il ne cause pas d'ambiguïté quant à la nature de l'ensemble U sous-jacent, l'abus de notation $s = \gamma$ consistant à identifier une structure $s = (\gamma, U)$ à la construction γ pourra être utilisé.

Cette définition informelle du concept de structure n'est cependant pas complète. Afin de pouvoir le définir de façon rigoureuse, nous utiliserons une approche fonctorielle. Pour

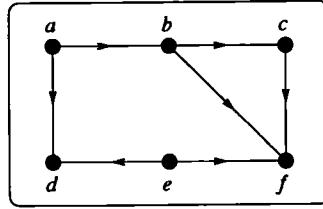


Figure 1.1 Un graphe orienté sur $\{a, b, c, d, e, f\}$.

ce faire, nous allons introduire la notion de transport de structures le long de bijections.

Considérons le graphe simple $s = (\gamma, U)$ dont l'ensemble sous-jacent est $U = \{a, b, c, d, e\}$ (voir figure 1.2).

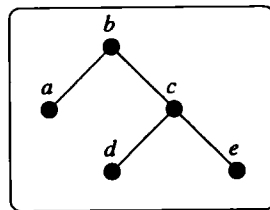


Figure 1.2 Un graphe simple sur $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.

En substituant les éléments de U par ceux d'un autre ensemble $V = \{1, 2, 3, x, y\}$ via la bijection $\beta : U \rightarrow V$ décrite par la Figure 1.3, il apparaît clairement que β permet de transporter le graphe simple s sur un graphe simple correspondant $t = (\tau, V)$.

Il s'agit donc en fait de remplacer chacun des sommets $u \in U$ dans γ par le sommet correspondant $\beta(u) \in V$ dans l'expression de γ . Nous dirons alors que le graphe simple t a été obtenu par le transport du graphe simple s le long de la bijection β , ce que nous noterons par $t = \beta \cdot s$, et que s et t sont isomorphes (nous reviendrons sur le concept d'isomorphisme ultérieurement).

Définition 1.1.1. Une *espèce de structures* est une règle F qui associe :

- i) à chaque ensemble fini U , un ensemble fini $F[U]$;
- ii) à chaque bijection $\sigma : U \rightarrow V$, une fonction $F[\sigma] : F[U] \rightarrow F[V]$, où chaque fonction $F[\sigma]$ doit satisfaire aux propriétés de fonctorialité suivantes :

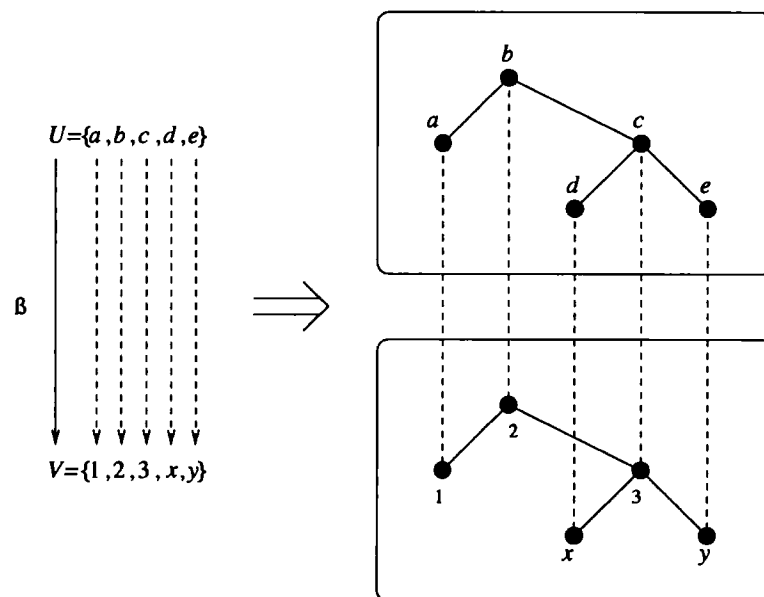


Figure 1.3 Transport d'un graphe simple le long d'une bijection.

a) pour toutes bijections $\sigma : U \rightarrow V$ et $\tau : V \rightarrow W$, on a

$$F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma],$$

b) pour la bijection identité $Id_U : U \rightarrow U$, on a

$$F[Id_U] = Id_{F[U]}.$$

La terminologie utilisée sera la suivante :

- un élément s de $F[U]$ est appelé une F -structure sur U (ou encore une structure d'espèce F sur U);
- la fonction $F[\sigma]$ est appelée le transport des F -structures le long de σ .

Exemple 1.1.1. Définissons l'espèce S des permutations (Figure 1.4) où pour tout ensemble fini U , la notation $S[U]$ désigne l'ensemble de toutes les permutations sur U , c'est-à-dire : $S[U] = \{ \pi : U \rightarrow U, \pi \text{ bijective} \}$.

Il est clair que la condition i) est respectée. Vérifions la seconde : Pour une bijection

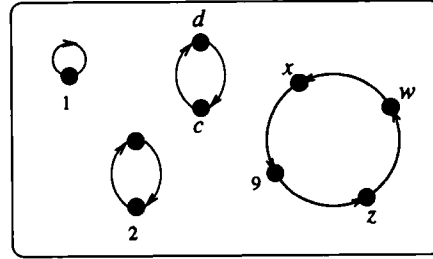


Figure 1.4 Une permutation sur 9 éléments.

$\sigma : U \xrightarrow{\sim} V$, on a $S[\sigma](\pi) = \sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}$ tel que $S[\sigma]$ vérifie les conditions de functorialité vues précédemment, c'est-à-dire :

Soient $\sigma : U \xrightarrow{\sim} V$ et $\tau : V \xrightarrow{\sim} W$ deux bijections et $\pi \in S[U]$, alors

a)

$$\begin{aligned} S[\tau \circ \sigma](\pi) &= (\tau \circ \sigma) \circ \pi \cdot (\tau \circ \sigma)^{-1} \\ &= \tau \circ (\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}) \circ \tau^{-1} \\ &= \tau \circ (S[\sigma](\pi)) \circ \tau^{-1} \\ &= (S[\tau] \circ S[\sigma])(\pi) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} S[Id_U](\pi) &= Id_U \circ \pi \circ Id_U^{-1} \\ &= \pi \\ &= Id_{S[U]}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1. Pour tout ensemble fini U , le nombre de F -structures sur U ne dépend que de la cardinalité de U et non de la nature des éléments de U , c'est-à-dire : $|F[U]|$ ne dépend que de $|U|$. De plus, si le cardinal de l'ensemble sous-jacent sur lequel F est construite est n , nous dirons alors que F est de degré n .

La représentation générale d'une F -structure est donnée par la Figure 1.5 : les cercles noirs représentant les éléments de l'ensemble sous-jacent non structuré et la F -structure

sur ces éléments étant représentée par un arc de cercle. Une liste des espèces de structures rencontrées dans le présent travail est fournie en annexe.

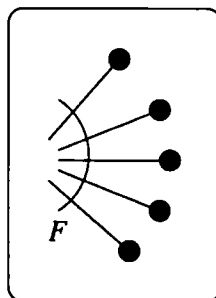


Figure 1.5 Représentation générale d'une F -structure.

1.1.2 Égalité combinatoire

À priori, deux espèces de structures F et G sont dites égales si elles sont identiques, c'est-à-dire si pour tout ensemble fini U , $F[U] = G[U]$ et pour toute bijection $\sigma : U \rightarrow V$, $F[\sigma] = G[\sigma]$. Mais cette interprétation de l'égalité est beaucoup trop restrictive dans le présent contexte. Le bon sens du concept d'égalité entre espèces de structures que nous utiliserons sera celui d'isomorphisme d'espèces.

Définition 1.1.2. Soient F et G deux espèces de structures. On dit que F et G sont *isomorphes*, et on écrit $F \cong G$ si pour chaque ensemble fini U , il existe une bijection $\sigma_U : F[U] \xrightarrow{\sim} G[U]$ tel que σ_U satisfasse la condition de naturalité suivante : pour toute bijection $\sigma : U \rightarrow V$ entre ensembles finis, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 F[U] & \xrightarrow{\alpha_U} & G[U] \\
 F[\sigma] \downarrow & & \downarrow G[\sigma] \\
 F[V] & \xrightarrow{\alpha_V} & G[V]
 \end{array}$$

En d'autres termes, deux espèces de structures F et G sont isomorphes s'il y a le même nombre de F -structures que de G -structures sur un ensemble fini U et que pour toute

F -structures s sur U , la G -structure correspondante $\sigma_U(s)$ sur U peut être décrite sans faire appel à la nature des éléments de U .

Nous ne nous attarderons pas ici à démontrer que deux espèces isomorphes possèdent essentiellement les mêmes propriétés combinatoires (cette vérification étant faite à maintes reprises dans (Bergeron, Labelle et Leroux, 1998), mais nous le prendrons pour acquis. Ainsi, pour la suite des choses, si F et G sont deux espèces isomorphes, elles seront considérées comme étant égales dans l'algèbre combinatoire qui suivra et nous écrirons souvent $F = G$ au lieu de $F \cong G$.

1.2 Principales séries associées aux espèces

Dans cette section, nous présentons dans un premier temps trois séries formelles importantes associées aux espèces de structures, soient les séries :

- génératrice (exponentielle) de l'espèce F , notée $F(x)$ (1.2.1) ;
- génératrice des types d'isomorphismes de F , notée $\tilde{F}(x)$ (1.2.2) ;
- indicatrice de cycles de F , notée $Z_F(x_1, x_2, \dots)$ (1.2.3).

Dans un deuxième temps, nous introduirons une notion d'égalité restreinte à un cardinal donné, appelé le contact d'ordre n (1.2.4).

Brièvement, la donnée des trois séries introduites ici permet la déduction d'une foule d'informations sur une espèce de structures donnée en ce qui a trait au dénombrement des F -structures. Plus précisément, la série exponentielle permet de dénombrer toutes les F -structures possibles sur les ensembles $[n]$, $n \geq 0$. La série génératrice des types d'isomorphie permet quant à elle de dénombrer toutes les F -structures sur $[n]$, $n \geq 0$, à isomorphismes près, c'est-à-dire en ne tenant pas compte de la nature des éléments de l'ensemble sous-jacent des structures. Pour ce qui est de la série indicatrice des cycles (à une infinité de variables x_1, x_2, x_3, \dots), les variables x_i sont vues comme des compteurs de cycles des permutations de l'ensemble sous-jacent aux structures.

Notons que pour la suite de ce travail, nous prendrons la convention de désigner par $[n]$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et par $F[n]$ l'ensemble $F[\{1, 2, \dots, n\}]$.

1.2.1 Série génératrice exponentielle : $F(x)$

Définition 1.2.1. *Pour une espèce de structures F , on définit la série génératrice exponentielle de F (ou simplement la série génératrice de F) par*

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!},$$

où le terme $f_n = |F[n]|$ est le nombre de F -structures possibles sur un ensemble comportant n éléments.

Puisqu'il s'agit ici d'une série formelle de type exponentiel, nous pouvons extraire le coefficient f_n de la façon suivante :

$$f_n = n![x^n]F(x)$$

où $[x^n]F(x)$ désigne le coefficient de x^n dans la série $F(x)$.

Exemples 1.2.1. *Pour les espèces L des ordres linéaires, E des ensembles et \mathcal{P} des parties, on a les séries suivantes :*

- 1) $L(x) = \sum_{n \geq 0} L_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$, car $L_n =$ nombre de listes sur n éléments $= n!$;
- 2) $E(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$, car $E_n = 1$, c'est-à-dire qu'il y a une seule structure d'ensemble possible sur un ensemble de n éléments ;
- 3) $\mathcal{P}(x) = \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} = e^{2x}$, car il y a bien 2^n parties (sous-ensembles) possibles sur $[n]$.

Remarque 1.2.1. *Une liste des principales séries génératrices est incluse en annexe.*

Proposition 1.2.1. *Pour deux espèces des structures F et G , on a*

$$F \cong G \Rightarrow F(x) = G(x).$$

Preuve En effet, si $F \cong G$, alors il est clair que pour $F(x) = \sum f_n \frac{x^n}{n!}$ et $G(x) = \sum g_n \frac{x^n}{n!}$, on a que $f_n = g_n$, puisque $f_n = |F[n]|$ et $g_n = |G[n]|$ et que $F[n]$ et $G[n]$ sont en bijection. D'où la conclusion. ■

1.2.2 Série génératrice des types d'isomorphie : $\tilde{F}(x)$

Préalablement à la définition de cette série, nous devons définir ce que nous entendons par types d'isomorphie. Pour ce faire, considérons deux F -structures s_1 et s_2 éléments de $F[U]$ et $F[V]$ respectivement. Une bijection $\sigma : U \rightarrow V$ est appelée un isomorphisme de s_1 vers s_2 si $s_2 = F[\sigma](s_1)$. Posons $s_1 \sim s_2$ si et seulement s'il existe une telle bijection entre s_1 et s_2 . On définit alors le type d'isomorphisme de $s \in F[n]$ comme étant la classe d'équivalence de s sous \sim .

Définition 1.2.2. *La série génératrice des types d'isomorphie d'une espèce de structures F est la série formelle*

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n x^n,$$

où \tilde{f}_n est le nombre de types d'isomorphie de F -structures d'ordre n .

Notons que pour les séries génératrices des types d'isomorphie, il s'agit en fait de séries formelles ordinaires, où l'exposant de la variable x correspond à l'ordre des types de F -structures dénombrées.

Exemples 1.2.2. 1) *L'espèce des ordres linéaires L n'ayant qu'un seul type d'isomorphie sur n sommets nous donne que $\tilde{f}_n = 1$ et donc,*

$$\tilde{L}(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

2) *Pour l'espèce Scru des scrutins (c'est-à-dire les listes d'ensembles non vides), on a*

$$\widetilde{\text{Scru}}(x) = \frac{1-x}{1-2x}.$$

Comme dans le cas de la série génératrice exponentielle, une liste des principales séries génératrices des types d'isomorphie des espèces de structures est présentée en annexe.

Nous avons le résultat suivant, analogue au cas de la série génératrice exponentielle :

Proposition 1.2.2. *Pour deux espèces de structures F et G , on a*

$$F \cong G \Rightarrow \tilde{F}(x) = \tilde{G}(x).$$

Preuve En effet, il est clair que pour $\tilde{F}(x) = \sum \tilde{f}_n x^n$ et $\tilde{G}(x) = \sum \tilde{g}_n x^n$, si $F = G$, on a que $\tilde{f}_n = \tilde{g}_n$, et donc que $\tilde{F}(x) = \tilde{G}(x)$. ■

1.2.3 Série indicatrice de cycles : Z_F

Nous allons maintenant introduire une série formelle contenant cette fois une infinité de variables x_1, x_2, x_3, \dots et ayant la particularité de contenir beaucoup plus d'informations énumératives que les deux séries précédentes : elle généralise, comme nous le verrons au théorème 1.2.1, les séries $F(x)$ et $\tilde{F}(x)$. Mais préalablement, définissons ce que l'on entend par type cyclique d'une permutation.

Définition 1.2.3. *Soit un ensemble fini U et σ une permutation de U . Le **type cyclique** de σ est la suite $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$, où pour $k \geq 1$, σ_k est le nombre de cycles de longueur k de la décomposition de σ en cycles disjoints.*

Par exemple, pour $\sigma = (137)(2)(46)(5)$, une permutation de $U = [7]$, le type cyclique de σ est $(2, 1, 1, 0, \dots)$.

Remarque 1.2.2. *i) $\sigma_1 =$ nombre de points fixes d'une permutation σ ;
ii) Pour $|U| = n$, si $k > n$, alors $\sigma_k = 0$.*

Avec les notations $\text{Fix } \sigma = \{u \in U | \sigma(u) = u\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des points laissés fixes par σ) et $\text{fix } \sigma = |\text{Fix } \sigma|$ (c'est-à-dire le nombre de points laissés fixes par σ), nous allons maintenant définir en quoi consiste la série indicatrice de cycles Z_F :

Définition 1.2.4. La série indicatrice de cycles d'une espèce F est la série formelle (à une infinité de variables x_1, x_2, x_3, \dots)

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \right),$$

où S_n désigne le groupe des permutations de $[n]$ et $\text{fix } F[\sigma]$ est le nombre de F -structures sur $[n]$ laissées fixes par $F[\sigma]$: c'est-à-dire le nombre de F -structures sur $[n]$ dont σ est un automorphisme.

Exemples 1.2.3. 1) $Z_L(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (n!) x_1^n x_2^0 x_3^0 \dots = \sum_{n \geq 0} x_1^n = \frac{1}{1-x_1}$.

C'est-à-dire que le seul moyen de laisser fixe une liste est de faire agir l'identité et l'identité laisse fixe $n!$ listes possibles sur n . Évidemment, le type cyclique de la permutation identité de n éléments est $(n, 0, 0, \dots)$.

2) $Z_S(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\dots}$, où S désigne l'espèce des permutations.

Remarque 1.2.3. i) $|\text{Fix } F[\sigma]|$ ne dépend que du type cyclique de σ . De plus, le nombre de permutations de S_n de type cyclique (s_1, s_2, s_3, \dots) est $\frac{n!}{1^{s_1} s_1! 2^{s_2} s_2! 3^{s_3} s_3! \dots}$, où $\sum i s_i = n$. Donc, de manière équivalente, nous avons que pour une espèce F ,

$$\begin{aligned} Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{s_1+2s_2+3s_3+\dots=n} f_{s_1, s_2, s_3, \dots} \frac{x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} \dots}{1^{s_1} s_1! 2^{s_2} s_2! 3^{s_3} s_3! \dots} \\ &= \sum_{s_1+2s_2+3s_3+\dots < \infty} f_{s_1, s_2, s_3, \dots} \frac{x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} \dots}{1^{s_1} s_1! 2^{s_2} s_2! 3^{s_3} s_3! \dots} \\ &= \sum_s f_s \frac{x^s}{\text{aut}(s)}. \end{aligned}$$

De plus, pour deux espèces F et G , nous avons que

$$F \cong G \Rightarrow Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots).$$

ii) Une liste des séries indicatrices de cycles des principales espèces est présentée en annexe.

Théorème 1.2.3. Pour toute espèce F , on a

- a) $F(x) = Z_F(x, 0, 0, \dots)$;
- b) $\tilde{F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \dots)$.

Preuve

a) $Z_F(x, 0, 0, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma] x_1^{\sigma_1} \cdot 0^{\sigma_2} \cdot 0^{\sigma_3} \dots$, où $\forall n \geq 0, x_1^{\sigma_1} \cdot 0^{\sigma_2} \cdot 0^{\sigma_3} \dots = 0$, sauf si $\sigma_1 = n$ et $\sigma_k = 0$ pour $k \geq 2$ (c'est-à-dire que seules les permutations identités Id_n contribuent à la somme). Donc,

$$\begin{aligned} Z_F(x, 0, 0, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \text{fix } F[\text{Id}_n] x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f_n x^n \\ &= F(x) \end{aligned}$$

b)

$$Z_F(x, x^2, x^3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma] x^{\sigma_1} x^{2\sigma_2} x^{3\sigma_3} \dots \quad (1.1)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma] x^{\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \dots} \quad (1.2)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma] x^n \quad (1.3)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n x^n \quad (1.4)$$

$$= \tilde{F}(x), \quad (1.5)$$

où le passage de la ligne (1.3) à la ligne (1.4) est justifié par le lemme de Burnside (Bergeron, Labelle et Leroux, 1998). ■

Exemple 1.2.1. Pour l'espèce E des ensembles, nous obtenons bien que

$$\begin{aligned} E(x) &= Z_E(x, 0, 0, \dots) \\ &= \exp(x) \\ &= e^x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}(x) &= Z_E(x, x^2, x^3, \dots) \\
 &= \exp\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right) \\
 &= \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{x^i}{i}\right) \\
 &= \exp\left(\log \frac{1}{1-x}\right) \\
 &= \frac{1}{1-x}.
 \end{aligned}$$

1.2.4 Contact d'ordre n

Soient $a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$, deux séries formelles, et posons $a_{\leq n}(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k x^k$ et $b_{\leq n}(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} b_k x^k$. Alors on dit que $a(x)$ et $b(x)$ ont un contact d'ordre n , noté $a(x) =_n b(x)$, si et seulement si $a_{\leq n}(x) = b_{\leq n}(x)$.

En posant, pour des séries indicatrices à une infinité de variables de la forme

$$h(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots < \infty} h_{n_1 n_2 \dots} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots,$$

que

$$h_{\leq n}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots \leq n} h_{n_1 n_2 \dots} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots,$$

on définit le contact d'ordre n pour deux séries indicatrices $h(x_1, x_2, x_3, \dots)$ et

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots < \infty} g_{m_1 m_2 \dots} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots$$

par $h(x_1, x_2, x_3, \dots) =_n g(x_1, x_2, x_3, \dots)$ si pour tout m_1, m_2, m_3, \dots tels que $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots \leq n$ on a $h_{m_1, m_2, m_3, \dots} = g_{m_1, m_2, m_3, \dots}$.

On peut donc, en utilisant le concept de contact d'ordre n , définir la notion de limite d'une suite de séries indicatrices par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\leq n}(x_1, x_2, x_3, \dots) = h(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

si $\forall N \geq 0, \exists k \geq 0$ tel que $n \geq k \Rightarrow h_{\leq n}(x_1, x_2, x_3 \dots) =_N h(x_1, x_2, x_3 \dots)$.

Par analogie, nous avons les définitions suivantes pour les espèces de structures.

Définition 1.2.5. Soient F et G , deux espèces de structures et $n \in \mathbb{N}$. On dit que F et G ont un **contact d'ordre n** , noté $F =_n G$, si l'égalité combinatoire $F_{\leq n} = G_{\leq n}$ est respectée, où $F_{\leq n}$ dénote la restriction de F aux ensembles de cardinal $\leq n$. Plus précisément, si U et V sont des ensembles finis et $\sigma : U \rightarrow V$ une bijection, on pose : $F_{\leq n}[U] = F[U]$ et $F_{\leq n}[\sigma] = F[\sigma]$ si $|U| \leq n$, et $F_{\leq n}[U] = \emptyset$ si $|U| > n$.

Remarque 1.2.4. Il est ici important de souligner que sans ambiguïté, si deux espèces de structures F et G ont un contact d'ordre n , alors il en va de même pour leurs trois séries associées. C'est-à-dire : si on a $F =_n G$, alors

- a) $F(x) =_n G(x)$
- b) $\tilde{F}(x) =_n \tilde{G}(x)$
- c) $Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) =_n Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$

Définition 1.2.6. On dit qu'une suite $(F_n)_{n \geq 0}$ d'espèces de structures converge vers une espèce F , notée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F,$$

si $\forall N \geq 0, \exists k \geq 0$ tel que $\forall n \geq k, F_n =_N F$.

Remarque 1.2.5. Ce concept de limite est compatible avec le passage aux séries associées.

Nous pouvons maintenant poser sans ambiguïté le résultat suivant :

Proposition 1.2.4. Pour des espèces de structures $(F_n)_{n \geq 0}$ et F , si $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$, alors

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$;
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(x) = \tilde{F}(x)$;
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{F_n}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$.

□

1.3 Opérations sur les espèces

Dans cette section, nous introduirons les opérations combinatoires de base sur les espèces de structures qui nous seront utiles tout au long de ce présent mémoire, c'est-à-dire les opérations d'addition (1.3.1), de multiplication (1.3.2), de substitution (1.3.3) et de pointage (1.3.4).

1.3.1 Somme d'espèces de structures

Regardons premièrement un exemple qui servira d'introduction à ce concept d'addition d'espèces de structure :

Considérons les espèces E_{pair} et E_{imp} des ensembles ayant respectivement un nombre pair et impair d'éléments. Puisque tout ensemble contient soit un nombre pair, soit un nombre impair d'éléments, on a alors l'égalité suivante pour tout ensemble fini U :

$$E[U] = E_{pair}[U] + E_{imp}[U].$$

L'addition étant ici prise au sens d'une somme disjointe ensembliste.

Formellement, nous avons la définition suivante.

Définition 1.3.1. *Pour deux espèces de structures F et G , la somme de F et G est l'espèce $F + G$ définie comme suit : une $(F + G)$ -structure sur U est une F -structure sur U ou (exclusif) une G -structure sur U . C'est-à-dire :*

$$(F + G)[U] = F[U] + G[U] \text{ (somme disjointe ensembliste).}$$

Sous cette opération, le transport le long d'une bijection $\sigma : U \rightarrow V$ est défini par $(F + G)[\sigma](s) = F[\sigma](s)$ si $s \in F[U]$, $G[\sigma](s)$ si $s \in G[U]$, où $s \in (F + G)[U]$.

La représentation générale d'une $(F + G)$ -structure peut être vue comme dans la Figure 1.6

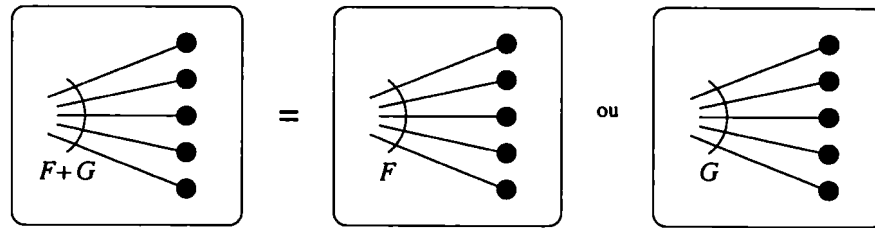


Figure 1.6 Représentation générale d'une $(F + G)$ -structure.

Remarque 1.3.1. La définition suivante pour la somme d'espèces de structures est aussi valable et a l'avantage de traiter le cas où $F[U] \cap G[U] \neq \emptyset$:

$$(F + G)[U] = (F[U] \times \{1\}) \cup (G[U] \times \{2\}).$$

L'associativité et la commutativité (à isomorphisme près) de l'addition d'espèces peuvent être facilement vérifiées. De plus, l'élément neutre pour l'addition est l'espèce nulle 0 :

$$(F + 0) = (0 + F) = F.$$

Nous terminons cette section par l'énoncé d'une proposition justifiant en quelque sorte la définition précédente :

Proposition 1.3.1. Soient F et G deux espèces de structures. Les séries associées à l'espèce $F + G$ satisfont les égalités suivantes :

- a) $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$;
- b) $(\widetilde{F + G})(x) = \widetilde{F}(x) + \widetilde{G}(x)$;
- c) $Z_{F+G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) + Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Preuve Montrons a).

Soient deux espèces de structures F et G ayant respectivement les séries exponentielles

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} \text{ et } G(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}.$$

Alors nous avons bien que

$$\begin{aligned}
 (F + G)(x) &= \sum_{n \geq 0} (f_n + g_n) \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n \geq 0} (f_n) \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} (g_n) \frac{x^n}{n!} \\
 &= F(x) + G(x).
 \end{aligned}$$

■

1.3.2 Produit d'espèces de structures

Considérons l'espèce $\text{Par}_p[U]$ des partitions partielles sur U , c'est-à-dire une partition sur une partie V de U (voir Figure 1.7). On remarque qu'il se dégage deux structures disjointes :

- i) un ensemble V de U sur lequel est appliquée une partition ;
- ii) un ensemble U/V d'éléments non considérés par la partition.

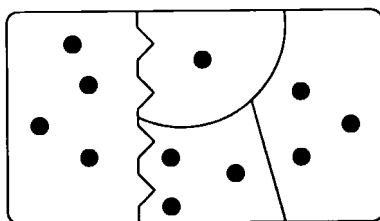


Figure 1.7 Une partition partielle sur 11 éléments

On constate alors que l'espèce Par_p est le produit des espèces E des ensembles et Par des partitions notées $\text{Par}_p = E \cdot \text{Par}$.

En toute généralité, le produit d'espèces de structure est défini de la façon suivante :

Définition 1.3.2. Soient F et G deux espèces de structures. L'espèce $F \cdot G$, que l'on nomme le **produit de F et G** , est définie comme suit : une $(F \cdot G)$ -structure sur U est un couple $s = (f, g)$ où :

i) f est une F -structure sur une partie $U_1 \subseteq U$;

ii) g est une G -structure sur une partie $U_2 \subseteq U$;

iii) $U_1 \cup U_2 = U$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Autrement dit, pour tout ensemble fini U , $(F \cdot G)[U] = \sum_{(U_1, U_2)} F[U_1] \times G[U_2]$, la somme disjointe étant étendue à tous les couples (U_1, U_2) formant une décomposition de U .

Sous cette opération, le transport le long d'une bijection $\sigma : U \rightarrow V$ est donné en posant, pour toute $(F \cdot G)$ -structure $s = (f, g)$ sur U , $F \cdot G[\sigma](s) = (F[\sigma_1](f), G[\sigma_2](g))$, où $\sigma_i = \sigma|_{U_i}$ est la restriction de σ à U_i , $i = 1, 2$.

La représentation générale d'une $(F \cdot G)$ -structure peut être vue comme dans la Figure 1.8.

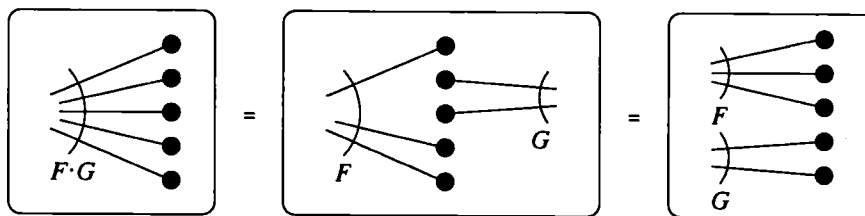


Figure 1.8 Représentation générale d'une $(F \cdot G)$ -structure.

