UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

PHILOSOPHIE DE LA NOTATION LOGIQUE : UNE APPROCHE SÉMIOTIQUE

THÈSE PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN PHILOSOPHIE

PAR
GWENNAËL BRICTEUX

NOVEMBRE 2014

Remerciements

Je remercie très grandement Monsieur François Latraverse, qui dirigea mes études depuis déjà la maîtrise et en assura le bon suivi jusqu'à l'aboutissement de cette thèse de doctorat. C'est à lui que je dois mon introduction à la sémiotique bien comprise et à l'œuvre de Peirce. Je remercie également mon camarade de longue date Xavier Camus, pour sa démonstration continuelle du sens de la critique et son soutien inconditionnel depuis le tout début de nos études en philosophie. Je suis aussi reconnaissant envers les professeurs Mathieu Marion et Alain Voizard, du Département de philosophie de l'UQAM, pour leurs conseils et commentaires lors des premières étapes de la rédaction, le projet de thèse et l'examen doctoral. C'est essentiellement avec M. Marion, M. Voizard, de même que M. Serge Robert, que j'ai étudié la logique et l'épistémologie. J'ai par ailleurs rencontré, dans le cadre du Projet d'édition Peirce (UQAM), plusieurs étudiants et chercheurs avec lesquels j'ai eu des discussions enrichissantes sur de nombreuses questions philosophiques et dont j'aimerais souligner l'apport, entre autres, Jean-Marie Chevalier, Marc Guastavino, Jérôme Havenel et Jérôme Vogel. Pendant la majeure partie de mes études doctorales, j'ai de plus bénéficié d'une bourse d'admission au doctorat en philosophie, du Département de philosophie de l'UQAM, une bourse du Fonds à l'accessibilité et à la réussite des études (FARE) de l'UQAM et une Bourse d'études supérieures Joseph-Armand-Bombardier — bourse de doctorat du Conseil de la recherche en sciences humaines du Canada (CRSH), qui m'assurèrent les conditions matérielles nécessaires à l'étude. Je remercie finalement mes parents, qui m'ont donné l'éducation de base rendant tout le reste possible. Je dédie cette thèse à mon épouse.

Table des matières

Résumé

Le but de la thèse est de développer une approche critique de la notation logique d'un point de vue sémiotique, par contraste avec la grammaire stipulée des approches standard de la logique. La grammaire spéculative de la sémiotique de Charles Sanders Peirce est d'abord présentée et conçue comme une grammaire pure de la logique. La notation logique est plus spécifiquement définie comme une grammaire particulière effective de la logique. Trois principaux types de notation (algébrique linéaire, algébrique arborescent, graphique) pour différents systèmes de critique logique (classique, intuitionniste, linéaire), élaborés selon plusieurs méthodes (axiomatique, séquents, déduction naturelle, graphes existentiels), sont ensuite analysés et critiqués dans une perspective sémiotique. Les développements de la grammaire catégorielle et la théorie des types constructive, de même que de la logique dialogique et la ludique, au niveau de la méthode, permettent d'effectuer des distinctions grammaticales supplémentaires, explicitées dans la notation. L'ensemble de la thèse constitue de la sorte une théorie générale de la notation logique, qui fait ressortir la diversité des formes sémiotiques en présence et leur fondement empirique dans le phénomène, de même que la finalité de la notation, qui se trouve être l'adéquation de l'expression au raisonnement nécessaire de la logique.

Mots clés : Logique (Philosophie) ; Notation logique ; Sémiotique ; Peirce, Charles S. (Charles Sanders) 1839-1914.

Introduction : sémiotique, ou logique philosophique

> At the moment, the elaboration of the formulæ has been somewhat more adequately attended to than the simpler business of assessing their precise significance for logic.
>
> Lewis & Langford (1932)

> It is by means of *relatives of second intention* that the general method of logical representation is to find completion.
>
> Peirce (CP 3.490, 1897)

Problématique

Le logicien utilise, dans son étude du raisonnement, une notation qui lui sert de support matériel nécessaire et dont l'usage, une fois appris, est le plus souvent considéré comme allant de soi. L'étude de la logique porte sur le raisonnement, en particulier sur ses propriétés et méthodes formelles, la notation n'étant considérée que comme un instrument de la pensée dont le sens propre tend à s'effacer derrière celui de la réflexion. Cependant, l'expression de la logique est délibérément contrainte par la notation, qui a été choisie parce que cette contrainte facilite l'opération du raisonnement logique et permet aussi de faire ressortir des propriétés qui caractérisent ce raisonnement. Ainsi l'algèbre de Boole permet-elle l'opération d'un calcul de la logique modelé sur celui des mathématiques, tout en rendant explicites certaines propriétés des opérations logiques comparables à celles, déjà connues, de leur modèle. Les notations d'autres systèmes de logique permettent de formaliser différemment le raisonnement et de le rendre autrement effectif, telle la notation algébrique des *Principia mathematica* de Whitehead & Russell qui, par une méthode expressément axiomatique et des distinctions supplémentaires quant aux propriétés des propositions analysées, permet entre autres d'aborder le problème des antinomies dans la réflexion sur les fondements des mathématiques. S'il est donc une chose bien évidente dans l'étude de la logique, c'est que les contraintes de l'écriture sont elles-mêmes signifiantes. Toutes les notations ne permettent pas d'exprimer les mêmes idées et de développer les raisonnements de la même façon, et les notations varient en effet d'un système de logique à un autre. Une bonne compréhension des modes de signification de la notation est donc une condition essentielle au développement de la logique, aussi bien à sa formalisation qu'à son usage effectif dans l'élaboration de la connaissance.

Une étude plus approfondie des fondements philosophiques de la notation logique s'impose dès lors, qui distingue quels sont les différents types de notation, leurs modes d'opération et leurs fonctions au sein de la logique. La thèse qui suit se donne pour but d'élaborer une première réflexion systématique à ce sujet et soutiendra à cet effet que : 1° la notation logique importe parce que la logique en tant que science est une activité intellectuelle humaine, qui, bien que visant la rationalité, met en jeu plusieurs niveaux phénoménaux constituant tous des aspects essentiels de la réalité (empirisme phénoménologique) ; 2° la critique logique la plus adéquate en est une qui rend compte des différents aspects de la réalité et cela même à travers la constitution de sa notation en tant que signe (normativité et pluralisme sémiotique, le cœur de la thèse) ; et 3° l'approche de la logique développée de la sorte entraîne des conséquences en ce qui concerne la compréhension de la logique en tant que science, à un niveau plus proprement métaphysique ou interprétatif, nous amenant à reconsidérer certaines questions fondamentales de la philosophie de la logique et du langage, telles celles de la nature de la signification, de l'effectivité de la logique, etc. (un certain réalisme comme conséquence du pragmatisme, en filigrane dans notre réflexion). L'étude de la formalisation de la logique par le développement de ses notations nous permettra ainsi de faire ressortir les multiples perspectives phénoménales et le mouvement général du processus de la signification propres au raisonnement nécessaire, qui motivent toute l'entreprise de la logique en tant que science philosophique.

Méthodologie et structure de l'exposé

Le travail adopte, dans la conception de la notation qui y est élaborée et la méthode de réflexion qui y est suivie, l'approche sémiotique de la logique développée par Charles Sanders Peirce. Il comporte en cela trois niveaux : sur fond d'exégèse peircéenne, l'argumentation est développée systématiquement en suivant le motif architectonique de la philosophie de Peirce, tout en ancrant les différents problèmes abordés au fil des arguments dans des débats historiques et contemporains.

D'un point de vue *systématique*, l'argumentaire suit le motif architectonique de la pensée de Peirce, son système des sciences, lui-même basé sur l'ordre des catégories universelles de la phanéroscopie (phénoménologie peircéenne). La science est conçue de façon générale par l'auteur comme une activité intellectuelle humaine qui a pour but d'acquérir, de développer et de consolider des connaissances. Suivant le motif de l'architectonique, les différentes sciences sont ordonnées en vertu d'un principe de dépendance non réciproque, d'après lequel les sciences les plus fondamentales fournissent des principes aux sciences qui en dépendent et qui leur apportent en retour des données de l'expérience. Les sciences peuvent être heuristiques, pratiques ou rétrospectives. Pour ce qui nous intéresse, les grandes branches des sciences heuristiques (ou de la découverte), sont les mathématiques, la philosophie et les sciences spéciales (physiques et psychiques). La philosophie, dont nous nous occuperons ici, est elle-même constituée de la phanéroscopie ; des sciences normatives, incluant l'esthétique, l'éthique et la logique (ou sémiotique) ; et de la métaphysique. Le schéma suivant récapitule l'ensemble du système dans ses grandes lignes (EP2 : 258-62, 1903)[1] :

- Mathématiques
- Philosophie
  - Phanéroscopie (phénoménologie)
  - Sciences normatives
    - Esthétique
    - Éthique
    - Sémiotique (logique)
  - Métaphysique
- Sciences spéciales

La problématique de notre thèse se situe au niveau sémiotique, tout en ayant des présupposés phanéroscopiques et des conséquences métaphysiques. La sémiotique est elle-même conçue comme une logique proprement philosophique et une science normative, qui tire donc ses principes principalement de la phanéroscopie et des mathématiques, et de laquelle dépendent la métaphysique et les sciences spéciales. C'est dès lors toujours du point de vue de la philosophie que nous réfléchirons, même quand nous examinerons le lien de la logique et sa notation avec les mathématiques (nous ne nous occuperons pas des sciences spéciales, qui sont la linguistique, l'informatique, la psychologie, etc.). Le seul transfert de perspective se fera de la sémiotique à la métaphysique, la phanéroscopie étant présentée telle quelle comme un fondement qui ne sera pas questionné en soi. Les questions métaphysiques que nous aborderons ne seront d'ailleurs pas non plus traitées systématiquement à part et pour elles-mêmes, mais dans des remarques suivant le cours de l'argumentation au niveau sémiotique. Une idée importante qui sous-tend aussi l'architectonique est que chacune des principales sciences distinguées dans la classification possède une

---

[1] Le texte auquel on fait référence, intitulé « An Outline Classification of the Sciences », est la meilleure introduction, parmi les plus concises, au système des sciences de Peirce. Pour une étude approfondie de l'architectonique de l'auteur et son développement dans l'œuvre, voir Kent (1987).

relative autonomie, qui lui donne une perspective propre et irréductible dans la connaissance du réel. De plus, la science étant avant tout une activité intellectuelle humaine, chaque science plus spécifique possède également un mode de pensée qui lui est propre.

Ainsi, la philosophie en général est conçue, d'un point de vue peircéen, comme une pensée de sens commun critique. Sa perspective est l'expérience de sens commun que nous faisons de la réalité, tandis que son mode de pensée propre est la critique. La critique philosophique est même critique au plus haut point, en ce sens que la réflexion philosophique se retourne sur ses propres concepts et devient de la sorte critique auto-réflexive ou méta-critique, c'est-à-dire interprétation. Chacun de ces aspects de la pensée philosophique ressort plus proprement dans l'une ou l'autre des sciences philosophiques. La phanéroscopie est en cela la science qui consiste à examiner et décrire le phénomène tel qu'il se présente au premier abord dans l'expérience. La sémiotique ou logique, plus particulièrement parmi les sciences normatives, est la science qui consiste avant tout à critiquer le raisonnement, c'est-à-dire à analyser et reconstruire le raisonnement en tenant compte de ses conditions de réalisation particulières et des normes qui le rendent valide. La métaphysique fait finalement retour sur la réalité en y distinguant un tout et des parties, auxquelles elle reconnaît des perspectives propres, en tant que moments interprétatifs de la connaissance philosophique. Pour situer la pensée de Peirce par rapport aux sciences philosophiques dans leur état actuel, nous pouvons considérer que chacune des disciplines philosophiques dont les interprétations font retour sur des conceptions de l'ensemble ou d'aspects particuliers de la réalité, font partie de la métaphysique : ontologie, épistémologie, philosophie de la logique, philosophie du langage, philosophie de l'esprit, méta-éthique, etc. Nous nous occuperons ici de la métaphysique en tant que philosophie de la logique ou « méta-sémiotique », c'est-à-dire en tant que retour critique de la réflexion sur la sémiotique, celle-ci étant comprise comme une approche proprement philosophique de la logique, qui se développe en un système.

Les principaux moments argumentatifs de l'*exégèse peircéenne* sont, pour leur part, au niveau sémiotique — le cœur de l'argumentation : 1° l'interprétation de la sémiotique comme approche proprement philosophique de la logique, développée surtout au niveau grammatical et dans la perspective de la philosophie comme pensée de sens commun critique ; 2° l'interprétation de la notation comme mode d'expression de la logique faisant ressortir la base phénoménale de cette dernière, la pluralité des types de signe jouant ici un rôle central ; 3° l'étude de principes qui pourraient servir à la formalisation de la doctrine du pragmatisme, comme méthode dirigeant la critique des notations. Les remarques concernant les conséquences métaphysiques de la critique logique feront ressortir quant à elles : 1° certaines catégories particulières de la métaphysique comme corrélats des catégories universelles de la phanéroscopie et des catégories grammaticales pures de la sémiotique, de même que 2° un certain « réalisme » comme position ontologique générale caractéristique de l'approche sémiotique peircéenne et la conception de l'effectivité de la logique qui l'accompagne.[2]

En correspondance, par ailleurs, avec différents *débats historiques et contemporains* de la logique et la philosophie, nous confronterons en premier lieu la grammaire spéculative de la sémiotique, en tant que grammaire pure de la logique, à d'autres grammaires formelles (Frege, Russell, Husserl et l'école de logique polonaise de l'entre-deux-guerres) menant à la théorie des types (Church), ainsi qu'aux grammaires catégorielles et génératives (Bar-Hillel, Montague, Chomsky). Nous

---

[2] Nous utilisons les sources standards des études peircéennes, soit : l'édition chronologique des *Writings* (abrégée en W) en cours de publication, les textes choisis des *Essential Peirce* (EP) et l'édition thématique des *Collected Papers* (CP) ; et faisons aussi à l'occasion usage de la correspondance de Peirce avec Lady Welby, compilée dans l'ouvrage intitulé *Semiotics and Significs: The Correspondence between Charles S. Peirce and Victoria Lady Welby* (S&S) et de quelques manuscrits en édition microfilm, *The Papers of Charles S. Peirce: Microfilm Edition* (MS). Nous privilégions les éditions critiques plus récentes et référons aux textes sources selon l'usage, en ajoutant l'année de rédaction ou de publication lorsque connue (par exemple, EP2 : 170, 1903).

examinerons ensuite et surtout les principaux types de notation de la logique formelle (prose, algèbre, graphes) en nous concentrant sur les notations propres à l'axiomatique (Whitehead & Russell, Hilbert & Ackermann, Łukasiewicz), aux séquents et à la déduction naturelle (Gentzen, Prawitz, Girard) et aux graphes existentiels (Peirce). Nous considérerons finalement le rôle que la grammaire type-théorétique constructive (Martin-Löf, Ranta), la logique dialogique (Lorenzen) et la ludique (Girard) pourraient jouer dans l'articulation de la doctrine du pragmatisme et sa formalisation à travers l'étude de la notation.

1

Grammaire

La grammaire pure de la logique, ou grammaire spéculative dans la perspective sémiotique de Peirce, est l'étude des éléments qui entrent en composition dans l'expression de la logique, pour eux-mêmes et dans leurs relations mutuelles[3]. Suivant le motif architectonique, cette grammaire est une science philosophique et une branche de la sémiotique, qui se base sur les principes des mathématiques, en particulier sur la notion de multiplicité et les relations d'ordre, mais aussi sur les principes de la phanéroscopie, les catégories universelles de l'expérience. D'un point de vue mathématique, l'idée de multiplicité permet de distinguer différents aspects du signe, tandis que celle de relation d'ordre caractérise les modes de fonctionnement du signe. Le fondement phanéroscopique de la grammaire spéculative, sa base empirique en tant que science philosophique développée par la critique du sens commun, la distingue pour sa part d'autres approches formelles du langage élaborées par des logiciens et des linguistes, comme la syntaxe logique de Carnap ou les grammaires formelles appliquées à l'étude des langues usuelles (grammaires catégorielles de Bar-Hillel, Lambek et Montague, grammaire générative de Chomsky et ses disciples). Ces différentes approches formelles dérivent, selon l'interprétation historique la plus commune[4], d'une part de la distinction que fait Husserl (1900-1901) entre différentes catégories de la signification, ainsi que de son projet plus général d'une grammaire

---

[3] Peirce définit la grammaire spéculative de manière succincte, dans le *Syllabus* de 1903 (EP2 : 260), comme : « the general theory of the nature and meaning of signs ».

[4] Le contexte général du développement des grammaires formelles est présenté dans Godart-Wendling (2002), Rivenc & Sandu (2009), voir aussi Gardies (1975) ; ce genre d'interprétation apparaît dès Tarski (1933).

pure ; d'autre part de la théorie des types élaborée par Russell (1903, 1908, 1910-1913) dans le but de prévenir le développement d'antinomies dans l'axiomatisation des mathématiques. La théorie de la signification de Frege, avec sa distinction entre le signe, le sens et la référence, et parmi les références, entre la fonction et l'objet, préfigure aussi déjà, sensiblement à la même époque que le développement de la sémiotique par Peirce, les distinctions entre différentes catégories grammaticales et divers niveaux fonctionnels de la logique.

Bien que le sens à donner aux termes « catégorie » et « type » reste flou, on peut considérer que ce qui distingue ces deux origines est surtout un accent posé, de manière non exclusive, d'un côté sur l'abstraction des éléments qui constituent, dans l'analyse, les expressions signifiantes (telle catégorie se compose avec telle autre, pour donner telle catégorie composée) ; de l'autre sur l'application, suivant certaines règles, des éléments du calcul à divers niveaux opératoires (tel type s'applique à tel type dans la production d'un résultat de tel type). Ces deux aspects du formalisme tendent d'ailleurs à se conjuguer de façon plus explicite dans les grammaires catégorielles, développées plus tard à partir des trois théories classiques d'Ajdukiewicz (1935), Bar-Hillel (1950, 1953) et Lambek (1958). Seule la grammaire générative de Chomsky (1957), à ses débuts, s'est limitée à une approche strictement syntaxique de l'analyse du langage, rejetant le principe sémantique de compositionnalité, qui présuppose une distinction entre niveaux fonctionnels. Ces différentes grammaires formelles suivent cependant toutes le sens général de la grammaire pure de la logique, en ce qu'elles spécifient un ensemble de catégories et des lois de composition, tout en empruntant à la logique ses méthodes (surtout l'axiomatique, mais aussi la méthode des séquents pour Lambek). Elles ont de plus chacune fortement développé leur aspect calculatoire sans vraiment revenir sur les concepts de base de « catégorie » et de « type »[5]. Ces dernières notions sont même parfois confondues, dans un usage alternant entre les deux expressions[6], ce qui montre que leur fondement reste vague.

Par contraste, la grammaire spéculative de la sémiotique peircéenne, tout en étant motivée par des principes mathématiques, est pour sa part d'emblée orientée vers la critique logique et donc un mode de pensée différemment caractérisé que le simple calcul. Le langage est conçu en un sens comme un calcul, mais aussi, autrement, comme le premier lieu de la confrontation de certains aspects phénoménaux et la critique conséquente de leur conceptualisation. La critique est caractérisée notamment par une complexification des modes de signification, ce qui la distingue du calcul dont le processus de signification est moins articulé. Ainsi, la grammaire spéculative de la sémiotique propose une analyse de la relation triadique qui constitue le signe, avant de procéder à l'élaboration d'une typologie des signes ; alors que dans les grammaires formelles mentionnées ci-dessus, et orientées vers le calcul, les notions de type ou catégorie ne sont pas clairement définies et la classification des éléments de ces grammaires est donc développée sans analyse préalable de ces notions qui leur sont fondamentales. Dans la grammaire spéculative, on trouve plus précisément, après la définition du signe, une distinction à la fois des différents types de signe (les catégories de base de la sémiotique) et des principes permettant de composer ces types en classes de signe, puis en signes complexes (les lois de composition des catégories). Les transformations des classes de signe et des signes complexes relèvent par la suite de la critique logique.

---

[5] Notons ainsi le cas exemplaire de Church, qui considère que les types de sa théorie n'ont pas besoin d'être définis plus avant pour développer son calcul : « We purposely refrain from making more definite the nature of the types o and ι, the formal theory admitting of a variety of interpretations in this regard. Of course the matter of interpretation is in any case irrelevant to the abstract construction of the theory, and indeed other and quite different interpretations are possible (formal consistency assumed). » (Church 1940 : 57)

[6] Cf. Rivenc & Sandu (2009 : 41-7), qui relèvent les distinctions et confusions entre les deux notions.

La grammaire pure de la logique se distingue aussi de la syntaxe en ce que cette dernière, telle que conçue depuis Carnap (1934) et Morris (1938), est plutôt une discipline métaphysique : l'une des constituantes, avec la sémantique et la pragmatique, de la philosophie du langage (qui étudie aussi le langage formel de la logique). Il y a bien une syntaxe de la logique, d'un point de vue sémiotique peircéen, mais celle-ci consiste en un retour de la réflexion critique sur une théorie particulière déjà constituée de la logique et non en l'élaboration de principes normatifs qui formeraient par eux-mêmes une grammaire pure. La grammaire spéculative, pour sa part, définit les notions de base de la logique — les catégories à partir desquelles la critique opère — en suivant une conception primitive, mais articulée, du signe. La distinction effectuée, au niveau métaphysique, entre la syntaxe, la sémantique et la pragmatique, est d'une certaine manière tributaire de l'articulation interne du signe au niveau logique, elle-même basée sur les catégories universelles de la phanéroscopie. Ce sont les différents liens entre le signe et ses corrélats dans la relation de signification qui sont abstraits ou objectivés chacun pour soi au sein des différentes disciplines métaphysiques, lesquelles donnent à chacun de ces corrélats et relations une interprétation métaphysique particulière. Par exemple, d'un point de vue ontologique, le langage, le monde et la pensée sont distingués comme constituants de la réalité ; tandis que d'un point de vue épistémologique, le calcul effectif est caractérisé comme une manière d'actualiser la connaissance, utilisant le raisonnement formel dans un cadre ontologique déterminé.

Cela dit, bien que la grammaire spéculative ne fasse pas en soi ces distinctions d'ordre métaphysique, elles entrent éventuellement en jeu dans l'étude de la notation comme moyen d'exprimer effectivement le raisonnement. La critique de la notation qui suivra l'exposé de la grammaire comportera donc une composante syntaxique, même si l'objet qui sera étudié, la logique, reste quant à lui plus strictement formel. Nous critiquerons des systèmes de notation particuliers tout en gardant à l'esprit l'idée normative selon laquelle une notation logique adéquate doit représenter la grammaire pure de la logique, tout en permettant de reproduire la critique logique et cela en vue de réaliser un certain but propre à la logique.

1.1. Les fondements phanéroscopiques de la logique et sa notation

La philosophie en tant que pensée de sens commun critique commence par la réflexion sur l'expérience commune que nous faisons de la réalité. La phanéroscopie ou phénoménologie[7], la plus fondamentale des sciences philosophiques, est l'activité intellectuelle qui consiste à inspecter le phénomène au premier abord extrêmement vague et indifférencié, le *phanéron*, et à effectuer les toutes premières distinctions entre différents aspects de la réalité, les concepts les plus vagues que la pensée est amenée à élaborer dans sa confrontation avec le réel. Ces concepts sont vagues, car intrinsèquement liés entre eux et même jamais complètement différenciés lors de l'inspection du phénomène. Tout l'effort de la phanéroscopie consiste donc à décrire minutieusement le phénomène afin de distinguer les aspects les plus fondamentaux entrant dans sa constitution. Mais ce premier moment de la réflexion philosophique n'est pas que descriptif, il est aussi déjà en partie critique, puisqu'il faut juger de l'importance respective des différents aspects distingués, afin de reconnaître le rôle propre de chaque conception fondamentale et sa situation dans l'ordre des connaissances.

La phanéroscopie peut de plus être développée à partir de différents points de vue épistémologiques. La perspective la plus fondamentale et la plus formelle est celle des mathématiques, l'approche plus spécifique privilégiée par Peirce étant celle des mathématiques de la logique (des relations) (CP 4.227-323, 1902, « Minute Logic »). Il montre, par une série d'opérations sur des relations élémentaires, que les

---

[7] Le nom « phanéroscopie » est plus en ligne avec l'interprétation peircéenne, puisque cette science est antérieure, dans l'ordre des sciences, à la logique.

relations les plus fondamentales de la pensée mathématique, et donc de toute pensée scientifique, sont les triades. Toute autre relation avec un nombre quelconque de corrélats (*n*-adique) peut être dérivée de, dans le cas des médades (zéro corrélat), des monades et des dyades, ou réduite à, dans le cas des relations à plus de trois corrélats, des ensembles de triades ; tandis qu'une relation triadique authentique, c'est-à-dire dont les éléments sont indissociables, ne peut être construite à partir d'autres types de relations[8]. La triade est donc la conception qui, du point de vue des mathématiques de la logique des relations, permet de construire l'ensemble des relations constituant la réalité.

