

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

INÉGALITÉ DE HITCHIN-THORPE POUR VARIÉTÉS À BORDS ET À
CUSPS FEUILLETÉS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

CONCENTRATION MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

PAR

AHMED JIHAD ZEROUALI

SEPTEMBRE 2014

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»



À Barbara Fernandez-Rousseau et Ahmed "Chlih" Zerouali.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| RÉSUMÉ | vii |
| CHAPITRE I | |
| INTRODUCTION ET NOTATIONS | 1 |
| 1.1 Introduction | 1 |
| 1.2 Remerciements | 3 |
| 1.3 Notations | 4 |
| CHAPITRE II | |
| RÉSUMÉ DES NOTIONS PRÉLIMINAIRES | 7 |
| 2.1 Formules d'Atiyah-Patodi-Singer | 7 |
| 2.1.1 La signature d'une variété à bord | 9 |
| 2.1.2 La caractéristique d'Euler d'une variété à bord | 12 |
| 2.1.3 La limite adiabatique de l'invariant η | 14 |
| 2.2 La formule de G-signature | 16 |
| 2.3 L'invariant rho d'un revêtement fini | 17 |
| 2.4 Notions sur les feuilletages | 19 |
| CHAPITRE III | |
| HITCHIN-THORPE I - VARIÉTÉS COMPACTES | 25 |
| 3.1 Formes normales du tenseur de courbure | 25 |
| 3.1.1 Rudiments sur les structures de courbure | 25 |
| 3.1.2 Décompositions de C^2V , C^1V et $\Lambda^p V$ | 29 |
| 3.1.3 Cas de $\dim V = 4$ | 35 |
| 3.1.4 Décompositions du tenseur de courbure sur une variété riemannienne | 36 |
| 3.2 L'inégalité de Hitchin-Thorpe | 40 |
| 3.2.1 Formes de Pontrjagin et d'Euler en fonction de R | 40 |
| 3.2.1.1 Notations | 40 |
| 3.2.1.2 Forme d'Euler | 41 |
| 3.2.1.3 Formes de Pontrjagin | 42 |
| 3.2.2 L'inégalité de Hitchin-Thorpe | 43 |
| CHAPITRE IV | |
| HITCHIN-THORPE II - VARIÉTÉS NON-COMPACTES | 47 |
| 4.1 Métriques de type ϕ et \mathcal{F} | 47 |
| 4.1.1 ϕ -métriques | 47 |
| 4.1.2 \mathcal{F} -métriques | 55 |

| | | |
|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.2 | Inégalités de Hitchin-Thorpe | 58 |
| 4.2.1 | Hypothèses, notations et faits généraux | 58 |
| 4.2.2 | Formules d'indice en dimension $4k$ | 59 |
| 4.2.3 | Dimension 4 et inégalités | 63 |
| 4.2.4 | Quelques exemples | 67 |
| APPENDICE A | | |
| SYMBOLES DE CHRISTOFFEL DE ϕ -MÉTRIQUES | | 73 |
| A.1 | Symboles de Christoffel d'une ϕ -métrique produit | 73 |
| A.1.1 | Inversion d'une ϕ -métrique produit | 73 |
| A.1.2 | Liste des symboles de Christoffel d'une ϕ -métrique produit | 75 |
| A.2 | Symboles de Christoffel associés à une ϕ -métrique exacte | 76 |
| A.2.1 | Inversion d'une ϕ -métrique exacte | 76 |
| A.2.2 | Liste des symboles de Christoffel d'une ϕ -métrique exacte | 78 |
| APPENDICE B | | |
| PREUVES COMPLÉMENTAIRES | | 83 |
| B.1 | Invariance du tenseur de Weyl sous transformations conformes | 83 |
| B.2 | Termes de Chern-Simons pour ϕ -métriques | 86 |
| BIBLIOGRAPHIE | | 95 |

RÉSUMÉ

L'objectif du présent travail est d'obtenir une obstruction topologique à l'existence d'une métrique d'Einstein sur une variété riemannienne de dimension quatre, et dont le bord est un espace feuilleté.

Dans un premier temps, on définit les notions préliminaires et on expose les résultats de la théorie de l'indice employés subséquentment, tels que la formule d'Atiyah-Patodi-Singer, la limite adiabatique de l'invariant η , l'invariant ρ pour des revêtements finis et la formule de G-signature. Dans la seconde partie, on considère d'abord l'espace des opérateurs de courbure associé à un espace Euclidien, et on étudie sa décomposition en facteurs irréductibles sous l'action du groupe orthogonal. Dans le cadre d'une variété différentiable, ceci est utilisé pour obtenir la forme normale du tenseur de Riemann, dont on se sert pour démontrer l'inégalité de Hitchin-Thorpe pour une variété compacte sans bord.

Vient alors la partie centrale du mémoire, celle concernant les variétés non-compactes munies de structures de fibrés ou de feuilletages à l'infini. Dans ses deux premières sections, on construit le Φ -fibré tangent tel que défini par Mazzeo et Melrose, ainsi que le F -fibré tangent étudié par Rochon, et une fois munis de métriques riemanniennes adaptées à leurs géométries, on prouve que l'on peut construire des formes caractéristiques lisses pour des variétés à bords et à cusps fibrés ou feuilletés. Dans la dernière section, on utilise la décomposition du tenseur de Riemann en dimension quatre en conjonction avec les formules d'indice pour redémontrer l'inégalité de Hitchin-Thorpe de Dai et Wei (dans la Φ -géométrie), et ensuite pour établir une inégalité du même type qui soit adaptée à la F -géométrie de Rochon. Pour illustrer ces résultats, on présente enfin quelques exemples construits à partir des instantons gravitationnels asymptotiquement localement plats.

MOTS CLÉS : Géométrie riemannienne, métriques d'Einstein, théorie de l'indice, invariant η , Hitchin-Thorpe.



CHAPITRE I

INTRODUCTION ET NOTATIONS

1.1 Introduction

Comme le titre de ce travail l'indique, le thème principal des chapitres qui suivent est celui des inégalités de type Hitchin-Thorpe. Ce sujet fut initié par Hitchin, Singer et Thorpe au travers des articles (Hit74) et (ST69), où ils obtinrent une inégalité reliant des invariants topologiques d'une variété lisse de dimension quatre admettant une métrique d'Einstein. Outre ces deux travaux fondateurs, cette inégalité fit l'objet de maintes extensions, telles que celles de Gromov (Gro82) et de Kotschick (Kot12) pour le cas de variétés compactes et sans bord, et plus récemment celle de Dai et Wei dans (DW07), concernant les variétés à bord fibré, telles que considérées par Mazzeo et Melrose dans (MM99), c'est à dire des variétés lisses M dont le bord est l'espace total d'une fibration d'espaces lisses $F \rightarrow \partial M \xrightarrow{\phi} N$. La finalité du présent mémoire est d'obtenir une telle inégalité pour des variétés à bord ou à cusp feuilleté, telles que définies et étudiées par Rochon dans (Roc12) et (GRR). Pour de telles variétés, le bord est la base d'un revêtement fini $\nu : \tilde{Y} \rightarrow M$, avec \tilde{Y} l'espace total d'une fibration $F \rightarrow \tilde{Y} \xrightarrow{\phi} N$.

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension quatre munie d'un bord $\partial M \neq \emptyset$, et notons $\chi(M)$ sa caractéristique d'Euler, $\tau(M)$ sa signature de Hirzebruch, et $\tilde{\eta}(\partial M, g)$ l'invariant éta de la signature. Si M admet une métrique d'Einstein, c'est à dire une solution des équations éponymes (dans le vide), alors les invariants $\chi(M)$, $\tau(M)$ et $\tilde{\eta}(\partial M, g)$ sont reliés comme suit

$$\chi(M) \geq \frac{3}{2} |\tau(M) + \tilde{\eta}(\partial M, g)|.$$

Ceci est ce qu'on appelle une inégalité de Hitchin-Thorpe. La première section du chapitre II rappelle les définitions des constituants de cette inégalité, présente les formules d'Atiyah-Patodi-Singer donnant $\chi(M)$ et $\tau(M)$, et expose des résultats permettant de calculer le terme $\tilde{\eta}(\partial M, g)$ pour des bords ∂M fibrés. Pour les bords feuilletés, l'invariant éta est un

peu plus subtil à déterminer, raison pour laquelle on discute la formule de G -signature à la section 2.2, ainsi que de l'invariant rho d'un revêtement fini à la section 2.3. Enfin, on termine le chapitre des préliminaires avec quelques rudiments sur les feuilletages. La grande majorité des résultats présentés dans ce chapitre ne sont pas démontrés, et seront utilisés pour la plupart au chapitre IV.

Si on suppose que (M, g) est compacte et sans bord, l'inégalité ci dessus se réduit à $\chi(M) \geq 3|\tau(M)|/2$, qui est la version démontrée par Hitchin et Thorpe. Une façon de la démontrer est d'utiliser le fait qu'en dimension quatre, le tenseur de Riemann associé à g admet la décomposition en facteurs irréductibles suivante

$${}^gR = \begin{pmatrix} {}^gW^+ + \frac{{}^gS}{12}\text{Id} & {}^gZ \\ {}^gZ^t & {}^gW^- + \frac{{}^gS}{12}\text{Id} \end{pmatrix},$$

où ${}^gW = \text{diag}\{{}^gW^+, {}^gW^-\}$ est le tenseur de Weyl, gS est la courbure scalaire, et où

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^gZ \\ {}^gZ^t & 0 \end{pmatrix}$$

est la partie sans trace de la courbure de Ricci. Avec cette décomposition, on peut réexprimer les formules de Gauss-Bonnet-Chern et de Hirzebruch comme suit

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\|{}^gW^+\|^2 + \|{}^gW^-\|^2 + \frac{{}^gS^2}{24} - \|{}^gZ\|^2 \right) dVol, \\ \frac{3}{2}\tau(M) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\|{}^gW^+\|^2 - \|{}^gW^-\|^2 \right) dVol. \end{aligned}$$

Si g est une métrique d'Einstein, on a ${}^gZ = 0$, et il suffit alors d'additionner et de soustraire les deux formules ci-dessus pour voir qu'effectivement $\chi(M) \geq 3|\tau(M)|/2$. Ceci est le contenu du chapitre III. Pour un espace vectoriel euclidien réel V , on étudie extensivement dans la section 3.1 les décompositions irréductibles de l'espace des opérateurs de 2-courbure $\mathcal{C}^2V = S^2\Lambda^2V$ sous l'action naturelle de $O(V)$ et $SO(V)$. Ceci permet de se concevoir le tenseur de Riemann dans un contexte purement algébrique, qui se transpose de façon immédiate au cas de variétés différentiables. En mettant en évidence quelques particularités de la dimension quatre, on obtient la décomposition de gR annoncée. Dans la section 3.2, on utilise le formalisme développé pour démontrer que les intégrands de la formule de Gauss-Bonnet-Chern et du théorème Hirzebruch peuvent s'exprimer comme les traces d'opérateurs de courbure appropriés, et en simplifiant ces expressions, on obtient les deux intégrales ci-dessus.

Vient alors le dernier chapitre, dont le point de départ est le suivant : Si (M, g) est une variété riemannienne quadridimensionnelle non compacte, et qu'à l'infini elle a une structure de bord

feuilleté ou fibré, comment démontre-t-on des inégalités de Hitchin-Thorpe dans ce contexte ? On commence par compactifier M à l'infini pour obtenir une variété \overline{M} dont le bord $\partial\overline{M}$ a l'une des géométries d'intérêt. En se donnant ensuite une métrique riemannienne g adaptée à la structure de $\partial\overline{M}$, on montre à l'aide des résultats du chapitre III que les formules d'Atiyah-Patodi-Singer du chapitre II peuvent s'exprimer comme suit en dimension quatre :

$$\chi(M) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\|{}^gW^+\|^2 + \|{}^gW^-\|^2 + \frac{{}^gS^2}{24} - \|{}^gZ\|^2 \right) dVol,$$

$$\frac{3}{2}(\tau(M) + \tilde{\eta}(\partial\overline{M}, g)) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M (\|{}^gW^+\|^2 - \|{}^gW^-\|^2) dVol.$$

En comparant une seconde fois ces deux intégrales dans le cas où ${}^gZ = 0$, on obtient la première inégalité ci-dessus. Dans la partie 4.1, on étudie des métriques riemanniennes adaptées aux structures de bords fibrés ou feuilletés, qui sont les métriques de type ϕ et \mathcal{F} . Le fait central étant que l'on peut composer des formes caractéristiques lisses à partir des courbures de telles métriques. Au début de la section 4.2, on se consacre aux formules d'indice pour des variétés non compactes M avec les comportements asymptotiques voulus, avant d'obtenir nos inégalités, et de finalement présenter quelques exemples.

1.2 Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de recherche F. Rochon, pour m'avoir introduit à la théorie de l'indice, ainsi que pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce projet. Les professeurs L-P. Arguin, C. Hamzaoui, S. Lu et M. Sijaj voient ce travail leur être dédié aussi, pour le temps précieux qu'ils m'ont accordé, pour leurs encouragements, et sans qui je ne serai pas là où je suis en ce moment.

Ava, Ali, Kenza, Adam et Jeanne : je m'excuse sincèrement de ne pas avoir été plus présent à vos côtés durant les années qui ont mené à ce mémoire, tout comme je suis désolé de vous avoir fait subir ma personne. Votre affection et votre support (sous toutes ses formes) restera à jamais gravé dans chaque particule élémentaire de mon être, et je ne vous en remercierai jamais assez. Je vous aime.

À mes amis, où que vous soyez, vous avez tous apporté quelque chose à ce mémoire, d'une façon ou d'une autre, et je vous en remercie chaleureusement. Si par contre il y en a parmi vous qui en sont déçus, considérez que c'est de votre faute aussi. Enfin, un grand merci à Rachel Ennamli, pour le temps qu'elle m'a consacré, et pour les paroles pleines de sagesse et d'inspiration dont elle m'a fait part lors du processus de rédaction.

1.3 Notations

Dans les chapitres qui suivent, on utilise la convention de sommation d'Einstein pour les calculs. On énumère ici les notations les plus fréquemment utilisées de ce travail.

Notations générales :

∂M : Bord de la variété M

$F \rightarrow E \xrightarrow{\phi} M$: Fibré localement trivial au-dessus de M , de projection ϕ et de fibre type F

$\Gamma(M, E), C^\infty(M, E)$: Sections lisses sur M à valeurs dans le fibré E

E^* : Fibré dual au fibré vectoriel E

$\Lambda^p E$: $p^{\text{ème}}$ puissance extérieure du fibré vectoriel E

$S^p E, E^{\odot p}$: $p^{\text{ème}}$ puissance tensorielle symétrisée du fibré vectoriel E

$\text{End}(E)$: Fibré des endomorphismes associé au fibré vectoriel E , isomorphe à $E^* \otimes E$

$\mathfrak{so}(E)$: Fibré des endomorphismes anti-symétriques du fibré euclidien E

TM, T^*M : Fibrés tangent et cotangent de M

$\mathfrak{X}(M)$: Champs de vecteurs lisses sur M

$\Omega^p(M)$: p -formes différentielles sur M

$\Omega^p(M, V)$: p -formes différentielles sur M à valeurs dans l'espace V

$\{e_i\}, \{e^i\}$: Repère local sur TM et repère dual associé sur T^*M

$\chi(M)$: Caractéristique d'Euler de M

$\tau(M)$: Signature de Hirzebruch de M

$x \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$: Fonction de définition du bord, telle que $\partial M = \{p \in M / x(p) = 0\}$

$c : [0, 1]_x \times \partial M \rightarrow M$: Voisinage tubulaire du bord

Objets associés à une métrique riemannienne :

g : Métrique riemannienne sur une variété M

${}^g\nabla$: Connexion de Levi-Civita de la métrique g

${}^g\omega$: 1-forme de connexion associée à ${}^g\nabla$

${}^g\Omega$: 2-forme de courbure de ${}^g\nabla$

${}^gR, R$: Tenseur de Riemann associé à une métrique g

${}^gS, S$: Courbure scalaire d'une métrique g

${}^gW, {}^gW^\pm$: Tenseur de Weyl associé à g , et ses parties auto et anti-auto duales

${}^gRic, {}^gZ$: Tenseur de Ricci associé à g , et composante hors diagonale de sa partie sans trace

$*_g$: Étoile de Hodge associée à g

${}^g B$: Opérateur de signature pair associé à g

${}^g A$: Opérateur de signature impair associé à g

$\eta({}^g A)$: Invariant éta de l'opérateur ${}^g A$

$a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta({}^g A_\epsilon)$: Limite adiabatique de l'invariant éta

$e(M, {}^g \nabla)$: Forme d'Euler calculée avec la courbure ${}^g \Omega$

$L(M, {}^g \nabla)$: L -polynôme de Hirzebruch calculé avec la courbure ${}^g \Omega$

Objets associés à des variétés à bord fibré ou feuilleté :

${}^\phi TM, {}^\phi T^*M, \text{End}({}^\phi TM)$: Fibrés associés à une structure de bord fibré

${}^{\mathcal{F}}TM, {}^{\mathcal{F}}T^*M, \text{End}({}^{\mathcal{F}}TM)$: Fibrés associés à une structure de bord feuilleté

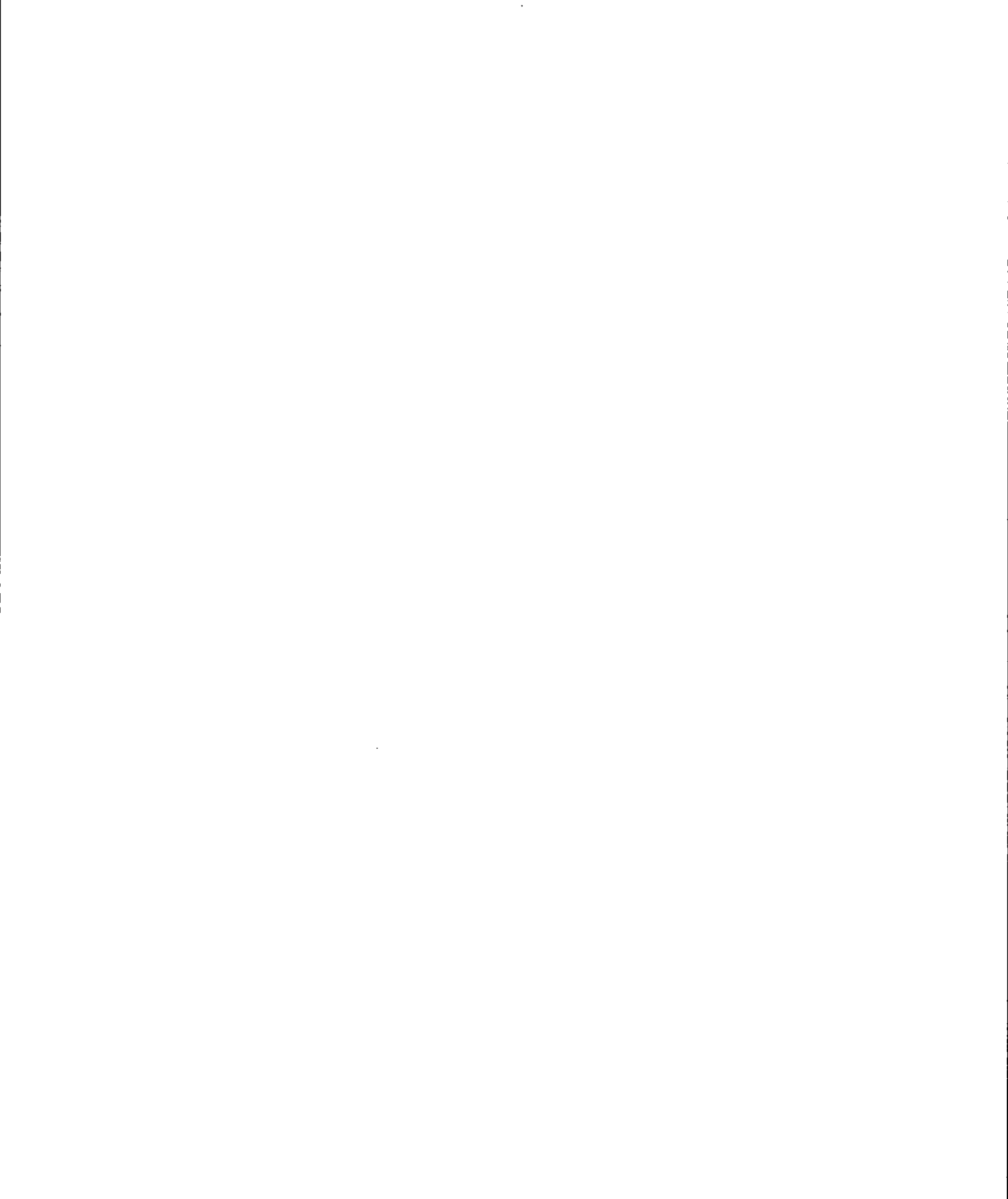
g_ϕ, \tilde{g}_ϕ : Métriques à bord fibré. Respectivement, ϕ -métrique exacte et ϕ -métrique produit

$g_{\mathcal{F}}, \tilde{g}_{\mathcal{F}}$: Métriques à bord fibré. Respectivement, \mathcal{F} -métrique exacte et \mathcal{F} -métrique produit

$g_d = x^2 g_\phi$: Métrique à cusp fibré

$g_{\mathcal{F}_c} = x^2 g_{\mathcal{F}}$: Métrique à cusp feuilleté

$\mathfrak{X}_\phi(M), \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M)$: Respectivement, les sections lisses de ${}^\phi TM$ et ${}^{\mathcal{F}}TM$



CHAPITRE II

RÉSUMÉ DES NOTIONS PRÉLIMINAIRES

2.1 Formules d'Atiyah-Patodi-Singer

Soit M une variété riemannienne à bord $\partial M \neq \emptyset$, qu'on supposera compacte, connexe, orientée et de dimension $2l$, avec des hypothèses similaires sur ∂M de dimension $(2l - 1)$. La formule d'indice d'Atiyah-Patodi-Singer (théorème (3.10) (APS75a)) établit un pont entre la géométrie, la topologie et l'analyse, et on en présente dans cette section deux cas particuliers : la signature de Hirzebruch $\tau(M)$ et de la caractéristique d'Euler $\chi(M)$. Avant d'entrer dans le vif du sujet, on rappelle quelques faits qu'on utilisera à répétition dans le reste de ce mémoire.

Métriques de type produit près du bord :

Puisque ∂M est une sous-variété immergée de M , il existe un voisinage $\mathcal{V} \supset \partial M$ diffeomorphe à $\mathbb{R}_+ \times \partial M$ (théorème (11.1) de (MS74)), ainsi qu'une fonction $r \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$ telle que

- r est choisie de façon à correspondre à la coordonnée \mathbb{R}_+ sur \mathcal{V} ;
- $r > 0$ sur $M \setminus \partial M$ et $\partial M = \{r = 0\}$;
- dr ne s'annule nulle part sur ∂M , le champ dual $\partial_r \in \mathfrak{X}(M)$ est normal au bord (en tout point de \mathcal{V}) et pointe vers l'intérieur de M .

On dira que \mathcal{V} est *un voisinage tubulaire* du bord, et que $r : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ est *une fonction de définition* du bord. Soit $g \in \Gamma(M, S^2T^*M)$ une métrique riemannienne sur M . On dit que g est de *type produit* près du bord (relativement à r , qu'on suppose fixée) si sur le voisinage tubulaire \mathcal{V} , cette métrique admet une décomposition de la forme $g \equiv dr \otimes dr + h$, avec $h \in \Gamma(\partial M, S^2T^*\partial M)$ une métrique riemannienne sur le bord (pouvant dépendre de r). On notera ${}^g\nabla$ la connexion de Levi-Civita de g , et ${}^g\Omega \in \Omega^2(M, \mathfrak{so}(TM))$ sa 2-forme de courbure.

Formes caractéristiques :

Étant donné que l'on s'intéresse à des interactions entre la géométrie et la topologie, on utilisera très souvent la théorie de Chern-Weil, dont le résultat central stipule que si $P \in S^*(\mathfrak{so}_{2l}^*)$ est un polynôme symétrique Ad-invariant sous $SO(2l)$, alors la forme $P(M, {}^g\nabla) := P({}^g\Omega) \in \Omega^*(M)$ est un représentant d'une classe caractéristique dans la cohomologie de de Rham. Même si $[P({}^g\Omega)] \in H^*(M)$ ne dépend pas de la connexion ${}^g\nabla$, on prendra toujours le soin de spécifier par rapport à quelle métrique on calcule nos formes caractéristiques pour les variétés à bord. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique autour de $z = 0$, on obtient des polynômes invariants en prenant le déterminant ou la trace de formes différentielles du type

$$f({}^g\Omega) = \sum_{j \geq 0} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} ({}^g\Omega)^{\wedge j} \in \Omega^{2*}(M, \mathfrak{so}(TM))$$

Les formes caractéristiques dont on fera usage sont définies par de telles expressions (voir section 1.5 de (BGV92) et appendice C de (MS74)).

Opérateurs différentiels elliptiques :

Dans les sous-sections qui suivent, on fait souvent référence à la notion d'opérateur différentiel elliptique, qu'on rappelle ici, en prenant pour acquis les propriétés fondamentales des espaces de Sobolev et des opérateurs de Fredholm sur des fibrés vectoriels (sections III.2 et III.5 de (LM89)). Soient E et F des fibrés vectoriels sur M . Un *opérateur différentiel elliptique* d'ordre $d \geq 0$ est un opérateur \mathbb{R} -linéaire $P : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, F)$ prenant la forme suivante dans une carte trivialisante $(\mathcal{U}, \{x^i\}_{i=1}^n)$ de M :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq d} A^\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \partial (x^2)^{\alpha_2} \dots \partial (x^n)^{\alpha_n}} ; \forall x \in \mathcal{U}$$

où pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on a $|\alpha| = \sum_{0 \leq j \leq n} \alpha_j$ et $A^\alpha \in \Gamma(M, \text{Hom}(E, F))$. Puisque P prend une telle forme indépendamment de la trivialisations locale (voir section III.1 de (LM89)), les coefficients $\{i^d A^\alpha\}_{|\alpha|=d}$ représentent un élément bien défini de $\Gamma(M, S^d TM \otimes \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F))$ qu'on note

$$\sigma(P)_x = i^d \sum_{|\alpha|=d} A^\alpha(x) \left(\bigodot_{j=1}^n [\partial_{x^j}^{\alpha_j}] \right)_x ; \forall x \in (\mathcal{U}, \{x^i\})$$

et qu'on appelle le *symbole principal* de $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ (\odot désigne le produit tensoriel symétrisé). Pour tout $\xi \in \Omega^1(M)$, le symbole principal définit un élément de $\Gamma(M, \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F))$ donné par

$$\sigma_\xi(P)_x = i^d \sum_{|\alpha|=d} A^\alpha(x) \prod_{j=1}^n (\xi_j)^{\alpha_j}$$

Pour $\text{rg}(E) = \text{rg}(F)$, on dit que $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ est *elliptique* si pour tous $\xi \in \Omega^1(M) \setminus \{0\}$ et $x \in M$, $\sigma_\xi(P)_x : E_x \rightarrow F_x$ est inversible. Notons $H_s^2(M, E)$ et $H_s^2(M, F)$ les espaces de

Sobolev de degrés $(2, s)$ des fibrés E et F (c.f. section III.2 de (LM89)). Les propriétés d'un opérateur elliptique $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ qui nous importent le plus sont les suivantes :

1. Pour tous $\mathcal{U} \subset M$ ouvert, $s \in \mathbb{R}$ et $u \in H_s^2(M, E)$, on a :

$$Pu|_{\mathcal{U}} \in C^\infty(\mathcal{U}, F) \implies u \in C^\infty(\mathcal{U}, E)$$

2. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ admet une extension en un opérateur $P : H_s^2(M, E) \rightarrow H_{s-d}^2(M, F)$ qui est de Fredholm, et d'indice

$$\text{Ind}(P) = \dim(\ker P) - \dim(\ker P^*)$$

où $P^* : H_s^2(M, F) \rightarrow H_{s-d}^2(M, E)$ est l'adjoint formel de P ;

3. Pour $F = E$ et P auto-adjoint, il existe une base orthonormée complète de $L^2(M, E)$ constituée de vecteurs propres de $P : L^2(E) \rightarrow L^2(E)$.

(Réf : résultats (5.2), (5.3), (5.5) et (5.9) dans le chapitre III de (LM89)).

2.1.1 La signature d'une variété à bord

La cohomologie $H^*(M)$ de M admet une structure d'anneau quand on la munit du produit cup :

$$\begin{aligned} H^p(M) \otimes H^q(M) &\longrightarrow H^{p+q}(M) \\ [\alpha] \otimes [\beta] &\longmapsto [\alpha] \smile [\beta] := [\alpha \wedge \beta] \end{aligned}$$

pour des représentants $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$ quelconques. Ce produit est bilinéaire, et hérite de la propriété fondamentale du produit extérieur :

$$[\alpha] \smile [\beta] = (-1)^{pq} [\beta] \smile [\alpha]$$

Le produit cup induit en particulier la forme quadratique suivante sur $H^l(M)$ ($\dim M = 2l$) :

$$\begin{aligned} Q : H^l(M) \otimes H^l(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\alpha] \otimes [\beta] &\longmapsto \langle [\alpha] \smile [\beta], [M] \rangle \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^p(M) := \left\{ \alpha \in \Omega^p(M) \mid \forall m \in \mathbb{N}, \forall \{X_j\}, \{Y_k\} \subset \mathfrak{X}(M) \right. \\ \left. (X_1 \circ \dots \circ X_m) \cdot \alpha(Y_1, \dots, Y_p)|_{\partial M} \equiv 0 \right\} \end{aligned}$$

l'espace des p -formes s'annulant à tous les ordres sur ∂M . On définit la cohomologie relative de M par rapport à ∂M comme étant

$$H^p(M, \partial M) := \left(\ker d \cap \hat{\Omega}^p(M) \right) / d\hat{\Omega}^{p-1}(M); \quad \forall p = 0, \dots, 2l$$

Pour tout $p = 0, \dots, n$, l'espace $H^p(M, \partial M)$ s'identifie au $p^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de de Rham à supports compacts $H_c^p(M \setminus \partial M)$ (c.f. (Mc193), sections 2.16 et 6.4). Les complexes $H^*(M)$, $H^*(\partial M)$ et $H^*(M, \partial M)$ sont reliés par la suite exacte longue suivante :

$$\dots \xrightarrow{\delta^*} H^p(M, \partial M) \xrightarrow{j} H^p(M) \xrightarrow{i} H^p(\partial M) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(M, \partial M) \xrightarrow{j} \dots$$

où i est induite par l'application de restriction au bord $\Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(\partial M)$, et j par l'inclusion canonique $\hat{\Omega}^p(M) \hookrightarrow \Omega^p(M)$.

La signature de Hirzebruch $\tau(M)$ est la signature de la forme quadratique induite par le produit cup sur l'image de $H^{\dim M/2}(M, \partial M)$ dans $H^{\dim M/2}(M)$, c'est-à-dire la signature de

$$Q : j(H^l(M, \partial M)) \otimes j(H^l(M, \partial M)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$[\alpha] \otimes [\beta] \longmapsto \langle [\alpha \wedge \beta], [M] \rangle = \int_M \alpha \wedge \beta$$

Les propriétés qui nous intéressent le plus de $\tau(M)$ sont qu'elle est un invariant par homotopie (orientée), et qu'elle est nulle si M est un bord orienté ou que $\dim M \neq 4k$ (résultats (19.3) et (19.4) dans (MS74)). De plus, si X et Y sont des variétés connexes de même dimension, on a (propositions (7.1) de (AS68) et 5.1.1 dans l'exposé I de (Bes81)) :

$$\tau(X \cup_{\partial X} Y) = \tau(X) + \tau(Y), \text{ si } \partial X \approx \partial Y$$

$$\tau(X \# Y) = \tau(X) + \tau(Y)$$

Soit $\dim M = 4k$, et g une métrique riemannienne de type produit près du bord. On définit maintenant les objets géométriques de l'énoncé du théorème d'indice. Soit $*_g : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{4k-p}(M)$ l'étoile de Hodge donnée par g (voir définitions et commentaires de la section 3.1.1). Si $\{e^i\}$ est une base locale quelconque de $\Omega^1(M)$, l'action de $*_g$ sur $\alpha = (p!)^{-1} \alpha_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$ est donnée par

$$(*_g \alpha)_{j_1 \dots j_{n-p}} = (p!)^{-1} \varepsilon_{j_1 \dots j_{n-p} i_1 \dots i_p} \alpha^{j_1 \dots j_p}; \quad \alpha^{j_1 \dots j_p} = g^{j_1 k_1} \times \dots \times g^{j_p k_p} \alpha_{k_1 \dots k_p}$$

où g^{ij} sont les composantes de l'inverse g^{-1} de la métrique, et $\varepsilon_{j_1 \dots j_{n-p} i_1 \dots i_p}$ est le symbole de Levi-Civita, tel que pour tout $q \in \mathbb{N}$, si $(i_1, i_2, \dots, i_q) = \sigma(1, 2, \dots, q)$ avec $\sigma \in S_q$, alors $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_q} = \text{sgn}(\sigma)$. On définit ensuite l'involution

$$\tau_g : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{4k-p}(M)$$

$$\alpha \longmapsto i^{p(p-1)+k} *_g \alpha$$

dont on note $\Omega_{\pm}^*(M)$ les sous-espaces propres associés aux valeurs ± 1 , et $\Lambda_{\pm}^* T^* M$ les sous-fibrés de $\Lambda^* T^* M$ correspondants. L'opérateur de signature impair de (M, g) est l'opérateur

différentiel elliptique de premier ordre suivant :

$$\begin{aligned} {}^g B : \Omega_+^*(M) &\longrightarrow \Omega_-^*(M) \\ \alpha &\longmapsto (d + d^*)\alpha \end{aligned}$$

où d^* est l'adjoint formel de la différentielle extérieure d :

$$\begin{aligned} d^* : \Omega^p(M) &\longrightarrow \Omega^{p-1}(M) \\ \alpha &\longmapsto -(*_g d *_g)\alpha \end{aligned}$$

Notons $*_{\partial}$ l'étoile de Hodge de $(\partial M, g_{\partial M})$. L'opérateur de signature impair sur ∂M associé à g est l'opérateur elliptique auto-adjoint défini comme étant

$$\begin{aligned} {}^g A : \Omega^p(\partial M) &\longrightarrow \Omega^p(\partial M) \\ \alpha &\longmapsto (-1)^{k+1+[p/2]}((-1)^p *_\partial d - d *_\partial)\alpha \end{aligned}$$

Dans un voisinage tubulaire de ∂M , on effectue l'identification $\Lambda_+^* T^* M|_{\partial M} \equiv \Lambda^* T^* \partial M$, pour avoir une décomposition ${}^g B = \sigma(\partial_r + {}^g A)$, où $\sigma : \Lambda_+^* T^* M|_{\partial M} \rightarrow \Lambda_-^* T^* M|_{\partial M}$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels, et on a $\tau(M) = \text{Ind}({}^g B) + \dim \ker({}^g A)/2$ (c.f. sections 4 de (APS75a) et 2.3 de (LP04)). La fonctionnelle η associée à l'opérateur ${}^g A|_{\Omega^{2k}} : \Omega^{2k}(\partial M) \rightarrow \Omega^{2k}(\partial M)$ est donnée par

$$\eta(s, {}^g A) := \sum_{\lambda \in \text{Spec}({}^g A) \setminus \{0\}} \text{sign}(\lambda) |\lambda|^{-s}$$

Cette application est holomorphe pour $\text{Re}(s) \gg 0$, et admet une extension méromorphe à \mathbb{C} qui est holomorphe en $s = 0$. Il est à noter que $\eta(0, {}^g A)$ représente la différence en nombre entre les valeurs propres positives et négatives de ${}^g A|_{\Omega^{2k}}$. C'est un invariant de structure différentiable de M appelé l'invariant η de ${}^g A$.

Le polynôme caractéristique dont on fait usage pour calculer $\tau(M)$ est le L -polynôme de Hirzebruch :

$$L(M, {}^g \nabla) = \det \left[\left(\frac{{}^g \Omega / 2\pi i}{\tanh({}^g \Omega / 2\pi i)} \right)^{1/2} \right]$$

où ${}^g \Omega \in \Omega^2(M, \mathfrak{so}(TM))$ est la forme de courbure de ${}^g \nabla$. Avec ces éléments en main, on énonce le

Théorème 2.1.1. Signature d'une variété à bord ((APS75a) 4.14)

Soit M une variété riemannienne à bord $\partial M \neq \emptyset$ et de dimension $4k$. Si g est une métrique de type produit près du bord, la signature de Hirzebruch de M est

$$\tau(M) = \int_M L(M, {}^g \nabla) - \frac{1}{2} \eta(0, {}^g A)$$

De plus, $\eta(s, {}^g A)$ est holomorphe pour $\text{Re}(s) > -\frac{1}{2}$.

Quelques remarques sont à l'ordre ici :

- Dans le cas d'une variété sans bord, cette formule se réduit à celle du théorème de Hirzebruch (ou d'Atiyah-Singer). Il n'y a pas la correction $\eta(0, {}^g A)/2$ provenant de ∂M , et on a

$$\tau(M) = \int_M L(M, {}^g \nabla)$$

$\tau(M)$ représente alors la signature de la forme quadratique $Q : H^{2k}(M) \otimes H^{2k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$, puisque l'on a $H^{2k}(M, \emptyset) \approx H_c^{2k}(M) \stackrel{\text{Poincaré}}{\approx} H^{2k}(M)$.

- Dans (APS75a), $\eta(0)$ n'est pas multiplié par le facteur $(1/2)$. Ceci vient du fait que dans les notations de cet article, $\eta(0)$ n'est pas l'invariant éta obtenu en calculant l'indice de ${}^g B$, mais en fait celui de la restriction aux formes de degré pair.

- La signature $\tau(M)$ est un invariant par homotopie orientée (Corollaire (19.6) de (MS74)), c'est-à-dire qu'elle est invariante sous homotopies préservant l'orientation.

- Concrètement, $L(M, {}^g \nabla)$ s'exprime en fonction des polynômes de Pontrjagin en $({}^g \Omega/2\pi)$, qui eux sont donnés par la formule

$$p_j \left(\frac{{}^g \Omega}{2\pi} \right) = (2\pi)^{-j} \sum_{i_1, \dots, i_{2j}} \sum_{\alpha \in S_{2j}} \epsilon(\alpha) \bigwedge_{r=1}^{2j} {}^g \Omega_{i_r}^{\alpha(i_r)} \in \Omega^{4j}(M)$$

Les quatre premiers termes du polynôme total $L(p_1, \dots, p_k)$ sont (c.f. (MS74), théorème (19.4)) :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{3} p_1 \\ L_2 &= \frac{1}{45} (7p_2 - p_1^2) \\ L_3 &= \frac{1}{945} (62p_3 - 13p_1 p_2 + 2p_1^3) \\ L_4 &= \frac{1}{14175} (381p_4 - 71p_3 p_1 - 19p_2^2 + 22p_2 p_1^2 - 3p_1^4) \end{aligned}$$

2.1.2 La caractéristique d'Euler d'une variété à bord

Soit M une variété à bord de dimension n , et g une métrique riemannienne de type produit près du bord. Dans ce contexte, on définit la caractéristique d'Euler comme étant ((Mel93), lemme (9.2)) :

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \dim H^p(M, \partial M)$$

On considère dans la suite que $\dim M = 2l$. Cet invariant topologique est obtenu comme l'indice de l'opérateur elliptique suivant

$$d + d^* : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

avec la graduation canonique de l'algèbre extérieure. La forme caractéristique qu'on intègre ici est la forme d'Euler :

$$e(M, {}^g\nabla) = Pf\left(\frac{{}^g\Omega}{2\pi}\right)$$

où on définit le pfaffien d'une matrice $A = [A_j^i] \in \mathfrak{so}_{2l}$ comme suit ((Bes81) p.189)

$$Pf(A) := \frac{1}{2^l l!} \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_{2l}} \epsilon(\alpha) \prod_{j=1}^l A_{\alpha(2j)}^{\alpha(2j-1)}$$

Cela donne en particulier

$$Pf(A)^2 = \det A; \forall a \in \mathbb{R} : Pf \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = a$$

La différence notable par rapport à la formule de signature est qu'il n'y a pas de contribution de ∂M , et on se réduit dans les faits à la formule de Gauss-Bonnet-Chern.