Il est aisé de vérifier que la multiplication d'espèces est, à isomorphisme près, associative et commutative. Aussi, elle admet comme élément neutre l'espèce 1 et l'espèce nulle 0 comme élément absorbant, c'est-à-dire :

$$(1 \cdot F) = (F \cdot 1) = F, (0 \cdot F) = (F \cdot 0) = 0.$$

De plus, la multiplication d'espèces est distributive sur l'addition. Et dans la même optique que pour l'opération d'addition, nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.3.2. *Pour deux espèces de structure F et G , nous avons*

a) $(F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x)$;

b) $(\widetilde{F \cdot G})(x) = \widetilde{F}(x) \cdot \widetilde{G}(x)$;

c) $Z_{F \cdot G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \cdot Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Preuve Montrons a)

Pour deux espèces F et G telles que

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} \text{ et } G(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!},$$

nous avons bien que

$$\begin{aligned} (F \cdot G)(x) &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} f_i g_j \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i+j=n} \frac{f_i g_j n!}{i! j! n!} \right) x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^n \frac{f_i}{i!} \frac{g_{n-i}}{(n-i)!} \right) x^n \\ &= \left(\sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= F(x) \cdot G(x). \end{aligned}$$

■

1.3.3 Substitution d'espèces de structures

Avant de la définir formellement, nous allons, comme pour les deux opérations précédentes, regarder un exemple nous donnant l'intuition informelle de ce qu'est la substitution.

Considérons l'espèce \mathcal{H} des haies, une haie étant, par définition, une succession d'arborescences. Plus particulièrement, examinons la haie sur un ensemble U de la Figure 1.9 a). On voit alors que la Figure 1.9 b) illustre clairement le fait que toute haie peut être exprimée comme étant une liste d'arborescences disjointes. On peut ainsi dire que toute \mathcal{H} -structure s'identifie naturellement à une L -structure placée sur un ensemble de \mathcal{A} -structures disjointes. En d'autres termes, on dit que toute \mathcal{H} -structure est une L -assemblée de \mathcal{A} -structures, que l'on note de l'une des façons suivantes :

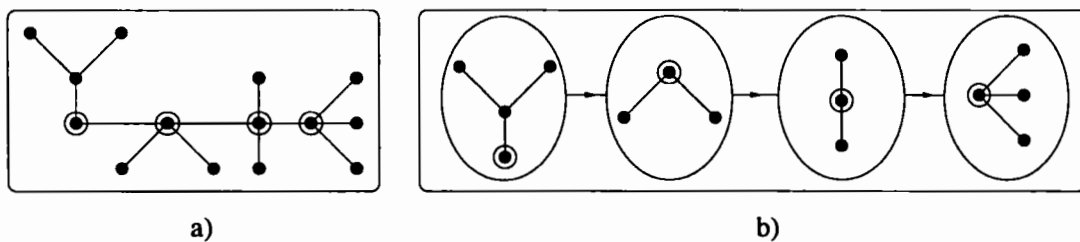


Figure 1.9 a) Une haie sur U . b) Une liste d'arborescences disjointes sur U .

$$\mathcal{H} = L \circ \mathcal{A}, \text{ ou } \mathcal{H} = L(\mathcal{A}).$$

Formellement, nous avons la définition suivante :

Définition 1.3.3. Soient F et G deux espèces de structures telles que $G[\emptyset] = \emptyset$. L'espèce $F \circ G$, aussi notée $F(G)$, que l'on appelle la **composée** de G dans F , est définie comme suit : une $(F \circ G)$ -structure sur U est un couple $A = (\phi, \gamma)$, où :

1. ϕ est une F -structure sur l'ensemble des classes d'une partition arbitraire π de U .
2. $\gamma = (\gamma_p)_{p \in \pi}$ où, pour chaque classe p de π , γ_p est une G -structure sur p .

Autrement dit, pour tout ensemble fini U , on a

$$(F \circ G)[U] = \sum_{\pi \text{ partition de } U} F[\pi] \times \prod_{p \in \pi} G[p],$$

la somme disjointe étant prise sur l'ensemble des partitions π de U .

Sous cette opération, le transport le long d'une bijection $\sigma : U \rightarrow V$ s'effectue en posant, pour toute $(F \circ G)$ -structure $s = (\phi, (\gamma_p)_{p \in \pi})$ sur U ,

$$(F \circ G)[\sigma](s) = (\bar{\phi}, (\bar{\gamma}_{\bar{p}})_{\bar{p} \in \bar{\pi}}),$$

où

- 1- $\bar{\pi}$ est la partition de V obtenue par transport de π le long de σ ,
- 2- pour chaque $\bar{p} = \sigma(p) \in \bar{\pi}$, la structure $\bar{\gamma}_{\bar{p}}$ est obtenue de la structure γ_p par G -transport le long de $\sigma|_p$,
- 3- la structure $\bar{\phi}$ est obtenue de la structure ϕ par F -transport le long de la bijection $\bar{\sigma}$ induite sur π par σ .

La façon générale de voir une $(F \circ G)$ -structure peut être l'une ou l'autre des représentations illustrées à la Figure 1.10.

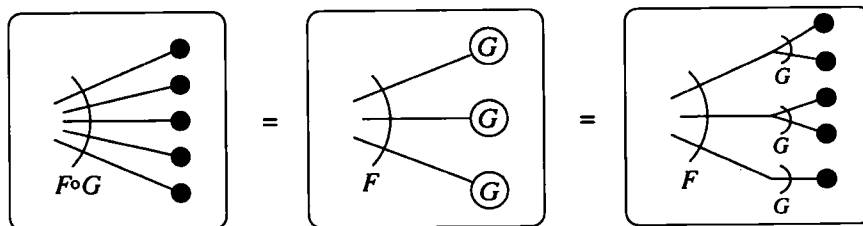


Figure 1.10 Représentation générale d'une $(F \circ G)$ -structure.

On ne peut cependant pas prétendre ici que, comme pour les deux autres opérations vues précédemment, les égalités naturelles relatives aux séries indicatrices sont préservées par les substitutions : le lien entre l'espèce $F \circ G$ et ses séries génératrices et indicatrices est donné par la proposition qui suit :

Proposition 1.3.3. Soient F et G deux espèces de structure telles que $G[\emptyset] = \emptyset$. Alors on a

- a) $(F \circ G)(x) = F(G(x))$;
- b) $(\widetilde{F \circ G})(x) = Z_F(\widetilde{G}(x), \widetilde{G}(x^2), \widetilde{G}(x^3), \dots)$;
- c) $Z_{F \circ G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots), Z_G(x_2, x_4, x_6, \dots), \dots)$.

□

Remarque 1.3.2. La série indicatrice donnée par la troisième égalité est appelée la substitution pléthystique de Z_G dans Z_F , notée $(Z_F \circ Z_G)$ et est définie par $(Z_F \circ Z_G) = (f \circ g) = f(g_1, g_2, \dots)$, où $g_i = g(x_i, x_{2i}, x_{3i}, \dots)$.

Notons en terminant que la proposition précédente nous permet de déduire le nombre de $(F \circ G)$ -structures sur un ensemble à k éléments. En effet, pour des espèces F et G ayant respectivement les séries génératrices

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} \text{ et } G(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!},$$

nous obtenons par la proposition 1.3.3 a) que

$$\begin{aligned} (F \circ G)(x) &= F(G(x)) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(G(x))^n}{n!}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

En développant $(G(x))^n$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} (G(x))^n &= \left(\sum_{k \geq 0} g_k \frac{x^k}{k!} \right)^n \\ &= \left(\sum_{k \geq 0} g_k \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k \geq 0} g_k \frac{x^k}{k!} \right) \cdots \left(\sum_{k \geq 0} g_k \frac{x^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k} k! \frac{g_{k_1}}{k_1!} \frac{g_{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{g_{k_n}}{k_n!} \right) \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k} \frac{k!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} \prod_{i=1}^n g_{k_i} \right) \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} \prod_{i=1}^n g_{k_i} \right) \frac{x^k}{k!}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En substituant (1.7) dans (1.6) nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} (F \circ G)(x) &= \sum_{n \geq 0} \frac{f_n}{n!} \left(\sum_{k \geq 0} \left(\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} \prod_{i=1}^n g_{k_i} \right) \frac{x^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n=0}^k \frac{f_n}{n!} \left(\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} \prod_{i=1}^n g_{k_i} \right) \right) \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

D'où l'on tire que le nombre de $(F \circ G)$ -structures sur un ensemble à k éléments est

$$\sum_{n=0}^k \frac{f_n}{n!} \left(\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k, k_i \geq 1} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} \prod_{i=1}^n g_{k_i} \right).$$

1.3.4 Pointage dans une espèce de structures

Nous présentons ici une quatrième et dernière opération de base dans cette section : le pointage d'espèces de structures. Bien que simple à priori, cette opération s'avèrera plus

riche lorsque nous aurons introduit la notion de dérivée d'espèces à la section 2.2. Car la motivation pour définir cette opération est en fait de relever au niveau combinatoire l'opérateur différentiel $x \frac{d}{dx}$ dont l'effet sur les séries formelles est

$$x \frac{d}{dx} \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} n f_n \frac{x^n}{n!}.$$

Définition 1.3.4. Soit F une espèce de structures sur un ensemble fini U . Une F^\bullet -structure sur U , appelée F -structure pointée sur U , est un couple $s = (f, u)$ où

- i) f est une F -structure sur U ;
- ii) $u \in U$ est un élément distingué de U .

En d'autres mots, on a

$$F^\bullet[U] = F[U] \times U,$$

le produit cartésien ensembliste.

On définit le transport d'une F^\bullet -structure le long d'une bijection $\sigma : U \rightarrow V$ en posant

$$F^\bullet[\sigma](s) = (F[\sigma](f), \sigma(u))$$

pour toute F^\bullet -structure $s = (f, u)$ sur U .

Graphiquement, une F^\bullet -structure peut se représenter comme dans la Figure 1.11

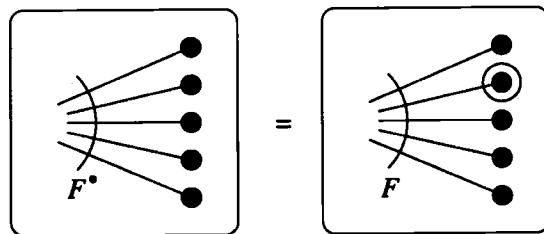


Figure 1.11 Représentation générale d'une F^\bullet -structure.

Un exemple typique de pointage d'espèce de structures consiste à pointer l'espèce a des arbres. On obtient alors l'équation combinatoire

$$a^\bullet = \mathcal{A},$$

qui signifie simplement que les arbres pointés sont les arborescences. Il est évidemment possible de répéter l'opération plus d'une fois. Par exemple, nous avons

$$a^{\bullet\bullet} = \mathcal{A}^{\bullet} = \mathcal{V},$$

où \mathcal{V} désigne l'espèce des vertébrés.

Remarque 1.3.3. *On peut facilement montrer que pour deux espèces de structures F et G , nous avons les règles de calcul suivantes :*

- 1- $(F + G)^{\bullet} = F^{\bullet} + G^{\bullet}$;
- 2- $(F \cdot G)^{\bullet} = F^{\bullet} \cdot G + F \cdot G^{\bullet}$.

De plus, le dénombrement des F^{\bullet} -structures satisfait à la formule

$$|F^{\bullet}[n]| = n|F[n]|, \quad n \geq 0.$$

et le passage aux séries respecte la proposition suivante.

Proposition 1.3.4. *Pour une espèce de structures F nous avons*

- a) $F^{\bullet}(x) = x \frac{d}{dx} F(x)$;
- b) $\widetilde{F}^{\bullet}(x) = x \left(\frac{\partial}{\partial x_1} Z_F \right) (x, x^2, x^3, \dots)$;
- c) $Z_{F^{\bullet}}(x_1, x_2, x_3, \dots) = x_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} Z_F \right) (x_1, x_2, x_3, \dots)$.

□

1.4 Espèces multispécies

Dans cette section, nous généralisons dans un premier temps la notion d'espèce de structures en considérant des structures définies sur des ensembles composés de plus d'une sorte d'éléments (1.4.1). Et donc, par le fait même, il sera nécessaire dans un deuxième temps de généraliser les opérations sur les espèces que nous avons vues dans le contexte à une sorte ainsi que les diverses séries rattachées à ces espèces multispécies (1.4.2). Finalement, pour clore cette section, nous introduirons le concept de passage aux types d'isomorphismes selon une seule sorte (1.4.3). Il est à noter que pour les besoins du présent mémoire, les concepts introduits aux sections 1.4.2 et 1.4.3 seront définis dans le cas des espèces à deux sortes uniquement. Il est cependant aisé de les généraliser pour les espèces à plus de deux sortes.

1.4.1 Notion d'espèce multisorte

Pour un entier $k \geq 1$ fixé quelconque, nous avons les définitions suivantes.

Définition 1.4.1. *Un **multiensemble** (à k sortes d'éléments) est un k -uplet d'ensembles $U = (U_1, \dots, U_k)$, où un élément $u \in U_i$ est appelé un élément de sorte i .*

Le **multicardinal** de U est défini par

$$|U| = (|U_1|, \dots, |U_k|),$$

et son cardinal total, noté $\|U\|$, par

$$\|U\| = \sum_{i=1}^k |U_i|.$$

Définition 1.4.2. *Une **multifonction** $\sigma : U \rightarrow V$ (où U et V sont des multiensembles à k sortes) est définie par $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$, tel que $\sigma_i : U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, \dots, k$.*

Remarque 1.4.1. *i) Une multifonction σ est dite **bijective** si chacune des fonctions σ_i est bijective.*

ii) Pour deux multifonctions $\tau : U \rightarrow V$ et $\sigma : V \rightarrow W$, entre multiensembles à k sortes, on définit la composition de σ et τ par

$$\sigma \circ \tau = (\sigma_1 \circ \tau_1, \dots, \sigma_k \circ \tau_k).$$

Définition 1.4.3. *Une **espèce sur k sortes** est une règle F qui permet de*

i) produire, pour chaque multiensemble fini $U = (U_1, \dots, U_k)$, un ensemble fini $F[U_1, \dots, U_k]$,

ii) produire, pour chaque multifonction bijective

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k) : (U_1, \dots, U_k) \rightarrow (V_1, \dots, V_k),$$

une fonction

$$F[\sigma] = F[\sigma_1, \dots, \sigma_k] : F[U_1, \dots, U_k] \rightarrow F[V_1, \dots, V_k].$$

De plus, les fonctions $F[\sigma]$ doivent satisfaire aux propriétés de functorialité, c'est-à-dire que pour $\sigma : U \rightarrow V$ et $\tau : V \rightarrow W$, des multifonctions bijectives, et pour $\text{Id}_U : U \rightarrow U$, la multifonction identité, on doit avoir

$$a) F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma];$$

$$b) F[\text{Id}_U] = \text{Id}_{F[U]}.$$

Un élément s de $F[U_1, \dots, U_k]$ est appelé une F -structure sur (U_1, \dots, U_k) . La fonction $F[\sigma] = F[\sigma_1, \dots, \sigma_k]$ est appelée transport des F -structures le long de $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$.

Pour représenter une F -structure sur k sortes en toute généralité, il est de convenance d'affecter à chaque élément de l'ensemble sous-jacent un trait distinctif (numéro, couleur, forme, ...) pour distinguer la nature des éléments. La Figure 1.12 donne un exemple d'une représentation générale d'une F -structure à 5 sortes étiquetées par des chiffres.

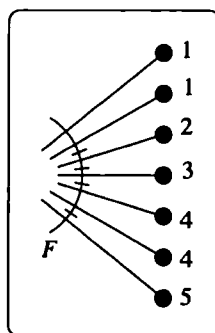


Figure 1.12 Une F -structure à 4 sortes.

Remarque 1.4.2. Pour le reste du présent travail, nous prendrons pour convention de représenter des éléments de sorte X par \bullet et ceux de sorte T par \blacksquare .

Exemple 1.4.1. Considérons l'espèce a^{bic} des arbres bicolores, c'est-à-dire l'espèce des arbres dans lesquels les éléments adjacents alternent entre deux couleurs : noir (\bullet) et blanc (\circ). Soient les ensembles $U_1 = [5]$, $U_2 = \{a, b, c, d, e\}$, $V_1 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ et $V_2 = \{v, w, x, y, z\}$ tels que les éléments de U_1 et V_1 sont des éléments de sorte "noirs" et ceux de U_2 et V_2 de sorte "blancs". Considérons l'arbre bicolore $s \in a^{bic}[U_1 \cup U_2]$ tel qu'illustré à la Figure 1.13 et la bijection β telle que $t = a^{bic}[\beta]$. On voit alors que β doit

nécessairement envoyer chaque élément de U_1 (resp. U_2) sur un élément de V_1 (resp. V_2).

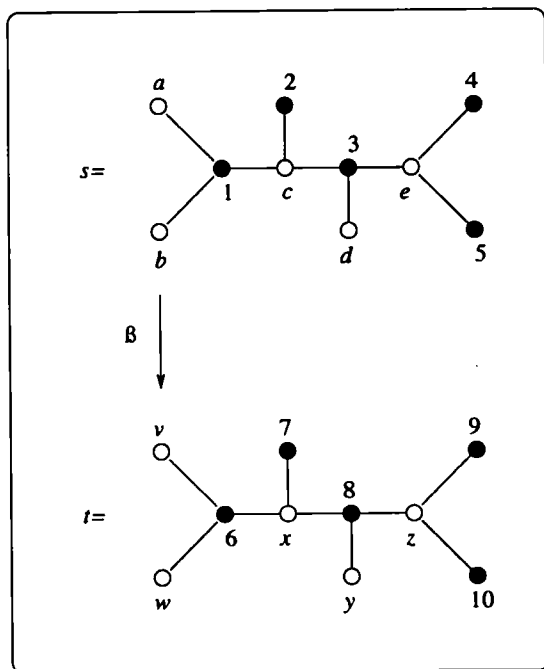


Figure 1.13 Une bijection entre deux arbres bicolorés.

Il est possible d'associer une sorte de singletons à chaque sorte en définissant l'espèce X_i des singletons de sorte i , par

$$X_i[U] = \begin{cases} \{U\} & \text{si } |U_i| = 1 \text{ et } U_j = \emptyset \text{ pour tout } j \neq i, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que $U = \{u_i\}$ est l'unique X_i -structure sur $U = (\emptyset, \dots, \{u_i\}, \dots, \emptyset)$, c'est-à-dire qu'il n'existe de X_i -structure sur (U_1, \dots, U_k) que si U est un singleton de sorte i .

Notons au passage qu'il est parfois utile de représenter un multiensemble $U = (U_1, \dots, U_k)$ comme étant l'ensemble $U_1 + U_2 + \dots + U_k$ où l'addition correspond à l'union disjointe ensembliste. Bien entendu, il n'est aucunement essentiel qu'il y ait au moins un élément de chaque sorte dans une F -structure. Ainsi, toute espèce multisorte peut être vue comme une espèce multisorte sur un multiensemble composé d'un plus grand nombre de sortes.

Pour deux espèces à k sortes F et G et un multiensemble $U = (U_1, \dots, U_k)$, on définit les opérations d'addition, de multiplication comme suit :

- $(F + G)[U] = F[U] + G[U]$
- $(F \cdot G)[U] = \sum_{(V,W) \in \Delta[U]} F[V] \times G[W]$

où $\Delta[U]$ désigne l'ensemble des dissections de U , c'est-à-dire l'ensemble des couples de multiset à k sortes (V, W) tels que $U_i = V_i \cup W_i$ et $V_i \cap W_i = \emptyset$, $i = 1..k$.

La généralisation de la composition pour les espèces à plusieurs sortes est quant à elle définie de la manière suivante.

Définition 1.4.4. Soit $F = F(Y_1, \dots, Y_m)$, une espèce à m sortes, et $(G_j)_{j=1..m}$ une famille d'espèces à k sortes. La **composée partitionnelle** $F(G_1, \dots, G_m)$ (substitution des G_j dans F) est une espèce à k sortes définie en posant, pour $U = (U_1, \dots, U_k)$,

$$F(G_1, \dots, G_m)[U] = \sum_{\pi \in \text{Par}[U], \chi: \pi \rightarrow [m]} F[\chi^{-1}] \times \prod_{j \in [m], C \in \chi^{-1}(j)} G_j[C]$$

où pour chaque fonction $\chi: \pi \rightarrow [m]$, χ^{-1} désigne le multiensemble à m sortes

$(\chi_{(1)}^{-1}, \dots, \chi_{(m)}^{-1})$ associé à χ , et où $\text{Par}[U]$ désigne l'ensemble des partitions de l'ensemble $U_1 + \dots + U_k$.

Exemple 1.4.2. Soit $\mathcal{C}_{alt}(X, T) = \mathcal{C}(X \cdot T)$, l'espèce des cycles orientés alternant sur deux sortes d'éléments. La Figure 1.14 représente une F -structure définie par $F(X, T) = \mathcal{C}_{alt}(\mathcal{G}(X + T), \mathcal{A}(X))$, où \mathcal{G} désigne l'espèce des graphes.

1.4.2 Séries associées aux espèces multisortes

Définition 1.4.5. Pour une espèce à deux sortes $F(X, Y)$, les **séries génératrices** $F(x, y)$, **génératrices des types d'isomorphismes** $\tilde{F}(x, y)$ et **indicatrices des cycles** Z_F sont définies par :

- $F(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} |F[n, k]| \frac{x^n y^k}{n! k!}$ où $|F[n, k]| =$ nombre de F -structures construites sur $([n], [k])$;
- $\tilde{F}(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} |F[n, k]| / \sim |x^n y^n$, où $|F[n, k]| / \sim | =$ nombre de types d'isomorphie de F -structures sur un multiensemble de multichiffre (n, k) .

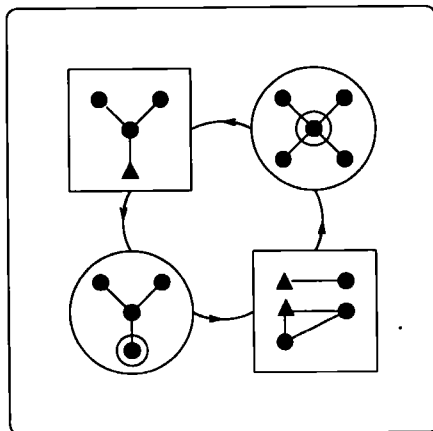


Figure 1.14 Une $\mathcal{C}_{alt}(\mathcal{G}(X+T), \mathcal{A}(X))$ -structure.

- $Z_F(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) = \sum_{n, k \geq 0} \frac{1}{n!k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \tau \in \mathcal{S}_k} |\text{Fix } F[\sigma, \tau]| x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots y_1^{\tau_1} y_2^{\tau_2} \dots$ où $|\text{Fix } F[\sigma, \tau]|$ est le nombre de F -structures étiquetées sur $([n], [k])$ laissées fixes par le transport de structures le long de la bijection $[\sigma, \tau]$ et où σ_i (resp. τ_i) est le nombre de cycles de longueurs i dans σ (resp. τ).

La proposition suivante est une généralisation du théorème 1.2.1 des espèces à une sorte.

Proposition 1.4.1. Soit $F = F(X, Y)$ une espèce à deux sortes. Alors on a les égalités suivantes :

- $F(x, y) = Z_F(x, 0, 0, \dots; y, 0, 0, \dots)$,
- $\tilde{F}(x, y) = Z_F(x, x^2, x^3, \dots; y, y^2, y^3, \dots)$

□

Le passage aux séries génératrices et indicatrices est toujours compatible avec les opérations combinatoires d'addition, de multiplication, de composition partitionnelle et de pointage selon une sorte. En particulier, la proposition suivante décrit explicitement le cas de la substitution.

Proposition 1.4.2. Soient $F = F(X, Y)$, $G = G(X, Y)$ et $H = H(X, Y)$ trois espèces à deux sortes telles que $G(0, 0) = H(0, 0) = 0$. Alors

- $F(G, H)(x, y) = F(G(x, y), H(x, y))$

- b) $\tilde{F}(G, H)(x, y) = Z_F(\tilde{G}(x, y), \tilde{G}(x^2, y^2), \dots; \tilde{H}(x, y), \tilde{H}(x^2, y^2), \dots)$
c) $Z_{F(G, H)} = Z_F(Z_G, Z_H) = Z_F((Z_G)_1, (Z_G)_2, \dots; (Z_H)_1, (Z_H)_2, \dots)$, où pour $k \geq 1$,
 $(Z_G)_k(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_G(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots)$

□

Remarque 1.4.3. *La dernière substitution est la substitution pléthystique des séries indicatrices en les variables $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots$, définie de façon analogue à la substitution pléthystique pour les espèces à une sorte.*

1.4.3 Passage aux types selon une sorte

Nous introduisons dans cette section la notion de passage aux types d'isomorphie selon une seule sorte, communément appelée passage aux types selon une sorte. Il est à noter que même si nous le définissons pour les espèces à deux sortes, ce concept peut être généralisé à un contexte multisorte quelconque.

Définition 1.4.6. *Soit $F = F(X, Y)$ une espèce à deux sortes. Considérons $s \in F[U, V]$ et $t \in F[U', V']$. On dit que s et t ont même type d'isomorphie selon la sorte Y , noté $s \sim_Y t$ si*

- i) $U = U'$;
- ii) $t = F[\sigma](s)$ où $\sigma = \text{Id} + \theta : U + V \rightarrow U + V'$ et où $\theta : V \xrightarrow{\sim} V'$ est une bijection.

En d'autres mots, $s \sim_Y t$ si et seulement si s et t deviennent égales lorsque l'on rend indistinguables les éléments de sorte Y dans leurs ensembles sous-jacents.

Remarque 1.4.4. \sim_Y est une relation d'équivalence : le type d'isomorphie de s selon Y est la classe d'équivalence de s sous la relation \sim_Y , que l'on note $T_Y s$.

Exemple 1.4.3. *Pour $X := \text{sommet}$ et $Y := \text{arêtes}$, la Figure 1.15 montre deux structures ayant le même type d'isomorphie selon le type Y .*

Remarque 1.4.5. *Ici, $\theta : \{a, b\} \rightarrow \{w, x\}$ est telle que $a \mapsto w, b \mapsto x$, et la classe d'équivalence correspondante peut être représentée par la figure 1.16 où les étiquettes*

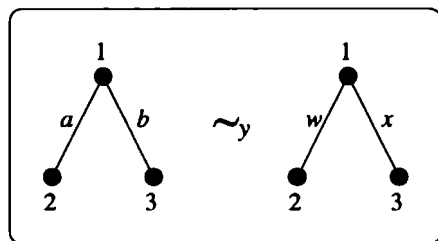


Figure 1.15 Deux structures ayant même type d'isomorphie selon le type Y .

des arêtes ont été enlevées.

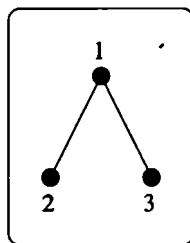


Figure 1.16 Classe d'équivalence de \sim_Y correspondant à θ .

Définition 1.4.7. Soit $F = F(X, Y)$, une espèce à deux sortes dont la décomposition canonique est

$$F = \sum_{n, k \geq 0} F_{n, k},$$

où $F_{n, k}[U, V] = \begin{cases} F[U, V] & \text{si } |U| = n \text{ et } |V| = k \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$. On dit que F est **polynomiale en**
 Y si $\forall n \geq 0, \exists N \geq 0$ tel que $k \geq N \Rightarrow F_{n, k} = 0$.

Donc si F est polynomiale en Y , on a que $T_Y F[U] = \{T_Y s \mid \exists V, s \in F[U, V]\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des types d'isomorphismes selon Y dont l'ensemble sous-jacent est U) est un ensemble fini comme union d'ensembles finis de la forme $F[X, Y] / \sim_Y$. On écrit alors

$$F(X, 1) := F(X, Y)|_{Y:=1},$$

où $Y := 1$ correspond à désétiqueter les points de la sorte Y .

Remarque 1.4.6. On représente graphiquement un désétiquetage en mettant des formes vides (points, carrés, triangles, ...) au lieu de formes pleines. Par exemple, pour représenter graphiquement que des points de sorte X ont été désétiquetés, on mettra des points vides \circ au lieu des habituels points noirs \bullet .

Exemple 1.4.4. Considérons l'espèce à deux sortes $\Gamma(X, Y)$ des graphes étiquetés aux sommets X et aux arêtes Y . On a alors que Γ est polynomiale en Y car $\forall |U| = n, \Gamma_{n,k} = 0$ dès que $k > \binom{n}{2}$. La Figure 1.17 a) illustre une Γ -structure $\Gamma[U, V]$ dont l'ensemble des sommets est $U = [5]$ et l'ensemble des arêtes est $V = \{a, b, c, d\}$. La Figure 1.17 b) montre quant à elle la $T_Y\Gamma$ -structure lui correspondant.