Une autre perspective est donnée par les sciences spéciales, en particulier la théorie de la cognition comme partie de la psychologie, qui distingue l'ensemble des opérations mentales pouvant être effectuées lors de l'inspection du phénomène (EP2 : 267-72, 1903). Il en ressort également un ensemble d'opérations organisées selon un motif triadique, bien que ne donnant pas le principe dépouillé des catégories universelles de l'expérience, mais l'une de ses spécifications dans un phénomène psychique spécial, une manifestation particulière de la réalité.

La perspective la plus apte à faire ressortir correctement les différents aspects du phanéron est celle de la phanéroscopie même, en tant que science philosophique proprement dite, c'est-à-dire en tant que science qui procède du niveau « mésoscopique » de l'expérience (l'expérience commune, de niveau moyen) et non des niveaux microscopique et macroscopique des sciences spéciales ou du point de vue plus purement formel (sans engagement par rapport à un contexte déterminé de la réalité ou par rapport à la réalité en général) des mathématiques. Les catégories universelles qui permettent de comprendre le phénomène sont alors distinguées dans le cours d'une expérience soutenue, élaborée progressivement[9]. L'exposé rétrospectif

---

[8] C'est ce que les commentateurs ont appelé plus tard la « thèse de réduction » de Peirce (Burch (1991), Houser et al. (1997)).

[9] Peirce a mis lui-même de nombreuses années avant de parvenir à comprendre toute la portée de chacune des catégories, développement qui structure son œuvre (selon l'interprétation de Fisch (1986)).

des catégories, suite à leur découverte lors de l'examen phanéroscopique, consiste au mieux en une série d'illustrations qui font ressortir le caractère propre de chacun des aspects distingués (une reproduction de l'expérience, guidée par les résultats). Ces illustrations sont élaborées à partir de définitions formelles, mais non mathématiques, c'est-à-dire des définitions logiques, énoncées sous une forme propositionnelle (EP2 : 145 ff., 1903). Les catégories sont alors nommées formellement : Priméreté, Deuxièmeté et Troisièmeté, au cours d'une abstraction logique qui suit le motif des multiplicités mathématiques, mais qui permet néanmoins d'appliquer ces principes mathématiques dans le contexte de l'expérience commune. Elles sont de plus liées logiquement entre elles selon un ordre de dépendance non réciproque : la Priméreté se présente d'elle-même, la Deuxième présuppose explicitement la Priméreté, et la Troisièmeté les deux premières catégories. D'un point de vue métaphysique aussi, le motif des catégories impose un ordre hiérarchique solidaire parmi les entités réelles, tout en étant posé comme une hypothèse préalable à toute connaissance effective de la réalité. En un autre sens, les catégories correspondent, sous leur mode matériel, à des aspects plus concrets de l'expérience, désignés, de manière générale et dans leur ordre respectif, comme : la qualité d'une sensation (*quality of feeling*), le fait brut et la raison médiatrice.

Ainsi, la Priméreté est le caractère abstrait de ce qui se présente en soi sans aucune dépendance apparente envers un deuxième. Des exemples typiques de Priméreté manifestée sous son mode matériel, la qualité d'une sensation, sont une couleur distinguée pour elle-même, tel le rouge de la cape du toréador, ou encore une note de musique extraite de sa mélodie. Mais la qualité première peut aussi qualifier un objet complexe, dont le sens n'est d'abord saisi que de manière vague à travers cet aspect qualitatif de la sensation. Par exemple, je peux me remémorer un paysage océanique par le seul teint grisâtre ou les reflets huilés qui le caractérisaient, ou encore je peux reconnaître une langue sans même la comprendre par une certaine tonalité qui lui est propre. La qualité d'une sensation, malgré son unicité, peut aussi bien caractériser un phénomène complexe que simple et, pour ce qui nous intéresse, un système de signes qu'un signe singulier.

La Deuxièmeté est l'abstraction de ce qui ne subsiste que par la confrontation ou le contraste avec un deuxième, la concaténation même des éléments d'un ensemble. Elle implique nécessairement la possibilité du dédoublement, par dualité, de la perspective sur le phénomène. Si par mégarde je referme la porte sur le nez d'une personne, le choc que subit ma main sur la clinche et celui que ressent l'autre au visage constituent les deux faces d'un même phénomène, qui se présente ici comme le fait brut d'un choc physique, la concaténation inattendue de deux corps. Les exemples de Deuxièmeté les plus évidents pour le sens commun sont matériels, mais en tant que catégorie universelle, cet aspect caractérise aussi le phénomène à des niveaux plus formels. La diagrammaticité et l'indexicalité sont de la sorte deux types de phénomènes dont l'aspect Deuxième est pour une part prépondérant et qui intéressent particulièrement l'étude de la notation logique.

La Troisièmeté est quant à elle l'aspect fondamental qui caractérise tout ce qui est rationnel. Formellement, elle consiste en ce qui ne peut subsister que par la médiation d'un troisième entre deux autres. Un exemple commun de manifestation de la Troisièmeté sous son mode matériel est le respect de la loi civique, c'est-à-dire de normes que l'individu s'impose à lui-même dans sa relation au reste de la société organisée. Ainsi, si je me promène en ville et qu'en arrivant à un feu rouge j'hésite à traverser, alors que les autres passants continuent leur chemin sans s'arrêter, la loi se manifeste concrètement en mon esprit et dans mes actions conséquentes, d'une manière autant plus forte que la situation peut sembler conflictuelle. Nous verrons dans notre examen de la sémiotique que la Troisièmeté permet un mouvement réflexif supplémentaire — non une simple critique, mais une critique réflexive ou interprétation — qui rend la raison productive, capable de se développer elle-même.

D'une certaine façon, la philosophie de la notation que nous allons élaborer consiste à faire ressortir et à étudier à partir de divers points de vue philosophiques (phanéroscopique, sémiotique, métaphysique) les jeux entre catégories et les complexifications de ces catégories et de leurs jeux, dans le développement de la notation logique en plusieurs systèmes particuliers, ainsi que certaines de leurs conséquences pour la réflexion philosophique. Aux niveaux sémiotique et métaphysique de la réflexion, la notation possède toutefois des caractéristiques qui ne peuvent être saisies par la simple description phanéroscopique. En plus de l'analyse et de l'interprétation propres à chaque niveau des sciences philosophiques, nous aurons donc également à examiner la façon dont s'effectue l'émergence d'un niveau de la réalité et de sa connaissance par rapport à un autre[10]. La clé de la compréhension de la nature et des fonctions de la notation logique réside dans l'éclaircissement de ces différents aspects ontologiques et épistémologiques, et du jeu des perspectives qui conditionne le phénomène spécifique de l'émergence de la notation.

1.2. Grammaire spéculative et notation logique

La grammaire spéculative ou grammaire formelle de la sémiotique donne les conditions de réalisation des signes, c'est-à-dire de leur formation première et de leur complexification ultérieure. L'exposé de la grammaire consiste de la sorte, pour l'essentiel, en une *définition* du signe, qui permet de formuler une conception générale du signe, articulée en soi, et en une élaboration subséquente de la *typologie* des signes, qui rend compte de la complexification de la conception du signe, en suivant le jeu des différentes perspectives propres à la relation triadique qui constitue le signe. Toutefois, dans notre étude, outre l'exposé général de la typologie, le développement de la conception du signe suit aussi le sens de la perspective propre au type de signe qui nous intéresse plus spécialement, la notation logique, qui est de la

[10] Le passage du phanéron au signe, que nous n'examinerons pas plus avant ici, est quant à lui décrit avec minutie et rigueur dans De Tienne (2000).

sorte conçue comme une façon spécifique qu'a le signe de se développer. La notation se distingue en particulier du langage ordinaire en ce qu'elle requiert une critique explicite des modes de représentation qu'elle emploie, critique que le dialogue menant à l'établissement d'une convention de notation doit élaborer. Le langage ordinaire, pour sa part, évolue au fil de conventions moins explicitement réfléchies et moins critiques, voire dans un jeu de contingences propres au développement des langues, contingences qui s'imposent d'elles-mêmes et rendent l'évolution linguistique en grande partie acritique. Le développement de la notation tout aussi bien que du langage ordinaire est néanmoins conditionné, à un niveau sémiotique, par les caractéristiques propres aux signes que tout langage emploie.

1.2.1. Définition du signe

La conception peircéenne du signe est articulée en suivant le motif triadique des catégories universelles de l'expérience distinguées par la phanéroscopie. Le signe est décrit comme subsistant dans une relation avec deux autres composantes, l'objet et l'interprétant, sans lesquelles il ne peut se constituer en tant que signe. Les trois composantes sont donc interdépendantes et irréductibles les unes aux autres, chaque composante remplissant un rôle propre dans la relation de signification, qui est cependant conçue du point de vue du signe même. La signification est la réalisation de cette relation triadique, lorsque le signe est compris au sein de cette relation[11]. Une définition épurée du signe peircéen peut être formulée comme suit : un signe est une chose qui tient lieu d'une autre chose, son objet, dans la perspective d'une troisième

[11] Peirce nomme ce que nous appelons ici des « composantes », des *corrélats* (de la relation triadique constitutive du signe) et nous alternerons entre ces deux façons de parler : la plus commune, d'une composante, terme qui possède une connotation plutôt méréologique (partie d'un tout, multiplicité), et la plus exacte, d'un corrélat, qui ne subsiste que parce qu'il entre en relation avec d'autres corrélats, selon un certain ordre. Une des caractérisations les plus explicites du signe comme corrélat se trouve dans « Nomenclature and Divisions of Triadic Relations » (EP2 : 289-99, 1903).

chose, son interprétant. Peirce formule lui-même sa définition du signe à plusieurs reprises sous un mode parfois plus formel, suivant les catégories universelles et la logique des relations, et parfois plus matériel, selon une approche plus psychologisante, tel que respectivement dans les deux citations suivantes :

> A *Sign*, or *Representamen*, is a First which stands in such a genuine triadic relation to a Second, called its *Object*, as to be capable of determining a Third, called its *Interpretant*, to assume the same triadic relation to its Object in which it stands itself to the same Object. The triadic relation is *genuine*, that is its three members are bound together by it in a way that does not consist in any complexus of dyadic relations. (EP2 : 272-3, 1903, « Sundry Logical Conceptions »)

> I define a Sign as anything which is so determined by something else, called its Object, and so determines an effect upon a person, which effect I call its Interpretant, that the latter is thereby mediately determined by the former. My insertion of "upon a person" is a sop to Cerberus, because I despair of making my own broader conception understood. (EP2 : 478, 1908, « Excerpts from Letters to Lady Welby »)

Le *signe* est ce qui, dans la relation triadique qui le constitue (la relation de signification), se présente de soi-même, bien qu'il ne soit rendu signifiant que dans son rapport aux deux autres composantes. L'*objet* est ce que le signe confronte, dans sa fonction de lieutenance, en devenant signifiant. L'*interprétant* est le point de vue pris sur la relation entre le signe et son objet, perspective qui donne un sens à ce signe. Chacune des trois composantes joue de la sorte un rôle qui confère à la relation triadique un aspect correspondant à l'une des catégories universelles respectives. Tout comme les catégories universelles constituent des perspectives sur le phénomène distinguées lors de l'inspection première de celui-ci, les composantes de la relation triadique constituant le signe sont des aspects que prend le phénomène lorsqu'on le considère dans la perspective de sa signification, ne serait-elle que potentielle (signifiance). Ce point de vue adopté sur le phénomène fait de la sémiotique la discipline propre de la critique logique — on y évalue ce qui dans le phénomène prend part à la signification —, l'analyse grammaticale s'attachant plus spécifiquement à montrer quelles conditions de la constitution du signe sont réalisées dans le phénomène.

Cependant, d'un point de vue plus strictement logique (de la logique des relations), les composantes de la relation de signification ne sont chacunes définies que dans leur relation (Deuxième) l'une par rapport à l'autre. Chaque composante est en ce sens un mode de fonctionnement d'une même sorte d'entité générale, la « chose » (Première). Cette chose en général est définie à son tour à un niveau métaphysique de la réflexion, suivant une certaine conception ontologique, mais qui n'est pas explicitée au niveau sémiotique. De même, la signification (Troisième), dont la conception est articulée logiquement par la sémiotique, est caractérisée plus avant à un niveau métaphysique, comme un aspect particulier de la réalité. La sémiotique pour sa part reste neutre en ce qui concerne la nature des entités réelles et des modes de réalisation de la signification (vague, déterminée, générale) et ne les spécifie pas. Il faut donc tenir compte du niveau épistémologique de la réflexion lors de la définition des concepts.

Les composantes de la relation de signification peuvent être qualifiées plus avant si l'on considère le jeu des perspectives propres aux relations mutuelles entre composantes, c'est-à-dire les différents sens de la détermination entre composantes dans la relation triadique. Ainsi, l'objet, en tant qu'il est représenté par le signe, est dit *immédiat* et, en tant qu'il détermine la représentation, *dynamique*. L'interprétant, pour sa part, en tant qu'il présente une certaine perspective prise sur la relation entre le signe et son objet, est dit *immédiat* ; en tant qu'il opère effectivement une médiation entre le signe et son objet, il est qualifié de *dynamique* ; et en tant qu'il constitue lui-même un nouveau signe médiateur, qui peut être idéal, en tant que norme de l'interprétance, il est caractérisé de *final*.[12] Le processus qui correspond à l'aspect dynamique de l'interprétant, l'action du signe, est appelé la *sémiose*. Le signe est également qualifié dans sa relation aux autres composantes sous leurs divers aspects, ce qui constitue la typologie que nous examinerons dans la prochaine section.

Par ailleurs, nous introduisons une perspective critique supplémentaire sur la grammaire en faisant un parallèle avec la philosophie de Frege, lequel, dans ce qu'il conviendra d'appeler sa « théorie de la signification », effectue une distinction entre le signe (*Zeichen*) ou l'expression (*Ausdruck*), la référence (ou dénotation, *Bedeutung*) et le sens (*Sinn*), comme trois éléments pouvant entrer en jeu dans la signification (Frege 1962 (SuB, 1892 : 26-7)). Ces trois éléments correspondent d'une certaine façon aux trois corrélats respectifs de Peirce : le signe, l'objet et l'interprétant. Cependant, Frege ne spécifie pas explicitement quel type de relation subsiste entre les trois corrélats, c'est-à-dire si la présence des trois est nécessaire pour qu'il y ait signification et dans quel ordre ceux-ci sont reliés. Il semble qu'il puisse y avoir des expressions qui ont un sens — sans référence, surtout dans le langage ordinaire (Frege 1962 (SuB, 1892 : 27-8)). Dans la grammaire formelle de la logique, toutefois, les trois éléments sont indissociables, toute expression possédant un sens *et* une référence (Frege 1962 (SuB, 1892 : 28)). De plus, Frege cherche à fournir une compréhension strictement logique de ces éléments et distingue pour cela le contenu jugeable (*beurteilbare Inhalt*), éventuellement analysé plus avant en sens et référence, de la représentation subjective (*Vorstellung*) qui, elle, est affaire de psychologie (Frege 1962 (SuB, 1892 : 29)). Ce qui nous intéressera dans la théorie de Frege, c'est

---

[12] Des trichotomies de base que nous examinerons plus loin, celle du qualisigne, du sinsigne et du légisigne correspond aux aspects que prend le signe en soi ; celle de l'icône, de l'index et du symbole correspond aux aspects que prend le signe dans sa relation à l'objet dynamique ; et celle du sème, du phème et du delôme correspond aux aspects que prend le signe dans sa relation à l'interprétant final. Ces distinctions supplémentaires sont effectuées notamment dans la correspondance de Peirce avec Lady Welby (EP2 : 477-91, 1908) et les « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism » de 1906 (CP 4.536) ; voir à ce sujet la reconstruction des commentateurs (Burks & Weiss (1945), Sanders (1970), Savan (1988), Jappy (1989), Farias & Queiroz (2003)). Une formulation relativement claire est la suivante : « [A] sign has two objects, its object as it is represented and its object in itself. It has also three interpretants, its interpretant as represented or meant to be understood, its interpretant as it is produced, and its interpretant in itself. » (CP 8.333, 1904)

qu'il ne développe pas ensuite la typologie des catégories de la même façon que Peirce et aussi qu'il essaie de justifier explicitement sa notation, l'écriture conceptuelle (*Begriffsschrift*), dans ses principes. La confrontation des deux conceptions dans le développement de notre grammaire nous permettra donc de mieux comprendre les fondements théoriques de celle-ci.

Remarquons finalement que Peirce et Frege, les deux principaux auteurs dont les travaux sont à l'origine de la logique contemporaine, avaient donc chacun développé une grammaire de la logique dans une perspective proprement critique. La grammaire de Frege est présupposée par l'ensemble de la logique contemporaine, comme le souligne Dummett (1991), et est la seule à avoir été discutée plus ou moins en profondeur (par Russell, Wittgenstein, Carnap, Quine, Sellars, Dummett, etc.), sans avoir jamais été complètement rejetée dans ses fondements. Ces deux conceptions sont aussi jusqu'à un certain point liées dans leur base à la grammaire de la logique traditionnelle dérivée des travaux d'Aristote et des Stoïciens. Nous croyons qu'une mise en commun et une confrontation de ces trois points de vue fournit l'essentiel de ce que devrait être une grammaire de la logique et constitue un bon point de départ pour le développement d'une compréhension plus globale du système de la logique.

1.2.2. Typologie des signes

La grammaire spéculative se développe en une typologie des signes lorsque l'on considère l'aspect que prend le signe en soi, dans sa relation à l'objet et dans sa relation à l'interprétant, soit les différentes perspectives qui peuvent être adoptées sur le signe dans la relation de signification. La caractérisation du signe, dans chacun de ces cas, suit également le motif des catégories universelles. Il en ressort une série de trois trichotomies de signes, ou « types de signe »[13], qui se composent en classes et constituent alors une typologie. Les types de signe sont toujours, d'une certaine manière, ordonnés et cet ordre contraint les classes de signe qui peuvent en résulter. La typologie des signes comprend donc à la fois un certain nombre de catégories, suivant lequel on différencie et caractérise les éléments du phénomène signifiant en leur attribuant des types, comme dans les grammaires catégorielles, et un ordonnancement de ces catégories, réglant leur mise en relation l'une avec l'autre, comme dans la théorie de la hiérarchie des types logiques.

1.2.2.1. Les catégories de signe

Nous définirons et illustrerons ici les éléments de la grammaire en nous basant sur les principes de la phanéroscopie, en leur sens matériel, ainsi que sur des catégories logiques de sens commun (la *logica utens* du lecteur). L'usage des catégories universelles en leur sens matériel peut sembler problématique, puisqu'il favorise une interprétation psychologisante de la phanéroscopie et donc de la grammaire. Néanmoins, il faut prendre en compte que cet usage est heuristique et qu'une compréhension plus complète des catégories grammaticales devrait ultimement les aborder en suivant les différentes perspectives de la science, que ce soit les mathématiques, la phanéroscopie en son sens plus formel ou les sciences spéciales. Notre analyse des notations devrait pour sa part permettre de mieux comprendre le sens proprement logique de la grammaire spéculative. La

---

[13] Comme pour les « composantes » ou « corrélats » de la relation de signification, un problème de désignation apparaît ici : Peirce n'utilise pas l'expression « type de signe », qui vient plutôt de ses exégètes, mais parle seulement de « signe » ou, à l'occasion, de « genre de signe » (*kind of sign*), expressions qui peuvent aussi désigner un sous-type de signe ou la réalisation particulière d'un type de signe. Il utilise cependant le terme « classe » pour désigner les composés d'aspects du signe (cf. « Nomenclature and Divisions of Triadic Relations », EP2 : 289-99, 1903).

compréhension de la grammaire n'est donc pas d'emblée complète, mais s'approfondit avec la critique.

Qualisigne, sinsigne, légisigne

Tout d'abord, les aspects que prend le signe lorsque considéré en soi sont : le qualisigne, le sinsigne et le légisigne[14]. Ces trois aspects sont aussi nommés, d'une manière plus familière au lecteur contemporain : ton, *token* et type (CP 4.537, 1906). Un signe est un *qualisigne* lorsqu'il présente en soi une simple qualité et que c'est cette qualité particulière qui rend le signe signifiant. Ainsi, un échantillon de couleur peut représenter une couleur parce qu'il possède la qualité d'être de cette couleur. Un signe qui, d'autre part, remplit sa fonction de lieutenance parce qu'il est un existant actuel capable de tenir lieu de signe est un *sinsigne*. L'échantillon de couleur, en tant qu'objet singulier remplissant sa fonction de signe dans la comparaison de couleurs, est donc aussi un sinsigne. Par ailleurs, si le signe tient lieu de signe parce qu'il possède en soi le caractère d'une loi générale, il est alors un *légisigne*. Un code numérique qui représente une couleur dans un catalogue, par exemple, constitue un légisigne tenant lieu de cette couleur. L'instance de ce code que l'on prend en note sur un papier est pour sa part à son tour un sinsigne. Les qualisignes et les légisignes s'instancient donc en des sinsignes, des instances singulières de signes. La manifestation singulière d'un légisigne est aussi appelée plus spécialement une *réplique* ou *instance*.

[14] « A *Qualisign* is a quality which is a sign. [...]
A *Sinsign* (where the syllable *sin* is taken as meaning "being only once", as in *single*, *simple*, Latin *semel*, etc.) is an actual existent thing or event which is a sign. [...]
A *Legisign* is a law that is a sign. This law is usually established by men. Every conventional sign is a legisign. It is not a single object, but a general type which, it has been agreed, shall be significant. » (EP2 : 291, 1903, « Nomenclature and Divisions of Triadic Relations »)

Icône, index, symbole

Les aspects que prend le signe dans sa relation à l'objet sont : l'icône, l'index et le symbole (EP2 : 291-2, 1903). Cette division est la plus connue des trichotomies peircéennes et la plus utilisée par l'auteur même dans les illustrations de sa sémiotique, sans doute parce qu'elle peut être interprétée comme caractérisant la relation du signe à son objet dans le monde, sous un mode plus familier donc, ce qui intéresse davantage les interprétations plus matérielles du langage et des signes. Cependant, la conception de Peirce est avant tout strictement formelle, la corrélation du langage et du monde impliquant une prise de position métaphysique, qui constitue plutôt un développement ultérieur de la réflexion philosophique et n'est pas essentielle à la sémiotique en tant que critique logique. Peirce souligne lui-même que, dans la relation formelle de la triade, l'objet est l'objet *du* signe : « *its* object, ITS object, mind you » (EP2 : 380, 1906). C'est le rôle que joue une composante dans la relation triadique qui la définit comme telle.

L'*icône* est dès lors l'aspect que prend le signe lorsqu'il entretient, au moins potentiellement, un rapport de lieutenance avec un objet en vertu d'une certaine similarité de caractère[15]. Qu'une chose, d'ailleurs, puisse être représentée par une icône garantit la possibilité logique de leur forme commune. Lorsque ce caractère est une qualité propre à la fois au signe et à l'objet, l'icône est appelée plus spécifiquement une *image*. Quand, autrement, le caractère similaire est une relation ou un ensemble de relations propres à la structure interne du signe et à celle de l'objet, le signe est appelé un *diagramme*[16]. Ce type d'hypo-icône nous intéressera tout

---

[15] « An *Icon* is a sign which refers to the Object that it denotes merely by virtue of characters of its own and which it possesses, just the same, whether any such Object actually exists or not. » (EP2 : 291, 1903, « Nomenclature and Divisions of Triadic Relations »)

[16] « [Hypoicons] which represent the relations, mainly dyadic, or so regarded, of the parts of one thing by analogous relations in their own parts, are *diagrams* [...] » (EP2 : 274, 1903, « Sundry Logical Conceptions »)

particulièrement dans la suite de notre étude, car la pensée scientifique, qui se base sur le raisonnement nécessaire des mathématiques en tant que calcul et se développe à travers la critique logique, est essentiellement diagrammatique. C'est donc le jeu des perspectives (phanéroscopiques, sémiotiques) propre au diagramme qui donnera la clé première de l'analyse et de l'interprétation de la notation logique. Le dernier sous-type d'icône, la *métaphore*, est l'aspect que prend le signe dans sa relation à l'objet, lorsque la similarité entre le signe et l'objet vient de ce que tous deux font référence à un troisième terme commun. Ces sous-types de signe sont ainsi définis par la spécification des aspects de la relation de signification propre à l'icône, en ajoutant de nouvelles distinctions phanéroscopiques, plus fines parce que basées sur des principes épistémologiquement antérieurs (les catégories universelles) et non sur des distinctions métaphysiques supplémentaires.