Théorème 2.1.2. Gauss-Bonnet-Chern ((APS75a), p.67)

La caractéristique d'Euler d'une variété compacte à bord de dimension paire est

$$\chi(M) = \int_M e(M, {}^g\nabla)$$

La raison pour laquelle il n'y a pas d'invariant éta pour $(d + d^*)$ fait l'objet de la discussion suivant le théorème (4.14) dans (APS75a). L'idée est de considérer des opérateurs elliptiques

$${}^g B_+ : \Omega_+^{2^*}(M) \rightarrow \Omega_-^{2^*+1}(M) \text{ et } {}^g B_- : \Omega_+^{2^*+1}(M) \rightarrow \Omega_-^{2^*}(M)$$

dont les indices sont

$$\begin{aligned} \text{Ind}({}^g B_+) &= \frac{1}{2}(\tau(M) + \chi(M)) = \frac{1}{2} \int_M (L(M, {}^g\nabla) + e(M, {}^g\nabla)) - \frac{1}{4}\eta(0, {}^g A) \\ \text{Ind}({}^g B_-) &= \frac{1}{2}(\tau(M) - \chi(M)) = \frac{1}{2} \int_M (L(M, {}^g\nabla) - e(M, {}^g\nabla)) - \frac{1}{4}\eta(0, {}^g A) \end{aligned}$$

Quand on isole $\chi(M)$, les corrections venant de ∂M s'annulent.

Plus loin, on fera usage des identités suivantes, pour X et Y des variétés de même dimension (théorème (3.1.1) de l'exposé I dans (Bes81)) :

$$\begin{aligned} \chi(X \cup Y) &= \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y) \\ \chi(X \# Y) &= \begin{cases} \chi(X) + \chi(Y) & ; \dim X = \dim Y = 2m + 1 \\ \chi(X) + \chi(Y) - 2 & ; \dim X = \dim Y = 2m \end{cases} \end{aligned}$$

2.1.3 La limite adiabatique de l'invariant η

Dans ce qui suit, on suppose que le lecteur est familier avec les fibrés de Clifford ((BGV92), Ch.3), les opérateurs de Dirac, et la formule d'indice générale d'Atiyah-Patodi-Singer ((APS75a), théorème (3.10) et formule 4.3). Soit M une variété riemannienne à bord ∂M , r telle que précédemment, et g de type produit près du bord. Si ${}^g D : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, F)$ est un opérateur de (type) Dirac entre fibrés vectoriels, on a toujours la décomposition suivante près de ∂M

$${}^g D = \sigma(\partial_r + {}^g A)$$

où $\sigma : E|_{\partial M} \rightarrow F|_{\partial M}$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels, et ${}^g A : \Gamma(\partial M, E|_{\partial M}) \rightarrow \Gamma(\partial M, E|_{\partial M})$ un opérateur elliptique d'ordre 1 auto-adjoint. La fonctionnelle η de ${}^g A$ est définie comme précédemment

$$\eta(s, {}^g A) := \sum_{\lambda \in \text{Spec}({}^g A) \setminus \{0\}} \text{sign}(\lambda) |\lambda|^{-s}$$

et on note $\eta({}^g A) \equiv \eta(s, {}^g A)|_{s=0}$ son invariant η .

Le fait motivant cette sous-section est le suivant : en toute généralité, l'invariant $\eta({}^g A)$ ne peut pas être obtenu comme l'intégrale sur ∂M d'une expression locale, puisqu'il n'est pas possible d'obtenir explicitement les valeurs propres de ${}^g A$. Moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur la géométrie de ∂M , on peut surmonter cette difficulté technique.

Dans (BC89), Bismut et Cheeger étudient la fonctionnelle η pour (M, g) satisfaisant ce qui suit :

- Le bord est une fibration $F \rightarrow \partial M \xrightarrow{\phi} N$, avec F et N des variétés spin compactes (sans bord), et $\dim \partial M$ est impair.
- La métrique g sur M prend la forme

$$g|_{\partial M} = \phi^* g_N + g_F$$

sur le bord, où g_N est une métrique riemannienne sur la base N , et où l'annihilateur de $g_F \in \Gamma(\partial M, S^2 T^* \partial M)$ correspond au complément orthogonal par rapport à $g|_{\partial M}$ de l'espace tangent aux fibres de ∂M .

- En tout point $y \in \partial M$, l'opérateur de Dirac $D^{F,y}$ sur $\phi^{-1}(\{y\}) \approx F$ est inversible.

Soit $\Omega^N \in \Omega^2(N, \mathfrak{so}(TN))$ la 2-forme de courbure de la connexion de Levi-Civita de g_N , et Ω^F celle de la connexion obtenue par la projection de la connexion de Levi-Civita de $g|_{\partial M}$ sur $V\partial M (= \ker \phi_*) \subset T\partial M$; et soit $\mathcal{W} \rightarrow \partial M$ un fibré hermitien muni d'une connexion unitaire $\nabla^{\mathcal{W}}$ dont la 2-courbure est $K^{\mathcal{W}}$. On considère la métrique riemannienne suivante sur ∂M

$$g_{\varepsilon|_{\partial M}} = \varepsilon^{-1} \phi^* g_N + g_F; \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

ainsi que l'opérateur de Dirac $D_\varepsilon^E : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ associé à $g_\varepsilon|_{\partial M}$ sur le fibré de Clifford $E = S \otimes \mathcal{W}$. Le résultat principal de (BC89) est le suivant

Théorème 2.1.3. ((BC89), 4.95 et 4.95)

Dans le contexte décrit ci-dessus, à mesure que $\varepsilon \rightarrow 0$, l'invariant éta $\eta(D_\varepsilon^E)$ admet une limite réelle finie qui est

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(D_\varepsilon^E) = (2\pi i)^{-k} \int_N \widehat{\mathcal{A}}(i\Omega^N) \wedge \hat{\eta}$$

où $\hat{\eta}$ est une forme dont la différentielle est

$$d\hat{\eta} = (2\pi i)^{-l} \int_F \widehat{\mathcal{A}}(i\Omega^F) \wedge \text{tr}[\exp(-K^{\mathcal{W}})]$$

et les entiers k et l sont les mêmes pour les cas $F^{(2l)} \rightarrow \partial M^{(2(k+l)-1)} \rightarrow N^{(2k-1)}$ et $F^{(2l-1)} \rightarrow \partial M^{(2(k+l)-1)} \rightarrow N^{(2k)}$.

On rappelle que le $\widehat{\mathcal{A}}$ -genre est donné par

$$\widehat{\mathcal{A}}(g\Omega) = \det \left(\sqrt{\frac{(g\Omega/2)}{\sinh(g\Omega/2)}} \right)$$

La quantité $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(D_\varepsilon^E)$ est ce qu'on appelle la *limite adiabatique de l'invariant éta*. Il est important de noter à ce stade que si D_ε^E est obtenu à partir de l'opérateur de signature de M , l'hypothèse d'invertibilité des opérateurs D^F sur les fibres n'est pas vérifiée. La suppression de cette hypothèse est la base de la thèse de X. Dai ((Dai91)), dans laquelle il dérive les formules obtenues dans ce cadre, et qui essentiellement contiennent des corrections à celles qui précèdent.

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, on s'intéresse à des variétés dont les bords sont des fibrés en cercles au-dessus de surfaces de Riemann, et on aura besoin des invariants éta de l'opérateur de signature. Ce cas particulier est traité dans (DZ95). On suppose que $\dim M = 4k$, et que l'on a un fibré $S^1 \rightarrow \partial M \xrightarrow{\phi} N^{(4k-2)}$. On considère ensuite $E \rightarrow N$, le fibré en droites complexes dont le sous-fibré en cercles $S^1(E) \rightarrow M$ est isomorphe à ∂M . Soit e_E un représentant de la classe d'Euler de E et définissons la forme bilinéaire

$$B_e : H^{2k-2}(N) \otimes H^{2k-2}(N) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a \otimes b \longmapsto \langle a \smile b \smile [e_E], [N] \rangle$$

Le résultat de Dai et Zhang auquel on fera appel est le suivant :

Théorème 2.1.4. ((DZ95) 3.2, (DW07) 5.4)

Soit M une variété de dimension $4k$ dont le bord est un fibré en cercles au-dessus d'une variété compacte N . Soit A_ε l'opérateur de signature impair associé à une métrique $\varepsilon^{-1} \phi^* g_N +$

g_F telle qu'en (1.3), et ∇^N la connexion de Levi-Civita de g_N . La limite adiabatique de l'invariant éta est donnée par

$$\frac{1}{2}a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta(A_\epsilon) = \int_N L(N, \nabla^N) \wedge [(\tanh e_E)^{-1} - e_E^{-1}] - \text{sign}(B_\epsilon)$$

Dans le cas où N est une surface d'Euler, cette formule se réduit à

$$\frac{1}{2}a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta(A_\epsilon) = \frac{\chi(E)}{3} - \epsilon(E)$$

où $\chi(E)$ est la caractéristique d'Euler de $E \rightarrow N$, et

$$\epsilon(E) = \begin{cases} -1 & ; \chi(E) < 0 \\ 0 & ; \chi(E) = 0 \\ 1 & ; \chi(E) > 0 \end{cases}$$

2.2 La formule de G-signature

La formule de G-signature est un cas particulier de la formule d'Atiyah-Bott-Lefschetz pour des complexes elliptiques. On considère dans cette section une variété riemannienne compacte orientée (\tilde{X}, g) à bord $\tilde{W} := \partial\tilde{X} \neq \emptyset$, dont la dimension est de $4k$, et qu'elle est munie d'une métrique g de type produit près du bord. Soit $\Gamma \subset \text{Ison}(\tilde{X})$ un groupe fini d'isométries préservant l'orientation de \tilde{X} , dont l'action sur cette variété est proprement discontinue, et ayant tous ses points fixes isolés et dans l'intérieur $\tilde{X} \setminus \tilde{W}$. On fera usage des notations suivantes :

- ${}^g\tilde{B}$ est l'opérateur de signature (pair) sur \tilde{X} associé à la métrique g , et ${}^g\tilde{A}$ est l'opérateur de signature (impair) sur \tilde{W} induit par la restriction $g|_{\tilde{W}}$.
- Pour une valeur propre $\lambda \in \text{Spec}{}^g\tilde{A} \setminus \{0\}$ (${}^g\tilde{A}$ est auto-adjoint et elliptique), on dénote l'espace propre associé $E_\lambda \subset L^2(\tilde{W}, \Lambda T^*\tilde{W})$.
- Pour $r = 0, \dots, m = 4k$, \hat{H}^r est l'image du groupe de cohomologie relative $H^r(\tilde{X}, \tilde{W}; \mathbb{C})$ dans la cohomologie absolue $H^r(\tilde{X}; \mathbb{C})$. On dénote \hat{H}_\pm^{2k} les sous-espaces de \hat{H}^{2k} sur lesquels la forme bilinéaire non-dégénérée induite par le produit cup est définie positive ou négative.
- Pour un élément $a \in \Gamma$, $a^*|_{\tilde{W}}$ est le morphisme induit en cohomologie ; a_λ^* est le morphisme induit sur E_λ , et $a_*|_x : T_x\tilde{X} \rightarrow T_{a(x)}\tilde{X}$ est sa différentielle en $x \in \tilde{X}$.

Soit $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ une isométrie, et $d\nu$ la forme volume associée à la structure riemannienne sur \tilde{X} . La différentielle $f_*|_p \in \text{Aut}(T_p\tilde{X})$ en $p \in \tilde{X}$ est aussi une isométrie, et on a une décomposition en 2-plans deux-à-deux orthogonaux $T_p\tilde{X} = \bigoplus_{j=1}^{2k} V_j$. Pour tout $j = 1, \dots, 2k$, on choisit une base orthogonale $\{e_j, e'_j\}$ de V_j , telle que

$$(d\nu)_p(e_1, e'_1, \dots, e_{2k}, e'_{2k}) = 1$$

Dans une telle base, on a pour tout $j = 1, \dots, 2k$ que

$$\begin{aligned} f_{*|p} \cdot e_j &= \cos [\theta_{f,j}(p)] e_j + \sin [\theta_{f,j}(p)] e'_j \\ f_{*|p} \cdot e'_j &= -\sin [\theta_{f,j}(p)] e_j + \cos [\theta_{f,j}(p)] e'_j \end{aligned}$$

Les réels $\{\theta_{f,j}(p)\}_{j=1}^{2k}$ constituent ce qu'on appelle un *système d'angles cohérents* pour $f_{*|p}$ (voir p.473 de (AB68)).

Pour une isométrie donnée $a \in \Gamma$, on définit les quantités topologiques suivantes :

- La G -signature par rapport à $a \in \Gamma$ est donnée par :

$$\tau(a, \tilde{X}) = \text{Tr}(a^*|_{\tilde{H}_+^{2k}}) - \text{Tr}(a^*|_{\tilde{H}_-^{2k}})$$

- La G -éta fonction par rapport à a est

$$\eta_a(s, {}^g\tilde{A}) = \sum_{\lambda \in \text{Spec } \tilde{A} \setminus \{0\}} \text{sgn } \lambda |\lambda|^{-s} \text{Tr}(a_\lambda^*)$$

Cette fonction est holomorphe pour $\text{Re}(s) \gg 0$ et admet une extension méromorphe au reste du plan complexe qui est holomorphe en $s = 0$ ((Don78)). Le G -éta invariant est $\eta_a(0, {}^g\tilde{A}) \equiv \eta_a({}^g\tilde{A})$, et pour $a = \text{Id}$, ceci est l'invariant éta discuté à la section précédente.

- On notera $\text{Fix}(a) \subset \tilde{X}$ l'ensemble des points fixes de l'isométrie $a \in \Gamma$. On définit le défaut de l'opérateur de signature en $z \in \text{Fix}(a)$ comme étant

$$\text{def}(a, {}^g\tilde{B})[z] = \prod_{j=1}^{2k} \frac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1} = \prod_{j=1}^{2k} (-i) \cot [\theta_{a,j}(z)/2]$$

où $\{\theta_{a,j}(z)\}_{j=1}^{2k}$ est un système d'angles cohérents pour $a_{*|z} \in \text{Aut}(T_z \tilde{X})$, et $\lambda_j = \exp [i\theta_{a,j}(z)]$ est l'une des deux valeurs propres conjuguées de $(a_{*|z})|_{V_j}$ (théorème (4.5.2) dans (Gil84), formule 7.2 dans (AB68)).

Un cas particulier d'un résultat de Donnelly (théorèmes (2.1) dans (Don78) et (4.5.8) dans (Gil84)), est celui où pour tout $a \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$, les ensembles $\text{Fix}(a)$ sont constitués de points isolés. On a dans ce contexte la formule de G -signature suivante

Théorème 2.2.1. *Sous les hypothèses de cette section, la formule de G -signature pour $a \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ est*

$$\tau(a, \tilde{X}) = \sum_{z \in \text{Fix}(a)} \text{def}(a, {}^g\tilde{B})[z] - \frac{1}{2} \eta_a(\tilde{A})$$

2.3 L'invariant rho d'un revêtement fini

On utilise les mêmes notations que la section précédente. On suppose ici que Γ agit de façon proprement discontinue et librement sur $(\tilde{W}, g_{\tilde{W}})$, et que $\nu : \tilde{W} \rightarrow W := \tilde{W}/\Gamma$ est le

revêtement fini obtenu. On note A_g l'opérateur de signature impair sur W , et associé à la métrique induite par $g \in \Gamma(\tilde{X}, S^2 T^* \tilde{X})$ (${}^g \tilde{A} = \nu^* A_g$).

Atiyah, Patodi et Singer ont étudié la signature avec coefficients locaux dans (APS75b). Dans le cas d'un revêtement fini $\tilde{W} \xrightarrow{\nu} W$ en particulier, si α est une représentation unidimensionnelle unitaire associée au fibré vectoriel plat $E_\alpha \rightarrow W$, ils ont démontré que :

$$\eta(A_{g,\alpha}) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{a \in \Gamma} \eta_a({}^g \tilde{A}) \chi_\alpha(a)$$

où $A_{g,\alpha}$ est l'opérateur induit par A_g sur $\Lambda T^* W \otimes E_\alpha$, et $\chi_\alpha(a)$ est le caractère de $a \in \Gamma$. Si α est la représentation triviale, ceci se réduit à (I.6 (Don78))

$$\eta(A_g) = (1/|\Gamma|) \sum_{a \in \Gamma} \eta_a({}^g \tilde{A})$$

L'invariant topologique différentiel qui nous préoccupe dans cette section est l'*invariant rho*, défini par :

$$\rho(\tilde{W}, W) = \frac{1}{2} \left[\eta({}^g \tilde{A}) - |\Gamma| \eta(A_g) \right] = -\frac{1}{2} \sum_{a \neq Id} \eta_a({}^g \tilde{A})$$

L'invariant éta dépend de la métrique riemannienne choisie, et la différence fondamentale par rapport à l'invariant rho est que ce n'est pas le cas pour ce dernier :

Proposition 2.3.1. *Soient g_i , $i = 0, 1$ deux métriques riemanniennes sur W , $\tilde{g}_i = \nu^* g_i$ les pullbacks associés sur \tilde{W} , et $\rho_i(\tilde{W}, W)$ les invariants rho correspondants. On a que*

$$\rho_0(\tilde{W}, W) = \rho_1(\tilde{W}, W)$$

Preuve. Posons $\tilde{M} = \tilde{W} \times I$, $M = W \times I$, $\tilde{\nu} = \nu \times \text{Id}_I$. Pour $s \in I$ on a une métrique sur M donnée par $h = (1-s)g_0 + sg_1 + ds^2$, dont on dénote $\tilde{h} = \tilde{\nu}^* h$ le pullback. Si \tilde{A}_i et A_i sont les opérateurs de signature associés à \tilde{g}_i et g_i respectivement, on a en vertu du théorème d'Atiyah-Patodi-Singer que leurs indices sont :

$$\tau(\tilde{M}) = \int_{\tilde{M}} L(\tilde{M}) - \frac{1}{2} [\eta(0, \tilde{A}_1) - \eta(0, \tilde{A}_0)]$$

$$\tau(M) = \int_M L(M) - \frac{1}{2} [\eta(0, A_1) - \eta(0, A_0)]$$

Par la définition donnée précédemment des ρ_i , ces formules permettent d'écrire

$$\rho_1(\tilde{W}, W) - \rho_0(\tilde{W}, W) = \left[\int_{\tilde{M}} L(\tilde{M}) - |\Gamma| \int_M L(M) \right] - \tau(\tilde{M}) + |\Gamma| \tau(M)$$

Le premier terme du membre de droite de cette équation est nul puisque $\tilde{\nu}$ est une isométrie locale. Pour voir que $\tau(\tilde{M})$ est nul, on considère la suite exacte longue donnée par la cohomologie relative

$$\dots \xrightarrow{\delta^*} H^{2k}(\tilde{M}, \partial\tilde{M}) \xrightarrow{j} H^{2k}(\tilde{M}) \xrightarrow{i} H^{2k}(\partial\tilde{M}) \xrightarrow{\delta^*} H^{2k+1}(\tilde{M}, \partial\tilde{M}) \xrightarrow{j} \dots$$

Étant donné que $\widetilde{M} = \widetilde{W} \times I$, on a $\partial\widetilde{M} = \widetilde{W} \sqcup -\widetilde{W}$, ainsi que les isomorphismes $H^{2k}(\widetilde{M}) \approx H^{2k}(\widetilde{W})$ et $H^{2k}(\partial\widetilde{M}) \approx H^{2k}(\widetilde{W}) \oplus H^{2k}(\widetilde{W})$. On montre que l'application i est injective. En effet, $i : H^{2k}(\widetilde{M}) \rightarrow H^{2k}(\partial\widetilde{M})$ est induite par la restriction au bord, et ce dernier contient deux composantes connexes difféomorphes avec orientations inverses. Avec les isomorphismes qu'on vient d'évoquer, i s'écrit

$$i \equiv i_+ \oplus i_- : H^{2k}(\widetilde{W}) \rightarrow H^{2k}(\widetilde{W}) \oplus H^{2k}(\widetilde{W}), [\alpha] \mapsto ([\alpha], [\alpha])$$

où i_{\pm} sont induites par les restrictions à $\pm\widetilde{W}$ des formes différentielles. On en conclut que $\text{im } i = \ker i = \{0\}$, ce qui revient à dire que l'image de $H^{2k}(\widetilde{M}, \partial\widetilde{M})$ dans $H^{2k}(\widetilde{M})$ est triviale, d'où $\tau(\widetilde{M}) = 0$. Similairement, on a que $\tau(M) = 0$, et ceci donne $\rho_1 = \rho_0$. \square

2.4 Notions sur les feuilletages

Soit une variété différentiable de dimension $n = p+q$. La matière présentée ici suit le chapitre premier de (MM03) et les sections 2.4.3 et 4.7-4.9 de (Pau07). On commence par développer le vocabulaire.

- Un *atlas de cartes feuilletées* sur M est un atlas \mathcal{F} de cette variété tel que

- i) $\forall (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A} : \varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{V}^{(p)} \times \mathcal{W}^{(q)}$, où $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$ et $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^q$.
- ii) $\forall (\mathcal{U}_i, \varphi_i), (\mathcal{U}_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ avec $i \neq j$ et $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, il existe un difféomorphisme $h_{ij} : \mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_j \rightarrow \mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_j$ tel que la fonction de transition s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) &\longrightarrow \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \\ (x, y) &\longmapsto (\psi_{ij}(x, y), h_{ij}(y)) \end{aligned}$$

- Une *plaque* d'une carte feuilletée $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ de M est une composante connexe d'une sous-variété $\varphi_i^{-1}(\mathcal{V}_i^p \times \{y\}) \subset M$ pour un point $y \in \mathcal{W}_i^{(q)}$ donné. De telles sous-variétés partitionnent la carte \mathcal{U}_i , et sont préservées par les difféomorphismes de transition de cartes.

- Une *feuille* \mathcal{L} de \mathcal{F} est une sous-variété lisse injectivement immergée dans M , et obtenue par union de plaques ($\mathcal{L} = \cup_i \varphi_i^{-1}(\mathcal{V}_i^p \times \{y\})$). On dit que deux points $x, y \in M$ appartiennent à la même feuille s'il existe une suite de cartes feuilletées $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^{l+1} \subset \mathcal{F}$, ainsi qu'une suite de points $x = p \in \mathcal{U}_1, \dots, p_i \in \mathcal{U}_i, \dots, y = p_{l+1} \in \mathcal{U}_{l+1}$ tels que $\forall i = 2, \dots, l+1$ les points p_i, p_{i-1} appartiennent à la même plaque dans \mathcal{U}_i . Pour $x \in M$, on dénote \mathcal{F}_x la feuille de \mathcal{F} passant par ce point. Pour $x \in M$, on dénote \mathcal{F}_x la feuille de \mathcal{F} passant par ce point.

- Un *feuilletage lisse* de codimension q de M est la donnée d'un atlas feuilleté \mathcal{F} maximal (pour l'inclusion), dont les feuilles sont de dimension $\dim M - q = p$. La donnée (M, \mathcal{F}) est ce qu'on nomme *une variété feuilletée*.

La condition (ii) sur les $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ci-dessus est de toute évidence locale, mais elle peut être réalisée globalement en raffinant l'atlas \mathcal{F} (c.f. section 1.2 de (MM03)). L'appartenance de deux points à la même feuille est une relation d'équivalence, ce qui implique que les feuilles de \mathcal{F} partitionnent M , et qu'il existe un quotient M/\mathcal{F} non-dénombrable en général qu'on appelle l'espace des feuilles, et qui peut ne pas être une variété lisse. Pour mieux comprendre ce qu'est un feuilletage sur une variété, il est utile de disposer des deux définitions alternatives qu'on aborde maintenant.

Cocycles de Haefliger :

Soit M une variété, $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert et $s_i : \mathcal{U}_i^{(n)} \rightarrow \mathcal{W}_i^{(q)} \subset \mathbb{R}^q$ un ensemble de submersions, telles que pour tous $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, il existe d'unique diffeomorphismes $\gamma_{ij} : s_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \rightarrow s_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ pour lesquels on a

$$\gamma_{ij} \circ (s_j|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}) = (s_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j})$$

Le triplet $(\mathcal{U}_i, s_i, \gamma_{ij})$ est ce qu'on appelle un *cocycle de Haefliger*, puisqu'en utilisant la composition ci-dessus sur $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k \neq \emptyset$, on obtient $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$. Si on dispose d'un ensemble de tels objets $\{(\mathcal{U}_i, s_i, \gamma_{ij})\}_{i, j \in I}$, on considère un atlas $\mathcal{F} = \{(\mathcal{O}_k, \varphi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $\mathcal{O}_k \subset \mathcal{U}_{i_k}$, et $\varphi_k : \mathcal{O}_k \rightarrow \mathbb{R}^n$ présente s_{i_k} sous la forme normale d'une submersion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$. On a alors que \mathcal{F} est un atlas feuilleté de M . Pour le voir, on remarque que les s_{i_k} étant des submersions, il existe des diffeomorphismes $\phi_k : s_{i_k}(\mathcal{O}_k) \rightarrow \widetilde{\mathcal{W}}^{(q)} \subset \mathbb{R}^q$ tels que

$$\phi_k \circ s_{i_k} = \pi_2 \circ \varphi_k ; (\pi_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q, (x, y) \mapsto y)$$

et donc, pour tous $(x, y) \in \varphi_l(\mathcal{O}_k \cap \mathcal{O}_l) \neq \emptyset$, et en définissant $h_{kl} = \phi_k \circ \gamma_{i_k i_l} \circ \phi_l^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} \pi_2([\varphi_k \circ \varphi_l^{-1}](x, y)) &= (\phi_k \circ s_{i_k} \circ \varphi_l^{-1})(x, y) = (\phi_k \circ \gamma_{i_k i_l} \circ s_{i_l} \circ \varphi_l^{-1})(x, y) \\ &= (\phi_k \circ \gamma_{i_k i_l} \circ \phi_l^{-1})(y) = h_{kl}(y) ; \text{ car } s_{i_l} \circ \varphi_l^{-1} = \phi_l^{-1} \circ \pi_2 \end{aligned}$$

Réciproquement, si $\mathcal{F} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ est un atlas feuilleté de M , il suffit de prendre $s_i = \pi_2 \circ \varphi_i$, avec $\gamma_{ij} \equiv h_{ij}$, et on obtient que $(\mathcal{U}_i, s_i, h_{ij})$ est un cocycle de Haefliger.

Distribution intégrable de TM de rang $(n - q)$:

Soit M une variété lisse de dimension $n = p + q$. On rappelle ici qu'une distribution lisse de p -plans de TM est une section lisse $E \in \Gamma(M, \mathcal{G}_p(TM))$ de la fibration grassmannienne de rang p de M , définie comme étant

$$\mathcal{G}_p(TM) = \sqcup_{x \in M} \mathcal{G}_p(T_x M)$$

où pour tout $x \in M$, $\mathcal{G}_p(T_x M)$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels (sur \mathbb{R}) de $T_x M$ de dimension p . Une distribution est dite *involutive* si $\Gamma(M, E) \subset \mathfrak{X}(M)$ est fermée sous les crochets de Lie.

Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension q de M . Pour $x \in M$, on note $T_x \mathcal{F} (\equiv T_x \mathcal{F}_x)$ le plan tangent à la feuille \mathcal{F}_x en ce point, et l'union $T\mathcal{F} = \sqcup_{x \in M} T_x \mathcal{F}$ est le *fibré tangent* de \mathcal{F} . Une distribution $E \subset TM$ est dite *complètement intégrable* s'il existe un feuilletage lisse \mathcal{F} de M tel que $E = T\mathcal{F}$. Notons que si un tel feuilletage existe, il est nécessairement unique. Pour le voir, on considère un second feuilletage \mathcal{F}' de M , et deux cartes feuilletées $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{F}$, $(\mathcal{U}', \varphi') \in \mathcal{F}'$, donnant une transition de la forme :

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : (y, z) \longmapsto (\psi(y, z), h(y, z)); (y, z) \in \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

Le fait que $T_x \mathcal{F}_x = T_x \mathcal{F}'_x$ implique que localement, l'application $h : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ ne dépend pas de $y \in \mathbb{R}^p$, ce qui signifie que pour des cartes feuilletées quelconques de \mathcal{F} et \mathcal{F}' , les transitions satisfont $\varphi' \circ \varphi^{-1} : (y, z) \longmapsto (\psi(y, z), h(z))$, ce qui implique que $(\mathcal{U}', \varphi') \in \mathcal{F}$, et par conséquent que $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Un des résultats fondamentaux de la théorie des feuilletages permet de définir un feuilletage \mathcal{F} sur une variété M comme l'existence d'un sous-fibré $T\mathcal{F} \subset TM$ tel que l'espace $\Gamma(M, T\mathcal{F}) \subset \mathfrak{X}(M)$ est fermé sous les crochets de Lie.

Théorème 2.4.1. (Fröbenius)

Une distribution de p -plans $E \subset TM$ est complètement intégrable si et seulement si elle est involutive.

Éléments de preuve :

(\implies) Si \mathcal{F} est un atlas feuilleté de M dont $\{(\mathcal{U}_i, s_i, h_{ij})\}_{i,j \in I}$ sont les cocycles de Haefliger, on définit pour tout $i \in I$ les sous-espaces suivants de TM :

$$E|_{\mathcal{U}_i} = \sqcup_{x \in \mathcal{U}_i} \ker(s_{i*}|_x) \equiv \ker(s_{i*})$$

Les fibres sont de dimension q constante, et les fonctions de transition sous changement de cartes sont clairement lisses, donc $E = \cup_{i \in I} E|_{\mathcal{U}_i}$, est bien une distribution de p -plans de TM . Il reste à montrer que $\Gamma(M, E) \subset \mathfrak{X}(M)$ est fermé sous les crochets de Lie. Soit $x \in \mathcal{U}_i$, en interprétant $ds_i = s_{i*} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^q$ comme un élément de $\Omega^1(M, \mathbb{R}^q)$, le fait qu'elle soit fermée implique que pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= d(ds_i)(X, Y) = \frac{1}{2} \left[X \cdot ds_i(Y) - Y \cdot ds_i(X) - ds_i([X, Y]) \right] \\ &\iff s_{i*}([X, Y]) = X \cdot ds_i(Y) - Y \cdot ds_i(X) \end{aligned}$$

Pour $X, Y \in \Gamma(M, E)$, la dernière équation permet de voir que

$$[X, Y]_{|\mathcal{U}_i} \in \ker(s_{i*}) = E_{|\mathcal{U}_i}$$

puisque $s_{i*}(X_{|\mathcal{U}_i}) = s_{i*}(Y_{|\mathcal{U}_i}) = 0$. Ceci étant vrai pour tous $i \in I$, on obtient que $[X, Y] \in \Gamma(M, E), \forall X, Y \in \Gamma(M, E)$ (ici, on a bien entendu $E = T\mathcal{F}$).

(\Leftarrow) On n'entre pas dans les détails techniques de la preuve, qui sont détaillées par exemple à la section 4.9 de (Pau07). Soit $E \subset TM$ une distribution involutive de rang p , $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M . Le problème est local, et on commence par utiliser l'hypothèse d'involativité pour montrer que si $\{e_k\}_{k=1}^p$ est une base locale de $\Gamma(\mathcal{U}_i, E_{|\mathcal{U}_i})$, alors on peut se réduire au cas où $\forall 1 \leq k \neq l \leq p$, on a $[e_l, e_k] = 0$. On montre ensuite par récurrence sur p qu'il existe un difféomorphisme $\varphi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $x \mapsto (x_1^1, \dots, x_p^1)$ tel que

$$e_k = \frac{\partial}{\partial x_i^k}; \forall k = 1, \dots, p$$

(pour ce faire, on utilise le théorème de redressement de champs de vecteurs). Avec $\pi_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ la projection canonique, on définit $s_i = \pi_2 \circ \varphi_i$ qui permet d'écrire $E_{|\mathcal{U}_i} = \ker(ds_i)$. Ensuite, si $(\mathcal{U}_j, \varphi_j)$ est une carte construite de la même façon avec $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset$ et $\{x_j^k\}_{k=1}^n$ les coordonnées obtenues sur \mathcal{U}_j , on a pour tous $k = 1, \dots, p$ que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i^k} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_j^l}{\partial x_i^k} \frac{\partial}{\partial x_j^l} \in \Gamma(\ker(ds_j|_{\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i})) = C^\infty(\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i) \cdot \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j^l} \right\}_{l=1}^p \right] \\ \implies \frac{\partial}{\partial x_i^k} &= \sum_{l=1}^p \frac{\partial x_j^l}{\partial x_i^k} \frac{\partial}{\partial x_j^l} \text{ et } \frac{\partial x_j^l}{\partial x_i^k} = 0, \forall l = p+1, \dots, n \end{aligned}$$

dont on déduit que $x_j^l = x_j^l(x_i^{p+1}, \dots, x_i^n)$ pour tous $l = p+1, \dots, n$, et que les transitions s'écrivent $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (x_j^1, \dots, x_j^n) \mapsto (\psi_{ij}(x_j^1, \dots, x_j^n), h_{ij}(x_j^{p+1}, \dots, x_j^n))$ pour un certain difféomorphisme $h_{ij} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$. On obtient alors les cocycles de Haefliger $\{(\mathcal{U}_i, s_i, h_{ij})\}_{i, j \in I}$ avec les conditions de compatibilité requises, et définissant un feuilletage \mathcal{F} unique tel que $E = T\mathcal{F}$. \square

On a introduit ces définitions alternatives parce que les cocycles de Haefliger accentuent la relation inhérente entre les feuilletages et les submersions, alors que le point de vue des distributions involutives et complètement intégrables permet de les visualiser en tant que fibrés vectoriels. On clôt ce chapitre avec quelques exemples classiques de feuilletages.

Exemple 1 : Feuilletages induits par des submersions

Soit $M^{(n)}$ et $N^{(q)}$ deux variétés lisses et $f : M \rightarrow N$ une submersion. On considère des atlas $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de M et $\{(\mathcal{W}_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ de N donnant la représentation en coordonnées de f sous la forme normale d'une submersion :

$$\psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1} \equiv \pi_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, (x, y) \mapsto y$$

f induit un feuilletage \mathcal{F}_f de M , dont les cocycles de Haefliger $\{(\mathcal{U}_i, s_i, h_{ij})\}_{i,j \in I}$ sont obtenus en posant $s_i = \psi_i \circ f|_{\mathcal{U}_i}$ et $h_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1}$. De façon équivalente, on définit \mathcal{F}_f comme étant le feuilletage de M dont le fibré tangent est $T\mathcal{F}_f := \sqcup_{x \in M} \ker(f_{*|x})$.

Exemple 2 : Feuilletage de Krönecker

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et définissons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - ay$. Celle-ci induit un feuilletage \mathcal{G}_f de \mathbb{R}^2 en droites de pente a^{-1} , puisque c'est une submersion. On considère ensuite le revêtement

$$\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2, (x, y) \longmapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$$

On obtient un feuilletage \mathcal{F} sur \mathbb{T}^2 en posant $T\mathcal{F} = \sqcup_{x \in \mathbb{R}^2} \pi_{*|x}(\ker f_{*|x})$, et dans ce cas, l'image par π de chaque droite $\{(x, a^{-1}x + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ (avec $b \in \mathbb{R}$) donne une feuille de \mathcal{F} dense dans \mathbb{T}^2 .

Exemple 3 : Un feuilletage résoluble par un fibré

Les bords de variétés M qu'on étudie plus loin sont des exemples de feuilletages résolubles par des fibrés, dans le sens que ∂M est la base d'un revêtement fini $\pi : \widetilde{W} \rightarrow \partial M$, où l'espace total est lui-même un fibré localement trivial $F \rightarrow \widetilde{W} \xrightarrow{\phi} N$. À la lumière des deux autres exemples, on a un feuilletage \mathcal{F} sur ∂M tel que $T\mathcal{F} = \sqcup_{x \in \widetilde{W}} \pi_{*|x}(\ker \phi_{*|x})$ et les feuilles sont les images par π des fibres de \widetilde{W} . Un parfait exemple d'une telle situation est la fibration de Hopf, où on décrit la 3-sphère comme étant la variété

$$S^3 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1\}$$

On définit sur S^3 la relation d'équivalence : $(z^1, z^2) \sim (w^1, w^2) \iff \exists \lambda \in S^1$ t.q. $(w^1, w^2) = (\lambda z^1, \lambda z^2)$, et on note $\phi : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ l'application quotient qu'elle induit. Celle-ci donne à S^3 la structure d'un fibré en cercles au-dessus de S^2 . D'autre part, on fait agir \mathbb{Z}_k de façon libre et proprement discontinue sur ce fibré, en prescrivant l'action du générateur comme suit :

- Dans les fibres, $1 \in \mathbb{Z}_k$ agit comme multiplication par $e^{i\frac{2\pi}{k}}$;
- Sur la base, $1 \in \mathbb{Z}_k$ agit par une rotation d'un angle $+\frac{2\pi}{k}$ autour d'un axe fixe.

Cette action induit un revêtement fini $\pi : S^3 \rightarrow S^3/\mathbb{Z}_k$ dont la base est feuilletée par les images des cercles de S^3 par π .



CHAPITRE III

HITCHIN-THORPE I - VARIÉTÉS COMPACTES

3.1 Formes normales du tenseur de courbure

Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien sur \mathbb{R} de dimension n . Le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}^p V := S^2 \Lambda^p V$ de $\Lambda^p V \otimes \Lambda^p V$ est appelé espace des structures de courbure d'ordre p de V . Si par exemple M est une variété riemannienne et $x \in M$ un point quelconque, le tenseur de Riemann est un élément de $\mathcal{C}^2 T_x M$, et le tenseur de Ricci est un élément de $\mathcal{C}^1 T_x M$. L'objectif principal de cette section est d'obtenir la décomposition de ces espaces en facteurs $O(V)$ et $SO(V)$ irréductibles, pour les valeurs $p = 1, 2$. Ceci mène ultimement à la forme normale du tenseur de courbure sur une variété riemannienne, et en dimension 4, à la décomposition prenant la forme

$$R = \begin{pmatrix} W^+ + \frac{S}{12} \text{Id} & \tilde{Z} \\ \tilde{Z}^t & W^- + \frac{S}{12} \text{Id} \end{pmatrix}$$

où $Z = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{Z} \\ \tilde{Z}^t & 0 \end{pmatrix}$ est la partie sans trace de la courbure de Ricci, S la courbure scalaire, et $W = \text{diag}\{W^+, W^-\}$ est le tenseur de Weyl.

3.1.1 Rudiments sur les structures de courbure

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , muni d'une métrique euclidienne $g(\cdot, \cdot) \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définitions et commentaires

- L'algèbre des structures de courbure est la sous-algèbre $\mathcal{C}^* V = \oplus_p \mathcal{C}^p V = \oplus_p S^2 \Lambda^p V$ de $\oplus_p \Lambda^p V \otimes \Lambda^p V$, munie du produit de Kulkarni-Nomizu \otimes , défini par

$$(\alpha_1 \otimes \beta_1) \otimes (\alpha_2 \otimes \beta_2) = (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \otimes (\beta_1 \wedge \beta_2); \forall \alpha_i, \beta_i \in \Lambda^* V, i = 1, 2$$

Le produit de Kulkarni-Nomizu est la restriction à $\mathcal{C}^* V$ du produit suivant sur $\oplus_{p,q} \Lambda^p V \otimes \Lambda^q V$

$$(\alpha_1 \otimes \beta_1) \bullet (\alpha_2 \otimes \beta_2) = (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \otimes (\beta_1 \wedge \beta_2); \alpha_i \in \Lambda^p V, \beta_i \in \Lambda^q V$$

Si par exemple $\alpha, \beta \in S^2 V$, et $x, y, z, t \in V$, ceci donne

$$(\alpha \otimes \beta)(x, y, z, t) = \alpha(x, z)\beta(y, t) + \alpha(y, t)\beta(x, z) - \alpha(x, t)\beta(y, z) - \alpha(y, z)\beta(x, t)$$

Étant donné que les espaces $\mathcal{C}^p V$ peuvent être vus comme les endomorphismes symétriques de $\Lambda^p V$, ils sont naturellement munis du produit scalaire

$$\langle R, S \rangle = \text{tr}(R \circ S); \forall R, S \in \mathcal{C}^p V$$

- Contraction de p -formes : Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de V . L'opérateur de contraction de p -formes est l'application linéaire $c : \Lambda^p V \otimes \Lambda^q V \rightarrow \Lambda^{p-1} V \otimes \Lambda^{q-1} V$ définie par

$$c(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \otimes e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_q}) = 0$$

et

$$\begin{aligned} & c(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \otimes e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_{j_{k+1}} \cdots \wedge e_{j_q}) \\ &= \sum_{l=1}^k (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_l} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) \otimes (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_l} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_{j_{k+1}} \cdots \wedge e_{j_q}) \end{aligned}$$

où tous les i_k et j_k sont deux à deux distincts.