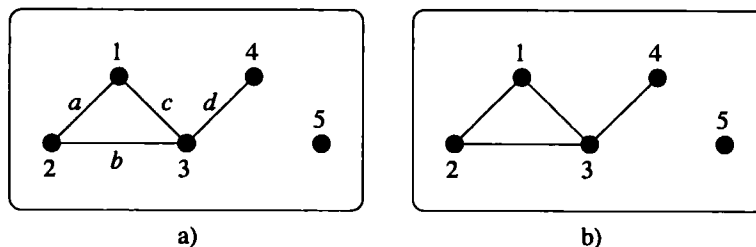


Figure 1.17 Une $\Gamma[U, V]$ -structure sur $U = [5]$ et $V = \{a, b, c, d\}$ (a)) et la $T_Y\Gamma$ -structure lui correspondant (b)).

Pour le passage aux séries génératrices et indicatrices relatives aux types par rapport à une sorte (c'est-à-dire les espèces de la forme $T_Y F$), nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.4.3. Soit $F = F(X, Y)$, une espèce à deux sortes polynomiale en Y . On a les égalités suivantes :

- a) $T_Y F(x) = Z_F(x, 0, 0, \dots; y, y^2, y^3, \dots)$
- b) $\widetilde{T_Y F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \dots; y, y^2, y^3, \dots)$
- c) $Z_{T_Y F}(x_1, x_2, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots; y, y^2, y^3, \dots)$

□

Par exemple, pour l'espèce $\Gamma_{mult} = \Gamma_{mult}(X, Y)$ des multigraphes (sur des sommets de

sorte X et des arête de sorte Y), on a

$$T_Y \Gamma_{mult}(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{1-y} \right)^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!}.$$

Remarque 1.4.7. On peut montrer que si $F(X, Y)|_{Y:=1} = F(X, 1)$ existe, alors

$$\begin{aligned} Z_{F(X,1)}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= Z_{F(X,Y)}(x_1, x_2, x_3, \dots; y_1, y_2, y_3, \dots)|_{y_i:=1} \\ &= Z_{F(X,Y)}(x_1, x_2, x_3, \dots; 1, 1, 1, \dots). \end{aligned}$$

1.5 Espèces moléculaires

Cette section est consacrée au concept de décomposition moléculaire ainsi qu'aux propriétés s'y rattachant. L'intérêt d'introduire cette notion tient au fait qu'elle permet de donner une décomposition standard pour toutes les espèces.

Définition 1.5.1. Une espèce de structures M est dite **moléculaire** si elle ne possède qu'un seul type d'isomorphie, c'est-à-dire pour toutes structures $m_1 \in M[U]$ et $m_2 \in M[V]$, on a $m_1 \cong m_2$.

Exemple 1.5.1. L'espèce C_n des cycles orientés est moléculaire ($n \geq 1$), car $\forall c_1, c_2 \in C_n, c_1 \cong c_2$. La Figure 1.18 illustre la situation dans le cas de deux 6-cycles.

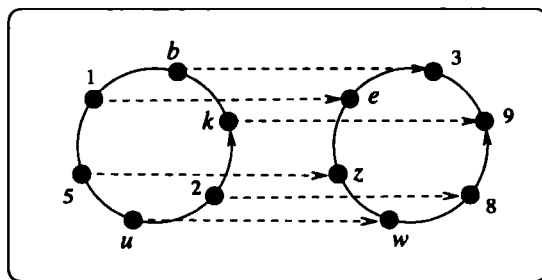


Figure 1.18 Deux 6-cycles isomorphes.

Exemple 1.5.2. L'espèce A_n des arborescences sur n points, pour $n \geq 3$, n'est pas moléculaire. En effet, il existe par exemple quatre A_4 -structures non isomorphes sur 4

points (voir Figure 1.19).

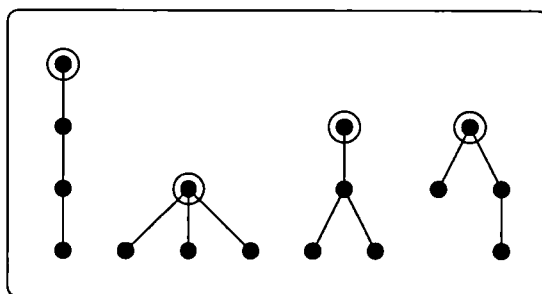


Figure 1.19 Quatre \mathcal{A}_4 -structures non isomorphes.

Proposition 1.5.1. *Une espèce de structures M est moléculaire si et seulement si pour toutes espèces F et G ,*

$$M = F + G \Rightarrow F = 0 \text{ ou } G = 0.$$

C'est-à-dire : les espèces moléculaires sont des espèces indécomposables sous la somme.

Preuve Considérons une espèce de structures M de degré n telle que $M = F + G$, avec $F, G \neq 0$. Si nous regardons les séries génératrices des types d'isomorphismes des espèces M et $F + G$, nous obtenons alors l'égalité suivante :

$$x^n = \widetilde{M}(x) = \widetilde{F}(x) + \widetilde{G}(x).$$

Mais puisqu'il y a au moins un monôme de degré n à coefficient entier strictement positif dans chaque terme du membre de droite, il est donc absolument nécessaire que F ou G soit nulle.

Montrons maintenant la contraposée de l'équivalence. Pour ce faire, supposons que M est non-moléculaire. Soient m_1 et m_2 deux telles M -structures non-isomorphes. Considérons l'espèce $F \neq 0$ engendrée par s_1 (c'est-à-dire toutes les structures obtenues par réétiquetage de la M -structure) et G , l'espèce formée de toutes les M -structures non isomorphes à s_1 . Alors puisque s_2 est une G -structure, nous avons forcément que $G \neq 0$ et donc, que $M = F + G$, où $F \neq 0$ et $G \neq 0$. ■

Remarque 1.5.1. *Pour deux espèces moléculaires M et N , on a que $M \cdot N$ et $M \circ N$ sont moléculaires.*

Nous savons que, dans la théorie des actions de groupes ensemblistes, pour un groupe G et un ensemble Y , l'action $G \times Y \rightarrow Y$ est transitive si $Y \neq 0$ et pour tout $x, y \in Y$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. Cette notion de transitivité d'action de groupe trouve son équivalent dans la théorie des espèces via les espèces moléculaires. En effet, il est facile de voir que M est moléculaire si et seulement si $M \neq 0$, $M = 0+0+\dots+M_n+0+\dots+0$ pour un entier n , et l'action $S[n] \times M[n] \rightarrow M[n]$ induite par le transport de structures est transitive.

Si on considère une espèce $F = F_0 + F_1 + \dots + F_n + \dots$ quelconque, on obtient en décomposant chacune des actions $S_n \times F[n] \rightarrow F[n]$, $n \geq 0$, en somme d'actions transitives, le résultat fondamental suivant :

Proposition 1.5.2. *Toute espèce de structures F est la somme de ses sous-espèces moléculaires :*

$$F = \sum_{M \subseteq F, M \text{ moléculaire}} M. \quad (1.8)$$

Preuve Soit une espèce de structures F . Décomposons chacune des actions $\sigma_n : S[n] \times F[n] \rightarrow F[n]$ en sommes finies disjointes $\sum_i \sigma_{i,n}$ d'actions transitives. Puisque chacune des $\sigma_{i,n}$ représente une espèce moléculaire $M_{\sigma_{i,n}}$, nous avons alors que

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n, \sigma_{i,n}: \text{action transitive de } S[n] \times F[n] \rightarrow F[n]} M_{\sigma_{i,n}} \\ &= \sum_{M \subseteq F, M \text{ moléculaire}} M. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.5.2. *La famille des espèces moléculaires, notée \mathcal{M} , est dénombrable et infinie à isomorphisme d'espèces près. De plus, il est possible d'explicitier la somme (1.8), car toute sous-espèce F_i de $F = F_0 + F_1 + \dots + F_n + \dots$ s'exprime de manière*

unique comme somme de sous-espèces moléculaires de F , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n \geq 0} F_n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{M \subseteq F, M \in \mathcal{M}_n} M, \end{aligned}$$

où \mathcal{M}_n désigne l'ensemble (fini) des espèces moléculaires sur les ensembles de cardinalité égale à n .

Exemple 1.5.3. Les premiers termes de la décomposition moléculaire de l'espèce \mathcal{G} des graphes simples sont donnés par

$$\mathcal{G} = 1 + X + 2E_2 + 2E_3 + 2XE_2 + 2E_4 + 2X^2E_2 + 2XE_3 + E_2(X^2) + 2E_2(E_2) + 2E_2^2 + \dots$$

La Figure 1.20 montre la correspondance entre les structures de \mathcal{G} et les espèces moléculaires pour $n \leq 4$.

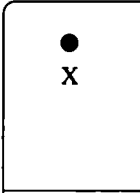
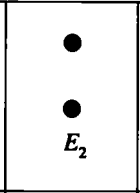
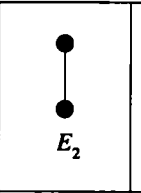
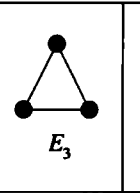
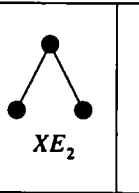
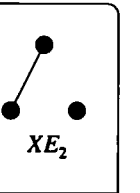
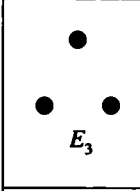
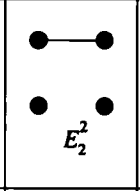
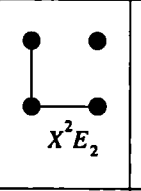
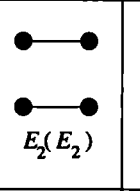
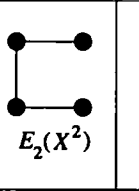
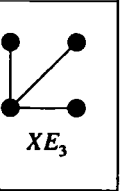
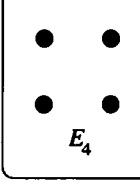
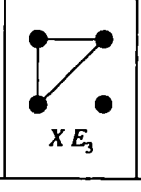
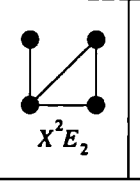
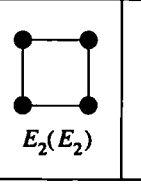
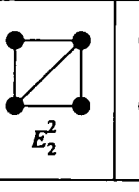
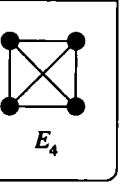
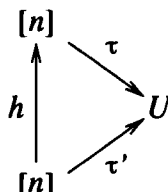
					
					
					

Figure 1.20 Correspondance entre les structures de \mathcal{G} et les espèces moléculaires pour $n \leq 4$.

Définition 1.5.2. Soit $H \leq S_n$. On définit l'espèce $\frac{X^n}{H}$ par $\frac{X^n}{H}[U] = \text{Bij}([n], U) / \sim_H$, où $\text{Bij}([n], U) = \{\tau : [n] \rightarrow U \mid \tau \text{ est bijective}\}$ et $\tau \sim_H \tau'$ si et seulement si $\exists h \in H$

tel que $\tau' = \tau \circ h$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :



De plus, les transports de structures sont définis par $\sigma \cdot [\tau] = [\sigma \circ \tau]$ (voir Figure 1.21) où $[\tau]$ désigne la classe de la bijection τ .

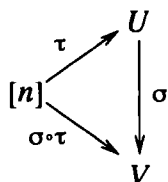


Figure 1.21 Transport de structures de l'espèce $\frac{X^n}{H}$.

Exemple 1.5.4. Considérons le sous-groupe cyclique $H = \langle (1, 2, 3, 4) \rangle$ de degré 4. On obtient alors que $\frac{X^4}{H} = \mathcal{C}_4$. La Figure 1.22 montre l'isomorphisme naturel entre ces deux espèces.

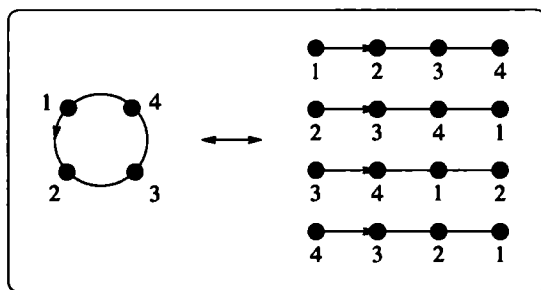


Figure 1.22 Isomorphisme naturel entre les espèces H_4 et $\frac{X^4}{H} = \mathcal{C}_4$.

Comme nous venons de le mentionner dans les lignes précédentes, la classification des espèces moléculaires est équivalente à la classification des actions transitives des groupes symétriques. Mais cette dernière classification est elle-même équivalente à la classifica-

tion des classes de conjugaison des sous-groupes des groupes symétriques. Mais pour établir ce résultat, il est nécessaire d'établir le lemme suivant.

Lemme 1.5.3. *Soit $\pi : F \rightarrow G$, un isomorphisme naturel entre les espèces F et G . Supposons que $s \in F[U]$ et $t = \pi_U(s) \in G[U]$. Alors $\text{Aut}(s) = \text{Aut}(t)$, où $\text{Aut}(\alpha)$ désigne le groupe des automorphismes de α .*

Preuve Nous avons par hypothèse que pour chaque ensemble fini U , les π_U sont des bijections $F[U] \xrightarrow{\sim} \pi_U G[U]$. Considérons, pour $s \in F[U]$, un automorphisme $\sigma : U \rightarrow U$ de s . Nous avons alors, par la naturalité de π , que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F[U] & \xrightarrow{\pi_U} & G[U] \\ F[\sigma] \downarrow & & \downarrow G[\sigma] \\ F[U] & \xrightarrow{\pi_U} & G[U] \end{array}$$

Montrons que $\text{Aut}(s) \leq \text{Aut}(t)$. En effet, si nous partons de $s \in F[U]$, nous trouvons que, d'un côté, on a $G[\sigma](\pi_U(s)) = F[\sigma](t) = \sigma \cdot t$. De l'autre, on a $\pi_U(F[\sigma](s)) = \pi_U(\sigma \cdot s) = \pi_U(s) = t$, puisque $\sigma \in \text{Aut}(s)$. Donc, nous avons $\sigma \cdot t = t$, c'est-à-dire $\text{Aut}(s) \leq \text{Aut}(t)$. Et en interchangeant les rôles de s et t , nous obtenons $\text{Aut}(t) \leq \text{Aut}(s)$. D'où la conclusion. ■

Théorème 1.5.4. *Toute espèce moléculaire $M = M(X)$ peut s'écrire sous la forme $M = \frac{X^n}{H}$, où n est la cardinalité (unique) des M -structures et $H = \text{stab}(s)$ est le stabilisateur d'une M -structure $s \in M[n]$ quelconque. C'est un sous-groupe de S_n . De plus, $\frac{X^n}{H} = \frac{X^m}{K} \Leftrightarrow n = m$ et H est conjugué à K dans S_n .*

Preuve Considérons une espèce moléculaire M de degré n et $s \in M[n]$. Posons $H = \text{stab}(s)$ et définissons l'isomorphisme d'espèce $\pi_U : M[n] \rightarrow \frac{X^n}{H}[U]$, où pour $t \in M[U]$, $\pi_U(t) = \beta H$ tel que $\beta : [n] \xrightarrow{\sim} U$ et $\beta \cdot s = t$. Notons que π_U ainsi défini ne dépend pas du choix de β : en effet, si on considère $\beta' : [n] \xrightarrow{\sim} U$ tel que $\beta' \cdot s = t$, alors on

a $(\beta^{-1} \circ \beta') \cdot s = \beta^{-1} \cdot (\beta' \cdot s) = \beta^{-1}(\beta \cdot s) = (\beta^{-1} \circ \beta) \cdot s = s$. Ainsi, $\beta^{-1} \circ \beta' \in \text{Stab}(s) = H$ et de plus, $\beta' \in \beta H$. Donc $\beta' H = \beta H$ et π_U est alors bien défini.

Montrons dans un premier temps que, pour le transport, le diagramme suivant est commutatif, où $w : U \xrightarrow{\sim} V$:

$$\begin{array}{ccc} M[U] & \xrightarrow{\pi_U} & \frac{X^n}{H}[U] \\ M[M] \downarrow & & \downarrow \frac{X^n}{H}[M] \\ M[V] & \xrightarrow{\pi_V} & \frac{X^m}{H}[V] \end{array}$$

Soit $t \in M[U]$. Sans perte de généralité, posons $t = \beta \cdot s$, pour une certaine bijection $\beta : [n] \xrightarrow{\sim} U$. Alors d'une part, nous avons que $\pi_U(t) = \beta H \in \frac{X^n}{H}[U]$ et $\frac{X^n}{H}[w](\beta H) = w(\beta H)$. D'autre part, $M[w](t) = w \cdot t = w \cdot (\beta \cdot s) = (w \circ \beta) \cdot s$, car $w \cdot (\beta \cdot s) = M[w](M[\beta](s)) = M[w \circ \beta](s)$. Et par associativité, nous avons donc $\pi_V(w \cdot t) = \pi_V((w \circ \beta) \cdot (s)) = (w \circ \beta)H = w(\beta H)$.

Montrons maintenant que π_U est bijectif. Soit $\beta H \in \frac{X^n}{H}[U]$ où $\beta : [n] \xrightarrow{\sim} U$. Alors, en prenant $t = \beta \cdot s$ (car M est moléculaire), on a évidemment que $\pi_U(\beta \cdot s) = \beta H$ et donc que π_U est surjective. Considérons maintenant deux M -structures t et t' sur U telles que $\pi_U(t) = \pi_U(t')$ et posons $t = \beta \cdot s$ et $t' = \beta' \cdot s$. On a alors que $\pi_U(\beta \cdot s) = \beta H = \beta' H = \pi_U(\beta' \cdot s)$. Donc $\beta^{-1} \circ \beta' H = H$, c'est-à-dire que $\beta^{-1} \circ \beta' \in H = \text{stab}(s)$. Et donc, $t' = \beta' \cdot s = \beta \cdot s = t$.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, supposons premièrement que $\frac{X^n}{H} = \frac{X^m}{K}$. On a alors directement que $m = n$ (sinon l'égalité est impossible). Supposons l'isomorphisme naturel suivant :

$$\pi : \frac{X^n}{H} \xrightarrow{\sim} \frac{X^n}{K}.$$

En particulier, on a une bijection $\frac{X^n}{H}[n] \xrightarrow{\sim}_{\pi[n]} \frac{X^n}{K}[n]$. Considérons la structure $s = H \in \frac{X^n}{H}[n]$. Posons $t = wK = \pi[n](s) = \pi[n](H)$. Par le lemme précédent, nous avons alors

que $\text{Aut}(s) = \text{Aut}(t)$. Or, $\text{Aut}(s) = \text{Aut}(H) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma H = H\}$ et

$$\begin{aligned} \text{Aut}(t) &= \text{Aut}(wK) \\ &= \{\sigma \in S_n \mid \sigma wK = wK\} \\ &= \{\sigma \in S_n \mid w^{-1}\sigma wK = K\} \\ &= \{\sigma \in S_n \mid w^{-1}\sigma w \in K\} \\ &= \{\sigma \in S_n \mid \sigma \in wKw^{-1}\}. \end{aligned}$$

Donc $H = wKw^{-1}$, c'est-à-dire que H et K sont conjugués.

Inversement, supposons que H et K sont conjugués dans S_n avec $H = wKw^{-1}$. On veut construire un isomorphisme naturel $\frac{X^n}{H} \xrightarrow{\sim} \frac{X^n}{K}$.

Pour ce faire, définissons, pour chaque ensemble fini U , $\frac{X^n}{H}[U] \rightarrow_{\pi_U} \frac{X^n}{K}[K]$, où $\pi_U(\beta H) = \beta wK$. Nous avons alors que les π_U sont ainsi bien définies, c'est-à-dire qu'elles sont indépendantes du choix de β . En effet, pour β' tel que $\beta'H = \beta H$, nous avons bien que $\beta'wK = \beta wK$, car $\beta'wKw^{-1} = \beta wKw^{-1}$. La bijectivité des π_U se vérifie en montrant que π_U^{-1} est définie par $\pi_U^{-1}(\beta K) = \beta w^{-1}H$:

$$\pi_U \circ \pi_U^{-1}(\beta K) = \pi_U(\beta w^{-1}H) = \beta w^{-1}wK = \beta K$$

et

$$\pi_U^{-1} \circ \pi_U(\beta H) = \pi_U^{-1}(\beta wK) = \beta w w^{-1}H = \beta H.$$

■

Exemple 1.5.5. 1) $E_n = \frac{X^n}{S_n}$, où E_n est l'espèce moléculaire des ensembles de cardinalité n , car le stabilisateur d'une E_n -structure s quelconque est le groupe symétrique S_n .

2) Si $H = \langle \rho \rangle$, où $\rho = (1, 2, \dots, n)$ (c'est-à-dire le groupe cyclique d'ordre n), alors $\frac{X^n}{\langle \rho \rangle} = C_n$.

Remarque 1.5.3. Il est possible d'étendre la notion d'espèces moléculaires aux espèces multisortes. Dans le cas des espèces à deux sortes, où les deux sortes sont notées par X

et T , on peut montrer que toute espèce moléculaire $M = M(X, T)$ peut être exprimée sous la forme $M(X, T) = \frac{X^n T^k}{H}$, où $H \leq S_n^X \times S_k^T$ est le stabilisateur d'une M -structure (arbitraire) sur $([n], [k])$ et où S_n^X désigne le groupe symétrique d'ordre n agissant sur les points de sortes X . Les exposants n et k sont alors appelés degré de M en X et T respectivement. La série indicatrice de cycle d'une espèce moléculaire $M(X, T) = \frac{X^n T^k}{H}$ est donnée par

$$Z_M(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \frac{1}{|M|} \sum_{h \in H} x_1^{c_1(h)} x_2^{c_2(h)} \dots t_1^{d_1(h)} t_2^{d_2(h)} \dots,$$

où $c_i(h)$ (resp. $d_i(h)$), pour $i \geq 1$, désigne le nombre de cycles de longueur i de la permutation sur les points de sorte X (resp. T) induite par $h \in H$, et où $|H|$ désigne la cardinalité de H .

CHAPITRE II

OPÉRATEURS COMBINATOIRES DIFFÉRENTIELS

2.1 Produit cartésien et formes combinatoires bilinéaires

Dans cette section, nous introduisons les concepts de produit cartésien d'espèces de structures (2.1.1) et de formes combinatoires bilinéaires (2.1.2). Ces deux opérations, ainsi que leurs généralisations qui seront introduites dans les sections subséquentes, seront utilisées pour définir différents concepts à venir dans ce chapitre et le suivant.

2.1.1 Produit cartésien d'espèces de structures

Définition 2.1.1. *Pour deux espèces de structures F et G , le **produit cartésien** de F et G est une espèce, notée $F \times G$, telle que pour tout ensemble fini U , une $(F \times G)$ -structure sur U est un couple $s = (f, g)$ où*

- 1- f est une F -structure sur U ;
- 2- g est une G -structure sur U .

En d'autres termes, on superpose une G -structure sur une F -structure, c'est-à-dire :

$$(F \times G)[U] = F[U] \times G[U] \text{ (produit cartésien).}$$

Le transport le long d'une bijection $\sigma : U \rightarrow V$ s'effectue en posant, pour $s = (f, g) \in (F \times G)[U]$,

$$(F \times G)[\sigma](s) = (F[\sigma](f), G[\sigma](g)).$$

La représentation générale d'une $(F \times G)$ -structure peut être vue comme dans la Figure 2.1.

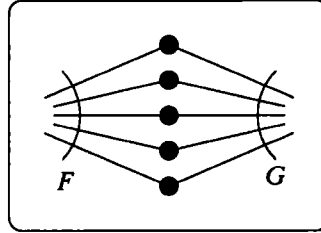


Figure 2.1 Représentation générale d'une $(F \times G)$ -structure.

Remarque 2.1.1. *i) L'élément neutre pour le produit cartésien est l'espèce E des ensembles, c'est-à-dire*

$$E \times F = F \times E = F.$$

ii) Le dénombrement étiqueté des $F \times G$ -structures satisfait à

$$|(F \times G)[n]| = |F[n]| \cdot |G[n]|, \quad n \geq 0.$$

iii) L'ensemble sous-jacent de chacune des structures f et g d'une $(F \times G)$ -structure sur U est U en totalité, contrairement à une $(f \cdot g)$ -structure sur U , où f et g sont alors des structures ayant comme ensembles sous-jacents les sous-ensembles U_1 et U_2 respectivement tels que U_1 et U_2 sont complémentaires dans U .

Exemple 2.1.1. *Montrons que pour $\mathcal{P}^{[k]}[U] = \{V \mid V \subseteq U, |V| = k\}$, $k \geq 0$, on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{[m]} \times \mathcal{P}^{[n]} &= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} E_{m-k} \cdot E_k \cdot E_{n-k} \cdot E \\ &= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} E_{m-k} \cdot E_{n-k} \cdot \mathcal{P}^{[k]}. \end{aligned}$$

En effet, on remarque premièrement que $\mathcal{P}^{[m]}[U] = E_m \cdot E$. Si on superpose une $\mathcal{P}^{[n]}$ -structure à une $(E_m \cdot E)$ -structure, on obtient alors que le nombre d'éléments communs de la $\mathcal{P}^{[m]}$ -structure et de la $\mathcal{P}^{[n]}$ -structure (c'est-à-dire les points à l'intérieur du pointillé de la figure 2.2) varie entre 0 et k , où $k = \min(m, n)$.

Ainsi, pour un certain $k \in 0 \dots \min(m, n)$, nous avons que la représentation de $\mathcal{P}^{[m]} \times \mathcal{P}^{[n]}$ peut être vue comme à la Figure 2.2.

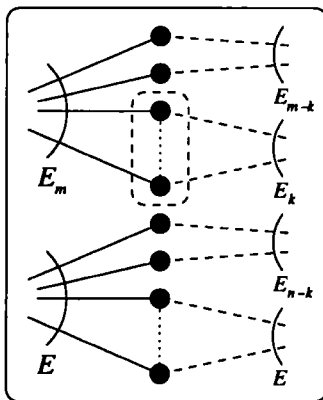


Figure 2.2 Une $(\mathcal{P}^{[m]} \times \mathcal{P}^{[n]})$ -structure.

On voit alors bien que l'on a l'égalité

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{[m]} \times \mathcal{P}^{[n]} &= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} E_{m-k} \cdot E_k \cdot E_{n-k} \cdot E \\ &= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} E_{m-k} \cdot E_{n-k} \cdot \mathcal{P}^{[k]}. \end{aligned}$$

Et donc, en toute généralité, on obtient l'égalité recherchée, qui traite tous les cas possibles. ■

Les produits << coefficient à coefficient >> de deux séries génératrices et indicatrices, appelés **produits de Hadamard** de deux telles séries, sont définis de la façon suivante.

Définition 2.1.2. i) Le **produit de Hadamard** $f \times g$ de deux séries génératrices

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}$$

est défini par

$$(f \times g)(x) = \left(\sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n \geq 0} f_n g_n \frac{x^n}{n!}.$$

ii) *Le produit de Hadamard $f \times g$ de deux séries indicatrices*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\text{aut}(\mathbf{n})} \quad \text{et} \quad g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} g_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\text{aut}(\mathbf{n})},$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, \dots)$, $\mathbf{x}^{\mathbf{n}} = (x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, x_3^{n_3}, \dots)$, $\text{aut}(\mathbf{n}) = 1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \dots$, $f_{\mathbf{n}} = f_{n_1, n_2, n_3, \dots}$ et $g_{\mathbf{n}} = g_{n_1, n_2, n_3, \dots}$, est défini par

$$(f \times g)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}} g_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\text{aut}(\mathbf{n})}.$$

Ces dernières définitions nous permettent maintenant de décrire la compatibilité du produit cartésien avec le passage aux séries :

Proposition 2.1.1. *Soient F et G deux espèces de structures. On a les égalités suivantes :*

- a) $(F \times G)(x) = F(x) \times G(x)$;
- b) $(\widetilde{F \times G})(x) = (Z_F \times Z_G)(x, x^2, x^3, \dots)$;
- c) $Z_{F \times G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \times Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Preuve Montrons c). Par définition, nous avons que

$$Z_{F \times G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix}(F \times G)[\sigma] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots$$

Pour voir que

$$Z_{F \times G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \times Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots),$$

il suffit de montrer que nous avons

$$\text{fix}(F \times G)[\sigma] = \text{fix} F[\sigma] \cdot \text{fix} G[\sigma].$$

C'est-à-dire

$$\text{Fix}(F \times G)[\sigma] = \text{Fix} F[\sigma] \times \text{Fix} G[\sigma].$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \text{Fix } (F \times G)[\sigma] &= \{(s, t) \mid (F \times G)[\sigma](s, t) = (s, t)\} \\
 &= \{(s, t) \mid (F[\sigma](s), G[\sigma](t)) = (s, t)\} \\
 &= \{(s, t) \mid F[\sigma](s) = s \text{ et } G[\sigma](t) = t\} \\
 &= \{(s, t) \mid s \in \text{Fix } F[\sigma] \text{ et } t \in \text{Fix } G[\sigma]\} \\
 &= \text{Fix } F[\sigma] \times \text{Fix } G[\sigma].
 \end{aligned}$$

Donc, nous avons que

$$\begin{aligned}
 Z_{F \times G}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\text{fix } F[\sigma]) \cdot (\text{fix } G[\sigma]) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \\
 &= Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \times Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots).
 \end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.2. *Par un raisonnement analogue à celui des espèces à une sorte, on peut montrer que pour deux espèces $F(X, T)$ et $G(X, T)$, leur produit cartésien satisfait, en posant $H = H(X, T) = F(X, T) \times G(X, T)$, l'équation*

$$\begin{aligned}
 Z_H(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) &= Z_{F(X, T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) \times Z_{G(X, T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) \\
 &= \sum \frac{1}{m!n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m, \tau \in \mathcal{S}_n} \text{fix } F[\sigma, \tau] \text{fix } G[\sigma, \tau] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots
 \end{aligned}$$

Le produit cartésien d'espèces est de plus associatif, commutatif et distributif sur la somme, c'est-à-dire

$$F \times (G + H) = F \times G + F \times H.$$

De plus, il est aisé de démontrer que nous avons

$$(F \times G)^\bullet = F^\bullet \times G = F \times G^\bullet.$$

2.1.2 Formes combinatoires bilinéaires

Définition 2.1.3. Pour deux espèces de structures $F = F(X)$ et $G = G(X)$, on définit la forme combinatoire bilinéaire de F et G , notée $\langle F, G \rangle$, par

$$\langle F, G \rangle = F(X) \times G(X)|_{X:=1},$$

c'est-à-dire l'ensemble des types de $F \times G$ -structures.