D'autre part, le signe est un *index* lorsqu'il entre dans une certaine relation existentielle avec l'objet[17], soit-elle du moins potentielle[18]. L'exemple typique est une girouette qui indique la direction du vent parce qu'elle entre en réaction avec celui-ci. Mais l'index peut aussi être compris à un niveau plus strictement formel. Ainsi, la copule, c'est-à-dire selon Peirce l'élément de la grammaire logique que le terme « est » exprime par médiation symbolique (en tant que verbe conjugué de la langue française), par exemple dans « Socrate est sage », est un index qui contribue à la jonction des répliques de mots « Socrate » et « sage » en montrant la relation qui subsiste entre les deux. Elle est le terme « est » en tant que celui-ci marque simplement le lien qui émerge lors de la concaténation des autres termes de la proposition. La copule est de la sorte un index joint à une icône implicite, c'est-à-dire potentielle, le diagramme de la relation entre « Socrate » et « sage », et c'est en cela

[17] « An *Index* is a sign which refers to the Object by virtue of being really affected by that Object. » (EP2 : 291, 1903, « Nomenclature and Divisions of Triadic Relations »)

[18] « Namely, although an index, like any other sign, only functions as a sign when it is interpreted, yet though it never happen to be interpreted, it remains equally fitted to be the sign that would be if interpreted. » (EP2 : 318, 1904, « New Elements »)

qu'elle aide à réaliser la jonction entre ces deux mots[19]. C'est ce genre de signe faisant ressortir la diagrammaticité dans le langage (donc un signe de seconde intention, portant sur un autre signe), que Peirce appelle la *syntaxe* du langage[20].

Cette interprétation peut sembler similaire à celle de l'identité dans la *Begriffsschrift* de Frege, où le signe d'identité s'applique aux expressions et montre qu'elles dénotent un même objet (Frege 1879 : 13-5). L'interprétation de Peirce s'opposerait alors à l'interprétation plus tardive de Frege (1962 (SuB, 1892)), qui différencie le sens et la référence, le signe d'identité montrant à ce moment que les divers sens d'expressions différentes portent sur un même objet. Mais il faut tenir compte que l'analyse du signe chez Peirce ne concerne ici que l'aspect que prend le signe dans sa relation à l'objet, que nous verrons composé plus tard avec l'aspect qu'il prend dans sa relation à l'interprétant. Nous reviendrons sur ce point dans la suite de cette section, de même que dans l'analyse des notations, notamment dans l'interprétation de la grammaire des graphes existentiels. Retenons seulement pour l'instant que l'objet de l'index peut lui-même être un signe qui, comme réplique, peut aussi être un existant actuel. Les modalités d'être ne sont pas à l'origine déterminantes dans la constitution du signe, mais en caractérisent les réalisations particulières.

Le signe est finalement un *symbole* quand sa relation à l'objet est établie par un troisième terme, un interprétant donc qui ne fait pas que donner une perspective sur la relation entre le signe et son objet, mais l'établit même, par son propre pouvoir

---

[19] « There will be no objection to a generalization which shall call the mark of junction a *copula*, provided it be recognized that, in itself, it is not general, but is an *index*. [...] But how is this index to signify the connection? In the only way in which any index can ever signify anything; by involving an *icon*. This sign itself is a connection. » (EP2 : 310, 1904, « New Elements ») Une difficulté dans la compréhension de ce point peut venir de ce que l'on doit abstraire le rôle logique des éléments grammaticaux de la langue usuelle, dont les mots sont avant tout des symboles. Le verbe « être », comme terme de la langue usuelle, est ce que nous appellerons un légisigne symbolique onomatique, qui renvoie dans sa compréhension (par le truchement d'un contexte psychique et langagier) à un légisigne indexical sémique. Sa fonction purement logique est de désigner ultimement, en tant qu'index de seconde intention, le diagramme de la relation entre les autres termes de la proposition.

[20] « Finally, our conclusions require that the proposition should have an actual *Syntax*, which is to be the Index of those elements of the fact that correspond to the Subject and the Predicate. » (EP2 : 282, 1903, « Sundry Logical Conceptions »)

médiateur[21]. Tout signe simple ou complexe institué par l'usage, tel un mot ou une langue, considéré en soi sans tenir compte de sa relation à d'autres éléments contextuels, est un symbole. Les mots dans le contexte d'une phrase peuvent toutefois également prendre un aspect autre que symbolique, tel le nom propre qui joue le rôle d'un index (ou la copule dans l'illustration de l'index ci-dessus) ; et de même pour la langue qui peut, d'une certaine façon, jouer le rôle de métaphore du statut social (par exemple, les titres en français au menu d'un restaurant chic, dans un pays non francophone). La logique moderne a été formalisée surtout dans le sens du développement d'une plus grande symbolicité, ce qui constitue un point important de notre critique des notations logiques. Cependant, la notation, même fondée sur une analyse adéquate de la grammaire en ses éléments aussi bien iconiques, qu'indexicaux et symboliques, ne se développe pleinement qu'en utilisant de plus en plus d'éléments symboliques, qui permettent d'interpréter toujours davantage le formalisme logique, dans les seules limites de nos capacités intellectuelles.

Sème, phème, delôme

Les aspects que prend le signe dans sa relation à l'interprétant sont : le sème, le phème et le delôme[22]. Le *sème* est l'aspect que prend le signe lorsque l'interprétant

---

[21] « A *Symbol* is a sign which refers to the Object that it denotes by virtue of a law, usually an association of general ideas, which operates to cause the Symbol to be interpreted as referring to that Object. » (EP2 : 292, 1903, « Nomenclature and Divisions of Triadic Relations »)

[22] Aussi nommés plus couramment dans le commentaire contemporain (Savan (1988), Liszka (1996), Short (2007)) : rhème, dicisigne et argument. La terminologie que nous utilisons est une révision plus tardive par Peirce (CP 4.538, 1906, « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism » ; EP2 : 481, 490, 1908, « Excerpts from Letters to Lady Welby ») de la terminologie en ce moment plus commune (qui provient quant à elle des textes majeurs de la sémiotique de 1903). D'autres expressions proposées par l'auteur sont : signe simple, signe double et signe triple ; signe substitutif, signe informationnel (ou quasi-proposition) et signe rationnellement persuasif ; sumisigne, dicisigne et suadisigne (EP2 : 275, 1903, « Sundry Logical Conceptions »). Ces types de signe sont des généralisations des catégories grammaticales traditionnelles du terme, de la proposition et de l'argument.

le représente comme signe d'une possibilité[23]. Il peut lui-même consister en un sujet ou un prédicat logiques, qui, d'une part, dans leur relation à l'objet, au sein d'une proposition, sont respectivement un index et une icône (EP2 : 164, 1903, à partir de la notion de « terme »), mais, d'autre part, en tant que simples mots, sont des symboles. Le prédicat et le sujet logiques sont donc des sous-types de sème, que nous appellerons aussi respectivement sème rhématique (ou rhème) et sème onomatique (ou onome)[24]. Dans la grammaire pure, le prédicat est plus précisément un légisigne iconique sémique et le sujet, un légisigne indexical sémique. La distinction entre sème rhématique et sème onomatique est surtout utile dans l'application de la grammaire logique, par exemple à une langue usuelle ou une notation particulière, lorsqu'un sème peut aussi être un symbole, qui renvoie lui-même à une icône, pour le symbole rhématique, ou à un index, pour le symbole onomatique. À cela, Peirce ajoute la distinction médiévale entre catégorèmes et syncatégorèmes, que nous

---

[23] « By a *Seme*, I shall mean anything which serves any purpose as a substitute for an object of which it is, in some sense, a representative or Sign. » (CP 4.538, 1906, « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism »)

[24] On trouve l'expression ῥῆμα déjà chez Platon et Aristote, où elle désigne à la fois le verbe « être » et le prédicat qui lui est adjoint, dans leur ensemble. Aristote analyse plus avant le ῥῆμα en un κατηγορουμήνων (prédicat) et le verbe ἔστι (« est »), sans désigner celui-ci par une expression générale ; cf. Platon, *Cratyle* 425a, 431b-c, *Sophiste* 261c-263d ; Aristote, *De Int.* chap. 2, 3, *An. pr.* 46a, *Metaph.* 1017a. Le terme « copule » vient pour sa part de la grammaire latine ultérieure (des grammairiens médiévaux à la suite de Boèce, cf. Rosier-Catach (2009)). Les expressions utilisées suivent donc l'étymologie grecque (d'après le dictionnaire Bailly (1901)) : le sème, de σῆμα, « tout ce qui fait reconnaître ou distinguer qqe ch. », dont le prédicat et le sujet logiques (ῥῆμα/ὄνομα) ; le phème, de φήμη, « ce qui est montré » ; le delôme, de δήλωμα, « moyen de faire connaître ». Le rhème (ῥῆμα) est plus spécifiquement « tout ce qu'on dit//le verbe (p. opp. à ὄνομα) » ; et l'onome (ὄνομα), un « nom ».
Il est par conséquent préférable d'utiliser l'expression « sème » plutôt que « rhème » pour le genre de signe dont le sujet logique (onome) et le prédicat logique (rhème) sont des espèces, suivant sans doute de la sorte la motivation étymologique de la terminologie plus tardive de Peirce. L'expression « rhème » dans la terminologie de 1903 désigne de toute façon clairement l'espèce de sème rhématique, plutôt que le genre sémique lui-même (remarquez « *qualitative* ») : « A *Rheme* is a sign which, for its Interpretant, is a sign of qualitative possibility, that is, is understood as representing such and such a kind of possible Object. » (EP2 : 292, 1903, « Nomenclature and Divisions of Triadic Relations ») Peirce utilise aussi expressément le terme « onome » ou « *onoma* » au sens de sujet logique ou index d'un individu indéfini (EP2 : 286, 1903, « Sundry Logical Conceptions » ; MS 491 : 3-4, non daté, cité par Pietarinen (2006 : 7)).
Le sème de Peirce est par ailleurs une notion distincte du sème de Greimas (1966) ou de Saussure (2002), puisque ces autres conceptions ne sont pas basées sur le même modèle de signe. Mais, dans tous les cas, le sème désigne une unité minimale de signification.

comprendrons, pour les premiers, comme des sèmes de première intention et, pour les seconds, comme des sèmes de seconde intention, dépendant pour leur sens des premiers.[25]

Les sèmes rhématique et onomatique correspondent en quelque sorte à la fonction et à l'argument de Frege. Il faut toutefois nuancer cette correspondance, car, dans la théorie de Peirce, le sème est un aspect que prend le signe dans sa relation à l'interprétant final, tandis que chez Frege, la fonction et l'argument sont deux types de *Bedeutung*, de référence. Les aspects que prend le signe dans son rapport à l'objet, dans la grammaire de Peirce, sont pour leur part l'icône, l'index et le symbole, les deux premiers pouvant se manifester, comme sèmes non analysés, par le truchement du symbolisme. La fonction fregéenne est plus exactement conçue comme un élément insaturé (nous comprenons, au sens indéterminé), c'est-à-dire qu'elle doit être accompagnée d'un argument, quant à lui saturé (au sens déterminé), pour avoir un sens complet ; la fonction est dite « remplie » par l'argument (Frege 1962 (1891), « Funktion und Begriff »). Le concept est lui-même une fonction à un argument et la relation, une fonction à plusieurs arguments. Le sème rhématique en général ne correspond pas exactement au terme de la logique traditionnelle, influencée sur ce point par la grammaire des langues usuelles, car comme prédicat logique il comprend en soi la copule — ou plutôt, la copule ne s'en distingue pas. Cependant, le symbole (sémique) rhématique correspond d'une certaine façon à la fonction de Frege, car il est pareillement indéterminé, alors que l'argument équivaudrait à l'index en tant que sujet logique, élément signifiant simple et au sens déterminé. La nuance est ici que les symboles rhématiques et onomatiques sont des signes de seconde intention (syncatégorèmes), tandis que les icônes comme prédicats et les indices comme sujets sont des signes de première intention (catégorèmes) ; et les fonctions et arguments de

---

[25] « A Categoreumatic term (Duns Scotus, but probably earlier) is any term fit to be the subject or predicate of a proposition. A *Syncategoreumatic Term* or *Syncathegreuma* (*Summulae*) is a Symbol going to make up a *Categoreumatic* Term. The Copula seems to fall between two stools, being neither categoreumatic nor syncategoreumatic. » (EP2 : 286, 1903, « Sundry Logical Conceptions »)

Frege étant plutôt des références dénotées par des symboles, l'analyse de l'argument fregéen comme élément saturé est par conséquent dans le détail défectueuse. Un autre point de concordance entre le prédicat et le sujet logiques comme symboles sémiques, et la fonction et l'argument, consiste en ce qu'ils contribuent tous au sens de la proposition, comme expression d'une valeur de vérité, objet de la représentation ; ce qui suppose une certaine compositionnalité du sens.

Le signe est, pour poursuivre, un *phème* (ou dicisigne, signe dicent), lorsque l'interprétant lui fait correspondre une situation déterminée dans la réalité, un fait[26], qui peut se révéler vrai ou faux[27]. Ce type de signe rend donc sa propre signification explicite en montrant quel objet lui correspond, l'objet étant lui-même articulé tel un fait. Un phème à la signification déterminée possède une valeur de vérité déterminée, bien que son sens puisse aussi rester indéterminé et sa valeur de vérité une possibilité qu'il resterait éventuellement à actualiser. Bien que les différents aspects du signe et les types conséquents de leur composition prennent tous part à la signification, la proposition (un phème) est l'élément central d'une logique dont le but est de critiquer le raisonnement en fonction d'une norme définie de la vérité.

Il convient de comparer ici les conceptions de la proposition logique de Frege et Peirce, en examinant ce qu'ils considèrent être l'analyse logique ultime de cet élément grammatical. Les deux auteurs s'entendent sur ce que le raisonnement nécessaire ou l'expression de la pensée exacte se laisse analyser en une forme générale, qui constitue le point ultime de l'analyse logique. Chez Frege, c'est dans sa

---

[26] « A *Dicent Sign* is a sign which, for its Interpretant, is a sign of actual existence. » (EP2 : 292, 1903, « Nomenclature and Divisions of Triadic Relations »)
« What we call a "fact" is something having the structure of a proposition, but supposed to be an element of the very universe itself. » (EP2 : 304, 1904, « New Elements »)
« By a *Pheme* I mean a Sign which is equivalent to a grammatical sentence, whether it be Interrogative, Imperative, or Assertory. In any case, such a Sign is intended to have some sort of compulsive effect on the Interpreter of it. » (CP 4.538, 1906, « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism »)

[27] « [...] a Dicisign is either true or false, but does not furnish reasons for being so. » (EP2 : 275, 1903, « Sundry logical Conceptions ») Voir aussi la définition classique de la proposition chez Aristote, *De interpretatione*, IV, 17a.

critique de l'analyse grammaticale du langage ordinaire, où les propositions sont analysées en sujet et prédicat, qu'il formule cette idée ; ainsi dans le passage suivant :

> Tout ce qui est nécessaire à une conclusion correcte est entièrement exprimé, mais ce qui n'y est pas nécessaire n'est le plus souvent pas indiqué ; *rien n'est laissé à deviner*. En cela, je suis entièrement l'exemple du langage formulaire mathématique dans lequel sujet et prédicat ne peuvent être distingués qu'en forçant. On peut imaginer une langue dans laquelle la proposition « Archimède périt lors de la prise de Syracuse » serait exprimée de la manière suivante : « la mort violente d'Archimède lors de la prise de Syracuse est un fait ». Certes, si l'on veut, il est aussi possible de distinguer ici le sujet du prédicat, mais alors le sujet contient tout le contenu, et le prédicat a pour seul but de le présenter comme jugement. *Une telle langue n'aurait qu'un seul prédicat pour tous les jugements, à savoir : 'est un fait'*. On voit qu'il n'y est pas question de sujet et de prédicat dans le sens ordinaire. *Notre idéographie est une telle langue et le signe* $\vdash$ *est son prédicat commun à tous les jugements.* (Frege 1879 (1999), *Idéographie*, § 3, trad. C. Besson)

Cette citation vient de la *Begriffsschrift* (1879) et à l'époque Frege distinguait encore clairement le jugement de son contenu. Dans sa notation, le jugement est exprimé par un graphe qui est situé à gauche de l'expression de contenu et se déploie à la verticale. Ce graphe exprime la forme logique du jugement, c'est-à-dire que le contenu est syntaxiquement consistant (bien formé) et jugeable, que telles opérations lui sont appliquées (négation, condition, quantification) et que le tout est asserté (c'est-à-dire affirmé, explicitement tenu pour vrai). Le contenu, quant à lui, se déploie à l'horizontale, à droite des traits de jugement, et fait référence à un fait ou un ensemble de faits.

Plus tard, dans les *Grundgesetze* (1893, 1903), et c'est un développement majeur de l'écriture conceptuelle, le contenu jugeable sera distingué en sens et référence et la dénotation de l'expression de contenu sera plutôt interprétée en termes d'extension, la proposition comme expression faisant alors référence à l'une des deux valeurs de vérité, le vrai ou le faux, objets de la dénotation. Donc, l'analyse logique chez Frege réduit le raisonnement nécessaire à une forme logique, « prédiquée » d'un certain contenu (factuel) et plus tard, suite à la réinterprétation de la relation de signification (en termes de sens et référence), d'une certaine extension de valeurs de vérité. L'analyse est formelle et ultimement extensionnelle.

Chez Peirce maintenant, on trouve aussi l'idée d'une analyse logique ultime, qui est formulée dans une critique similaire de l'analyse grammaticale du langage ordinaire. Les deux passages cités ci-après en rendent compte :

> What is the general? The Aristotelian definition is good enough. It is [« That which is by its nature predicated of a number of things », *De Interpretatione*, VII]. When logic was studied in a scientific spirit of exactitude it was recognized on all hands that all ordinary judgments contain a predicate and that this predicate is general. There seemed to be some exceptions of which the only noticeable ones were expository judgments such as *Tully is Cicero.* But the Logic of Relations has now reduced logic to order, and it is seen that *a proposition may have any number of subjects but can have but one predicate which is invariably general.* Such a proposition as *Tully is Cicero* predicates the general relation of identity of Tully and Cicero. (EP2 : 208, 1903, « The Nature of Meaning » ; la citation d'Aristote est donnée dans la traduction de l'éditeur, nous soulignons le texte plus loin.)
>
> For every proposition whatsoever refers as to its subject to a singular actually reacting upon the utterer of it and actually reacting upon the interpreter of it. All propositions relate to the same ever-reacting singular; namely, to the totality of all real objects. (EP2 : 209, 1903, « The Nature of Meaning »)

Ces citations sont tirées d'un texte où Peirce développe entre autres sa théorie de la perception et il emploie donc les notions traditionnelles de jugement, sujet et prédicat logiques, en interprétant le jugement comme un acte mental. Le jugement complètement analysé est constitué de plusieurs sujets (déterminés) et d'un seul prédicat général, ultimement le prédicat « être », que Peirce décrit ici, d'après Aristote, comme ce qui par sa nature est prédiqué de plusieurs choses[28]. Le prédicat est général, mais les sujets eux sont déterminés, réfèrent à des entités singulières (individus), dont l'ensemble constitue la totalité des objets réels. Si l'on se défait des connotations métaphysiques liées aux notions utilisées pour remonter à un niveau

[28] Ce qui constitue une autre fonction du terme « être » que dans notre illustration précédente de l'index, où ce terme était un symbole renvoyant à un index de seconde intention, faisant lui-même ressortir le diagramme de la relation entre le sujet et le prédicat, dans la proposition « Socrate est sage ».

plus strictement logique de l'analyse, on pourrait dire, en termes sémiotiques, que la proposition (un *phème*) est un symbole constitué, dans son analyse logique ultime, de plusieurs indices (les sujets logiques) et d'une icône représentant leurs relations mutuelles (le prédicat logique, général). Nous reprendrons les analyses de Frege et Peirce dans la critique des notations, car c'est dans la représentation formelle de la proposition analysée que la conception de cette dernière est approfondie plus avant.

Le dernier aspect que prend le signe dans l'ordre de la typologie est le *delôme* ou *argument*, c'est-à-dire lorsque le signe est déterminé par son interprétant à agir lui-même à son tour en tant qu'élément médiateur[29]. L'argument fournit une règle d'interprétation des signes auxquels il se rapporte, permettant ainsi de juger de la vérité d'une proposition ou de la validité d'un autre argument. On peut penser ici aux règles d'inférence et aux principes méthodeutiques de la logique contemporaine. Réduite au point de vue propositionnel, sans son aspect normatif, la série de propositions qui constitue un argument est appelée la *conséquence*[30]. La grammaire spéculative distingue trois types d'inférence élémentaires, de formes argumentatives différentes : l'abduction, l'induction et la déduction, qui entrent en composition dans le processus du raisonnement.

L'*abduction* est un type d'inférence qui consiste en la formulation d'une hypothèse. Elle suggère que si telle proposition est adoptée comme règle, alors tel cas s'ensuit légitimement de tel résultat observé. C'est le seul type d'inférence qui introduit une nouvelle idée (la règle) dans les antécédents du raisonnement. Peirce en présente le schéma d'inférence comme suit, en deux formulations différentes :

---

29 « An *Argument* is a sign which, for its Interpretant, is a sign of law. » (EP2 : 292, 1903, « Nomenclature and Divisions of Triadic Relations »)
« It [a *Delome*] is a Sign which has the Form of tending to act upon the Interpreter through his own self-control, representing a process of change in thoughts or signs, as if to induce this change in the Interpreter. » (CP 4.538, 1906, « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism »)

30 « [...] *consequence*, a word that the precise terminology of logic reserves for the proposition expressing the relation of any consequent to its antecedent, or for the fact which this proposition expresses. » (EP2 : 305, 1904, « New Elements »)

Rule.—All the beans from this bag are white.

Result.—These beans are white.

.·. *Case.*—These beans are from this bag.

(W3 : 326, 1878)

The surprising fact, *C*, is observed;

But if *A* were true, *C* would be a matter of course.

Hence, there is reason to suspect that *A* is true.

(EP2 : 231, 1903)

L'*induction* donne plutôt force de loi à une régularité, exprimée dans les propositions de l'antécédent. Elle établit ainsi une règle permettant de rendre compte d'un certain résultat observé dans un certain cas. Elle dit que cette règle est opérante dans le cas actuel considéré selon le résultat observé. Peirce l'illustre à l'aide de l'exemple suivant :

Case.—These beans are from this bag.

Result.—These beans are white.

.·. *Rule.*—All the beans from this bag are white.

(W3 : 325, 1878)

La *déduction* élabore pour sa part les conséquences nécessaires d'une hypothèse. Elle montre qu'un certain résultat doit nécessairement s'ensuivre d'un certain cas selon une certaine règle. Peirce donne l'exemple suivant d'une déduction :

Rule.—All the beans from this bag are white.

Case.—These beans are from this bag.

.·. *Result.*—These beans are white.

(W3 : 325, 1878)

L'abduction et l'induction sont des types d'inférence ampliatifs, en ce qu'elles augmentent la quantité d'information véhiculée par les signes, en introduisant une règle. La déduction est plutôt un type d'inférence explicatif, elle modifie l'extension ou la compréhension des signes sans changer la quantité d'information véhiculée. Le processus du raisonnement est essentiellement composé de ces trois types d'inférence. Le raisonnement scientifique, en particulier, commence typiquement par une abduction, qui est justifiée lorsqu'à partir de l'hypothèse suggérée la déduction peut tirer comme conséquences des prédictions, qui seront à leur tour vérifiées dans l'expérience par induction. Il y a d'autres types de raisonnement, par exemple l'extension, la restriction, la généralisation (ou *ascent*) et la spécification (ou *descent*), mais ceux-ci sont dérivés des trois types élémentaires (W2 : 84, 1867, « Upon Logical Comprehension and Extension »). La logique telle que nous la considérons dans ce travail et, de façon générale, en logique contemporaine, est déductive.[31]

1.2.2.2. La composition des catégories

Les différents types de signe des trois trichotomies se composent à leur tour entre eux pour former des classes de signe, dont les possibilités de combinaison sont limitées par le motif triadique des catégories universelles et leur ordre de dépendance non réciproque. Plusieurs aspects d'une même trichotomie peuvent qualifier une chose qui sert de signe, mais cette chose tient alors lieu de plusieurs signes. Un seul type d'aspect d'une trichotomie à la fois peut en effet caractériser un signe, puisque chaque trichotomie renvoie à un aspect que prend le signe selon sa situation dans la triade. Ce ne serait plus *une* triade si l'une des composantes pouvait se présenter sous plusieurs aspects différents, à partir du même point de vue relationnel (la même

---

[31] Les deux citations suivantes récapitulent l'ensemble de la dernière trichotomie, de l'aspect que prend le signe dans sa relation à l'interprétant :
« Symbols, and in some sort other Signs, are either *Terms*, *Propositions*, or *Arguments*. A *Term* is a sign which leaves its Object, and a fortiori its Interpretant, to be what it may. A *Proposition* is a sign which distinctly indicates the Object which it denotes, called its *Subject*, but leaves its interpretant to be what it may. An *Argument* is a sign which distinctly represents the Interpretant, called its *Conclusion*, which it is intended to determine. That which remains of a Proposition after removal of its Subject is a Term (a rhema) called its Predicate. » (CP 2.95, 1902, « Minute Logic »)
« The *Symbol*, or relatively genuine form of Representamen, divides by Trichotomy into the Term, the Proposition, and the Argument. The Term corresponds to the icon and to the degenerate index. It does excite an icon in the imagination. The proposition conveys definite information like the genuine index, by having two parts of which the function of the one is to indicate the object meant while that of the other is to represent the representamen by exciting an icon of its quality. The argument is a representamen which does not leave the interpretant to be determined as it may by the person to whom the symbol is addressed; but separately represents what is the interpreting representation that it is intended to determine. This interpreting representation is, of course, the conclusion. » (EP2 : 164, 1903, « The Categories Defended »)

perspective dans la relation, mais plusieurs aspects de la signification). Des trichotomies et de leurs règles de composition résultent dix classes de signe légitimes (EP2 : 296, 1903, que nous ajustons selon la terminologie plus tardive de l'auteur et en ajoutant la distinction d'espèces de sème, rhématique ou onomatique) :

1. les *qualisignes* iconiques sémiques ;
2. les *sinsignes iconiques* sémiques ;
3. les *sinsignes indexicaux sémiques* ;
4. les *sinsignes* indexicaux *phémiques* ;
5. les *légisignes iconiques* sémiques (rhématiques) ;
6. les *légisignes indexicaux sémiques* (onomatiques) ;
7. les *légisignes indexicaux phémiques* ;
8. les légisignes *symboliques sémiques* (rhématiques ou onomatiques)[32] ;
9. les légisignes *symboliques phémiques* ;
10. les légisignes symboliques *arguments* (ou delômes).