- Étoile de Hodge : On choisit une orientation pour (V, g) , et on note ω^g la forme volume canonique associée. Le tenseur g induit un produit scalaire sur $\Lambda^p V$ pour tout $p = 0, \dots, n$, qu'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$. L'étoile de Hodge associée à $g \in S^2 V$ est l'unique isomorphisme d'espaces vectoriels $*_g : \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^{n-p} V$ tel que pour tous $\alpha, \beta \in \Lambda^p V$, on a

$$\alpha \wedge (*_g \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle_g \omega^g$$

Si $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de V , l'action de $*_g$ sur un élément $\alpha = \frac{1}{p!} \alpha^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ est donnée par

$$(*_g \alpha)^{j_1 \dots j_{n-p}} = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \varepsilon^{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{n-p}}; \text{ où } \alpha_{i_1 \dots i_p} = g_{i_1 k_1} \cdots g_{i_p k_p} \alpha^{k_1 \dots k_p}$$

(ici $\varepsilon^{j_1 \dots j_s}$ est le symbole de Levi-Civita généralisé). Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la métrique, on omettra l'indice g .

Proposition 3.1.1.

- 1) Pour $\alpha \in \Lambda^p V \otimes \Lambda^q V$, on a que $c(g \bullet \alpha) = g \bullet c(\alpha) + (n - p - q)\alpha$.
- 2) Si $p + q < n$, l'application $(g \bullet \cdot) : \Lambda^p V \otimes \Lambda^q V \rightarrow \Lambda^{p+1} V \otimes \Lambda^{q+1} V$ est injective.
- 3) Sur $S^2 V$, $(g \otimes \cdot)$ est injective dès que $n > 2$, et on a

$$c(g \otimes \alpha) = \text{tr}(\alpha)g + (n - 2)\alpha; \forall \alpha \in S^2 V$$

Preuve.

1) Par linéarité, il suffit de vérifier la formule pour $\alpha \in \Lambda^p V \otimes \Lambda^q V$ qui soit un produit d'éléments d'une base de V . Sans perte de généralité, soit $1 \leq r \leq p \leq q \leq n$, $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de V , et notons

$$\begin{aligned} e_I &= e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}; \\ e_J &= e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{p-r}}; \\ e_K &= e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{q-r}}; \\ e_{I'_l} &= e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_l} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}, \text{ pour } 1 \leq l \leq r; \\ \alpha &= e_I \wedge e_J \otimes e_I \wedge e_K \end{aligned}$$

On peut alors noter nos contractions comme suit

$$c(\alpha) = \sum_{l=1}^r e_{I'_l} \wedge e_J \otimes e_{I'_l} \wedge e_K$$

Avec $g = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$, la définition du produit \bullet permet d'écrire

$$g \bullet \alpha = \sum_{i \notin I \cup J \cup K} e_i \wedge e_I \wedge e_J \otimes e_i \wedge e_I \wedge e_K$$

puisque $(p+q-r)$ termes s'annulent dans la sommation sur $1 \leq i \leq n$. En contractant, on obtient

$$\begin{aligned} c(g \bullet \alpha) &= \sum_{i \notin I \cup J \cup K} c(e_i \wedge e_I \wedge e_J \otimes e_i \wedge e_I \wedge e_K) \\ &= \sum_{i \notin I \cup J \cup K} \left[(e_I \wedge e_J \otimes e_I \wedge e_K) + \left(\sum_{l=1}^r e_i \wedge e_{I'_l} \wedge e_J \otimes e_i \wedge e_{I'_l} \wedge e_K \right) \right] \\ &= \sum_{i \notin I \cup J \cup K} \alpha + \sum_{i \notin I \cup J \cup K} (e_i \otimes e_i) \bullet c(\alpha) \\ &= (n-p-q+r)\alpha + \sum_{i=1}^n (e_i \otimes e_i) \bullet c(\alpha) - \sum_{i \in I \cup J \cup K} (e_i \otimes e_i) \bullet c(\alpha) \end{aligned}$$

pour le tout dernier terme

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I \cup J \cup K} (e_i \otimes e_i) \bullet c(\alpha) &= \sum_{i \in I \cup J \cup K} \sum_{l=1}^r (e_i \wedge e_{I'_l} \wedge e_J) \otimes (e_i \wedge e_{I'_l} \wedge e_K) \\ &= \sum_{l=1}^r (e_{i_l} \wedge e_{I'_l} \wedge e_J) \otimes (e_{i_l} \wedge e_{I'_l} \wedge e_K) \\ &= \sum_{l=1}^r (-1)^{2(l-1)} (e_I \wedge e_J) \otimes (e_I \wedge e_K) = r\alpha \end{aligned}$$

et puisque $g \bullet c(\alpha) = \sum_{i=1}^n (e_i \otimes e_i) \bullet c(\alpha)$, on a bien

$$c(g \bullet \alpha) = (n-p-q+r)\alpha + g \bullet c(\alpha) - r\alpha = g \bullet c(\alpha) + (n-p-q)\alpha$$

2) Si on contracte $c(g \bullet \alpha)$, on obtient

$$\begin{aligned} c^2(g \bullet \alpha) &= c(g \bullet c(\alpha)) + (n - p - q)c(\alpha) \\ &= g \bullet c^2(\alpha) + (n - p - q + 2)c(\alpha) + (n - p - q)c(\alpha) \\ &= g \bullet c^2(\alpha) + 2(n - p - q + 1)c(\alpha) \end{aligned}$$

la deuxième ligne venant du fait qu'en général, on a que $c^r(\alpha) \in \Lambda^{p-r}V \otimes \Lambda^{q-r}V$ pour $\alpha \in \Lambda^pV \otimes \Lambda^qV$ et $r < \min\{p, q\}$, d'où l'annulation de $(p+q-2r)$ termes dans la sommation donnant $g \bullet c^r(\alpha)$. Maintenant, en supposant que la formule générale

$$c^r(g \bullet \alpha) = g \bullet c^r(\alpha) + r(n - p - q + r - 1)c^{r-1}(\alpha) \quad (*)$$

est vraie, on obtient en contractant une fois de plus que

$$\begin{aligned} c^{r+1}(g \bullet \alpha) &= g \bullet c^{r+1}(\alpha) + (n - p - q + 2r)c^r(\alpha) + r(n - p - q + r - 1)c^r(\alpha) \\ &= g \bullet c^{r+1}(\alpha) + (r + 1)(n - p - q + r)c^r(\alpha) \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule (*).

Maintenant, on suppose que $\alpha \in \ker(g \bullet \cdot)$ et que $p + q < n$. Par la définition de $c : \Lambda^pV \otimes \Lambda^qV \rightarrow \Lambda^{p-1}V \otimes \Lambda^{q-1}V$, on voit qu'il existe un $k > 0$ tel que $c^k(\alpha) = 0$, donc en utilisant (*) avec $r = k$, on a

$$c^k(g \bullet \alpha) = k(n - p - q + k - 1)c^{k-1}(\alpha) = 0 \implies c^{k-1}(\alpha) = 0$$

étant donné que $k(n - p - q + k - 1) \neq 0$. En utilisant ensuite à répétition l'équation (*) avec $r = k - j$, il est facile de voir que pour tout $1 \leq j \leq k - 1$, on a $c^{k-j}(\alpha) = 0$ qui implique $c^{k-(j+1)}(\alpha) = 0$. On obtient en particulier $\alpha = 0$, donc l'injectivité de $(g \bullet \cdot)$ quand $p + q < n$.

3) Sur S^2V , la formule de l'énoncé découle directement de (1) avec $p = q = 1$, ainsi que de $c(\alpha) = tr(\alpha)$, $\forall \alpha \in S^2V$. En ce qui concerne l'injectivité de l'application $(g \bullet \cdot) : S^2V \rightarrow \mathcal{C}^2V$, on applique l'énoncé (2) avec $p = q = 1$ et $n > 2$. \square

Proposition 3.1.2.

L'étoile de Hodge associée au produit euclidien g sur V satisfait les propriétés suivantes :

- 1) Sur Λ^pV , on a $*^2 = (-1)^{p(n-p)} Id_{\Lambda^pV}$, pour tout $p = 0, 1, \dots, n$.
- 2) Sur un élément d'une base de Λ^pV , et par rapport à une base $\{e_i\}_{i=1}^n$ orthonormée de V :

$$*(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{n-p}} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-p}}$$

- 3) On a : $*1 = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$; et $*(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = 1 \in \Lambda^0V$.

Dans cet énoncé, on a écrit $\varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{n-p}}$ au lieu de $\varepsilon_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{n-p}}$ pour être cohérent avec convention de sommation d'Einstein.

Preuve.

1) Pour démontrer l'assertion, on aura besoin de la relation suivante entre les symboles de Levi-Civita et de Kröneckер généralisés (c.f. (Fec06), p.109) :

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \varepsilon^{i_1 \dots i_r k_1 \dots k_s} = r! s! \delta_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_s}$$

où $\delta_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_s} := \prod_{l=1}^s \delta_{j_l}^{k_l}$. Il suffit alors d'appliquer la définition deux fois. On a pour tous $p = 0, \dots, n$ et $\alpha \in \Lambda^p V$:

$$\begin{aligned} (*^2 \alpha)^{i_1 \dots i_p} &= \frac{1}{(n-p)!} (*\alpha)_{l_1 \dots l_{n-p}} \varepsilon^{l_1 \dots l_{n-p} i_1 \dots i_p} \\ &= \frac{1}{(n-p)!} \left[\frac{1}{p!} \alpha^{j_1 \dots j_p} \varepsilon_{j_1 \dots j_p l_1 \dots l_{n-p}} \right] \varepsilon^{l_1 \dots l_{n-p} i_1 \dots i_p} \\ &= \frac{\alpha^{j_1 \dots j_p}}{p!(n-p)!} \left((-1)^{p(n-p)} p!(n-p)! \delta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \right) \\ &= (-1)^{p(n-p)} \alpha^{i_1 \dots i_p} \end{aligned}$$

2) En suivant notre convention, si $\alpha = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$, on a $\alpha^{j_1 \dots j_p} = p! \delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}$ qui donne

$$\begin{aligned} (*\alpha)^{l_1 \dots l_{n-p}} &= \frac{1}{p!} \left(p! \delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} g_{j_1 k_1} \dots g_{j_p k_p} \right) \varepsilon^{k_1 \dots k_p l_1 \dots l_{n-p}} \\ &= \varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{l_1 \dots l_{n-p}} \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat en substituant dans

$$*(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!} (*\alpha)^{j_1 \dots j_{n-p}} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-p}}$$

3) Avec la partie précédente :

$$*1 = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

$$1 = (-1)^0 1 = *^2 1 = *(e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$$

□

3.1.2 Décompositions de $\mathcal{C}^2 V$, $\mathcal{C}^1 V$ et $\Lambda^p V$

Ayant défini les structures de courbure en général, on s'intéresse à obtenir des décompositions irréductibles sous les actions des groupes $O(V)$ et $SO(V)$ des espaces $\mathcal{C}^1 V$, $\mathcal{C}^2 V$ et $\Lambda^p V$. Le premier résultat important pour cette étude, est le théorème des $O(V)$ -invariants de Weyl, dont on peut trouver la preuve complète dans la section 13.7 de (Spi99) (pp.317-330), et qui s'énonce comme suit :

Théorème 3.1.3. Weyl

Il n'y a de formes linéaires $O(V)$ -invariantes sur $V^{\otimes p}$ que si $p = 2l$. Dans ce cas, ces formes sont engendrées par les formes élémentaires

$$f_{\sigma, \tau} : v_1 \otimes \cdots \otimes v_{2l} \longmapsto \prod_{j=1}^l g(v_{\sigma(j)}, v_{\tau(j)}) ; \forall j = 1 \cdots 2l, v_j \in V$$

où $\sigma, \tau : \{1, \dots, l\} \rightarrow \{1, \dots, 2l\}$ sont des applications injectives d'images disjointes. De plus, pour $p = 2$, la seule forme invariante est la trace.

Le second résultat dont on aura besoin est le suivant :

Proposition 3.1.4.

Soit $W \subset T(V)$ un sous-espace vectoriel $O(V)$ -invariant. Si l'espace des formes quadratiques $O(V)$ -invariantes sur W est de dimension k , alors W admet une décomposition en au plus k facteurs $O(V)$ -irréductibles.

Preuve.

Supposons que $W \subset T(V)$ admet une décomposition en $r \geq 1$ facteurs $O(V)$ -irréductibles ($W = \bigoplus_{j=1}^r W_j$), et que l'espace des formes quadratiques $O(V)$ -invariantes sur W est de dimension $k \geq 1$ avec $k < r$. On considère les projecteurs g -orthogonaux $\{P_{W_j}\}_{j=1}^r$ sur les sous-espaces $O(V)$ -irréductibles. Puisque ce sont des endomorphismes $O(V)$ -équivariants de W , en posant $p_j(x) = \langle P_{W_j}(x), x \rangle_W$ pour $j = 1, \dots, r$ et $x \in W$, on obtient des formes quadratiques $O(V)$ -invariantes sur W qui sont linéairement indépendantes. Si $k < r$, soit on a qu'au moins $r - k$ facteurs W_j sont triviaux, soit que l'espace des formes quadratiques n'est pas de dimension k , et on en conclut que $k \geq r$. \square

Une forme quadratique $O(V)$ -invariante sur $W \subset T(V)$ peut être vue comme une forme linéaire $O(V)$ -invariante sur $W^{\otimes 2}$. Le théorème de Weyl permet donc de générer ces formes à partir des invariants élémentaires. Pour les décompositions sous l'action de $SO(V)$ de nos espaces, on fera usage du lemme suivant

Lemme 3.1.5.

Soit $W \subset T(V)$ un sous-espace vectoriel $O(V)$ -irréductible, dont $W = \bigoplus_{j=1}^r W_j$ est une décomposition en facteurs $SO(V)$ -irréductibles, et W_{\pm} les sous-espaces propres de l'endomorphisme induit sur W par $\tau_O = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \in O(V)$. Dans ce cas :

- i) La valeur maximale possible de r est 2.
- ii) Si $r = 2$, alors $\dim W_1 = \dim W_2$ et $\dim W_+ = \dim W_-$.

Preuve.

Supposons que l'on ait la décomposition $W = \bigoplus_{j=1}^r W_j$, et notons les faits suivants :

Pour tout $j = 1, \dots, r$, $\tau_O(W_j)$ est $SO(V)$ -invariant

Pour tout $j = 1, \dots, r$, $\tau_O(W_j) \subset W_j^\perp$

La première assertion vient du fait que pour tous $a \in SO(V)$ et $x \in W_i$, on a $\tau_O a \tau_O \in SO(V)$ et $\tau_O(a \tau_O(x)) \in W_i$, et donc $a(y) \in \tau_O(W_i)$ pour tout $y \in \tau_O(W_i)$ puisque $\tau_O^2 = \text{Id}_V$. Pour la seconde assertion, si on avait un $1 \leq j \leq r$ tel que $\tau_O(W_j) \cap W_j \neq \{0\}$, alors $\tau_O(W_j) = W_j$ à cause de la $SO(V)$ -irréductibilité. En notant maintenant que les éléments de $O(V)$ de déterminant -1 peuvent être exprimés comme produit d'un élément de $SO(V)$ avec τ_O , on obtiendrait que W_j est $O(V)$ -invariant, contredisant l'hypothèse d'irréductibilité de W sous l'action de $O(V)$.

On démontre le lemme :

i) Si $r = 2l + 1$: Pour tout $j = 1, \dots, l$, on suppose que $\tau_O(W_j) = W_{j+l}$. Cela donne $\tau_O(W_{2l+1}) = W_{2l+1}$, ce qui contredit le deuxième fait. Donc la seule valeur de r impaire possible est 1, et $r > 1$ impose que $r = 2l$.

Si $r = 2l$: Dans ce cas on écrit $W = \bigoplus_{j=1}^l [W_j \oplus \tau_O(W_j)]$, et on voit que les facteurs $W_j \oplus \tau_O(W_j)$ sont $O(V)$ -invariants pour tout j , contredisant encore l'irréductibilité de W sous $O(V)$, à moins que $r = 2$.

ii) On suppose que $W = W_1 \oplus W_2$. Puisque τ_O est un isomorphisme, $\dim \tau_O(W_i) = \dim W_i$, et on a clairement $\dim W_1 = \dim W_2$ puisque $\tau_O(W_1) = W_2$. Pour montrer que $\dim W_+ = \dim W_-$, on note $A : W_1 \rightarrow W_2$ l'isomorphisme permettant d'exprimer τ_O sous la forme

$$\tau_O \equiv \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{puisque } \tau_O^2 = \text{Id})$$

par rapport à la décomposition $W_1 \oplus W_2$. On considère aussi l'endomorphisme

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

satisfaisant $\chi \circ \tau_O = -\tau_O \circ \chi$. Celui-ci intervertit les sous-espaces propres W_+ et W_- , et on obtient qu'ils sont de même dimension puisque χ est un isomorphisme. \square

Proposition 3.1.6. Décompositions de C^1V

1) $C^1V = S^2V$ se décompose de manière irréductible sous l'action de $O(V)$ comme suit

$$S^2V = \mathbb{R}[g] \oplus S_0^2V$$

où S_0^2V dénote le sous-espace des éléments de S^2V de trace nulle.

2) Pour $\dim V \geq 2$, S_0^2V est irréductible sous l'action de $SO(V)$, et la décomposition en (1) est aussi $SO(V)$ -irréductible.

Preuve.

1) D'après le théorème de Weyl, les formes linéaires $O(V)$ -invariantes sur $V^{\otimes 4}$ sont générées par

$$\mathcal{I}_1(v_1 \otimes \cdots \otimes v_4) = g(v_1, v_2)g(v_3, v_4)$$

$$\mathcal{I}_2(v_1 \otimes \cdots \otimes v_4) = g(v_1, v_3)g(v_2, v_4)$$

$$\mathcal{I}_3(v_1 \otimes \cdots \otimes v_4) = g(v_1, v_4)g(v_2, v_3)$$

Pour $\alpha \in S^2V$, cela donne les formes quadratiques

$$\sum_{ij} \alpha_{ii} \cdot \alpha_{jj} = \mathcal{I}_1(\alpha \otimes \alpha), \text{ définie sur } \mathbb{R}[g]$$

$$\sum_{ij} (\alpha_{ij})^2 = \mathcal{I}_2(\alpha \otimes \alpha) = \mathcal{I}_3(\alpha \otimes \alpha), \text{ définie sur } S_0^2V.$$

On obtient alors que les espace des formes quadratiques $O(V)$ -invariantes sur \mathbb{R} et S_0^2V sont unidimensionnels, et donc irréductibles par la proposition (3.1.4).

2) On reprend l'endomorphisme τ_O de la preuve de (3.1.5), et on utilise la même notation pour l'endomorphisme qu'il induit sur S^2V . Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de V , et considérons les ensembles de vecteurs suivants

$\mathfrak{B}_- = \{e_1 \odot e_j; j > 1\}$, $(n-1)$ vecteurs propres orthogonaux de τ_O associés à la valeur propre -1 ;

\mathfrak{B}_+ , constituée des $(n-1)(n-2)/2$ vecteurs orthogonaux $\{e_i \odot e_j\}_{1 < i < j}$, ainsi que des $(n-1)$ vecteurs orthogonaux de la forme $e_i \odot e_i - e_j \odot e_j$, $j \neq i$ et linéairement indépendants de $g = \sum_i e_i \odot e_i$; tous des vecteurs propre de τ_O associés à $+1$.

$\mathfrak{B}_+ \cup \mathfrak{B}_- \cup \{g\}$ est une base de S^2V constituée de vecteurs propres de τ_O , et d'après la partie (1), on a que $\mathfrak{B}_+ \cup \mathfrak{B}_-$ est une base de S_0^2V . D'après le lemme (3.1.5), pour que S_0^2V admette une décomposition $SO(V)$ -irréductible, il faut que \mathfrak{B}_\pm aient le même cardinal, i.e que $n-1 = n(n-1)/2$ et donc $n = 1, 2$. Pour $n = 2$, $\dim S_0^2V = 1$, donc nécessairement irréductible, et il en va de même pour tout $n \geq 3$. \square

Proposition 3.1.7. Décompositions de $\Lambda^p V$

1) Pour tout $p = 1, \dots, n-1$, $\Lambda^p V$ est $O(V)$ -irréductible.

2) On ne peut avoir de décomposition $SO(V)$ -irréductible de $\Lambda^p V$ que si $n = 2l$ et $p = l$.

Preuve.

1) Soit $\alpha \in \Lambda^p V$. Les formes quadratiques $O(V)$ -invariantes sur $\Lambda^p V$ sont obtenues via les différentes contractions possibles de $\alpha_{i_1 \dots i_p} \otimes \alpha_{j_1 \dots j_p}$, mais puisque pour tout $\sigma \in S_p$ on a que $\alpha_{i_{\sigma(p)} \dots i_{\sigma(1)}} = \text{sgn}(\sigma) \alpha_{i_1 \dots i_p}$, n'importe quelle forme élémentaire invariante sur $\Lambda^p V$ se trouve être un multiple de $\sum_{i_1, \dots, i_p} (\alpha_{i_1 \dots i_p})^2$, ce qui montre que l'espace qu'elles génèrent est de dimension 1, d'où l'irréductibilité par (3.1.4).

2) Comme précédemment, on considère les vecteurs propres de l'automorphisme induit par $\tau_O \in O(V)$ sur $\Lambda^p V$. Dans ce contexte, on aura $\binom{n-1}{p}$ vecteurs associés à la valeur propre $+1$ de τ_O , et $\binom{n-1}{p-1}$ vecteurs associés à -1 . Les deux nombres devant être égaux par (3.1.5), on doit avoir $p = n/2$, et donc $n = 2l$. \square

On en vient maintenant à la décomposition de l'espace $S^2 \Lambda^2 V$.

Définition et notations

L'application de Bianchi est l'élément de $\text{End}(S^2 \Lambda^2 V)$ défini par

$$\beta(R)(x, y, z, t) = \frac{1}{3} [R(x, y, z, t) + R(y, z, x, t) + R(z, x, y, t)]$$

pour tous $R \in S^2 \Lambda^2 V$ et $x, y, z, t \in V^*$. On emploie dorénavant les notations suivantes :

$$\mathcal{B} = \text{Im } \beta$$

$$\mathcal{Z} = g \otimes S_0^2 V$$

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}[g \otimes g]$$

$$\mathcal{W} = (\mathcal{Z} \oplus \mathcal{U})^\perp \cap \ker \beta$$

L'application de Bianchi est $GL(V)$ -invariante puisqu'elle ne fait intervenir que des permutations. D'autre part, on note que \mathcal{B} s'identifie à $\Lambda^4 V$. Pour montrer cette assertion, on remarque qu'en termes de composantes dans une base orthonormée :

$$\alpha_{ijkl} = \alpha_{kijl} = \alpha_{jkil} = \alpha_{klji}, \forall \alpha \in \Lambda^4 V; \text{ et}$$

$$X_{jikl} = X_{ijlk} = -X_{ijkl} = X_{ikjl}, \forall X = \beta(R) \in \mathcal{B}$$

(les deux premières égalités venant du fait que $R \in S^2 \Lambda^2 V$, et la dernière du fait que $X_{ikjl} = X_{jikl} = X_{kjil}$). Donc en tant que sous-espaces de $S^2 \Lambda^2 V$, on voit que $\Lambda^4 V$ et \mathcal{B} sont définis en imposant les mêmes symétries, et correspondent par conséquent au même espace.

Avec ces définitions en main, on a le résultat suivant :

Proposition 3.1.8. Décompositions de \mathcal{C}^2V

La décomposition de \mathcal{C}^2V en sous-espaces $O(V)$ -irréductibles est donnée par

$$\mathcal{C}^2V = \mathcal{B} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$$

Preuve.

Les formes quadratiques $O(V)$ -invariantes sur $V^{\otimes 4}$ qu'on obtient par le théorème de Weyl, et non-identiquement nulles sur \mathcal{C}^2V sont engendrées par

$$\sum_{i,j,k,l} (T_{ijkl})^2; \quad \sum_{i,j,k,l} T_{ijil} \cdot T_{kjkl}; \quad \sum_{i,j,k,l} T_{ijij} \cdot T_{klkl}; \quad \sum_{i,j,k,l} T_{ijkl} \cdot T_{ikjl}; \quad \forall T \in \mathcal{C}^2V$$

donc \mathcal{C}^2V admet une décomposition en au plus 4 facteurs $O(V)$ -irréductibles, par la proposition (3.1.4). En utilisant l'application de Bianchi, on a que $\mathcal{C}^2V = \ker \beta \oplus \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B} \approx \Lambda^4V$, cet espace est $O(V)$ -irréductible par la proposition (3.1.7). Pour ce qui est des facteurs de la décomposition $\ker \beta = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, on remarque que pour tous $r \in S^2V$, $a \in SO(V)$ et $x, y, z, t \in V$, on a

$$\begin{aligned} [a(g \otimes r)](x, y, z, t) &= g(x, z)r(a(y), a(t)) + g(y, t)r(a(x), a(z)) \\ &\quad - g(x, t)r(a(y), a(z)) - g(y, z)r(a(x), a(t)) \\ &= (g \otimes a(r))(x, y, z, t) \end{aligned}$$

et donc en tant qu'application, $g \otimes \cdot : S^2V \rightarrow \mathcal{C}^2V$ est $O(V)$ -équivariante, et puisque S_0^2V est $O(V)$ -irréductible, on obtient que $\mathcal{Z} = g \otimes S_0^2V$ est $O(V)$ -invariante et irréductible. $\mathcal{U} = \mathbb{R}[g \otimes g]$ est aussi $O(V)$ -irréductible puisque de dimension 1, et enfin, \mathcal{W} est $O(V)$ -invariante par orthogonalité, et nécessairement $O(V)$ -irréductible par la première remarque de la démonstration. \square

Si $\dim V \leq 3$, la structure de \mathcal{C}^2V est particulièrement simple :

Corollaire 3.1.9.

Si $\dim V = 3$, alors $\mathcal{C}^2V = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{U}$. Si $\dim V = 2$, alors $\mathcal{C}^2V = \mathcal{U}$.

Preuve.

On note tout d'abord que $\mathcal{B} \approx \Lambda^4V = \{0\}$ dans ces deux cas.

dim $V = 3$ Par (3.1.1-3), l'application $(g \otimes \cdot)$ est injective, donc $\dim \mathcal{Z} = \dim S_0^2V = 5$, tout comme $\dim \mathcal{C}^2V = \dim \Lambda^2V(\dim \Lambda^2V + 1)/2 = 6$. Par la décomposition en (3.1.8), on conclut que $\dim \mathcal{W} = 0$, d'où le résultat.

dim $V = 2$ Dans ce cas on a $\dim \mathcal{C}^2V = 1$, et

$$\mathcal{Z} = g \otimes S_0^2V = g \otimes \mathbb{R}[e_1 \odot e_2, e_1 \odot e_1 - e_2 \odot e_2] = \{0\}$$

donc on a nécessairement $\mathcal{C}^2V = \mathcal{U}$. \square

3.1.3 Cas de $\dim V = 4$

Dans cette partie on considère $n = 4$. L'étoile de Hodge $*$: $\Lambda^p V \rightarrow \Lambda^{4-p} V$ est un endomorphisme symétrique pour $p = 2$. On utilisera ce fait pour démontrer le résultat suivant :

Proposition 3.1.10.

Soit $\dim V = 4$. Sous l'identification $\text{End}(\Lambda^2 V) \cong (\Lambda^2 V)^{\otimes 2}$, on a les caractérisations suivantes pour les éléments de $\mathcal{C}^2 V$:

- (i) $\mathcal{B} = \mathbb{R}[*]$;
- (ii) $R \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow R \circ * = - * \circ R$;
- (iii) $R \in \mathcal{W} \Leftrightarrow R \circ * = * \circ R$, $\text{tr}(* \circ R) = 0$ et $\text{tr}(R) = 0$.

Preuve.

i) On voit que l'étoile de Hodge se décompose comme suit, par rapport à une base orthonormée et orientée $\{e_i\}_{i=1}^4$ de V :

$$\begin{aligned} * &\equiv [(e_1 \wedge e_2) \otimes (e_3 \wedge e_4) + (e_2 \wedge e_3) \otimes (e_1 \wedge e_4) + (e_3 \wedge e_1) \otimes (e_2 \wedge e_4)] \\ &\quad + [(e_1 \wedge e_4) \otimes (e_2 \wedge e_3) + (e_2 \wedge e_4) \otimes (e_3 \wedge e_1) + (e_3 \wedge e_4) \otimes (e_1 \wedge e_2)] \\ &= 2[(e_1 \wedge e_2) \odot (e_3 \wedge e_4) + (e_2 \wedge e_3) \odot (e_1 \wedge e_4) + (e_2 \wedge e_4) \odot (e_3 \wedge e_1)] \\ &= 6\beta((e_1 \wedge e_2) \odot (e_3 \wedge e_4)) \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de

$$\beta(R)_{ijkl} = \frac{1}{3}(R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl}) = \frac{1}{3}(R_{ijkl} + R_{kjl i} + R_{ljk i}) ; R \in S^2 \Lambda^2 V$$

Ceci montre que $* \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, et comme cet espace est de dimension 1 (isomorphe à $\Lambda^4 V$), on a le résultat. Notons aussi que si $R \in \mathcal{C}^2 V$ est tel que $\text{tr}(* \circ R) = 0$, cela signifie par définition du produit scalaire utilisé que $R \in \mathcal{B}^\perp$.

ii) Soient $\Lambda^{2\pm} V$ les sous-espaces propres de $*$ associés aux valeurs propres ± 1 . Avec nos identifications, on a $\Lambda^{2+} V \odot \Lambda^{2-} V = \{R \in \mathcal{C}^2 V \mid R \circ * = - * \circ R\}$. Cette condition d'anticommutativité implique que $\text{tr}(* \circ R) = 0$, et aussi que $\text{tr}(R) = 0$, donc modulo les identifications : $\Lambda^{2+} V \odot \Lambda^{2-} V \subset \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$. On montre maintenant que, $\mathcal{Z} \subset \Lambda^{2+} V \odot \Lambda^{2-} V$.

Soit $r \in S^2 V$, et $\{e_i\}$ une base de vecteurs propres de r avec valeurs propres $\{\lambda_j\}$. On a que

les $e_i \wedge e_j$ sont des vecteurs propres de $g \otimes r$ puisque

$$\begin{aligned}
(g \otimes r)(e_a \wedge e_b) &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} [g_{ak}r_{bl} + g_{bl}r_{ak} - g_{al}r_{bk} - g_{bk}r_{al}] \cdot (e_k \wedge e_l) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l} [g_{ak}\lambda_l\delta_{bl} + g_{bl}\lambda_k\delta_{ak} - g_{al}\lambda_k\delta_{bk} - g_{bk}\lambda_l\delta_{al}] \cdot (e_k \wedge e_l) \\
&= \frac{1}{2} \sum_j \lambda_a [(e_a \wedge g_{bj}e_j) - (g_{bj}e_j \wedge e_a)] + \lambda_b [(g_{aj}e_j \wedge e_b) - (e_b \wedge g_{aj}e_j)] \\
&= (\lambda_a + \lambda_b)(e_a \wedge e_b).
\end{aligned}$$

Si de plus $r \in S_0^2V$, on a que $\sum_{j=1}^4 \lambda_j = 0$, et puisque l'étoile de Hodge intervertit les vecteurs propres de $g \otimes r$ (c.g. $*(e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_4$), on aura pour tout $\alpha \in \Lambda^2V$ que $[(g \otimes r) \circ *](\alpha) = -[* \circ (g \otimes r)](\alpha)$. Par conséquent : $\mathcal{Z} \subset \Lambda^{2+}V \oplus \Lambda^{2-}V$.

Pour terminer la démonstration, on vérifie facilement que

$$\dim(\Lambda^{2+}V \oplus \Lambda^{2-}V) = 9 = \dim(S_0^2V) = \dim \mathcal{Z}$$

d'où $\mathcal{Z} = \{R \in \mathcal{C}^2V \mid R \circ * = - * \circ R\}$.

iii) Les conditions $tr(* \circ R) = tr(R) = 0$ éliminent \mathcal{B} et \mathcal{U} , et la condition $R \circ * = * \circ R$ élimine \mathcal{Z} , donc on a nécessairement que

$$\mathcal{W} = \{R \in \mathcal{C}^2V \mid R \circ * = * \circ R, tr(* \circ R) = 0, tr(R) = 0\}$$

□

On définit maintenant deux sous-espaces de \mathcal{W} dont on aura besoin pour la suite :

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^+ &= \{R \in \mathcal{W} \mid R \circ * = * \circ R = R\} \\
\mathcal{W}^- &= \{R \in \mathcal{W} \mid R \circ * = * \circ R = -R\}
\end{aligned}$$

ceux-ci sont respectivement les tenseurs de Weyl auto-duaux et anti-auto-duaux. La décomposition de (3.1.8) devient donc

$$\mathcal{C}^2V = \mathcal{B} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}^+ \oplus \mathcal{W}^-$$

Si on considère maintenant un élément $R \in \mathcal{B}^\perp \subset \mathcal{C}^2V$, c'est-à-dire un opérateur de courbure satisfaisant la première identité de Bianchi, alors la décomposition ci-dessus permet de le représenter sous la forme donnée dans le préambule de la présente section.

3.1.4 Décompositions du tenseur de courbure sur une variété riemannienne

On illustre maintenant la théorie développée jusqu'ici dans le contexte de la géométrie riemannienne. Soit (M, g) une variété différentiable munie d'une métrique riemannienne, et

notons ∇ la connexion de Levi-Civita associée à g . Le tenseur de courbure de Riemann (associé à g) est l'élément $R \in \Gamma(\text{End}(TM) \otimes T^*M^{\otimes 2})$ dont l'action est donnée par

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z \in \mathfrak{X}(M), \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

On notera que les symétries du tenseur de Riemann, ainsi que l'identification $TM \equiv T^*M$, en font un élément de $\Gamma(S^2\Lambda^2TM)$. Soit $c : \Gamma(\text{End}(TM) \otimes T^*M^{\otimes 2}) \rightarrow \Gamma(T^*M^{\otimes 2})$ l'application linéaire agissant sur les fibres de $S^2\Lambda^2TM$ de la même façon que la contraction définie à la sous-section 3.1.1, on définit alors la courbure de Ricci comme étant

$$\text{Ric} := c(R) \in \Gamma(T^*M^{\otimes 2}) ; \text{ ou } \text{Ric}(X, Y) = \text{tr} \{ Z \mapsto R(X, Z)Y \}, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Enfin, on définit la courbure scalaire S comme étant la trace de la courbure de Ricci, c'est-à-dire

$$S := \text{tr}(\text{Ric}) \in C^\infty(M)$$

Avec ces définitions, et le résultat (3.1.8), on énonce :

Théorème 3.1.11. Décompositions du tenseur de Riemann

i) Pour une variété riemannienne (M, g) telle que $\dim M = n$, on a

$$R = \frac{S}{2n(n-1)}g \otimes g + \frac{1}{(n-2)} \left(\text{Ric} - \frac{S}{n}g \right) \otimes g + W$$

ii) Si $n = 4$, alors le tenseur de Riemann admet la décomposition

$$R = \begin{pmatrix} W^+ + \frac{S}{12}Id & Z \\ Z^t & W^- + \frac{S}{12}Id \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^t & 0 \end{pmatrix} = (1/2)[\text{Ric} - (S/4)g] \otimes g$.

iii) Si $n = 3$, alors R est complètement déterminé par la courbure de Ricci

$$R = \frac{S}{12}g \otimes g + \left(\text{Ric} - \frac{S}{3}g \right) \otimes g$$

iv) Si $n = 2$, R est complètement déterminé par la courbure scalaire

$$R = \frac{S}{4}g \otimes g$$

Pour ce résultat, on aura besoin du fait suivant :

Lemme 3.1.12. Soit (V, g) un espace euclidien, et $c : \Lambda^p V \otimes \Lambda^q V \rightarrow \Lambda^{p-1} V \otimes \Lambda^{q-1} V$ la contraction définie en 3.1.1. Avec les mêmes notations que précédemment, on a $W \subset C^2V \cap \ker c$.

Preuve.

Il suffit de vérifier que pour tous $\alpha \in S^2V$ et $\xi \in \mathcal{C}^2V$, on a $tr(\alpha \circ c(\xi)) = tr((g \otimes \alpha) \circ \xi)$.

En effet, si on considère une base g -orthonormée $\{e_i\}$ de V et qu'on écrit

$$\xi = \sum_{i,j,k,l} \xi^{ijkl} e_i \wedge e_j \odot e_k \wedge e_l; \alpha = \sum_{i,j} \alpha^{ij} e_i \wedge e_j$$

alors on a

$$c(\xi) = \sum_{i,j} \left(\sum_k \xi^{kikj} \right) e_i \odot e_j; (g \otimes \alpha) = \sum_{i,j,k} \alpha^{jk} e_i \wedge e_j \odot e_i \wedge e_k$$

Ceci donne les expressions suivantes

$$(g \otimes \alpha) \circ \xi = \sum_{i,j,k,l} \left(\sum_r \alpha^{rl} \xi^{ijk r} \right) e_i \wedge e_j \odot e_k \wedge e_l$$

$$\alpha \circ c(\xi) = \sum_{i,j} \left(\sum_{r,s} \alpha^{ir} \xi^{sr sj} \right) e_i \odot e_j$$

qu'on injecte dans les définitions des traces

$$tr(\alpha \circ c(\xi)) = \sum_i g([\alpha \circ c(\xi)]e_i, e_i); tr((g \otimes \alpha) \circ \xi) = \sum_{i,j} \langle [(g \otimes \alpha) \circ \xi]e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_j \rangle_{\Lambda^2 V}$$

En effectuant les simplifications nécessaires, on obtient que

$$tr(\alpha \circ c(\xi)) = \sum_{i,j} \left\{ \alpha^{ij} \left(\sum_k \xi^{kjki} \right) \right\} = tr((g \otimes \alpha) \circ \xi)$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{W}$, cette égalité et la proposition 3.1.8 impliquent que pour tout $\alpha \in S^2V$, on a $\langle \alpha, c(\xi) \rangle_{S^2V} = \langle (g \otimes \alpha), \xi \rangle_{\mathcal{C}^2V} = 0$, c'est à dire que $c(\xi) = 0$ pour $\xi \in \mathcal{W}$ quelconque. Il en découle alors que $\mathcal{W} \subset \ker c \cap \mathcal{C}^2V$. \square

On revient au théorème :

Preuve. (3.1.11)

Il est clair que (ii)-(iv) découlent de (i), ainsi que des résultats (3.1.8) et (3.1.9). Pour montrer (i), il suffit de vérifier qu'avec l'expression donnée, on a bien $c(R) = Ric$. Avec la formule de la proposition (3.1.1-3), on a les expressions

$$c(g \otimes g) = 2(n-1)g; c(Ric \otimes g) = (n-2)Ric + Sg$$

Par le lemme (3.1.12), on a de plus que $c(W) = 0$, d'où

$$c(R) = \left(\frac{-S}{2(n-1)(n-2)} \right) c(g \otimes g) + \frac{1}{(n-2)} c(Ric \otimes g) = Ric$$

\square

Le tenseur de Weyl peut être vu comme le "reste" de deux divisions successives de R par g , mais il y a une autre façon de l'interpréter : le tenseur de Weyl est la composante du tenseur de Riemann qui est invariante sous transformations conformes. En effet, pour $f \in C^\infty(M)$, et en posant $\tilde{g} = e^{2f}g$, on a le résultat suivant :

Proposition 3.1.13.

Si W et \tilde{W} sont les tenseurs de Weyl associés à g et $\tilde{g} = e^{2f}g$ respectivement, alors pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ on a $\tilde{W}(X, Y)Z = W(X, Y)Z$.

Cette proposition se démontre à l'aide du

Lemme 3.1.14.