Exemple 2.1.2. La Figure 2.3 montre la différence entre une $F \times G$ -structure (Figure 2.3 a)) et une $\langle F, G \rangle$ -structure (Figure 2.3 b)), la $\langle F, G \rangle$ -structure étant une $F \times G$ -structure désétiquetée (que l'on représente en mettant des points blancs).

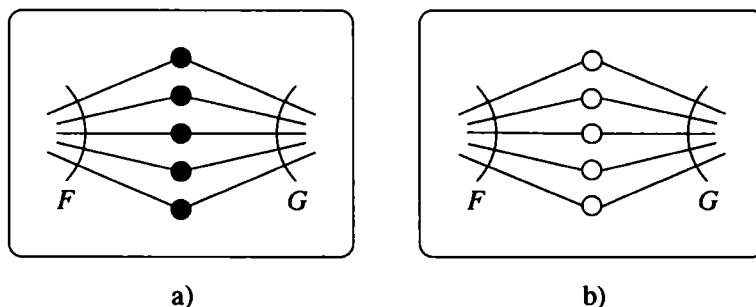


Figure 2.3 Différence entre une $F \times G$ -structure (a)) et une $\langle F, G \rangle$ -structure (b)).

Remarque 2.1.3. i) Cette définition n'a de sens que si l'ensemble des types d'isomorphie des $F \times G$ -structures est un ensemble fini. Par exemple, $\langle E, E \rangle$ n'est pas un ensemble fini car

$$(E \times E)|_{X:=1} = \{\emptyset, \circ, \{\circ, \circ\}, \{\circ, \circ, \circ\}, \dots\}.$$

ii) Si F ou G est polynomiale, alors $F \times G$ le sera aussi, et donc $F(X) \times G(X)|_{X:=1}$ sera fini.

Exemple 2.1.3. Pour $F = E_{\text{pair}}$ et $G = E_{\text{imp}}$, nous avons que ces deux espèces ne sont pas polynomiales. Cependant, $F \times G = 0$ est polynomiale. Plus généralement, pour

$$F = \sum_{i \geq 0} F_{m_i}, \quad M = \{m_0, m_1, m_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$$

et

$$G = \sum_{i \geq 0} G_{n_i}, \quad N = \{n_0, n_1, n_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N},$$

tel que $M \cap N$ est fini, nous avons que $F \times G$ est polynomiale et donc que $\langle F, G \rangle$ existe.

Remarque 2.1.4. Le terme bilinéarité est dû au fait que pour des espèces F, G et H et $a \in \mathbb{N}$, nous avons les propriétés suivantes :

- a) $\langle F + G, H \rangle = \langle F, H \rangle + \langle G, H \rangle$;
- b) $\langle F, G + H \rangle = \langle F, G \rangle + \langle F, H \rangle$;
- c) $\langle aF, G \rangle = a \langle F, G \rangle = \langle F, aG \rangle$;
- d) $\langle F, G \rangle = \langle G, F \rangle$.

Pour des espèces à deux sortes $F(X, T)$ et $G(X, T)$, on peut définir les formes bilinéaires combinatoires << partielles >> suivantes :

$$\begin{aligned} \langle F(X, T), G(X, T) \rangle_X &= F(X, T) \times G(X, T)|_{T:=1}, \\ \langle F(X, T), G(X, T) \rangle_T &= F(X, T) \times G(X, T)|_{X:=1}, \\ \langle F(X, T), G(X, T) \rangle &= F(X, T) \times G(X, T)|_{X:=1; T:=1}. \end{aligned}$$

La Figure 2.4 illustre les différentes structures associées à ces formes bilinéaires, où $X = \bullet$ et $T = \blacksquare$.

2.2 Opérateur combinatoire différentiel $\frac{d}{dX}$ et propriétés

Étant donné une espèce de structures F , on aimerait que l'égalité $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ soit respectée, où $F'(x)$ et $F(x)$ seraient les séries génératrices des espèces F' et F respectivement. C'est-à-dire que l'on voudrait que le nombre de F' -structures sur un ensemble fini soit égal au nombre de F -structures sur l'ensemble U augmenté d'un sommet :

$$|F'[n]| = |F[n + 1]|.$$

Nous avons donc la définition suivante :

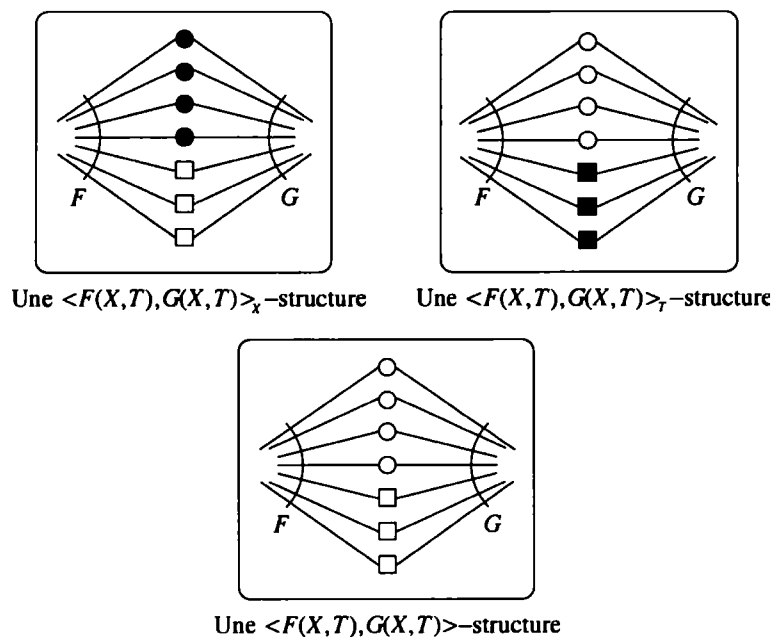


Figure 2.4 Trois formes bilinéaires combinatoires << partielles >> .

Définition 2.2.1. Soit F , une espèce de structures sur un ensemble fini U . L'espèce F' , aussi notée $\frac{d}{dX}F(X)$ (ou encore DF), que l'on appelle la **dérivée** de F , est définie comme suit : une F' -structure sur U est une F -structure sur $U^+ = U \cup \{*\}$, où $*$ = $*_U$ est un point choisi à l'extérieur de U : c'est-à-dire $F'[U] = F[U^+]$.

Le transport le long d'une bijection $\sigma : U \rightarrow V$ s'effectue en posant pour $s \in DF[U]$

$$DF[\sigma](s) = F[\sigma^+](s),$$

où $\sigma^+ : U + \{*\} \rightarrow V + \{*\}$ est l'extension canonique de F obtenue en posant

$$\sigma^+(u) = \sigma(u) \text{ si } u \in U,$$

$$\sigma^+(*) = *.$$

La représentation générale d'une F' -structure peut être vue comme à la Figure 2.5.

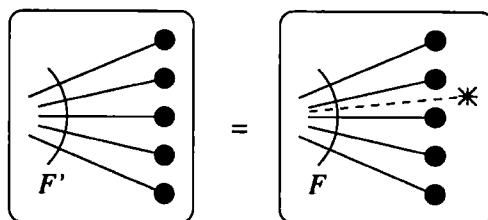


Figure 2.5 Représentation générale d'une F' -structure.

Exemple 2.2.1. *Considérons une A -structure sur un ensemble fini U quelconque. La Figure 2.6 montre alors que $\frac{d}{dX}A = \mathcal{F}$, où \mathcal{F} désigne l'espèce des forêts d'arborescences.*

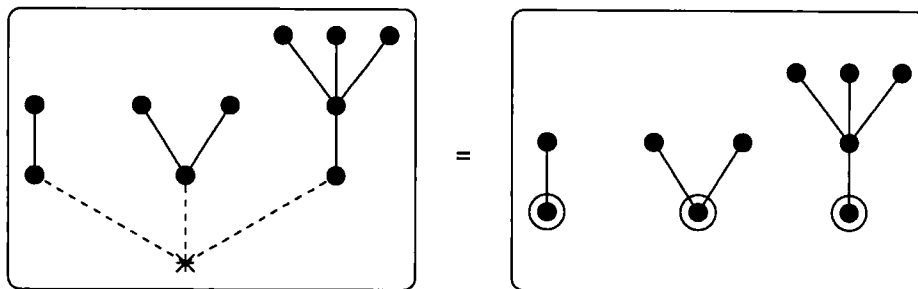


Figure 2.6 $\frac{d}{dX}A = \mathcal{F}$.

Il est possible d'appliquer successivement l'opérateur différentiel $\frac{d}{dX}$. Pour ce faire, on pose, comme pour le calcul différentiel classique,

$$F^{(0)} = F \text{ et } F^{(k)} = \frac{d}{dX}(F^{(k-1)}), \quad k \geq 1,$$

où $F^{(k)}$ désigne la k -ième dérivée de F . Il suffit pour cela d'ajouter successivement k points supplémentaires $*_1, *_2, \dots, *_k$ distincts à l'ensemble sous-jacent. Par exemple, la Figure 2.7 montre que $\mathcal{C}'' = D(\mathcal{C}') = L^2$.

Proposition 2.2.1. *Soient F et G deux espèces de structures. On a alors les égalités suivantes :*

- a) $\frac{d}{dX}(nF) = n\frac{d}{dX}F, \quad n \in \mathbb{N};$
- b) $\frac{d}{dX}(F + G) = \frac{d}{dX}F + \frac{d}{dX}G;$

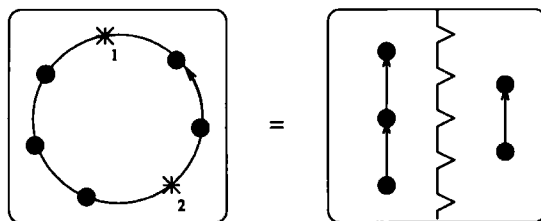


Figure 2.7 $C'' = L^2$

c) $\frac{d}{dX}(F \cdot G) = (\frac{d}{dX}F) \cdot G + F \cdot (\frac{d}{dX}G)$;

d) $\frac{d}{dX}(F \circ G) = ((\frac{d}{dX}F) \circ G) \cdot \frac{d}{dX}G$, où l'espèce G est telle que $G[\emptyset] = \emptyset$.

Preuve Montrons (d). Il suffit d'examiner la Figure 2.8. ■

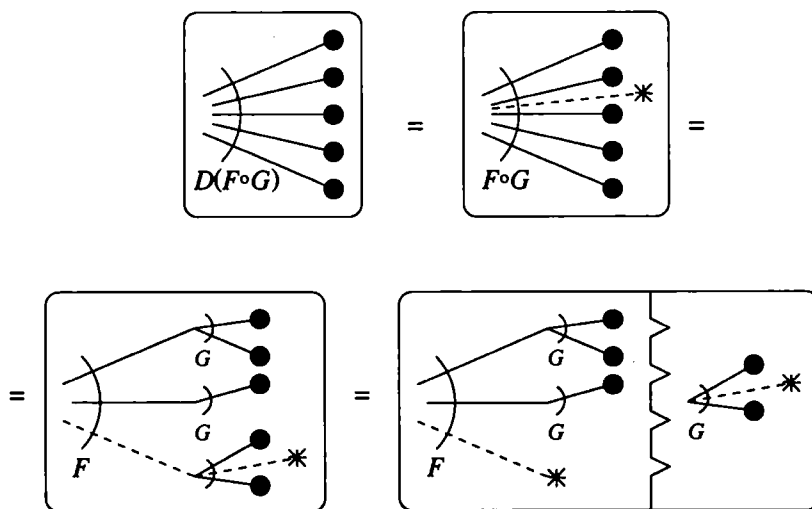


Figure 2.8 Preuve de la Proposition 2.2.1 d).

Exemple 2.2.2. Soient F et H deux espèces de structures telles que $H[\emptyset] = \emptyset$. On a alors que

$$E(H) \cdot (F' + H' \cdot F) = D(E(H) \cdot F),$$

où E désigne l'espèce des ensembles. En effet, la Figure 2.9 montre que l'égalité est bien respectée (Noter que $DE = E$).

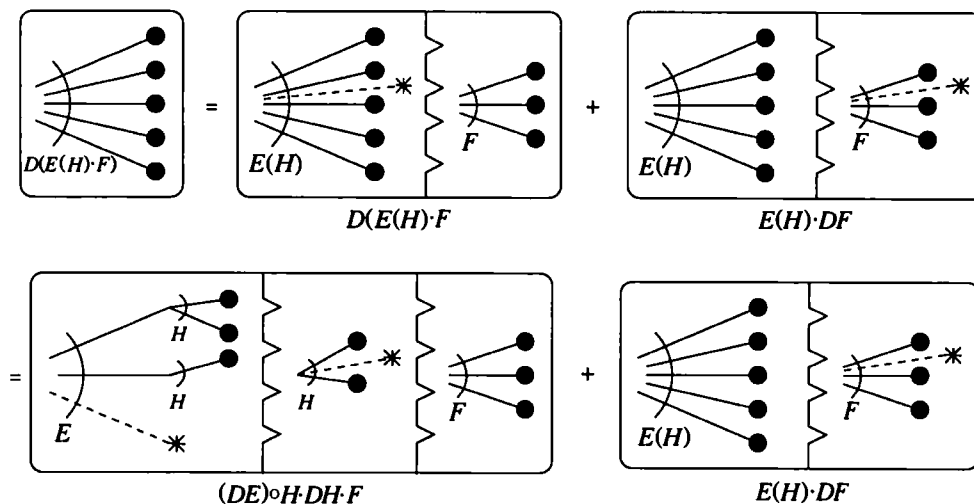


Figure 2.9 $E(H) \cdot (F' + H' \cdot F) = D(E(H) \cdot F)$.

Remarque 2.2.1. Les espèces $(F \times G)'$, $F' \times G$ et $F \times G'$ ne sont pas, en général, isomorphes.

Le lien entre les opérations de pointage et de dérivation est décrit par l'équation combinatoire de la proposition suivante.

Proposition 2.2.2. Soit F une espèce de structure. On a alors que

$$F^\bullet = X \cdot F'$$

où X désigne l'espèce des singletons.

Preuve On peut s'en convaincre facilement en regardant la Figure 2.10. ■

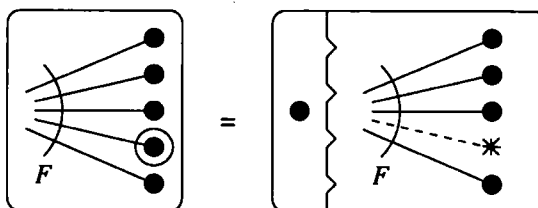


Figure 2.10 $F^\bullet = X \cdot F'$.

De cette dernière proposition, nous pouvons déduire la propriété de pointage en chaîne :

$$(F \circ G)^\bullet = (F' \circ G) \cdot G^\bullet.$$

Définition 2.2.2. Si $F = F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ est une espèce de structures à k sortes, alors on définit la **dérivée partielle** de F par rapport à la sorte i par

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)[U] = F[U_1, U_2, \dots, U_{i-1}, U_i + \{\ast_i\}, U_{i+1}, \dots, U_k],$$

et le **pointage** de F par rapport à la sorte X_i (ou la $i^{\text{ième}}$ sorte) par

$$F^{\ast_i} = X_i \frac{\partial}{\partial X_i} F.$$

Proposition 2.2.3. Pour $F = F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ et $G = G(X_1, X_2, \dots, X_k)$, nous avons

- a) $\frac{\partial}{\partial X_i}(F + G) = \frac{\partial F}{\partial X_i} + \frac{\partial G}{\partial X_i}$;
- b) $\frac{\partial}{\partial X_i}(F \cdot G) = \left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right) \cdot G + F \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial X_i}\right)$;
- c) $\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial X_j \partial X_i}$.

Preuve Montrons c)

Le cas $i = j$ étant trivial, regardons le cas $i \neq j$. Nous avons alors successivement, pour $[U] = [U_1, U_2, \dots, U_k]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}[U] &= \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{\partial F}{\partial X_j} \right)[U] \\ &= \frac{\partial}{\partial X_i} F[U_1, U_2, \dots, U_{j-1}, U_j + \{\ast_1\}, U_{j+1}, \dots, U_k] \\ &= F[U_1, \dots, U_{i-1}, U_i + \{\ast_2\}, U_{i+1}, \dots, U_{j-1}, U_j + \{\ast_1\}, U_{j+1}, \dots, U_k] \\ &= \frac{\partial}{\partial X_j} F[U_1, \dots, U_{i-1}, U_i + \{\ast_2\}, U_{i+1}, \dots, U_k] \\ &= \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right)[U] \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial X_j \partial X_i}[U]. \end{aligned}$$

■

La proposition suivante est une généralisation de la loi de dérivation en chaîne des espèces unisortes (proposition 2.2.1).

Proposition 2.2.4. Soient les espèces $F = F(Y_1, \dots, Y_m)$ et $G_j = G_j(X_1, \dots, X_k)$, $j = 1, \dots, m$. Alors

$$\frac{\partial}{\partial X_i} F(G_1, G_2, \dots, G_m) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial Y_j}(G_1, G_2, \dots, G_m) \cdot \frac{\partial}{\partial X_i} G_j.$$

Preuve En effet, lorsque l'on dérive $F(G_1, G_2, \dots, G_m)$ par rapport à X_i , on ajoute un sommet virtuel de sorte i à l'une des G_j -structures, $1 \leq j \leq m$ (voir Figure 2.11). Puisque j est arbitraire, la Figure 2.12 nous montre alors qu'il suffit de sommer sur j pour établir le résultat. ■

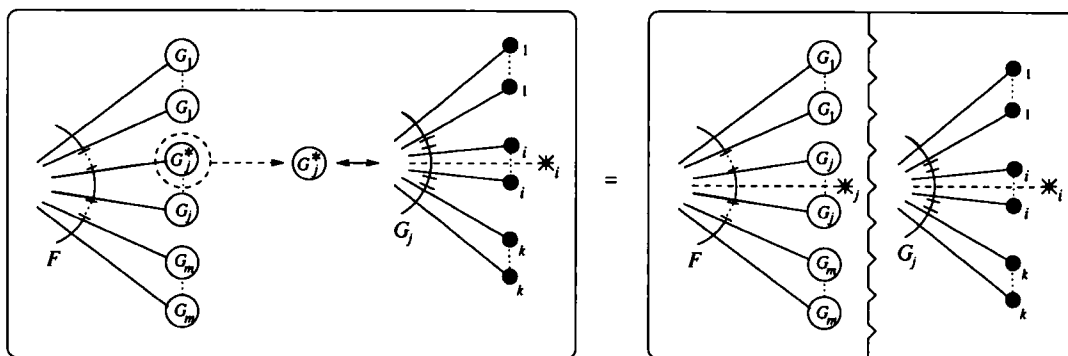


Figure 2.11 Représentation d'une $\frac{\partial}{\partial X_i} F(G_1, G_2, \dots, G_m)$ -structure.

Revenons aux espèces à une sorte. Les séries associées aux espèces $F(X)$ et $F'(X)$ sont reliées de la façon suivante :

Proposition 2.2.5. Soit $F(X)$ une espèce de structures. On a alors :

- $F'(x) = \frac{d}{dx} F(x)$;
- $\widetilde{F}'(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} Z_F \right) (x, x^2, x^3, \dots)$;
- $Z_{F'}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} Z_F \right) (x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Preuve Montrons c)

On a par définition que $Z_{F'}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix} F'[\sigma] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots$

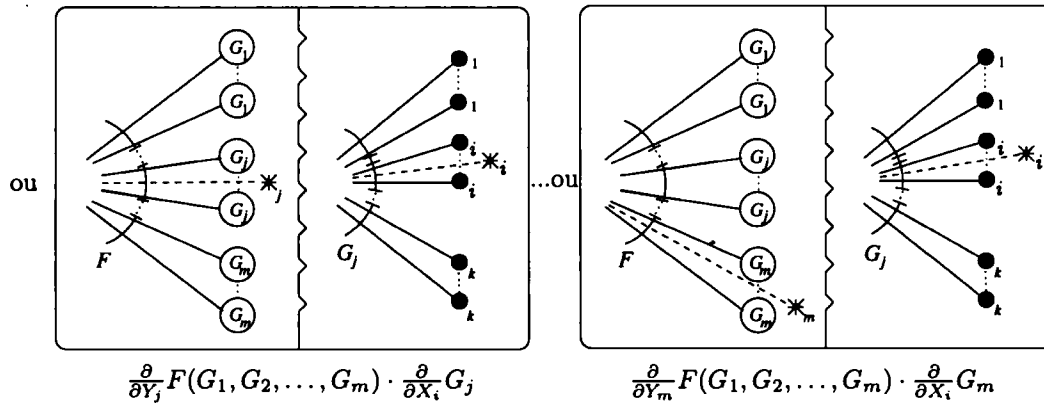
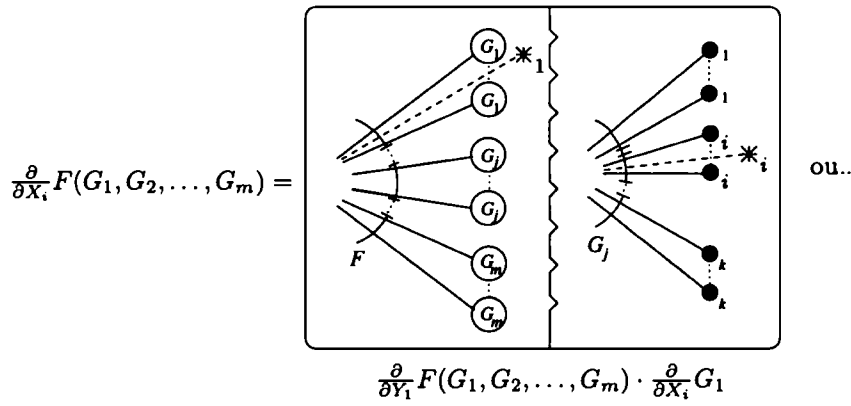


Figure 2.12 $\frac{\partial}{\partial X_1} F(G_1, G_2, \dots, G_m) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial Y_j} (G_1, G_2, \dots, G_m) \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} G_j.$

Or,

$$\begin{aligned}
 \text{fix} F'[\sigma] &= |\{s \in F'[n] \mid F'[\sigma](s) = s\}| \\
 &= |\{s \in F[n + *] \mid F[\sigma + 1_*](s) = s\}| \\
 &= \text{fix} F[\sigma + 1_*] \\
 &= f_{s_1+1, s_2, s_3, \dots}
 \end{aligned}$$

où (s_1, s_2, s_3, \dots) est le type cyclique de la permutation σ .

On obtient donc que

$$\begin{aligned} Z_{F'}(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{s_1, s_2, \dots} f_{s_1+1, s_2, s_3, \dots} \frac{x_1^{s_1} x_2^{s_2}, \dots}{1^{s_1} s_1! 2^{s_2} s_2! \dots} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{s_1, s_2, \dots} f_{s_1, s_2, s_3, \dots} \frac{x_1^{s_1} x_2^{s_2}, \dots}{1^{s_1} s_1! 2^{s_2} s_2! \dots} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F(x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

■

La proposition suivante est fondamentale : elle relie la dérivation combinatoire au produit cartésien à deux sortes ainsi qu'au passage au type selon une sorte.

Proposition 2.2.6. *La dérivée d'une espèce de structures $F(X)$ peut être exprimée comme*

$$\frac{d}{dX} F(X) = (E(X) \cdot T) \times F(X + T)|_{T:=1},$$

où E désigne l'espèce des ensembles.

Preuve En effet nous pouvons, avec la convention habituelle $X = \bullet$ et $T = \blacksquare$, illustrer une $(E(X) \cdot T) \times F(X + T)$ -structure comme à la figure 2.13.

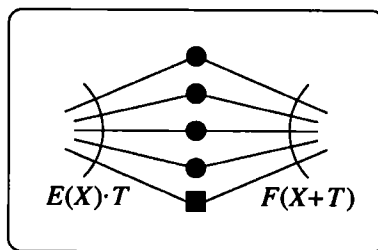


Figure 2.13 Une $(E(X) \cdot T) \times F(X + T)$ -structure.

En désétiquetant les éléments de sorte T (voir Figure 2.14), la Figure 2.15 montre alors l'isomorphisme entre une $\frac{d}{dX} F(X)$ -structure et une $(E(X) \cdot T) \times F(X + T)|_{T:=1}$ -structure. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'égalité est aussi valable au niveau des transports de structures.

■

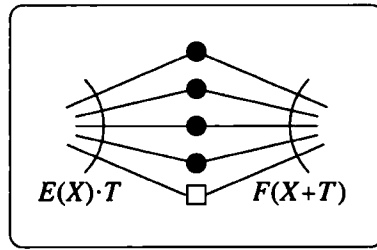


Figure 2.14 Une $(E(X) \cdot T) \times F(X + T)|_{T:=1}$ -structure.

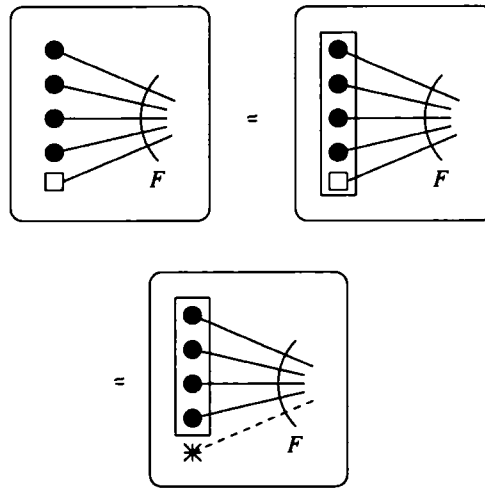


Figure 2.15 $\frac{d}{dX} F(X) \simeq (E(X) \cdot T) \times F(X + T)|_{T:=1}$.

Voici maintenant un résultat reliant à la fois la dérivation combinatoire et la multiplication par X .

Théorème 2.2.7. *Pour deux espèces de structures F et G , nous avons*

$$\langle DF, G \rangle = \langle F, X \cdot G \rangle .$$

Preuve En effet, pour $X = \bullet$ et $T = \blacksquare$, nous avons que

$$\langle DF, G \rangle = DF \times G|_{X:=1} \text{ (Figure 2.16)}$$

et

$$\langle F, X \cdot G \rangle = F \times (X \cdot G)|_{X:=1} \text{ (Figure 2.17),}$$

où, comme on peut le constater, nous avons

$$DF \times G|_{X:=1} \simeq F \times (X \cdot G)|_{X:=1}$$

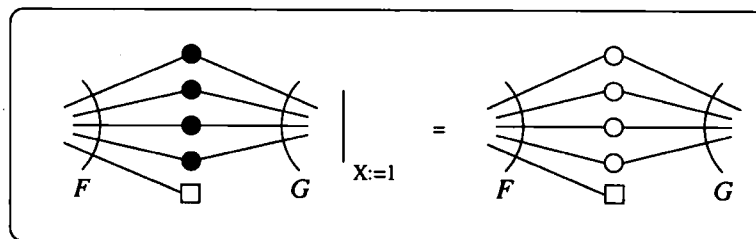


Figure 2.16 $\langle DF, G \rangle = DF \times G|_{X:=1}$.

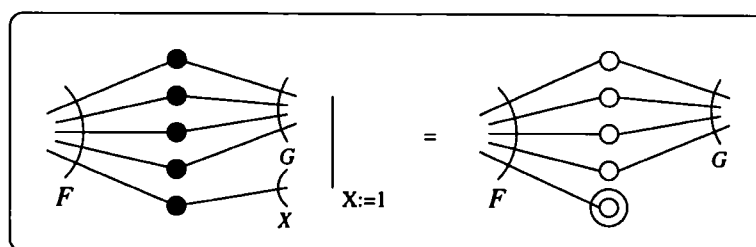


Figure 2.17 $\langle F, X \cdot G \rangle = F \times (X \cdot G)|_{X:=1}$.

Remarque 2.2.2. En algèbre linéaire, si T est un opérateur linéaire et si on a pour tout vecteurs \vec{x} et \vec{y} que $\langle T\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, T^*\vec{y} \rangle$, alors l'opérateur T^* est appelé adjoint à droite de T . On peut donc dire, par analogie, que l'opérateur de dérivation combinatoire D est adjoint à gauche de l'opérateur de multiplication par X (ou que l'opérateur de multiplication par X est adjoint à droite de D).