Les italiques indiquent, selon l'ordre de la triade, les aspects dominants de chaque classe, auxquels peuvent être réduites les désignations. Cette table aide pratiquement à repérer les types de signe lors de l'analyse, mais c'est en général à des aspects particuliers de chaque signe que l'étude s'attardera (l'aspect diagrammatique, indexical, sémique, etc.). De plus, la typologie pourrait être complexifiée plus avant en considérant les différents aspects que prennent l'objet (immédiat, dynamique) et l'interprétant (immédiat, dynamique, final), mais encore une fois ce sont ces aspects eux-mêmes qui nous intéresseront plutôt que les éventuelles classes supplémentaires que l'on pourrait distinguer. Peirce avait aussi commencé dans ses écrits plus tardifs à caractériser les types de signe selon une approche matérielle, en distinguant par exemple des interprétants émotionnel, énergique et logique (EP2 : 409-18, 1907). Nous n'aborderons pas ces distinctions ici, car elles auraient alors rapport avec la

---

[32] On comprend que, dans le cadre d'un phème, un légisigne iconique sémique est forcément rhématique, un légisigne indexical sémique forcément onomatique, mais qu'un légisigne symbolique sémique peut s'avérer rhématique ou onomatique, une fois sa fonction sémique déterminée.

doctrine du pragmatisme et ses conséquences épistémologiquement ultérieures à la sémiotique, l'approche matérielle impliquant, tel que noté plus haut, un certain engagement métaphysique.

Critique générale

Sur ce, on peut comparer la façon dont Peirce et Frege élaborent chacun leurs typologies de catégories grammaticales de la logique, de manière à en distinguer les orientations et la différence qui en résulte dans l'application. Peirce développe avant tout une typologie des signes, puis introduit des distinctions entre différents types d'objet (immédiat, dynamique) et d'interprétant (immédiat, dynamique, final), sans élaborer pleinement la typologie des signes élargie qui en serait conséquente. Il se base pour cela sur une théorie des catégories universelles et certains principes mathématiques, fournissant un motif formel à une définition du signe et à une logique des relations, qui permettent à leur tour d'élaborer la typologie.

Frege, pour sa part, distingue différents types de signe, de sens et de référence, mais n'élabore pas sa typologie de manière systématique. Les différents types de signe, sens et référence sont distingués dans une analyse des expressions mathématiques et du langage ordinaire. Son but n'est d'ailleurs pas non plus de développer la logique pour elle-même, en tant que critique du raisonnement, mais de fournir un formalisme logique, comprenant une caractéristique (la notation) et un calcul (un système déductif axiomatisé), qui puisse servir de fondement à l'étude des mathématiques et, en premier lieu, de l'arithmétique. Son but est donc avant tout d'appliquer la logique à l'étude des mathématiques, tandis que chez Peirce, le but de la logique est d'abord de comprendre le raisonnement logique en soi, pour éventuellement contribuer à l'étude des sciences en général.

Néanmoins, les distinctions de Frege restent pertinentes et valent la peine d'être présentées. Nous pouvons ainsi noter que, parmi les éléments de la logique qui seraient des types de signe ou d'expression[33], l'auteur distingue, en tant que signes, les noms (et groupes de mots) qui tiennent lieu de noms propres (dont la proposition, qui serait le nom d'une valeur de vérité, cf. Frege 1962 (SuB, 1892 : 34)), de même que les simples caractères ; et en tant qu'expressions, les expressions de toutes sortes de dénotations, fonctions aussi bien qu'objets. Parmi les éléments qui seraient des sens, il ne distingue vraiment que les pensées (*Gedanken*) en général, bien qu'il considère également, dans la troisième de ses « Logische Untersuchungen » (1923-1926), la composition des pensées et donc différents genres de pensées composées : ce qu'on pourrait nommer la conjonction, la négation de la conjonction (négation disjointe, incompatibilité), la négation conjointe (rejet), la disjonction, la négation de l'implication et l'implication. Des éléments qui seraient finalement des références, il distingue la fonction, dont le concept et la relation, et l'argument ou l'objet, dont la valeur de vérité et le parcours de valeurs. De toute évidence, ces distinctions ne sont pas aussi exhaustives que la typologie des signes de Peirce, bien qu'elles explorent d'autres aspects de la logique que cette dernière et ce d'une manière quelque peu différente. Nous résumons les distinctions de Frege dans le schéma suivant :

- Signe (*Zeichen*)
  nom, proposition
  groupe de mots
- Expression (*Ausdruck*)

- Sens (*Sinn*)
  - Pensée (*Gedanke*)
  - Composition de pensées
    conjonction
    disjonction
    implication
    négation de composé

- Référence (*Bedeutung*)
  - Fonction
    concept
    relation
  - Argument, objet
    valeur de vérité
    parcours de valeurs.

---

[33] L'expression dénote un objet ou une fonction (concept, relation) et le signe, seulement un objet. L'assertion est un type d'expression. Le terme « expression » est donc plus général que le terme « signe ». Ce dernier est défini explicitement de cette manière dans « Über Sinn und Bedeutung » (Frege 1962 (1892 : 27)), tandis que le sens précis du premier peut être saisi dans l'usage que fait Frege de ce terme à travers ses différents écrits (dont en particulier Frege 1962 (SuB 1892 : 27 ff.)).

En étudiant la logique, Frege est donc motivé avant tout par une de ses applications et il développe son formalisme en conséquence. Les corrélats de la relation de signification sont de la sorte déjà particularisés, ce qui révèle un problème méthodologique dont la source est une conception sous-jacente de la logique, problème qui concerne d'ailleurs aussi bien Peirce que Frege. Ce problème de méthode consiste en ce que chacun de ces auteurs veut abstraire, soit de la pensée de sens commun (la phanéroscopie, la *logica utens*), soit d'autres sciences particulières (les mathématiques, la grammaire des langues usuelles), une grammaire pure de la logique qui ne présuppose aucune ontologie, dusse-t-elle même être formelle. Le problème concerne donc la délimitation de la logique. L'entreprise de Frege est sur ce point troublée, car il concède que certaines expressions sensées puissent ne pas avoir de référence, ce qui brise le lien nécessaire entre les trois termes de la relation logique constituant la signification. De plus, il conçoit la valeur de vérité comme un objet (de l'expression qu'est la proposition), ce qui entraîne une réduction de l'intension des expressions signifiantes à l'extension logique de leurs valeurs de vérité (leur « parcours de valeur »). L'entreprise de Peirce est quant à elle rendue confuse en ce qu'il introduit des distinctions modales (possible, actuel, nécessaire), qui dépassent peut-être la simple *logica utens*, et sa logique présuppose une certaine conception de la vérité, qui relève de l'interprétation métaphysique (le plus clairement dans son exposé des aspects que prend le signe dans sa relation à l'interprétant). Malgré tout, le fait que les deux auteurs trébuchent sur ces points montre que le but de leurs analyses des expressions logiques est d'atteindre un niveau de la grammaire plus purement formel et plus proprement logique.

C'est en examinant brièvement les conceptions de la vérité de chacun des deux auteurs, en comparaison l'une avec l'autre, que nous pourrons montrer plus en détail comment se manifeste le problème de la délimitation du domaine de la logique, tel que la critique de premier niveau a déjà permis de le définir. Pour présenter la conception de la vérité de Peirce, sa conception pragmatiste de la vérité, on cite souvent un extrait de son texte de 1878, « How to Make Our Ideas Clear », suivant lequel :

> The opinion which is fated to be ultimately agreed to by all who investigate, is what we mean by the truth, and the object represented in this opinion is the real. (W3 : 273, 1878)

On s'imagine alors que la vérité est selon Peirce une conception déterminée à laquelle parviendrait dans les faits futurs la communauté des chercheurs, au bout d'un processus de recherche passant lui-même par des voies spécifiques[34]. Cependant, la conception idéale à laquelle les chercheurs parviendraient au bout d'un certain temps n'est pas une conception déterminée, mais une conception générale, comprenant entre autres la méthode générale qui permet d'y parvenir. La vérité est un concept général, à la signification indéterminée mais pourtant définie, en ce sens qu'il est donné comme une hypothèse de la conclusion (un *would-be*) à laquelle nous ferait parvenir la méthode générale de définition de la signification de nos conceptions.

De plus, en tant que concept général, la vérité est phénoménalement complexe, ce que montre le mieux l'une des tentatives de définition de l'auteur, destinée au *Century Dictionary* :

> Truth is that strength, that virtue in an idea, by which it is bound to triumph in the struggle for existence. (MS 1597)

Pour anticiper un peu sur la suite, les aspects phénoménaux qui caractérisent en ses fondements la vérité et qui sont ici distingués, sont le plus clairement explicités dans la notation des graphes existentiels et son interprétation « endoporeutique » (ici plus loin, en section 2.4.). La vérité est le concept général vers lequel tend la critique logique et son interprétation. Selon la définition citée ci-dessus, elle est en premier lieu une *force*, une *vertu*, donc d'un point de vue phanéroscopique une façon qu'a une idée de se présenter en soi et de s'imposer à la pensée, son mode d'être nécessaire. Dans la notation, la vérité tient à l'adéquation de la représentation graphique par rapport au raisonnement logique valide, qui se révèle par la nécessité avec laquelle

---

[34] Telle semble être l'interprétation commune chez plusieurs auteurs, dont Sellars (1967), Putnam (1990), Brandom (1994) et McDowell (1994).

s'impose la concordance entre la notation et le raisonnement. L'*idée tend*, d'autre part, vers la généralité à travers le raisonnement nécessaire et cette finalité caractérise sa rationalité propre, qui consiste à médier constamment au fil du raisonnement dans le sens de la généralité. L'interprétation de la notation aboutit ainsi à la formulation explicite d'une conception générale. Le processus est par ailleurs un *débat* entre plusieurs manières de développer le raisonnement dans la réalité actuelle. La notation est de la sorte interprétée en un sens pragmatiste, à travers plusieurs interprétations des graphes dans la méthode dite « endoporeutique » des graphes existentiels (ou sous ses différents aspects phénoménaux dans la grammaire type-théorétique constructive (section 3.2.1.), ou encore à travers plusieurs ramifications du dialogue dans les tableaux dialogiques (section 3.2.2.)). Ces différents aspects de la vérité sont explicités dans l'expression, la critique et l'interprétation des graphes et elle se trouve en quelque sorte manifestement réalisée lorsque la notation tient lieu effectivement d'un raisonnement nécessaire valide. La vérité dépend ainsi du développement de l'ensemble du système de la logique et de sa notation. On ne pourrait sans doute pas dire que la notation est nécessaire au développement et à la compréhension de la logique au sens le plus large, mais elle y contribue certainement en distinguant des aspects qui sinon passent inaperçus, contraints que nous sommes d'apprendre et de connaître à travers l'expérience que nous faisons de la réalité.

Chez Frege, en comparaison, la valeur de vérité (le vrai ou le faux) est un objet, la référence d'une proposition (Frege 1962 (SuB, 1892 : 34-5)). Le jugement nous fait passer de la pensée propre d'une proposition à sa valeur de vérité. La finalité est donc en quelque sorte dans la référence, l'objectif de l'expression sensée[35]. Cela

[35] « […] dans tout jugement […] le pas est franchi qui nous fait passer du niveau des pensées [*Gedanken*] au niveau des dénotations [*Bedeutungen*] (de l'objectif [*des Objektiven*]). » (Frege 1971 (1892) : 110), « Sens et dénotation », trad. C. Imbert) Voir aussi le passage suivant, un peu plus loin dans le même texte : « On pourrait voir dans le jugement le passage d'une pensée à sa valeur de vérité. » (Frege 1971 (1892) : 111) Le terme « objectif » désigne avant tout le caractère de l'objet, mais fait aussi référence à la finalité, puisque dans le jugement on passe de la pensée à l'objet. En français, on pourrait penser à l'*Objectif Lune*, qui n'est cependant pas rendu de la même manière en allemand (*Reiseziel Mond*).

s'oppose à la conception de Peirce selon laquelle il n'y a de finalité que dans l'interprétant (il n'y a pas d'objet final) et la vérité est un tel interprétant final[36]. L'ordre suivant lequel Frege présente intuitivement les éléments de la relation de signification : signe, sens et référence, nous l'indique bien ; tandis que l'ordre des corrélats de la triade fondamentale dans la grammaire spéculative suit le motif des catégories universelles : le signe Premier, l'objet Deuxième et l'interprétant Troisième.

Le jugement est de plus, chez Frege, conçu comme une analyse critique des différentes pensées qui composent la pensée de la proposition, pensée à laquelle est attribuée une valeur de vérité. Le deuxième trait qui caractérise la vérité, en plus du caractère objectuel de la valeur de vérité, est dès lors un principe de compositionnalité qui en régit la pensée et que Frege exprime de la sorte :

> Il suffit qu'une proposition prise comme un tout ait un sens : ses parties reçoivent par là même un contenu. (Frege 1969 (1884) : § 60, *Les fondements de l'arithmétique*, trad. C. Imbert)

Il faut que les pensées particulières qui composent la pensée globale réfèrent à des éléments de dénotation qui puissent effectivement être liés ensemble selon les lois de composition de la grammaire. Par exemple, une fonction, en soi insaturée, est remplie par un argument, qui la sature, et son sens reste incomplet tant qu'un argument ne la sature pas. Les pensées composées de pensées complètes, dont l'expression est une proposition et la référence une valeur de vérité, sont à leur tour dépendantes des valeurs de vérité de ces pensées composantes. Les pensées composantes sont elles-mêmes substituables *salva veritate*, selon le principe de Leibniz, que Frege formule de la manière suivante :

> Si dans une composition de pensées mathématiques on remplace une pensée par une pensée ayant même valeur de vérité, la composition de pensées ainsi obtenue a même valeur de vérité que la composition primitive. (Frege 1971 (1923-1926) : 234, « Recherches logiques — 3. La composition des pensées », trad. C. Imbert)

---

[36] Peirce critique, en passant, une conception de la vérité affiliée à celle de Frege, dans ses « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism » de 1906, où il dit : « Finally, and in particular, we get a Seme of that highest of all Universes which is regarded as the Object of every true proposition, and which, if we name it [at] all, we call by the somewhat misleading title of "The Truth." » (CP4.539)

Peirce ne formule pas explicitement ces deux principes, mais son analyse les présuppose, le plus clairement dans la logique des graphes existentiels, basée sur la grammaire spéculative de la sémiotique.

1.2.3. L'émergence de la notation

D'un point de vue sémiotique, la notation logique constitue une détermination spécifique du signe et son étude une application de la théorie des signes. La notation en tant que système formel est plus exactement une grammaire particulière effective de la logique. La spécification du signe sera ici analysée comme un type d'inférence complexe, composé d'une inférence déductive avec une part abductive. C'est-à-dire que le processus d'inférence par lequel est élaborée une notation logique suit des règles déductives de formation et de transformation des signes tout en leur ajoutant un caractère spécifique (la part abductive de l'inférence) que l'on ne retrouve pas dans le langage ordinaire, produit de l'expérience commune, ou dans le langage formel des mathématiques et de la grammaire spéculative épurée. C'est en étudiant plusieurs notations aux particularités sémiotiques différentes et en constatant la diversité des types de signe qui les composent que nous ferons ressortir ce qui caractérise les différents types de notation logique, de même que la notation logique en général, la distinguant ainsi des autres formes d'application du langage (ordinaire, formel, réalisations orales et écrites diverses). Mais la recherche des principes fondamentaux, qui permettent d'expliquer l'émergence de la notation logique au niveau sémiotique comme détermination spécifique du signe, nous ramènera, dans la perspective de la philosophie comme pensée de sens commun critique, au niveau de la phanéroscopie, la notation étant ultimement caractérisée par un jeu des perspectives phénoménales spécifique, une articulation et une accentuation des catégories universelles qui lui est propre.

1.2.3.1 Des catégories grammaticales aux catégories syntaxiques

Dans la théorie de la signification de Frege, la notation serait un système de signes ou désignations (*Ganze von Bezeichnungen*), corrélat, au niveau du sens, d'un ensemble de pensées, et, au niveau de la référence, des fonctions ou objets correspondants (en interprétant Frege 1962 (SuB, 1892 : 27)). L'auteur reprend aussi, en rapport avec ces distinctions, l'idée leibnizienne d'une *lingua characterica*, la notation du système formel de la logique, qui serait liée à un *calculus ratiocinator* ou *philosophicus*, le calcul logique[37]. La notation doit donc être comprise avec les corrélats qui la rendent signifiante. Dans un système de logique idéal, la relation entre la notation, les pensées et les fonctions ou objets serait triadique, chacun des éléments de la relation à trois termes devant être présent pour que le système soit signifiant. Frege dit même qu'idéalement, dans la logique pure, un signe n'exprimerait qu'un sens et ne dénoterait qu'une référence[38]. Mais, dans les faits, la notation ne peut pas représenter la logique parfaitement[39]. La notation est déjà une application de la grammaire formelle, car elle représente la logique d'une manière particulière, même si elle vise la généralité de la logique pure, et ce par un moyen matériel — matérialité

[37] La distinction, que Frege reprend plus exactement de Trendelenburg (1846), n'est pas présentée tout à fait dans les mêmes termes chez Leibniz, qui parle plutôt de *characteristica universalis* et *calculus ratiocinator*. C'est sur cette interprétation confuse que van Heijenoort (1967) base sa propre distinction entre logique comme calcul et logique comme langage, et sa lecture conséquente de l'histoire de la logique (pour une critique de cet épisode, cf. Peckhaus (2004)). Le compte-rendu de la *Begriffsschrift* par Schröder (1880), qui comprend imparfaitement lui aussi le formalisme de Frege, est la source probable de la référence à la *Begriffsschrift* dans la bibliographie de l'article de Christine Ladd-Franklin, dans les *Studies in Logic* édités par Peirce en 1883. Frege a commenté à son tour les travaux de Boole, Schröder et Peano (dans Frege (1880-81, 1882, 1883, 1895, 1897)). Il ne semble pas y avoir autrement de lien entre Peirce et Frege.

[38] « Dans un système de signes parfait, un sens déterminé devrait correspondre à chaque expression. Mais les langues vulgaires sont loin de satisfaire à cette exigence et l'on doit s'estimer heureux si dans le même texte, le même mot a toujours le même sens. » (Frege 1971 (1892) : 104, « Sens et dénotation », trad. C. Imbert)
« On exigera d'une langue logiquement parfaite (une idéographie) que toute expression construite comme un nom propre, au moyen des signes précédemment introduits et de manière grammaticalement correcte, désigne réellement un objet, et qu'aucun signe nouveau ne soit introduit à titre de nom propre sans qu'on se soit assuré de sa dénotation. » (Frege 1971 (1892) : 117, idem)

[39] « Elle ne restitue assurément pas la pensée purement, étant donné que cela n'est guère possible par un moyen extrinsèque de représentation [...] » (Frege 1999 (1879) : 8, *Idéographie*, trad. C. Besson)

dont la compréhension nécessite une réflexion d'ordre métaphysique. La distinction entre notation, pensée et fonction ou objet étant déjà d'un ordre supérieur (métalogique), l'étude de la notation est alors *syntaxique*.

À ce sujet, nous n'exploitons pas rigoureusement la distinction entre mention et usage dans cette thèse, puisque nous cherchons une caractérisation proprement sémiotique, normative, de la notation ; et en logique pure, mention et usage coïncident (Church 1956, § 8). La distinction entre la grammaire particulière de la notation comme aspect que prend le signe d'une démonstration (un argument) dans son rapport à l'interprétant immédiat et la grammaire spéculative comme aspect qu'il prend dans son rapport à l'interprétant final, devient cependant essentielle dans une approche constructive de la logique et de sa grammaire (abordée en section 3.2.).

D'autre part, dans la perspective sémiotique, l'analyse syntaxique fait appel à des catégories d'un autre niveau que les composantes de la relation de signification et les différents types de signe en première intention, donc des concepts de seconde intention ou « méta-sémiotiques » portant sur ceux de première intention. Peirce distinguait déjà lui-même ces catégories d'un autre ordre, qu'il appelait des « catégories particulières », mais il ne les a pas étudiées aussi en profondeur que les catégories universelles de la phanéroscopie ou les catégories grammaticales de la sémiotique, et il n'en a pas donné non plus un exposé général et systématique. Nous présenterons ici brièvement une partie de ces catégories, dont l'usage informel se révèlera pertinent dans la critique des notations subséquente.

Les catégories particulières sont des catégories qui permettent d'articuler la réflexion philosophique au niveau interprétatif, de la qualification d'aspects particuliers de la réalité considérés en soi et leur critique conséquente, tout comme les catégories universelles constituent les toutes premières distinctions faites lors de l'inspection du phénomène comme totalité indifférenciée. Mais tandis que les catégories universelles sont organisées selon un ordre hiérarchique solidaire constituant une triade fondamentale, les catégories particulières sont plutôt organisées selon un modèle ternaire, où une seule à la fois est nécessairement présente ou du moins prédominante dans un phénomène[40]. Ces catégories se multiplient en un nombre indéterminé et représentent une longue liste non complétée. Nous pouvons toutefois, en suivant les écrits de Peirce, classer les plus fondamentales de ces catégories en tables, selon l'aspect de la réalité sur lequel elles portent (une interprétation particulière des catégories universelles), de la manière suivante :

Aspect de la réalité	*Catégories particulières*
modalité :	possibilité, actualité, nécessité (EP2 : 491)
qualité :	affirmation, négation, infinité d'intermédiaires (EP2 : 353)
relation :	monade, dyade, triade (EP2 : 424-27)
[signification] :	vagueur, détermination, généralité (EP2 : 350-52)
quantité :	particularité, singularité, universalité (EP2 : 353).

Les principaux aspects de la réalité sont distingués selon un schéma inspiré des tables kantiennes (EP2 : 148, 1903), auxquelles s'ajoute la signification, que Peirce ne désigne pas comme telle, mais dont il distingue les espèces. La signification est le plus important genre de catégories particulières pour la compréhension de la logique et c'est sur elle que nous nous concentrerons. Bien que les catégories particulières de la signification ne soient pas présentes explicitement dans les tables de Kant, Peirce les fait remonter à ce dernier (EP2 : 352, 1905). Il fait cependant aussi référence à la notion scolastique d'*individuum vagum*, dans ce contexte distinguée d'*individuum signatum* et à l'origine de la quantification moderne (W2 : 391, 1870). Une ambiguïté demeure également parfois entre les catégories de la signification (en intension) et celles de la quantité (en extension). Dans l'œuvre publiée de Peirce,

---

[40] « I find that there are at least two distinct orders of categories, which I call the particular and the universal. The particular categories form a series, or set of series, only one of each series being present, or at least predominant, in any one phenomenon. The universal categories, on the other hand, belong to every phenomenon, one being perhaps more prominent in one aspect of that phenomenon than another but all of them belonging to every phenomenon. I am not very well satisfied with this description of the two orders of categories, but I am pretty well satisfied that there are two orders. » (EP2 : 148, 1903, « On Phenomenology »)

l'exposé le plus complet des catégories de la signification se trouve dans l'article de 1905 intitulé « Issues of Pragmaticism » (EP2 : 352, 1905), auquel peuvent être ajoutées les définitions du *Century Dictionary* et du dictionnaire de Baldwin.