Soient ∇ et $\tilde{\nabla}$ les connexions de Levi-Civita associées à g et \tilde{g} respectivement, et R et \tilde{R} les tenseurs de Riemann. Alors :

1) Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $\alpha \in \Omega^1(M)$, on a que

$$K(X, Y) := \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)G_f$$

$$\bar{K}(X, \alpha) := \tilde{\nabla}_X \alpha - \nabla_X \alpha = -X(f)\alpha - \alpha(X)df + g^{-1}(\alpha, df)g(X, \cdot)$$

où $G_f = g^{-1}(df, \cdot)$ est le gradient de f .

2) Sous une transformation conforme de la métrique le tenseur de Riemann est modifié comme suit

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + [g(B(X), Z)Y - g(Y, Z)B(X)] - [g(B(Y), Z)X - g(X, Z)B(Y)]$$

où le tenseur $B \in \Gamma(\text{End}(TM))$ (dépendant de f) est défini par

$$B(X) = -X(f)G_f + \nabla_X G_f + \frac{1}{2}G_f(f)X$$

Les démonstrations de la proposition (3.1.13) et de la seconde partie du lemme ci-dessus sont reportés à l'appendice des preuves complémentaires. On prouve uniquement le (3.1.14-1), puisqu'on en fera usage au chapitre suivant :

Preuve. (3.1.14-1)

Dans des coordonnées locales, les symboles de Christoffel de la dérivée covariante $\tilde{\nabla}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{\tilde{g}^{kl}}{2} (-\partial_l \tilde{g}_{ij} + \partial_i \tilde{g}_{jl} + \partial_j \tilde{g}_{li}) = e^{-2f} \frac{g^{kl}}{2} [-\partial_l (e^{2f} g_{ij}) + \partial_i (e^{2f} g_{jl}) + \partial_j (e^{2f} g_{li})] \\ &= \frac{g^{kl}}{2} (-\partial_l g_{ij} + \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li}) + g^{kl} [-(\partial_l f)g_{ij} + (\partial_i f)g_{jl} + (\partial_j f)g_{li}] \\ &= \Gamma_{ij}^k + \delta_j^k (\partial_i f) + \delta_i^k (\partial_j f) - (G_f)^k g_{ij} \end{aligned}$$

où $(G_f)^k = g^{kr} \partial_r f$. Ceci donne les composantes de K dans le système de coordonnées utilisé

$$K_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k = \delta_j^k (\partial_i f) + \delta_i^k (\partial_j f) - (G_f)^k g_{ij}$$

qui permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= (K_{ij}^k X^i Y^j) \partial_k = (X^i \partial_i f) Y^j \partial_j + (Y^j \partial_j f) X^i \partial_i - (g_{ij} X^i Y^j) (G_f)^k \partial_k \\ &= X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)G_f \end{aligned}$$

Pour la seconde identité, puisque $\tilde{\nabla}_{\partial_i} dx^k = -\tilde{\Gamma}_{ij}^k dx^j$, on a $\tilde{K}_{ij}^k = -K_{ij}^k$, et donc :

$$\begin{aligned} \tilde{K}(X, \alpha) &= -(X^i \partial_i f) (\alpha_j dx^j) - (\alpha_k X^k) (\partial_j f dx^j) + (g_{ij} X^i dx^j) (g^{kl} \alpha_k \partial_l f) \\ &= -X(f)\alpha - \alpha(X)df + g^{-1}(\alpha, df)g(X, \cdot) \end{aligned}$$

□

3.2 L'inégalité de Hitchin-Thorpe

On se propose dans cette section de démontrer l'inégalité $\chi(M) \geq (3/2)|\tau(M)|$, pour M une variété d'Einstein compacte, orientée, sans bord et de dimension 4. L'idée est d'exprimer les intégrands de $\chi(M)$ et de $\tau(M)$ en fonction des composantes du tenseur de Riemann R , suivant la décomposition en termes de tenseur de Weyl, de Ricci et de la courbure scalaire.

3.2.1 Formes de Pontrjagin et d'Euler en fonction de R

3.2.1.1 Notations

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, orientée et sans bord. On notera $\Omega \in \Omega^2(M, \mathfrak{so}_n)$ la 2-forme de courbure associée à la connexion de Levi-Civita de g , et n la dimension de M . De manière générique, $\{e_j\}_{1 \leq j \leq n}$ désignera un repère orthonormé local sur TM . Localement, selon le repère $\{e_j\}$, le tenseur de Riemann se décompose comme suit

$$R = \frac{1}{2} R_{aij}^b [e^i \wedge e^j] \otimes [e^a \otimes e_b] = \frac{1}{2} \Omega_a^b(e_i, e_j) [e^i \wedge e^j] \otimes [e^a \otimes e_b]$$

Dans notre discussion, on fera implicitement usage de l'identification entre TM et T^*M , ce qui signifie qu'on confondra R_{aij}^b et R_{abij} . D'autre part, on verra R comme opérateur de courbure, c'est à dire comme un élément de $\Gamma(S^2 \Lambda^2 TM)$, donc on écrira souvent $R(e_i \wedge e_j, e_a \wedge e_b)$ au lieu de $R_{abij} = R_{ijab}$. Avec ces identifications

$$R \equiv \frac{1}{4} \sum_{a,b,i,j} R_{ijab} [e_i \wedge e_j] \otimes [e_a \wedge e_b]$$

donc

$$\begin{aligned}
R(e_i \wedge e_j) &\equiv \frac{1}{2} \sum_{a,b} R(e_i \wedge e_j, e_a \wedge e_b) e_a \wedge e_b \\
&= \frac{1}{2} \sum_{a,b} \Omega_i^j(c_a, c_b) c_a \wedge c_b \\
&= \sum_{a < b} \Omega_i^j(e_a, e_b) e_a \wedge e_b
\end{aligned}$$

ce qui signifie qu'on fera l'identification $R(e_i \wedge e_j) \equiv \Omega_i^j$.

Si $I = (i_1, \dots, i_r)$ est un ensemble d'indices tels que $i_1 < \dots < i_r$ et $\rho \in S_r$ (pour un entier donné r), alors on écrira

$$e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}, \text{ et } e_{\rho(I)} = \rho \cdot (e_I) = e_{i_{\rho(1)}} \wedge \dots \wedge e_{i_{\rho(r)}}$$

Enfin, la forme volume associée à $\{e_j\}$ sera notée : $d\nu = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$.

3.2.1.2 Forme d'Euler

Dorénavant on considère que $n = \dim M = 4$. En utilisant nos notations, le pfaffien est donné par (c.f. (Bcs81), p.189)

$$\begin{aligned}
Pf\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) &= \left(\frac{4!}{\pi^2 2^5}\right) \frac{1}{4!} \sum_{\rho \in S_4} \varepsilon(\rho) \Omega_{\rho(2)}^{\rho(1)} \wedge \Omega_{\rho(4)}^{\rho(3)} \\
&= \left(\frac{4!}{\pi^2 2^5}\right) \frac{1}{4!} \sum_{\rho \in S_4} \varepsilon(\rho) R(e_{\rho(1)} \wedge e_{\rho(2)}) \wedge R(e_{\rho(3)} \wedge e_{\rho(4)}) \\
&= \left(\frac{4!}{\pi^2 2^5}\right) \frac{(2!)^2}{4!} \sum_I R(e_I) \wedge R(*e_I)
\end{aligned}$$

où $I = (i_1, i_2)$ avec $i_1 < i_2$, et $\varepsilon(\rho)$ est le signe de la permutation ρ . On peut maintenant exprimer la forme d'Euler comme la trace d'un élément de $\Gamma(S^2 \Lambda^2 TM)$.

Proposition 3.2.1.

En dimension 4, la caractéristique d'Euler est donnée par

$$\chi(M) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}_{\Lambda^2 TM} ((* \circ R) \circ (* \circ R)) d\nu$$

Preuve.

Localement, on a

$$\begin{aligned}
\text{tr}_{\Lambda^2 TM} (* \circ R * \circ R) &= \sum_I \left\langle (* R * R)(e_I), e_I \right\rangle_{\Lambda^2 TM} = \sum_I \left\langle (* R)(e_I), R(*e_I) \right\rangle_{\Lambda^2 TM} \\
&= \sum_I \left\langle R(*e_I) \wedge ** R(e_I), d\nu \right\rangle_{\Lambda^4 TM} = \left\langle \sum_I R(e_I) \wedge R(*e_I), d\nu \right\rangle_{\Lambda^4 TM} \\
&= \frac{2^5 \pi^2}{(2!)^2} \left\langle Pf\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right), d\nu \right\rangle_{\Lambda^4 TM}
\end{aligned}$$

où la seconde égalité vient du fait que $*, R \in \Gamma(S^2\Lambda^2TM)$. Par le théorème de Chern-Gauss-Bonnet, cette formule signifie que

$$\chi(M) = \int_M Pf\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}_{\Lambda^2TM}(*R * R) d\nu$$

□

3.2.1.3 Formes de Pontjagin

Pour une variété de dimension $4k$, la forme totale de Pontrjagin est définie comme étant

$$p\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) = 1 + p_1\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) + p_2\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) + \cdots + p_k\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) = \det\left(I + \frac{\Omega}{2\pi}\right)$$

où $p_k(\Omega/2\pi) \in \Omega^{4k}(M)$, et le terme de degré $4k$ est donné par (c.f. (Bes81), p.192)

$$p_k\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{2k}} \sum_I \sum_{\alpha \in S_{2k}} \varepsilon(\alpha) \bigwedge_{i=1}^{2k} \Omega_{i_i}^{\alpha(i)}$$

Dans le cas de la dimension 4, le L -polynôme de Hirzebruch (calculé avec la 2-forme de courbure associée à la connexion de Levi-Civita ${}^g\nabla$) est donné par la 4-forme $L(M, \nabla^g) = p_1({}^g\Omega/2\pi)/3$, et avec l'expression ci-dessus, cela donne

$$\begin{aligned} L(M, {}^g\nabla) &= \frac{1}{12\pi^2} \sum_{i_1 < i_2} \left(\Omega_{i_1}^{i_1} \wedge \Omega_{i_1}^{i_2} - \Omega_{i_1}^{i_2} \wedge \Omega_{i_2}^{i_1} \right) = \frac{1}{12\pi^2} \sum_{i_1 < i_2} \Omega_{i_1}^{i_2} \wedge \Omega_{i_1}^{i_2} \\ &= \frac{1}{12\pi^2} \sum_{i_1 < i_2} R(e_{i_1} \wedge e_{i_2}) \wedge R(e_{i_1} \wedge e_{i_2}) = \frac{1}{12\pi^2} \sum_I R(e_I) \wedge R(e_I) \end{aligned}$$

Le théorème de signature stipule alors que

$$\tau(M) = \frac{1}{3} \int_M p_1\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{12\pi^2} \int_M \sum_I R(e_I) \wedge R(e_I)$$

En termes de la trace d'un élément de $\Gamma(S^2\Lambda^2TM)$, on a le résultat suivant.

Proposition 3.2.2.

En dimension 4, la signature de Hirzebruch est donnée par

$$\tau(M) = \frac{1}{12\pi^2} \int_M \text{tr}_{\Lambda^2TM}(R \circ * \circ R) d\nu$$

Preuve.

Localement, on a

$$\begin{aligned}
\langle p_1(M), d\nu \rangle_{\Lambda^4 TM} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_I \langle R(e_I) \wedge R(e_I), d\nu \rangle_{\Lambda^4 TM} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_I \langle R(e_I) \wedge *(*R)(e_I), d\nu \rangle_{\Lambda^4 TM} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_I \langle R(e_I), (*R)(e_I) \rangle_{\Lambda^2 TM} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_I \langle (R * R)(e_I), e_I \rangle_{\Lambda^2 TM} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \text{tr}_{\Lambda^2 TM}(R \circ * \circ R)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de la définition de la trace, et celle d'avant de la symétrie des endomorphismes $*$ et R . \square

3.2.2 L'inégalité de Hitchin-Thorpe

- Dans cette partie, on utilise la décomposition orthogonale $R = U + W + Z$, qu'on peut aussi écrire

$$R = \begin{pmatrix} W^+ + \frac{S}{12}\text{Id} & \tilde{Z} \\ \tilde{Z}^t & W^- + \frac{S}{12}\text{Id} \end{pmatrix}$$

On a aussi démontré les caractérisations suivantes

- (i) $Z \circ * = - * \circ Z$;
- (ii) $* \circ W^\pm = W^\pm \circ * = \pm W^\pm$;
- (iii) $U = (S/12) \cdot \text{Id}_{\Lambda^2 TM}$

- D'une part, on a que

$$\begin{aligned}
(* \circ R) \circ (* \circ R) &= [* (U + W + Z) *] \circ [U + W + Z] = [U + W - Z] \circ [U + W + Z] \\
&= (W^2 + U^2 - Z^2) + [2W \circ U + (W + U)Z - Z(W + U)]
\end{aligned}$$

En se rappelant que $\langle A, B \rangle_{\text{End}(\Lambda^2 TM)} = \text{tr}_{\Lambda^2 TM}(A \circ B^t)$, et en prenant la trace de l'endomorphisme précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
\text{tr}((* \circ R) \circ (* \circ R)) &\stackrel{\text{par sym.}}{=} \text{tr}(WW^t) + \text{tr}(UU^t) - \text{tr}(ZZ^t) \\
&\quad + \text{tr}[2W \circ U + (W + U)Z - Z(W + U)] = \|W\|^2 + \|U\|^2 - \|Z\|^2
\end{aligned}$$

puisque $\langle W, U \rangle = \langle W + U, Z \rangle = 0$.

- D'autre part, on a que

$$R \circ * \circ R = U * U + W * W + Z * Z + 2U * W + W * Z + Z * W + U * Z + Z * U$$

les deux derniers s'annulent puisque $Z* = -*Z$,

$$W*Z = \begin{pmatrix} W^+ & 0 \\ 0 & -W^- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \tilde{Z} \\ \tilde{Z}^t & 0 \end{pmatrix} = 0 = Z*W$$

en prenant la trace de la composition $R*R$, on a les annulations suivantes

$$\begin{aligned} - \operatorname{tr}(W*Z) &= \operatorname{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & W^+\tilde{Z} \\ -W^-\tilde{Z}^t & 0 \end{pmatrix} \right] = \operatorname{tr}(Z*W) = 0 \\ - \operatorname{tr}(Z*Z) &= \operatorname{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & \tilde{Z} \\ \tilde{Z}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & *\tilde{Z} \\ *\tilde{Z}^t & 0 \end{pmatrix} \right] = \operatorname{tr}(\tilde{Z}* \tilde{Z}^t) + \operatorname{tr}(\tilde{Z}^t*\tilde{Z}) = 0 \\ &\text{étant donné que } \operatorname{tr}(\tilde{Z}^t(*\tilde{Z})) = \operatorname{tr}((*\tilde{Z})\tilde{Z}^t) = -\operatorname{tr}((\tilde{Z}*)\tilde{Z}^t) \\ - \operatorname{tr}(U*U) &= \frac{S^2}{12^2} \langle *, \operatorname{Id}_{\Lambda^2 TM} \rangle = 0 \\ - \operatorname{tr}(U*W) &= \frac{S^2}{12^2} \langle *, W \rangle = 0 \end{aligned}$$

la seule trace non-nulle étant donc

$$\operatorname{tr}(W*W) = \operatorname{tr}(R*R) = \operatorname{tr} \left[\begin{pmatrix} (W^+)^2 & 0 \\ 0 & -(W^-)^2 \end{pmatrix} \right] = \|W^+\|^2 - \|W^-\|^2$$

- Avec ces expressions des traces, et en notant que $\|U\|^2 = (S/12)^2 \dim(\Lambda^2 TM) = S^2/24$, on a le résultat suivant

Proposition 3.2.3.

En dimension 4, on a les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\|W^+\|^2 + \|W^-\|^2 + \frac{S^2}{24} - \|Z\|^2 \right) d\nu \\ \tau(M) &= \frac{1}{12\pi^2} \int_M \left(\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2 \right) d\nu \end{aligned}$$

Une variété riemannienne est dite d'Einstein si elle admet une métrique satisfaisant $\operatorname{Ric} = (S/\dim M)g$, qui implique $Z = 0$. Avec les expressions ci-dessus, si g est une métrique d'Einstein sur M de dimension 4, alors :

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\|W^+\|^2 + \|W^-\|^2 + \frac{S^2}{24} \right) d\nu \\ \frac{3}{2}\tau(M) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2 \right) d\nu \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \chi(M) + \frac{3}{2}\tau(M) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(2\|W^+\|^2 + \frac{S^2}{24} \right) d\nu \geq 0 \\ \chi(M) - \frac{3}{2}\tau(M) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(2\|W^-\|^2 + \frac{S^2}{24} \right) d\nu \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui démontre notre résultat principal, à savoir :

Théorème 3.2.4. Hitchin-Thorpe

Si (M, g) est une variété d'Einstein compacte, sans bord et de dimension 4, alors sa caractéristique d'Euler et sa signature de Hirzebruch satisfont l'inégalité

$$\frac{3}{2}|\tau(M)| \leq \chi(M)$$

L'utilité principale de ce théorème est que si M est une variété différentiable de dimension 4 telle que $\chi(M) < (3/2)|\tau(M)|$, alors elle ne peut admettre de métrique d'Einstein. En effet, si l'inégalité de Hitchin-Thorpe n'est pas satisfaite, on a par (2.1)

$$0 < \frac{3}{2}|\tau(M)| - \chi(M) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left[\|Z\|^2 - \left(\frac{S^2}{24} + 2\|W^-\|^2 \right) \right] ; & \text{si } \tau(M) \geq 0 \\ \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left[\|Z\|^2 - \left(\frac{S^2}{24} + 2\|W^+\|^2 \right) \right] ; & \text{si } \tau(M) \leq 0 \end{cases}$$

donc forcément $\|Z\| > 0$ pour n'importe quelle métrique riemannienne sur M .

Exemple : $\mathbb{C}P^2$ et éclatements ((Bcs81) exp.VI, (Bcs08) sec.11-A)

La métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{C}P^2$ est une métrique de Kähler-Einstein, et cette variété a comme invariants topologiques d'intérêt $\chi(\mathbb{C}P^2) = 3$ et $\tau(\mathbb{C}P^2) = 1$. On effectue k éclatements en des points distincts de $\mathbb{C}P^2$, c'est-à-dire qu'on compose la somme connexe $\mathbb{C}P^2 \# k\bar{\mathbb{C}}P^2$, où $\bar{\mathbb{C}}P^2$ dénote le plan projectif avec l'orientation inverse. En utilisant les identités de la section 2 du chapitre II, La caractéristique d'Euler et la signature de Hirzebruch de la variété résultante sont données par :

$$\chi_k := \chi(\mathbb{C}P^2 \# k\bar{\mathbb{C}}P^2) = \chi(\mathbb{C}P^2) + k[\chi(\bar{\mathbb{C}}P^2) - 2] = 3 + k$$

$$\tau_k := \tau(\mathbb{C}P^2 \# k\bar{\mathbb{C}}P^2) = \tau(\mathbb{C}P^2) + k\tau(\bar{\mathbb{C}}P^2) = 1 - k$$

On a ensuite que la quantité $\chi_k - (3/2)|\tau_k|$ est strictement négative dès que $k > 9$, et on en conclut qu'au-delà de 9 éclatements, $\mathbb{C}P^2 \# k\bar{\mathbb{C}}P^2$ ne peut admettre de métrique d'Einstein.

On a aussi le résultat suivant :

Proposition 3.2.5. Cas d'égalité

Si (M, g) est une variété d'Einstein compacte, sans bord et de dimension 4 telle que $\frac{3}{2}|\tau(M)| = \chi(M)$, alors son revêtement universel \tilde{M} est une variété de Calabi-Yau, et en particulier hyperkähler.

Preuve.

Sans perte de généralité, on peut considérer le cas où $\tau \geq 0$, car dans le cas contraire, il suffit de prendre l'orientation inverse sur M (ceci revient à multiplier l'étoile de Hodge par

-1, et d'inverser les rôles des W^\pm). Par (3.2.3), on a que

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\|W^+\|^2 + \|W^-\|^2 + \frac{S^2}{24} \right) d\nu \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2 \right) d\nu = \frac{3}{2} \tau\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\int_M \left(2\|W^-\|^2 + \frac{S^2}{24} \right) d\nu = 0 \implies \|W^-\| = S = 0$$

La première conclusion est que la courbure scalaire S est nulle. Puisque pour une variété d'Einstein on a $Ric = \frac{S}{\dim M}g$, on obtient que M est Ricci-plate.

Il reste à montrer que l'on peut réduire le groupe d'holonomie du revêtement universel \widetilde{M} au groupe $SU(2)$. On commence par noter qu'en dimension 4, on a la décomposition $\Lambda^2 T^*M = \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M$, où les sous-fibrés $\Lambda^\pm M$ sont ceux dont les sections lisses sont les vecteurs propres de l'étoile de Hodge associés aux valeurs ± 1 , et dont on peut identifier les fibres à \mathfrak{su}_2 puisque $\Lambda^2 \mathbb{R}^4 \cong \mathfrak{so}_4 \approx \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2$ (c.f [Joyce] sec.3.5). Maintenant, on munit \widetilde{M} de la métrique $\tilde{g} = \pi^*g$, et on note respectivement \tilde{R} et $\Omega^{\tilde{g}}$ son tenseur de Riemann et sa 2-forme de courbure. Avec $R \equiv W^+$ sur M qui préserve $\Lambda^+ M$, on obtient pour tout $x \in \widetilde{M}$ et pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ que

$$\tilde{R}_x(X, Y) = R_{\pi(x)}(\pi_{*|x}X, \pi_{*|x}Y) \in (\Lambda^+ M)_{\pi(x)} \oplus \{0\}$$

Avec la remarque précédente sur les identifications, on a que $\Omega_x^{\tilde{g}}(X, Y) \in \mathfrak{su}_2 \oplus \{0\}$. On sait par le théorème d'Ambrose-Singer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{hol}^{\tilde{g}}$ est générée par les valeurs

$$\left\{ \Omega_x^{\tilde{g}}(X, Y) \mid x \in \widetilde{M}; X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M}) \right\}$$

donc $\mathfrak{hol}^{\tilde{g}} \subset \mathfrak{su}_2 \oplus \{0\}$, ce qui signifie que $Hol^{\tilde{g}} \subset SU(2) \times \{\text{Id}\}$, et par conséquent qu'on peut réduire le groupe d'holonomie de \widetilde{M} à $SU(2)$, ce qui en fait une variété de Calabi-Yau (et hyperkähler puisque $SU(2) = Sp(1)$). \square

CHAPITRE IV

HITCHIN-THORPE II - VARIÉTÉS NON-COMPACTES

À la fin du chapitre II, on a montré que si on quotiente la fibration de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$ par certaines actions de groupes finis Γ d'isométries, on obtient des espaces $Y = S^3/\Gamma$ feuilletés par les images des fibres S^1 sous les applications quotient. La finalité du chapitre présent est de démontrer une inégalité de Hitchin-Thorpe pour des variétés non compactes, et dont la géométrie à l'infini est similaire à celle des espaces $Y = S^3/\Gamma$. Pour ce faire, on se base sur quelques résultats de (DW07), où il est question d'une telle inégalité pour des variétés admettant une structure de fibré à l'infini. Les deux types de comportements asymptotiques qu'on vient d'évoquer s'encodent au travers de ϕ -métriques et de \mathcal{F} -métriques, dont on établit quelques propriétés clés dans la première section. Pour des études exhaustives de ces types de métriques, le lecteur est référé à (MM99) et (Vai01) pour les métriques de type ϕ (et d), ainsi qu'à (Roc12) pour les métriques de type (\mathcal{F} et \mathcal{F}_c).

4.1 Métriques de type ϕ et \mathcal{F}

4.1.1 ϕ -métriques

Ici, on considère que ∂M est l'espace total d'un fibré localement trivial $F \rightarrow \partial M \xrightarrow{\phi} N$, où les variétés F et N sont supposées connexes, compactes et orientables pour des fins de simplicité. Le type de métrique qu'on étudie dans cette sous-section est modelé sur un cône dans la base N et sur un cylindre dans les fibres de ∂M : près du bord, on a $g \sim dr^2 + r^2 g_N + \kappa$, avec g_N une métrique riemannienne sur la base, et κ une forme bilinéaire symétrique sur ∂M se restreignant à une métrique riemannienne sur les fibres F . Pour la suite, on se fixe une fonction de définition du bord $x \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$ ($x = 1/r$), et on abusera la notation en écrivant $p = (y, z) \in \partial M$, avec $z \in F$ et $y \in N$. Dorénavant, I désigne l'intervalle fermé $[0, 1]$.

Définition. L'algèbre $\mathfrak{X}_\phi(M)$

Soit $\mathfrak{X}_\phi(M) = \left\{ X \in \mathfrak{X}(M) \mid \forall p \in \partial M, X_p \in \ker \phi_*|_p, X \cdot x \in x^2 \mathcal{C}^\infty(M) \right\}$, l'espace des champs de vecteurs sur M , dont la restriction au bord donne des champs tangents aux fibres, et dont l'action sur x donne un terme d'ordre x^2 .

Cette sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}(M)$ peut être réalisée comme espace des sections lisses d'un fibré vectoriel ${}^\phi TM \rightarrow M$.

Proposition 4.1.1.

1) On définit ${}^\phi T_p M = \mathfrak{X}_\phi(M) / [I_p(M) \cdot \mathfrak{X}_\phi(M)]$, où

$$I_p(M) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid f(p) = 0 \right\}$$

et on pose ${}^\phi TM = \sqcup_{p \in M} {}^\phi T_p M$. Il existe alors une unique structure de fibré différentiable sur ${}^\phi TM \rightarrow M$ telle que $\Gamma(M, {}^\phi TM) \approx \mathfrak{X}_\phi(M)$.

2) Deux fonctions de définition du bord $x, s \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}_+)$ définissent le même espace $\mathfrak{X}_\phi(M)$ si et seulement si $\exists \rho \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\rho|_{\partial M} \in \phi^* \mathcal{C}^\infty(N)$ et $s = x\rho$.

3) $\mathfrak{X}_\phi(M)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.

Preuve.

1) Pour montrer que ${}^\phi TM \rightarrow M$ est bien défini en tant que fibré vectoriel, on montre que $\dim {}^\phi T_p M = \dim M$ pour tout $p \in M$, et que les éléments de $\Gamma(M, {}^\phi TM)$ donnent des fonctions de transitions lisses sous changements de coordonnées. On admet ici la seconde assertion de la proposition. Sur $M \setminus \partial M$, on voit par les définitions de $\mathfrak{X}_\phi(M)$ et de ${}^\phi T_p M$ que

$${}^\phi T_p M \approx \mathfrak{X}(M) / [I_p(M) \cdot \mathfrak{X}(M)] = T_p M$$

en prenant l'union sur $M \setminus \partial M$, on obtient

$$\sqcup_{p \in M \setminus \partial M} {}^\phi T_p M = {}^\phi TM|_{M \setminus \partial M} \approx TM|_{M \setminus \partial M}$$

donc en tant que fibré au dessus de $M \setminus \partial M$, ${}^\phi TM|_{M \setminus \partial M}$ est bien défini. Il faut vérifier que c'est bien le cas sur ∂M . Soit $c : I_x \times \partial M \rightarrow M$ une isométrie locale décrivant un voisinage tubulaire du bord, avec $x : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ notre fonction de définition du bord, et $p \in \partial M$. Avec $\{y^j\}$ un système de coordonnées autour de $\phi(p) \in N$, et $\{z^a\}$ un système de coordonnées autour de $f \in F$ correspondant à $p = (\phi(p), f)$, on montre que :

$${}^\phi T_p M = \mathbb{R} [x^2 \partial_x|_p; x \partial_{y^j}|_p; \partial_{z^a}|_p]$$

Pour $X \in \mathfrak{X}_\phi(M)$, il existe des fonctions $\tilde{X}^\alpha(x, y, z) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telles que dans les coordonnées qu'on vient d'introduire :

$$X = \tilde{X}^0 \partial_x + \tilde{X}^i \partial_{y^i} + \tilde{X}^a \partial_{z^a}$$

(les indices $i = 1, \dots, \dim N$ dénotent une sommation sur les coordonnées de la base N uniquement, et les $a = 1, \dots, \dim F$ sur celles de la fibre uniquement)

En revenant aux conditions définissant $\mathfrak{X}_\phi(M)$, on a que

$$X \cdot x = \langle dx, X \rangle = \tilde{X}^0 \in x^2 \mathcal{C}^\infty(M) \implies \tilde{X}^0 = x^2 X^0$$

$$X_p \in \ker \phi_{*|_p} \text{ pour } x(p) = 0 \implies \tilde{X}^i(0, y, z) \partial_{y^i}|_p = 0 \implies \tilde{X}^i = x X^i, \forall i$$

En d'autres termes, tout élément $X \in \mathfrak{X}_\phi(M)$ s'exprime localement par

$$X = X^0 x^2 \partial_x + X^i x \partial_{y^i} + X^a \partial_{z^a}$$

Donc en tout point $p \in M$ près de ∂M , ${}^\phi T_p M$ est généré par la famille de vecteurs $\{x^2 \partial_x|_p, x \partial_{y^i}|_p, \partial_{z^a}|_p\}$, et on a bien $\dim {}^\phi T_p M = \dim M$ (le nombre de générateurs est constant, ce sont les composantes qui s'annulent).

On vérifie le comportement des éléments de $\mathfrak{X}_\phi(M)$ sous des changements de coordonnées. On sait que toute variété à bord de dimension n a des cartes près de ∂M modélées sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, donc on peut toujours choisir une fonction de définition du bord $s \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $\partial M = \{s = 0\}$, et dans ce cas $s = x\rho(x, y)$ avec $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$. Si $\{t^i(x, y)\}$ est un second système de coordonnées autour de $\phi(p) \in M$ et $\{w^a(x, y, z)\}$ un système autour de $f \in F$, la base locale pour les éléments de $\mathfrak{X}_\phi(M)$ devient

$$x^2 \partial_x = \left(\frac{\rho + x \partial_x \rho}{\rho^2} \right) s^2 \partial_s + \left(\frac{\partial_x t^i}{\rho^2} \right) s^2 \partial_{t^i} + \left(\frac{\partial_x w^a}{\rho^2} \right) s^2 \partial_{w^a}$$

$$x \partial_{y^j} = \left(\frac{\partial_{y^j} \rho}{\rho^2} \right) s^2 \partial_s + \left(\frac{\partial_{y^j} t^i}{\rho} \right) s \partial_{t^i} + (x \partial_{y^j} w^a) \partial_{w^a}$$

$$\partial_{z^b} = (\partial_{z^b} w^a) \partial_{w^a}$$

Les fonctions de transition sont bien définies et lisses jusqu'au bord de M , on voit aussi que pour tout $X \in \mathfrak{X}_\phi(M)$ on a $X(s) \in s^2 \mathcal{C}^\infty(M)$ et $X_p \in \mathbb{R}[\partial_{w^a}|_p]$ si $s(p) = 0$. On en déduit que le fibré vectoriel ${}^\phi T M \rightarrow M$ est bien défini, et que son espace de sections lisses satisfait $\Gamma(M, {}^\phi T M) \approx \mathfrak{X}_\phi(M)$.

2) Si on reprend les expressions qu'on obtient en (1) sous les changements de coordonnées $s = x\rho(x, y)$, $t^i = t^i(x, y)$ et $w^a = w^a(x, y, z)$, on voit bien que

$$\mathfrak{X}_\phi(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X(s) \in s^2 \mathcal{C}^\infty(M); X_p \in \ker \phi_{*|_p}, \forall p \in \partial M\}$$

Ceci démontre l'une des implications. Pour la seconde implication, si on suppose que la fonction ρ dépend des variables venant de la fibre F , alors on aurait

$$\partial_{z^a} = \left(\frac{\partial_{z^a} \rho}{\rho} \right) s \partial_s + (\partial_{z^a} w^b) \partial_{w^b} \notin \mathfrak{X}_\phi(M) \text{ puisque } \langle ds, \partial_{z^a} \rangle \notin s^2 \mathcal{C}^\infty(M)$$

Ceci montre que la condition $\rho|_{\partial M} \in \phi^* \mathcal{C}^\infty(M)$ est nécessaire pour avoir un changement de fonction de définition du bord qui préserve $\mathfrak{X}_\phi(M)$.

3) Pour $X, Y \in \mathfrak{X}_\phi(M)$, on vérifie que $[X, Y] \in \mathfrak{X}_\phi(M)$. Pour la condition au bord, un calcul direct dans des coordonnées sur $I \times \partial M$ donnent

$$[X, Y] = (X(Y^0) - Y(X^0)) x^2 \partial_x + (X(Y^i) - Y(X^i)) x \partial_{y^i} + (X(Y^a) - Y(X^a)) \partial_{z^a}$$

Il est alors immédiat que pour $p \in \partial M$, $[X, Y]_p \in \ker \phi_*|_p$ et $\langle dx, [X, Y] \rangle \in x^2 \mathcal{C}^\infty(M)$. \square

À partir de la construction de ${}^\phi TM$, on définit son fibré dual ${}^\phi T^*M$ de façon canonique. On aura encore ${}^\phi T^*M|_{M \setminus \partial M} \approx T^*M|_{M \setminus \partial M}$, et dans une trivialisatation locale de $\partial M \xrightarrow{\phi} N$, $\Gamma(M, {}^\phi T^*M)$ est généré près du bord par les 1-formes

$$\frac{dx}{x^2}, \frac{dy^i}{x}, dz^a; i = 1, \dots, \dim N, a = 1, \dots, \dim F$$

Il est à noter que sur ∂M , les formes $\{dx/x^2, dy^i/x\}$ sont lisses jusqu'au bord en tant que sections de ${}^\phi T^*M$. En effet, pour un $X \in \mathfrak{X}_\phi(M)$ quelconque, on a

$$\left\langle \frac{dx}{x^2}, X \right\rangle \Big|_{\phi|_{x=0}} = X^0(0, y, z) \text{ et } \left\langle \frac{dy^i}{x}, X \right\rangle \Big|_{\phi|_{x=0}} = X^i(0, y, z)$$

Ceci permet de définir naturellement des fibrés comme $End({}^\phi TM)$.

Définition. ϕ -métriques

Une ϕ -métrique produit est un élément $\bar{g}_\phi \in \Gamma(M, S^2 {}^\phi T^*M)$ qui se restreint au-dessus de $M \setminus \partial M$ à une métrique riemannienne sur $TM|_{M \setminus \partial M}$, et dont le pullback par rapport à $c : I_x \times \partial M \rightarrow M$ prend la forme

$$c^* \bar{g}_\phi = \frac{dx^2}{x^4} + \frac{\phi^* g_N}{x^2} + \kappa$$

où $g_N \in \Gamma(N, S^2 T^*N)$ est une métrique riemannienne sur la base de ∂M , $\kappa \in \Gamma(\partial M, S^2 T^* \partial M)$ est un tenseur symétrique se restreignant à une métrique sur les fibres F , et ces deux champs ne dépendent pas de la fonction de définition du bord x . Pour alléger les notations, on écrira $\bar{g} = c^* \bar{g}_\phi$ et $h = \phi^* g_N$ dans la suite.

Une ϕ -métrique exacte est une métrique riemannienne $g_\phi \in \Gamma(M, S^{2\phi} T^*M)$, obtenue à partir d'une ϕ -métrique produit \bar{g}_ϕ et d'un élément $B \in \Gamma(M, S^{2\phi} T^*M)$ comme étant $g_\phi = \bar{g}_\phi + x^2 B$. On notera aussi $g = c^* g_\phi$ dorénavant.

Remarque.

1) Il y a deux objets sous-jacents à la définition précédente. Le premier est $g_\phi \in \Gamma(M, S^{2\phi} T^*M)$, qui est une métrique euclidienne pour le fibré ${}^\phi TM$. Le second objet est $g_{\phi|_{M \setminus \partial M}}$, qui sous

l'identification ${}^\phi TM|_{M \setminus \partial M} \approx TM|_{M \setminus \partial M}$, donne une métrique riemannienne complète sur $M \setminus \partial M$.

2) Comme évoqué précédemment, l'algèbre $\mathfrak{X}_\phi(M)$ est déterminée par la donnée d'un fibré $F \rightarrow \partial M \xrightarrow{\phi} N$, ainsi que d'un choix d'une classe de fonctions de définition du bord, conformément à l'assertion (2) de la proposition 4.1.1. Similairement, les fibrés construits à partir de $\mathfrak{X}_\phi(M)$ et les ϕ -métriques dépendent du choix de la classe de fonctions de définition du bord x (voir discussion suivant le lemme 3 de (MM99)).

3) Pour alléger les notations dans la suite, on introduit le repère local $\{e_\alpha\}_{\alpha=0,i,a}$. Les indices grecs symbolisent les indices quelconques, c'est-à-dire relatifs à x , aux coordonnées sur N ou sur F . Les indices i, j, k, l, \dots désigneront les champs venant de la base N , i.e $e_j = x\partial_{y^j}$; les a, b, c, d, \dots ceux venant de la fibre ($e_b = \partial_{z^b}$); et on écrira e_0 pour désigner le champ $x^2\partial_x$. Similairement, pour le repère dual $\{e^\alpha\}_{\alpha=0,i,a}$, on fera usage des notations suivantes

$$e^0 = \frac{dx}{x^2}, e^i = \frac{dy^i}{x}, e^a = dz^a$$

4) Pour la définition de la ϕ -métrique exacte, on veut qu'à mesure que l'on s'approche du bord, la métrique se comporte comme une métrique produit. Le degré 2 en x est le plus petit degré qui nous donnera une connexion de Levi-Civita de g_ϕ qui soit bien définie jusqu'au bord sur ${}^\phi TM$. En effet, si on prend $g_\phi = \tilde{g}_\phi + xB$, et qu'on considère que ${}^\phi \nabla$ est donnée par les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée à g_ϕ , on aura dans un système de coordonnées près du bord

$$\langle dz^a, {}^\phi \nabla_{\partial_x}(\partial_{z^b}) \rangle_\phi = \frac{\kappa^{ac}}{2} \left\{ \frac{\partial_b B_{0c} - \partial_c B_{0b}}{x} + B_{cb} \right\} + O(x)$$

où les $\{B_{\alpha\beta}\}$ sont les composantes de $B \in \Gamma(M, S^2 {}^\phi T^*M)$ dans le repère introduit en (3), i.e.

$$B = \left(\frac{B_{00}(x, y, z)}{x^4} \right) dx \otimes dx + \left(\frac{B_{ij}(x, y, z)}{x^2} \right) dy^i \otimes dy^j + B_{ab}(x, y, z) dz^a \otimes dz^b \\ + \left(\frac{B_{0j}(x, y, z)}{x^3} \right) dx \otimes dy^j + \left(\frac{B_{0a}(x, y, z)}{x^2} \right) dx \otimes dz^a + \left(\frac{B_{ja}(x, y, z)}{x} \right) dy^j \otimes dz^a$$

On voit que le symbole $\Gamma_{0b}^a = \langle dz^a, {}^\phi \nabla_{\partial_x}(\partial_{z^b}) \rangle_\phi$ donne une limite infinie quand $x \rightarrow 0$, et dans ce cas, la dérivée covariante ${}^\phi \nabla$ ne donne pas toujours des sections lisses, à moins que l'on ne prenne $B(x^2\partial_x, \cdot) = 0$ par exemple.

On introduit maintenant un second type de métriques, obtenues comme transformations conformes des ϕ -métriques, et donnant au bord une structure de cusp fibré :

Définition. *d*-métriques

Une *d*-métrique exacte est un élément $g_d \in \Gamma(S^2 {}^\phi T^*M)$ donné par $g_d = x^2 \cdot g_\phi$, où g_ϕ est

une ϕ -métrique exacte. Avec les notations de la définition précédente, le pullback est cette fois de la forme

$$c^*g_d = \frac{dx^2}{x^2} + \phi^*g_N + x^2\kappa + x^4B$$

Celles-ci sont des métriques sur le fibré ${}^dTM := \frac{1}{x}\phi^*TM$, et on définit aussi $\mathfrak{X}_d(M) = \frac{1}{x}\mathfrak{X}_\phi(M)$.

Lemme 4.1.2.

Si on définit ${}^dTM = \sqcup_{p \in M} {}^dT_pM$ avec ${}^dT_pM = \mathfrak{X}_d(M)/I_p(M) \cdot \mathfrak{X}_d(M)$, alors on obtient un fibré vectoriel ${}^dTM \rightarrow M$ tel que $\Gamma({}^dTM) \approx \mathfrak{X}_d(M)$.