2.3 Opérateurs combinatoires différentiels purs $G(\frac{d}{dX})$ et propriétés

Nous présentons dans cette section une nouvelle catégorie d'opérateurs combinatoires différentiels; les opérateurs combinatoires différentiels purs. Ces opérateurs sont en quelque sorte un prémisses à ceux du chapitre suivant, qui portera sur une généralisation de ces opérateurs combinatoires différentiels purs.

Définition 2.3.1. Soient $F(X, T)$ et $G(X, T)$, deux espèces de structures à deux sortes. Le **produit cartésien partiel** $F(X, T) \times_T G(X, T)$ par rapport à la sorte T est défini comme suit : Une $F(X, T) \times_T G(X, T)$ -structure s sur un multiensemble $[U, V]$ est de la forme $s = (s_1, s_2, U_1, U_2, V)$, où $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $U_1 \cup U_2 = U$, et où s_1 est une F -structure sur $[U_1, V]$ et s_2 est une G -structure sur $[U_2, V]$.

Pour $U = U_1 \cup U_2$ et $U' = U'_1 \cup U'_2$, le transport de structures se fait le long de bijections de la forme

$$\beta : [U, V] \xrightarrow{\sim} [U', V'],$$

où $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est telle que $\beta_1 : U_1 \xrightarrow{\sim} U'_1$, $\beta_2 : U_2 \xrightarrow{\sim} U'_2$, $\beta_3 : V \xrightarrow{\sim} V'$ et $\beta \cdot (s_1, s_2, U_1, U_2, V) = (s'_1, s'_2, U'_1, U'_2, V')$ avec $s'_1 = F[\beta_1, \beta_3](s_1)$ et $s'_2 = G[\beta_2, \beta_3](s_2)$.

La forme générale d'une telle $F(X, T) \times_T G(X, T)$ -structure s peut être vue comme dans la Figure 2.18.

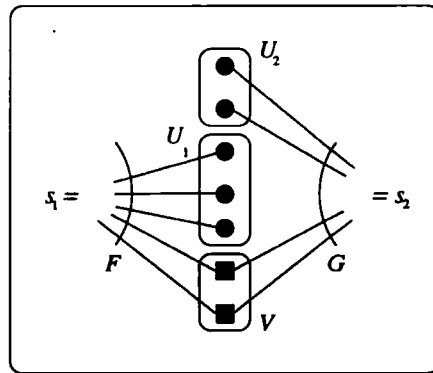


Figure 2.18 Forme générale d'une $F(X, T) \times_T G(X, T)$ -structure.

Remarque 2.3.1. Le produit cartésien partiel généralise à la fois le produit standard et le produit cartésien d'espèces de structures :

1) Si $F(X, T) = F(T)$ et $G(X, T) = G(T)$, alors

$$F(X, T) \times_T G(X, T) = F(T) \times G(T),$$

c'est-à-dire le produit cartésien d'espèces à une seule sorte. Pour le voir, il suffit d'éliminer les points de sorte X dans la Figure 2.18 .

2) Si $F(X, T) = F(X)$ et $G(X, T) = G(X)$, alors

$$F(X, T) \times_T G(X, T) = F(X) \cdot G(X),$$

c'est-à-dire le produit standard d'espèces à une seule sorte. Pour le voir, il suffit d'éliminer les points de sorte T dans la Figure 2.18 .

En s'inspirant de la proposition 2.2.6 reliant la dérivation combinatoire au produit cartésien et au passage au type selon une sorte, on pose la définition suivante.

Définition 2.3.2. *On définit l'opérateur différentiel pur $G(\frac{d}{dX})$ (aussi appelé la G -dérivation) en posant, pour tout espèce F ,*

$$G\left(\frac{d}{dX}\right)F(X) = (E(X) \cdot G(T)) \times F(X + T)|_{T:=1},$$

où de manière équivalente,

$$G\left(\frac{d}{dX}\right)F(X) = G(T) \times_T F(X + T)|_{T:=1}.$$

Remarque 2.3.2. 1) *Nous devons cependant noter que pour que cette définition ait du sens, il faut supposer que pour chaque ensemble fini U , $G(T) \times_T F(X + T)|_{T:=1}[U]$ est fini.*

2) *Le qualificatif «pur» est choisi pour distinguer ces opérateurs des opérateurs plus généraux $G(X, \frac{d}{dX})$ qui seront définis au chapitre 3.*

La Figure 2.19 explicite l'équivalence des deux définitions de la G -dérivée de F .

En particulier, nous pouvons illustrer une $\mathcal{C}_5(\frac{d}{dX})F(X)$ -structure sur $\{a, b, c, d\}$ comme à la Figure 2.20.

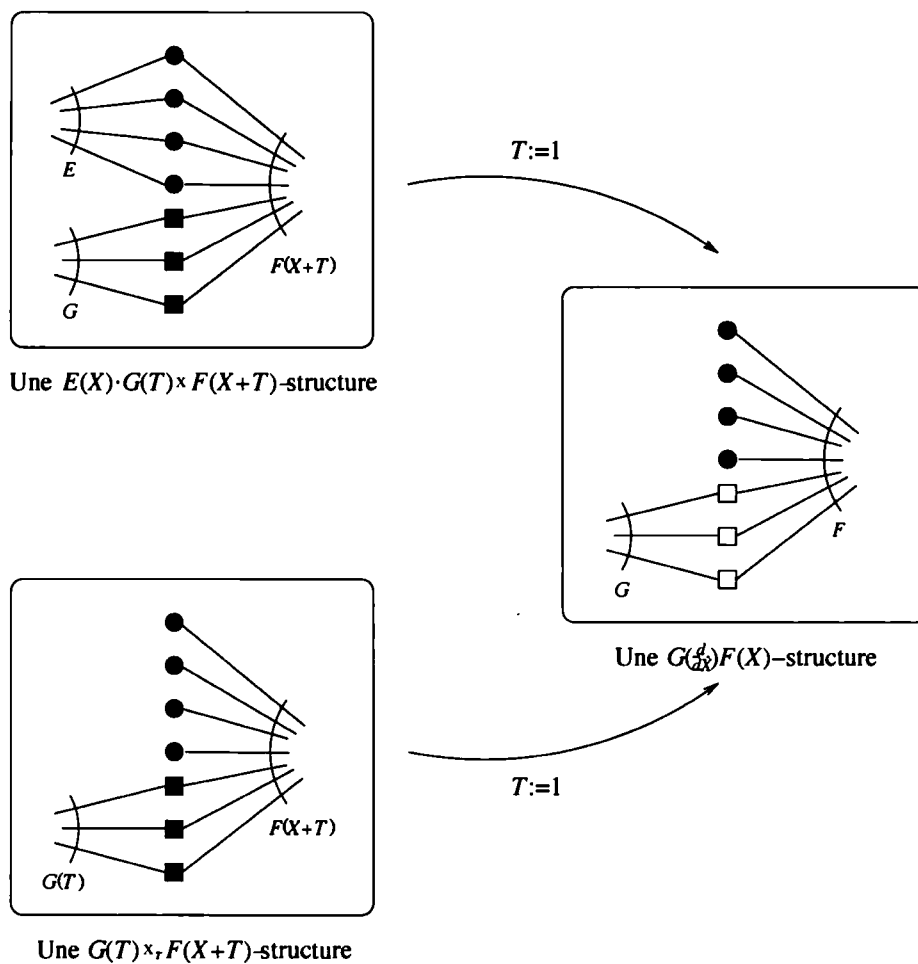


Figure 2.19 Équivalence entre les deux définitions de la G -dérivation de F .

Exemples 2.3.1. 1) Opérateur de translation. On a $E\left(\frac{d}{dX}\right)F(X) = F(X+1)$.

En effet,

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{d}{dX}\right)F(X) &= E(X)E(T) \times F(X+T)|_{T:=1} \\
 &= E(X+T) \times F(X+T)|_{T:=1} \\
 &= F(X+T)|_{T:=1} \\
 &= F(X+1).
 \end{aligned}$$

Plus généralement, nous avons

$$E^n\left(\frac{d}{dX}\right)F(X) = F(X+n),$$

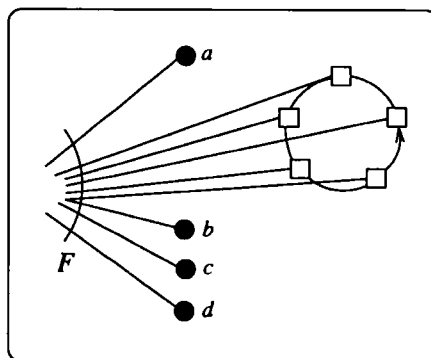


Figure 2.20 Une $\mathcal{C}_5(\frac{d}{dX})F(X)$ -structure sur $\{a, b, c, d\}$.

car

$$E^n\left(\frac{d}{dX}\right)F(X) = E(X)E^n(T) \times F(X+T)|_{T:=1},$$

où $E^n(T) = E(T) \cdot \dots \cdot E(T) = E(T+T+\dots+T) = E(nT)$. Donc nous obtenons

$$\begin{aligned} E^n\left(\frac{d}{dX}\right)F(X) &= E(X)E(nT) \times F(X+T)|_{T:=1} \\ &= E(X+nT) \times F(X+T)|_{T:=1} \\ &= F(X+n). \end{aligned}$$

On remarque ici que pour $n \neq 0$, F doit être polynomiale.

2) $E_2\left(\frac{d}{dX}\right)(F \cdot G) = (E_2\left(\frac{d}{dX}\right)F)G + F'E_2\left(\frac{d}{dX}\right)G$ (voir Figure 2.21).

3) $E_2\left(\frac{d}{dX}\right)(E \circ F) = (E \circ F) \cdot (E_2\left(\frac{d}{dX}\right)F + E_2(F'))$ (voir Figure 2.22). En particulier,

$$\begin{aligned} E_2\left(\frac{d}{dX}\right)(S) &= E_2\left(\frac{d}{dX}\right)(E \circ \mathcal{C}), \\ &= (E \circ \mathcal{C})(E_2\left(\frac{d}{dX}\right)\mathcal{C} + E_2(L)), \\ &= S \cdot (E_2\left(\frac{d}{dX}\right)\mathcal{C} + E_2(L)) \text{ (voir Figure 2.23)}. \end{aligned}$$

4) Dérivée Catalan. Soit $B = B(T)$, l'espèce des arborescences binaires. Il est bien connu que cette espèce satisfait l'équation fonctionnelle $B = 1 + TB^2$. En résolvant cette équation quadratique, on peut alors déduire facilement que

$$B(X) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4X}}{2X}.$$

Pour $B(D)F(X) = G(X)$, on obtient alors que

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4D}}{2D} F(X) = G(X),$$

et on en déduit successivement que

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{2D}{1 - \sqrt{1 - 4D}} G(X) \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{1 - 4D})D}{4D} G(X) \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4D}}{2} G(X) = \Phi(D)G(X), \end{aligned}$$

où $\Phi(T) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4T}}{2}$, car $1 - \Phi(T) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4T}}{2} = TB(T)$ et $\frac{1}{B(T)} = 1 - TB(T)$. Donc,

$$B(D)F(X) = G(X) \iff F(X) = (1 - DB(D))G(X).$$

Il est important de noter qu'ici, l'espèce $1 - TB(T)$ est virtuelle (?).

5) On peut généraliser l'exemple précédent en considérant cette fois n'importe quelle espèce $B = B(T)$ ayant un terme constant égal à 1, car de telles espèces sont inversibles sous la multiplication (dans le contexte des espèces virtuelles, voir [2,7]). On a alors

$$B(D)F(X) = G(X) \iff F(X) = \frac{1}{B(D)}G(X),$$

où

$$\frac{1}{B(T)} = \frac{1}{1 + B_+(T)} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (B_+(T))^k.$$

Remarque 2.3.3. i) Si G est polynomiale, alors $G(\frac{d}{dX})F(X)$ existe pour toute espèce F .

ii) L'espèce $E_2(\frac{d}{dX})\mathcal{C}$ qui apparait dans l'exemple 2.3.1 précédent peut se décomposer sous la forme

$$E_2(\frac{d}{dX})\mathcal{C} = \sum_{n=0}^{\infty} E_2(X^n) + L(X^2)L_+(X).$$

En effet, comme le montre la Figure 2.24, il y a deux cas à considérer. Le premier est le cas où les points supplémentaires sont aux extrémités d'un diamètre; la Figure 2.24 a) illustre une $E_2(X^3)$ -structure, on obtient alors $\sum_{n=0}^{\infty} E_2(X^n)$. Le second cas

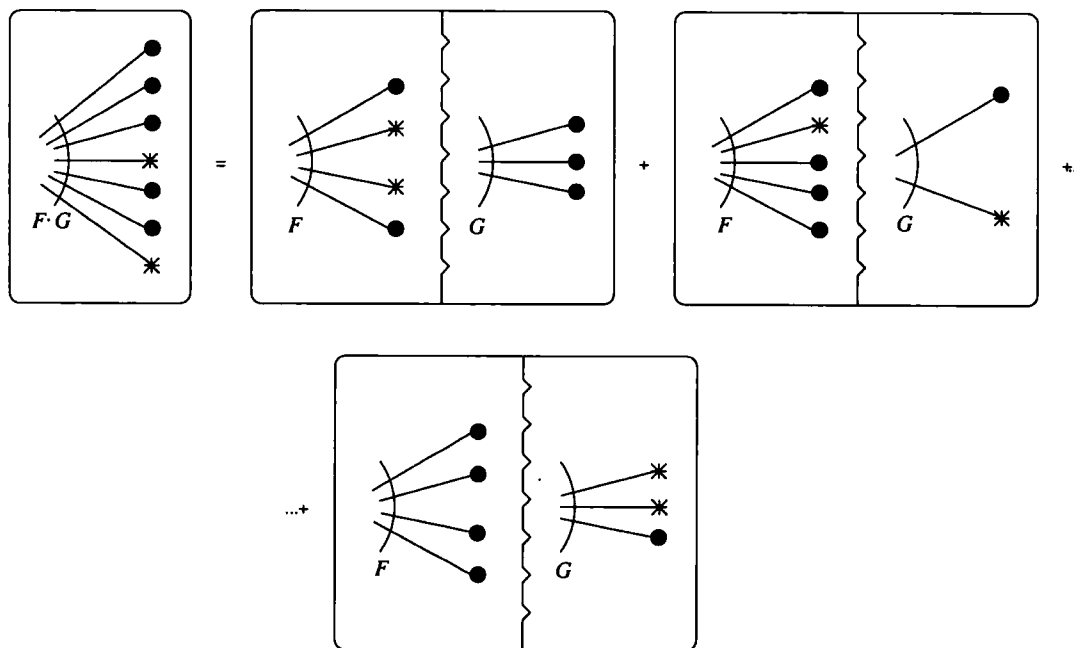


Figure 2.21 $E_2\left(\frac{d}{dX}\right)(F \cdot G) = (E_2\left(\frac{d}{dX}\right)F)G + F'G' + FE_2\left(\frac{d}{dX}\right)G$.

est le cas où ils ne sont pas aux extrémités d'un diamètre (voir Figure 2.24 b) : on obtient alors $\sum_{0 \leq i < j} X^i \cdot X^j = L(X^2)L_+(X)$.

Proposition 2.3.1. Pour des espèces de structures F, G, H et $a \in \mathbb{N}$, nous avons :

- a) $(aG)\left(\frac{d}{dX}\right)F(X) = a \cdot (G\left(\frac{d}{dX}\right)F(X)) = G\left(\frac{d}{dX}\right)(aF)(X)$;
- b) $(G + H)\left(\frac{d}{dX}\right)F(X) = G\left(\frac{d}{dX}\right)F(X) + H\left(\frac{d}{dX}\right)F(X)$;
- c) $G\left(\frac{d}{dX}\right)(F + H)(X) = G\left(\frac{d}{dX}\right)F(X) + G\left(\frac{d}{dX}\right)H(X)$;
- d) $G\left(\frac{d}{dX}\right)(H\left(\frac{d}{dX}\right)F(X)) = (G \cdot H)\left(\frac{d}{dX}\right)F(X)$;
- e) $\langle G\left(\frac{d}{dX}\right)F(X), H(X) \rangle = \langle F(X), G(X)H(X) \rangle$.

Preuve Pour voir d) et e), il suffit de regarder les Figures 2.25 et 2.26 ■

Dans le but de calculer $Z_{F(X,T) \times_T G(X,T)}$, remarquons d'abord que, pour toute espèce à deux sortes $F(X, T)$, la série indicatrice

$$Z_{F(X,T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) =$$

$$\sum_{n, k \geq 0} \frac{1}{n!k!} \sum_{\sigma \in S_n, \tau \in S_k} \text{fix } F[\sigma, \tau] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots \quad (2.1)$$

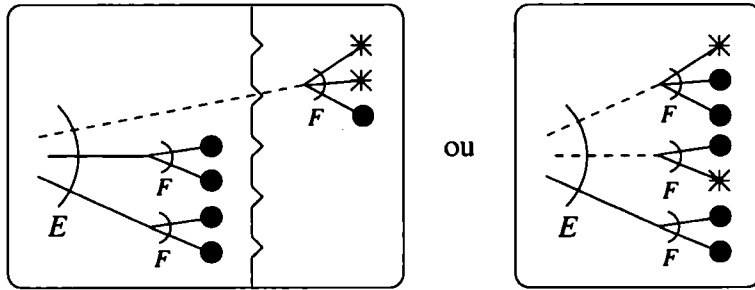


Figure 2.22 $E_2(\frac{d}{dX})(E \circ F) = (E \circ F) \cdot (E_2(\frac{d}{dX})F + E_2(F'))$.

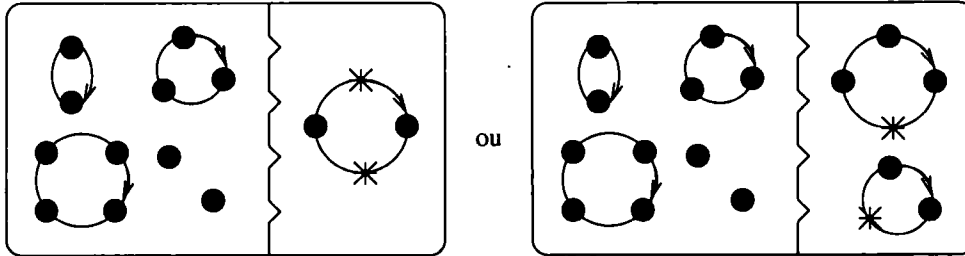


Figure 2.23 $E_2(\frac{d}{dX})(S) = E_2(\frac{d}{dX})(E \circ C) = S \cdot (E_2(\frac{d}{dX})C + E_2(L))$.

peut être exprimée sous la forme

$$Z_{F(X,T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} f_\tau(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

En effet, il suffit de sommer d'abord selon l'indice k dans (2.1) pour obtenir

$$Z_{F(X,T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\tau \in S_k} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma, \tau] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

et de poser ensuite

$$f_\tau(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma, \tau] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots$$

Il est à noter que les séries $f_\tau(x_1, x_2, \dots)$ ne dépendent pas des variables t_1, t_2, \dots

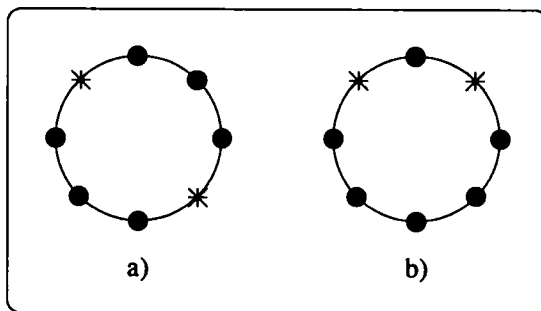


Figure 2.24 $E_2(\frac{d}{dX})(C) = \sum_{n=0}^{\infty} E_2(X^n) + L_+(X) \cdot L(X)$.

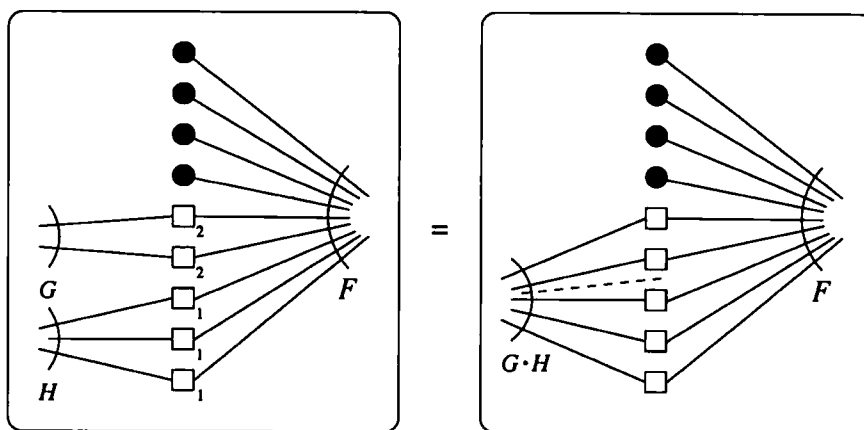


Figure 2.25 $G(\frac{d}{dX})(H(\frac{d}{dX}) \cdot F(X)) = (G \cdot H)(\frac{d}{dX})F(X)$.

Théorème 2.3.2. Si $H(X, T) = F(X, T) \times_T G(X, T)$, et si

$$Z_{F(X,T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} f_{\tau}(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

et

$$Z_{G(X,T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} g_{\tau}(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots,$$

alors

$$Z_{H(X,T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} f_{\tau}(x_1, x_2, \dots) g_{\tau}(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

Preuve Une H -structure quelconque sur le multiensemble $([n], [k])$ peut être représentée par la Figure 2.27, où $U_1 \subseteq [n]$, $U_2 \subseteq [n]$, $U_1 \cup U_2 = [n]$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $V = [k]$.

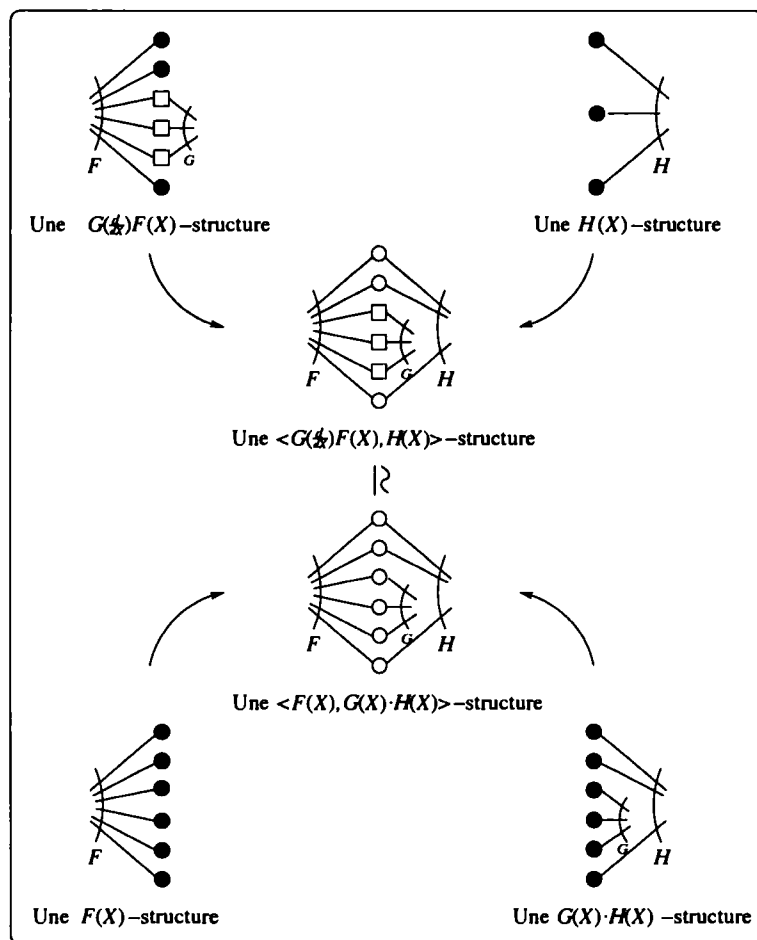


Figure 2.26 $\langle G(\frac{d}{dX})F(X), H(X) \rangle = \langle F(X), G(X)H(X) \rangle$.

Ainsi,

$$Z_{H(X,T)} = \sum_{n,k \geq 0} \frac{1}{n!k!} \sum_{\sigma \in S_n, \tau \in S_k} \text{fix } H[\sigma, \tau] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots, \quad (2.2)$$

où

$$\text{fix } H[\sigma, \tau] = \sum_{U_1 + U_2 = [n], \sigma' \in S_{U_1}, \sigma'' \in S_{U_2}, \tau \in S_k, \sigma' + \sigma'' = \sigma} \text{fix } H[\sigma' + \sigma'', \tau], \quad (2.3)$$

et où $\sigma' + \sigma'' = \sigma$ signifie que les cycles de σ sont obtenus comme réunions disjointes des cycles σ' et σ'' .

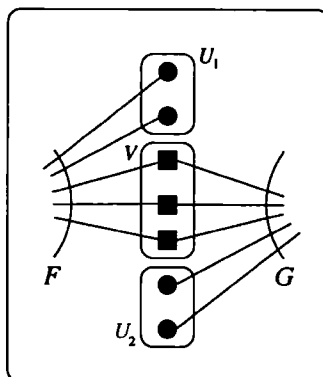


Figure 2.27 Une H -structure sur le multiensemble $([n], [k])$.

De plus, nous avons successivement

$$\begin{aligned}
 \text{fix } H[\sigma' + \sigma'', \tau] &= |\text{Fix } H[\sigma' + \sigma'', \tau]| \\
 &= |\{(s_1, s_2) \mid s_1 \in F[U_1, [k]], s_2 \in G[U_2, [k]], \\
 &\quad F[\sigma', \tau](s_1) = s_1, F[\sigma'', \tau](s_2) = s_2\}| \\
 &= |\text{Fix } F[\sigma', \tau] \times \text{Fix } G[\sigma'', \tau]| \\
 &= \text{fix } F[\sigma', \tau] \cdot \text{fix } G[\sigma'', \tau].
 \end{aligned}$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned}
 \text{fix } H[\sigma, \tau] &= \sum_{U_1+U_2=[n]} \sum_{\sigma' \in S_{U_1}, \sigma'' \in S_{U_2}, \tau \in S_{[k]}, \sigma' + \sigma'' = \sigma} \text{fix } F[\sigma', \tau] \cdot \text{fix } G[\sigma'', \tau] \\
 &= \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} \sum_{\sigma' \in S_i, \sigma'' \in S_j, \tau \in S_{[k]}, \sigma' + \sigma'' = \sigma} \text{fix } F[\sigma', \tau] \cdot \text{fix } G[\sigma'', \tau], \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

en ayant pris soin de sommer sur les (U_1, U_2) selon les cardinalités $|U_1| = i$, $|U_2| = j$, $i + j = n$.