La signification d'un terme est dite *vague* lorsque son caractère de Premièreté (la potentialité du sens) est prépondérant. La relation entre le terme et les objets auxquels il est attribuable n'est alors que possible, elle reste à déterminer dans le processus interprétatif. Le champ d'application du terme n'étant pas initialement entrevu, la signification est dite non seulement indéterminée, mais également indéfinie. Un mot à la signification inconnue lors de son premier abord, mais spécifiable par la suite, est un exemple de terme vague. La définition du vague que donne Peirce est la suivante :

> A sign that is objectively indeterminate in any respect is objectively *vague* in so far as it reserves further determination to be made in some other conceivable sign, or at least does not appoint the interpreter as its deputy in this office. (EP2 : 351, 1905)

La signification d'un terme est ensuite dite *déterminée* lorsque la Deuxièmeté (la factualité) domine la représentation. La relation entre le terme et ses objets est alors actuelle, qu'elle soit affirmée ou niée, les qualités de l'un étant attribuées à l'autre. Ainsi, un nom commun désigné par un adjectif démonstratif est un exemple de terme dont la signification est déterminée. Les catégories du vague et du général sont toutes deux indéterminées. Peirce donne la définition suivante de la détermination :

> A subject is *determinate* in respect to any character which inheres in it or is (universally and affirmatively) predicated of it, as well as in respect to the negative of such character, these being the very same respect. In all other respects it is *indeterminate*. (EP2 : 350, 1905)

La signification d'un terme est finalement dite *générale* lorsque c'est la Troisièmeté (raison médiatrice) qui domine la représentation. La relation entre le terme et les objets auxquels il est imputable est alors nécessaire, car bien qu'elle soit indéterminée, elle reste limitée à une portée bien définie. La signification du terme général est donc pour cette raison dite définie, par opposition à l'autre catégorie indéterminée, du vague. La conception d'être (existence) implicite à toute proposition constitue la signification générale par excellence, exprimant la relation d'identité de tous les objets situés dans un même contexte. Peirce définit le général comme suit :

> A sign (under which designation I place every kind of thought, and not alone external signs), that is in any respect objectively indeterminate (i.e., whose object is undetermined by the sign itself) is objectively *general* in so far as it extends to the interpreter the privilege of carrying its determination further. (EP2 : 350, 1905)

À un niveau plus spécifiquement logique, Peirce donne une clé supplémentaire à l'interprétation des deux catégories indéterminées en disant que le principe du tiers exclu ne s'applique pas à ce qui est général, tandis que le principe de contradiction ne s'applique pas à ce qui est vague (EP2 : 351, 1905). Nous pouvons en inférer que la catégorie de la détermination implique les deux principes à la fois, étant la plus contrainte, dans le cadre de la réalité actuelle. Peirce nomme aussi *précision* l'acte de détermination pouvant être accompli par un interprète, celui qui effectue la mise en relation constituant la signification (EP2 : 352, 1905). La précision de la signification se fait du plus vague au plus général, la caractérisation de la signification par l'une ou l'autre des catégories indéterminées étant une affaire de degré. L'acte de précision est l'œuvre de la logique et son principe directeur est celui du pragmatisme, l'accroissement de la généralité de nos conceptions par la considération de toutes leurs conséquences pratiques possibles. La notation la plus adéquate réalise cette précision par l'emploi délibéré de divers types de signes, tel que dans les graphes existentiels, et en étant interprétée par une méthode pragmatiste, telle l'endoporeusis. La signification est d'ailleurs représentée dans la partie Gamma des graphes existentiels, qui traite pour une part de la seconde intention, ici la qualification d'un graphe en tant que relation triadique (signifiante). Un symbole est utilisé pour qualifier le graphe comme tel, mais Peirce n'a pas développé plus avant cette partie des graphes pour qualifier plus spécifiquement la signification en fonction de ses trois catégories particulières.

Nous pouvons finalement illustrer les catégories particulières de la signification en distinguant progressivement trois degrés de clarté dans la définition des concepts, puis deux cas métaphysiquement chargés, en nous concentrant sur la vagueur :

- *1er degré* (définition de sens commun, compréhension suivant l'usage commun) : Je comprends vaguement ce qu'une personne me dit, c'est-à-dire que je concède que ce qu'elle dit puisse faire sens d'une certaine manière, mais je ne comprends pas exactement comment. Le sens de sa proposition, ce qu'elle me dit, reste vague pour moi, dans le contexte d'énonciation tel que je le conçois. Le fondement commun de la communication n'est pas suffisamment bien établi, déterminé.
- *2ème degré* (définition abstraite, déjà plus critique, faisant appel à d'autres concepts) : La signification d'une proposition est vague lorsque, dans l'état des faits représenté par cette proposition, le principe de non-contradiction ne tient pas, mais l'on peut néanmoins envisager que cette proposition fasse sens, d'une certaine manière.
- *3ème degré* (la définition pragmatique, faisant appel à l'expérimentation sur un diagramme) : Je peux imaginer une situation où, dans le monde des rêves de Jean, Jean est professeur à Harvard *et* Jean n'est pas professeur à Harvard (P & $\neg P$). Cette proposition semble contradictoire (et elle l'est telle qu'énoncée formellement ici), mais comme je l'affirme et que la situation est intriguante (dans le monde des rêves de Jean, ce que ne formalise pas l'énoncé logique), on peut me concéder que cette proposition fasse sens, d'une certaine manière. Le sens de la proposition reste vague, car le contexte d'énonciation n'est pas suffisamment spécifié, il est vaguement défini, et permet donc possiblement une contradiction. Je peux maintenant définir plus spécifiquement le contexte d'énonciation et ainsi préciser le sens de la proposition au premier abord en toute vraisemblance contradictoire. Je précise alors que, *bien sûr*, dans son rêve

numéro 1, Jean est professeur à Harvard, tandis que dans son rêve numéro 2, Jean n'est pas professeur à Harvard. J'ai donc effectué une distinction supplémentaire (structurant le contexte d'énonciation un peu plus en profondeur) qui montre le sens plus spécifique, déterminé, en lequel les deux propositions en apparence opposées n'entrent pas en contradiction, bien que les états de faits qu'elles représentent coexistent dans un même monde des rêves de Jean.[41]

- *Un cas métaphysiquement chargé* : Je me rappelle vaguement avoir lu, dans sa biographie par E. R. Hogan, que Benjamin Peirce souffrait de pierres aux reins. Le vague qualifie ici l'état de ma connaissance, qui peut se révéler fausse et donc entrer potentiellement en contradiction avec les faits (mais n'est pas *simplement* fausse, puisque je concède pouvoir me tromper, mes souvenirs n'étant pas bien spécifiques et pouvant entrer en contradiction avec la réalité, ce qui vient après la logique). C'est un usage de la vagueur plus chargé métaphysiquement (déterminé dans un certain contexte épistémique) que la simple qualification de la signification. Il suffit que j'aille vérifier dans le livre pour que, sous mes yeux dans le texte, ma mémoire soit confirmée ou non, de manière déterminée. Si je me souviens bien du fait vérifié (voire du numéro de la page concernée), mais que je n'ai plus accès au livre par la suite, l'état de ma connaissance est alors général, car je connais peut-être un moyen de vérifier à nouveau le fait, mais je n'en ai pas la preuve actuelle.[42]
- *Autre cas métaphysiquement chargé* : Supposons que vous alliez dans un pays étranger où vous voyez quelqu'un faire quelque chose qui vous semble absurde, alors que les autres gens autour semblent l'accepter. Bien que cela vous semble absurde, vous vous dites que, puisque le comportement étrange semble socialement accepté, cela doit être compréhensible (faire sens) selon les normes

[41] En logique linéaire (cf. section 2.3.1.4.), l'itération de Jean dans un de ses rêves contradictoires doit être permise par un opérateur imparfait, marquant la vagueur dans un contexte déterminé (parfait).

[42] On comprendra ainsi que l'intuitionnisme est une pensée du général (cf. section 2.3.1.3).

sociales en vigueur (us et coutumes locaux). C'est le sens que peut prendre ce comportement dans le contexte social donné qui reste pour vous indéterminé (vague). Une étude anthropologique vous éclairerait à ce sujet.

Nous voyons donc que les catégories particulières de la signification peuvent s'avérer utiles pour qualifier ou modaliser progressivement cette dernière. Nous entrevoyons aussi son éventuelle portée sur les formalismes logiques.

1.2.3.2. La finalité d'un système de notation

L'élaboration d'un système de notation nourrit un certain dessein, qui est complètement occulté par la stipulation du symbolisme en logique contemporaine, mais auquel nos deux auteurs ont bien réfléchi dans leurs propres travaux. Frege tient pour commencer à distinguer le système de logique de son « écriture conceptuelle » de celui de l'algèbre de la logique booléenne, en faisant ressortir les buts différents de chacun des deux formalismes. Selon lui, Boole cherche avant tout à développer une méthode de résolution des problèmes logiques et son système reste donc purement formel, ne distinguant pas, entre autres, dans la notation, les opérations mathématiques des opérations logiques ; tandis que son propre système de la *Begriffsschrift* vise plutôt dès le premier abord une application à l'étude des fondements de l'arithmétique et exprime donc aussi, dans sa notation, un contenu mathématique, distingué des opérations logiques auxquelles il est soumis. L'algèbre de Boole est mal adaptée à l'étude des mathématiques, car son champ d'application est restreint par la notation de son formalisme. Il vaut alors mieux, selon Frege, développer une notation propre à la logique et dont le champ d'application puisse être le plus large possible.[43] Cette notation représente avant tout les pensées et non les sons, d'où le nom d' « écriture des concepts ».[44] Nous pourrions dire qu'elle représente plus exactement le langage formel de la logique (un système composé d'une notation, d'un système déductif et d'une méthode de résolution), dans sa plus grande généralité, c'est-à-dire en s'abstrayant autant que possible des langues usuelles, dont l'écriture a pour but de représenter l'aspect phonétique aussi bien que la structure morphémique et syntaxique. Dans tous les cas, le problème de base reste le même. La notation logique doit avant tout représenter les relations logiques, tout en rendant possible l'application du formalisme, c'est-à-dire en permettant l'expression d'un contenu par des signes généraux, dont le sens peut être spécifié pour des contenus particuliers.

La finalité d'un système de notation chez Peirce est de permettre l'expérimentation logique, qui consiste à développer des inférences et à les critiquer. Le logicien doit ainsi découvrir ou mettre à l'épreuve des principes logiques en reproduisant formellement et systématiquement des raisonnements et en se basant dans son expérimentation sur les principes des mathématiques et de la phanéroscopie. La notation logique, par sa forme sémiotique matériellement définie et effective, permet d'analyser le raisonnement selon les catégories universelles de l'expérience, qui structurent la relation triadique de signification et la typologie des signes.[45] Cette

---

[43] « Quiconque demande que la liaison des signes se trouve avec celle des choses dans le plus complet accord possible, ressentira toujours comme un renversement du véritable état de choses, le fait que la logique emprunte ses signes à l'arithmétique [...] Il lui semblera plus approprié de développer à partir de la nature propre de la logique ses propres signes, qui pourront alors être employés également dans les autres sciences partout où ce qui importe, c'est de conserver les formes d'une suite inférentielle rigoureuse. » (Frege 1994 : 21, « La logique calculatoire de Boole et l'idéographie », 1880/81, trad. E. Schwartz)

[44] « Une *lingua characterica* doit, comme dit Leibniz, *peindre non pas les paroles, mais les pensées*. » (Frege 1969 (1880/1881) : 14, « Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift », nous traduisons)
« Le langage par formules de l'arithmétique est une idéographie (*Begriffsschrift*) puisqu'il exprime immédiatement la chose sans passer par les sons. » (Frege 1971 (1882) : 68, « Que la science justifie le recours à une idéographie », trad. C. Imbert)

[45] « [...] experiments upon diagrams are questions put to the Nature of the relations concerned. » (CP 4.530, 1906, « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism »)
« For what is there the Object of Investigation [in experiments made upon diagrams]? It is the *form of a relation*. Now this Form of Relation is the very form of the relation between two corresponding parts of a diagram. » (CP 4.530, 1906, « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism »)

forme sémiotique de la notation s'inspire de plus du développement antérieur des formalismes mathématiques dont elle reprend les motifs et les processus tout en les spécifiant.[46] Le but de la notation logique, ce qui motive Peirce lorsqu'il élabore ses graphes existentiels, est donc avant tout de permettre l'analyse et la compréhension globale du système de logique (et non la seule synthèse dans le calcul, la démonstration), en fournissant à la logique un langage qui lui est propre.

De façon plus générale, comme pour tout le travail terminologique de la philosophie, il s'agit de développer un langage rigoureux pour le logicien philosophe, qui lui permette de s'exprimer en suivant son propre mode de pensée, la critique. Il peut y avoir un calcul logique et la philosophie peut se développer en un certain style littéraire, mais ce ne sont pas les aspects les plus signifiants de la philosophie (et de la logique en tant que science philosophique), ceux qui lui sont propres en tant que pensée critique du sens commun. Bien que Frege mette l'accent sur la représentation et Peirce sur l'expérimentation, dans les deux cas l'élaboration d'une notation et la réflexion critique à son sujet impliquent un travail sur la signification dans le langage formel de la logique, une recherche d'expressivité comme adéquation de la notation au raisonnement logique.

---

[46] « The mathematician wants to reach the conclusion, and his interest in the process is merely as a means to reach similar conclusions. The logician does not care what the result may be; his desire is to understand the nature of the process by which it is reached. The mathematician seeks the speediest and most abridged of secure methods; the logician wishes to make each small step of the process stand out distinctly, so that its nature may be understood. He wants his diagram to be, above all, as analytical as possible. » (CP 4.533, 1906, « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism »)

2

Critique de quelques notations logiques

La critique logique consiste à décider de la validité des arguments qui forment le raisonnement et à évaluer leur degré de force (EP2 : 260, 1903). Le processus même du développement des arguments est l'inférence. La critique logique est donc essentiellement, en tant que science normative, une théorie de l'inférence valide et, dans son application, une théorie de la démonstration. L'application de la théorie sémiotique à l'étude de la notation logique, une descente dans l'ordre des connaissances, transforme les concepts de la sémiotique par spécification, c'est-à-dire une sorte d'inférence déductive, tirant les conséquences des arguments formulés, avec une part abductive, qui consiste ici en la caractérisation de la notation comme réalisation spécifique du signe. Ce qui caractérise au premier abord la notation logique, c'est qu'elle constitue une représentation et une reproduction du raisonnement nécessaire propre à la science, et cela sous une forme écrite. Ces deux aspects, l'aspect formel de la science et celui matériel de l'écriture, sont les deux conditions principales de la réalisation de la notation logique comme système de signes.

D'un point de vue sémiotique, le trait caractéristique le plus signifiant du raisonnement nécessaire propre à la pensée scientifique est sa *diagrammaticité*. Au niveau de la critique logique, c'est cet aspect qui nous intéressera avant tout. Nous chercherons quels types de signes permettent, dans la notation logique, de représenter et de reproduire le raisonnement nécessaire. L'aspect matériel de l'écriture sera lui-même réduit aux formes des catégories universelles qui ressortent de l'étude phanéroscopique de l'écriture et qui sont tout aussi propres aux signes saisis sous leur aspect purement formel. La matérialité même de l'écriture en un sens plus concret se manifeste par un ensemble de contraintes additionnelles dont la conception nécessite un engagement métaphysique supplémentaire.

La diagrammaticité est l'aspect sémiotique le plus important du raisonnement nécessaire, car c'est le diagramme qui permet d'articuler le raisonnement et de lui donner un sens, dans la perspective de la critique. On peut reprendre ici l'idée de Brandom (1983, 1994, 2008) qui, à l'encontre d'un certain Wittgenstein selon lequel le langage n'aurait pas de centre, affirme au contraire que le langage a un centre, la proposition, et même, à considérer le langage d'un point de vue pragmatique, l'*assertion*. Nous disons plus précisément que le raisonnement comprend effectivement, dans sa grammaire pure, un élément central qui le rend signifiant, le *diagramme*, mais que c'est dans la perspective de la *critique* (le mode de pensée propre à la logique), qui se réalise par l'usage de la proposition, que le raisonnement nécessaire de la science prend un sens déterminé. Le raisonnement nécessaire des mathématiques, en tant que *calcul*, est pour sa part bien sensé, mais le sens qu'il prend reste vague, indéterminé, en ce qu'il peut être précisé, appliqué de diverses façons.

Compte tenu maintenant de ce que l'élément central du raisonnement qui nous intéresse, du point de vue de la critique logique, est le diagramme tel que critiqué dans l'usage de la proposition, notre méthode d'analyse de la notation logique — par laquelle nous chercherons à préciser comment les différents types de signes qui composent la notation participent à sa signification, lui permettant de représenter et de reproduire le raisonnement — consistera à *chercher le diagramme* dans la notation et à y rapporter les autres éléments grammaticaux (d'un point de vue critique, surtout la proposition), pour comprendre comment ils prennent part à la signification dans l'ensemble de la notation et pour juger ainsi de l'adéquation du système de notation critiqué. Nous analyserons trois types de notation (algébrique linéaire, algébrique arborescent, graphique), en examinant plusieurs systèmes de critique logique (classique, intuitionniste, linéaire) et en suivant plusieurs méthodes d'analyse et de démonstration (axiomatique, séquents, déduction naturelle, graphes existentiels), afin de saisir l'opération de la critique logique sous son aspect processuel et non seulement comme représentation.

2.1. Présentation générale des notations logiques usuelles

Nous distinguons trois éléments principaux d'un système de logique : 1° la notation, qui est une grammaire particulière, ou syntaxe, effective ; 2° le système de règles d'inférence, qui constituent des normes pour la critique du raisonnement, déterminant le type de logique (classique, intuitionniste, linéaire, etc.) ; et 3° la méthode, qui détermine la façon de réaliser la finalité du système (l'analyse du raisonnement lors de la recherche de preuves et, ultimement, la démonstration des théorèmes lors de la synthèse ultérieure). La notation se décline elle-même en plusieurs types dont les principaux sont : la prose, l'algèbre et les graphes. L'algèbre peut prendre, d'un point de vue notationnel, une forme linéaire (en fait bilinéaire ou bidimensionnelle, à l'horizontale sur une ligne et à la verticale sur plusieurs lignes horizontales), arborescente ou matricielle, ces deux dernières formes tirant davantage vers la notation graphique. Les tableaux sémantiques, les arbres de consistance et les tableaux dialogiques sont des variantes de la notation arborescente et, du point de vue de la méthode, des sortes de séquents renversés, ce que l'on constate en examinant comment, dans ces différents cas, les formules sont disposées les unes par rapport aux autres, sans se préoccuper de leur éventuel décor (les lignes du tableau ou de l'arbre), qui est signifiant par son iconicité, mais dont la fonction est secondaire par rapport à celle de l'algèbre.

Nous pouvons ainsi classifier les notations des principaux systèmes de logique usuels de la manière suivante :

Prose
- Argumentation en prose
- Usage philosophique des guillemets et autres symboles ponctuels

Algèbre
- Notation linéaire
  - Notation standard
  - Notation polonaise
- Notation arborescente
  - Méthode des séquents
  - Méthode de la déduction naturelle
  - Méthodes des tableaux
    - Tableaux sémantiques et analytiques
    - Tableaux dialogiques
- Notation matricielle
  - Tables de vérité

Graphes
- Diagrammes d'Euler et de Venn
- *Begriffsschrift* de Frege
- Graphes existentiels de Peirce

2.2. Notation algébrique linéaire de la logique classique en méthode axiomatique

Selon une certaine approche standard de la logique formelle déductive, la logique est formalisée en un système composé d'une syntaxe, qui comprend une langue formelle et un système déductif, et d'une sémantique, l'interprétation de la syntaxe.[47] La langue formelle consiste typiquement en une algèbre, elle-même constituée de symboles et de règles de formation qui permettent de composer ces symboles en expressions bien formées. Les symboles représentent des propositions inanalysées ou des propositions analysées en termes de prédicats et sujets logiques (ou fonctions et arguments), des connecteurs, des quantificateurs ou d'autres opérateurs additionnels, propres aux logiques non classiques, ainsi que des marques de ponctuation. Le système déductif est pour sa part constitué d'un ensemble de règles de transformation (ou d'inférence) qui permettent de dériver (déduire) des formules à

[47] Quelques jalons historiques du développement de cette approche seraient Hilbert & Ackermann (1928), Hilbert & Bernays (1934), Church (1956), Kleene (1952, 1967), mais on pourrait revenir, pour l'aspect mathématique de l'approche, à Boole (1854) et, pour sa méthode axiomatique, à Frege (1879, 1893/1903) et Whitehead & Russell (1910-1913).

partir d'autres formules ou de prouver, d'un point de vue syntaxique, la validité logique de formules, qui deviennent alors des théorèmes. Les formules sur lesquelles se base une telle théorie, qui sont tenues pour vraies apodictiquement, sont les axiomes du système déductif. Les axiomes et les règles d'inférence définissent ensemble le type de logique en question (classique, intuitionniste, de la pertinence, etc.). Les principales techniques de décision (méthodes d'analyse critique et de démonstration) des systèmes déductifs sont l'axiomatique, les tables de vérité, les arbres de consistance, la déduction naturelle, le calcul des séquents et la dialogique. La sémantique donne quant à elle une interprétation de la langue, de la conséquence et de la validité logique, selon un certain concept de vérité ou de prouvabilité. Les deux principales approches interprétatives qui s'ensuivent sont les sémantiques modèles-théorétiques (à la Tarski), basées sur des conditions de vérité, et les sémantiques preuves-théorétiques (à la Prawitz, Dummett), basées sur des conditions d'assertabilité. Une étude plus approfondie de la philosophie de la logique distingue plusieurs conceptions de l'inférence et de la vérité, que nous n'aborderons pas directement ici.

Cette approche standard de la logique ne correspond pas exactement à l'approche sémiotique. Bien que les deux parties de la syntaxe de la logique standard, la langue formelle et le système déductif, semblent correspondre, dans le cadre de la sémiotique, respectivement à la grammaire spéculative, puis à la critique logique et la méthodeutique (ces deux dernières parties ne sont pas aussi clairement distinguées), elles en diffèrent fondamentalement en ce que la sémiotique élabore sa typologie des signes à partir d'une conception du signe explicitée d'emblée dans la grammaire ; alors que la logique standard établit son vocabulaire de manière conventionnelle, par stipulation, sans questionner dès le premier abord les fondements de son symbolisme. De plus, le système déductif est davantage conçu comme un calcul que comme une critique, selon une approche plus mathématisante de la logique[48]. La syntaxe ainsi sapée de ses fondements ne fait alors réellement sens qu'en corrélation avec une sémantique, c'est-à-dire une théorie de la signification qui donne sens à la syntaxe sur la base d'une certaine ontologie, soit-elle même formelle. Ce présupposé est le plus clair dans l'approche modèle-théorétique, dont les modèles sont définis en termes ensemblistes, mais se trouve aussi dans l'approche preuve-théorétique, dont les objets-preuves sont moins clairement définis. La sémiotique, pour sa part, n'a pas besoin d'ontologie pour rendre le raisonnement signifiant, puisque les mécanismes de la signification y sont explicités dès son fondement avec la définition du signe, dans la relation triadique qui le constitue. La syntaxe et la sémantique de l'approche standard de la logique développent donc, du point de vue de la sémiotique, des aspects de la logique qui ne sont en fait distingués les uns des autres que moyennant certains présupposés métaphysiques (distinction langage, monde, pensée), ce qui relève du niveau interprétatif et non simplement critique de la réflexion.

La notation logique constitue en soi une réalisation particulière et effective de la grammaire et son analyse est par conséquent déjà d'ordre syntaxique. Cependant, nous nous concentrerons dans la critique des notations usuelles sur les aspects plus purement formels de ces notations, en référence à la grammaire pure de la logique comme science normative. Les aspects plus concrets et nécessitant une réflexion d'ordre métaphysique approfondie ne seront pas abordés directement, mais tout de même entrevus dans la troisième partie, sur la méthode à employer dans l'étude de la notation. Nous aborderons maintenant, dans les sous-sections qui suivent, deux versions de la logique classique en notation algébrique linéaire, qui diffèrent par leur ordre syntaxique, soit la notation standard et la notation polonaise. Ces systèmes emploient une méthode de déduction axiomatique et se développent le plus souvent en une sémantique modèle-théorétique. Dans la prochaine section, nous examinerons

---

[48] Expressément chez Girard (2006-2007), auquel nous nous réfèrerons souvent, qui distingue, comme parties du système de la logique : la langue, le calcul et l'interprétation. On parle aussi communément du calcul logique, propositionnel ou prédicatif (certains disent « des prédicats »).

des systèmes de logique en notation algébrique arborescente, qui utilisent comme méthode les séquents ou la déduction naturelle et font plutôt appel à une sémantique preuve-théorétique.

2.2.1. Notation standard

L'axiomatique est la plus ancienne des méthodes d'analyse et de démonstration des formules de la logique déductive moderne, qui a été élaborée depuis les débuts du mouvement de formalisation de la logique, pour certains aspects déjà chez Boole (1854), Frege (1879) et Peano (1889), mais, de manière plus complète, surtout avec les *Principia Mathematica* de Whitehead & Russell (1910-1913). Après avoir spécifié le vocabulaire de base et les règles de formation des expressions, l'axiomatique consiste à dériver à partir de certaines formules valides d'autres formules valides et à prouver ainsi, au terme de la dérivation, des théorèmes, c'est-à-dire des formules valides dont on a montré qu'elles ne dérivent que de formules valides. Ces dérivations sont effectuées à partir d'axiomes (ou postulats), qui sont des formules tenues pour vraies de manière non pas hypothétique, mais apodictique (elles sont considérées comme nécessairement vraies), et qui servent donc de prémisses primitives. L'opération même de la dérivation se fait en suivant une ou plusieurs règles d'inférence, le plus souvent la règle de détachement (*modus ponens*) et la règle de substitution, cette dernière étant parfois laissée implicite. À partir de ces deux règles, la dérivation procède au développement d'une expression par une série de substitutions, suivi de la réduction de la nouvelle expression par le détachement d'une expression résultante. Dans tous les cas, la méthode axiomatique fait usage en général de plusieurs axiomes et de peu de règles d'inférence.