Preuve. La preuve de la proposition 4.1.1-1 se transpose mutatis mutandis au cas présent, avec les deux différences suivantes :

- Près du bord, dans des coordonnées $\{x, y^i, z^a\}$, l'espace $\mathfrak{X}_d(M)$ est généré par les champs

$$x\partial_x, \partial_{y^i}, \frac{1}{x}\partial_{z^a}; i = 1, \dots, \dim N, a = 1, \dots, \dim F$$

- L'espace $\mathfrak{X}_d(M)$ n'est pas une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}(M)$, puisque les termes $\frac{1}{x}\partial_{z^a}$ sont singuliers au bord. \square

Proposition 4.1.3.

Soit g_ϕ une ϕ -métrique exacte sur M , $g_d = x^2 \cdot g_\phi$ la d -métrique associée, et ${}^\phi\nabla, {}^d\nabla$ leurs connexions de Levi-Civita respectives, alors :

1) ${}^\phi\nabla : \Gamma({}^\phi TM) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes {}^\phi TM)$ est bien définie en tant que connexion de Koszul, et sa 2-forme de courbure ${}^\phi\Omega \in \Omega^2(M, \text{End}({}^\phi TM))$ est lisse jusqu'au bord.

2) ${}^d\nabla : \Gamma({}^d TM) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes {}^d TM)$ est bien définie en tant que connexion de Koszul, et sa 2-forme de courbure ${}^d\Omega \in \Omega^2(M, \text{End}({}^d TM))$ est lisse jusqu'au bord.

Preuve.

1) Pour tout $Y \in \Gamma({}^\phi TM)$ et pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, on a

$${}^\phi\nabla_X Y = [X(Y^0)e_0 + X(Y^i)e_i + X(Y^a)e_a] + Y^0({}^\phi\nabla_X e_0) + Y^i({}^\phi\nabla_X e_i) + Y^a({}^\phi\nabla_X e_a)$$

Le terme entre crochets est clairement un élément de $\mathfrak{X}_\phi(M)$, il suffit donc de vérifier que pour tous les indices $\alpha = 0, i, a$, les dérivées covariantes ${}^\phi\nabla_X e_\alpha$ donnent bien des éléments de $\mathfrak{X}_\phi(M)$, pour $X = \partial_x, \partial_{y^i}, \partial_{z^a} \in \mathfrak{X}(M)$.

- Si $X = \partial_x$, on a les trois formules suivantes

$${}^\phi\nabla_{\partial_x} e_0 = 2x\partial_x + x^2 (\Gamma_{00}^0 \partial_x + \Gamma_{00}^i \partial_{y^i} + \Gamma_{00}^a \partial_{z^a})$$

$${}^\phi\nabla_{\partial_x} e_i = \partial_{y^i} + x (\Gamma_{0i}^0 \partial_x + \Gamma_{0i}^j \partial_{y^j} + \Gamma_{0i}^a \partial_{z^a})$$

$$\phi\nabla_{\partial_x} e_\alpha = \Gamma_{0\alpha}^0 \partial_x + \Gamma_{0\alpha}^i \partial_{y^i} + \Gamma_{0\alpha}^b \partial_{z^b}$$

En se rapportant à l'appendice sur les symboles de Christoffel associés à $\phi\nabla$, on obtient en évaluant la composante en ∂_x que

$$\left(\phi\nabla_{\partial_x} e_\alpha \right) \cdot x = \begin{cases} x^3 B_{00} + O(x^4) & ; \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{x^3}{2} (\partial_i B_{00} + 2B_{0i}) + O(x^4) & ; \text{si } \alpha = i \\ \frac{x^2}{2} (\partial_a B_{00}) + O(x^3) & ; \text{si } \alpha = a \end{cases}$$

En faisant ensuite les manipulations nécessaires quand $x = 0$, on obtient

$$\phi\nabla_{\partial_x} e_\alpha|_{x=0} = \begin{cases} -\left[\frac{\kappa^{ab}}{2} (\partial_b B_{00}) \right]_{x=0} \partial_{z^a}|_{x=0} & ; \text{si } \alpha = 0 \\ \left[\frac{\kappa^{ab}}{2} (\kappa_{bi} - \partial_b B_{0i}) \right]_{x=0} \partial_{z^a}|_{x=0} & ; \text{si } \alpha = i \\ \left[\frac{\kappa^{ac}}{2} (\partial_b B_{0c} - \partial_c B_{0b}) \right]_{x=0} \partial_{z^a}|_{x=0} & ; \text{si } \alpha = b \end{cases}$$

donc pour tout indice α , on a $(\phi\nabla_{\partial_x} e_\alpha) \cdot x \in x^2 \mathcal{C}^\infty(M)$ et $\phi\nabla_{\partial_x} e_\alpha|_{\partial M}$ tangent aux fibres.

On obtient donc que $\phi\nabla_{\partial_x} Y \in \mathfrak{X}_\phi(M)$ pour tout $Y \in \Gamma(\phi TM)$.

- Pour $X = \partial_{y^i}$, la même procédure que le cas précédent donne

$$\phi\nabla_{\partial_x} e_\alpha|_{x=0} = \begin{cases} 0 & ; \text{si } \alpha = 0, i \\ \left[\frac{\kappa^{ac}}{2} \xi_{cib} \right]_{x=0} \partial_{z^a}|_{x=0} & ; \text{si } \alpha = b \end{cases}$$

où pour tout triplet d'indices $\alpha, \beta, \mu \neq 0$, on a défini

$$\xi_{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (-\partial_\mu \kappa_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \kappa_{\beta\mu} + \partial_\beta \kappa_{\mu\alpha})$$

On a aussi

$$\left(\phi\nabla_{\partial_{y^i}} e_\alpha \right) \cdot x = \begin{cases} O(x^4) & ; \text{si } \alpha = 0 \\ x^2 h_{ij} + O(x^4) & ; \text{si } \alpha = j \\ O(x^3) & ; \text{si } \alpha = a \end{cases}$$

d'où encore $\phi\nabla_{\partial_{y^i}} Y \in \mathfrak{X}_\phi(M), \forall Y \in \Gamma(\phi TM), \forall i = 1, \dots, \dim N$.

- Si $X = \partial_{z^a}$, on obtient dans ce cas

$$\phi\nabla_{\partial_{z^a}} e_\alpha|_{x=0} = \begin{cases} 0 & ; \text{si } \alpha = 0, i \\ \left[\kappa^{cd} \xi_{dab} \right]_{x=0} \partial_{z^c}|_{x=0} & ; \text{si } \alpha = b \end{cases}$$

ainsi que

$$\left(\phi\nabla_{\partial_{z^a}} e_\alpha \right) \cdot x = O(x^4), \forall \alpha = 0, i, b$$

et donc $\phi\nabla_{\partial_{z^a}} Y \in \mathfrak{X}_\phi(M), \forall Y \in \Gamma(\phi TM), \forall a = 1, \dots, \dim F$.

On conclut de cela que $\phi\nabla : \Gamma(\phi TM) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes^\phi TM)$ est bien définie en tant que connexion de Levi-Civita de g_ϕ .

Si ${}^\phi R$ dénote le tenseur de Riemann associé à la métrique g_ϕ , on a par ce qui précède que pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $Z \in \mathfrak{X}_\phi(M)$ que

$${}^\phi R(X, Y)Z = [{}^\phi \nabla_X, {}^\phi \nabla_Y]Z - {}^\phi \nabla_{[X, Y]}Z \in \mathfrak{X}_\phi(M)$$

ce qui signifie que ${}^\phi R \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes \text{End}({}^\phi TM))$. Au niveau de la 2-forme de courbure ${}^\phi \Omega$, on sait que ses composantes sont données par ${}^\phi \Omega_\mu^\nu(e_\alpha, e_\beta) = ({}^\phi R)_{\mu\alpha\beta}^\nu$ dans le repère local $\{e_\alpha\}_{\alpha=0, i, a}$, donc ceux-ci sont tous lisses jusqu'au bord, et on obtient bien ${}^\phi \Omega \in \Omega^2(M, \text{End}({}^\phi TM))$.

2)   partir de la définition de $\mathfrak{X}_d(M)$, on voit que pour tout $Y \in \mathfrak{X}_\phi(M)$, (Y/x) est un élément de $\mathfrak{X}_d(M)$. Pour vérifier que ${}^d \nabla$ est bien définie en tant que dérivée covariante, il suffit donc de montrer que pour des champs $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $Y \in \mathfrak{X}_\phi(M)$ quelconques, on a $x[{}^d \nabla_X(\frac{Y}{x})] \in \mathfrak{X}_\phi(M)$. D'une part, on a que

$${}^d \nabla_X Y = {}^d \nabla_X \left(x \cdot \frac{Y}{x} \right) = \frac{X(x)}{x} Y + x \left[{}^d \nabla_X \left(\frac{Y}{x} \right) \right]$$

D'autre part, puisque g_d est obtenue par transformation conforme de g_ϕ (avec $f = \ln x$), le lemme (3.1.14) du chapitre pr c dent permet d'écrire

$${}^d \nabla_X Y = {}^\phi \nabla_X Y + \frac{X(x)}{x} Y + \frac{Y(x)}{x} X - g_\phi(X, Y) g_\phi^{-1} \left(\frac{dx}{x}, \cdot \right)$$

c'est-à-dire :

$$x \left[{}^d \nabla_X \left(\frac{Y}{x} \right) \right] = {}^\phi \nabla_X Y + \left\{ \frac{Y(x)}{x} X - g_\phi(X, Y) g_\phi^{-1} \left(\frac{dx}{x}, \cdot \right) \right\}$$

On sait que ${}^\phi \nabla_X Y$ est un élément de $\mathfrak{X}_\phi(M)$, donc il suffit de montrer que le terme entre accolades l'est aussi. On considère qu'on a les décompositions suivantes près du bord

$$\begin{aligned} X &= X^0 \partial_x + X^i \partial_{y^i} + X^a \partial_{z^a} \\ Y &= Y^0 x^2 \partial_x + Y^i x \partial_{y^i} + Y^a \partial_{z^a} \end{aligned}$$

On remarque que $x^2 X \in \mathfrak{X}_\phi(M)$, et que

$$g_\phi(x^2 X, Y) = X^0 Y^0 + x h(X, Y) + x^2 \kappa(X, Y) + x^2 B(x^2 X, Y)$$

En reprenant maintenant les champs $\{e_\alpha\}_{\alpha=0, i, a}$ introduits précédemment, les termes entre accolades dans l'équation de $x \left[{}^d \nabla_X \left(\frac{Y}{x} \right) \right]$ ci-dessus s'expriment

$$\begin{aligned} \frac{Y(x)}{x} X &= \left(\frac{Y^0 X^0}{x} \right) e_0 + (Y^0 X^i) e_i + (x Y^0 X^a) e_a \\ g_\phi(X, Y) &= \frac{1}{x^2} g_\phi(x^2 X, Y) = \frac{X^0 Y^0}{x^2} + \frac{h(X, Y)}{x} + \kappa(X, Y) + B(x^2 X, Y) \end{aligned}$$

$$g_\phi^{-1} \left(\frac{dx}{x}, \cdot \right) = x e_0 - x^3 B_0^i e_i - x^4 B_0^a e_a + x^5 Z_0 \quad (\text{t.q. } Z_0 \in \mathfrak{X}(M))$$

Avec les deux dernières expressions, on a

$$\begin{aligned} g_\phi(X, Y) g_\phi^{-1} \left(\frac{dx}{x}, \cdot \right) &= \left(\frac{Y^0 X^0}{x} \right) e_0 + [h(X, Y) + x\kappa(X, Y) + xB(x^2 X, Y)] e_0 \\ &\quad - [h(X, Y) + x\kappa(X, Y) + xB(x^2 X, Y)] (x^2 B_0^i e_i + x^3 B_0^i e_i) + x^3 Z \end{aligned}$$

où $Z \in \mathfrak{X}(M)$. En utilisant l'expression de $(Y(x)/x)X$, le terme d'intérêt devient

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{Y(x)}{x} X - g_\phi(X, Y) g_\phi^{-1} \left(\frac{dx}{x}, \cdot \right) \right\} &= -x^3 Z + (Y^0 X^i) e_i + (x Y^0 X^a) e_a \\ &\quad + [h(X, Y) + x\kappa(X, Y) + xB(x^2 X, Y)] (-e_0 + x^2 B_0^i e_i + x^3 B_0^i e_i) \end{aligned}$$

et on voit alors que $\left[\frac{Y(x)}{x} X - g_\phi(X, Y) g_\phi^{-1} \left(\frac{dx}{x}, \cdot \right) \right] \in \mathfrak{X}_\phi(M)$, d'où $x [{}^d\nabla_X \left(\frac{Y}{x} \right)] \in \mathfrak{X}_\phi(M)$.

Avec les remarques précédentes, on obtient que ${}^d\nabla : \Gamma({}^dTM) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes {}^dTM)$ est bien définie en tant que dérivée covariante. De la même façon qu'en (1), cela donne un tenseur de Ricmann ${}^dR \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes \text{End}({}^dTM))$ qui est lisse jusqu'au bord, et donc une 2-forme de courbure ${}^d\Omega \in \Omega^2(M, \text{End}({}^dTM))$ avec la même régularité. \square

Remarque.

1) Cette proposition reste vraie si on permet aux tenseurs h et κ de dépendre de la fonction de définition du bord x . Les symboles de Christoffel $\Gamma_{0\alpha}^\mu$ de g_ϕ qu'on obtiendrait dans ce cas contiendront des dérivées premières $\partial_x h$ et $\partial_x \kappa$, et il est facile de voir que ces termes supplémentaires n'affecteront pas les coefficients de la plus basse puissance en x de ces symboles. On aura donc toujours $({}^\phi\nabla_X Y) \cdot x \in x^2 C^\infty(M)$ et ${}^\phi\nabla_X Y|_{x=0}$ tangent aux fibres de ∂M pour tous $Y \in \mathfrak{X}_\phi(M)$ et $X \in \mathfrak{X}(M)$.

2) La proposition reste vraie aussi dans le cas où on prend $g_\phi = \tilde{g}_\phi + xB$ avec $B(x^2 \partial_x, \cdot) = 0$ (i.e. $B_{0\alpha} = 0, \forall \alpha$). Ceci est le type de ϕ -métriques utilisées dans (DW07), et c'est l'une des hypothèses qu'on prendra en compte dans la section sur les inégalités de Hitchin-Thorpe.

4.1.2 \mathcal{F} -métriques

Dans cette partie, on suppose que l'on a un fibré localement trivial $F \rightarrow \tilde{Y} \xrightarrow{\phi} N$, sur lequel agit un groupe fini d'isométries $\Gamma \subset \text{Isom}(\tilde{Y})$ de façon proprement discontinue, sans point fixe, et de manière à ce que cette action envoie toute fibre de ϕ sur une autre fibre (ce qui induit une action compatible de Γ sur N). Ceci induit un revêtement fini dont on dénote par $\nu : \tilde{Y} \rightarrow Y$ l'application quotient. Puisque cette dernière est une submersion, on obtient une structure de feuilletage \mathcal{F} sur la base Y , dont les feuilles sont les images des fibres F sous ν , et on obtient une distribution intégrable $T\mathcal{F} \subset TY$ ($\Gamma(Y, T\mathcal{F}) \subset \mathfrak{X}(Y)$ est une sous-algèbre

de Lie).

Avec les hypothèses précédentes, le type de variété M qui nous intéresse ici satisfait $\partial M = Y = \tilde{Y}/\Gamma$, ce qu'on appelle une variété à bord feuilleté. Comme précédemment, $x \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}_+)$ est une fonction de définition du bord pour laquelle $\partial M = \{x = 0\}$.

On considère maintenant les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathfrak{X}(M)$:

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X(x) \in x^2 \mathcal{C}^\infty(M), X|_{\partial M} \in \Gamma(\partial M, T\mathcal{F})\}; \quad \mathfrak{X}_{\mathcal{F}^c}(M) = \frac{1}{x} \cdot \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M)$$

Pour un point donné $p \in M$, on définit les fibres types suivantes

$${}^{\mathcal{F}}T_p M := \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M) / [I_p(M) \cdot \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M)]$$

$${}^{\mathcal{F}^c}T_p M := \mathfrak{X}_{\mathcal{F}^c}(M) / [I_p(M) \cdot \mathfrak{X}_{\mathcal{F}^c}(M)]$$

ainsi que les fibrés vectoriels

$${}^{\mathcal{F}}TM := \sqcup_{p \in M} {}^{\mathcal{F}}T_p M$$

$${}^{\mathcal{F}^c}TM := \sqcup_{p \in M} {}^{\mathcal{F}^c}T_p M$$

Dans le reste de cette sous-section, on désigne par $c : I_x \times \partial M \rightarrow M$ un voisinage tubulaire du bord, et par $\tilde{\nu} : I_x \times \tilde{Y} \rightarrow I_x \times \partial M$ le revêtement fini obtenu en posant $\tilde{\nu} := \text{Id}_I \times \nu$.

À partir de ces définitions on peut énoncer

Proposition 4.1.4.

Il existe d'unique structures de fibrés vectoriels sur ${}^{\mathcal{F}}TM$ et ${}^{\mathcal{F}^c}TM$ au-dessus de M pour lesquelles

$$\Gamma(M, {}^{\mathcal{F}}TM) \approx \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M) \text{ et } \Gamma(M, {}^{\mathcal{F}^c}TM) \approx \mathfrak{X}_{\mathcal{F}^c}(M)$$

Preuve. Au travers des définitions, on voit que

$${}^{\mathcal{F}}TM|_{M \setminus \partial M} \approx {}^{\mathcal{F}^c}TM|_{M \setminus \partial M} \approx TM|_{M \setminus \partial M}$$

Au-dessus de $c(I \times \partial M)$, il suffit de se ramener à la structure que l'on avait dans le cas d'une variété à bord fibré, et d'appliquer l'argument de la proposition (4.1.1). Pour ce faire, on considère un atlas trivalisant $\{\mathcal{U}_r\}_{r \in J}$ de \tilde{Y} , c'est-à-dire, un atlas pour lequel $\nu|_{\mathcal{U}_r} : \mathcal{U}_r \rightarrow \nu(\mathcal{U}_r)$ est un difféomorphisme pour tout $r \in J$, et on obtient ainsi un recouvrement ouvert (trivalisant) de $c(I \times \partial M)$, donné par la famille $\{[c \circ \tilde{\nu}](I \times \mathcal{U}_r)\}_{r \in J}$. Si dans un certain ouvert \mathcal{U}_r on a des coordonnées $\{y^i\}$ autour d'un point de N et des coordonnées $\{z^a\}$ autour d'un point de F , on obtient qu'au dessus de $[c \circ \tilde{\nu}](I \times \mathcal{U}_r)$, $\mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M)$ est généré par les champs suivants

$$\{\tilde{\nu}_*(x^2 \partial_x), \tilde{\nu}_*(x \partial_{y^i}), \tilde{\nu}_*(\partial_{z^a})\} = \{x^2 \partial_x, x \nu_*(\partial_{y^i}), \nu_*(\partial_{z^a})\}$$

alors que $\mathfrak{X}_{\mathcal{F}_c}(M)$ est généré par

$$\{\bar{\nu}_*(x\partial_x), \bar{\nu}_*(\partial_{y^i}), \bar{\nu}_*(x^{-1}\partial_{z^a})\} = \{x\partial_x, \nu_*(\partial_{y^i}), x^{-1}\nu_*(\partial_{z^a})\}$$

$\nu|_{\mathcal{U}_r}$ étant un difféomorphisme. les fibres au dessus de $[c \circ \bar{\nu}](I \times \mathcal{U}_r)$ sont de dimension n pour tout $r \in J$. Similairement à la preuve de la proposition (4.1.1), les champs ci-dessus se transforment adéquatement sous changements de coordonnées (toujours avec $s = x\rho(x, y)$, $\rho > 0$ pour la fonction de définition du bord), et le résultat suit. \square

Définition. On considère les sections lisses suivantes : $g_N \in \Gamma(N, S^2T^*N)$ une métrique riemannienne sur la base du fibré $F \rightarrow \tilde{Y} \xrightarrow{\phi} N$, et $\kappa, B \in \Gamma(M, S^{2\mathcal{F}}T^*M)$ deux champs de formes bilinéaires symétriques, avec $\kappa|_{\partial M}$ donnant une métrique riemannienne sur les fibres de \tilde{Y} .

On dit qu'une métrique riemannienne $g_{\mathcal{F}} \in \Gamma(M, S^{2\mathcal{F}}T^*M)$ est une \mathcal{F} -métrique (exacte) si près du bord, on a

$$\bar{\nu}^*c^*g_{\mathcal{F}} = \frac{dx^2}{x^4} + \frac{\phi^*g_N}{x^2} + \kappa + x^2B \in \Gamma(I \times \tilde{Y}, S^2T^*(I \times \tilde{Y}))$$

Sur le fibré ${}^{\mathcal{F}_c}TM = x^{-1}{}^{\mathcal{F}}TM$, on dit que $g_{\mathcal{F}_c} \in \Gamma(M, S^{2\mathcal{F}_c}T^*M)$ est une métrique de cusp feuilleté si près du bord, elle satisfait

$$\bar{\nu}^*c^*g_{\mathcal{F}_c} = \frac{dx^2}{x^2} + \phi^*g_N + x^2\kappa + x^4B \in \Gamma(I \times \tilde{Y}, S^2T^*(I \times \tilde{Y}))$$

En d'autres termes, c'est une métrique obtenue par une transformation conforme $g_{\mathcal{F}_c} = x^2g_{\mathcal{F}}$.

On a maintenant le résultat suivant :

Proposition 4.1.5.

Les connexions de Levi-Civita associées aux métriques $g_{\mathcal{F}}$ et $g_{\mathcal{F}_c}$ sont bien définies, c'est- dire que l'on a bien

$${}^{\mathcal{F}}\nabla : \Gamma({}^{\mathcal{F}}TM) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes {}^{\mathcal{F}}TM)$$

ainsi que :

$${}^{\mathcal{F}_c}\nabla : \Gamma({}^{\mathcal{F}_c}TM) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes {}^{\mathcal{F}_c}TM)$$

Celles-ci donnent des deux-formes de courbure ${}^{\mathcal{F}}\Omega \in \Omega^2(M, \text{End}({}^{\mathcal{F}}TM))$ et ${}^{\mathcal{F}_c}\Omega \in \Omega^2(M, \text{End}({}^{\mathcal{F}_c}TM))$ lisses jusqu'au bord de M .

Preuve. Comme évoqué précedemment, on doit vérifier ici que dans un repère local $\{e_\alpha\}$ de ${}^{\mathcal{F}}TM$, les symboles de Christoffel associés à ${}^{\mathcal{F}}\nabla$ sont lisses jusqu'au bord de M . En reprenant la méthode de la proposition précédente, on effectue les calculs sur $I_x \times \tilde{Y}$, et on

obtient que les pullbacks des symboles de Christoffel par $c \circ \bar{\nu} : I \times \tilde{Y} \rightarrow I \times \partial M$ donnent les mêmes expressions que dans la preuve du (4.1.3) (et de l'appendice). En ce qui concerne $\mathcal{F}_c \nabla$, on vérifie que pour tous $Y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{F}_c}(M)$ et $X \in \mathfrak{X}(M)$, on a $x(\mathcal{F}_c \nabla_X Y/x) \in \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M)$. \square

4.2 Inégalités de Hitchin-Thorpe

4.2.1 Hypothèses, notations et faits généraux

Cette section porte sur une variété riemannienne (M, g) complète, connexe, orientée, non compacte et ayant la structure d'un bord fibré ou feuilleté à l'infini. Plus précisément, le compactifié à l'infini de M est $\bar{M} = M \cup Y$, où $Y = \partial \bar{M}$ est

1. Soit un fibré localement trivial $F \rightarrow Y \xrightarrow{\phi} N$, F et N étant des variétés lisses, compactes, orientées et sans bord, tel que $\dim F > 0$
2. Soit Y est le quotient d'un fibré $F \rightarrow \tilde{Y} \xrightarrow{\phi} N$ tel qu'en (1) par une action proprement discontinue et libre d'un groupe fini $\Gamma \subset \text{Isom}(\tilde{Y})$ préservant l'orientation.

Dans ce contexte, \bar{M} est munie de l'une des quatre métriques étudiées à la section précédente. On se fixe une fonction de définition du bord $x \in \mathcal{C}^\infty(\bar{M}, \mathbb{R}_+)$, un voisinage tubulaire du bord $c : I_x \times Y \rightarrow \bar{M}$, et on considère les sections lisses suivantes :

- $g_N \in \Gamma(N, S^2 T^* N)$ une métrique riemannienne sur la base, et $h = \phi^* g_N$;
- Pour un bord fibré, $\kappa \in \Gamma(Y, S^2 T^* Y)$ est tel que $\forall y \in N$, $\kappa|_{\phi^{-1}(\{y\})}$ est une métrique riemannienne sur $\phi^{-1}(\{y\}) \approx F$, et κ_p annihile le complément orthogonal de $\ker(\phi_{*|_p})$ dans $T_p Y$ pour tout $p \in \phi^{-1}(\{y\})$. Pour un bord feuilleté ($Y = \tilde{Y}/\Gamma$), $\kappa \in \Gamma(\tilde{Y}, S^2 T^* \tilde{Y})$ satisfait les mêmes hypothèses ;
- Pour un bord fibré, $B \in \Gamma(\bar{M}, S^{2\phi} T^* \bar{M})$ est un champ de formes bilinéaires tel que $B(x^2 \partial_x, \cdot) \equiv 0$; et pour un bord feuilleté, $B \in \Gamma(\bar{M}, S^{2\mathcal{F}} T^* \bar{M})$ tel que $B(x^2 \partial_x, \cdot) \equiv 0$.

Dans le cas où \bar{M} est à bord fibré, on utilise ces objets pour définir les métriques \tilde{g}_ϕ et $g_\phi = \tilde{g}_\phi + xB$ sur le fibré ${}^\phi T \bar{M}$, de façon à ce que près du bord Y on ait

$$c^* \tilde{g}_\phi = \frac{dx^2}{x^4} + \frac{h}{x^2} + \kappa \text{ et } c^* g_\phi = \frac{dx^2}{x^4} + \frac{h}{x^2} + \kappa + xB$$

Sur le fibré ${}^d T \bar{M}$, on définit les métriques $\tilde{g}_d = x^2 \tilde{g}_\phi$ et $g_d = x^2 g_\phi$, qui prennent les formes suivantes sur $c(I_x \times Y)$:

$$c^* \tilde{g}_d = \frac{dx^2}{x^2} + h + x^2 \kappa \text{ et } c^* g_d = \frac{dx^2}{x^2} + h + x^2 \kappa + x^3 B$$

Pour le cas où le bord de \bar{M} est feuilleté, on considère l'application quotient $\nu : \tilde{Y} \rightarrow Y$ induite par l'action de Γ sur \tilde{Y} , et on considère son extension $\bar{\nu} : I \times \tilde{Y} \rightarrow I \times Y$, $(t, p) \mapsto$

$(t, \nu(p))$. Sur le fibré ${}^{\mathcal{F}}T\overline{M}$ on définit la métrique $g_{\mathcal{F}}$, telle que près du bord, on a

$$\bar{\nu}^*c^*g_{\mathcal{F}} = \frac{dx^2}{x^4} + \frac{h}{x^2} + \kappa + xB$$

et sur ${}^{\mathcal{F}c}TM$, on définit $g_{\mathcal{F}c}$ telle que

$$\bar{\nu}^*c^*g_{\mathcal{F}c} = \frac{dx^2}{x^2} + h + x^2\kappa + x^3B.$$

Dans la sous-section qui suit, on obtient la caractéristique d'Euler $\chi(M) = \chi(\overline{M})$ et la signature de Hirzebruch $\tau(M) = \tau(\overline{M})$ pour M de dimension $4k$ et ayant les deux géométries décrites à l'infini. Les notations dont on fait usage pour les intégrales invariantes sont les suivantes :

- Pour g_{ϕ} , on note ${}^{\phi}\nabla$ sa connexion de Levi-Civita, ϕ_{ω} sa 1-forme de connexion et ϕ_{Ω} sa 2-forme de courbure. On utilise toujours les exposants ϕ, d, \mathcal{F} et $\mathcal{F}c$ pour préciser à quelle métrique sont associés les connexions et les formes. Dans le cas où on s'intéresse aux objets associés à une métrique de type produit uniquement, on ajoute des tildes.
- Si ${}^g\nabla$ est la connexion de Levi-Civita associée à l'une des métriques utilisées, $e(M, {}^g\nabla) = Pf({}^g\Omega/2\pi)$ et $L(M, {}^g\nabla)$ désignent respectivement la forme d'Euler et le L -polynôme de Hirzebruch calculés avec la courbure ${}^g\Omega$ de ${}^g\nabla$.

Si P de l'un des polynômes donnant les formes caractéristiques $e(M, {}^g\nabla)$ ou $L(M, {}^g\nabla)$ (g étant de l'un des types ϕ, d, \mathcal{F} ou $\mathcal{F}c$), les formes calculées par rapport aux connexions ${}^{\varepsilon}\nabla$ sont reliés aux précédentes par (théorème (11.1) (Nak03)) :

$$P(M, {}^g\nabla) - P(M, {}^{\varepsilon}\nabla) = dTP(M, {}^g\nabla, {}^{\varepsilon}\nabla) \in \Omega^{4k}(\overline{M})$$

où le membre de gauche est la différentielle de la transgression de P par rapport à ${}^{\varepsilon}\nabla$ et ${}^g\nabla$, qu'on définit ici comme étant

$$TP(M, {}^g\nabla, {}^{\varepsilon}\nabla) = 2k \int_0^1 \tilde{P}({}^g\omega - \varepsilon_{\omega}, \underbrace{{}^t\Omega, \dots, {}^t\Omega}_{2k-1}) dt \in \Omega^{4k-1}(\overline{M})$$

avec ${}^t\Omega \in \Omega^2(\overline{M}, \mathfrak{so}(T\overline{M}))$ la 2-forme de courbure de la connexion d'interpolation ${}^t\nabla = t{}^g\nabla + (1-t){}^{\varepsilon}\nabla$ avec $t \in [0, 1]$, et $\tilde{P} \in S^{2k}(\mathfrak{so}_{4k}^*)$ la partie homogène de degré $2k$ de P , telle que

$$P(M, {}^g\nabla) \equiv \tilde{P}(\underbrace{{}^g\Omega, \dots, {}^g\Omega}_{2k}) \in \Omega^{4k}(\overline{M})$$

4.2.2 Formules d'indice en dimension $4k$

Soit M une variété riemannienne complète et non compacte, dont le compactifié à l'infini est $\overline{M} = M \cup Y$. Pour préciser la contribution topologique provenant de $\partial\overline{M}$, on utilise un argument de limite adiabatique : on prend d'abord $0 < \varepsilon \ll 1$, on pose $M_{\varepsilon} := \overline{M} \setminus c([0, \varepsilon] \times Y)$

et $\partial M_\varepsilon := \{p \in \overline{M}/x(p) = \varepsilon\}$, on applique ensuite le théorème d'Atiyah-Patodi-Singer (les résultats (2.1.1) et (2.1.2)) à M_ε munie d'une métrique de type produit près du bord. Par invariance d'homotopie, on a $\tau(M_\varepsilon) = \tau(M)$ ainsi que $\chi(M_\varepsilon) = \chi(M)$ pour tout $0 < \varepsilon \ll 1$, et on prend alors la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ des termes obtenus. On utilise les mêmes notations et hypothèses qu'à la sous-section précédente pour les métriques donnant des structures spéciales à Y .

Y est un bord fibré :

On considère la métrique de type produit g_ε sur $T\overline{M}$, telle que près du bord

$$c^*g_\varepsilon = \frac{dx^2}{\varepsilon^4} + \frac{h}{\varepsilon^2} + \kappa$$

Remarquons qu'avec $T\overline{M}|_{M_\varepsilon} \approx \phi T\overline{M}|_{M_\varepsilon} \approx {}^d T\overline{M}|_{M_\varepsilon}$, la connexion de Levi-Civita ${}^\varepsilon \nabla$ de g_ε (et de $\varepsilon^2 g_\varepsilon$) est bien définie sur les fibrés $\phi T\overline{M}|_{M_\varepsilon}$ et ${}^d T\overline{M}|_{M_\varepsilon}$, et les formes associées ${}^\varepsilon \omega$ et ${}^\varepsilon \Omega$ sont lisses sur M_ε pour tout $0 < \varepsilon \ll 1$. Sur $\partial M_\varepsilon = \{x = \varepsilon\} \approx Y$, on a que

$$g_{\varepsilon|_{x=\varepsilon}} \equiv \tilde{g}_{\phi|_{x=\varepsilon}} \text{ et } \varepsilon^2 g_{\varepsilon|_{x=\varepsilon}} \equiv \tilde{g}_{d|_{x=\varepsilon}}$$

Soit A_ε , ${}^\phi \tilde{A}_\varepsilon$ et ${}^d \tilde{A}_\varepsilon$ les opérateurs de signature impairs induits respectivement par g_ε , \tilde{g}_ϕ et \tilde{g}_d sur ∂M_ε . Les égalités ci-dessus permettent de voir que pour les invariants éta de la signature, on a

$$\eta(A_\varepsilon) = \eta({}^\phi \tilde{A}_\varepsilon) = \eta({}^d \tilde{A}_\varepsilon)$$

avec la seconde égalité provenant du fait que l'invariant éta associé à A_ε n'est pas affecté par le redimensionnement de la métrique par une constante. Pour le cas d'une ϕ -métrique g_ϕ , la signature est donnée par :

$$\begin{aligned} \tau(M) &= \int_{M_\varepsilon} L(M, {}^\varepsilon \nabla) - \frac{1}{2} \eta(A_\varepsilon) \\ &= \int_{M_\varepsilon} L(M, \phi \nabla) - \int_{\partial M_\varepsilon} TL(\overline{M}, \phi \nabla, {}^\varepsilon \nabla) - \frac{1}{2} \eta(A_\varepsilon) \end{aligned}$$

On prend maintenant la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ des termes de droite. Le premier terme devient clairement une intégrale sur M , puisque

$$\int_{M_\varepsilon} L(M, \phi \nabla) = \int_M L(M, \phi \nabla) - \int_{|0, \varepsilon[\times Y} c^* L(M, \phi \nabla)$$

Pour le troisième terme du membre de droite, il devient par définition la limite adiabatique de l'invariant éta (c.f. section 2.1.3) de ${}^\phi \tilde{A}_\varepsilon$, qui est aussi la limite adiabatique de $\eta({}^\phi A_\varepsilon)$, avec ${}^\phi A_\varepsilon$ la signature impaire induite par g_ϕ sur ∂M_ε , étant donné que $\lim_{x \rightarrow 0} g_\phi = \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{g}_\phi$. Pour la limite de l'intégrale sur ∂M_ε de la forme de transgression, on admet le résultat suivant :

Lemme 4.2.1. Termes de Chern-Simons

Soit \bar{M} une variété à bord fibré et P l'un des polynômes caractéristiques e ou L . Avec les mêmes notations que précédemment, on a que :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_\varepsilon} TP(\bar{M}, \phi \nabla, \varepsilon \nabla) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_\varepsilon} TP(\bar{M}, \phi \tilde{\nabla}, \varepsilon \nabla) = 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_\varepsilon} TP(\bar{M}, {}^d \nabla, \varepsilon \nabla) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_\varepsilon} TP(\bar{M}, {}^d \tilde{\nabla}, \varepsilon \nabla) = 0 \end{aligned}$$

La première égalité est le contenu des lemmes (3.7) et (4.2) de (DW07), et la seconde est démontrée en même temps que le théorème (3.5) de la même publication.

On obtient donc que la signature de M avec une structure asymptotique de bord fibré est donnée par

$$\tau(M) = \int_M L(M, \phi \nabla) - \frac{1}{2} a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(A_\varepsilon)$$

Dans le cas de la caractéristique d'Euler de (\bar{M}, g_ϕ) , on n'a pas d'invariant η , le terme de Chern-Simons $\int_{M_\varepsilon} Te(M, \phi \nabla, \varepsilon \nabla)$ a une limite nulle par le lemme (4.2.1), et on se réduit à la formule de Gauss-Bonnet-Chern :

$$\chi(M) = \int_M e(M, \phi \nabla)$$

Pour le cas de \bar{M} muni de g_d , on applique Atiyah-Patodi-Singer à $(M_\varepsilon, \varepsilon^2 g_\varepsilon)$. En utilisant le fait que $\eta(\phi \tilde{A}_\varepsilon) = \eta({}^d \tilde{A}_\varepsilon)$ ainsi que le lemme (4.2.1), on obtient le résultat que voici :

Théorème 4.2.2. Signature et caractéristique d'Euler pour métriques ϕ et d

Soit (M, g) une variété riemannienne complète, connexe, orientée, et g asymptotique à une métrique de bord ou de cusp fibré. La signature et la caractéristique d'Euler de M sont donnés par

$$\begin{aligned} \tau(M) &= \int_M L(M, {}^g \nabla) - \frac{1}{2} a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(A_\varepsilon) \\ \chi(M) &= \int_M e(M, {}^g \nabla) \end{aligned}$$

où A_ε est l'opérateur de signature impair induit par g sur l'hypersurface $\{x = \varepsilon\}$.

On rappelle ici que l'expression complète de $\frac{1}{2} a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(A_\varepsilon)$ est donnée par le théorème (4.4) de (Dai91).

Y est un bord feuilleté :

Pour \bar{M} avec un bord feuilleté, on utilise la métrique produit $\hat{g}_\varepsilon \in \Gamma(\bar{M}, S^2 T^* \bar{M})$ telle que sur $c(I_x \times Y)$ on a

$$\bar{\nu}^* c^* \hat{g}_\varepsilon = \frac{dx^2}{\varepsilon^4} + \frac{h}{\varepsilon^2} + \kappa$$

On note aussi ${}^\varepsilon\nabla$ sa connexion de Levi-Civita, et on remarque que celle-ci est bien définie sur ${}^{\mathcal{F}}T\bar{M}|_{M_\varepsilon}$ et ${}^{\mathcal{F}c}T\bar{M}|_{M_\varepsilon}$, et donne des formes ${}^\varepsilon\omega$ et ${}^\varepsilon\Omega$ lisses sur M_ε . De plus, comme on a

$$\hat{g}_\varepsilon|_{x=\varepsilon} \equiv \tilde{g}_{\mathcal{F}}|_{x=\varepsilon} \text{ et } \varepsilon^2\hat{g}_\varepsilon|_{x=\varepsilon} \equiv \tilde{g}_{\mathcal{F}c}|_{x=\varepsilon}$$

on obtient encore

$$\eta(A_\varepsilon) = \eta({}^{\mathcal{F}}\tilde{A}_\varepsilon) = \eta({}^{\mathcal{F}c}\tilde{A}_\varepsilon)$$

au niveau des invariants éta. La différence notable par rapport au cas précédent réside dans le fait qu'on peut exprimer l'invariant éta de Y en fonction de celui de \tilde{Y} . Si $\tilde{g}_{\mathcal{F}}$ prend la forme suivante près du bord :

$$\tilde{\nu}^*c^*\tilde{g}_{\mathcal{F}} = \frac{dx^2}{x^4} + \frac{h}{x^2} + \kappa \in \Gamma(I_x \times \tilde{Y}, S^2T^*(I_x \times \tilde{Y}))$$

on introduit alors la métrique suivante sur \tilde{Y} :

$$g_{\tilde{Y},\varepsilon} = \varepsilon^{-2}h + \kappa \in \Gamma(\tilde{Y}, S^2T^*\tilde{Y}), \forall 0 < \varepsilon \ll 1$$

Cette métrique a le même comportement asymptotique que $g_{\varepsilon|\partial M_\varepsilon}$ de la partie de bords fibrés. On note \tilde{A}_ε l'opérateur de signature impair associé à $g_{\tilde{Y},\varepsilon}$, et par les sections 2 et 3 du chapitre II, l'invariant rho du revêtement $\nu : \tilde{Y} \rightarrow Y$ est donné par

$$\rho(\tilde{Y}, Y) = \frac{1}{2}(\eta(\tilde{A}_\varepsilon) - |\Gamma|\eta(A_\varepsilon)) = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Gamma \setminus \{1\}} \eta_\alpha(\tilde{A}_\varepsilon)$$

Pour une \mathcal{F} -métrique, on applique la formule de signature à $(M_\varepsilon, \hat{g}_\varepsilon)$, et on a

$$\tau(M) = \int_{M_\varepsilon} L(M, {}^{\mathcal{F}}\nabla) - \int_{\partial M_\varepsilon} TL(M, {}^{\mathcal{F}}\nabla, {}^\varepsilon\nabla) + \frac{1}{|\Gamma|} \left(\rho(\tilde{Y}, Y) - \frac{1}{2}\eta(\tilde{A}_\varepsilon) \right)$$

Il reste à analyser le terme de Chern-Simons (l'intégrale sur ∂M_ε). Puisque $\nu : \tilde{Y} \rightarrow Y$ est un difféomorphisme local, le terme de Chern-Simons est

$$\int_{\partial M_\varepsilon} TL(M, {}^{\mathcal{F}}\nabla, {}^\varepsilon\nabla) = \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\tilde{Y}} \nu^* \left(TL(M, {}^{\mathcal{F}}\nabla, {}^\varepsilon\nabla)|_{\partial M_\varepsilon} \right)$$

En interprétant ensuite $(c \circ \tilde{\nu})^*{}^{\mathcal{F}}\nabla$ comme la connexion de Levi-Civita associée à une ϕ -métrique sur $[0, 1[\times \tilde{Y}$, on voit que l'intégrale sur \tilde{Y} s'identifie à un terme de Chern-Simons d'un bord fibré :

$$\int_{\tilde{Y}} \nu^* \left(TL(M, {}^{\mathcal{F}}\nabla, {}^\varepsilon\nabla)|_{\partial M_\varepsilon} \right) = \int_{\{x=\varepsilon\}} TL([0, 1[\times \tilde{Y}, (c \circ \tilde{\nu})^*({}^{\mathcal{F}}\nabla), \nu^*({}^\varepsilon\nabla))$$

Quand on prend la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on a par le lemme (4.2.1) que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_\varepsilon} TL(M, {}^{\mathcal{F}}\nabla, {}^\varepsilon\nabla) = 0$$

La signature devient alors :

$$\tau(M) = \int_M L(M, \mathcal{F}\nabla) + \frac{1}{|\Gamma|} \left(\rho(\tilde{Y}, Y) - \frac{1}{2} a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\tilde{A}_\varepsilon) \right)$$

À ce stade, on peut formuler le

Théorème 4.2.3. Signature et caractéristique d'Euler pour métriques \mathcal{F} et \mathcal{F}_ε

Soit (M, g) une variété riemannienne complète, connexe, orientée, et g asymptotique à une métrique de bord ou de cusp feuilleté. Avec les variétés \tilde{Y} et Y définies comme précédemment, la signature et la caractéristique d'Euler de M sont donnés par

$$\begin{aligned} \tau(M) &= \int_M L(M, g\nabla) + \frac{1}{|\Gamma|} \left(\rho(\tilde{Y}, Y) - \frac{1}{2} a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\tilde{A}_\varepsilon) \right) \\ \chi(M) &= \int_M e(M, g\nabla) \end{aligned}$$

où $\rho(\tilde{Y}, Y)$ est l'invariant rho du revêtement fini $\nu : \tilde{Y} \rightarrow Y$, et \tilde{A}_ε est l'opérateur de signature impair induit par $\nu^*(g_{|x=\varepsilon})$ sur l'hypersurface $\{x = \varepsilon\} \subset I_x \times \tilde{Y}$.