Substituant (2.4) dans (2.2) et tenant compte de (2.3), nous obtenons alors que, pour $\omega = \{\sigma' \in S_i, \sigma'' \in S_j, \tau \in [k], \sigma' + \sigma'' = \sigma\}$,

$$\begin{aligned}
Z_{H(X,T)} &= \sum_{n,k \geq 0} \frac{1}{n!k!} \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} \sum_{\omega} \text{fix } F[\sigma', \tau] \cdot \text{fix } G[\sigma'', \tau] \cdot x_1^{\sigma'_1 + \sigma''_1} x_2^{\sigma'_2 + \sigma''_2} \dots t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!} \left(\sum_{\sigma' \in S_i} \text{fix } F[\sigma', \tau] x_1^{\sigma'_1} x_2^{\sigma'_2} \dots \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{j!} \left(\sum_{\sigma'' \in S_j} \text{fix } G[\sigma'', \tau] x_1^{\sigma''_1} x_2^{\sigma''_2} \dots \right) \right) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \left(\sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} \sum_{\sigma' \in S_i} \text{fix } F[\sigma', \tau] x_1^{\sigma'_1} x_2^{\sigma'_2} \dots \right) \cdot \\
&\quad \left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} \sum_{\sigma'' \in S_j} \text{fix } G[\sigma'', \tau] x_1^{\sigma''_1} x_2^{\sigma''_2} \dots \right) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} f_{\tau}(x_1, x_2, \dots) g_{\tau}(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.4. *Le théorème précédent peut s'énoncer simplement comme suit,*

$$Z_{F(X,T) \times_T G(X,T)} = Z_{F(X,T)} \times_t Z_{G(X,T)},$$

où $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$ et où le produit \times_t entre séries indicatrices à deux infinités de variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ et $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$ est défini comme suit :

Définition 2.3.3. *Le produit cartésien partiel $f \times_t g$ de deux séries indicatrices*

$$f = f(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} f_{\tau}(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

et

$$g = g(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} g_{\tau}(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

est la série indicatrice

$$f \times_t g = (f \times_t g)(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} f_{\tau}(x_1, x_2, \dots) g_{\tau}(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

Théorème 2.3.3. *Pour deux espèces F et G , on a*

$$Z_{G(\frac{d}{dX})F(X)}(x_1, x_2, \dots) = Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, 2\frac{\partial}{\partial x_2}, 3\frac{\partial}{\partial x_3}, \dots\right)Z_F(x_1, x_2, \dots).$$

Preuve Par définition, on a que :

$$Z_{G(\frac{d}{dX})F(X)}(x_1, x_2, \dots) = Z_{G(T) \times_T F(X+T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots)|_{t_i:=1}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} Z_{G(T)} &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \text{fix}G[\tau] t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots} g_{i_1, i_2, \dots} \frac{t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Z_{F(X+T)} &= Z_{F(X)}|_{X:=X+T} \\ &= Z_F(x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots). \end{aligned}$$

Pour poursuivre, on a besoin du lemme 2.3.4 suivant, qui découle (par itération) du Théorème de Taylor à une variable :

Lemme 2.3.4. *Si $\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots)$, alors*

$$\begin{aligned} \Phi(x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots) &= \sum_{i_1, i_2, \dots \geq 0} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2} \dots}{i_1! i_2! \dots} \Phi(x_1, x_2, \dots) t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots \\ &= e^{t_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots} \Phi(x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

□

En appliquant le lemme 2.3.4, on obtient donc que

$$\begin{aligned} Z_{F(X+T)} &= \sum_{i_1, i_2, \dots \geq 0} \frac{\left(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \left(t_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2} \dots}{i_1! i_2! \dots} Z_F(x_1, x_2, \dots) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots \geq 0} \left(1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \left(2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2} \left(3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{i_3} \dots Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \frac{t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots}. \end{aligned}$$

Par le Théorème 2.3.2 et la Définition 2.3.3, on a alors que

$$\begin{aligned}
 Z_{G(T) \times_T F(X+T)} &= \sum_{i_1, i_2, \dots \geq 0} g_{i_1, i_2, \dots} \frac{(1 \frac{\partial}{\partial x_1})^{i_1} (2 \frac{\partial}{\partial x_2})^{i_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots} Z_F(x_1, x_2, \dots) t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots \\
 &= \left(\sum_{i_1, i_2, \dots \geq 0} g_{i_1, i_2, \dots} \frac{(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1})^{i_1} (2t_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^{i_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots} \right) Z_F(x_1, x_2, \dots) \dots \\
 &= Z_G(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, 2t_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, 3t_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots) Z_F(x_1, x_2, \dots).
 \end{aligned}$$

On obtient finalement le résultat en posant

$$\begin{aligned}
 Z_{G(\frac{d}{dX})F(X)}(x_1, x_2, \dots) &= Z_{G(T) \times_T F(X+T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) |_{t_i := 1} \\
 &= Z_G(\frac{\partial}{\partial x_1}, 2\frac{\partial}{\partial x_2}, 3\frac{\partial}{\partial x_3}, \dots) Z_F(x_1, x_2, \dots).
 \end{aligned}$$

■

Exemple 2.3.1. Pour $G = \mathbb{C}_k$, l'espèce des cycles de longueur k , on a

$$Z_{\mathbb{C}_k}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{k!} \sum_{d|k} \phi(d) x_d^{k/d},$$

où ϕ est la fonction d'Euler. On obtient alors que

$$Z_{\mathbb{C}_k(\frac{d}{dX})F(X)}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{k!} \sum_{d|k} \phi(d) (d \frac{\partial}{\partial x_d})^{k/d} Z_F(x_1, x_2, \dots).$$

En particulier, pour $k = 2$ et $F = \mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned}
 Z_{\mathbb{C}_2(\frac{d}{dX})\mathcal{A}(X)}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{2!} (\phi(1) (1 \frac{\partial}{\partial x_1})^{2/1} + \phi(2) (2 \frac{\partial}{\partial x_2})^{2/2}) Z_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \dots) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) Z_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \dots).
 \end{aligned}$$

La Figure 2.28 illustre une $\mathbb{C}_2(\frac{d}{dX})\mathcal{A}(X)$ -structure.

Remarque 2.3.5. Dans le cas particulier où $G(X) = X$, on a $Z_G(x_1, x_2, \dots) = x_1$ et donc,

$$Z_{\frac{d}{dX}F(X)}(x_1, x_2, \dots) = \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F(x_1, x_2, \dots),$$

c'est-à-dire la formule usuelle de la Proposition 2.2.5.

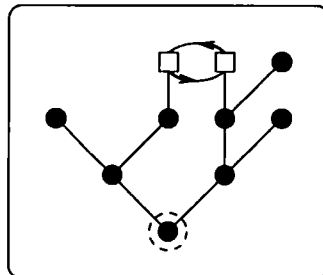


Figure 2.28 Une $C_2(\frac{d}{dX})A(X)$ -structure.

CHAPITRE III

OPÉRATEURS COMBINATOIRES DIFFÉRENTIELS GÉNÉRAUX

Dans le présent chapitre, nous introduisons des opérateurs différentiels plus généraux que ceux du chapitre précédent : au lieu de considérer des opérateurs différentiels de la forme $G(\frac{d}{dX}) = G(D)$, où $G = G(T)$ est une espèce à une sorte, nous considérons des opérateurs différentiels de la forme $\Omega(X, D)$, où $\Omega(X, T)$ est une espèce à deux sortes. Ce chapitre sera donc séparé en deux sections. La première (3.1) consistera en la présentation des définitions et des propriétés relatives à $\Omega(X, D)$. La seconde (3.2) consistera quant à elle à expliciter, en une série d'exemples et d'applications, la théorie introduite à la première section et dans les chapitres précédents.

3.1 Opérateurs combinatoires différentiels généraux $\Omega(X, D)$ et propriétés

Introduisons premièrement, pour cette section et le reste du présent chapitre, la convention d'illustrer une structure appartenant à une espèce à deux sortes $\Omega = \Omega(X, T)$ par une figure du genre de celles illustrées à la Figure 3.1.

Remarque 3.1.1. *Rappelons au passage qu'au chapitre précédent, nous avons introduit les conventions suivantes :*

- 1) *Les éléments de sorte X sont représentés par des cercles noirs (●) et ceux de sorte T par des carrés noirs (■).*

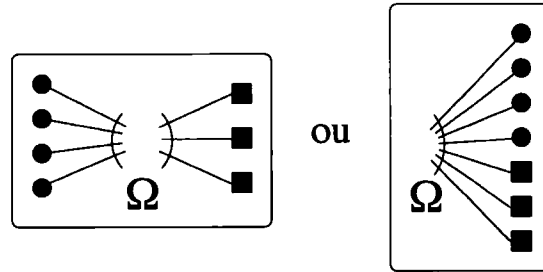


Figure 3.1 Deux représentations d'une $\Omega(X, T)$ -structure.

2) On représente un désétiquetage des points d'une sorte donnée par la forme vide (carré (\square), cercle (\circ), etc.) correspondante.

Définition 3.1.1. On dit qu'une espèce à deux sortes $\Omega(X, T)$ est **finitaire en T** si, pour tout ensemble fini U de points de sorte X , il n'y a pas de Ω -structure possible sur la paire d'ensembles (U, V) pour tout ensemble fini V de points de sorte T suffisamment grand.

Exemple 3.1.1. L'espèce $\mathcal{G}(X, T)$ des graphes simples sur des sommets de sorte X et des arêtes de sorte T est finitaire en T . En effet, il y a au maximum $\binom{n}{2}$ arêtes possibles pour un graphe comportant n sommets.

Définition 3.1.2. Soit $\Omega(X, T)$ et $F(X)$ des espèces à deux sortes et une sorte respectivement. Si $\Omega(X, T)$ est finitaire en T , ou si $F(X)$ est polynomiale en X , alors $\Omega(X, D)F(X)$ est l'espèce définie par

$$\Omega(X, D)F(X) := \Omega(X, T) \times_T F(X + T)|_{T=1}.$$

La Figure 3.2 illustre la forme générale d'une $\Omega(X, D)F(X)$ -structure sur un ensemble à 9 points.

Exemples 3.1.1. 1) En prenant $\Omega(X, T) = \mathcal{A}(X, T)$, où $\mathcal{A}(X, T)$ est l'espèce (non finitaire en T) des arborescences sur les points internes de sorte X et des feuilles de sorte T (voir Figure 3.3), on obtient l'opérateur $\mathcal{A}(X, D)$. Et lorsqu'il est appliqué à

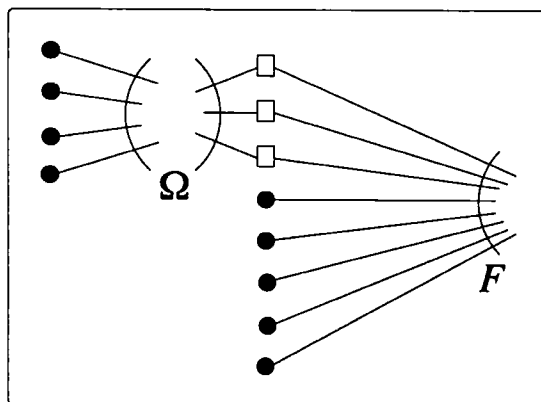


Figure 3.2 Une $\Omega(X, D)F(X)$ -structure sur 9 points.

$F(X) = \mathcal{C}_{10}(X)$, l'espèce des cycles orientés sur 10 éléments, on obtient des structures du type illustrées à la Figure 3.4.

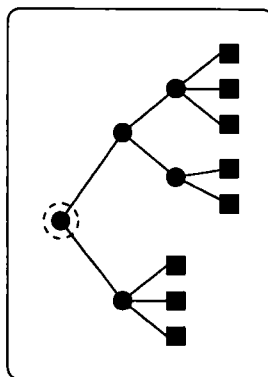


Figure 3.3 Une $\mathcal{A}(X, T)$ -structure.

2) Considérons cette fois l'espèce finitaire en T , $\Omega(X, T) = E(L_{\geq 2}(X)T)$, où $L_{\geq 2}$ est l'espèce des listes d'au moins deux éléments (voir Figure 3.5). On obtient alors l'opérateur $E(L_{\geq 2}(X)D)$ et ce dernier s'applique à toute espèce $F(X)$. En particulier, la Figure 3.6 montre que l'on a l'identité

$$\text{Pieu}(X) = E(L_{\geq 2}(X)D)\mathcal{C}(X),$$

où Pieu désigne l'espèce des pieuvres.

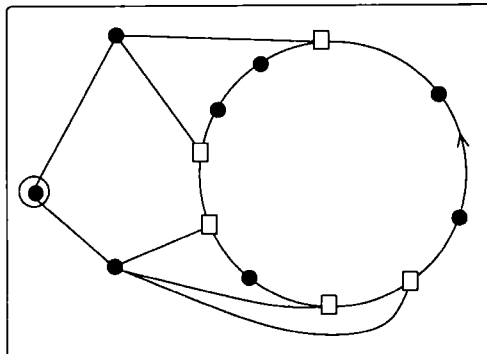


Figure 3.4 Une $A(X, D)\mathcal{C}_{10}(X)$ -structure.

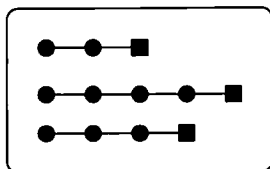


Figure 3.5 Une $E(L_{\geq 2}(X)T)$ -structure.

Remarque 3.1.2. *i) Dans l'exemple 1), si on considère plutôt l'espèce $\mathcal{C}(X)$, alors $A(X, D)\mathcal{C}(X)$ n'est pas une espèce car $A(X, D)$ n'est pas finitaire en T et $\mathcal{C}(X)$ n'est pas polynomiale en X . En effet, il existe un nombre infini de $\mathcal{C}(X+T)$ -structures sur tout ensemble fini U car pour tout nombre fini de points de sorte X , on peut ajouter un nombre arbitrairement grand de points de sorte T .*

ii) Pour la suite, nous assumerons que les restrictions de la définition 2 sont satisfaites.

Proposition 3.1.1. *Pour toute espèce de structures $F(X)$ et $G(X)$, on a*

$$G(X + XD)F(X) = F(X + XD)G(X).$$

Preuve Voir Figure 3.7. ■

Du fait que toute espèce à deux sortes $\Omega(X, T)$ peut être exprimée comme combinaison linéaire $\sum \omega_k \frac{X^n T^k}{K}$ d'espèces moléculaires, nous pouvons exprimer tout opérateur différentiel $\Omega(X, D)$ comme combinaison linéaire d'opérateurs moléculaires de la forme

$$\frac{X^n D^k}{K}, \quad K \leq S_{n,k}.$$

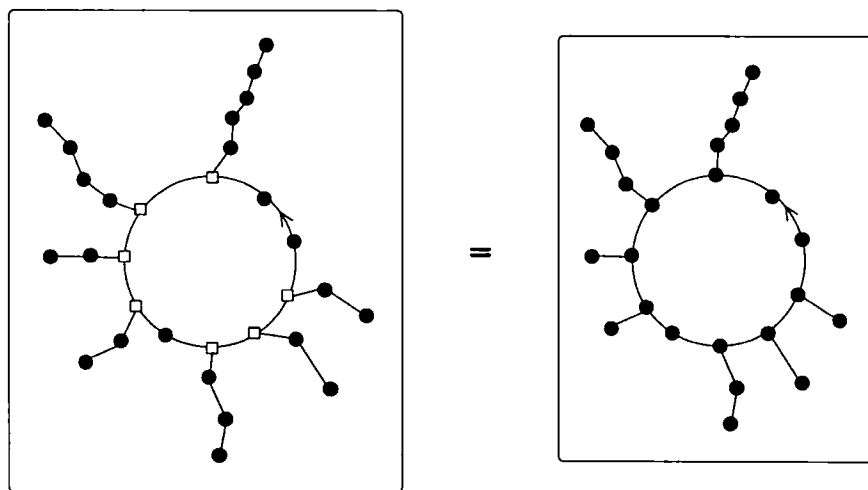


Figure 3.6 $Pieu(X) = E(L_{\geq 2}(X)D)C(X)$.

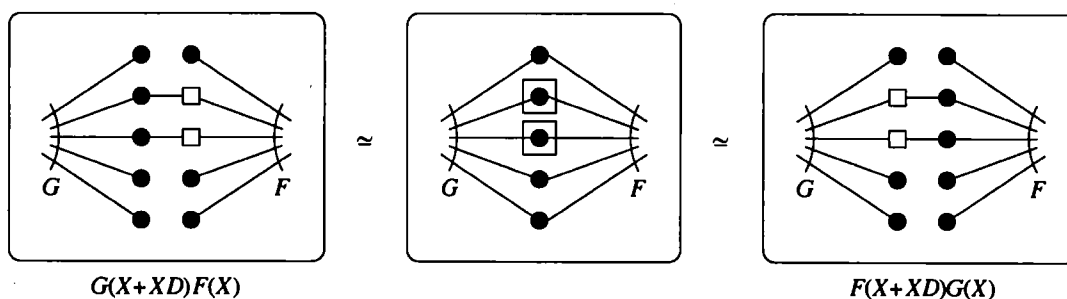


Figure 3.7 $G(X + XD)F(X) = F(X + XD)G(X)$.

Nous prendrons dès lors la convention d'écriture suivante pour exprimer l'action d'un tel opérateur sur une espèce de structures $F(X)$:

$$\left(\frac{X^n D^k}{K} \right) F(X) = \frac{X^n F^{(k)}(X)}{K},$$

qui est en conformité avec la notation classique

$$X^n D^k F(X) = X^n F^{(k)}(X),$$

correspondant au cas dégénéré $K = \{id\}$.

Avec ces notations, nous avons le théorème suivant, qui généralise la formule classique

de Leibniz pour le calcul différentiel, c'est-à-dire

$$\frac{d^k}{dx^k}(f(x)g(x)) = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} f^{(i)}(x)g^{(j)}(x).$$

Théorème 3.1.2. Soient $F(X)$ et $G(X)$, deux espèces de structures. On a alors que

$$\frac{X^n D^k}{K} F(X)G(X) = \sum_{i+j=k} \sum_{L: S_{n,i,j}} \binom{K}{L} \frac{X^n F^{(i)}(X)G^{(j)}(X)}{L} \quad (3.1)$$

où $L : S_{n,i,j}$ signifie que L parcourt un système complet de représentants des classes de conjugaison des sous-groupes de $S_{n,i,j}$, et où les coefficients $\binom{K}{L}$ sont définis par la formule d'addition :

$$\frac{X^n (T_1 + T_2)^k}{K} = \sum_{i+j=k} \sum_{L: S_{n,i,j}} \binom{K}{L} \frac{X^n T_1^i T_2^j}{L},$$

introduite dans (Auger, Labelle et Leroux, 2002)].

Preuve Sans le démontrer rigoureusement, on peut se convaincre du précédent résultat en regardant un cas spécifique : pour $n = 7, k = 5$, la Figure 3.8 illustre une $\frac{X^7 D^5}{K} F(X)G(X)$ -structure (où $i = 2$ et $j = 3$ dans (3.1)).

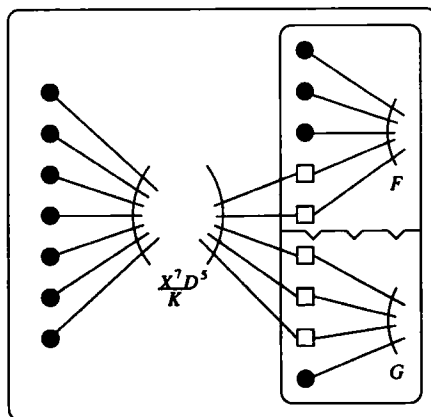


Figure 3.8 Une $\frac{X^7 D^5}{K} F(X)G(X)$ -structure.

Or, la décomposition moléculaire de

$$\frac{X^n (T_1 + T_2)^k}{K}$$

classifie toutes les possibilités de placer à gauche la $\frac{X^n T^k}{K}$ -structure et de désétiqueter ensuite. ■

Exemple 3.1.2. Pour $n = 0$ et $K = \{id\}$, nous retrouvons la forme classique de la formule de Leibniz, c'est-à-dire

$$D^k(F(X)G(X)) = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} F^{(i)}(X)G^{(j)}(X).$$

Exemple 3.1.3. Pour l'espèce des ensembles à deux éléments E_2 , la Figure 3.9 montre une $E_2(XT)$ -structure. On obtient alors l'opérateur $E_2(XD)$ (voir Figure 3.10). En particulier, si $H = F \cdot G$, alors une $E_2(XD)(F \cdot G)$ -structure sera de l'une des trois formes illustrées à la Figure 3.11 et on obtient l'identité suivante :

$$E_2(XD)(F \cdot G) = (E_2(XD)F) \cdot G + F^\bullet \cdot G^\bullet + F \cdot (E_2(XD)G),$$

où $F^\bullet \cdot G^\bullet = XF' \cdot XG' = X^2F' \cdot G'$.

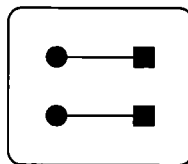


Figure 3.9 Une $E_2(XT)$ -structure.

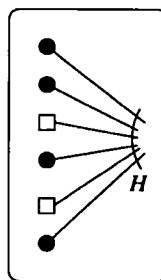


Figure 3.10 Une $E_2(XD)H(X)$ -structure.

La proposition suivante généralise le Théorème 2.3.3 en montrant comment calculer la série indicatrice de cycles $Z_{\Omega(X,D)F(X)}$ à partir des séries $Z_{\Omega(X,D)}$ et $Z_{F(X)}$.

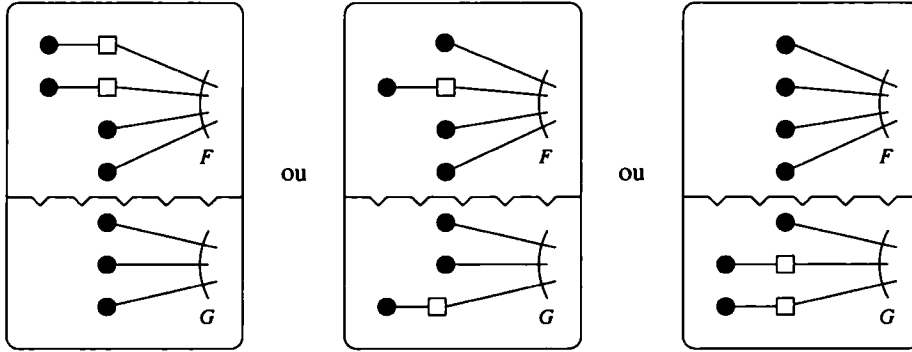


Figure 3.11 Une $E_2(XD)(F \cdot G)$ -structure.

Proposition 3.1.3. Soit $\Omega(X, T)$ et $F(X)$, deux espèces à deux sortes et une sorte respectivement. On a alors

$$Z_{\Omega(X, D)F(X)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = Z_{\Omega}(x_1, x_2, \dots; \frac{\partial}{\partial x_1}, 2\frac{\partial}{\partial x_2}, 3\frac{\partial}{\partial x_3}, \dots) Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Preuve Par définition, on a que

$$Z_{\Omega(X, D)F(X)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = Z_{\Omega(X, T) \times_T F(X+T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) |_{t_i := 1}.$$

De plus, posons

$$Z_{\Omega(X, T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \omega_{\tau}(x_1, x_2, \dots) t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots$$

On a évidemment

$$Z_{F(X+T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) = Z_F(x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots).$$

Le Lemme 2.3.4 entraîne que

$$Z_{F(X+T)} = \sum_{i_1, i_2, \dots} \left(1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \left(2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2} \dots Z_F(x_1, x_2, \dots) \frac{t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots}$$

Par le Théorème 2.3.2 et la définition 2.3.3, on a alors que

$$\begin{aligned} Z_{\Omega(X, T) \times_T F(X+T)} &= \sum_{i_1, i_2, \dots} \omega_{i_1, i_2, \dots}(x_1, x_2, \dots) \frac{\left(1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \left(2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots} Z_F(x_1, x_2, \dots) t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots} \omega_{i_1, i_2, \dots}(x_1, x_2, \dots) \frac{(1t_1 \frac{\partial}{\partial x_1})^{i_1} (2t_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^{i_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots} Z_F(x_1, x_2, \dots) \\ &= Z_{\Omega}(x_1, x_2, \dots; 1t_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, 2t_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots) Z_F(x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

Faisant $t_i := 1$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} Z_{\Omega(X,D)F(X)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) &= Z_{\Omega(X,T) \times_T F(X+T)}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) |_{t_i := 1} \\ &= Z_{\Omega}(x_1, x_2, \dots; \frac{\partial}{\partial x_1}, 2\frac{\partial}{\partial x_2}, 3\frac{\partial}{\partial x_3}, \dots) Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

■

Remarque 3.1.3. Dans la proposition précédente, la convention d'écrire tous les t_j à la droite de tous les x_i dans $Z_{\Omega}(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots)$ doit être respectée. Par exemple, si on considère $\Omega(X, D) = E(XD)$, on obtient

$$E(XD)F(X) = F(2X) \text{ (voir Figure 3.12),}$$

et dans ce cas, on doit écrire

$$Z_{\Omega}(x_1, x_2, \dots; \frac{\partial}{\partial x_1}, 2\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots) = \sum \frac{1}{n_1! n_2! \dots} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2} \dots$$

et non pas

$$\sum \frac{1}{n_1! n_2! \dots} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2} \dots$$

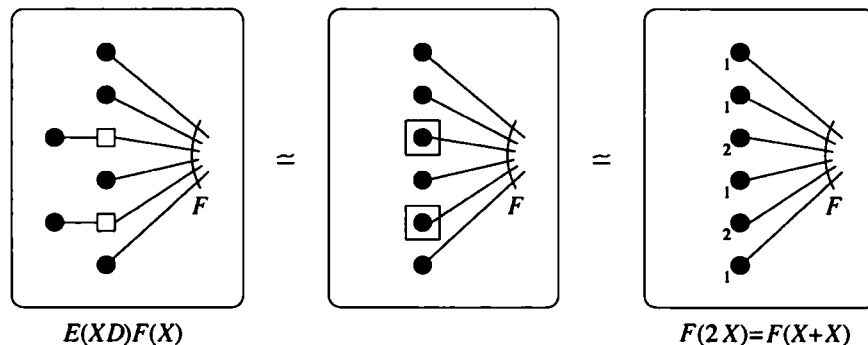


Figure 3.12 $E(XD)F(X) = F(2X)$.

À ce stade-ci, une question fondamentale se pose : étant donné trois espèces $\Omega_1(X, T)$, $\Omega_2(X, T)$ et $F(X)$, existe-t-il une espèce $\Omega_3(X, T)$ telle que

$$\Omega_2(X, D)[\Omega_1(X, DF(X))] = \Omega_3(X, D)F(X)?$$

Nous allons voir , après la définition qui suit, que $\Omega_3(X, T)$ existe, mais que $\Omega_3(X, T) \neq \Omega_2(X, T)\Omega_1(X, T)$, c'est-à-dire que Ω_3 n'est pas le produit des espèces Ω_2 et Ω_1 .

Définition 3.1.3. Soient $\Omega_1(X, T)$ et $\Omega_2(X, T)$, deux espèces à deux sortes. On définit la \odot - composition de $\Omega_1(X, D)$ et $\Omega_2(X, D)$ par

$$\Omega_2(X, D) \odot \Omega_1(X, D) = \Omega_3(X, D),$$

où

$$\Omega_3(X, T) = \Omega_2(X, T + T_0) \times_{T_0} \Omega_1(X + T_0, T)|_{T_0:=1}$$

et où T_0 est une sorte auxiliaire accessoire.

La Figure 3.13 illustre une $\Omega_3(X, T)$ -structure où les points de sorte T_0 désétiquetés sont représentés par des triangles vides (Δ).

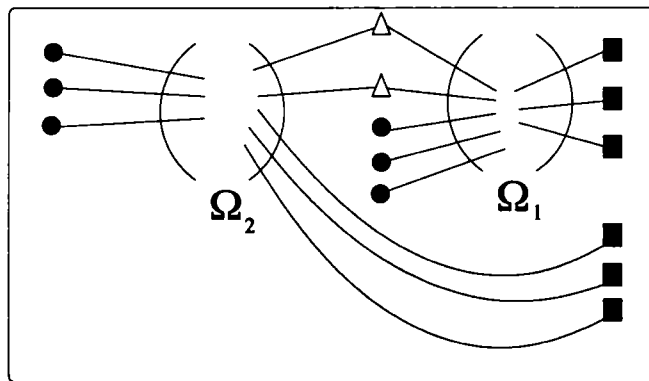


Figure 3.13 Une $\Omega_3(X, T)$ -structure.

Comme nous le verrons à la Proposition 3.1.3 suivante, la composition définie par $\Omega_2(X, D)\odot\Omega_1(X, D)$ correspond en fait à l'application successive des opérateurs $\Omega_1(X, D)$ suivi de $\Omega_2(X, D)$.

Remarque 3.1.4. Il est important de noter que l'opération \odot n'est pas commutative. En effet, on a par exemple que

$$(XD) \odot (X^2D) = 2X^2D + X^3D^2,$$

alors que

$$(X^2D) \odot (XD) = X^2D + X^3D^2.$$

Proposition 3.1.4. Soient $\Omega_3(X, T) = \Omega_2(X, T) \odot \Omega_1(X, T)$. On a alors, pour toute espèce $F = F(X)$,

$$\Omega_3(X, D)F(X) = \Omega_2(X, D)[\Omega_1(X, D)F(X)].$$

Preuve Nous avons que

$$\begin{aligned} & \Omega_2(X, D)[\Omega_1(X, D)F(X)] \\ &= \Omega_2(X, D)[\Omega_1(X, T_1) \times_{T_1} F(X + T_1)|_{T_1:=1}] \\ &= \left\{ \Omega_2(X, T_2) \times_{T_2} \left[\left[\Omega_1(X, T_1) \times_{T_1} F(X + T_1)|_{T_1:=1} \right] \right]_{X:=X+T_2} \right\}_{T_2:=1}. \end{aligned}$$

La preuve de la proposition est établie par la figure 3.14. ■

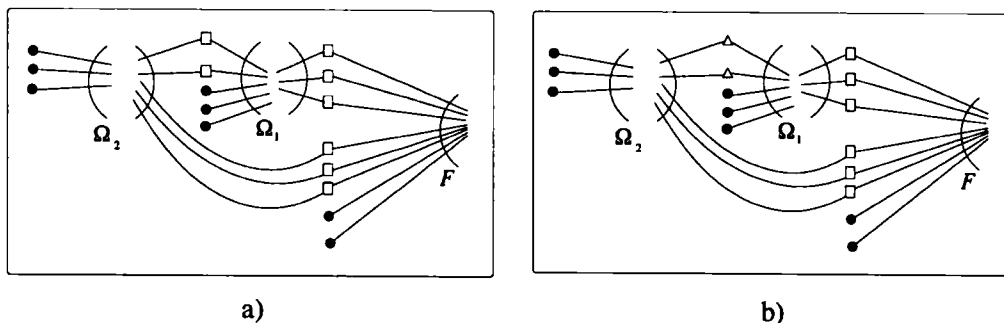


Figure 3.14 a) $\Omega_2(X, D)[\Omega_1(X, D)F(X)]$ et $[\Omega_2(X, D) \odot \Omega_1(X, D)]F(X)$.