Nous présentons ici un exemple simple de système de logique classique utilisant la méthode axiomatique, avec une preuve de théorème, qui reprend la structure plus ou moins standard des exposés de la logique élémentaire (par exemple, dans Church (1956) ou Vernant (2001)). La structure générale de l'exposé le plus commun de la logique axiomatisée comprend les éléments suivants :

Structure générale :

- un vocabulaire ;
- des règles de formation des expressions bien formées (propositions simples ou complexes) ;
- des règles d'inférence (pour la transformation des propositions et la formation des arguments) ;
- des axiomes ;

(et, lors de la dérivation, un certain plan de la notation faisant usage d'indices).

Nous analyserons chacun des éléments plus spécifiques de la logique classique axiomatisée, d'un point de vue sémiotique. L'analyse tentera d'être exhaustive pour cette notation, tandis que pour les prochaines notations nous nous concentrerons sur certains points de la notation seulement, afin d'éviter les redondances.

Vocabulaire

Pour la logique des propositions inanalysées :

- des propositions $p, q, r, \ldots$
- des opérateurs ou connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \ldots$ [49]

[49] Les symboles d'opérateurs que nous avons retenus, par souci de cohérence entre les différents systèmes de logique abordés (classique, intuitionniste, linéaire), ont été introduits ou significativement utilisés, en ce qui concerne l'histoire de la notation, par :

$\neg$ Heyting (1930b), Gentzen (1934) ; le ~ est introduit par Peano (1897) et utilisé par Russell (1908), puis Whitehead & Russell (1910-1913) ;

$\wedge$ Heyting (1930b) ; en forme arrondie chez Peano (1889) ; le & vient de Hilbert (1922) ;

$\vee$ Russell (1908), puis Whitehead & Russell (1910-1913) ; en forme arrondie chez Peano (1889) ;

$\rightarrow$ Hilbert (1922) ; Gergonne (1816-1817), Peano (1889), Schröder (1890), Russell (1908), puis Whitehead & Russell (1910-1913) utilisent le $\supset$, ou plutôt un C renversé dans certaines de leurs typographies ; Bourbaki (1954) utilise le $\Rightarrow$;

$\exists$ Peano (1897), Russell (1908), puis Whitehead & Russell (1910-1913) ; Mitchell (1883) et Peirce (1883, 1885) utilisent le Σ ;

$\forall$ Gentzen (1934-1935) ; Mitchell (1883) et Peirce (1883, 1885) utilisent le Π.

(Voir également le « dictionnaire » des notations logiques de Feys & Fitch (1969) et l'histoire des notations mathématiques de Cajori (1928-1929).)

- des signes de ponctuation (,), [,], {, }.

En plus des opérateurs et des signes de ponctuation, pour la logique des propositions analysées (ou logique prédicative[50]) :

- des prédicats $F, G, H, \ldots$
- des variables d'individu[51] $\ldots, x, y, z,$
- des constantes d'individu $a, b, c, \ldots$
- des quantificateurs (opérateurs) $\exists, \forall$.[52]

Pour chaque partie de la logique, également :

- des expressions neutres $A, B, C, \ldots$
- les indices de la dérivation en méthode axiomatique.

Logique des propositions inanalysées

Les éléments de base de la logique des propositions sont les propositions simples et les opérateurs, auxquels peuvent s'ajouter des éléments de ponctuation lorsque les opérateurs sont infixés, c'est-à-dire placés entre les propositions qu'ils mettent en relation. Les propositions sont des variables dont le sens peut changer

---

[50] L'expression commune « logique des prédicats » est plutôt inadéquate puisque les propositions sont en fait analysées en prédicats et sujets logiques, liés ou non par des quantificateurs. De plus, le niveau propositionnel reste central dans la construction du sens de l'expression logique (ce qui est aussi une conclusion de Kneale & Kneale (1962)). À la rigueur, on peut appeler la logique des propositions analysées une « logique prédicative ».

[51] C'est l'expression russellienne, qui peut être comprise comme présupposant un engagement métaphysique (existentiel) ; « variable d'objet » serait plus neutre. Le terme fregéen « argument » entre en conflit avec l'argument de la tradition et de la sémiotique peircéenne. Nous préférons aussi garder le vocabulaire peircéen pour la critique des notations et leur interprétation constructive.

[52] Gentzen (1934-1935), qui désigne $\forall$ par *All-Zeichen* et $\exists$ par *Es-gibt-Zeichen*, est traduit, chez Feys & Ladrière (1955) (conformément à un certain « usage courant », note 2* des traducteurs), respectivement par « quantificateur universel » (pour tous) et « quantificateur particulier » (pour quelque), ce qui nous convient mieux, pour la deuxième expression, que le plus commun « quantificateur existentiel ». On peut garder la notation $\exists$ du quantificateur particulier signifiante en la lisant, en allemand, *einige* (quelque, certain). Peano (1897) introduisit à l'origine $\exists$ pour *esistono*. Par ailleurs, des opérateurs supplémentaires pourraient s'ajouter dans les logiques non classiques : $\diamond$, $\square$, ?, !, …

selon l'interprétation qu'on leur donne, tandis que les opérateurs sont des constantes dont le sens est toujours le même malgré les contextes différents où elles sont utilisées. Les propositions simples sont composées, par l'entremise des opérateurs, en propositions complexes. La logique des propositions a pour but d'évaluer la validité des propositions complexes ainsi construites et des dérivations qui permettent de passer d'une proposition à une autre, c'est-à-dire les arguments construits à partir des propositions simples et complexes.

Les signes utilisés pour représenter des propositions simples sont le plus souvent les lettres latines minuscules en caractères italiques de la série commençant par p, q, r, ...,[53] qui peuvent être répétées si nécessaire en les accompagnant d'indices, p_1, q_2, r_3, etc., afin de poursuivre cette série. Ces signes sont des *légisignes symboliques phémiques* de première intention puisque : 1° en soi (en tant que légisignes), ces signes sont institués par convention, c'est-à-dire qu'on a choisi d'utiliser ces lettres latines, plutôt que d'autres signes, par convenance ; toute notation est d'ailleurs constituée de légisignes dont les instances sont des sinsignes ; 2° dans leur rapport à l'objet qu'ils désignent (en tant que symboles), ces signes sont aussi institués par convention : ici une définition donne à chacun de ces signes la valeur générale d'une proposition, plutôt que d'un autre élément grammatical, mais le sens exact de cette proposition reste indéterminé (en tant que variable) ; 3° dans leur rapport à l'interprétant (en tant que phèmes), c'est-à-dire dans le développement logique auquel ils prennent part, ces signes jouent en soi le rôle de propositions logiques, c'est-à-dire, dans un cadre classique, des éléments grammaticaux qui représentent un état de faits et peuvent conséquemment être jugés vrais ou faux ; toutefois, dans le contexte d'une proposition complexe ou d'un argument, ces signes constituent des sèmes onomatiques montrant la place des propositions simples dans l'expression composée. Suivant la tradition, les propositions simples sont aussi dites

---

[53] Mais n'atteignant pas la prochaine série ..., x, y, z, qui sert à désigner les sujets des propositions analysées.

des *catégorèmes* ou *symboles propres*, puisque qu'elles possèdent un sens complet en soi : elles n'ont pas besoin d'être adjointes à d'autres signes pour faire sens. Nous dirons à cet égard que ce sont des signes de première intention, dont l'objet n'est pas un autre signe considéré comme tel dans l'analyse logique.

Ainsi, une particularité remarquable de la logique pure, au niveau des signes de proposition, est que l'objet de la proposition, comme élément de la relation triadique qui constitue la signification, correspond au rôle que le signe doit jouer dans la réflexion ou, du moins, à un aspect dynamique sous-jacent[54]. Il n'y a pas de différentiation ontologique à ce niveau, d'interprétation qui donnerait au signe dans le système de représentation (la langue formelle de la logique, versus, par exemple, une langue usuelle) un objet autre que la structure logique même. Reste à savoir maintenant si le signe lui-même possède la forme qui convient le mieux à la représentation de la proposition du point de vue de la réflexion logique. Puisque la logique des propositions vise à évaluer la validité des propositions complexes et des arguments composés de propositions, les symboles phémiques simples des lettres conviennent bien à leur tâche, qui consiste en une analyse logique allant jusqu'à la proposition simple et non dans sa structure interne. Le fait que ces lettres proviennent d'une même série déjà établie de l'alphabet latin représente aussi adéquatement le fait que les différentes propositions font partie d'une même catégorie de la proposition simple. Le style italique des caractères permet par ailleurs de différencier les propositions du langage formel particulier (la « langue objet ») de la prose du commentaire (le « métalangage »), habituellement en police romaine.

Les signes qui représentent les opérateurs logiques constituent une série moins uniforme en soi, d'un signe à l'autre, et même aux formes graphiques assez changeantes d'un auteur à l'autre. Nous avons choisi un mélange de signes utilisés par Hilbert (1922) et Heyting (1930), car ils nous semblent plus perspicaces que d'autres variantes et s'harmonisent avec la notation de la logique linéaire, que nous aborderons

---

[54] Ce qu'exprimera plus clairement la grammaire type-théorétique constructive examinée à la section 3.

plus loin. Ces signes sont pour leur part des *légisignes symboliques onomatiques* de seconde intention puisque : 1° en soi (en tant que légisignes), ils sont institués par convention, notre choix ne retenant qu'une variante de caractères parmi d'autres ; cette variation entre les auteurs est probablement due à ce que chaque opérateur (objet du signe) est une constante au sens bien déterminé, qui joue un rôle logique spécifique, tandis que les propositions simples forment une catégorie plus unitaire : ce sont des variables aux sens différents, mais pouvant s'avérer identiques, et donc aux rôles logiques plus semblables ; 2° dans leur rapport à l'objet (en tant que symboles), ces signes sont attribués un sens spécifique (constant) de la mise en relation par convention, un certain sens plutôt qu'un autre ; 3° dans leur rapport à l'interprétant (en tant que sèmes onomatiques ou onomes), ces signes ne font sens que lorsqu'ils sont joints à des propositions, leur rôle étant de mettre ces propositions en relation dans des propositions plus complexes, en indiquant (en seconde intention) le diagramme de cette relation, leur ordre dans l'opération. Selon la tradition, les opérateurs sont aussi appelés des *syncatégorèmes* ou *symboles impropres*, car ils ne font pleinement sens que lorsque joints à des catégorèmes. Nous les appellerons en ce sens des signes de seconde intention, qui portent sur d'autres signes de première intention, objets premiers de l'analyse logique. Ce sont également, d'une certaine manière, des fonctions (prédicats) constantes, au sens déterminé.

Alors que les propositions simples de la logique classique font toutes partie d'une même catégorie[55], les opérateurs classiques, en plus de constituer chacun une constante à la signification bien déterminée, se différencient selon l'arité, le nombre de termes, (ou l'adicité, le nombre de liens) des mises en relation qu'ils effectuent : les opérateurs peuvent être unaires ($\neg$), binaires ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ...), ternaires, etc. (idem pour l'adicité). Les opérateurs à deux termes ou plus sont aussi couramment appelés des connecteurs. L'arité des opérateurs dans tous les cas est reflétée par le caractère

---

[55] Elles sont catégoriques, versus d'autres types de proposition : ordres, questions, exclamations, etc., dont l'étude relève de la pragmatique ou de logiques non classiques.

sémique particulier de leurs signes, l'incomplétude de leur signification du point de vue de l'interprétance (la possibilité formelle d'une interprétation, comme perspective de l'interprétant). C'est une thèse de Peirce que les relations logiques se ramènent toutes essentiellement à des relations triadiques, mais nonobstant les développements plus approfondis de la logique des relations[56], l'exposé standard de la logique classique et, au sein de cette dernière, de la logique des propositions en particulier, ne traite que des opérations unaires et binaires, en ne retenant le plus souvent d'ailleurs qu'un nombre réduit d'opérateurs comme primitifs et non les seize opérateurs binaires logiquement possibles dans la combinatoire d'une logique bivalente.

Les signes de ponctuation sont quant à eux des groupes de parenthèses, crochets et accolades[57]. Leur rôle dans la notation est de montrer l'ordre structurel des propositions et opérateurs et, de cette manière, la portée des opérateurs sur les différentes propositions, c'est-à-dire entre quelles propositions simples ou complexes les opérateurs effectuent leurs mises en relation. Ces signes sont des *légisignes indexicaux sémiques* de seconde intention, car : 1° en soi (en tant que légisignes), ils sont institués par convention, comme pour les signes de propositions et d'opérateurs[58] ; 2° dans leur rapport à l'objet (en tant qu'indices), ils désignent en seconde intention le lieu logique qu'occupe chacun des éléments de la formule, le diagramme de la structure logique de cette formule, ce que ne reflète pas nécessairement dans sa linéarité la notation algébrique à opérateurs infixés ; 3° dans leur rapport à l'interprétant (en tant que sèmes de seconde intention), ces signes ne font sens que joints à des propositions complexes et, suivant l'usage commun, non à des propositions simples. Ce sont donc également, en ce sens, des syncatégorèmes. Si

---

[56] Dans laquelle les fonctions comme variables représentent des relations, à distinguer des mises en relation qu'accomplissent les opérateurs comme constantes.

[57] Un système de ponctuation utilisant des points, doubles points, triples points, etc. a aussi été utilisé entre autres par Peano (1889), Whitehead & Russell (1910-1913) et Quine (1940), mais étant de nos jours d'usage moins courant, nous n'en traiterons pas ici.

[58] Ainsi, dans les systèmes logiques de Leśniewski, une plus grande variété de caractères de ponctuation est utilisée. Certains ne font aussi usage que des parenthèses arrondies et non des crochets ou accolades.

l'on s'attarde à leur réalisation effective, ils n'ont en plus qu'une lecture de mention et non d'usage, l'usage étant l'acte silencieux de la mise en ordre. Autrement dit, la prosodie structurante est marquée par le silence de la ponctuation. Qui plus est, dans le cas des propositions complexes mises entre parenthèses, l'ensemble de la proposition complexe et des parenthèses englobantes devient un indice, par un truchement symbolique, du contenu ; ou, si l'on veut, la ponctuation met le symbole de la proposition sous un vide indexical. Les signes de ponctuation sont aussi appelés des signes auxiliaires (Gentzen (1934-1935), van Dalen (1980)), puisqu'ils ne sont rendus nécessaires que par une contingence de la notation, l'ordre inadéquat de la notation infixée qui, dans sa lecture, ne reflète pas l'ordre logique des formules.[59]

Logique des propositions analysées

Dans la logique des propositions analysées ou logique prédicative, les éléments de base sont, en plus des opérateurs propositionnels et au lieu des propositions simples inanalysées : des prédicats (ou fonctions), des variables d'individu (ou d'argument fregéen), des constantes d'individu et des quantificateurs, ces derniers étant eux-mêmes des sortes d'opérateurs. La logique prédicative a aussi pour but d'évaluer la validité des propositions complexes et des arguments (delômes) qui les soutiennent, mais en tenant compte en plus de la structure interne des propositions simples, du niveau sémique à la base des propositions.

Les signes qui représentent des prédicats logiques (ou fonctions)[60] sont à nouveau tirés de l'alphabet latin en caractères italiques, mais cette fois ce sont des

---

[59] Smullyan (1968) considère pour sa part que les parenthèses qui servent à composer des propositions complexes font partie du métalangage et non de la langue objet ; mais pour nous, la seconde intention reste analysable au niveau de la grammaire pure, qui gagne alors en complexité.

[60] Le prédicat logique comme élément du formalisme logique et la fonction, en un sens plus précis, comme élément du modèle de calcul effectif sous-jacent seront plus proprement distingués dans la grammaire type-théorétique constructive.

lettres majuscules commençant par la série *F*, *G*, *H*, ..., qui peuvent être réitérées à l'aide d'indices. Ces signes sont des *légisignes symboliques rhématiques* de seconde intention, car : 1° en soi (en tant que légisignes), ils sont institués par convention, puisque c'est par convenance que l'usage de l'alphabet est prescrit ; 2° dans leur rapport à l'objet (en tant que symboles), la relation est également établie par convention, mais cette fois-ci avec la nuance que le prédicat de la langue usuelle représenté comprend lui-même un index qui appelle une *icône*, l'idée qui est prédiquée du sujet et dont le sens reste *indéterminé* (en tant que variable) ; la notation est donc ici influencée par la langue usuelle, elle dépend d'un certain contexte psychique et langagier qui sert d'entremise avec l'icône ultimement visée et n'est donc pas tout à fait apte à représenter la logique pure[61] ; 3° dans leur rapport à l'interprétant (en tant que sèmes rhématiques ou rhèmes), ces signes expriment une idée incomplète qui vient caractériser le sujet (ou argument) dans une proposition complète. Ce sont donc des syncatégorèmes. Idéalement, les signes de prédicat logique devraient plutôt consister en des légisignes *iconiques* sémiques, qui signifieraient en première intention, par une certaine similarité de forme, leur objet, c'est-à-dire l'idée prédiquée.

Les signes qui représentent des variables d'individu (ou d'argument) sont pour leur part tirés de la série de lettres latines minuscules en caractères italiques commençant par *x*, *y*, *z* ..., et réitérées à l'aide d'indices si nécessaire. Ces signes sont des *légisignes symboliques onomatiques* de seconde intention, car : 1° en soi (en tant que légisignes), ils sont institués par convention en suivant le motif alphabétique ; 2° dans leur rapport à l'objet (en tant que symboles), leur relation est aussi instaurée par convention, mais avec la nuance que leur but est ici de désigner de manière générale un objet, le sujet logique, qui est lui-même un *indice* dont le sens reste indéterminé (en tant que variable) ; le langage formel étant limité dans ses ressources

[61] On perçoit ici clairement la distinction entre la grammaire pure, au niveau de laquelle le prédicat est une icône, et la grammaire particulière ou syntaxe, dont la notation est une réalisation effective et qui ne nous donne qu'un symbole, le lien duquel avec l'icône visée se fait par l'entremise de la langue et de la pensée. Il en sera de même également pour les signes de sujets considérés ci-après.

à une convention de notation dérivée de la langue usuelle, les lettres utilisées sont en soi des symboles plutôt que des indices reprenant la fonction de l'élément logique représenté, mais jouent ultimement le rôle d'indices lorsque considérés dans le contexte psychique et langagier de la notation ; 3° dans leur rapport à l'interprétant (en tant que sèmes onomatiques), ces signes contribuent à former une proposition au sens complet, en jouant indirectement le rôle de sujets logiques. Ce sont donc des syncatégorèmes dans le détail de leur analyse, bien qu'ils renvoient à des indices de sujets logiques. Le terme usuel de « variables » désigne par ailleurs mal les éléments logiques représentés par ces signes, puisque c'est le mode de désignation des variables d'individu qui est indéterminé et non pas ce qu'ils désignent qui serait variable, c'est-à-dire à la valeur déterminée, mais changeante[62].

Les signes qui représentent des constantes d'individu (ou d'argument) sont à leur tour choisis parmi la série des lettres latines minuscules en caractères italiques commençant par *a*, *b*, *c*, ..., et pouvant être réitérées avec des indices. Ces signes sont des *légisignes symboliques onomatiques* de seconde intention parce que : 1° en soi (en tant que légisignes), ils sont institués suivant une convention basée sur l'alphabet ; 2° dans leur rapport à l'objet (en tant que symboles), leur relation est à nouveau établie par une convention limitant le domaine des formes de la notation, mais cette fois-ci le sens des sujets logiques (des indices) qu'ils représentent en deuxième intention est déterminé puisque l'attribution de leur valeur est considérée constante ; 3° dans leur rapport à l'interprétant (en tant que sèmes onomatiques), ces signes participent à nouveau, de manière indirecte, à la construction de propositions au sens complet et, de plus, déterminé. Ce sont donc des syncatégorèmes dans le détail de leur analyse, malgré leur fonction logique ultime. Encore une fois, ce n'est pas l'objet désigné par le sujet logique qui est constant, mais son mode de désignation qui est déterminé.

---

[62] Ce que remarque Frege dans la *Begriffsschrift* (1879 : § 9) ou encore dans « Was ist eine Funktion » (1962 (1904)).

Les quantificateurs sont pour leur part des opérateurs qui viennent caractériser le mode de désignation des arguments ou sujets logiques, dans le contexte de la fonction ou prédicat logique, c'est-à-dire dans les limites de la portée du prédicat. Les signes qui les représentent usuellement, introduits respectivement par Peano (1897) et Gentzen (1934-1935), sont le signe ∃ pour le quantificateur particulier[63] et le signe ∀ pour le quantificateur universel. Ces signes sont des *légisignes symboliques onomatiques* puisque : 1° en soi (en tant que légisignes), ils sont institués par convention, d'autres notations étant possibles[64] ; 2° dans leur rapport à l'objet (en tant que symboles), les quantificateurs sont des signes de seconde intention : ils représentent des modes de désignation, c'est-à-dire des manières d'effectuer une mise en relation d'éléments grammaticaux ; ce qui fait des indices qu'ils désignent des signes de seconde intention, au sens indéterminé mais défini, c'est-à-dire général (pour quelque, pour tous), et d'eux-mêmes les idées générales qui appellent ces indices comme désignateurs logiques, dans les limites subjectives, psychologiques, du langage ; 3° dans leur rapport à l'interprétant (en tant que sèmes onomatiques), ces signes indiquent en quel sens se modalise la composition des sujets et prédicats

---

[63] Le quantificateur particulier est souvent nommé, de façon erronée, « quantificateur existentiel », mais l'existence n'est pas fondamentalement une affaire de quantité (plutôt d'une sorte de modalité). Peirce, la tradition scolastique, les logiciens de l'École polonaise et d'autres utilisent naturellement les termes « particulier » et « universel », que nous retiendrons ici ; voir à ce sujet Kotarbiński (1964) et Priest (2007). D'ailleurs Frege, dans les *Grundgesetze* (1893 : § 8), lit lui-même le signe de généralité, dans un de ses usages : « *es giebt* mindestens eine », en mettant l'emphase sur le « *es giebt* » (un marqueur d'existence), mais en n'oubliant pas de faire suivre par « mindestens eine » (le quantificateur proprement dit) ; malgré que la distinction reste vague dans l'ensemble de son œuvre, puisque l'on trouve aussi comme lecture, dans la *Begriffsschrift* (1879 : § 11), « es giebt » seul, en plus de « es giebt einige ». Le signe utilisé est interprété avant tout comme un signe de généralité (ou universalité, *Allgemeinheit*), sans que les quantités logiques soient clairement distinguées et explicitement conceptualisées pour elles-mêmes. Dans l'introduction aux *Grundgesetze* (1893 : xxv), l'auteur critique également la lecture psychologisante, actualiste en un sens matériel, de l'expression « es giebt » par B. Erdmann ; et il utilise lui-même ailleurs les expressions « Existentialsatz » (Frege 1962 (1891 : 26), « Funktion und Begriff ») et « partikulär » (Frege 1962 (1892 : 198, 200), « Über Begriff und Gegenstand » ; *Grundgesetze* (1893 : § 13)) en un sens formel.

[64] La notation de Peirce, reprise par de nombreux auteurs subséquents (dont Schröder, Skolem), mais maintenant supplantée, qui désigne le quantificateur particulier par Σ et le quantificateur universel par Π, avait l'avantage de rappeler le sens des opérateurs mathématiques correspondants (sommation et produit). Il faut toutefois, dans ce cas, bien distinguer le sens logique de ces opérations de leur sens mathématique.

logiques, les éléments de première intention, en propositions au sens complet, c'est-à-dire, dans un cadre classique, jugeables comme vraies ou fausses. Ce sont des syncatégorèmes en un sens particulier, car ils dépendent de deux autres éléments grammaticaux à la fois, le prédicat et le sujet logiques.

Autres éléments de notation communs

Pour chaque partie de la logique, des propositions inanalysées ou analysées, des expressions neutres peuvent également être utilisées qui représentent des propositions simples ou complexes, analysées ou non. Les signes qui les représentent dans la convention retenue sont les lettres latines majuscules en caractères italiques, commençant par A, B, C, …,[65] et pouvant être réitérées avec des indices. Ces signes sont des *légisignes symboliques phémiques*, pour les mêmes raisons que les propositions inanalysées, sauf que leur sens est plus général, toujours indéterminé bien que défini, puisqu'ils peuvent désigner plusieurs types d'éléments logiques définis : propositions simples ou complexes, analysées ou non. Ils constituent ce qu'on appelle communément des « schémas d'axiomes »[66] et sont parfois nommés « métavariables ». De plus, comme ces expressions neutres sont des signes désignant de manière indéterminée d'autres signes, ce sont des signes de seconde intention.

Dans l'opération même de la logique en méthode axiomatique, lorsque des propositions et arguments sont évalués, ceux-ci sont également annotés sur le plan graphique de la dérivation à l'aide d'indices. Ces indices notent d'une part, sur la droite des propositions considérées, les règles d'inférence, les axiomes et les

---

[65] Sans atteindre la série F, G, H, … des prédicats.