Pour les caractéristiques d'Euler obtenues avec des métriques $g_{\mathcal{F}}$ et $g_{\mathcal{F}_\varepsilon} = x^2 g_{\mathcal{F}}$, on utilise l'identification des termes de Chern-Simons et le lemme (4.2.1). Pour la signature obtenue avec une métrique à cusp feuilleté, on utilise le fait que les invariants éta sur \tilde{Y} sont les mêmes, et que $\rho(\tilde{Y}, Y)$ ne dépend pas de la métrique sur Y (Proposition (2.3.1)).

4.2.3 Dimension 4 et inégalités

On suppose dorénavant que $\dim M = 4$. Pour le cas d'un bord $\partial\bar{M} = Y$ feuilleté, l'espace total du revêtement est un fibré en cercles $S^1 \rightarrow \tilde{Y} \rightarrow N$, avec N une surface de Riemann compacte, connexe et orientée. On suppose que Γ est un groupe fini, dont l'action sur N n'a que des points fixes isolés, et agissant sur les fibres S^1 par des rotations autour des centres. Ceci donne une action libre de Γ sur \tilde{Y} .

Pour préciser la contribution topologique de Y à la formule de signature dans ce contexte, il faut considérer le fibré en droites complexes $E \rightarrow N$ dont le sous-fibré en cercles $S(E) \rightarrow N$ est isomorphe à \tilde{Y} , ainsi que $\tilde{X} := D(E)$, le sous-fibré en disques de E tel que $\partial\tilde{X} = \tilde{Y}$. L'action de Γ sur \tilde{Y} s'étend naturellement à \tilde{X} comme suit : Sur la base N , l'action est la même, et si $f \in \Gamma$ agit sur une fibre de \tilde{Y} via $\theta \mapsto f(\theta)$, la même isométrie envoie (r, θ) vers $(r, f(\theta))$ pour un point dans la fibre de \tilde{X} . De cette manière, les points fixes de l'action de Γ sur \tilde{X} sont isolés et strictement inclus dans $\tilde{X} \setminus \tilde{Y}$.

Si e_E est un représentant classe d'Euler de E , on définit la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} B_e : H^0(N) \otimes H^0(N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a \otimes b &\longmapsto \langle a \smile b \smile [e_E], [N] \rangle \end{aligned}$$

La caractéristique d'Euler de E est alors $B_\epsilon(1, 1) = \chi(E)$. Il est pertinent de rappeler à ce stade que si \tilde{A}_ϵ est l'opérateur de signature impair du théorème (2.3), alors la limite adiabatique de son invariant éta est (5.4 de (DW07)) :

$$\frac{1}{2}a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta(\tilde{A}_\epsilon) = \frac{\chi(E)}{3} - \epsilon(E)$$

où

$$\epsilon(E) = \begin{cases} -1 & ; \chi(E) < 0 \\ 0 & ; \chi(E) = 0 \\ 1 & ; \chi(E) > 0 \end{cases}$$

Il reste à déterminer une expression plus précise pour l'invariant rho. Pour ce faire, on considère que Γ est un groupe fini agissant librement sur \tilde{Y} , que cette action sur N n'a que des points fixes isolés, et que dans les fibres S^1 au-dessus de ces points, elle correspond à des rotations. Cette dernière prescription s'étend à une rotation autour du centre des fibres de \tilde{X} au-dessus des points fixes N , et on emploie l'extension de l'action décrite ci-haut pour les fibres qui ne sont pas au-dessus d'un point fixe. De cette manière, les ensembles de points fixes sont strictement dans l'intérieur $\tilde{X} \setminus \tilde{Y}$ et discrets, et en se rapportant alors aux constructions et notations des sections 2 et 3 du chapitre II, on peut faire appel à la formule de G -signature pour obtenir $\rho(\tilde{Y}, Y)$.

Lemme 4.2.4.

Pour un revêtement fini $\nu : \tilde{Y} \rightarrow Y$ satisfaisant les hypothèses ci-dessus, l'invariant rho est donné par

$$\rho(\tilde{Y}, Y) = (|\Gamma| - 1)\epsilon(E) - \sum_{a \in \Gamma \setminus \{1\}} \sum_{z \in \text{Fix}(a)} \left\{ \prod_{j=1}^2 \cot(\theta_{a,j}(z)/2) \right\}$$

où $\text{Fix}(a) \subset \tilde{X}$ est l'ensemble des points fixes de l'élément $a \in \Gamma \setminus \{1\}$, et $\{\theta_{a,j}(z)\}_{j=1,2}$ un système d'angles cohérents pour $a_{*|z} \in \text{Aut}(T_z \tilde{X})$.

Preuve. On utilise la métrique $\epsilon^{-2}h + \kappa$ sur $\tilde{Y} = \partial\tilde{X}$, en considérant un tenseur $\tilde{\kappa} \in \Gamma(\tilde{X}, S^2 T^* \tilde{X})$ se restreignant à κ sur \tilde{Y} et tel que $\tilde{g}_\epsilon = \epsilon^{-2}h + \tilde{\kappa}$ est une métrique riemannienne Γ -invariante sur \tilde{X} . Si \tilde{B}_ϵ est l'opérateur de signature pair sur \tilde{X} associé à \tilde{g}_ϵ , et \tilde{A}_ϵ l'opérateur de signature impair sur \tilde{Y} , alors par le théorème de G -signature (2.2.1) (théorème 4.5.2 de (Gil84)), on a pour tout $a \in \Gamma \setminus \{1\}$ que

$$\tau(a, \tilde{X}) = \sum_{z \in \text{Fix}(a)} df(a, \tilde{B}_\epsilon)[z] - \frac{1}{2} \eta_a(\tilde{A}_\epsilon)$$

où le défaut de signature est donné par

$$df(a, \tilde{B}_\epsilon)[z] = \prod_{j=1}^2 (-i) \cot(\theta_{a,j}(z)/2)$$

en sommant les termes $\eta_a(\tilde{A}_\epsilon)$ sur les $a \in \Gamma \setminus \{1\}$, on a

$$\rho(\tilde{Y}, Y) = -\frac{1}{2} \sum_{a \in \Gamma \setminus \{1\}} \eta_a(\tilde{A}_\epsilon) = \sum_{a \in \Gamma \setminus \{1\}} \left[\tau(a, \tilde{X}) - \sum_{z \in \text{Fix}(a)} \left\{ \prod_{j=1}^2 \cot(\theta_{a,j}(z)/2) \right\} \right]$$

Il reste à spécifier les $\tau(a, \tilde{X}) = \text{Tr}(a^*|_{\hat{H}_+^2}) - \text{Tr}(a^*|_{\hat{H}_-^2})$, où conformément aux notations de la section 2.2, si \hat{H}^2 est l'image de $H^2(\tilde{X}, \tilde{Y})$ dans $H^2(\tilde{X})$, \hat{H}_\pm^2 sont les sous-espaces de \hat{H}^2 sur lesquels la forme quadratique induite par le produit cup est définie positive ou négative, et $a^*|_{\hat{H}_\pm^2}$ est l'application induite en cohomologie par $a \in \Gamma \setminus \{1\}$ restreinte à \hat{H}_\pm^2 (on prend la cohomologie à coefficients dans \mathbb{C} ici). D'une part, puisque $\tilde{X} = D(E)$ est un sous-fibré en disques fermés au dessus de la surface de Riemann N , on a les isomorphismes suivants en cohomologie :

$$H^2(\tilde{X}) \stackrel{\text{homotopie}}{\simeq} H^2(N) \simeq H^0(N) \simeq \mathbb{C}$$

$$H^2(\tilde{X}, \tilde{Y}) \stackrel{\text{déf.}}{\simeq} H_c^2(\tilde{X} \setminus \tilde{Y}) \stackrel{\text{Poincaré}}{\simeq} H^2(\tilde{X} \setminus \tilde{Y}) \stackrel{\text{homotopie}}{\simeq} H^2(N) \simeq \mathbb{C}$$

Les applications a^* étant induites par des isométries préservant l'orientation, on a $a^*|_{H^2(\tilde{X})} \equiv \text{Id}_{H^2(\tilde{X})}$, et avec le fait que $\hat{H}_+^2 \oplus \hat{H}_-^2 \simeq H^2(\tilde{X}, \tilde{Y})$ est de dimension 1, on obtient que $\tau(a, \tilde{X}) = \pm 1$, puisque l'une des traces est nécessairement nulle (l'un des \hat{H}_\pm^2 est trivial). D'autre part, \hat{H}_\pm^2 représentent aussi les sous-espaces sur lesquels la forme B_e introduite auparavant est définie positive ou négative, puisqu'elle coïncide avec le produit cup sur \hat{H}^2 dans notre cas, et on en déduit que le signe de $\tau(a, \tilde{X})$ est celui de $B_e(1, 1) = \chi(E)$, et en d'autres termes que $\tau(a, \tilde{X}) = \epsilon(E)$. Ceci étant vrai pour un élément $a \in \Gamma \setminus \{1\}$ quelconque, on a finalement la formule de l'énoncé. \square

On combine le dernier lemme avec le théorème (4.2.3), et on a

Théorème 4.2.5. Signature pour métriques \mathcal{F} et \mathcal{F}_c en dimension 4

Soit (M, g) une variété riemannienne complète, connexe, orientée, et g asymptotique à une métrique de bord ou de cusp feuilleté. Avec les variétés $\tilde{Y} = S^1(E)$ et $Y = \partial\bar{M} = \tilde{Y}/\Gamma$ satisfaisant les hypothèses ci-dessus, on a

$$\tau(M) = \int_M L(M, {}^g\nabla) + \epsilon(E) - \frac{1}{|\Gamma|} \left[\frac{\chi(E)}{3} + \sum_{a \in \Gamma \setminus \{1\}} \sum_{z \in \text{Fix}(a)} \left\{ \prod_{j=1}^2 \cot(\theta_{a,j}(z)/2) \right\} \right]$$

On a tous les éléments en main pour obtenir une inégalité de Hitchin-Thorpe pour le type de bord feuilleté qu'on a étudié. Soient ${}^gR, {}^gW$ et gZ respectivement les tenseurs de Riemann, de Weyl et de Ricci sans trace, et gS la courbure scalaire associés à la métrique g (de type \mathcal{F} ou \mathcal{F}_c). On a montré au chapitre précédent que le tenseur de Riemann se décompose comme

suit en dimension 4

$${}^g R = \begin{pmatrix} {}^g W^+ + \frac{{}^g S}{12} \text{Id} & {}^g Z \\ {}^g Z^t & {}^g W^- + \frac{{}^g S}{12} \text{Id} \end{pmatrix}$$

Si de plus g est une métrique d'Einstein (${}^g Z = 0$), les intégrales des formes caractéristiques sont données par

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int_M L(M, {}^g \nabla) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M (\|{}^g W^+\|^2 - \|{}^g W^-\|^2) d\nu^g = \frac{3}{2} \left[\tau(M) + \frac{1}{2} a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta(A_\epsilon) \right] \\ \int_M e(M, {}^g \nabla) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\|{}^g W^+\|^2 + \|{}^g W^-\|^2 + \frac{{}^g S^2}{24} \right) d\nu^g = \chi(M) \end{aligned}$$

celles-ci impliquent les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \chi(M) + \frac{3}{2} \left[\tau(M) + \frac{1}{2} a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta(A_\epsilon) \right] &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(2\|{}^g W^+\|^2 + \frac{{}^g S^2}{24} \right) d\nu^g \geq 0 \\ \chi(M) - \frac{3}{2} \left[\tau(M) + \frac{1}{2} a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta(A_\epsilon) \right] &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(2\|{}^g W^-\|^2 + \frac{{}^g S^2}{24} \right) d\nu^g \geq 0 \end{aligned}$$

En substituant $\frac{1}{2} a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta(A_\epsilon)$ par son expression du théorème (4.2.5), il découle de ces inégalités que

$$\chi(M) \geq \frac{3}{2} \left| \tau(M) - \epsilon(E) + \frac{1}{|\Gamma|} \left[\frac{\chi(E)}{3} + \sum_{a \in \Gamma \setminus \{1\}} \sum_{z \in \text{Fix}(a)} \left\{ \prod_{j=1}^2 \cot(\theta_{a,j}(z)/2) \right\} \right] \right|$$

Pour le cas d'égalité, le même argument que dans le cas compact et sans bord permet de voir que le groupe d'holonomie du revêtement universel de M peut être réduit à $SU(2)$ (c.f. preuve du (3.2.5)). Ceci démontre le

Théorème 4.2.6. Inégalité de Hitchin-Thorpe pour bords et cusps feuilletés

Si M est une variété d'Einstein complète à bord ou a cusp feuilleté satisfaisant les hypothèses utilisées, alors sa caractéristique d'Euler et sa signature de Hirzebruch satisfont l'inégalité

$$\chi(M) \geq \frac{3}{2} \left| \tau(M) - \epsilon(E) + \frac{1}{|\Gamma|} \left[\frac{\chi(E)}{3} + \sum_{a \in \Gamma \setminus \{1\}} \sum_{z \in \text{Fix}(a)} \left\{ \prod_{j=1}^2 \cot(\theta_{a,j}(z)/2) \right\} \right] \right|$$

Dans le cas d'égalité, le revêtement universel de M est de Calabi-Yau.

Si (M, g) est à bord fibré, on suit la même démarche, et la différence réside dans le terme $\frac{1}{2} a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta(A_\epsilon)$. Si $\partial \overline{M}$ est un fibré en cercles au dessus d'une surface de riemann, on obtient le résultat (1.2) de (DW07), qui s'énonce comme suit :

Théorème 4.2.7. Inégalité de Hitchin-Thorpe pour bords et cusps fibrés

Si M est une variété d'Einstein complète à bord ou a cusp fibré satisfaisant les hypothèses utilisées, alors sa caractéristique d'Euler et sa signature de Hirzebruch satisfont l'inégalité

$$\chi(M) \geq \frac{3}{2} \left| \tau(M) - \frac{\chi(E)}{3} + \epsilon(E) \right|$$

Dans le cas d'égalité, le revêtement universel de M est de Calabi-Yau.

Remarque.

1) Au début de cette section on a fait des hypothèses supplémentaires sur les tenseurs $\kappa \in \Gamma(\partial\overline{M}, S^2T^*\overline{M})$ et $B \in \Gamma(\overline{M}, S^{2\phi}T^*\overline{M})$ qu'on utilise pour définir les ϕ et \mathcal{F} métriques exactes. Ceci permettait d'utiliser le lemme (4.2.1) garantissant l'annulation des termes de Chern-Simons dans les formules d'indices en dimension $4k$. Si on utilise les hypothèses plus générales de la section 1, le lemme (4.2.1) reste vrai en dimension 4, et il en va de même pour les inégalités des théorèmes (4.2.6) et (4.2.7). La démonstration de ce fait est présentée dans l'appendice des preuves complémentaires.

2) La remarque qui suit se veut être un commentaire sur l'article (Hit97) de N. Hitchin, intitulé "Einstein metrics and the eta-invariant". Le résultat principal de cette publication stipule que si une structure conforme sur la sphère S^3 est induite par une métrique d'Einstein auto-duale sur $\overline{\mathbb{B}}^4$, alors l'invariant η de la signature est négatif. Ceci permet de voir l'invariant η (et plus spécifiquement son signe) comme une obstruction à ce qu'une structure conforme sur S^3 soit induite par une classe de métriques d'Einstein sur $\overline{\mathbb{B}}^4$. Après avoir démontré ce résultat, l'auteur s'intéresse à quelques exemples de métriques d'Einstein auto-duales explicites : pour celles construites dans (Hit95) et définies sur S^3 , Hitchin vérifie son théorème via des calculs directs et la théorie de Chern-Simons ; pour des cas où les structures conformes sont induites par des métriques définies sur des espaces de topologie non triviale, il utilise la continuation analytique de métriques étudiées par Pedersen (Ped86) et LeBrun (LcB88), et produit entre autres un contre-exemple. Le lien avec la référence (DW07) et le présent travail, est la construction d'exemples à partir des instantons gravitationnels classifiés par Krönheimer dans (Kro89), dont le bord est difféomorphe à S^3/Γ avec $\Gamma \subset SU(2)$ un groupe fini, et dont on peut explicitement obtenir l'invariant η . Malgré son titre, il s'agit d'un article de géométrie conforme en premier lieu, qui ne traite pas d'inégalités de type Hitchin-Thorpe, et dans lequel l'invariant η est utilisé à des fins différentes de celles de (DW07) et de ce mémoire.

4.2.4 Quelques exemples

On présente ici des exemples basés sur l'ansatz de Gibbons-Hawking. Pour obtenir des contre-exemples de l'inégalité de Hitchin-Thorpe, on effectuera des sommes complexes avec $\overline{\mathbb{C}P}^2$, le plan complexe projectif orienté négativement, et pour lequel on a $\chi(\overline{\mathbb{C}P}^2) = 3$ et $\tau(\overline{\mathbb{C}P}^2) = -1$.

Exemple 1 (D'après (GH79)) :

Pour un entier donné $k \geq 1$, on supprime les points $\{p_j\}_{j=1}^k$ de \mathbb{R}^3 dont les coordonnées sont

$p_j = (\cos(2\pi j/k), \sin(2\pi j/k), 0)$, et on dénote par M_0 l'espace total de :

$$S^1 \rightarrow M_0 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^3 \setminus \{p_j\}_{j=1}^k$$

qui est le fibré en cercles dont la première classe de Chern donne -1 quand appariée avec la classe d'homologie générée par une sphère centrée en l'un des monopoles p_j . On munit M_0 de la métrique

$$g_0 = \pi^*[V \cdot ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2)] + \pi^*(V^{-1})\omega^2$$

où la fonction $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_j\}_{j=1}^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la 1-forme de connexion $\omega \in \Omega^1(M_0, \text{End}(TM_0))$ sont données par

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{|x - p_j|} \text{ et } d\omega = \pi^*(\ast dV)$$

On notera (\overline{M}_0, g_0) la compactification à l'infini de la complétion (lisse) de (M_0, g_0) . Cette compactification donne une variété dont le bord $\partial\overline{M}_0$ est difféomorphe à un quotient d'une fibration de Hopf par une action de \mathbb{Z}_k sur les fibres (i.e le bord est difféomorphe à la base de $S^1 \rightarrow S^3/\mathbb{Z}_k \rightarrow S^2$). Les invariants topologiques d'intérêt pour la suite sont (c.f. (GH79)) :

$$\chi(M_0) = k, \tau(M_0) = 1 - k \text{ et } \tilde{\eta} := \frac{1}{2} a \lim \eta(\partial\overline{M}_0, g_0|_{\partial\overline{M}_0}) = \frac{k}{3} - 1$$

Dans ce contexte, la métrique g_0 est Ricci-plate (donc d'Einstein en particulier) et hyperkähler sur M_0 à bord fibré. On voit aussi la concordance avec le théorème 2.7 :

$$\chi(M_0) - \frac{3}{2}|\tau(M_0) + \tilde{\eta}| = k - \frac{3}{2} \left| -\frac{2k}{3} + 1 - 1 \right| = 0$$

Exemple 2 :

Soit $l \geq 1$, et considérons la variété $X_0 := \overline{M}_0 \# l\overline{\mathbb{C}P}^2$, avec les éclatements effectués dans l'intérieur de M_0 . En utilisant les deux formules générales

$$\chi(A \# B) = \chi(A) + \chi(B) - 2$$

$$\tau(A \# B) = \tau(A) + \tau(B)$$

pour des variétés A et B de dimension 4, on a que

$$\chi(X_0) = \chi(M_0) + l(\chi(\overline{\mathbb{C}P}^2) - 2) = k + l$$

$$\tau(X_0) = \tau(M_0) + l(\tau(\overline{\mathbb{C}P}^2)) = 1 - (k + l)$$

Le bord est le même qu'à l'exemple 1, donc on a toujours $\tilde{\eta} = \frac{k}{3} - 1$, d'où

$$|\tau(X_0) + \tilde{\eta}| = \left| -\frac{2k}{3} - l \right| = \frac{2k}{3} + l$$

et on obtient alors que $\forall l \geq 1$:

$$\chi(X_0) - \frac{3}{2}|\tau(X_0) + \bar{\eta}| = k + l - k - \frac{3}{2}l = -\frac{l}{2}$$

En utilisant les formules d'indice obtenues dans ce chapitre, et en exprimant les intégrales sur X_0 en termes des composantes du tenseur de Riemann, la dernière égalité se réexprime comme suit :

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{X_0} \left(2\|{}^g W^+\|^2 + \frac{{}^g S^2}{24} - \|{}^g Z\|^2 \right) d\nu^g = -\frac{l}{2} < 0$$

Ceci signifie que $\|{}^g Z\|^2 > 2\|{}^g W^+\|^2 + \frac{{}^g S^2}{24} \geq 0$, et est valide pour une métrique riemannienne g quelconque sur X_0 . On en déduit que X_0 ne peut admettre de métrique d'Einstein.

Exemple 3 (d'après (GRR)) :

On commence cette partie par la construction d'une variété à bord feuilleté X_1 qui n'est pas un quotient global d'une variété à bord fibré.

Sur la variété \bar{M}_0 du premier exemple, on se donne une action de $\mathbb{Z}_k \approx \Gamma \subset \text{Isom}(\bar{M}_0)$, dont le générateur agit par rotation de $+2\pi/k$ autour de l'axe Oz dans la base $\mathbb{R}^3 \setminus \{p_j\}_{j=1}^k$, et par multiplication par $e^{i\frac{2\pi}{k}}$ dans les fibres S^1 . Initialement, l'action est définie sur \mathbb{R}^3 , et son relèvement à M_0 n'est pas unique, à moins qu'on ne spécifie comment \mathbb{Z}_k agit sur la fibre au-dessus de l'origine de la base (voir section 6 de (GRR) et p.106 de (Wri12)). Pour avoir une action libre sur \bar{M}_0 , on prend donc le relèvement dont le générateur $1 \in \mathbb{Z}_k$ agit comme multiplicateur par $e^{i\frac{2\pi}{k}}$ sur $\pi^{-1}(\{0\})$.

En posant $M_1 = \bar{M}_0/\Gamma$, et en considérant le revêtement fini $\nu : \partial\bar{M}_0 \rightarrow \partial M_1$, on a une structure de feuilletage sur ∂M_1 , dont les feuilles sont les images par ν des fibres de \bar{M}_0 .

Soit $\gamma : S^1 \rightarrow \partial M_1$ un lacet tel que $[\nu \circ \gamma] \in \pi_1(B\Gamma)$ n'est pas triviale, et considérons une translation lisse de γ vers $M_1 \setminus \partial M_1$, que l'on notera $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow M_1 \setminus \partial M_1$. Le bord ∂M_1 est de dimension 3 et orientable, donc son fibré tangent est trivial, et de ce fait, le fibré normal de $\tilde{\gamma}(S^1)$ est trivial dans $M_1 \setminus \partial M_1$. Si on modifie M_1 de façon à ce que $\tilde{\gamma}(S^1)$ soit contractile, on obtiendra que la variété résultante X_1 n'est pas un quotient global, puisque l'on ne pourra étendre l'application $\nu : \partial\bar{M}_0 \rightarrow \partial M_1$. Ceci se fait en considérant un fermé $\mathcal{V} \approx S^1 \times \mathbb{D}^3 \supset \tilde{\gamma}(S^1)$, et une variété $N \approx \mathbb{D}^2 \times S^2$, satisfaisant $\partial\mathcal{V} \approx \partial N \approx S^1 \times S^2$, et en posant

$$X_1 := (M_1 \setminus \mathcal{V}) \cup_{\partial N} N$$

où on a recollé le long de ∂N .

On détermine maintenant la signature et la caractéristique d'Euler de X_1 . En reprenant les

formules générales du 2^{ème}, exemple on a les caractéristiques d'Euler suivantes

$$\chi(M_1) = \chi(M_1 \setminus \mathcal{V}) + \chi(\mathcal{V}) - \chi(\partial\mathcal{V})$$

$$\chi(X_1) = \chi(X_1 \setminus N) + \chi(N) - \chi(\partial N)$$

Avec $\chi(M_1 \setminus \mathcal{V}) = \chi(X_1 \setminus N)$, $\chi(\partial\mathcal{V}) = \chi(\partial N) = 0$ (dimension), $\chi(N) = \chi(S^2) = 2$ et $\chi(\mathcal{V}) = \chi(S^1) = 0$ (par équivalences d'homotopie), on substitue pour obtenir

$$\chi(X_1) = \chi(M_1) + 2 = 2 + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{M_0} e(M_0, {}^{g_0}\nabla) = 3$$

où l'avant dernière égalité vient du fait que l'application quotient $M_0 \rightarrow \bar{M}_1$ est un difféomorphisme local, et la dernière du fait que

$$k = |\Gamma| = \chi(M_0) = \int_{M_0} e(M_0, {}^{g_0}\nabla)$$

Pour la signature, on a les égalités suivantes :

$$\tau(M_1) = \tau(M_1 \setminus \mathcal{V}) + \tau(\mathcal{V})$$

$$\tau(X_1) = \tau(X_1 \setminus N) + \tau(N)$$

Pour $\tau(\mathcal{V})$, la restriction du produit cup à l'image de $H^2(\mathcal{V}, \partial\mathcal{V}) \rightarrow H^2(\mathcal{V})$ est l'application nulle puisque $H^2(\mathcal{V}) = H^2(S^1) = \{0\}$, donc $\tau(\mathcal{V}) = 0$. Pour $\tau(N)$, on considère le fibré vectoriel trivial $E = \mathbb{R}^2 \times S^2$ de base S^2 , et on interprète $N = \mathbb{D}^2 \times S^2$ et $\partial N = S^1 \times S^2$ comme les sous-fibrés en disques et en cercles de E . Par l'isomorphisme de Thom et la formule de Künneth, on a les groupes de cohomologie non triviaux suivants :

$$H^k(N, \partial N) = H^k(D(E), S(E)) \approx H^{k-2}(S^2) = \mathbb{R}, k = 2, 4; H^l(\partial N) \approx \mathbb{R}, l = 0, 1, 2, 3$$

Avec $H^*(N) \approx H^*(S^2)$, la suite exacte longue de cohomologie relative donne

$$0 \rightarrow H^1(\partial N) \xrightarrow{\delta^*} H^2(N, \partial N) \xrightarrow{j} H^2(N) \xrightarrow{i} H^2(\partial N) \rightarrow 0$$

En utilisant les identifications avec \mathbb{R} de ces espaces, on voit que δ^* est un isomorphisme puisqu'elle est injective et qu'elle relie deux espaces de même dimension. L'application j est alors nulle puisque $\ker j = H^2(N, \partial N)$, et par définition de la signature d'une variété à bord, on a encore $\tau(N) = 0$. Ces annulations impliquent que

$$\tau(X_1) = \tau(X_1 \setminus N) = \tau(M_1 \setminus \mathcal{V}) = \tau(M_1)$$

On peut finalement construire notre contre-exemple à l'inégalité de Hitchin-Thorpe pour variétés à bord feuilleté. Posons $X = X_1 \# l\bar{\mathbb{C}P}^2$, avec les éclatements dans l'intérieur. La signature de cette variété est donnée par

$$\tau(X) = \tau(X_1) + l \cdot \tau(\bar{\mathbb{C}P}^2) = \tau(M_1) - l$$

En utilisant la formule d'indice donnant $\tau(M_1)$, avec g_1 la métrique induite par g_0 sur M_1 , on a

$$\begin{aligned}\tau(M_1) + \frac{1}{|\Gamma|} [\tilde{\eta} - \rho(\partial\overline{M}_0, \partial M_1)] &= \int_{M_1} L(M, g_1 \nabla) \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \int_{M_0} L(M_0, g_0 \nabla) = \frac{1}{k} (\tau(M_0) + \tilde{\eta}) \\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Puisque $\partial X = \partial M_1$, il s'ensuit que

$$\tau(X) + \frac{1}{|\Gamma|} [\tilde{\eta} - \rho(\partial\overline{M}_0, \partial X)] = -\left(\frac{2}{3} + l\right)$$

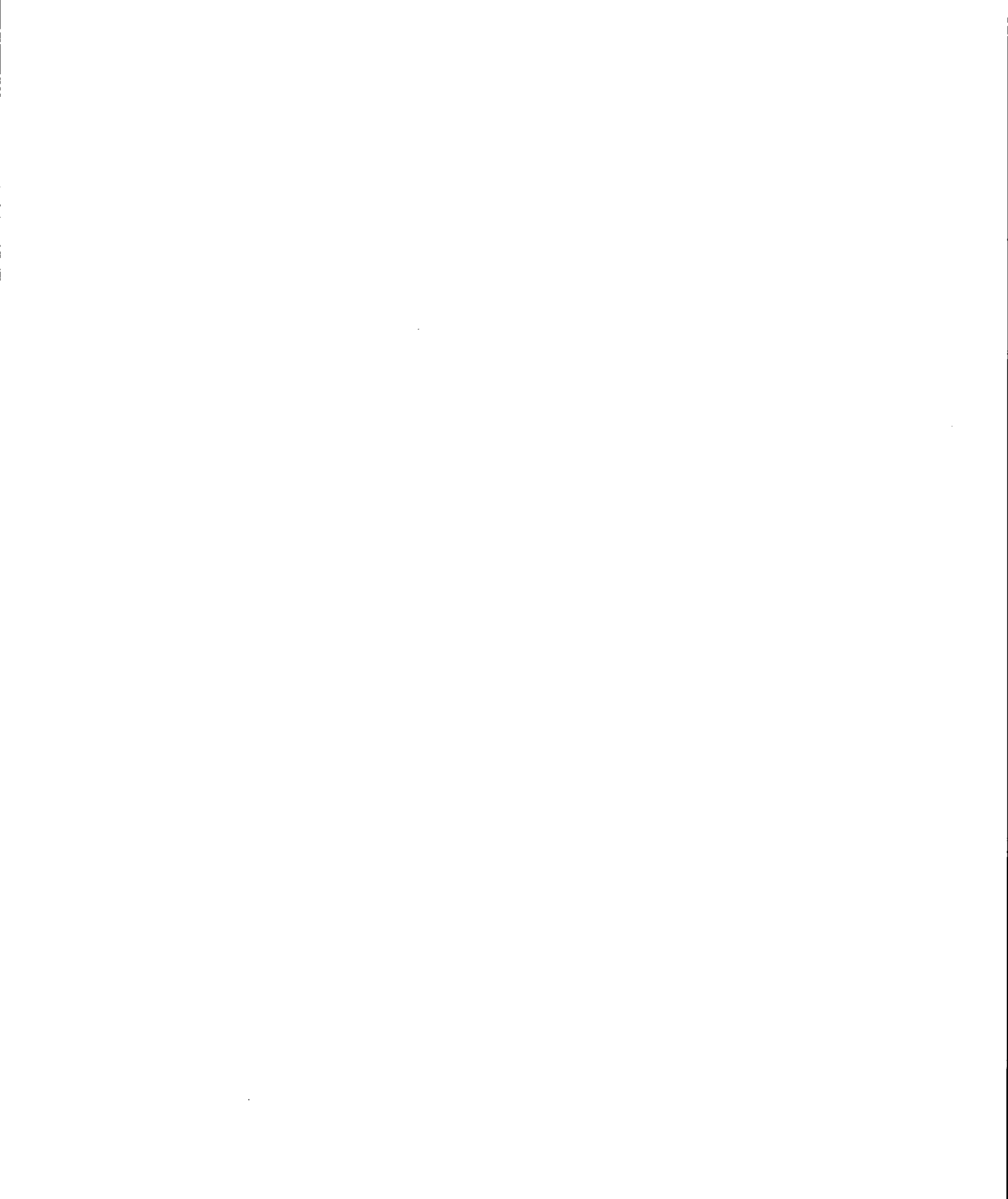
Pour ce qui est de la caractéristique d'Euler de X , on a

$$\chi(X) = \chi(X_1) + l \cdot (\chi(\overline{CP}^2) - 2) = l + 3$$

et donc

$$\chi(X) - \frac{3}{2} \left| \tau(X) + \frac{1}{|\Gamma|} [\tilde{\eta} - \rho(\partial\overline{M}_0, \partial X)] \right| = (3 + l) - (1 + 3l/2) = \frac{4 - l}{2}$$

Pour $l > 4$, cette quantité est négative, ce qui implique que la partie sans trace du tenseur de Ricci est non-nulle, et par conséquent que X ne peut admettre de métrique d'Einstein.



APPENDICE A

SYMBOLES DE CHRISTOFFEL DE ϕ -MÉTRIQUES

Soit M une variété différentiable à bord fibré $F \rightarrow \partial M \xrightarrow{\phi} N$ (N et F sont des variétés différentiables compactes, orientables, et telles que $\dim N + \dim F = \dim M - 1$). On se fixe une fonction de définition du bord $x \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$, ainsi qu'un voisinage tubulaire du bord décrit par le difféomorphisme (local) $c : [0, 1]_x \times \partial M \rightarrow M$. Dans le voisinage d'un point $p \in c(I \times \partial M)$, on se donne des coordonnées locales $\{y^j\}_{1 \leq j \leq \dim N}$ sur la base N du fibré ∂M , et un système $\{z^a\}_{1 \leq a \leq \dim F}$ sur la fibre F .

On effectue les calculs dans le repère local $\{\partial_x, \partial_i, \partial_a\}$, où

$$\partial_i := \partial_{y^i}, i = 1, \dots, \dim N; \partial_a := \partial_{z^a}, a = 1, \dots, \dim F$$

soit β un champ de formes bilinéaires symétriques défini sur $c(I \times \partial M)$. On fera usage de la notation suivante pour les représentations matricielles

$$\beta \equiv \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{0i} & \beta_{0a} \\ \beta_{i0} & \beta_{ij} & \beta_{ia} \\ \beta_{a0} & \beta_{ai} & \beta_{ab} \end{pmatrix}$$

Dans le système de coordonnées considéré sur $c(I \times \partial M)$, β_{00} désigne le terme en $dx \otimes dx$, β_{ij} la matrice $\beta_{ij} dy^i \otimes dy^j$, et β_{ab} la matrice $\beta_{ab} dz^a \otimes dz^b$. De la même façon, les termes β_{0i}, β_{0a} et β_{ia} désignent les blocs non diagonaux de β dans le repère local utilisé.

A.1 Symboles de Christoffel d'une ϕ -métrique produit

A.1.1 Inversion d'une ϕ -métrique produit

Soit $g_N \in \Gamma(N, S^2 T^* N)$ une métrique sur la base de ∂M , et $\kappa \in \Gamma(\partial M, S^2 T^* \partial M)$ un tenseur dont la restriction aux fibres de ∂M donne une famille de métriques riemanniennes paramétrisées par N . La ϕ -métrique de type produit sur ${}^\phi T M$ qu'on considère ici est $\bar{g}_\phi \in$

$\Gamma(M, S^2\phi T^*M)$, est prend la forme suivante sur $c(I \times \partial M)$:

$$\tilde{g} \equiv c^* \tilde{g}_\phi = \frac{dx^2}{x^4} + \frac{h}{x^2} + \kappa$$

où l'on a introduit $h = \phi^* g_N$. En termes de coordonnées, on aura

$$\tilde{g} = \frac{dx^2}{x^4} + \left(\frac{h_{ij}(y)}{x^2} + \kappa_{ij}(y, z) \right) dy^i \otimes dy^j + \kappa_{ia}(y, z) dy^i \otimes dz^a + \kappa_{ab}(y, z) dz^a \otimes dz^b$$

avec $\kappa_{ab}(y, z) dz^a \otimes dz^b$ inversible pour tout point y dans la carte sur N qu'on utilise. La première étape consiste à obtenir des expressions locales pour les composantes de \tilde{g}_ϕ^{-1} . On introduit le champ de formes bilinéaires suivant

$$A_x = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x\delta_j^i & 0 \\ 0 & 0 & \delta_b^a \end{pmatrix}$$

et on pose $\tau = A_x \tilde{g} A_x = g_0 + x\kappa_0 + x^2[\kappa_{ij}]$, où $g_0 = \text{diag}(1, [h_{ij}], [\kappa_{ab}])$ est inversible, et $x\kappa_0$ est la contribution des blocs non-diagonaux. Plus explicitement

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} + x^2\kappa_{ij} & x\kappa_{ia} \\ 0 & x\kappa_{ai} & \kappa_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{ab} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{ia} \\ 0 & \kappa_{ai} & 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De manière générale, pour $B \in M_m(\mathbb{R})$ et $0 < \varepsilon \ll 1$, on a le développement que voici

$$(I + \varepsilon B)^{-1} \approx \sum_{n=0}^{+\infty} (-\varepsilon B)^n = I - \varepsilon B + \varepsilon^2 B^2 + O(\varepsilon^3)$$

On utilise ce développement pour déterminer τ^{-1} , en approximant d'abord $\tau_0^{-1} = (g_0 + x\kappa_0)^{-1}$, et ensuite $\tau^{-1} = (\tau_0 + x^2[\kappa_{ij}])^{-1}$. On a alors

$$\tau^{-1} = \tau_0^{-1} - x^2(\tau_0^{-1}[\kappa_{ij}]\tau_0^{-1}) + x^4(\tau_0^{-1}[\kappa_{ij}])^2\tau_0^{-1} + x^6\tau' \\ \text{avec } \tau_0^{-1} = \sum_{j=0}^4 (-xg_0^{-1}\kappa_0)^j g_0^{-1} + x^5 \cdot \tau''$$

et $\tau', \tau'' \in c^*\Gamma(M, S^2TM)$. On prend une précision d'ordre x^4 puisqu'on doit exprimer les symboles de Christoffel avec une précision en x^2 . Pour alléger les notations, on introduit de plus les fonctions suivantes :

$$\kappa_a^i = h^{ij}\kappa_{ja}; \kappa_i^a = \kappa^{ab}\kappa_{bi}; \kappa^{ai} = \kappa^{ia} = \kappa^{ac}\kappa_c^i = h^{ij}\kappa_j^a \\ \kappa_j^i = h^{ik}\kappa_{kj}; \kappa^{ij} = \kappa_k^i h^{kj} = h^{il}\kappa_{lk} h^{kj}; \kappa^{ia}\kappa_a^j = \kappa^{il}\kappa_l^j + \kappa^{ia}\kappa_a^j$$

Une fois que les éléments de τ^{-1} sont déterminés, on obtient l'inverse de \tilde{g}_ϕ via la relation $\tilde{g}^{-1} = A_x \tau^{-1} A_x$.