Théorème 3.1.5. Pour toutes espèces à deux sortes $\Omega_2(X, T)$ et $\Omega_1(X, T)$, on a que

$$Z_{\Omega_2 \odot \Omega_1} = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^{n_1} \left(2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{n_2} \dots Z_{\Omega_2} \right) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1} \left(2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2} \dots Z_{\Omega_1} \right)}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots} \quad (3.2)$$

Preuve Nous avons par définition que

$$\begin{aligned}
& Z_{\Omega_2 \odot \Omega_1} \\
&= Z_{\Omega_2(X, T+T_0) \times_{T_0} \Omega_1(X+T_0, T) | T_0 := 1} \\
&= \left(\sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{(t_{01} \frac{\partial}{\partial t_1})^{n_1} (2t_{02} \frac{\partial}{\partial t_2})^{n_2} \dots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots} Z_{\Omega_2} \times_{t_0} \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{(t_{01} \frac{\partial}{\partial x_1})^{n_1} (2t_{02} \frac{\partial}{\partial x_2})^{n_2} \dots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots} Z_{\Omega_1} \right) \Big|_{t_{0i} := 1} \\
&= \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^{n_1} \left(2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{n_2} \dots Z_{\Omega_2} \right) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1} \left(2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2} \dots Z_{\Omega_1} \right)}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots}
\end{aligned}$$

$t_{0i} := 1, i = 1, 2, 3, \dots$ ■

Exemple 3.1.4. *Considérons les espèces $\Omega_2(X, T) = E_2(XT)$ et $\Omega_1(X, T) = X\mathcal{C}_3(T)$.*

On a que

$$Z_{\Omega_2} = Z_{E_2} \circ Z_{XT} = \frac{1}{2}((x_1 t_1)^2 + x_2 t_2)$$

et

$$Z_{\Omega_1} = Z_{X\mathcal{C}_3(T)} = Z_X Z_{\mathcal{C}_3(T)} = x_1 \left(\frac{t_1^3 + 2t_3}{3} \right).$$

La formule (3.2) se calcule alors en considérant les cas suivants :

Pour :

$$0 = n_1 = n_2 = n_3 = \dots \mapsto Z_{\Omega_2} \cdot Z_{\Omega_1} = \frac{1}{2}(x_1^2 t_1^2 + x_2 t_2) x_1 \left(\frac{t_1^3 + 2t_3}{3} \right),$$

$$1 = n_1, 0 = n_2 = n_3 = \dots \mapsto \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right) Z_{\Omega_2} \right) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) Z_{\Omega_1} \right) = x_1^2 t_1 \cdot \left(\frac{t_1^3 + 2t_3}{3} \right),$$

$$2 = n_1, 0 = n_2 = n_3 = \dots \mapsto \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^2 Z_{\Omega_2} \right) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 Z_{\Omega_1} \right) = x_1^2 \cdot 0 = 0,$$

$$0 = n_1, 1 = n_2 = n_3 = \dots \mapsto \frac{1}{2} \left(\left(2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right) Z_{\Omega_2} \right) \left(\left(2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) Z_{\Omega_1} \right) = x_2 \cdot 0 = 0,$$

⋮

⋮

Puisqu'il n'y a que les deux premiers sous-cas qui sont non tous-nuls, on obtient donc que $Z_{\Omega_2 \odot \Omega_1} = \left(\frac{t_1^3 + 2t_3}{3} \right) \left(\frac{1}{2}(x_1^2 t_1^2 + x_2 t_2) x_1 + x_1^2 t_1 \right)$. Nous pouvons aussi calculer $Z_{\Omega_2 \odot \Omega_1}$

de la manière suivante, histoire de vérifier nos calculs précédents :

$$\begin{aligned}
\Omega_2 \odot \Omega_1 &= E_2(X \cdot (T + T_0)) \times_{T_0} (X + T_0) \mathcal{C}_3(T) |_{T_0:=1}, \\
&= E_2(X \cdot (T + T_0)) \times_{T_0} X \mathcal{C}_3(T) |_{T_0:=1} + E_2(X \cdot (T + T_0)) \times_{T_0} T_0 \mathcal{C}_3(T) |_{T_0:=1}, \\
&= E_2(XT) \cdot X \mathcal{C}_3(T) + (E_2(XT) + XT \cdot XT_0 + E_2(XT_0)) \times_{T_0} T_0 \mathcal{C}_3(T) |_{T_0:=1}, \\
&= E_2(XT) \cdot X \mathcal{C}_3(T) + (X^2 T T_0 \mathcal{C}_3(T)) |_{T_0:=1}, \\
&= E_2(XT) \cdot X \mathcal{C}_3(T) + X^2 T \mathcal{C}_3(T).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien que

$$Z_{\Omega_2 \odot \Omega_1} = \left(\frac{t_1^3 + 2t_3}{3} \right) \left(\frac{1}{2} (x_1^2 t_1^2 + x_2 t_2) x_1 + x_1^2 t_1 \right).$$

Remarque 3.1.5. La formule (3.2) est, en général, plus facile à appliquer car elle fait appel à des opérations entre séries et nous ne sommes pas dans l'obligation de calculer d'abord l'espèce $\Omega_2 \odot \Omega_1(X, T)$.

Dans la section 2.1.2, nous avons introduit, pour deux espèces à une sorte $F = F(X)$ et $G = G(X)$, la forme combinatoire bilinéaire de F et G , notée \langle, \rangle , par

$$\langle F(X), G(X) \rangle = F(X) \times_X G(X) |_{X:=1}.$$

De plus, nous avons démontré à la section 2.3 que nous avons l'identité suivante, pour toute espèce $H(X)$:

$$\langle H(D)F(X), G(X) \rangle = \langle F(X), H(X)G(X) \rangle.$$

La proposition suivante généralise ce dernier résultat pour les espèces à deux sortes $\Omega(X, T)$.

Proposition 3.1.6. Pour toute espèce à deux sortes $\Omega(X, T)$, on a

$$\langle \Omega(X, D)F(X), G(X) \rangle = \langle F(X), \Omega(D, X)G(X) \rangle.$$

Preuve Voir Figure 3.15. ■

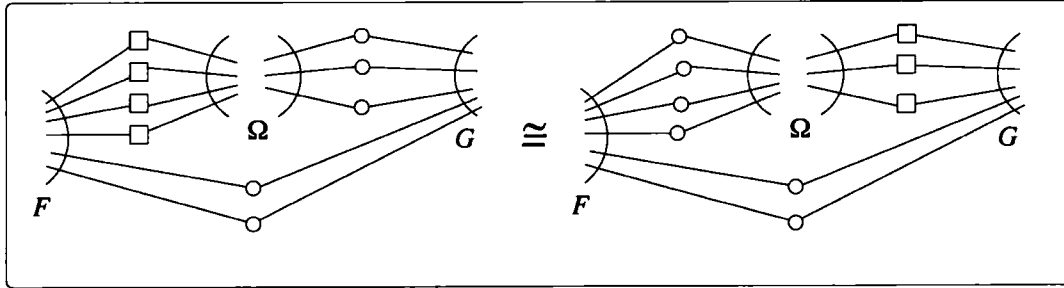


Figure 3.15 $\langle \Omega(X, D)F(X), G(X) \rangle = \langle F(X), \Omega(D, X)G(X) \rangle$.

Remarque 3.1.6. Pour la suite, nous noterons par $(\Omega(X, D))^* = \Omega^*(X, D)$ l'opérateur adjoint de $\Omega(X, D)$. C'est-à-dire

$$(\Omega(X, D))^* = \Omega(D, X).$$

La proposition suivante montre comment se comporte l'opérateur adjoint sous la \odot -composition.

Proposition 3.1.7. Si $\Omega_1(X, D)$ et $\Omega_2(X, D)$ sont des opérateurs combinatoires différentiels, alors

$$\begin{aligned} (\Omega_2(X, D) \odot \Omega_1(X, D))^* &= \Omega_1^*(X, D) \odot \Omega_2^*(X, D) \\ &= \Omega_1(D, X) \odot \Omega_2(D, X). \end{aligned}$$

Preuve D'une part, on a

$$\begin{aligned} (\Omega_2(X, T) \odot \Omega_1(X, T))^* &= \Omega_2(X, T + T_0) \times_{T_0} \Omega_1(X + T_0, T)|_{T_0:=1, X:=T} \\ &= \Omega_2(T, X + T_0) \times_{T_0} \Omega_1(T + T_0, X)|_{T_0:=1}. \end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} \Omega_1^*(X, T) \odot \Omega_2^*(X, T) &= \Omega_1^*(X, T + T_0) \times_{T_0} \Omega_2^*(X + T_0, T)|_{T_0:=1} \\ &= \Omega_1(T + T_0, X) \times_{T_0} \Omega_2(T, X + T_0)|_{T_0:=1} \\ &= \Omega_2(T, X + T_0) \times_{T_0} \Omega_1(T + T_0, X)|_{T_0:=1}. \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.1.8. Soient $\Omega_1(X, T)$ et $\Omega_2(X, T)$, deux espèces à deux sortes, et $F_1(X), F_2(X)$, deux espèces unisortes. On a alors

$$\begin{aligned} \langle \Omega_1(X, D)F(X), \Omega_2(X, D)G(X) \rangle &= \langle F(X), (\Omega_1(X, D))^* \odot \Omega_2(X, D)G(X) \rangle \\ &= \langle F(X), \Omega_1(D, X) \odot \Omega_2(X, D)G(X) \rangle. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.1.9. Pour des espèces de structures à deux sortes $\Omega_1(X, T)$ et $\Omega_2(X, T)$, on a la formule générale suivante pour la \odot -composition :

$$\begin{aligned} \Omega_2(X, T) \odot \Omega_1(X, T) &= \sum_{n \geq 0} \langle E_n(T_0 \frac{\partial}{\partial T})\Omega_2(X, T), E_n(T_0 \frac{\partial}{\partial X})\Omega_1(X, T) \rangle |_{X, T} \\ &= \Omega_2(X, T) \cdot \Omega_1(X, T) + \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial T}(X, T) \right) \cdot \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial X}(X, T) \right) \\ &+ \sum_{n \geq 2} \langle E_n(T_0 \frac{\partial}{\partial T})\Omega_2(X, T), E_n(T_0 \frac{\partial}{\partial X})\Omega_1(X, T) \rangle |_{X, T}. \end{aligned}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} \Omega_2(X, T + T_0) &= E \left(T_0 \frac{\partial}{\partial T} \right) \Omega_2(X, T) \\ &= \sum_{n \geq 0} E_n \left(T_0 \frac{\partial}{\partial T} \right) \Omega_2(X, T) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Omega_1(X + T_0, T) &= E \left(T_0 \frac{\partial}{\partial X} \right) \Omega_1(X, T) \\ &= \sum_{n \geq 0} E_n \left(T_0 \frac{\partial}{\partial X} \right) \Omega_1(X, T). \end{aligned}$$

Donc, si on pose $\Omega_3(X, T) = \Omega_2(X, T + T_0) \times_{T_0} \Omega_1(X + T_0, T) |_{T_0:=1}$, on obtient bien que

$$\begin{aligned} \Omega_3(X, T) &= \sum_{n \geq 0} \langle E_n(T_0 \frac{\partial}{\partial T})\Omega_2(X, T), E_n(T_0 \frac{\partial}{\partial X})\Omega_1(X, T) \rangle |_{X, T} \\ &= \Omega_2(X, T) \cdot \Omega_1(X, T) + \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial T}(X, T) \right) \cdot \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial X}(X, T) \right) \\ &+ \sum_{n \geq 2} \langle E_n(T_0 \frac{\partial}{\partial T})\Omega_2(X, T), E_n(T_0 \frac{\partial}{\partial X})\Omega_1(X, T) \rangle |_{X, T}. \end{aligned}$$

■

Remarque 3.1.7. Une table de simplification pour $\Omega_1 \odot \Omega_2$ est jointe en annexe.

3.2 Exemples, applications et tables diverses.

3.2.1 Opérateurs auto-adjoints et Λ -pointage

À la fin de la section 3.1, nous avons défini, pour une espèce de structures à deux sortes $\Omega(X, T)$, l'adjoint de l'opérateur associé à $\Omega(X, D)$ par $\Omega^*(X, D) = \Omega(D, X)$. Dans la même optique, on dit qu'un opérateur $\Omega(X, D)$ est auto-adjoint si $\Omega^*(X, D) = \Omega(X, D)$. C'est le cas si l'espèce $\Omega(X, T)$ est symétrique : $\Omega(X, T) = \Omega(T, X)$.

Exemples 3.2.1. 1) L'opérateur $\frac{X^3 D^3}{K}$, où $K = \langle (1, 2, 3), (4, 5, 6) \rangle \leq S_{3,3}$, est auto-adjoint.

2) Pour toute espèce $\Phi(X)$, $\Phi(X + D)$ est auto-adjoint.

Une importante classe d'opérateurs auto-adjoints est celle des Λ -pointages :

Définition 3.2.1. Pour toute espèce unisorte $\Lambda(T)$, on définit l'opérateur de Λ - pointage par $\Lambda(XD)$. C'est-à-dire : $\Lambda(XD)$ est l'opérateur associé à l'espèce $\Lambda(XT)$.

La Figure 3.16 illustre en toute généralité une $\Lambda(XD)F(X)$ -structure.

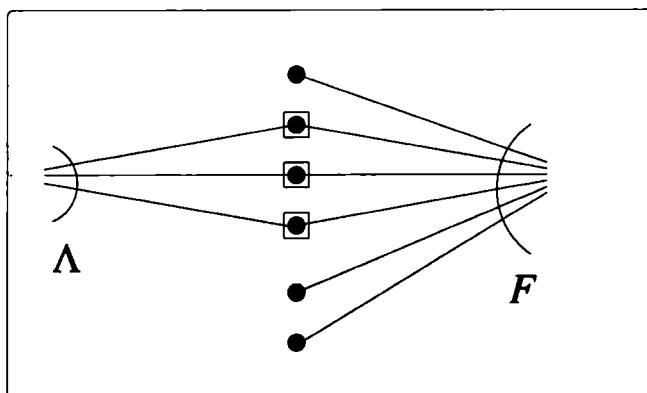


Figure 3.16 Une $\Lambda(XD)F(X)$ -structure.

Remarque 3.2.1. L'opérateur de pointage correspondant à $\Lambda(T) = T$ s'identifie au pointage classique XD introduit au chapitre 1.

Proposition 3.2.1. Pour deux espèces $\Lambda_1(T)$ et $\Lambda_2(T)$, on a

$$\Lambda_2(XD) \odot \Lambda_1(XD) = \Omega(X, D),$$

où $\Omega(X, T) = \Lambda_2(XT + XT_0) \times_{T_0} (XT + T_0T)|_{T_0:=1}$.

Preuve Il suffit d'appliquer la définition 3.1.3 au cas $\Omega_2(X, T) = \Lambda_2(XT)$ et $\Omega_1(X, T) = \Lambda_1(XT)$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\Omega_2(X, T + T_0) &= \Lambda_2(X(T + T_0)) \\ &= \Lambda_2(XT + XT_0)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Omega_1(X + T_0, T) &= \Lambda_1((X + T_0), T) \\ &= \Lambda_1(XT + T_0T)\end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

Remarque 3.2.2. *Sous la \odot -composition, le Λ -pointage n'est pas commutatif.*

Dans le cas particulier où $\Lambda(T) = T^2$, on obtient l'opérateur $(XD)^2$, qui correspond au pointage ordonné d'une paire d'éléments distincts d'une F -structure quelconque (voir Figure 3.17). De plus, notons que

$$(XD) \odot (XD) = XD + X^2D^2 \neq (XD)^2 = X^2D^2,$$

cette dernière identité provenant du fait que l'on peut pointer le même élément deux fois lors de deux pointages successifs (voir Figure 3.18).

Considérant $\Lambda(T) = \mathcal{C}$, on obtient alors l'opérateur $\mathcal{C}(XD)$, appelé **pointage cyclique**. Une sous-espèce intéressante de $\mathcal{C}(XD)F(X)$, notée $\widehat{\mathcal{C}(XD)}F(X)$, introduite récemment par Bodirsky, Fusy, Kang et Vigerske (Gessel, 1987) est définie comme suit :

Définition 3.2.2. *Une $\widehat{\mathcal{C}(XD)}F(X)$ -structure sur un ensemble fini U est un couple (γ, f) , où γ est un cycle orienté sur une partie V de U tel que γ est l'un des cycles d'un automorphisme σ de la F -structure f . Une $\widehat{\mathcal{C}(XD)}F(X)$ -structure est appelée **F -structure pointée cycliquement de façon non biaisée**.*

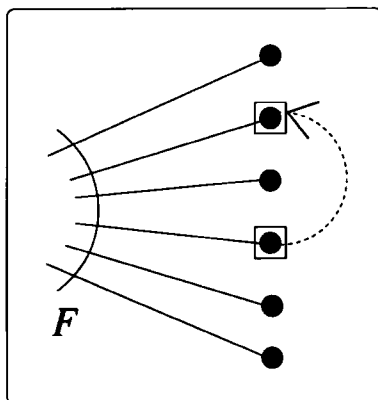


Figure 3.17 Une $(XD)^2 F(X)$ -structure.

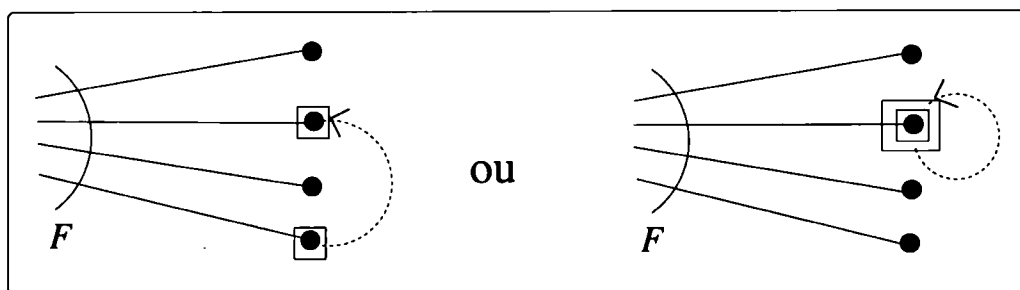


Figure 3.18 Une $((XD) \circ (XD)) F(X)$ -structure.

En d'autres termes, une $\widehat{\mathcal{C}(XD)} F(X)$ -structure sur U est une $\mathcal{C}(XD) F(X)$ -structure telle que le cycle pointé fait partie d'un automorphisme de la F -structure ambiante (voir Figure 3.19).

L'opérateur de pointage cyclique non biaisé $\widehat{\mathcal{C}(XD)}$ a été appliqué par Bodirsky, Fusy, Kang et Vigierske (Gessel, 1987) à la génération aléatoire uniforme de classes de structures combinatoires.

3.2.2 Opérateurs de petits degrés

Définition 3.2.3. Pour $K \leq S_{n,k}$, on définit le **degré d'un opérateur différentiel moléculaire** $\frac{X^n D^k}{K}$ par $\deg\left(\frac{X^n D^k}{K}\right) = k$. Plus généralement, si on considère un opérateur

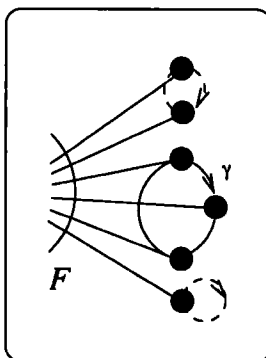


Figure 3.19 Une $\widehat{\mathcal{C}(XD)}F(X)$ -structure.

différentiel quelconque $\Omega(X, D)$, on pose

$$\deg(\Omega(X, D)) = \sup_k \{k | \omega_K \neq 0\} \leq \infty,$$

où $\sum_K \omega_K \frac{X^n D^k}{K}$ est la décomposition moléculaire de l'opérateur $\Omega(X, D)$. De plus, si tous les k présents dans $\sum_K \omega_K \frac{X^n D^k}{K}$ sont égaux, on dit que $\Omega(X, D)$ est **homogène de degré k** .

Il est aisé de constater que les opérateurs homogènes de degré 1 sont facilement classifiables : ils sont de la forme $H(X)D$. En effet, toute espèce $\Omega(X, T)$ homogène de degré 1 en T est de la forme $H(X)T$. Par contre, les opérateurs homogènes de degré 2 sont sensiblement plus délicats à classifier. La Figure 3.20 illustre en toute généralité la représentation d'un tel opérateur.

On peut partitionner les opérateurs moléculaires homogènes de degré 2, c'est-à-dire de la forme $\frac{X^n D^2}{K}$, en deux classes :

- les opérateurs moléculaires homogènes de degré 2 orientés, c'est-à-dire que la projection $\pi_2(K)$ est triviale,
- les opérateurs moléculaires homogènes de degré 2 non-orientés, c'est-à-dire que la projection $\pi_2(K) \simeq S_2$.

Remarque 3.2.3. Les opérateurs de degré 0 correspondent simplement aux opérateurs de multiplication par $H(X)$.

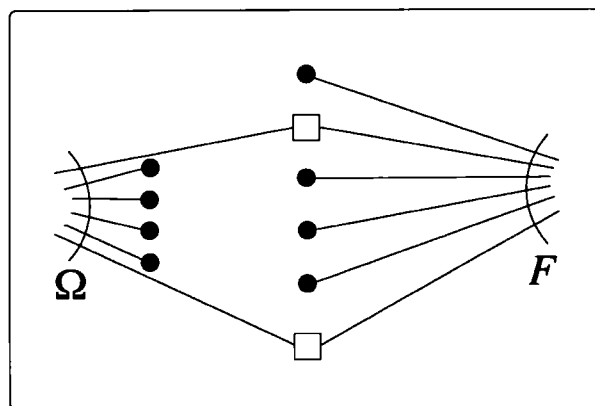


Figure 3.20 Représentation générale d'un opérateur différentiel de degré 2.

Exemples 3.2.2. 1) $\mathcal{C}_3(X)D^2$ est un opérateur moléculaire homogène de degré 2 orienté (voir Figure 3.21).

2) $E_2(XD)$ est un opérateur moléculaire homogène de degré 2 non-orienté (voir Figure 3.22).

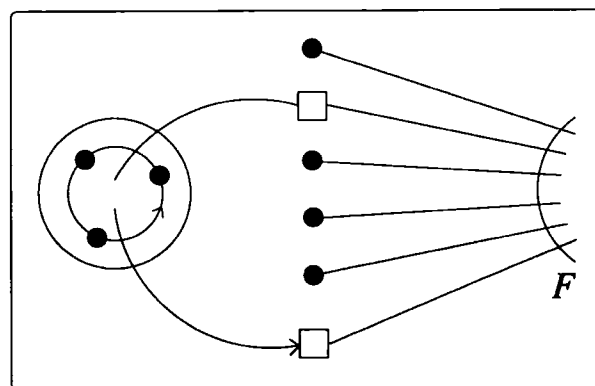


Figure 3.21 Une $\mathcal{C}_3(X)D^2F(X)$ -structure.

3.2.3 Opérateurs de différences finies

Nous avons vu au chapitre précédent (Exemple 2.3.1-1)) que l'opérateur $E(D)$, appelé opérateur de translation, était défini par $E(D)F(X) = F(X + 1)$. De ce résultat, on peut définir l'opérateur de différence finie Δ par

$$\Delta = E_+(D),$$

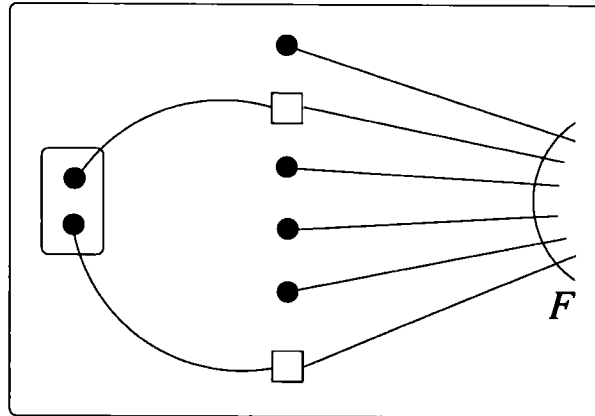


Figure 3.22 Une $E_2(XD)F(X)$ -structure.

où $E_+ = E - 1$ est l'espèce des ensembles non vides. On a alors évidemment que

$$\Delta F(X) = F(X+1) - F(X). \quad (3.3)$$

Remarque 3.2.4. *Il est à noter que dans (3.3), $F(X+1) - F(X)$ n'est pas une espèce virtuelle (Bergeron, Labelle et Leroux, 1998), car $F(X)$ est toujours une sous-espèce de $F(X+1)$.*

Réciproquement, on a

$$D = E_+^{<-1>}(\Delta),$$

où $E_+^{<-1>}$ est l'inverse de l'espèce E_+ pour la substitution : c'est une espèce virtuelle satisfaisant $E_+^{<-1>} \circ E_+ = E_+ \circ E_+^{<-1>} = X$. Elle est définie par la série sommable

$$E_+^{<-1>} = X - (E_+ - X) + (E_+ \circ E_+ - 2E_+ + X) - (E_+ \circ E_+ \circ E_+ - 3E_+ \circ E_+ + 3E_+ - X) + \dots$$

(Voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 1998) et (Joyal, 1986) pour plus de détails sur cette espèce virtuelle).

3.2.4 Opérateurs séparables

Définition 3.2.4. *On dit qu'un opérateur moléculaire est **séparable** si on peut le décomposer sous la forme d'un produit*

$$\frac{X^n D^k}{K} = \frac{X^n}{K_1} \cdot \frac{D^k}{K_2},$$

où $K_1 \leq \mathbb{S}_n$ et $K_2 \leq \mathbb{S}_k$. Plus généralement, on dit que toute combinaison linéaire d'opérateurs séparables est séparable.

Exemples 3.2.3. 1) X^3D^2 et $C(X)E_2(D) + E(D)$ sont des opérateurs séparables.

2) $E(XD)$ et X^3D^3/K , où $K = \langle (123)(456) \rangle \leq \mathbb{S}_{3,3}$, ne sont pas séparables.

Notons que les opérateurs séparables ne sont pas fermés sous la \odot -composition. Par exemple, si on considère $\mathcal{C}_4(D)$ et $\mathcal{C}_4(X)$, qui sont des opérateurs séparables, on obtient en appliquant la \odot -substitution que

$$\mathcal{C}_4(D) \odot \mathcal{C}_4(X) = \mathcal{C}_4(X)\mathcal{C}_4(D) + X^3D^3 + 4X^2D^2 + E_2(XD) + 6XD + 3,$$

qui n'est pas séparable puisque

$$E_2(XD) = \frac{X^2D^2}{\langle (12)(34) \rangle}$$

ne l'est pas.

Remarque 3.2.5. Les détails du calcul de $\mathcal{C}_4(D) \odot \mathcal{C}_4(X)$ sont donnés dans l'Appendice F.

Cependant, dans le cas où $K_2 = \{\text{id}\}$, on a que cette sous-classe d'opérateurs séparables est close sous la \odot -composition et forme une algèbre :

$$(A(X)D^k) \odot (B(X)D^\ell) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A(X)B^{(i)}(X)D^{k+\ell-i}.$$

De tels opérateurs ont été utilisés par Mishna pour définir la notion d'espèce holonome [10]. De plus, lorsque les deux sous-groupes K_1 et K_2 sont triviaux, les opérateurs correspondants sont dits **classiques** et ils forment une algèbre (en utilisant des coefficients complexes dans leurs développements moléculaires) sous les opérations d'addition et de \odot -composition. Cette dernière algèbre est isomorphe (en utilisant des coefficients complexes dans les développements moléculaires) à la \mathcal{C} -algèbre de Weyl classique engendrée par X et D .

CONCLUSION

Le but de ce travail était d'explicitier et d'élaborer la théorie des opérateurs combinatoires différentiels généraux introduite par G. Labelle et C. Lamathe (Labelle et Lamathe, 2007). Pour ce faire, nous devions préalablement définir différents concepts relatifs à la théorie des espèces de structures. Nous avons donc défini et généralisé des notions de base de la théorie des espèces (Chapitres 1 et 2) et par la suite, nous avons introduit une récente catégorie d'opérateurs combinatoires différentiels due à A. Joyal (Joyal, 1981) : les opérateurs combinatoires différentiels purs (Chapitre 2). Nous avons ensuite explicité dans le dernier chapitre les concepts relatifs aux opérateurs combinatoires différentiels généraux en détaillant davantage les démonstrations des résultats énoncés par les auteurs et en démontrant ceux dont la preuve était absente. Finalement, nous avons donné une série d'exemples et d'applications permettant de concrétiser la théorie introduite dans ce travail.

Dans ce mémoire, nous avons construit les tables génératrices des opérateurs moléculaires $\frac{X^n D^k}{H}$, pour $n + k \leq 4$, ce qui nous a permis de produire la liste exhaustive de ces mêmes opérateurs moléculaires. De plus, nous avons construit une table de simplification pour la \odot -substitution introduite au Chapitre 3 (pour les opérateurs moléculaires $\frac{X^n D^k}{H}$, $n + k \leq 4$) et nous avons élaboré une méthode de calcul simplifiée pour les cas qui n'étaient pas inclus dans la dite table de simplification.

La théorie des opérateurs combinatoires différentiels $\Omega(X, D)$ n'en est qu'à ses débuts. Plusieurs applications futures sont à prévoir.