[66] Les schémas d'axiomes, qui utilisent des métavariables A, B, C, …, pouvant représenter aussi bien des propositions (simples ou complexes) inanalysées qu'analysées, ont été introduits par von Neumann (1927). Il faut les distinguer des « schémas d'inférence » de Hilbert & Bernays et de Gentzen, que nous introduirons plus loin.

théorèmes utilisés, et marquent d'autre part, sur la gauche, ces propositions au fur et à mesure qu'elles sont introduites, ce qui permet de s'y référer afin de développer la dérivation par la récursion des règles et la répétition des axiomes ou théorèmes dérivés. Ces signes sont des *légisignes indexicaux onomatiques*, cette fois proprement indexicaux et de seconde intention (tout comme la ponctuation) et non par l'entremise de symboles plus généraux (comme les variables et constantes d'individus et les quantificateurs), puisque c'est dans leur usage même et leur situation graphique sur le plan de la dérivation qu'ils réfèrent aux règles, axiomes et autres théorèmes[67].

Définitions

En pratique, certains des opérateurs seulement sont considérés comme primitifs et utilisés dans la formulation des axiomes, tandis que les autres sont définis à partir de ces premiers. Ainsi, nous illustrerons notre analyse au moyen d'un système d'axiomes de Łukasiewicz (1925) basé sur l'implication et la négation, mais d'autres combinaisons d'opérateurs primitifs seraient possibles ; par exemple, Whitehead & Russell (1910-1913) utilisent la disjonction et la négation et Hilbert & Bernays (1934), un plus grand nombre d'opérateurs encore. Les définitions sont des propositions complexes qui donnent l'équivalent, par une biconditionnelle (notée $=_{\text{déf.}}$ ou $\coloneqq$, qui se lit « définition » en mention et « signifie » en usage) opérant en seconde intention (un légisigne symbolique onomatique), de la proposition complexe plus élémentaire faisant usage de l'opérateur défini. On peut aussi considérer que les opérateurs définis servent en fait d'abréviations pour les propositions complexes utilisant des opérateurs primitifs. D'un point de vue sémiotique, ces définitions sont donc des *légisignes symboliques phémiques* de seconde intention. Elles introduisent

---

[67] Cela évidemment si les règles et axiomes sont d'abord introduits et marqués d'indices et non référés par des abréviations conventionnelles (par exemple, le nom de *modus ponens* ou MP pour la règle correspondante, A1 pour l'axiome 1 d'une axiomatique préétablie, etc.).

de nouveaux signes sur la base d'un ensemble de signes au sens déjà déterminé. Avec l'implication et la négation comme opérateurs primitifs stipulés, les autres opérateurs (parmi les seize réellement primitifs de la combinatoire des propositions comme fonctions de vérité) peuvent être définis par les propositions suivantes :

$A \wedge B \coloneqq \neg(A \rightarrow \neg B)$;

$A \vee B \coloneqq (\neg A \rightarrow B)$;

$A \leftrightarrow B \coloneqq \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow A)]$;

$A \mid B \coloneqq (A \rightarrow \neg B)$;

etc.

Règles de formation des expressions bien formées

Les règles de formation des expressions bien formées (ebf.)[68] sont à leur tour des propositions qui gouvernent la syntaxe. Elles déterminent la construction des propositions complexes à partir d'autres propositions simples ou complexes et d'opérateurs. Ces règles sont traditionnellement considérées comme faisant partie du métalangage, le langage portant sur la langue objet qu'est la langue formelle de la logique (Carnap 1934). Du point de vue grammatical de la sémiotique, ce sont des propositions complexes de seconde intention, des *légisignes symboliques phémiques*, dont les objets sont d'autres *légisignes symboliques phémiques*, qui sont eux-mêmes composés des éléments sur lesquels portent les opérations de la logique en première intention. En logique classique et dans l'approche modèle-théorétique, les règles de formation des expressions bien formées prennent la forme de biconditionnelles de seconde intention entre l'expression opératoire et une expression sémantique, ici dans une formulation plus informelle (puisqu'on tombe dans le « métalangage ») :

---

[68] « *Well-formed* » : terme de Church (1932), aussi « *rechtmässig gebildet* » dans les *Grundgesetze* de Frege (1893 : § 28), « *meaningful expression* » chez Łukasiewicz (1929 (1958)) ou encore « *syntaktisch konnexe* » selon Ajdukiewicz (1935).

$A \wedge B$ est une ebf. ssi A et B est vrai ;

$A \vee B$ est une ebf. ssi A ou B est vrai ;

$A \rightarrow B$ est une ebf. ssi si A alors B est vrai ;

$\neg A$ est une ebf. ssi A est faux ;

etc.

Règles d'inférence

Les règles d'inférence sont aussi des propositions qui légifèrent la syntaxe, mais au niveau argumentatif et non propositionnel. Elles permettent de transformer des propositions et de construire des arguments à partir de propositions simples ou complexes, non pas composées à l'aide d'opérateurs, mais plutôt mises ensemble en vertu de certains schémas d'inférence. Ces règles ne peuvent être considérées comme portant sur des propositions que dans le cadre d'arguments. Les deux principales règles d'inférence, en méthode axiomatique, sont la règle de détachement (ou *modus ponens*) et la règle de substitution. D'autres règles peuvent aussi être utilisées, en plus ou au lieu des deux règles précédentes, tels le *modus tollens* et la règle de remplacement. Ces règles sont des *légisignes symboliques phémiques* de seconde intention qui, par opposition avec les règles de formation des expressions bien formées, portent avant tout sur des arguments du niveau structurel et non des propositions du niveau opératoire. Notons que les règles d'inférence sont elles-mêmes des phèmes et non des delômes, elles constituent des schémas d'inférence qui représentent, en une proposition complexe du niveau législatif (de la critique), les arguments du niveau structurel et leurs propositions de niveau opératoire (de la grammaire). D'un point de vue sémiotique, ces propositions remplissent donc leur rôle normatif de règles au niveau de la critique logique. Leurs formulations sont les suivantes :

R1. $A \rightarrow B$ et A, donc B (règle de détachement ou *modus ponens*) ;

R2. A, donc $S^{b}{}_{B}A|$ (substitution de b par B dans A ; règle de substitution).

Axiomes

Les axiomes sont des propositions que l'on considère comme d'emblée valides (que l'on asserte dès le départ) et qui servent de base à la dérivation des autres propositions valides ou théorèmes du système de logique. Ce sont donc des propositions complexes construites à partir de propositions simples et d'opérateurs primitifs. Le nombre d'axiomes peut varier d'un système à l'autre, un nombre réduit simplifiant la compréhension de la base primitive du système, mais compliquant les dérivations de théorèmes, à l'inverse d'un système avec plus d'axiomes et, parmi ceux-ci, d'opérateurs primitifs. Les axiomes, tels qu'utilisés dans une dérivation, sont des *légisignes symboliques phémiques* de seconde intention, dont la particularité est plutôt méthodeutique que grammaticale, par leur rôle dans l'axiomatique. Ils s'apparentent donc davantage à des constantes propositionnelles (de première intention) qu'aux règles d'inférence (normatives, de base argumentative et de seconde intention). Nous donnons quelques exemples, parmi les plus signifiants historiquement, de systèmes d'axiomes pour les logiques des propositions inanalysées et analysées, et retenons ensuite l'axiomatique plus simple de Łukasiewicz (1925) :

- Frege (1879), axiomes translittérés en notation standard, sous forme de schémas d'axiomes :

  1. $A \supset (B \supset A)$,
  2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$,
  3. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$,
  4. $((A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A))$,
  5. $\neg\neg A \supset A$,

6. $A \supset \neg\neg A$.

- Whitehead & Russell (1910-1913) :

  ∗1·2. $\vdash : p \vee p . \supset . p$ Pp.

  ∗1·3. $\vdash : q . \supset . p \vee q$ Pp.

  ∗1·4. $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ Pp.

  ∗1·5. $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$ Pp.

  ∗1·6. $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ Pp.

- Hilbert & Ackermann (1928 (1938)), mêmes axiomes que *PM*, mais sans **∗1·5.**, le principe d'associativité, qui n'est pas indépendant :

  1. $X \vee X \rightarrow X$,

  2. $X \rightarrow X \vee Y$,

  3. $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$,

  4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$.

- Łukasiewicz (1929), Łukasiewicz & Tarski (1930), translittérés ensuite en notation standard :

  1. *CCpqCCqrCpr* $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$,

  2. *CCNppp* $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$,

  3. *CpCNpq* $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$.

- Łukasiewicz (1925)[69] ; translittérés ensuite en notation standard et sous forme de schémas d'axiomes (version de l'axiomatique à trois axiomes reprise dans plusieurs manuels tels Church (1956), Leblanc & Wisdom (1993), Vernant (2001), et mentionnée dans Hilbert & Ackermann (1928)) :

  1. *CpCqp* $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,

  2. *CCpCqrCCpqCpr* $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$,

  3. *CCNpNqCqp* $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.

---

[69] Selon une note de bas de page dans Łukasiewicz & Tarski (1930), il s'agit d'une simplification de Frege (1879).

- Nicod (1917), axiome unique utilisant l'incompatibilité (la barre de Sheffer $\mid$, conjonction niée ou non-conjonction (vs son dual le rejet $\downarrow$, disjonction niée ou non-disjonction)), translittéré en usant de parenthèses, etc., plutôt que de points, et sous forme de schéma d'axiome :

  $[A \mid (B \mid C)] \mid \{[E \mid (E \mid E)] \mid [(D \mid B) \mid ((A \mid D) \mid (A \mid D))]\}$.

- Leblanc & Wisdom (1993), A1-A3 les mêmes que dans Łukasiewicz (1925) ; les auteurs reprennent les axiomes de Łukasiewicz pour la logique propositionnelle et les axiomes de Fitch (1952) pour la logique prédicative, sous forme de schémas d'axiomes :

  A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,

  A2. $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$,

  A.3 $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$,

  A.4 $A \rightarrow \forall x\, A$,

  A.5 $\forall x\, (A \rightarrow B) \rightarrow [\forall x\, A \rightarrow \forall x\, B]$,

  A.6 $\forall x\, A \rightarrow A(t/x)$,

  et $\forall x\, A$ lorsque, pour un terme t quelconque n'appartenant pas à $\forall x\, A$, $A(t/x)$ est un axiome.

Exemple de preuve

Pour le théorème : $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

(avec l'axiomatique de Łukasiewicz (1925))

(1)	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	(A2)
(2)	$1 \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow 1]$	(A1)
(3)	$(q \rightarrow r) \rightarrow 1$	(R1, 1, 2)
(4)	$(q \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$	(A1)
(5)	$3 \rightarrow [4 \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)])]$	(A2)
(6)	$4 \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)])$	(R1, 3, 5)
(7)	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	(R1, 4, 6).

La notation de l'axiomatique sur son plan de dérivation est bilinéaire (sens) ou bidimensionnelle (extension du plan). Elle est d'abord linéaire dans le sens d'inscription de chaque proposition ou formule, à l'horizontale et de gauche à droite, mais aussi dans le sens du développement de l'argument, à la verticale et de haut en bas. La marque caractéristique la plus importante de cette notation, ce qui la distingue de la notation arborescente que nous verrons plus loin, est que l'usage d'indices est nécessaire pour noter l'ordre de la dérivation, c'est-à-dire la récursion des règles d'inférence dans leur application aux axiomes et théorèmes dérivés. Ces indices sont nécessaires, parce que la notation bilinéaire ne permet pas de montrer par sa propre disposition tous les détails de la dérivation et en particulier l'ordre suivant lequel les règles sont appliquées aux formules et dans lequel ces dernières se suivent. Les indices complètent donc le diagramme de la notation en rendant explicites les relations entre les éléments de la dérivation, leur syntaxe. L'argumentation consiste essentiellement à construire des schémas de détachement, par la règle du *modus ponens*, à partir de propositions simples ou complexes et leurs substitutions.

Récapitulation

Pour résumer l'analyse de la notation algébrique linéaire de l'axiomatique, nous pouvons dire que les signes de cette notation sont presque tous des symboles, seule la ponctuation et les marques supplémentaires de la dérivation constituant sous un certain aspect des ensembles d'indices, permettant de construire des diagrammes. En effet, si l'on considère que l'objet dont tient lieu le signe de la notation est le raisonnement, on constate que les différents éléments de la notation sont signifiants dans leur rapport à l'objet par convention. Chaque élément du vocabulaire représente l'élément du raisonnement qu'on lui assigne par une entente mutuelle et explicite. Les prédicats logiques sont eux-mêmes représentés par des symboles rhématiques et les sujets logiques par des symboles onomatiques. Les schémas qui représentent des axiomes et des règles d'inférence sont pour leur part des symboles complexes composés de symboles simples, interprétés en tant que variables et opérateurs. Les axiomes, outre leurs schémas notationnels, sont d'ailleurs postulés comme tels. La preuve reproduit le raisonnement valide en tablant sur ces ensembles composés de symboles et en suivant une méthode qui est à son tour conventionnelle. La ponctuation n'est cependant pas seulement constituée de symboles. Elle comprend des indices qui viennent articuler la pensée par la façon dont ils ordonnent et mettent en relation les éléments du vocabulaire et les propositions qui servent d'axiomes ou en sont dérivées. Les indices qui cadrent chaque ligne de la preuve indiquent l'ordre d'interprétation des formules, tandis que la ponctuation — c'est-à-dire les indices tels que les parenthèses, mais aussi les autres éléments symboliques du vocabulaire en tant qu'ils assurent leur propre ordre et se distinguent par le rôle qu'ils jouent au sein des expressions bien formées — agence pour sa part les éléments de la notation selon certaines relations ordonnées, qui correspondent à des relations propres au raisonnement, donc en un *diagramme*. L'aspect le plus explicite de la notation reste néanmoins sa symbolicité, la diagrammaticité de la notation n'atteignant pas le même niveau critique dans le développement de la réflexion logique : on réfléchit explicitement sur les symboles plutôt que sur le diagramme. Seuls les symboles phémiques de propositions simples sont des signes de première intention.

2.2.2. Notation polonaise

La logique en notation polonaise constitue une variante proprement notationnelle de la logique classique axiomatisée en notation standard, la grammaire n'étant pas pour le reste modifiée. La principale différence avec la notation standard est que dans la notation polonaise tous les opérateurs sont préfixés immédiatement aux termes et propositions auxquels ils s'appliquent, tandis que dans la notation plus commune l'opérateur unaire de la négation ($\neg$), de même que les quantificateurs ($\exists$, $\forall$), sont préfixés, alors que les opérateurs binaires ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ...) sont infixés, c'est-à-dire placés entre les propositions auxquelles ils s'appliquent. Ces distinctions changent l'ordre de lecture et donc l'interprétation de la syntaxe d'une notation par rapport à l'autre[70]. La notation qui fait usage d'infixes doit dès lors utiliser des parenthèses ou autres marques de ponctuation pour marquer sa syntaxe, tandis que la notation dont les opérateurs sont uniquement préfixés peut se passer de ponctuation supplémentaire. Le sens linéaire, contrainte représentationnelle du plan de la notation, suffit, avec la convention de lecture qui s'ensuit, à rendre l'ordre syntaxique des formules dans la notation préfixée. Une notation postfixée aurait d'ailleurs le même effet sur l'interprétation de la syntaxe. Notons toutefois que dans le développement des arguments, la notation polonaise est également bilinéaire ou bidimensionnelle et fait usage d'indices pour rendre compte du déroulement de la dérivation.

Le système de la logique classique en notation polonaise est constitué de la même structure générale qu'en notation standard, mais sans les signes de ponctuation et avec d'autres signes pour les opérateurs ; ainsi, pour le fragment de la logique des propositions inanalysées (d'après Łukasiewicz (1929), en modifant la formulation des règles de formation des expressions bien formées)[71] :

Vocabulaire :

- des propositions $p, q, r, \dots$
- des opérateurs ou connecteurs $N, K, A, C, \dots$

---

[70] Par défaut d'intelligence, si l'on peut dire, dans le cas de l'ordre de lecture, car une personne au cerveau très puissant pourrait directement comprendre la syntaxe propre à la notation préfixée tout en en lisant le texte dans l'ordre imposé par la linéarité. Un ordinateur peut opérer en suivant une telle syntaxe dans son ordre linéaire, mais on ne peut sans doute pas affirmer qu'il la comprend.

[71] Il faut remarquer que la compréhension de la grammaire de Łukasiewicz et son école n'est pas tout à fait la même que celle de la logique standard présupposée ici, qui nous vient de Frege, Russell, Hilbert, Church, etc. (par exemple, l'interprétation des quantificateurs est différente). Nous considérons la notation polonaise avant tout pour son usage de l'ordre syntaxique préfixé.

Règles de formation des expressions bien formées :

Kpq est une ebf. ssi p et q est vrai ;

Apq est une ebf. ssi p ou q est vrai ;

Cpq est une ebf. ssi p est faux ou q est vrai[72] ;

Np est une ebf. ssi p est faux ;

etc.

Règles d'inférence :

R1. Si, dans un système comprenant les thèses α et β, α est une implication dont l'antécédent est équiforme à β, alors on peut reconnaître comme thèse du système toute expression γ équiforme au conséquent de α (règle de détachement ou *modus ponens*).

R2. Si l'expression α est une thèse du système, alors on peut reconnaître comme thèse du système toute expression qui est une substitution correcte de α (règle de substitution).

Axiomes :

1. *CCpqCCqrCpr*
2. *CCNppp*
3. *CpCNpq* .

Les opérateurs binaires en notation polonaise ne fonctionnent que sur des couples de propositions, c'est-à-dire que l'on ne peut avoir une série de plus de deux propositions jointes par des connecteurs de même niveau syntaxique, les séries de plus de deux propositions devant plutôt être constituées de couples eux-mêmes composés de couples joints par des opérateurs binaires. Par exemple, la notation polonaise ne peut pas directement exprimer une formule en notation standard telle que $(p \wedge q \wedge r)$, mais doit plutôt la transcrire en présupposant un ordre entre les opérateurs, de la façon

[72] Ce qui présuppose une définition de l'implication en termes de négation et disjonction.

suivante : *KKpqr*, qui équivaut à $((p \wedge q) \wedge r)$ en notation standard[73]. Le sens linéaire de la notation impose un ordre entre les opérateurs dans la notation préfixée.

Considérons maintenant un exemple de preuve :

Exemple de preuve :

1. *CCpqCCqrCpr*
2. *CCNppp*
3. *CpCNpq*

1 *p*/*Cpq*, *q*/*CCqrCpr*, *r*/*s* * *C*1—4

4. *CCCCqrCprsCCpqs* .

Le commentaire inséré entre les lignes 3 et 4 décrit les opérations qui permettent, en vertu des règles d'inférence (et, implicitement, des règles de formation des ebf.), de dériver le théorème 4 des axiomes précédents, soit une série de trois substitutions sur l'axiome 1, puis le détachement de 1 à 4, notés respectivement à gauche et à droite de l'astérisque[74].

Ainsi, on constate que les expressions logiques en notation polonaise, telles qu'illustrées dans notre exemple, forment un diagramme par la seule position des signes d'opérateurs et de propositions sur le plan bilinéaire de la notation, sans faire usage de ponctuation supplémentaire. Toutefois, bien que le diagramme des expressions logiques suffise à rendre compte, avec sa convention de lecture, de l'ordre syntaxique des propositions complexes, il ne permet pas de représenter par lui-même la syntaxe des arguments. Les formules doivent donc être accompagnées d'indices et d'un commentaire décrivant les opérations de la dérivation. La notation est ici restreinte, par la linéarité verticale, dans sa capacité à représenter en particulier la

---

[73] Cf. Prior (1955). Cela rappelle la skolémisation des expressions quantifiées (conversion des quantificateurs particuliers en fonctions), sa duale l'herbrandisation des expressions quantifiées (conversion des quantificateurs universels en fonctions) et la curryfication des termes lambda (conversion d'une fonction à plusieurs arguments en une série de fonctions à un argument chaque). Dans tous ces cas, on tâche de réduire la complexité grammaticale (nombre de catégories) tout en aménageant la syntaxe (ordre).

[74] Bocheński (1948) et Prior (1955) utilisent, au lieu d'un astérisque, le signe d'égalité = .

récursivité du processus de dérivation propre à la méthode axiomatique du système de logique.

Le signe qui représente une proposition complexe en notation polonaise, dans son ensemble un *légisigne symbolique phémique* de seconde intention, est donc, sous un autre aspect, si l'on considère le jeu des relations entre ses composantes, un *légisigne iconique sémique* et, plus précisément, un *diagramme* des propositions simples en première intention, car : 1° en soi (en tant que légisigne), ce signe suit la linéarité de la notation dans sa syntaxe et est compris comme appliquant les opérateurs aux expressions complètes qui les suivent immédiatement, ce qui est établi par convention ; 2° dans son rapport à l'objet (en tant qu'icône ou diagramme de la proposition), les relations entre ses composantes sont tenues pour similaires, si l'on suit l'ordre de lecture, aux relations entre les composantes de la proposition logique, et cela sans que l'on ait besoin de signes supplémentaires (des intermédiaires) pour fixer l'ordre syntaxique ; et 3° dans son rapport à l'interprétant (en tant que sème), il est interprété comme prenant part à un phème, le signe global de la proposition complexe, dans sa composition avec chacun des signes d'opérateurs et de propositions, en tant qu'indices ; et cela en seconde intention puisque les propositions simples comme signes sont les objets sur lesquels porte directement la proposition complexe, les sens des premiers se composant dans l'interprétation de la dernière.

Finalement, la notation polonaise peut sembler plus « mentale » et moins « visuelle » que la notation standard, mais c'est parce que la notation préfixée utilise les signes de propositions et d'opérateurs comme indices et leur suite linéaire comme diagramme de la proposition globale, dans un ordre qui diffère de celui des grammaires particulières de nos langues usuelles, ce qui nous force donc à réfléchir autrement. Ce n'est qu'une question d'habitude, puisque l'ordre préfixé représente tout aussi bien à sa manière l'enveloppement des propositions par leurs opérateurs respectifs.

Digression sur la syntaxe

La comparaison de la notation polonaise avec la notation standard pour un système de logique donné fait ressortir différents niveaux de l'analyse du langage. Il faut d'abord remarquer que la transcription de l'une des deux notations dans l'autre ne constitue pas une simple translittération des formules. Les deux notations n'ont pas seulement des vocabulaires ou ensembles de caractères différents, mais aussi des syntaxes différentes, pour une même grammaire logique de base. Un exemple de pure translittération d'une notation dans une autre serait tout simplement l'usage de caractères différents pour les mêmes éléments de ponctuation ou connecteurs dans des présentations différentes d'un même système axiomatique. Par exemple, Hilbert & Ackermann (1928) reprennent en gros le système de logique des *Principia Mathematica* de Whitehead & Russell (dont ils changent quelque peu les axiomes et certains autres points de détail, mais les *PM* sont la base de leur exposé), tout en changeant la notation sur certains points, ce qui n'affecte nullement la syntaxe du système de logique : Hilbert & Ackermann ponctuent les formules avec des parenthèses (,), plutôt que des points . , : , :. , ...[75], comme dans les *PM* ; ils notent la conjonction avec l'esperluette & plutôt qu'un point . , etc. Il s'agit d'une pure translittération, car dans ce cas-ci on substitue un type de signe pour le même type de signe dans un même ordre syntaxique.

Toutefois, les substitutions peuvent être plus compliquées, déjà par le type de signe qui est substitué et l'analyse du langage qu'il permet, mais aussi par la syntaxe sous-jacente à l'ensemble du langage d'origine et puis à celui de substitution. En ce qui concerne l'analyse grammaticale propre au type de signe utilisé, on peut penser aux translittérations de langues usuelles en divers systèmes d'écriture, systèmes à l'origine propres à des langues différentes et qui impliquent des analyses du langage

---

[75] La syntaxe spécifiquement des parenthèses n'est pas la même que celle des points, mais cela ne change pas la syntaxe du reste des formules, c'est-à-dire des opérateurs, des propositions simples et des fonctions et arguments, dans leur ensemble.

elles-mêmes différentes. Ainsi, dans le cas de la « translittération » de la langue japonaise écrite en caractères de l'alphabet latin moderne, l'analyse linguistique à la base du système d'écriture d'origine n'est pas la même que celle du système d'écriture de substitution. Par exemple, prenons le vers suivant de Hayashi Yoshiki, que l'on transcrit ensuite en caractères de l'alphabet latin moderne :

紅に染まったこの俺を / 慰める奴はもういない

kurenai ni somatta kono ole wo / nagusameru yatsu wa mou inai.

Chaque caractère morpho-phonémique sino-japonais ou caractère morique japonais (deux types de caractère principaux sont utilisés, *kanji* et *kana*[76]) est rendu par des caractères phonémiques de l'alphabet latin moderne selon une certaine analyse linguistique de la langue japonaise, différente dans chaque cas, et une convention de translittération conséquente (plusieurs sont possibles). Il ne s'agit donc pas d'une simple translittération, puisque la transcription présuppose une analyse linguistique des mots de la langue japonaise selon les possibilités offertes par l'alphabet latin moderne. Mais, dans cette sorte de substitution, on ne fait quand même que transcrire chaque caractère sans changer la syntaxe de la langue.