Inverse d'une ϕ -métrique produit

$$\tilde{g}^{00} = x^4, \tilde{g}^{0i} = \tilde{g}^{0a} = 0$$

$$\begin{aligned}\bar{g}^{ij} &= x^2 h^{ij} - x^4 (\kappa^{ij} - \kappa_a^i \kappa^{aj}) + O(x^6) \\ \bar{g}^{ia} &= -x^2 \kappa^{ia} + x^4 (\kappa_j^i \kappa^{ja}) + O(x^6) \\ \bar{g}^{ab} &= \kappa^{ab} + x^2 (\kappa^{ai} \kappa_i^b) + x^4 (\kappa_k^a \kappa_c^k \kappa_j^c \kappa^{jb} - \kappa^{aj} \kappa_{ji} \kappa^{ib}) + O(x^6)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\kappa_a^i &= h^{ij} \kappa_{ja}; \kappa_i^a = \kappa^{ab} \kappa_{bi}; \kappa^{ai} = \kappa^{ia} = \kappa^{ac} \kappa_c^i = h^{ij} \kappa_j^a \\ \kappa_j^i &= h^{ik} \kappa_{kj}; \kappa^{ij} = \kappa_k^i h^{kj} = h^{il} \kappa_{lk} h^{kj}; \kappa^{i\alpha} \kappa_\alpha^j = \kappa^{il} \kappa_l^j + \kappa^{ia} \kappa_a^j\end{aligned}$$

A.1.2 Liste des symboles de Christoffel d'une ϕ -métrique produit

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu &= \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^\mu = \frac{\tilde{g}^{\mu\nu}}{2} \{-\partial_\nu \tilde{g}_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \tilde{g}_{\beta\nu} + \partial_\beta \tilde{g}_{\nu\alpha}\} \\ \xi_{\mu\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (-\partial_\mu \kappa_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \kappa_{\beta\mu} + \partial_\beta \kappa_{\mu\alpha}); \mu, \alpha, \beta \neq 0\end{aligned}$$

$\mu = 0$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{0i}^0 &= \tilde{\Gamma}_{0a}^0 = \tilde{\Gamma}_{ia}^0 = \tilde{\Gamma}_{ab}^0 = 0 \\ \tilde{\Gamma}_{00}^0 &= -\frac{2}{x}; \tilde{\Gamma}_{ij}^0 = x h_{ij}\end{aligned}$$

$\mu = i$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{00}^i &= \tilde{\Gamma}_{0a}^i = 0; \tilde{\Gamma}_{0j}^i = -\frac{\delta_j^i}{x} - x(\kappa_j^i - \kappa_a^i \kappa_j^a) + O(x^3) \\ \tilde{\Gamma}_{jk}^i &= \frac{h^{il}}{2} \{-\partial_{y^l} h_{jk} + \partial_{y^j} h_{kl} + \partial_{y^k} h_{lj}\} + x^2 \left\{ h^{il} \xi_{ljk} - \kappa^{ia} \xi_{ajk} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\kappa^{il} - \kappa_a^i \kappa^{al})}{2} (-\partial_{y^l} h_{jk} + \partial_{y^j} h_{kl} + \partial_{y^k} h_{lj}) \right\} + O(x^4) \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha a}^i &= x^2 \{ h^{ik} \xi_{k\alpha a} - \kappa^{ic} \xi_{c\alpha a} \} + O(x^4); \alpha \neq 0\end{aligned}$$

$\mu = a$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{00}^a &= \tilde{\Gamma}_{0b}^a = 0; \tilde{\Gamma}_{0i}^a = \frac{\kappa_i^a}{x} - x(\kappa^{al} \kappa_{li}) + O(x^3) \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^a &= \kappa^{ab} \xi_{bij} - \frac{\kappa^{al}}{2} \{-\partial_{y^l} h_{ij} + \partial_{y^i} h_{jl} + \partial_{y^j} h_{li}\} + x^2 \left\{ \kappa^{al} \kappa_l^b \xi_{bij} \right. \\ &\quad \left. - \kappa^{al} \xi_{lij} + \frac{\kappa^{ak} \kappa_k^l}{2} (-\partial_{y^l} h_{ij} + \partial_{y^j} h_{il} + \partial_{y^i} h_{lj}) \right\} + O(x^4) \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha b}^a &= \kappa^{ac} \xi_{cab} + x^2 \kappa^{ai} (\kappa_i^c \xi_{c\alpha b} - \xi_{i\alpha b}) + O(x^3); \alpha \neq 0\end{aligned}$$

A.2 Symboles de Christoffel associés à une ϕ -métrique exacte

A.2.1 Inversion d'une ϕ -métrique exacte

Soit $B \in \Gamma(M, S^{2\phi}T^*M)$ un champ de formes bilinéaires symétriques sur ${}^\phi TM$. Dans le repère considéré, celui-ci se décompose comme suit :

$$B = \left(\frac{B_{00}(x, y, z)}{x^4} \right) dx \otimes dx + \left(\frac{B_{ij}(x, y, z)}{x^2} \right) dy^i \otimes dy^j + B_{ab}(x, y, z) dz^a \otimes dz^b \\ + \left(\frac{B_{0j}(x, y, z)}{x^3} \right) dx \otimes dy^j + \left(\frac{B_{0a}(x, y, z)}{x^2} \right) dx \otimes dz^a + \left(\frac{B_{ja}(x, y, z)}{x} \right) dy^j \otimes dz^a$$

Avec les notations précédentes, on considérera une métrique ϕ -exacte $g_\phi \in \Gamma(M, S^{2\phi}T^*M)$, donnée par

$$g_\phi = \tilde{g}_\phi + x^2 B$$

Les symboles de Christoffel associés à la métrique g sont obtenus via la formule

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \{ -\partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} \}$$

où $g_{\alpha\beta}$ sont les composantes de $g = c^* g_\phi$, et comme précédemment, $g^{\alpha\beta}$ sont celles de g^{-1} . Pour inverser g_ϕ , on utilise le fait que $g^{-1} = ([\delta_\nu^\mu] + x^2 \tilde{g}^{-1} B)^{-1} \tilde{g}^{-1}$, les composantes de ce dernier tenseur sont alors données par

$$g^{\alpha\beta} = \tilde{g}^{\alpha\beta} - x^2 \tilde{g}^{\alpha\mu} B_{\mu\nu} \tilde{g}^{\nu\beta} + x^4 [(\tilde{g}^{-1} B)^2]_\nu^\alpha \tilde{g}^{\nu\beta} + O(x^6)$$

Avec ce qui précède, on a que

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{\tilde{g}^{\mu\nu}}{2} \{ -\partial_\nu (\tilde{g}_{\alpha\beta}) + \partial_\alpha (\tilde{g}_{\beta\nu}) + \partial_\beta (\tilde{g}_{\nu\alpha}) \} \\ - x^2 \frac{\tilde{g}^{\mu\rho} B_{\rho\sigma} \tilde{g}^{\sigma\nu}}{2} \{ -\partial_\nu (\tilde{g}_{\alpha\beta}) + \partial_\alpha (\tilde{g}_{\beta\nu}) + \partial_\beta (\tilde{g}_{\nu\alpha}) \} \\ + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \{ -\partial_\nu (x^2 B_{\alpha\beta}) + \partial_\alpha (x^2 B_{\beta\nu}) + \partial_\beta (x^2 B_{\nu\alpha}) \} + O(x^4) \\ = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu + \Lambda_{\alpha\beta}^\mu - x^2 \tilde{g}^{\mu\rho} B_{\rho\sigma} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma + O(x^4)$$

où $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu$ sont les symboles de Christoffel associés à \tilde{g}_ϕ , et où on a introduit les fonctions

$$\Lambda_{\alpha\beta}^\mu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \{ -\partial_\nu (x^2 B_{\alpha\beta}) + \partial_\alpha (x^2 B_{\beta\nu}) + \partial_\beta (x^2 B_{\nu\alpha}) \}$$

Pour calculer ces fonctions, on commence par déterminer les expressions des termes entre accolades, et on somme avec les termes $g^{\mu\nu}$. Pour déterminer $g^{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$, on utilise les

représentations matricielles ci-dessous :

$$x^2(\tilde{g}^{-1}B) = \begin{pmatrix} x^2 B_{00} & x^3 B_{0i} & x^4 B_{0a} \\ \left(x B_0^i - x^2 \kappa_a^i B_0^a - x^3 (\kappa_k^i - \kappa_a^i \kappa_k^a) B_0^k + x^4 (\kappa_j^i \kappa_b^j - \kappa_c^i \kappa_j^c \kappa_b^j) B_0^b + O(x^5) \right) & \left(x^2 B_j^i - x^3 \kappa_a^i B_j^a - x^4 (\kappa_k^i - \kappa_a^i \kappa_k^a) B_j^k + O(x^5) \right) & \left(x^3 B_a^i - x^4 \kappa_b^i B_a^b + O(x^5) \right) \\ \left(B_0^a - x \kappa_i^a B_0^i + x^2 \kappa_j^a \kappa_c^j B_0^c + x^3 \kappa^{aj} (\kappa_{jk} - \kappa_{jc} \kappa_k^c) B_0^k + x^4 \kappa^{aj} (\kappa_{jd} \kappa_i^d - \kappa_{ji}) \kappa_b^i B_0^b + O(x^5) \right) & \left(x B_i^a - x^2 \kappa_j^a B_i^j + x^3 \kappa_j^a \kappa_b^i B_i^b + x^4 \kappa^{aj} (\kappa_{jk} - \kappa_{jc} \kappa_k^c) B_i^k + O(x^5) \right) & \left(x^2 B_b^a - x^3 \kappa_i^a B_b^i + x^4 \kappa_i^a \kappa_c^i B_b^c + O(x^5) \right) \end{pmatrix}$$

$$x^2(\tilde{g}^{-1}B\tilde{g}^{-1}) = \begin{pmatrix} x^6 B_{00} & x^5 B_0^i - x^6 \kappa_a^i B_0^a + O(x^7) & x^4 B_0^a - x^5 B_0^i \kappa_i^a + O(x^6) \\ (x^2 \tilde{g}^{-1} B \tilde{g}^{-1})^{0i} & \left(x^4 B^{ij} - x^5 (\kappa_a^i B^{aj} + \kappa_a^j B^{ai}) + O(x^6) \right) & \left(x^3 B^{ai} - x^4 (\kappa_j^a B^{ji} + \kappa_b^i B^{ba}) + O(x^5) \right) \\ (x^2 \tilde{g}^{-1} B \tilde{g}^{-1})^{0a} & (x^2 \tilde{g}^{-1} B \tilde{g}^{-1})^{ia} & \left(x^2 B^{ab} - x^3 (\kappa_i^a B^{ib} + \kappa_i^b B^{ia}) + x^4 (\kappa_j^a B^{ji} \kappa_i^b + B^{ac} \kappa_{ci} \kappa^{ib}) + B^{bc} \kappa_{ci} \kappa^{ia} + O(x^5) \right) \end{pmatrix}$$

Les termes B_α^β et $B^{\alpha\beta}$ étant définis de la même façon que les κ_α^β et $\kappa^{\alpha\beta}$.

Inverse d'une ϕ -métrique exacte

$$\begin{aligned}
g^{00} &= x^4 - x^6 B_{00} + O(x^8) \\
g^{ij} &= x^2 h^{ij} + x^4 h_4^{ij} + O(x^5) \\
g^{ab} &= \kappa^{ab} + x^2 \kappa_2^{ab} + x^3 \kappa_3^{ab} + x^4 \kappa_4^{ab} + O(x^5) \\
g^{0i} &= -x^5 B_0^i + x^6 \kappa_a^i B_0^a + O(x^7) \\
g^{0a} &= -x^4 B_0^a + x^5 B_0^i \kappa_i^a + O(x^6) \\
g^{ai} &= -x^2 \kappa^{ia} - x^3 B^{ia} + x^4 g_4^{ai} + O(x^5)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
h_4^{ij} &= \kappa^{ij} - B^{ij} - \kappa_a^i \kappa^{aj}; \quad \kappa_2^{ab} = \kappa^{ai} \kappa_i^b - B^{ab}; \quad \kappa_3^{ab} = \kappa_i^a B^{ib} + \kappa_i^b B^{ia} \\
\kappa_4^{ab} &= \kappa_k^a \kappa_c^k \kappa_j^c \kappa^{jb} - \kappa^{aj} \kappa_{ji} \kappa^{ib} - \kappa^{bj} \kappa_{ji} \kappa^{ia} + B^{ac} \kappa_{ci} \kappa^{ib} + B^{bc} \kappa_{ci} \kappa^{ia} B_0^a B_0^b + B_\alpha^a B_{\alpha b} \\
g_4^{ai} &= \kappa_j^i \kappa^{ja} + \kappa_j^a B^{ji} + \kappa_j^i B^{ja}
\end{aligned}$$

A.2.2 Liste des symboles de Christoffel d'une ϕ -métrique exacte

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu + \Lambda_{\alpha\beta}^\mu - x^2 \tilde{g}^{\mu\rho} B_{\rho\nu} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\nu$$

 $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= -\frac{2}{x} + x B_{00} + \frac{x^2}{2} \{ \partial_x B_{00} + B_0^a \partial_a B_{00} \} + O(x^3) \\
\Gamma_{0i}^0 &= \frac{x^2}{2} (\partial_i B_{00} + 2B_{0i}) + O(x^3); \quad \Gamma_{0a}^0 = \frac{x^2}{2} \partial_a B_{00} + O(x^3) \\
\Gamma_{ia}^0 &= O(x^3); \quad \Gamma_{ij}^0 = x h_{ij} + O(x^3); \quad \Gamma_{ab}^0 = O(x^4)
\end{aligned}$$

 $\mu = i$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^i &= \frac{\kappa^{ia}}{2} (\partial_a B_{00}) - \frac{h^{ij}}{2} (\partial_j B_{00}) + B_0^i + \frac{x}{2} (2h^{ij} \partial_x B_{0i} - B^{ia} \partial_a B_{00} - 4\kappa_a^i B_0^a) + \frac{x^2}{2} [2B_0^i B_{00} \\
&\quad - 2(\kappa_k^i - \kappa_a^i \kappa_k^a) B_0^k - h_4^{ij} (B_{j0} + \partial_j B_{00}) + 2\kappa^{ia} \partial_x B_{0a} - g_4^{ia} \partial_a B_{00}] + O(x^3) \\
\Gamma_{0j}^i &= -\frac{\delta_j^i}{x} + \frac{x}{2} [-2(\kappa_j^i - \kappa_a^i \kappa_j^a) + h^{ik} (\partial_j B_{0k} - \partial_k B_{0j} - 2B_j^i) + \kappa^{ia} (\partial_a B_{0j})] \\
&\quad + \frac{x^2}{2} [h^{ik} (\partial_x B_{jk}) + B^{ia} (\partial_a B_{j0}) - \kappa^{ia} (\partial_j B_{0a} + B_{ja}) - 2(\kappa_a^i B_j^a + B_a^i \kappa_j^a)] + O(x^3) \\
\Gamma_{0a}^i &= \frac{x}{2} (h^{ij} \partial_a B_{j0}) - \frac{x^2}{2} \kappa^{ib} (\partial_a B_{0b} - \partial_b B_{0a}) + O(x^3) \\
\Gamma_{jk}^i &= \frac{h^{il}}{2} (-\partial_l h_{jk} + \partial_j h_{kl} + \partial_k h_{lj}) + \frac{x^2}{2} [\kappa^{ia} (\partial_a B_{jk} - \xi_{ajk}) + h^{il} (2\xi_{ljk} - \partial_l B_{jk}) \\
&\quad + (\kappa^{il} - \kappa_a^i \kappa^{al} - B^{il}) (-\partial_l h_{jk} + \partial_j h_{kl} + \partial_k h_{lj})] + O(x^4)
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{ja}^i = \frac{x^2}{2} [h^{ik}(\partial_a B_{kj} + 2\xi_{kja}) - 2\kappa^{ic}\xi_{cja}] + O(x^3)$$

$$\Gamma_{ab}^i = x^2 [h^{ik}\xi_{kab} - \kappa^{ic}\xi_{cab}] + O(x^3)$$

$\mu = a$

$$\Gamma_{00}^a = -\frac{\kappa^{ab}}{2x^2}(\partial_b B_{00}) + 2\frac{B_0^a}{x} + \left[\kappa^{ab}\partial_x B_{b0} + \frac{\kappa^{ai}}{2}(\partial_i B_{00} + 2B_{0i}) - \frac{\kappa_2^{ab}}{2}(\partial_b B_{00}) - 2\kappa_i^a B_0^i \right]$$

$$- \frac{x}{2} [\kappa_3^{ab}(\partial_b B_{00}) + B_0^a B_{00} + B^{ai}(\partial_i B_{00} + 2B_{0i}) + \kappa^{ai} B_{i0} + 4\kappa_j^a \kappa_c^j B_0^c]$$

$$+ \frac{x^2}{2} [2\kappa_2^{ab}\partial_x B_{0b} - \kappa_4^{ab}\partial_b B_{00} + B_0^a \partial_x B_{00} + B_0^i \kappa_i^a - 2B^{ai}\partial_x B_{i0}$$

$$+ 4\kappa^{aj}(\kappa_{jk} - \kappa_{jc}\kappa_k^c)B_0^k - g_4^{ai}(\partial_i B_{00} + 2B_{0i})] + O(x^3)$$

$$\Gamma_{0i}^a = \frac{\kappa^{ab}}{2x}(\kappa_{bi} - \partial_b B_{i0}) + \kappa^{ab}(\partial_i B_{b0} + B_{bi}) + B_i^a - \frac{x}{2} [\kappa^{aj}(\partial_i B_{j0} - \partial_j B_{i0} - 2\kappa_{ji})$$

$$- \kappa^{ab}(\partial_x B_{bi}) + \kappa_2^{ab}(\partial_b B_{0i}) - 2(\kappa_i^a B_i^l + B_b^a \kappa_i^b)] - \frac{x^2}{2} [B_0^a(\partial_i B_{00}) + \kappa^{aj}(\partial_x B_{ji})$$

$$+ \kappa_3^{ab}(\partial_b B_{0i}) + B^{aj}(\partial_i B_{0j} - \partial_j B_{0i}) - \kappa_2^{ab}(\partial_i B_{b0} + B_{bi}) + 2(-B_j^a \kappa_i^j + \kappa_k^a \kappa_b^k B_i^b$$

$$+ B_j^a \kappa_b^j \kappa_i^b + \kappa_j^a B_b^j \kappa_i^b)] + O(x^3)$$

$$\Gamma_{0b}^a = \frac{\kappa^{ac}}{2}(\partial_b B_{0c} - \partial_c B_{0b}) + \frac{x}{2} [2B_b^a - \kappa^{ai}(\partial_b B_{i0})] + \frac{x^2}{2} [\kappa_2^{ac}(\partial_b B_{c0} - \partial_c B_{b0})$$

$$+ \kappa^{ac}(\partial_x B_{bc}) - B_0^a(\partial_b B_{00}) - B^{ai}(\partial_b B_{i0}) - \kappa^{ai}(B_{ib} - \partial_i B_{b0})] + O(x^3)$$

$$\Gamma_{ij}^a = \frac{\kappa^{ab}}{2}(2\xi_{bij} - \partial_b B_{ij}) - \frac{\kappa^{al}}{2}(-\partial_l h_{ij} + \partial_i h_{jl} + \partial_j h_{li})$$

$$+ \frac{x}{2} [\kappa^{ab}(\partial_i B_{bj} + \partial_j B_{bi}) - B^{al}(-\partial_l h_{ij} + \partial_i h_{jl} + \partial_j h_{li}) - 2h_{ij}]$$

$$+ \frac{x^2}{2} \left\{ \kappa^{ak} [2(\kappa_k^b \xi_{bij} - \xi_{kij}) + \kappa_k^l (-\partial_l h_{ij} + \partial_j h_{il} + \partial_i h_{lj}) + 2B_{k0} h_{ij}] \right.$$

$$\left. + (\kappa^{ak} \kappa_k^l + B_b^a \kappa^{bl}) (-\partial_l h_{ij} + \partial_j h_{il} + \partial_i h_{lj}) - 2B^{ab} \xi_{bij} \right\} + O(x^4)$$

$$\Gamma_{ib}^a = \kappa^{ac} \xi_{cib} + \frac{x}{2} \kappa^{ac} (\partial_b B_{ci} - \partial_c B_{bi}) + \frac{x^2}{2} [2\kappa^{aj} (\kappa_j^c \xi_{cib} - \xi_{jib})$$

$$- 2B^{ac} \xi_{cib} + \kappa^{ac} \partial_i B_{cb} - \kappa^{aj} (\partial_b B_{ij})] + O(x^3)$$

$$\Gamma_{bc}^a = \kappa^{ad} \xi_{dbc} + \frac{x^2}{2} [\kappa^{ad} (-\partial_d B_{bc} + \partial_b B_{cd} + \partial_c B_{db}) - 2B^{ad} \xi_{dbc}$$

$$+ 2\kappa^{ai} (\kappa_i^d \xi_{dbc} - \xi_{ibc})] + O(x^3)$$

Addendum : Expressions des fonctions $\Lambda_{\alpha\beta}^{\mu}$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{\mu} = \Lambda_{\beta\alpha}^{\mu} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left\{ -\partial_{\nu}(x^2 B_{\alpha\beta}) + \partial_{\alpha}(x^2 B_{\beta\nu}) + \partial_{\beta}(x^2 B_{\nu\alpha}) \right\}$$

$\mu = 0$

$$\Lambda_{00}^0 = -xB_{00} + \frac{x^2}{2} \{ \partial_x B_{00} + B_0^a \partial_a B_{00} \} + O(x^3)$$

$$\Lambda_{0i}^0 = \frac{x^2}{2} \partial_i B_{00} + O(x^3)$$

$$\Lambda_{0a}^0 = \frac{x^2}{2} \partial_a B_{00} + O(x^3)$$

$$\Lambda_{ij}^0 = \frac{x^3}{2} (\partial_i B_{0j} + \partial_j B_{0i}) + O(x^4)$$

$$\Lambda_{ai}^0 = \frac{x^3}{2} (\partial_a B_{0i}) + O(x^4)$$

$$\Lambda_{ab}^0 = \frac{x^4}{2} (\partial_a B_{0b} + \partial_b B_{0a}) + O(x^5)$$

$\mu = i$

$$\begin{aligned} \Lambda_{00}^i &= \frac{\kappa^{ia}}{2} (\partial_a B_{00}) + \frac{x}{2} (2h^{ij} \partial_x B_{0i} - B^{ia} \partial_a B_{00}) \\ &\quad + \frac{x^2}{2} [2B_0^i B_{00} - h_4^{ij} (B_{j0} + \partial_j B_{00}) + 2\kappa^{ia} \partial_x B_{0a} - g_4^{ia} \partial_a B_{00}] + O(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{0j}^i &= \frac{x}{2} [h^{ik} (\partial_j B_{0k} - \partial_k B_{0j}) + \kappa^{ia} (\partial_a B_{0j})] \\ &\quad + \frac{x^2}{2} [h^{ik} (\partial_x B_{jk}) + B^{ia} (\partial_a B_{j0}) - \kappa^{ia} (\partial_j B_{0a} + B_{ja})] + O(x^3) \end{aligned}$$

$$\Lambda_{0a}^i = \frac{x}{2} (h^{ij} \partial_a B_{j0}) - \frac{x^2}{2} \kappa^{ib} (\partial_a B_{0b} - \partial_b B_{0a}) + O(x^3)$$

$$\Lambda_{jk}^i = \frac{x^2}{2} [-h^{il} (\partial_l B_{jk}) + \kappa^{ia} (\partial_a B_{jk})] + O(x^3)$$

$$\Lambda_{aj}^i = \frac{x^2}{2} h^{ik} (\partial_a B_{kj}) + O(x^3)$$

$$\Lambda_{ab}^i = x^3 \frac{h^{ij}}{2} \{ \partial_a B_{bj} + \partial_b B_{ja} \} + O(x^4)$$

$\mu = a$

$$\begin{aligned} \Lambda_{00}^a &= -\frac{\kappa^{ab}}{2x^2} (\partial_b B_{00}) + [\kappa^{ab} \partial_x B_{b0} + \frac{\kappa^{ai}}{2} (\partial_i B_{00} + 2B_{0i}) - \frac{\kappa_2^{ab}}{2} (\partial_b B_{00})] \\ &\quad - \frac{x}{2} [\kappa_3^{ab} (\partial_b B_{00}) + B_0^a B_{00} + B^{ai} (\partial_i B_{00} + 2B_{0i}) + \kappa^{ai} B_{i0}] + \frac{x^2}{2} [2\kappa_2^{ab} \partial_x B_{0b} \\ &\quad - \kappa_4^{ab} \partial_b B_{00} + B_0^a \partial_x B_{00} + B_0^i \kappa_i^a - 2B^{ai} \partial_x B_{i0} - g_4^{ai} (\partial_i B_{00} + 2B_{0i})] + O(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{0i}^a &= -\frac{\kappa^{ab}}{2x}(\partial_b B_{i0}) + \kappa^{ab}(\partial_i B_{b0} + B_{bi}) - \frac{x}{2}[\kappa^{aj}(\partial_i B_{j0} - \partial_j B_{i0}) - \kappa^{ab}(\partial_x B_{bi}) \\
&\quad + \kappa_2^{ab}(\partial_b B_{0i})] - \frac{x^2}{2}[B_0^a(\partial_i B_{00}) + \kappa^{aj}(\partial_x B_{ji}) + \kappa_3^{ab}(\partial_b B_{0i}) + B^{aj}(\partial_i B_{0j} - \partial_j B_{0i}) \\
&\quad - \kappa_2^{ab}(\partial_i B_{b0} + B_{bi})] + O(x^3) \\
\Lambda_{0b}^a &= \frac{\kappa^{ac}}{2}(\partial_b B_{0c} - \partial_c B_{0b}) + \frac{x}{2}[2B_b^a - \kappa^{ai}(\partial_b B_{i0})] + \frac{x^2}{2}[\kappa_2^{ac}(\partial_b B_{c0} - \partial_c B_{b0}) \\
&\quad + \kappa^{ac}(\partial_x B_{bc}) - B_0^a(\partial_b B_{00}) - B^{ai}(\partial_b B_{i0}) - \kappa^{ai}(B_{ib} - \partial_i B_{b0})] + O(x^3) \\
\Lambda_{ij}^a &= -\frac{\kappa^{ab}}{2}(\partial_b B_{ij}) + \frac{x}{2}\kappa^{ab}(\partial_i B_{bj} + \partial_j B_{bi}) - \frac{x^2}{2}[\kappa_2^{ab}(\partial_b B_{ij}) \\
&\quad + \kappa^{ak}(-\partial_k B_{ij} + \partial_i B_{kj} + \partial_j B_{ik})] + O(x^3) \\
\Lambda_{bi}^a &= \frac{x}{2}\kappa^{ac}(\partial_b B_{ci} - \partial_c B_{bi}) + \frac{x^2}{2}[\kappa^{ac}\partial_i B_{cb} - \kappa^{aj}(\partial_b B_{ij})] + O(x^3) \\
\Lambda_{bc}^a &= \frac{x^2}{2}\kappa^{ad}[-\partial_d B_{bc} + \partial_b B_{cd} + \partial_c B_{db}] + O(x^3)
\end{aligned}$$



APPENDICE B

PREUVES COMPLÉMENTAIRES

B.1 Invariance du tenseur de Weyl sous transformations conformes

Le résultat d'intérêt de cette partie est le suivant :

Proposition B.1.1. (3.1.13)

Si W et \tilde{W} sont les tenseurs de Weyl associés à g et $\tilde{g} = e^{2f}g$ respectivement, alors pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ on a $\tilde{W}(X, Y)Z = W(X, Y)Z$.

On démontre d'abord la seconde partie du lemme suivant :

Lemme B.1.2. (3.1.14)

Soient ∇ et $\tilde{\nabla}$ les connexions de Levi-Civita associées à g et \tilde{g} respectivement, et R et \tilde{R} les tenseurs de Riemann. Alors :

1) Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $\alpha \in \Omega^1(M)$, on a que

$$K(X, Y) := \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)G_f$$

$$\tilde{K}(X, \alpha) := \tilde{\nabla}_X \alpha - \nabla_X \alpha = -X(f)\alpha - \alpha(X)df + g^{-1}(\alpha, df)g(X, \cdot)$$

où $G_f = g^{-1}(df, \cdot)$ est le gradient de f .

2) Sous une transformation conforme de la métrique le tenseur de Riemann est modifié comme suit

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + [g(B(X), Z)Y - g(Y, Z)B(X)] - [g(B(Y), Z)X - g(X, Z)B(Y)]$$

où le tenseur $B \in \Gamma(\text{End}(TM))$ (dépendant de f) est défini par

$$B(X) = -X(f)G_f + \nabla_X G_f + \frac{1}{2}G_f(f)X$$

Preuve. (3.1.14-2)

Une fois le tenseur $K \in \Gamma(T^*M^{\otimes 2} \otimes TM)$ déterminé, l'identité de l'énoncé découle d'un

calcul élémentaire et de plusieurs identifications. Ceci est néanmoins particulièrement long, et on donne donc uniquement les étapes clés de ces calculs. Tout d'abord, on commence par la définition de $\tilde{R}(X, Y)Z$, avec $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ quelconques :

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + K(Y, Z)) - \tilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z + K(X, Z)) - \nabla_{[X, Y]}Z - K([X, Y], Z) \\ &= R(X, Y)Z + \left[(\nabla_X K)(Y, Z) - (\nabla_Y K)(X, Z) \right]_{(A)} \\ &\quad + \left[K(X, K(Y, Z)) - K(Y, K(X, Z)) \right]_{(B)}\end{aligned}$$

Pour le terme (B), en commençant par l'expression explicite des composantes de K en termes de coordonnées locales, on a après les simplifications et l'utilisation des symétries de Γ_{ij}^k que

$$\begin{aligned}K(X, K(Y, Z)) - K(Y, K(X, Z)) &= [g(Y, Z)g(X, G_f) - g(X, Z)g(Y, G_f)]G_f \\ &\quad + Z(f)[Y(f)X - X(f)Y] + G_f(f)[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X]\end{aligned}$$

Pour le terme (A) (le plus volumineux), avec la même procédure, on obtient

$$\begin{aligned}(\nabla_X K)(Y, Z) - (\nabla_Y K)(X, Z) &= \langle \nabla_X df \rangle Y - \langle \nabla_Y df \rangle X + [g(X, Z)\nabla_Y G_f - g(Y, Z)\nabla_X G_f] \\ &\quad + g(Y, Z)[X(f)G_f - g(X, G_f)G_f] - g(X, Z)[Y(f)G_f - g(Y, G_f)G_f]\end{aligned}$$

En substituant dans l'expression de $\tilde{R}(X, Y)Z$, et en notant que $\langle \nabla_X df, Z \rangle = g(\nabla_X G_f, Z)$ ainsi que $Z(f) = g(G_f, Z)$, les simplifications donnent

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y)Z - R(X, Y)Z &= g\left(-X(f)G_f + \nabla_X G_f, Z\right)Y - g\left(-Y(f)G_f + \nabla_Y G_f, Z\right)X \\ &\quad + g(Y, Z)\left[-G_f(f)X + X(f)G_f - \nabla_X G_f\right] \\ &\quad + g(X, Z)\left[G_f(f)X - X(f)G_f + \nabla_X G_f\right] \\ &= g\left(-X(f)G_f + \nabla_X G_f + (1/2)G_f(f)X, Z\right)Y \\ &\quad - g\left(-Y(f)G_f + \nabla_Y G_f + (1/2)G_f(f)Y, Z\right)X \\ &\quad - g(Y, Z)\left[-X(f)G_f + \nabla_X G_f + (1/2)G_f(f)X\right] \\ &\quad + g(X, Z)\left[-Y(f)G_f + \nabla_Y G_f + (1/2)G_f(f)Y\right] \\ &= [g(B(X), Z)Y - g(Y, Z)B(X)] - [g(B(Y), Z)X - g(X, Z)B(Y)]\end{aligned}$$

La dernière égalité venant de la définition

$$B(X) = -X(f)G_f + \nabla_X G_f + \frac{1}{2}G_f(f)X$$

□

On montre maintenant que $\tilde{W} \equiv W$.

Preuve. (3.1.13)

Il suffit ici de montrer que pour tous les indices, on a $\widetilde{W}^k{}_{lij} = W^k{}_{lij}$. On a tout d'abord, par la définition de $(g \otimes \cdot)$:

$$(g \otimes g)^k{}_{lij} = g^{kr} (g \otimes g)(\partial_r, \partial_l, \partial_i, \partial_j) = 2(\delta_i^k g_{jl} - \delta_j^k g_{il})$$

et similairement

$$(Ric \otimes g)^k{}_{lij} = g^{kr} [Ric_{ri} g_{jl} - Ric_{rj} g_{il}] - [\delta_j^k Ric_{il} - \delta_i^k Ric_{rj}]$$

Ceci permet d'exprimer $R^k{}_{lij}$ en fonction de S ainsi que des composantes de Ric et W . La première expression du théorème 4.1 donne alors (avec $n = \dim M$)

$$\begin{aligned} R^k{}_{lij} &= W^k{}_{lij} - \frac{S}{(n-1)(n-2)} [\delta_i^k g_{jl} - \delta_j^k g_{il}] \\ &+ \frac{1}{(n-2)} \left\{ g^{kr} [Ric_{ri} g_{jl} - Ric_{rj} g_{il}] - [\delta_j^k Ric_{il} - \delta_i^k Ric_{rj}] \right\} \quad (1) \end{aligned}$$

Cette expression servira à isoler $\widetilde{W}^k{}_{lij}$ après avoir exprimé \widetilde{S} et \widetilde{Ric}_{ij} en fonction de S et des composantes de Ric et g . La partie (2) du lemme 4.3 permet d'écrire

$$\widetilde{R}^k{}_{lij} = R^k{}_{lij} + [g_{lc} B_i^c \delta_j^k - g_{lc} B_j^c \delta_i^k] - [g_{jl} B_i^k - g_{il} B_j^k] \quad (2)$$

où $B_i^k = \langle dx^k, B(\partial_i) \rangle$, avec le $B \in \Gamma(End(TM))$ comme précédemment. On contractant cette expression on obtient

$$\widetilde{Ric}_{lj} = \widetilde{R}^k{}_{lkj} = Ric_{lj} - [g_{lj} B_c^c + (n-2)g_{lc} B_j^c] \quad (3)$$

et en prenant sa trace, on a que

$$\widetilde{S} = e^{-2f} g^{lj} \widetilde{Ric}_{lj} = e^{-2f} [S - 2(n-1)B_c^c] \quad (4)$$

La dernière expression auxiliaire dont on aura besoin est

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-2)} (\widetilde{Ric} \otimes g)^k{}_{lij} &= \frac{1}{(n-2)} \left\{ g^{kr} (\widetilde{Ric}_{ri} g_{jl} - \widetilde{Ric}_{rj} g_{il}) + (\widetilde{Ric}_{jl} \delta_i^k - \widetilde{Ric}_{il} \delta_j^k) \right\} \\ &= \frac{1}{(n-2)} \left\{ g^{kr} (Ric_{ri} g_{jl} - Ric_{rj} g_{il}) + (Ric_{jl} \delta_i^k - Ric_{il} \delta_j^k) \right. \\ &\quad - [g_{jl} (\delta_i^k B_c^c + (n-2)B_i^k) - g_{il} (\delta_j^k B_c^c + (n-2)B_j^k)] \\ &\quad \left. - [\delta_i^k (g_{jl} B_c^c + (n-2)g_{cl} B_j^c) - \delta_j^k (g_{il} B_c^c + (n-2)g_{cl} B_i^c)] \right\} \\ &= \frac{1}{(n-2)} (Ric \otimes g)^k{}_{lij} - \frac{2B_c^c}{(n-2)} (g_{jl} \delta_i^k - g_{il} \delta_j^k) \\ &\quad + \left\{ [g_{rl} B_i^r \delta_j^k - g_{rl} B_j^r \delta_i^k] - [g_{jl} B_i^k - g_{il} B_j^k] \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

En utilisant l'analogue de l'équation (1) pour \widetilde{R}^k_{lij} , et en substituant avec les expressions (2) et (4), on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{W}^k_{lij} &= R^k_{lij} + \frac{S}{(n-1)(n-2)} [\delta_i^k g_{jl} - \delta_j^k g_{il}] - \frac{1}{(n-2)} (\widetilde{Ric} \otimes g)^k_{lij} \\ &\quad + [g_{lc} B_i^c \delta_j^k - g_{lc} B_j^c \delta_i^k] - [g_{jl} B_i^k - g_{il} B_j^k] - \frac{2B_c^c}{(n-2)} (g_{jl} \delta_i^k - g_{il} \delta_j^k) \\ &\stackrel{\text{par (5)}}{=} R^k_{lij} + \frac{S}{(n-1)(n-2)} [\delta_i^k g_{jl} - \delta_j^k g_{il}] - \frac{1}{(n-2)} (Ric \otimes g)^k_{lij} \\ &\stackrel{\text{par (1)}}{=} W^k_{lij}\end{aligned}$$

□

B.2 Termes de Chern-Simons pour ϕ -métriques

Les formules d'indice dans la seconde section du chapitre IV se basent sur les résultats (3.5), (3.7) et (4.2) de (DW07). Comme évoqué précédemment, ces résultats découlent d'hypothèses supplémentaires sur la ϕ -métrique exacte utilisée, mais aussi de formules présentées dans la section 4.a de (BC89). On se propose dans cette partie de démontrer le lemme (4.2.1) du chapitre IV sans faire appel aux hypothèses supplémentaires ou aux résultats de Bismut et Cheeger. On utilisera les notations suivantes :

- Pour la métrique g_ϕ , on notera ${}^\phi\nabla$ sa connexion de Levi-Civita, ${}^\phi\omega$ sa 1-forme de connexion et ${}^\phi\Omega$ sa 2-forme de courbure. Pour la métrique g_d , on utilisera ${}^d\nabla$, ${}^d\omega$ et ${}^d\Omega$ pour désigner les objets analogues. Dans le cas où on s'intéresse uniquement à une métrique exacte, on ajoutera des «tildes» pour désigner les objets analogues (e.g. ${}^\phi\widetilde{\Omega}$ est la courbure associée à \tilde{g}_ϕ).
- Si ∇ est la connexion de Levi-Civita de l'une des métriques d'intérêt, $e(M, \nabla) = Pf(\nabla\Omega/2\pi)$ et $L(M, \nabla)$ désignent respectivement la forme d'Euler et le L -polynôme de Hirzebruch calculés avec la forme de courbure $\nabla\Omega$ associée à la connexion ∇ .
- Si $P(M, \nabla)$ est l'une des deux formes (caractéristiques) précédentes, on notera $\tilde{P} \in S^{2k}(\mathfrak{so}_{4k}^*)$ le polynôme symétrique Ad -invariant et homogène de degré $2k$ pour lequel

$$P(M, \nabla) = \tilde{P}\left(\underbrace{\nabla\Omega, \dots, \nabla\Omega}_{2k}\right) \in \Omega^{4k}(M)$$

Si ${}^i\nabla$ avec $i = 0, 1$ sont deux connexions dont les 1-formes associées sont ${}^i\omega$, on définit la transgression de P par rapport à ces deux connexions comme étant

$$TP(M, {}^1\nabla, {}^0\nabla) = \int_0^1 \tilde{P}({}^1\omega - {}^0\omega, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \in \Omega^{4k-1}(M)$$

où Ω_t est la 2-forme de courbure associée à la connexion d'interpolation ${}^t\nabla = t^1\nabla + (1-t)^0\nabla$. Cette forme satisfait la propriété suivante

$$P(M, {}^1\nabla) - P(M, {}^0\nabla) = d^t P(M, {}^1\nabla, {}^0\nabla) \in \Omega^{4k}(M)$$

• Pour $0 < \varepsilon \ll 1$, considérons la métrique g_ε sur TM , prenant la forme suivante près du bord

$$c^* g_\varepsilon = \frac{dx}{\varepsilon^4} + \frac{h}{\varepsilon^2} + \kappa$$

Comme précédemment, ${}^\varepsilon\nabla$, ${}^\varepsilon\omega$ et ${}^\varepsilon\Omega$ sont les objets associés à g_ε , et aussi à son redimensionnement $\varepsilon^2 g_\varepsilon$. Ces métriques coïncident avec \bar{g}_ϕ et \bar{g}_d sur l'hypersurface $\{x = \varepsilon\}$.