APPENDICE A

DÉFINITIONS ET NOTATIONS DES ESPÈCES DE STRUCTURES RENCONTRÉES DANS CE MÉMOIRE

Espèce	Notation	L'ensemble des structures sur un ensemble fini U
Permutations	S	$S[U] = \{\sigma : U \rightarrow U, \sigma \text{ bijective}\}$
Ordres linéaires	L	$L[U] = \{l : l \text{ est un ordre total sur } U\}$
Ensembles	E	$E[U] = \{U\}$
Ens. à n élém.	E_n	$E_n[U] = U$ si $ U = n$, \emptyset sinon
Ens. pairs	E_{pair}	$E_{pair}[U] = U$ si $ U $ paire, \emptyset sinon
Ens. impairs	E_{imp}	$E_{imp}[U] = U$ si $ U $ impaire, \emptyset sinon
Parties	\mathcal{P}	$\mathcal{P}[U] = \{A : A \subseteq U\}$
Scrutins	Scru	$Scru[U] = \{l : l \text{ est une liste d'ensembles non vides}\}$
Graphes simples	\mathcal{G}	$\mathcal{G}[U] = \{g : g \text{ est un graphe simple sur } U\}$
Gra. s. connexes	\mathcal{G}^c	$\mathcal{G}^c[U] = \{g : g \text{ est un graphe s. connexe sur } U\}$
Gra. s. disconn.	\mathcal{G}^d	$\mathcal{G}^d[U] = \{g : g \text{ est un graphe s. disconnexe sur } U\}$
Graphes orientés	\mathcal{G}_o	$\mathcal{G}_o[U] = \{g : g \text{ est un graphe orienté sur } U\}$
Partitions	Par	$Par[U] = \{\pi : \pi \text{ est une partition de } U\}$
Part. partielles	Par_p	$Par_p[U] = \{\pi : \pi \text{ est une partition d'une partie } V \text{ de } U\}$
1	1	$1[U] = \{U\}$ si $ U = 0$, \emptyset sinon.
Vide	0	$0[U] = \emptyset$, pour tout U .
Singletons	X	$X[U] = \{U\}$ si $ U = 1$, \emptyset sinon.

Espèce	Notation	L'ensemble des structures sur un ensemble fini U
Arbres	a	$a[U] = \{ g : g \text{ est un graphe s. conn. sans cycles sur } U \}$
Arborescences	\mathcal{A}	$\mathcal{A}[U] = \{ a : a \text{ est un arbre pointé sur } U \}$
Haies	\mathcal{H}	$\mathcal{H}[U] = \{ h : h \text{ est une liste d'arbores. disjointes sur } U \}$
Vertébrés	\mathcal{V}	$\mathcal{V}[U] = \{ v : v \text{ est une arborescence pointée sur } U \}$
Cycles	\mathcal{C}	$\mathcal{C}[U] = \{ \sigma \in S[U] : \sigma \text{ est une perm. circulaire sur } U \}$
Parties à k élém.	\mathcal{P}_k	$\mathcal{P}_k[U] = \{ A \subseteq U : A = k \}$
Arbores. binaires	\mathcal{B}	$\mathcal{B}[U] = \{ b : b \text{ est une arborescence binaire sur } U \}$
Cycles de long. n	\mathcal{C}_n	$\mathcal{C}_n[U] = \{ c \in \mathcal{C}[U] : c \text{ est un cycle de longueur } n \}$
Pieuvres	Pieu	$\text{Pieu}[U] = \{ p : p \text{ est un cycle de listes non vides sur } U \}$

APPENDICE B

QUELQUES SÉRIES GÉNÉRATRICES ET INDICATRICES

Espèce de structures	Série génératrice exponentielle
0	$0(x) = 0$
1	$1(x) = 1$
X	$X(x) = x$
L	$L(x) = \frac{1}{1-x}$
S	$S(x) = \frac{1}{1-x}$
E	$E(x) = e^x$
\mathcal{P}	$\mathcal{P}(x) = e^{2x}$
E^\pm	$E^\pm(x) = 2e^x - (1 + x)$
E_{pair}	$E_{pair}(x) = \cosh(x)$
E_{imp}	$E_{imp}(x) = \sinh(x)$
\mathcal{C}	$\mathcal{C}(x) = -\log(1 - x)$
Par	$\text{Par}(x) = \exp(e^x - 1)$
\mathcal{B}	$\mathcal{B}(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$

Tableau B.1 Séries génératrices exponentielles : $F(x)$

Espèce de structures	Série génératrice exponentielle
\mathcal{G}	$\mathcal{G}(x) = \sum_{n \geq 0} 2^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!}$
\mathcal{G}_o	$\mathcal{G}_o(x) = \sum_{n \geq 0} 2^{n^2} \frac{x^n}{n!}$
\mathcal{A}	$\mathcal{A}(x) = \sum_{n \geq 1} n^{n-1} \frac{x^n}{n!}$
a	$a(x) = \sum_{n \geq 1} n^{n-2} \frac{x^n}{n!}$

Tableau B.2 Séries génératrices exponentielles : $F(x)$

Espèce de structures	Série génératrice des types d'isomorphismes
L	$\tilde{L}(x) = (1 - x)^{-1}$
S	$\tilde{S}(x) = \prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^{-1}$
E	$\tilde{E}(x) = (1 - x)^{-1}$
\mathcal{P}	$\tilde{\mathcal{P}}(x) = (1 - x)^{-2}$
E_{pair}	$\widetilde{E_{pair}}(x) = (1 - x^2)^{-1}$
E_{imp}	$\widetilde{E_{imp}}(x) = x(1 - x^2)^{-1}$
\mathcal{C}	$\tilde{\mathcal{C}}(x) = x(1 - x)^{-1}$
Par	$\widetilde{\text{Par}}(x) = \prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^{-1}$

Tableau B.3 Séries génératrices des types d'isomorphismes : $\tilde{F}(x)$

Espèce de structures	Série indicatrices de cycles
L	$Z_L(x_1, x_2, \dots) = (1 - x_1)^{-1}$
S	$Z_S(x_1, x_2, \dots) = \prod_{k \geq 1} (1 - x_k)^{-1}$
E	$Z_E(x_1, x_2, \dots) = \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{i}\right)$
\mathcal{P}	$Z_{\mathcal{P}}(x_1, x_2, \dots) = Z_E^2$
\mathfrak{C}	$Z_{\mathfrak{C}}(x_1, x_2, \dots) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{k} \log(1 - x_k)$

Tableau B.4 Séries indicatrices de cycles : $Z_F(x_1, x_2, \dots)$

APPENDICE C

ESPÈCES MOLÉCULAIRES ET LEURS DÉRIVÉES, ($N \leq 4$)

n	Espèce moléculaire	Dérivée	n	Espèce moléculaire	Dérivée
0	1	0	4	$E_2 \circ E_2$	$X E_2$
1	X	1		$X E_3$	$E_3 + X E_2$
2	E_2	X		E_2^2	$2X E_2$
	X^2	$2X$		P_4^{bic}	X^3
3	E_3	E_2		C_4	X^3
	C_3	X^2		$X C_3$	$C_3 + X^3$
	$X E_2$	$E_2 + X^2$		$X^2 E_2$	$2X E_2 + X^3$
	X_3	$3X^2$		$E_2(X^2)$	$2X^3$
4	E_4	E_3		X^4	$4X^3$
	E_4^\pm	C_3			

Tableau C.1 Espèces moléculaires et leurs dérivées, ($n \leq 4$)

APPENDICE D

TABLES GÉNÉRATRICES ET LISTE EXHAUSTIVE DES OPÉRATEURS MOLÉCULAIRES $\frac{X^N D^K}{H}$, POUR $N + K \leq 4$

Les tables qui suivent sont contruites selon le schéma

Graphe de l'espèce moléculaire
Espèce moléculaire
Opérateur moléculaire correspondant

Remarque D.0.6. *Les opérateurs différentiels moléculaires associés aux cas $n + k = 0$ et $n + k = 1$ sont 1 , X et D .*

Tableau D.1 Tables génératrices des opérateurs moléculaires $\frac{X^n D^k}{H}$, pour $n + k \leq 4$

$n+k=2$					
$E_2(X)$	XT	$E_2(T)$	X^2	XT	T^2
$E_2(X)$	XD	$E_2(D)$	X^2	XD	D^2

$n+k=3$					
$E_3(X)$	$E_2(X)T$	$XE_2(T)$	$E_3(T)$	$\mathcal{C}_3(X)$	X^2T
$E_3(X)$	$E_2(X)D$	$XE_2(D)$	$E_3(D)$	$\mathcal{C}_3(X)$	X^2D
XT^2	$\mathcal{C}_3(T)$	$XE_2(X)$	X^2T	$E_2(X)T$	$XE_2(T)$
XD^2	$\mathcal{C}_3(D)$	$XE_2(X)$	X^2D	$E_2(X)D$	$XE_2(D)$
XT^2	$TE_2(T)$	X^3	X^2T	XT^2	T^3
XD^2	$DE_2(D)$	X^3	X^2D	XD^2	D^3

$$n+k=4$$

$E_4(X)$	$E_3(X)T$	$E_2(X)E_2(T)$	$XE_3(T)$	$E_4(T)$	$E_4^\pm(X)$
$E_4(X)$	$E_3(X)D$	$E_2(X)E_2(D)$	$XE_3(D)$	$E_4(D)$	$E_4^\pm(X)$
$C_3(X)T$	$E_2(X)T$	$XC_3(T)$	$E_4^\pm(T)$	$E_2 \circ E_2(X)$	$XE_2(X)T$
$C_3(X)D$	$E_2(X)D$	$XC_3(D)$	$E_4^\pm(D)$	$E_2 \circ E_2(X)$	$XE_2(X)D$
$E_2(X)E_2(T)$	$E_2(X)T$	$XE_2(T)T$	$E_2 \circ E_2(T)$	$XE_3(X)$	$E_3(X)T$
$E_2(X)E_2(D)$	$E_2(X)D$	$XE_2(D)D$	$E_2 \circ E_2(D)$	$XE_3(X)$	$E_3(X)D$
$XE_2(X)T$	$E_2(X)T^2$	$X^2E_2(T)$	$XE_2(T)T$	$XE_3(T)$	$TE_3(T)$
$XE_2(X)D$	$E_2(X)D^2$	$X^2E_2(D)$	$XE_2(D)D$	$XE_3(D)$	$DE_3(D)$
$E_2^2(X)$	$XE_2(X)T$	$XE_2(X)T$	$E_2(X)E_2(T)$	$XTE_2(T)$	$XTE_2(T)$
$E_2^2(X)$	$XE_2(X)D$	$XE_2(X)D$	$E_2(X)E_2(D)$	$XDE_2(D)$	$XDE_2(D)$

$$n+k=4$$

$E_2^2(T)$	$P_4^{bic}(X)$	X^3T	$E_2(XT)$	$E_2(XT)$	$E_2(X)E_2(T)$
$E_2^2(D)$	$P_4^{bic}(X)$	X^3D	$E_2(XD)$	$E_2(XD)$	$E_2(X)E_2(D)$
XT^3	$P_4^{bic}(T)$	$C_4(X)$	X^3T	X^2T^2	$E_2(XT)$
XD^3	$P_4^{bic}(D)$	$C_4(X)$	X^3D	X^2D^2	$E_2(XD)$
XT^3	$C_4(T)$	$XC_3(X)$	$C_3(X)T$	X^3T	X^2T^2
XD^3	$C_4(D)$	$XC_3(X)$	$C_3(X)D$	X^3D	X^2D^2
X^2T^2	XT^3	XT^3	$TC_3(T)$	$X^2E_2(X)$	$XE_2(X)T$
X^2D^2	XD^3	XD^3	$DC_3(D)$	$X^2E_2(X)$	$XE_2(X)D$
X^3T	$E_2(X)T^2$	X^2T^2	$X^2E_2(T)$	XT^3	$XTE_2(T)$
X^3D	$E_2(X)D^2$	X^2D^2	$X^2E_2(D)$	XD^3	$XDE_2(D)$

$n+k=4$					
$T^2 E_2(T)$	$E_2(X^2)$	$X^3 T$	$X^2 T^2$	$E_2(XT)$	XT^3
$D^2 E_2(D)$	$E_2(X^2)$	$X^3 D$	$X^2 D^2$	$E_2(XD)$	XD^3
$E_2(T^2)$	X^4	$X^3 T$	$X^2 T^2$	XT^3	T^4
$E_2(D^2)$	X^4	$X^3 D$	$X^2 D^2$	XD^3	D^4

$n+k$	Opérateurs moléculaires
0	1
1	X, D
2	$E_2(X), XD, E_2(D), X^2, D^2$
3	$E_3(X), E_2(X)D, XE_2(D), E_3(D), \mathcal{C}_3(X), X^2D, XD^2, \mathcal{C}_3(D), XE_2(X), E_2(X)D, XE_2(D), DE_2(D), X^3, D^3$
4	$E_4(X), E_3(X)D, E_2(X)E_2(D), XE_3(D), E_4(D), E_4^\pm(X), \mathcal{C}_3(X)D, E_2^2(X), E_2(XD), X\mathcal{C}_3(D), E_4^\pm(D), E_2 \circ E_2(X), XE_2(X)D, XE_2(D)D, E_2^2(D), E_2 \circ E_2(D), XE_3(X), E_3(X)D, E_2(X)D^2, X^2E_2(D), XE_3(D), DE_3(D), P_4^{bic}(X), X^3D, XD^3, P_4^{bic}(D), \mathcal{C}_4(X), X^2D^2, X\mathcal{C}_3(X), D\mathcal{C}_3(D), X^2E_2(X), D^2E_2(D), E_2(X^2), \mathcal{C}_4(D), E_2(D^2), X^4, D^4$

Tableau D.2 Liste des opérateurs moléculaires $\frac{X^n D^k}{H}$, pour $n+k \leq 4$

APPENDICE E

TABLE DE SIMPLIFICATION POUR LA \odot -SUBSTITUTION

La table de simplification suivante est déduite de la formule générale pour la \odot -substitution (Théorème 3.1.9) :

$\Omega_2(X, T) \odot \Omega_1(X, T)$	$\Omega_3(X, T)$
$A(X) \odot B(X)$	$A(X) \cdot B(X)$
$A(X) \odot B(T)$	$A(X) \cdot B(T)$
$A(X) \odot \Omega(X, T)$	$A(X) \cdot \Omega(X, T)$
$A(T) \odot B(X)$	$A(T) \cdot B(X) + A'(T) \cdot B'(X) + \dots$ $+ \sum_{n \geq 2} \langle E_n(T_0 \frac{\partial}{\partial T}) A(T), E_n(T_0 \frac{\partial}{\partial X}) B(X) \rangle \Big _{X, T}$
$A(T) \odot B(T)$	$A(T) \cdot B(T)$
$A(T) \odot \Omega(X, T)$	$A(T + T_0) \times_{T_0} \Omega(X + T_0, T) \Big _{T_0:=1}$
$\Omega(X, T) \odot B(T)$	$\Omega(X, T) \cdot B(T)$
$\Omega(X, T) \odot B(X)$	$\Omega(X, T + T_0) \times_{T_0} B(X + T_0) \Big _{T_0:=1}$
$(A(X) \cdot B(T)) \odot C(X)$	$A(X) \cdot (B(T) \odot C(X))$
$(A(X) \cdot B(T)) \odot C(T)$	$A(X) \cdot B(T) \cdot C(T)$
$A(X) \odot (B(X) \cdot C(T))$	$A(X) \cdot B(X) \cdot C(T)$
$A(T) \odot (B(X) \cdot C(T))$	$(A(T) \odot B(X)) \cdot C(T)$
$(A_2(X) \cdot B_2(T)) \odot (A_1(X) \cdot B_1(T))$	$A_2(X) \cdot (B_2(T) \odot A_1(X)) \cdot B_1(T)$

Tableau E.1 Table de simplification pour la \odot -substitution

APPENDICE F

MÉTHODE DE CALCUL SIMPLIFIÉ POUR LA \odot -SUBSTITUTION POUR LES ESPÈCES MOLÉCULAIRES $\frac{X^N D^K}{H}$, $N + K \leq 4$

En regardant la liste des opérateurs moléculaires du Tableau D.1, on remarque que les opérateurs $\frac{X^n D^k}{H}$, où $n + k \leq 4$, sont tous séparables à l'exception de $E_2(XD)$. Le calcul de

$$\frac{X^{n_1} D^{k_1}}{H_1} \odot \frac{X^{n_2} D^{k_2}}{H_2}, n_i + k_i \leq 4, i = 1, 2,$$

peut donc être simplifié en utilisant la formule

$$(A_2(X) \cdot B_2(T)) \odot (A_1(X) \cdot B_1(T)) = A_2(X) \cdot (B_2(T) \odot A_1(X)) \cdot B_1(T)$$

introduite dans l'Appendice E, à l'exception du cas $E_2(XT)$ qui doit être traité à part.

On se réduit donc au calcul de $B(T) \odot A(X)$, qui peut se faire comme suit :

$$\begin{aligned} B(T) \odot A(X) &= B(T) \cdot A(X) + B'(T) \cdot A'(X) \\ &+ \sum_{2 \leq n \leq 4} \langle E_n(T_0 \frac{d}{dT}) B(T), E_n(T_0 \frac{d}{dX}) A(X) \rangle \Big|_{X,T}. \end{aligned}$$

Pour le terme $B'(T) \odot A'(X)$, on peut alors utiliser le Tableau C.1, qui donne la liste des espèces moléculaires et de leur dérivée. Pour ce qui est du calcul des formes bilinéaires

$$\langle E_n(T_0 \frac{d}{dT}) B(T), E_n(T_0 \frac{d}{dX}) A(X) \rangle \Big|_{X,T},$$

on peut utiliser les formules d'addition pour $B(T + T_0)$ et $A(X + T_0)$, car $E_n(T_0 \frac{d}{dT}) B(T)$ correspond à la somme des termes de degré n en T_0 dans $B(T + T_0)$ et $E_n(T_0 \frac{d}{dX}) A(X)$

correspond à la somme des termes de degré n en T_0 dans $A(X + T_0)$. Les Tableaux F.1 et F.2 qui suivent donnent les formules d'addition pour toutes les espèces moléculaires $B(T)$ de degrés ≤ 4 en T et les espèces moléculaires $A(X)$ de degrés ≤ 4 en X . Le Tableau F.3 donne, quant à lui, les formules d'addition pour $E_2(X \cdot (T + T_0))$ et $E_2((X + T_0) \cdot T)$.

$B(T)$	$B(T + T_0)$
1	1
T	$T + T_0$
$E_2(T)$	$E_2(T) + TT_0 + E_2(T_0)$
T^2	$T^2 + 2TT_0 + T_0^2$
$E_3(T)$	$E_3(T) + E_2(T)T_0 + TE_2(T_0) + E_3(T_0)$
$\mathcal{C}_3(T)$	$\mathcal{C}_3(T) + T^2T_0 + TT_0^2 + \mathcal{C}_3(T_0)$
$TE_2(T)$	$TE_2(T) + T^2T_0 + E_2(T)T_0 + TE_2(T_0) + TT_0^2 + T_0E_2(T_0)$
T^3	$T^3 + 3T^2T_0 + 3TT_0^2 + T_0^3$
$E_4(T)$	$E_4(T) + E_3(T)T_0 + E_2(T)E_2(T_0) + TE_3(T_0) + E_4(T_0)$
$E_4^\pm(T)$	$E_4^\pm(T) + \mathcal{C}_3(T)T_0 + E_2(TT_0) + T\mathcal{C}_3(T_0) + E_4^\pm(T_0)$
$E_2 \circ E_2(T)$	$E_2 \circ E_2(T) + TE_2(T)T_0 + E_2(T)E_2(T_0) + E_2(TT_0) + TT_0E_2(T_0) + E_2 \circ E_2(T_0)$
$TE_3(T)$	$TE_3(T) + TE_2(T)T_0 + E_3(T)T_0 + T^2E_2(T_0) + E_2(T)T_0^2 + TE_3(T_0) + TE_2(T_0)T_0 + T_0E_3(T_0)$
$E_2^2(T)$	$E_2^2(T) + 2TE_2(T)T_0 + 2E_2(T)E_2(T_0) + T^2T_0^2 + 2TE_2(T_0)T_0 + E_2^2(T_0)$
$P_4^{bic}(T)$	$P_4^{bic}(T) + T^3T_0 + 3E_2(TT_0) + TT_0^3 + P_4^{bic}(T_0)$
$\mathcal{C}_4(T)$	$\mathcal{C}_4(T) + T^3T_0 + T^2T_0^2 + E_2(TT_0) + TT_0^3 + \mathcal{C}_4(T_0)$
$T\mathcal{C}_3(T)$	$T\mathcal{C}_3(T) + T^3T_0 + \mathcal{C}_3(T)T_0 + 2T^2T_0^2 + T\mathcal{C}_3(T_0) + TT_0^3 + T_0\mathcal{C}_3(T_0)$
$T^2E_2(T)$	$T^2E_2(T) + T^3T_0 + 2TE_2(T)T_0 + T^2E_2(T_0) + 2T^2T_0^2 + E_2(T)T_0^2 + 2TT_0E_2(T_0) + TT_0^3 + T_0^2E_2(T_0)$
$E_2(T^2)$	$E_2(T^2) + 2T^3T_0 + 2T^2T_0^2 + 2E_2(TT_0) + 2TT_0^3 + E_2(T_0^2)$
T^4	$T^4 + 4T^3T_0 + 6T^2T_0^2 + 4TT_0^3 + T_0^4$

Tableau F.1 Formules d'addition pour les espèces moléculaires $B(T)$ de degrés ≤ 4

$A(X)$	$A(X + T_0)$
1	1
X	$X + T_0$
$E_2(X)$	$E_2(X) + XT_0 + E_2(T_0)$
X^2	$X^2 + 2XT_0 + T_0^2$
$E_3(X)$	$E_3(X) + E_2(X)T_0 + XE_2(T_0) + E_3(T_0)$
$C_3(X)$	$C_3(X) + X^2T_0 + XT_0^2 + C_3(T_0)$
$XE_2(X)$	$XE_2(X) + X^2T_0 + E_2(X)T_0 + XE_2(T_0) + XT_0^2 + T_0E_2(T_0)$
X^3	$X^3 + 3X^2T_0 + 3XT_0^2 + T_0^3$
$E_4(X)$	$E_4(X) + E_3(X)T_0 + E_2(X)E_2(T_0) + XE_3(T_0) + E_4(T_0)$
$E_4^\pm(X)$	$E_4^\pm(X) + C_3(X)T_0 + E_2(X)T_0 + XC_3(T_0) + E_4^\pm(T_0)$
$E_2 \circ E_2(X)$	$E_2 \circ E_2(X) + XE_2(X)T_0 + E_2(X)E_2(T_0) + E_2(X)T_0 + XT_0E_2(T_0) + E_2 \circ E_2(T_0)$
$XE_3(X)$	$XE_3(X) + XE_2(X)T_0 + E_3(X)T_0 + X^2E_2(T_0) + E_2(X)T_0^2 + XE_3(T_0) + XE_2(T_0)T_0 + T_0E_3(T_0)$
$E_2^2(X)$	$E_2^2(X) + 2XE_2(X)T_0 + 2E_2(X)E_2(T_0) + X^2T_0^2 + 2XE_2(T_0)T_0 + E_2^2(T_0)$
$P_4^{bic}(X)$	$P_4^{bic}(X) + X^3T_0 + 3E_2(X)T_0 + XT_0^3 + P_4^{bic}(T_0)$
$C_4(X)$	$C_4(X) + X^3T_0 + X^2T_0^2 + E_2(X)T_0 + XT_0^3 + C_4(T_0)$
$XC_3(X)$	$XC_3(X) + X^3T_0 + C_3(X)T_0 + 2X^2T_0^2 + XC_3(T_0) + XT_0^3 + T_0C_3(T_0)$
$X^2E_2(X)$	$X^2E_2(X) + X^3T_0 + 2XE_2(X)T_0 + X^2E_2(T_0) + 2X^2T_0^2 + E_2(X)T_0^2 + 2XT_0E_2(T_0) + XT_0^3 + T_0^2E_2(T_0)$
$E_2(X^2)$	$E_2(X^2) + 2X^3T_0 + 2X^2T_0^2 + 2E_2(X)T_0 + 2XT_0^3 + E_2(T_0^2)$
X^4	$X^4 + 4X^3T_0 + 6X^2T_0^2 + 4XT_0^3 + T_0^4$

Tableau F.2 Formules d'addition pour les espèces moléculaires $A(X)$ de degrés ≤ 4

$E_2(X \cdot (T + T_0))$	$E_2(XT) + X^2TT_0 + E_2(XT_0)$
$E_2((X + T_0) \cdot T)$	$E_2(XT) + XT^2T_0 + E_2(TT_0)$

Tableau F.3 Formules d'addition pour $E_2(X \cdot (T + T_0))$ et $E_2((X + T_0) \cdot T)$

Voici un exemple de calcul à l'aide des Tableaux précédents :

Pour $B(T) = \mathcal{C}_4(T)$ et $A(X) = \mathcal{C}_4(X)$, on a que

$$\mathcal{C}_4(T + T_0) = \mathcal{C}_4(T) + T^3 T_0 + T^2 T_0^2 + E_2(TT_0) + TT_0^3 + \mathcal{C}_4(T_0)$$

et

$$\mathcal{C}_4(X + T_0) = \mathcal{C}_4(X) + X^3 T_0 + X^2 T_0^2 + E_2(XT_0) + XT_0^3 + \mathcal{C}_4(T_0),$$

et que $\mathcal{C}'_4(T) = T^3$ et $\mathcal{C}'_4(X) = X^3$.

De plus, on obtient

$$E_2(T_0 \frac{d}{dT}) \mathcal{C}_4(T) = T^2 T_0^2 + E_2(TT_0),$$

$$E_3(T_0 \frac{d}{dT}) \mathcal{C}_4(T) = TT_0^3,$$

$$E_4(T_0 \frac{d}{dT}) \mathcal{C}_4(T) = \mathcal{C}_4(T_0) = E_4(T_0 \frac{d}{dX}) \mathcal{C}_4(X),$$

$$E_2(T_0 \frac{d}{dX}) \mathcal{C}_4(X) = X^2 T_0^2 + E_2(XT_0),$$

$$E_3(T_0 \frac{d}{dX}) \mathcal{C}_4(X) = XT_0^3.$$

Donc,

$$\begin{aligned} E_2(T_0 \frac{d}{dT}) \mathcal{C}_4(T) \times_{T_0} E_2(T_0 \frac{d}{dX}) \mathcal{C}_4(X) &= (T^2 T_0^2 + E_2(TT_0)) \times_{T_0} (X^2 T_0^2 + E_2(XT_0)) \\ &= (T^2 T_0^2 \times_{T_0} X^2 T_0^2) + (T^2 T_0^2 \times_{T_0} E_2(XT_0)) \\ &\quad + (E_2(TT_0) \times_{T_0} X^2 T_0^2) + (E_2(TT_0) \times_{T_0} E_2(XT_0)), \end{aligned}$$

où

$$T^2 T_0^2 \times_{T_0} X^2 T_0^2 = 2T^2 T_0^2 X^2,$$

$$T^2 T_0^2 \times_{T_0} E_2(XT_0) = T^2 T_0^2 X^2,$$

$$E_2(TT_0) \times_{T_0} X^2 T_0^2 = T^2 T_0^2 X^2,$$

$$E_2(TT_0) \times_{T_0} E_2(XT_0) = E_2(XT_0T),$$

$$\begin{aligned} E_3(T_0 \frac{d}{dT}) \mathcal{C}_4(T) \times_{T_0} E_3(T_0 \frac{d}{dX}) \mathcal{C}_4(X) &= TT_0^3 \times_{T_0} XT_0^3 \\ &= 6T XT_0^3, \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{C}_4(T_0) \times_{T_0} \mathcal{C}_4(T_0) = 2\mathcal{C}_4(T_0) + T_0^4.$$

En posant $T_0 := 1$ et en sommant, on obtient finalement que

$$\mathcal{C}_4(D) \odot \mathcal{C}_4(X) = \mathcal{C}_4(X)\mathcal{C}_4(D) + X^3 D^3 + 4X^2 D^2 + E_2(XD) + 6XD + 3.$$

RÉFÉRENCES

- Auger, P., G. Labelle et P. Leroux. 2002. *Combinatorial addition formulas and applications*, Advances in Applied Mathematics **28** 302–342.
- Bergeron F., G. Labelle et P. Leroux. 1998. *Combinatorial species and tree-like structures*, in : Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. **67**, Cambridge University Press.
- Bodirsky, M., E. Fusy, M. Kang et S. Vigerske. 2007. *An unbiased pointing operator for unlabelled structures, with applications to counting and sampling*, to appear in the 18-th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, New Orleans.
- Gessel, I. 1987. Enumerative applications of symmetric functions, Proceedings of the 17-th Séminaire Lotharingien, Publication I.R.M.A. Strasbourg 229/S-08, 5–21.
- Gessel, I. et G. Labelle. 1995. *Lagrange Inversion for Species*, Journal of Combinatorial Theory, Ser. A **72** 95–117.
- Joyal, A. 1981. *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics **42** 1–82.
- Joyal, A. 1986. *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, in : Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, P.Q., in : Lecture notes in Mathematics vol **1234**, Springer-Verlag, Berlin 126–159.
- Labelle, G. 1985 *Éclotions combinatoires appliquées à l'inversion multidimensionnelle des séries formelles*, Journal of Combinatorial Theory A, **39** 52–82.
- Labelle, G. et C.Lamathe. 2007. *A Theory of general combinatorial differential operators : Formal Power Series and Algebraic Combinatorics* Tianjin (Chine).
- Mishna M. 2005. *An Holonomic Approach to Algebraic Combinatorics*, Monographie du LaCIM, **34**, Université du Québec à Montréal.