En considérant les connexions ${}^\varepsilon\nabla$, ${}^\phi\tilde{\nabla}$, ${}^\phi\nabla$, ${}^d\tilde{\nabla}$ et ${}^d\nabla$ ainsi que leurs formes associées, on définit les quatre connexions d'interpolation suivantes, avec $t \in [0, 1]$

$${}^t\nabla = t{}^\phi\nabla + (1-t){}^\varepsilon\nabla \text{ et } {}^t\tilde{\nabla} = t{}^\phi\tilde{\nabla} + (1-t){}^\varepsilon\nabla \text{ sur } {}^\phi TM|_{M_\varepsilon}$$

$${}^t\nabla' = t{}^d\nabla + (1-t){}^\varepsilon\nabla \text{ et } {}^t\tilde{\nabla}' = t{}^d\tilde{\nabla} + (1-t){}^\varepsilon\nabla \text{ sur } {}^d TM|_{M_\varepsilon}$$

Pour désigner les formes de connexion et de courbure, on utilisera les mêmes exposants que ceux des connexions : par exemple, ${}^t\tilde{\omega}$ et ${}^t\tilde{\Omega}$ sont associés à ${}^t\tilde{\nabla}$; ${}^t\omega'$ et ${}^t\Omega'$ sont associés à ${}^t\nabla'$ etc.

On a aussi besoin que les formes de connexion et de courbure prennent leurs valeurs dans les endomorphismes anti-symétriques des fibrés TM , ${}^\phi TM$ et ${}^d TM$, étant donné qu'on s'intéresse à des polynômes (symétriques) invariants sous conjugaison par éléments de $SO(TM)$. On va donc introduire les repères orthonormés $\{e_\alpha\}$ et $\{\hat{e}_\alpha\}$ pour g_ε et $\varepsilon^2 g_\varepsilon$ respectivement, tels que près du bord :

$$e_0 = \varepsilon^2 \partial_x; e_\alpha = \varepsilon \chi_\alpha^j \partial_{y^j} + e_\alpha^d \partial_{z^d}, \forall \alpha \neq 0; \begin{pmatrix} \chi_j^i & \chi_a^i \\ c_i^a & e_b^a \end{pmatrix} \in C^\infty(\partial M, GL(TM|_{\partial M}))$$

$$\hat{e}_0 = \varepsilon \partial_x; \hat{e}_\alpha = \hat{e}_\alpha^j \partial_{y^j} + \varepsilon^{-1} \hat{\chi}_\alpha^d \partial_{z^d}, \forall \alpha \neq 0; \begin{pmatrix} \hat{e}_j^i & \hat{e}_a^i \\ \hat{\chi}_i^a & \hat{\chi}_b^a \end{pmatrix} \in C^\infty(\partial M, GL(TM|_{\partial M}))$$

On commence par le lemme technique suivant :

Lemme B.2.1. *Avec les mêmes notations que précédemment, on a :*

$$(\phi\omega - \phi\tilde{\omega})|_{x=\varepsilon} \in \varepsilon \cdot \Omega^1(\partial M, \mathfrak{so}({}^\phi TM)|_{\{x=\varepsilon\}})$$

$$({}^d\tilde{\omega} - \varepsilon\omega)|_{x=\varepsilon}, ({}^d\omega - {}^d\tilde{\omega})|_{x=\varepsilon} \in \varepsilon \cdot \Omega^1(\partial M, \mathfrak{so}({}^d TM)|_{\{x=\varepsilon\}})$$

Preuve. On utilise les repères qu'on vient d'introduire, et puisque l'on s'intéresse à la nature des formes de connexion sur $\partial M_\varepsilon = \{x = \varepsilon\}$, on peut omettre les termes en dx .

1) Pour la première assertion, on a $g_\phi = \bar{g}_\phi + x^2 B$ avec $B \in \Gamma(M, S^2 \phi^* T^* M)$, et avec $B_{\alpha\beta}$ désignant les composantes de B dans le repère $\{\partial_\alpha\}$, les éléments de $(\phi_\omega - \phi_{\tilde{\omega}}) \in \Omega^1(M, \mathfrak{so}(\phi^* T M))$ dans le repère $\{e_\alpha\}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} (\phi_\omega - \phi_{\tilde{\omega}})_\nu^\mu &\equiv (\phi_\omega - \phi_{\tilde{\omega}})_{\mu\nu} = e_\mu^\alpha e_\nu^\beta (\Gamma_{\alpha\beta\rho} - \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\rho}) dx^\rho \\ &= e_\mu^\alpha e_\nu^\beta \left(-\partial_\alpha(x^2 B_{\beta\rho}) + \partial_\beta(x^2 B_{\rho\alpha}) + \partial_\rho(x^2 B_{\alpha\beta}) \right) dx^\rho \end{aligned}$$

où $\Gamma_{\alpha\beta\rho}$ et $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\rho}$ sont les symboles de Christoffel de première espèce associés à g_ϕ et \bar{g}_ϕ dans le repère $\{\partial_\alpha\}$, et les e_α^j sont donnés par

$$e_\alpha^0 = \varepsilon^2 \delta_\alpha^0; \quad e_\alpha^i = \varepsilon \chi_\alpha^i; \quad e_\alpha^a \sim O(\varepsilon^0)$$

En se restreignant à $\{x = \varepsilon\}$, les puissances négatives de ε dans la différence des symboles de Christoffel est toujours contrecarée par les puissances positives de ε dans les fonctions de changement de repère. Par exemple, pour $(\mu, \nu) = (0, 0)$, la composante avec les degrés les plus bas en ε , on a

$$(\phi_\omega - \phi_{\tilde{\omega}})_0^0|_{x=\varepsilon} = \varepsilon^4 \left(\frac{\varepsilon^{-2}}{2} (\partial_i B_{00})|_{x=\varepsilon} dy^i + \frac{\varepsilon^{-2}}{2} (\partial_a B_{00})|_{x=\varepsilon} dz^a \right) \in \varepsilon^2 \Omega^2(\partial M)$$

et de la même façon, pour toute paire d'indices (μ, ν) , on obtient

$$(\phi_\omega - \phi_{\tilde{\omega}})_\nu^\mu|_{x=\varepsilon} \in \varepsilon \Omega^2(\partial M)$$

Cette approche est aussi valide pour la forme $({}^d\omega - {}^d\tilde{\omega}) \in \Omega^1(M, \mathfrak{so}({}^d T M))$. Pour cette dernière, on a

$$({}^d\omega - {}^d\tilde{\omega})_\nu^\mu = \hat{e}_\mu^\alpha \hat{e}_\nu^\beta \left(-\partial_\alpha(x^4 B_{\beta\rho}) + \partial_\beta(x^4 B_{\rho\alpha}) + \partial_\rho(x^4 B_{\alpha\beta}) \right) dx^\rho$$

avec

$$\hat{e}_\alpha^0 = \varepsilon^1 \delta_\alpha^0; \quad \hat{e}_\alpha^i \sim O(\varepsilon^0); \quad \hat{e}_\alpha^a = \varepsilon^{-1} \hat{\chi}_\alpha^a$$

Cette fois encore, on obtient pour tous les indices μ, ν que $({}^d\omega - {}^d\tilde{\omega})_\nu^\mu|_{x=\varepsilon} \in \varepsilon \Omega^2(\partial M)$, avec par exemple, un des degrés les plus bas en ε donné par :

$$\begin{aligned} ({}^d\omega - {}^d\tilde{\omega})_b^a|_{x=\varepsilon} &= \left[(\varepsilon^{-2} \hat{\chi}_a^c \hat{\chi}_b^d) \frac{\varepsilon^3}{2} (-\partial_c B_{di} + \partial_d B_{ci} + \varepsilon \partial_i B_{cd})|_{x=\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + (\hat{e}_a^j \hat{e}_b^k) \frac{\varepsilon^2}{2} (-\partial_j B_{ki} + \partial_k B_{ji} + \partial_i B_{jk})|_{x=\varepsilon} \right] dy^i \\ &\quad + \left[(\varepsilon^{-2} \hat{\chi}_a^c \hat{\chi}_b^d) \frac{\varepsilon^4}{2} (-\partial_c B_{df} + \partial_d B_{cf} + \partial_f B_{cd})|_{x=\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + (\hat{e}_a^j \hat{e}_b^k) \frac{\varepsilon^2}{2} (-\varepsilon \partial_j B_{kf} + \varepsilon \partial_k B_{jf} + \partial_i B_{jk})|_{x=\varepsilon} \right] dz^f \in \varepsilon \Omega^2(\partial M) \end{aligned}$$

2) Pour la seconde assertion, on a $({}^d\tilde{\omega} - \varepsilon\omega) = ({}^d\tilde{\omega} - \phi\tilde{\omega}) + \tilde{\theta}$, où $\tilde{\theta} := \phi\tilde{\omega} - \varepsilon\omega$. On utilisera les propriétés de ${}^\varepsilon\nabla$ pour étudier $\tilde{\theta}$, et aussi le fait que ${}^d\tilde{\omega}$ et $\phi\tilde{\omega}$ sont les formes de connexion associées à deux métriques reliées par une transformation conforme.

Si $\Theta_{\alpha\beta}^\mu$ sont les symboles de Christoffel de la métrique g_ε (et de $\varepsilon^2 g_\varepsilon$), ils sont donnés par :

$$\Theta_{0\beta}^\mu = 0, \forall \mu, \beta; \Theta_{\alpha\beta}^\mu = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu|_{x=\varepsilon}, \forall \alpha, \beta, \mu \neq 0$$

où comme précédemment, $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu$ sont ceux de \tilde{g}_ϕ . Puisque les composantes de $\tilde{\theta}$ sont des différences de symboles de Christoffel, on obtient à partir de la remarque précédente et des expressions de l'appendice que dans le repère $\{\partial_\alpha\}$, les seuls termes non nuls de $\tilde{\theta}|_{x=\varepsilon}$ sont

$$\tilde{\theta}_i^0|_{x=\varepsilon} = \varepsilon h_{ij} dy^j; \tilde{\theta}_0^i|_{x=\varepsilon} = -\frac{dy^i}{\varepsilon}$$

D'un autre côté, on sait que sur $M \setminus \partial M$, on a pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} ({}^d\tilde{\omega} - \phi\tilde{\omega})(X) \cdot Y &= ({}^d\tilde{\omega} - \phi\tilde{\omega})(Y) \cdot X = {}^d\tilde{\nabla}_X Y - \phi\tilde{\nabla}_X Y \\ &= \frac{X(x)}{x} Y + \frac{Y(x)}{x} X - \tilde{g}_\phi(X, Y) x^3 \partial_x \end{aligned}$$

puisque $\tilde{g}_\phi^{-1}(dx/x, \cdot) = x^3 \partial_x$. Ceci permet d'exprimer rapidement les composantes de cette différence, et donne par rapport à $\{\partial_\alpha\}$ que

$$({}^d\tilde{\omega} - \phi\tilde{\omega}) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{x} & -x(h_{ij} + x^2 \kappa_{ij}) dy^j - x^3 \kappa_{ia} dz^a & -x^3 \kappa_{ai} dy^i - x^3 \kappa_{ab} dz^b \\ \frac{\delta_i^j}{x} dy^j & \frac{\delta_i^j}{x} dx & 0 \\ \frac{\delta_a^b}{x} dz^b & 0 & \frac{dx}{x} \end{pmatrix}$$

ce qui devient, sur ∂M_ε

$$({}^d\tilde{\omega} - \phi\tilde{\omega})|_{x=\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\theta}_i^0|_{x=\varepsilon} + \varepsilon^2 \beta_i^0 & \varepsilon^3 \beta_a^0 \\ -\tilde{\theta}_0^i|_{x=\varepsilon} + \varepsilon^{-1} \beta_0^i & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \beta_0^a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les formes $\beta_\mu^\nu \in \varepsilon^0 \Omega^1(\partial M)$. Donc quand on exprime $({}^d\tilde{\omega} - \varepsilon\omega)|_{x=\varepsilon}$ dans le repère orthonormé de $\varepsilon^2 g_\varepsilon$, on obtient

$$({}^d\tilde{\omega} - \varepsilon\omega)|_{x=\varepsilon} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & (\hat{\rho}_i^j \beta_j^0 + \hat{\chi}_i^b \beta_b^0) & (\hat{\rho}_a^j \beta_j^0 + \hat{\chi}_a^b \beta_b^0) \\ -(\hat{\rho}_i^j \beta_j^0 + \hat{\chi}_i^b \beta_b^0) & 0 & 0 \\ -(\hat{\rho}_a^j \beta_j^0 + \hat{\chi}_a^b \beta_b^0) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et ceci termine la démonstration du lemme. \square

On s'intéresse maintenant au résultat général que voici :

Proposition B.2.2. Soit $\tilde{P} \in S^{2k}(\mathfrak{so}_{4k}^*)$ un polynôme symétrique (invariant et homogène de degré $2k$). Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$\begin{aligned}\phi P_{CS}(\partial M) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_\varepsilon} TP(M, \phi \nabla, \varepsilon \nabla) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_\varepsilon} TP(M, \phi \tilde{\nabla}, \varepsilon \nabla) \\ {}^d P_{CS}(\partial M) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_\varepsilon} TP(M, {}^d \nabla, \varepsilon \nabla) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_\varepsilon} TP(M, {}^d \tilde{\nabla}, \varepsilon \nabla) = 0\end{aligned}$$

Preuve. Dans la suite, toutes les expressions sont restreintes à ∂M_ε (on omet dorénavant $|_{x=\varepsilon}$), et on utilise les équations de Maurer-Cartan pour les courbures.

1) Pour les ϕ -métriques : On pose

$$\theta = \phi \omega - \varepsilon \omega = \tilde{\theta} + (\phi \omega - \phi \tilde{\omega}); \quad \tilde{\theta} = \phi \tilde{\omega} - \varepsilon \omega$$

Les formes associées aux connexions

$$\varepsilon \nabla, {}^t \nabla = t \phi \nabla + (1-t) \varepsilon \nabla \text{ et } {}^t \tilde{\nabla} = t \phi \tilde{\nabla} + (1-t) \varepsilon \nabla$$

sont reliées comme suit :

$$\begin{aligned}{}^t \omega &= \varepsilon \omega + t \theta = {}^t \tilde{\omega} + t(\phi \omega - \phi \tilde{\omega}) \\ {}^t \Omega &= \varepsilon \Omega + t(d\theta + [\varepsilon \omega, \theta]) + t^2 \theta^{\wedge 2} \\ &= {}^t \tilde{\omega} + t(d\theta + [{}^t \tilde{\omega}, (\phi \omega - \phi \tilde{\omega})]) + t^2 (\phi \omega - \phi \tilde{\omega})^{\wedge 2}\end{aligned}$$

En vertu du lemme qu'on vient de démontrer, on peut écrire $(\varepsilon \omega - \phi \tilde{\omega}) = \varepsilon \psi$ et ${}^t \Omega - {}^t \tilde{\Omega} = \varepsilon A$.

On a alors

$$\tilde{P}(\theta, {}^t \Omega, \dots, {}^t \Omega) = \tilde{P}(\tilde{\theta}, {}^t \tilde{\Omega}, \dots, {}^t \tilde{\Omega}) + \varepsilon \tilde{P}(\psi, {}^t \Omega, \dots, {}^t \Omega) + \varepsilon Q$$

où $Q \in \Omega^{4k-1}(M)$ est une expression polynomiale en $\tilde{\theta}, {}^t \tilde{\Omega}$ et εA . On voit alors qu'en intégrant par rapport à t et sur ∂M_ε , on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\partial M_\varepsilon} TP(M, \phi \nabla, \varepsilon \nabla) &= \int_{\partial M_\varepsilon} \int_0^1 \tilde{P}(\theta, {}^t \Omega, \dots, {}^t \Omega) dt \\ &= \int_{\partial M_\varepsilon} TP(M, \phi \tilde{\nabla}, \varepsilon \nabla) + \varepsilon \int_{\partial M_\varepsilon} Q'\end{aligned}$$

Les formes $TP(M, \phi \nabla, \varepsilon \nabla)$ et $TP(M, \phi \tilde{\nabla}, \varepsilon \nabla)$ sont lisses et bornées jusqu'au bord ∂M (compact). Leur restriction à ∂M_ε varie de façon lisse en ε , et est dominée par une expression polynomiale en le maximum des normes des formes $\varepsilon \omega$ et $\varepsilon \Omega$ sur $\{x = \varepsilon\}$, donc par convergence dominée on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_\varepsilon} TP(M, \phi \tilde{\nabla}, \varepsilon \nabla) = \int_{\partial M} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (TP(M, \phi \tilde{\nabla}, \varepsilon \nabla))$$

avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} TP(M, \phi \tilde{\nabla}, \varepsilon \nabla)$ bornée et lisse sur ∂M . Ceci est valide aussi pour $TP(M, \phi \nabla, \varepsilon \nabla)$ et Q' , donc

$${}^{\phi}P_{CS}(\partial M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_{\varepsilon}} TP(M, \phi \nabla, \varepsilon \nabla) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_{\varepsilon}} TP(M, \phi \tilde{\nabla}, \varepsilon \nabla)$$

2) Pour les d -métriques : On procède de la même manière, en utilisant cette fois les connexions

$${}^t\nabla' = t^d\nabla + (1-t)\varepsilon\nabla \text{ et } {}^t\hat{\nabla} = t^d\tilde{\nabla} + (1-t)\varepsilon\nabla$$

Avec le lemme (2.3), on a $({}^d\tilde{\omega} - \varepsilon\omega) = \varepsilon\hat{\psi}$ et $({}^d\omega - {}^d\tilde{\omega}) = \varepsilon\hat{\psi}'$ qui permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\partial M_{\varepsilon}} TP(M, {}^d\nabla, \varepsilon\nabla) &= \int_{\partial M_{\varepsilon}} TP(M, {}^d\tilde{\nabla}, \varepsilon\nabla) + \varepsilon \int_{\partial M_{\varepsilon}} \hat{Q} \\ \int_{\partial M_{\varepsilon}} TP(M, {}^d\tilde{\nabla}, \varepsilon\nabla) &= \varepsilon \int_{\partial M_{\varepsilon}} \int_0^1 \tilde{P}(\hat{\psi}, {}^t\hat{\Omega}, \dots, {}^t\hat{\Omega}) dt \end{aligned}$$

On voit alors que la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ donne

$${}^dP_{CS}(\partial M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_{\varepsilon}} TP(M, {}^d\tilde{\nabla}, \varepsilon\nabla) = 0$$

□

Voici l'analogie du lemme (4.2.1) en dimension 4 :

Proposition B.2.3. *Pour un bord fibré $S^1 \rightarrow \partial M^{(3)} \xrightarrow{\phi} N^{(2)}$, on a*

$${}^{\phi}e_{CS}(\partial M) = {}^{\phi}L_{CS}(\partial M) = 0$$

Preuve. Pour montrer ce résultat, on exprime dans un premier temps les intégrands sur $\partial M_{\varepsilon} = \{x = \varepsilon\}$ qui nous donnent les termes de Chern-Simons, et on met ensuite en évidence leur comportement en fonction ε . Par la proposition (B.2.2), il suffit de montrer le résultat pour g_{ϕ} de type produit. Comme précédemment, on utilise les formes associées aux connexions $\varepsilon\nabla$ et ${}^t\tilde{\nabla} = t^{\phi}\tilde{\nabla} + (1-t)\varepsilon\nabla$:

$${}^t\tilde{\omega} = \varepsilon\omega + t\tilde{\theta}; \text{ avec } \tilde{\theta} = \phi\tilde{\omega} - \varepsilon\omega$$

$${}^t\tilde{\Omega} = \varepsilon\Omega + \varphi(t); \text{ avec } \varphi(t) = t(d\tilde{\theta} + [\varepsilon\omega, \tilde{\theta}]) + t^2\tilde{\theta} \wedge \tilde{\theta}$$

On utilisera ici les indices $i = 1, 2$ pour composantes venant de la base N , et l'indice z à la place des $\{a\}$ qu'on utilisait précédemment. Les éléments non nuls de $\tilde{\theta}|_{x=\varepsilon}$ par rapport au repère $\{\partial_{\alpha}\}$ sont $\tilde{\theta}_i^0|_{x=\varepsilon}$, $\tilde{\theta}_0^i|_{x=\varepsilon}$ et $\tilde{\theta}_z^i|_{x=\varepsilon}$ (c.f. preuve du lemme (B.2.1)), donc par rapport au repère g_{ε} -orthonormé $\{e_{\alpha}\}$, on obtient

$$\tilde{\theta}|_{x=\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \phi^*\alpha_1^0 & \phi^*\alpha_2^0 & \phi^*\alpha_z^0 \\ -\phi^*\alpha_1^0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi^*\alpha_2^0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi^*\alpha_z^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \alpha_{\mu}^0 \in \Omega^1(N)$$

En dimension 4, nos formes de transgression sont définies via la formule

$$TP(M, \phi \tilde{\nabla}, \epsilon \nabla) = \int_0^1 \tilde{P}(\tilde{\theta}, {}^t \tilde{\Omega}) dt$$

et on utilise la remarque précédente sur $\tilde{\theta}$ pour de simplifier l'expression des intégrands.

Pour $TL(M, \phi \tilde{\nabla}, \epsilon \nabla)$, l'intégrand est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\tilde{\theta}, {}^t \tilde{\Omega}) &= \frac{1}{12\pi^2} \sum_{i < j} \sum_{\alpha \in S_2} \epsilon(\alpha) \tilde{\theta}_{\alpha(i)}^i \wedge {}^t \tilde{\Omega}_{\alpha(j)}^j = \frac{1}{12\pi^2} \sum_{i < j} \left(\tilde{\theta}_i^i \wedge {}^t \tilde{\Omega}_j^j - \tilde{\theta}_j^i \wedge {}^t \tilde{\Omega}_i^i \right) \\ &= \frac{1}{12\pi^2} \sum_{i < j} \tilde{\theta}_j^i \wedge {}^t \tilde{\Omega}_j^i = \frac{1}{12\pi^2} \sum_{j=1}^2 \tilde{\theta}_j^0 \wedge {}^t \tilde{\Omega}_j^0 \end{aligned}$$

Quant à $T\epsilon(M, \phi \tilde{\nabla}, \epsilon \nabla)$, l'intégrand est donné par

$$\tilde{\epsilon}(\tilde{\theta}, {}^t \tilde{\Omega}) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\alpha \in S_4} \epsilon(\alpha) \tilde{\theta}_{\alpha(1)}^{\alpha(0)} \wedge {}^t \tilde{\Omega}_{\alpha(z)}^{\alpha(2)}$$

Toujours avec ce qu'on sait sur $\tilde{\theta}$, les termes non nuls de cette dernière sommation sont ceux pour lesquels les $\alpha \in S_4$ donnent $(\alpha(0), \alpha(1)) \in \{(0, i), (i, 0), (0, z), (z, 0)\}$ avec $i = 1, 2$. En introduisant $j \neq i$, $\tilde{\epsilon}(\tilde{\theta}, {}^t \tilde{\Omega})$ devient :

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(\tilde{\theta}, {}^t \tilde{\Omega}) &= \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha, \beta \in S_2} (-1)^{i+1} \epsilon(\alpha\beta) \left(\tilde{\theta}_{\alpha(i)}^{\alpha(0)} \wedge {}^t \tilde{\Omega}_{\beta(z)}^{\beta(j)} \right) + \sum_{\alpha, \beta \in S_2} \epsilon(\alpha\beta) \left(\tilde{\theta}_{\alpha(z)}^{\alpha(0)} \wedge {}^t \tilde{\Omega}_{\beta(2)}^{\beta(1)} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta \in S_2} (-1)^{i+1} \epsilon(\beta) \left(2\tilde{\theta}_i^0 \wedge {}^t \tilde{\Omega}_{\beta(z)}^{\beta(j)} \right) + \sum_{\beta \in S_2} (-1)^{i+1} \epsilon(\beta) \left(2\tilde{\theta}_z^0 \wedge {}^t \tilde{\Omega}_{\beta(2)}^{\beta(1)} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} 4\tilde{\theta}_i^0 \wedge {}^t \tilde{\Omega}_z^i = \frac{1}{2\pi^2} \left(\tilde{\theta}_1^0 \wedge {}^t \tilde{\Omega}_z^2 - \tilde{\theta}_2^0 \wedge {}^t \tilde{\Omega}_z^1 + \tilde{\theta}_z^0 \wedge {}^t \tilde{\Omega}_1^2 \right) \end{aligned}$$

Il reste maintenant à étudier le comportement de ${}^t \tilde{\Omega} = \epsilon \Omega + \varphi(t)$ en fonction de ϵ . En se rapportant aux expressions des symboles de Christoffel non-nuls $\Theta_{\alpha\beta}^\mu = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu|_{x=\epsilon}$ de g_ϵ , on voit que dans le repère $\{\partial_\alpha\}$ on a

$$\epsilon \bar{\omega}_2^1 = \beta_{2k}^1 dy^k + \epsilon^2 \beta_{2z}^1 dz; \quad \epsilon \bar{\omega}_z^i = \epsilon^2 \beta_{zk}^i dy^k + \epsilon^2 \beta_{zz}^i dz$$

$$\epsilon \bar{\omega}_i^z = \beta_{ik}^z dy^k + \beta_{iz}^z dz; \quad \epsilon \bar{\omega}_z^z = \beta_{zk}^z dy^k + \beta_{zz}^z dz$$

avec les $\beta_{\mu\nu}^\rho$ lisses et bornés quand $\epsilon \rightarrow 0$. À partir de ces composantes et de l'équation $\epsilon \Omega = d^\epsilon \omega + [\epsilon \omega, \epsilon \omega]$, on voit que dans le repère $\{\partial_\alpha\}$

$$\epsilon \bar{\Omega}_2^1 = A_2^1 dy^1 \wedge dy^2 + \epsilon B_{2i}^1 dy^i \wedge dz; \quad \text{puisque } \partial_z \beta_{2k}^1 = \partial_z \Theta_{2k}^1 \sim O(\epsilon^2)$$

$$\epsilon \bar{\Omega}_z^i \in \epsilon^2 \cdot \Omega^2(\partial M); \quad \epsilon \bar{\Omega}_i^z \in \epsilon^0 \cdot \Omega^2(\partial M)$$

Pour le terme $\epsilon \bar{\Omega}_z^z$, les choses sont un peu plus techniques. On doit passer par les équations

$$\epsilon \bar{\Omega}_z^z = \epsilon R_{z12}^z dy^1 \wedge dy^2 + \epsilon R_{ziz}^z dy^i \wedge dz \quad \text{et} \quad \epsilon R_{\mu\alpha\beta}^\nu = \partial_{[\alpha} \Theta_{\beta]\mu}^\nu + \Theta_{\rho[\alpha}^\nu \Theta_{\beta]\mu}^\rho$$

où les crochets désignent l'anti-symétrisation par rapport à 2 indices, et noter ensuite que :

$$\partial_\alpha \Theta_{z\beta}^z = -(\kappa_{zz})^{-1} \partial_\alpha \kappa_{zz} \partial_\beta \kappa_{zz} + \kappa^{zz} \partial_\alpha \partial_\beta \kappa_{zz} + O(\varepsilon^2); \forall \alpha, \beta \neq 0$$

Cela donne :

$${}^\varepsilon R_{z\alpha}^z = \partial_i \Theta_{\alpha z}^z - \partial_\alpha \Theta_{iz}^z + \Theta_{k[i}^z \Theta_{\alpha]z}^k \sim O(\varepsilon^2) \implies {}^\varepsilon \bar{\Omega}_z^z \in \varepsilon^2 \cdot \Omega^2(\partial M)$$

Ainsi, en exprimant les composantes de cette courbure par rapport à $\{e_\alpha\}$ comme dans le (B.2.1), on a

$$\begin{aligned} {}^\varepsilon \Omega_\mu^\nu &= \chi_\mu^k \bar{\Omega}_k^l (\chi^{-1})_l^\nu + \varepsilon \chi_\mu^k \bar{\Omega}_k^z (e^{-1})_z^\nu + \varepsilon^{-1} e_\mu^z \bar{\Omega}_z^l (\chi^{-1})_l^\nu + e_\mu^z \bar{\Omega}_z^z (e^{-1})_z^\nu \\ &= A_{\mu 12}^\nu dy^1 \wedge dy^2 + \varepsilon B_{\mu iz}^\nu dy^i \wedge dz \end{aligned}$$

avec $\forall \mu, \nu \neq 0 : A_{\mu 12}^\nu \in \varepsilon^0 \cdot \phi^* C^\infty(N)$ et $B_{\mu iz}^\nu \in \varepsilon^0 \cdot C^\infty(\partial M)$. Ceci caractérise le comportement de ${}^\varepsilon \Omega$ à mesure que $\varepsilon \rightarrow 0$.

En procédant de la même façon qu'on vient de le faire, et en introduisant des éléments $\tau_\mu^\nu \in \phi^* \Omega^2(N)$ et $\rho_\mu^\nu \in \Omega^2(\partial M)$, on obtient que les composantes de la 2-forme $\varphi(t) = t(d\bar{\theta} + [{}^\varepsilon \omega, \bar{\theta}]) + t^2 \bar{\theta} \wedge \bar{\theta}$ s'écrivent

$$\varphi(t)_\alpha^0 = \tau_\alpha^0 + \varepsilon \rho_\alpha^0; \varphi(t)_\alpha^\beta = \tau_\alpha^\beta; \forall \alpha, \beta \neq 0$$

Avec ce qui précède, on en déduit que toutes les composantes de ${}^t \tilde{\Omega}$ s'écrivent sous la forme

$${}^\varepsilon \tilde{\Omega}_\mu^\nu = \tilde{A}_{\mu 12}^\nu dy^1 \wedge dy^2 + \varepsilon \tilde{B}_{\mu iz}^\nu dy^i \wedge dz$$

avec $\forall \mu < \nu : \tilde{A}_{\mu 12}^\nu \in \varepsilon^0 \cdot \phi^* C^\infty(N)$ et $\tilde{B}_{\mu iz}^\nu \in \varepsilon^0 \cdot C^\infty(\partial M)$.

Pour revenir maintenant aux formes de transgression, les expressions obtenues précédemment donnent

$$\tilde{e}(\bar{\theta}, {}^t \tilde{\Omega}) = \frac{\varepsilon}{2\pi^2} \epsilon^{ij} \left(\alpha_{1i}^0 \tilde{B}_{zj}^2 - \alpha_{2i}^0 \tilde{B}_{zj}^1 + \alpha_{zi}^0 \tilde{B}_{2j}^1 \right) dy^1 \wedge dy^2 \wedge dz$$

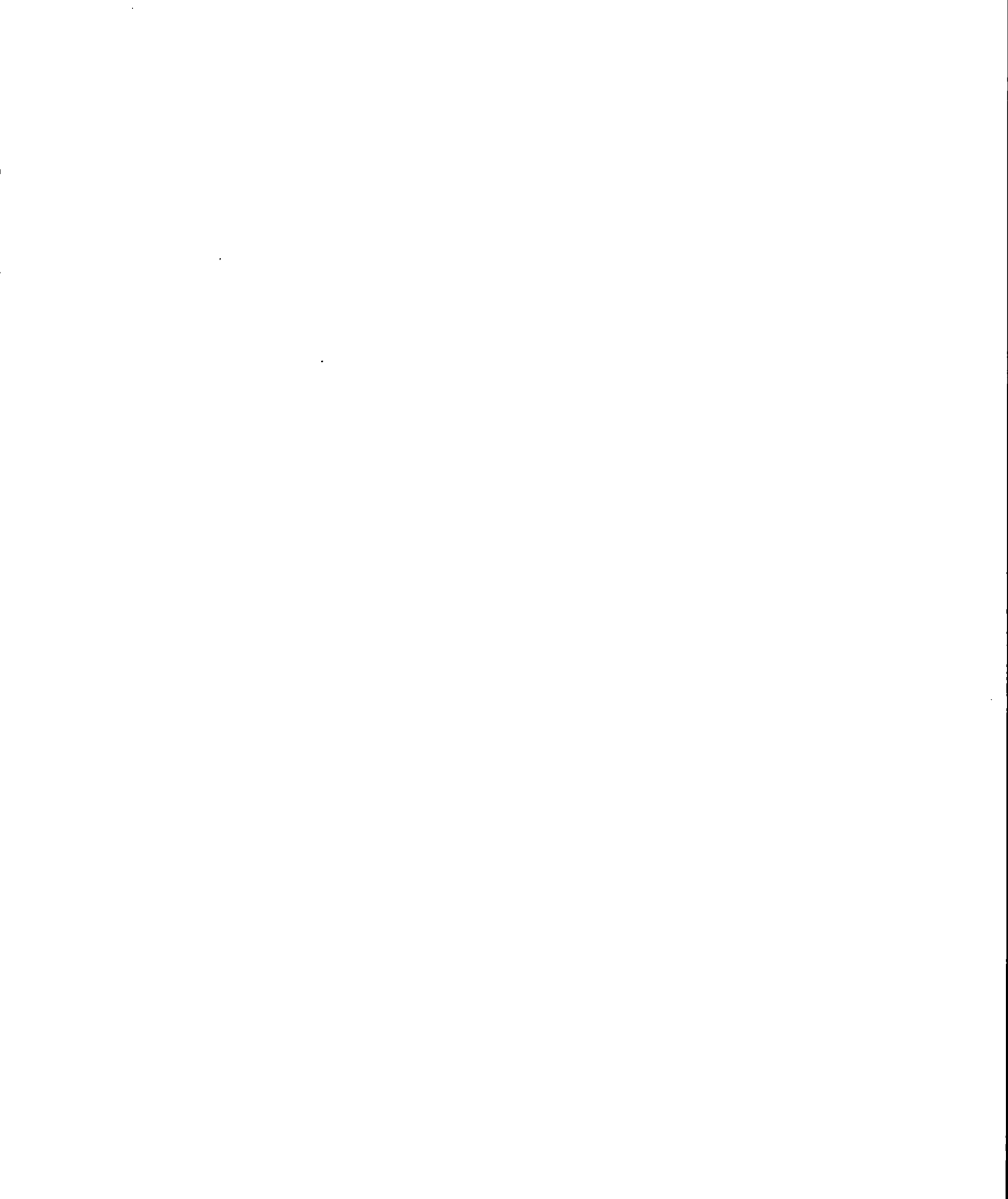
$$\tilde{L}(\bar{\theta}, {}^t \tilde{\Omega}) = \frac{\varepsilon}{12\pi^2} \left[\sum_{j=1}^z \epsilon^{ik} \left(\alpha_{ji}^0 \tilde{B}_{jk}^0 \right) \right] dy^1 \wedge dy^2 \wedge dz$$

où ϵ^{ik} est le symbole de Kröneckker. On a donc :

$$\phi_{eCS}(\partial M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \int_{\partial M} \left[\int_0^1 (2\pi)^{-1} \epsilon^{ij} \left(\alpha_{1i}^0 \tilde{B}_{zj}^2 - \alpha_{2i}^0 \tilde{B}_{zj}^1 + \alpha_{zi}^0 \tilde{B}_{2j}^1 \right) dt \right] dV_{ol}^{\partial M} \right\} = 0$$

$$\phi_{LCS}(\partial M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \int_{\partial M} \left[\int_0^1 \left((12\pi)^{-1} \sum_{j=1}^z \epsilon^{ik} \alpha_{ji}^0 \tilde{B}_{jk}^0 \right) dt \right] dV_{ol}^{\partial M} \right\} = 0$$

□



BIBLIOGRAPHIE

- M.F. ATIYAH et R. BOTT : A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes II. *Annals of Math.*, 1968.
- M.F. ATIYAH, V.K. PATODI et I.M SINGER : Spectral asymmetry and riemannian geometry I. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1975.
- M.F. ATIYAH, V.K. PATODI et I.M SINGER : Spectral asymmetry and riemannian geometry II. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1975.
- M.F. ATIYAH et I.M SINGER : The Index of Elliptic Operators III. *Annals of Math.*, 1968.
- J.M. BISMUT et J. CHEEGER : Eta Invariants and their Adiabatic Limits. *Jour. of the AMS*, 1989.
- A. BESSE : Géométrie riemannienne en dimension 4. *Cedic/Fernand-Nathan*, 1981.
- A. BESSE : Einstein manifolds. *Springer*, 2008.
- N. BERLINE, E. GETZLER et N. VERGNE : Heat Kernels and Dirac Operators. *Springer*, 1992.
- X. DAI : Adiabatic Limits, Nonmultiplicativity of the Signature, and Leray Spectral Sequence. *Jour. of the AMS*, 1991.
- H. DONNELLY : Eta invariants for G-spaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 1978.
- X. DAI et G. WEI : A Hitchin-Thorpe inequality for Noncompact Einstein 4-Manifolds. *Adv. in Math.*, 2007.
- X. DAI et W. ZHANG : Circle bundles and the Kreck-Stolz invariant. *Trans. of the AMS*, 1995.
- M. FECKO : Differential Geometry and Lie Groups for Physicists. *Cambridge University Press*, 2006.
- G. W. GIBBONS et S. W. HAWKING : Classification of gravitational instanton symmetries. *Comm. Math. Phys.*, 66(3), 1979.
- P. B. GILKEY : Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem. *Publish or Perish*, 1984.
- M. GROMOV : Volume and bounded cohomology. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 56:5-99, 1982.
- J. GELL-REDMAN et F. ROCHON : Hodge Cohomology of some Foliated Boundary and Foliated Cusp Metrics. *Mathematische Nachrichten (a paraitre)*.
- N. J. HITCHIN : Compact four-dimensional Einstein manifolds. *J. Differential Geometry*, 9:435-441, 1974.
- N.J. HITCHIN : Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations. *J. Differ. Geom.*, 42(1):30-112, 1995.

- N.J. HITCHIN : Einstein metrics and the eta-invariant. *Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B*, 11(2):95–105, 1997.
- D. KOTSCHICK : Entropies, volumes, and Einstein metrics. pages 39–54, 2012.
- P.B. KRONHEIMER : The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients. *J. Differ. Geom.*, 29(3):665–683, 1989.
- C. LEBRUN : Counter-examples to the generalized positive action conjecture. *Commun. Math. Phys.*, 118(4):591–596, 1988.
- H.B. LAWSON et M.L. MICHELSON : Spin Geometry. *Princeton Univ. Press*, 1989.
- E. LEICHTNAM et P. PIAZZA : Elliptic operators and higher signatures. *Ann. Inst. Fourier*, 54(5):1197–1277, 2004.
- R. MELROSE : The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem. *A.K. Peters, Wellesley, MA*, 1993.
- R. MAZZEO et R. MELROSE : Pseudodifferential Operators on Manifolds with Fibered Boundaries. *Asian J. Math.*, pages 833–866, 1999.
- I. MOERDIJK et J. MRCUN : Introduction to Foliations and Lie Groupoids. *Cambridge Univ. Press*, 2003.
- J. MILNOR et J. STACHEFF : Characteristic Classes. *Princeton Univ. Press*, 1974.
- M. NAKAHARA : Geometry, Topology and Physics. *Institute of Physics Publishing*, 2003.
- F. PAULIN : Géométrie Différentielle élémentaire. http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf, 2007.
- H. PEDERSEN : Einstein metrics, spinning top motions and monopoles. *Math. Ann.*, 274:35–59, 1986.
- F. ROCHON : Pseudodifferential operators on manifolds with foliated boundaries. *J. Funct. Analysis*, 2012.
- M. SPIVAK : A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. V. *Publish or Perish*, 1999.
- I. M. SINGER et J. A. THORPE : The curvature of 4-dimensional Einstein spaces. In *Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira)*, pages 355–365. Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969.
- B. VAILLANT : Index and Spectral Theory for Manifolds with Generalized Fibered Cusps. 2001.
- E. P. WRIGHT : Quotients of gravitational instantons. *Ann. Global Anal. Geom.*, 41(1), 2012.