Dans le cas de la notation polonaise, cependant, c'est bien la syntaxe de la « langue » que l'on change, par rapport à la notation standard ; sans changer de types de signe dans la représentation des opérateurs et propositions simples, mais en éliminant la ponctuation explicite des formules. En ce qui concerne la ponctuation, sa fonction est en quelque sorte reprise par les signes d'opérateurs et de propositions, qui doivent par eux-mêmes, par leur type et par le lieu qu'ils occupent dans la représentation linéaire de la formule, rendre l'ordre syntaxique que la ponctuation aide à marquer en notation standard. On pourrait ainsi dire que la ponctuation s'efface dans la prosodie, le marquage syntaxique dépendant alors de la réalisation effective

[76] Les caractères sino-japonais ou *kanji* peuvent être de types plus divers que seulement morpho-phonémiques, bien que la plupart soient de cette sorte. De même pour l'alphabet latin moderne, qui utilise aussi des signes autres que phonémiques (symboles techniques, ponctuation, etc.). Une étude des systèmes d'écriture des langues usuelles dûment fondée demeure un projet à réaliser, mais on peut déjà consulter à ce sujet les travaux de DeFrancis (1989), Coulmas (2003) et Rogers (2005).

du langage[77]. En plus, la syntaxe même de la langue change, ce qui constitue ici le point le plus important. En fait, c'est comme si l'on parlait une autre langue, avec une autre syntaxe. Le système de logique, sur la base d'une même grammaire pure, se réalise dans deux langues aux syntaxes différentes. C'est d'ailleurs une erreur commune et difficilement surmontable que de ne pas « lire » la notation polonaise en suivant sa propre syntaxe, mais de la traduire dans la syntaxe de la notation standard, qui nous est plus naturelle sans doute parce que plus près de *notre* propre langue usuelle (le français, le russe, le japonais, etc.)[78], au moment de la lecture[79]. La juste appréciation de la notation polonaise passe toutefois par le respect de sa propre syntaxe lors de son interprétation.

La régularité de l'ordre syntaxique en notation polonaise permet entre autres de formaliser la syntaxe d'une langue à l'aide d'une certaine méthode d'évaluation de la bonne connexion syntaxique, élaborée par Ajdukiewicz dans son article de 1935, « Die syntaktische Konnexität ». Le but de l'auteur, dans cet article, semble être avant tout d'appliquer sa méthode aux expressions de la logique, en langue formelle donc ; mais il donne aussi des exemples d'application à des expressions de la langue usuelle, ce qui a motivé par la suite tout le développement des grammaires formelles appelées

---

[77] Il faut bien distinguer ici la syntaxe formelle de la langue (la grammaire particulière du formalisme logique), de la grammaire particulière (ou syntaxe) *effective* que constitue la notation. Au lieu de dire « effective », on pourrait dire à la rigueur « matérielle », mais la matière connote l'amorphe et le passif, tandis que la notation reste un *système* d'écriture, donc d'une certaine manière toujours formelle, dont la mise en acte est un aspect essentiel. L'analyse des notations dans cette thèse tend à faire ressortir leurs différents aspects phénoménaux, de plus en plus explicités au cours du développement des formalismes logiques.

[78] N'oublions pas que les diverses langues d'usage peuvent aussi être structurées selon des modèles syntaxiques différents (SVO, ordre libre, thème/commentaire, etc.).

[79] Le même défaut d'interprétation, par expérience personnelle, semble être commun lors de l'utilisation de calculatrices en notation polonaise inversée : on apprend à les utiliser tout en continuant d'écrire ou de lire les formules mathématiques sur papier en notation standard, c'est-à-dire qu'on traduit la notation standard en notation polonaise inversée au fur et à mesure que l'on rentre les données et qu'on effectue les opérations sur la calculatrice. D'une autre manière, c'est comme si, en lisant un texte en allemand, on allait chercher le participe à la fin de la phrase avant de reprendre la lecture à la suite de l'auxiliaire, alors qu'il est fort probable que les germanophones pensent et lisent tout aussi linéairement que nous.

« grammaires catégorielles ».[80] En partant des travaux de ses prédécesseurs polonais (Łukasiewicz, Leśniewski), Ajdukiewicz élabore une grammaire qui doit servir à analyser la langue formelle d'un système de logique ; et c'est ça la *syntaxe*, une théorie grammaticale qui fait retour sur une langue déjà constituée, tandis qu'à un autre niveau, la grammaire spéculative de Peirce ou les réflexions de Frege sur le langage, par exemple, doivent plutôt servir de base au développement d'une logique, et en ce sens constituent une grammaire pure de la logique.

Dans sa grammaire, qu'il n'appelle pas une « grammaire » comme telle, Ajdukiewicz distingue, à la suite de Leśniewski, différentes catégories de signification : tout d'abord les catégories de base et les catégories de foncteurs, et parmi les catégories de base, les phrases ou propositions (*Sätze*) et les noms (*Namen*). Les phrases sont désignées par s, les noms par n et les foncteurs par une barre oblique /, suivie d'une ou plusieurs catégories de départ et précédée d'une catégorie d'arrivée. Dans l'analyse d'une expression composée du langage, à chaque élément de l'expression est attribuée une catégorie de signification. Suivant l'exemple de l'auteur, l'expression de la logique propositionnelle $P \vee P \,.\supset.\, P$ est analysée en attribuant aux éléments les indices respectifs s s/ss s s/ss s. La suite d'indices est ensuite réorganisée dans l'ordre de la notation polonaise (préfixée) et réduite selon une certaine méthode, qui tire profit de l'ordre syntaxique propre à la notation préfixée. La méthode consiste à simplifier les fractions d'indices de l'analyse, selon une règle implicite (de transitivité) qui joue le rôle du détachement (*modus ponens*) de l'axiomatique ou de la coupure des séquents. Notre exemple s'analyse de la sorte :

	$P \vee P \,.\supset.\, P$	expression analysée en notation standard des *PM*
(1)	s s/ss s s/ss s	attribution des indices de l'analyse syntaxique
(2)	s/ss s/ss s s s	mise en ordre préfixé
(3)	s/ss s s	réduction
(4)	s	réduction finale, valeur globale de l'expression.

[80] Nous traitons des aspects méthodeutiques de la grammaire d'Ajdukiewicz à la section 3.2.1.

En plus de la simple explicitation de la syntaxe, l'analyse du langage s'approfondit, dans le développement de la grammaire catégorielle, en distinguant les niveaux syntaxique, sémantique et pragmatique du langage. Husserl effectue déjà, dans la quatrième partie des *Logische Untersuchungen* (1900-1901), une distinction entre trois catégories de la signification, permettant de caractériser les expressions du discours : le sens (*Sinn*), le non-sens (*Unsinn*) et le contre-sens (*Widersinn*). Il ne s'agit pas ici de conditions nécessaires à la signification, des catégories comme composantes essentielles de sa relation constitutive, mais de modes de la signification telle qu'elle peut se réaliser ou non dans les expressions du langage. Le genre de relation qui subsiste entre ces modes n'est pas non plus explicitement spécifié, mais un certain ordre semble toutefois les déterminer puisque le contre-sens se situe en quelque sorte entre le sens et le non-sens. Ces catégories relèvent plutôt du niveau métalogique, de ce que nous avons appelé plus tôt les catégories particulières de la signification de Peirce (vague, déterminé, général). Elles préfigurent toutefois, dans une approche catégorielle, la distinction formelle entre syntaxe et sémantique.

Frege, pour sa part, effectue explicitement, dans sa quatrième « Logische Untersuchung » (1925) inachevée (citée dans l'introduction à Frege (1971)), une distinction entre ce qu'il appelle *Hilfssprache* (le langage auxiliaire) et *Darlegungssprache* (le langage explicatif), qui correspond d'une certaine manière à la distinction contemporaine entre langue objet et métalangage. Il distingue aussi, dans les *Grundgesetze* (1893, 1903), l'analyse (*Zerlegung*) des démonstrations, comme explication dans ce que nous appellerions le métalangage, de leur construction (*Aufbau*) proprement dite, dans ce qui correspondrait à la langue objet. Les notions de langue objet et métalangage sont aussi préfigurées dans certaines réflexions des logiciens polonais (Łukasiewicz, Leśniewski), de Hilbert, voire de Brouwer, mais ont été dûment conceptualisées et formalisées dans leur acception contemporaine et son cadre métaphysique particulier par Tarski (1933) et Carnap (1934).

Nous retenons les seules catégories husserliennes pour ce qu'elles permettent d'exprimer différents degrés de signifiance sémique et phémique, ce qu'illustrent les énoncés suivants :

1. *La lune est couleur de miel.*

   Phrase sensée quelconque (*Sinn*).
2. *Colourless green ideas sleep furiously.* (Chomsky 1957)

   Phrase syntaxiquement correcte, sémantiquement insensée dans son unité globale (*Widersinn*).
3. *vielleicht Pferd wenn werde jedoch scheinen* (Ajdukiewicz 1935)

   Suite de mots syntaxiquement et sémantiquement insensée dans son unité globale, bien que chaque mot soit doué de sens (*Unsinn*).
4. *hombrush bazaam kierkegaardiam*

   On peut être presque certain que la phrase ou chaque mot n'ont aucun sens, tout en ayant l'impression qu'ils veulent dire quelque chose (*Unsinn*).
5. *fktjyczwepfrthc*

   Série de lettres insensée : la série dans son ensemble est insensée, les lettres sont des symboles doués de sens (*Unsinn*).
6. On peut imaginer une trace aléatoire, un ratchatcha imaginaire possible, qui n'est rendu vaguement signifiant que par une certaine qualité de sensation (*Unsinn*).

Nous examinerons, pour terminer ces considérations digressives, un point de grammaire qui nous mènera de la syntaxe, comme grammaire particulière, à la phénoménologie du langage, une sorte de phanéroscopie particulière. Nous étudierons ce point en suivant une remarque de Peirce selon laquelle les différentes sortes de représentamen, c'est-à-dire les différents types de signe, peuvent posséder et même doivent posséder un certain degré de bonté esthétique (parmi d'autres sortes), qu'il nomme l'*expressivité* :

> The ground is now cleared for the analysis of logical goodness, or the goodness of representation. There is a special variety of esthetic goodness that may belong to a representamen, namely, *expressiveness*. There is also a special moral goodness of representations, namely, *veracity*. But besides this there is a peculiar mode *[of]* goodness which is logical. (EP2 : 203, 1903, « The Three Normative Sciences »)
>
> Esthetic goodness, or *expressiveness*, may be possessed, and in some degree must be possessed, by any kind of representamen,—rhema, proposition, or argument.
>
> Moral goodness, or veracity, may be possessed by a proposition or by an argument, but cannot be possessed by a rhema. A mental judgment or inference must possess some degree of veracity. [...]
>
> It appears, then, that logical goodness is simply the excellence of argument;—its negative, and more fundamental, goodness being its soundness and weight, its really having the force that it pretends to have and that force being great, while its quantitative goodness consists in the degree in which it advances our knowledge. (EP2 : 204, 205, 1903, « The Three Normative Sciences »)

Il ne nous en dit pas plus que dans ces citations. Nous allons donc essayer de comprendre en quoi pourrait bien consister cette expressivité de la logique, que Peirce mentionne sans en développer l'idée, et cela en examinant la façon dont elle se manifeste dans la grammaire.[81]

On peut déjà distinguer intuitivement ce qu'on pourrait appeler le *pouvoir expressif* des formalismes logiques en lien avec leurs notations. Par exemple, l'axiomatique, dont la notation est plutôt linéaire, mais pas strictement, et la dialogique, qui se base sur le formalisme des séquents et dont la notation est plutôt arborescente, ne permettent pas d'exprimer des arguments aux conséquences multiples de la même manière.

Selon la méthode axiomatique, les formules se suivent linéairement l'une à la suite de l'autre, à la verticale, et la dérivation ne suit qu'un sens de la conséquence. Cette notation convient bien au but de l'axiomatique, puisque celle-ci sert à prouver des théorèmes et non à explorer les différentes conséquences que peut suivre un

[81] On trouve aussi une idée de « perspicacité » du langage chez Sellars (1967) et Dummett (1978), mais elle n'est pas plus clairement élaborée, au prime abord, que chez notre auteur.

argumentaire, en cherchant à prouver tel théorème à partir de telles prémisses. Si l'on veut développer un autre argument, il faut recommencer une deuxième dérivation à la suite de la première.

Dans la dialogique, par contre, en anticipant un peu sur la suite[82], la méthode de dérivation par questions et réponses (entre deux interlocuteurs) nous invite à être plus critique et à explorer les différentes conséquences que peut développer un argument (ce qui est, en passant, une idée propre au pragmatisme), et la forme tabulaire, arborescente, de la notation permet aussi de représenter simultanément les différentes conséquences possibles d'un argumentaire, à travers des branchements.

Donc, nous voyons que des formalismes logiques aux notations différentes ont ce que nous pourrions comprendre intuitivement comme étant des pouvoirs expressifs différents. Ici, de toute évidence, la notation arborescente de la dialogique permet de représenter plus adéquatement les différents arguments pouvant soutenir une preuve, que la notation linéaire de l'axiomatique. La notation arborescente de la dialogique rend celle-ci, d'une certaine manière, plus expressive que l'axiomatique, dont la notation est linéaire.

Nous aborderons maintenant la question d'une manière plus critique en examinant la grammaire proprement dite de la logique et en allant en deçà de l'argumentation, au niveau des propositions et de leur structure interne. Donc, des arguments nous passons aux propositions analysées et utilisons des conceptions grammaticales mieux définies. Ce qui nous intéressera ici, ce sont les notions de fonction logique chez Frege et de phème et ses composantes chez Peirce, qui permettent d'analyser la proposition logique. La fonction logique chez Frege n'est pas l'équivalent du phème chez Peirce, mais les deux notions seront nos points de départ dans chacune des théories pour analyser la proposition. Nous utiliserons la notation standard et non l'écriture conceptuelle de Frege.

---

[82] Nous abordons la dialogique à la section 3.2.2.

La notion commune de fonction mathématique, de laquelle part Frege pour la critiquer (entre autres, dans « Funktion und Begriff », Frege 1962 (1891)), est celle d'une loi de corrélation (la fonction F) entre un domaine (l'ensemble de départ X, composés d'arguments tels que x) et un codomaine (l'ensemble d'arrivée Y, composé de variables dépendantes, valeurs de la fonction, telles que y). Frege dénonce une certaine ambiguïté dans la compréhension commune de la fonction, qui semble aussi désigner à la fois l'expression de calcul, c'est-à-dire l'expression complète $y = F(x)$, et la variable dépendante, le y dans « y est fonction de x ». Il lui donne alors un sens logique mieux défini selon lequel, en premier lieu, la fonction doit être distinguée de l'expression de la fonction, et en second lieu, la fonction même (ce que représente le F), comme dénotation de son expression, est essentiellement insaturée, c'est-à-dire qu'elle ne peut avoir un sens complet sans que lui soit adjoint un argument ou plus (ce que représente le x). La formule complète représentée par $F(x)$ est une proposition, qui a pour sens la pensée que $F(x)$ et pour référence une valeur de vérité, de la fonction notée par F, telle que saturée par l'argument noté par x. Frege fait ici la distinction, dans son analyse de la signification, entre : le signe, c'est-à-dire l'expression d'une formule complète, la proposition ; le sens de l'expression, qui est une pensée ; et la dénotation ou référence, c'est-à-dire l'objet émergeant dans la composition de la fonction et ses arguments, leur valeur de vérité.

Nous avons dit que la fonction est représentée par le F, mais ce n'est pas tout à fait vrai ou du moins la situation est plus compliquée, et c'est là qu'apparaît le point de grammaire qui va nous permettre de faire ressortir ce qui fait l'expressivité de la logique. La fonction chez Frege est essentiellement insaturée, c'est-à-dire qu'il lui manque un élément qui lui donne un certain contenu, cet élément étant l'argument. Pour exprimer l'insaturation de la fonction, Frege interprète les parenthèses comme indiquant une place d'argument, qui doit être « remplie » par un argument, représenté ici par le x. Les parenthèses sont donc un artifice supplémentaire de la notation qui a pour but de représenter le caractère insaturé de la fonction. Si l'on voulait laisser cette idée d'insaturation implicite, on pourrait tout simplement écrire *Fx*. Mais Frege tient à l'expliciter et, pour exprimer la place d'argument sans l'argument, il utilise aussi dans les *Grundgesetze* des lettres grecques minuscules. L'interprétation des parenthèses est pour sa part un peu plus compliquée, parce que celles-ci permettent d'exprimer en plus la concaténation des arguments, alors que ce qui nous intéresse est seulement leur rôle comme expression de la place d'argument. À la rigueur, dans le cas d'une fonction à un seul argument, on pourrait aussi remplacer, dans une notation *ad hoc*, les parenthèses par une barre oblique, c'est-à-dire *F*/*x* ; et c'est cette idée qui nous éclairera tout d'abord sur ce que pourrait être le rôle des parenthèses ou de la barre oblique dans une analyse grammaticale plus fine de la logique, leur rôle expressif.

C'est que dans la logique polonaise (Łukasiewicz, Leśniewski, Ajdukiewicz, Kotarbiński), les auteurs distinguent la fonction du foncteur, distinction qui n'est pas toujours très claire. Dans les *Éléments de logique mathématique* de Łukasiewicz (1929), la fonction est le composé du foncteur (opérateur) et de l'argument (proposition simple). Le foncteur de Łukasiewicz correspond donc d'une certaine manière à la fonction de Frege, bien que dans une logique propositionnelle, où il sert à la formation de propositions complexes ; et la fonction de Łukasiewicz, quant à elle, correspond à la proposition de Frege, si l'on ne tient pas compte de la distinction fregéenne fondamentale entre signe, sens et référence[83]. Mais Ajdukiewicz, pour sa part, dans son article de 1935 « Die syntaktische Konnexität », semble utiliser les termes « fonction » et « foncteur » dans un autre sens, ce qui nous intéressera maintenant.

Ce qui nous préoccupe, c'est de voir comment serait exprimée une fonction dans la syntaxe d'Ajdukiewicz. Une fonction d'expression commune $y = F(x)$ serait rendue par *s*/*n* : une analyse qui montre que le foncteur transforme le ou les noms en

[83] « The expression *Np*, like every expression containing variables, is called a *function*. The function in question consists of two parts : the functor *N* and the argument *p*. An expression consisting of the functor *N* and of one argument which is a sentence and stands to the right of the functor, is a sentence. That is why we say that *the functor N is a sentence-forming functor of one sentential argument.* » (Łukasiewicz 1929 (1963 : 23))

une phrase. Ce qui veut dire, selon l'analyse fregéenne, que la syntaxe d'Ajdukiewicz rend compte de l'expression de calcul au complet, composée de l'argument, la fonction et la variable dépendante, mais pas de l'analyse interne de la fonction qui fait ressortir la place d'argument par l'usage des parenthèses. L'expression du foncteur chez Ajdukiewicz ne correspond pas non plus à l'expression de la proposition analysée dans notre notation *ad hoc*, *s/n* n'équivaut pas à *F/x*, mais plutôt à *y/x*, les barres obliques ayant donc des sens différents. Mais que veut dire alors la barre oblique, celle par laquelle nous avons remplacé les parenthèses de Frege ou celle d'Ajdukiewicz ? Chez Ajdukiewicz, l'expression globale *s/n*, en incluant les expressions des catégories de base, devrait représenter un foncteur, bien qu'au premier abord, cela ne semble pas tout à fait clair, à savoir ce qu'il entend ici par foncteur. Un passage où il traite de l'opérateur circonflexe de Whitehead & Russell (un opérateur d'abstraction, précurseur de celui du calcul lambda) permet d'éclairer quelque peu ce point.

Whitehead & Russell (1910-1913) introduisent dans leur logique un opérateur, exprimé par un accent circonflexe placé sur le signe de l'argument, afin de distinguer la valeur dépendante de la fonction (*fz* en tant que $y = fz$), de la fonction en soi, exprimée à l'aide de l'opérateur ($f\hat{z}$). Cette fonction en soi est une constante. Ajdukiewicz identifie la fonction en soi avec ce qu'il dit qu'il appellerait alors *le corrélat objectif du foncteur*. Il ne développe pas vraiment cette idée, mais si le foncteur possède un corrélat objectif, qui est la fonction en soi, on peut aussi supposer ou bien qu'il est lui-même un corrélat *subjectif*, en un certain sens, de la fonction, ou bien qu'il est un élément neutre qui possède à la fois un corrélat objectif, la fonction, et un corrélat subjectif, ici non désigné. Dans tous les cas, on peut interpréter l'objectivité comme étant le caractère d'une loi, puisque la fonction en soi est dite constante, tandis que la subjectivité correspondrait plutôt à un acte, qui transforme l'argument de départ du foncteur en la proposition d'arrivée. On peut alors analyser la barre oblique soit sous un aspect « subjectif », selon lequel elle représente un acte, soit sous un aspect « objectif », selon lequel elle représente une règle qui donne sens à l'acte, la fonction.[84] Le terme de « foncteur » désigne pour sa part soit l'élément neutre, soit l'aspect subjectif de cet élément neutre.

Nous avons maintenant fait une distinction supplémentaire dans l'analyse grammaticale, dont une notation permettant l'analyse en profondeur de la logique devrait rendre compte. On pourrait interpréter la barre oblique, dans notre notation *ad hoc* ou celle de la syntaxe d'Ajdukiewicz, et peut-être les parenthèses dans la notation de Frege, comme représentant cet acte de connexion entre différents éléments logiques, fonction et argument dans la notation de Frege et la nôtre, arguments et variable dépendante dans la syntaxe d'Ajdukiewicz. Reste à savoir maintenant comment et en quel sens un signe peut représenter un acte, ce qui nous amène pour finir à l'analyse du phème dans la grammaire spéculative de Peirce.

Rappelons que dans la sémiotique de Peirce, une chose est un signe lorsqu'elle entre dans une relation triadique avec deux autres choses, dont l'une est son objet et l'autre son interprétant. Le phème est l'aspect que prend le signe dans sa relation à l'interprétant lorsque, de la perspective sur le signe qu'est l'interprétant, une valeur de vérité peut être accordée au signe. La proposition au sens où on l'entend d'habitude, en tant que signe représentant un fait pouvant être vrai ou faux, est un phème. Ce signe est aussi typiquement, dans sa relation à l'objet, un symbole composé d'une icône (le prédicat logique de la proposition) et d'un ou plusieurs indices (le ou les sujets logiques). Dans une proposition la plus logiquement simple possible ou dans l'analyse logique ultime d'une proposition quelconque, il ne reste plus, en première intention, qu'un ensemble d'indices, qui désignent des objets singuliers, et une icône représentant la relation entre ces différents indices. Une icône qui représente par ses propres relations internes les relations internes propres à son objet, est ce qu'on appelle un *diagramme*.

---

[84] Le même genre d'analyse reviendra, au niveau argumentatif de la grammaire, en ce qui concerne le trait de déduction dans la notation des séquents et de la déduction naturelle, et sera rendue plus claire dans la grammaire type-théorétique constructive.

La notation de Frege est symbolique et il faudrait analyser les symboles de fonction et d'argument pour en faire ressortir des icônes de prédicats logiques et des indices de sujets logiques proprement dits. Mais, malgré ce détail de l'analyse, on voit qu'il y a aussi un signe qui désigne autre chose, les parenthèses. Ce signe est associé à la fonction mais ne la désigne pas à proprement parler. Le signe des parenthèses désigne plutôt la relation entre les arguments et la fonction. Dans son analyse de la proposition du langage ordinaire, Peirce remarque de façon semblable que la copule, le verbe « être », est somme toute logiquement superflue. Elle tient plutôt d'une analyse, plus approfondie, à un autre niveau de la grammaire, où elle désigne la *syntaxe* de la phrase, c'est-à-dire la façon dont sont connectés les différents éléments de la phrase (prédicat et sujets logiques). La copule de Peirce, ou les parenthèses de Frege, ne désigne pas directement l'acte de la corrélation des différents éléments du langage, mais est un indice qui désigne la relation entre ces éléments ; ce qui fait donc ressortir cette relation et nous permet ainsi de reproduire explicitement l'acte de mise en relation qui lui est sous-jacent, à un autre niveau phénoménal. Il s'agit de ce qu'on pourrait appeler un index de seconde intention, qui permet de compléter l'analyse logique en passant à un autre niveau de la critique logique, l'analyse de la syntaxe logique.

Bref, pour conclure cette digression, dans le cas que nous avons étudié ici, celui de l'analyse de la proposition, la ponctuation (parenthèses, barre oblique) est un index de seconde intention qui fait ressortir le diagramme des éléments du langage en première intention, sa syntaxe ; et l'expressivité de la logique tient donc à la capacité que possède la notation de faire ressortir les éléments de la grammaire et ce à différents niveaux de l'analyse, ultimement par-delà la grammaire de la logique jusqu'à ses aspects phénoménaux, comme l'acte de la mise en relation des éléments du langage.

2.3. Notation algébrique arborescente

Les notations arborescentes de la logique contemporaine tirent leur origine conceptuelle de l'intuitionnisme de Brouwer et, de manière plus générale, du constructivisme, qui comprend aussi les travaux de Hilbert et son école. Brouwer (1975, 1981) utilise ainsi la métaphore organique de l'arbre, végétal et généalogique, afin d'exprimer les idées de base d'une mathématique conçue comme activité intellectuelle vivante et temporelle, antérieure même en ses fondements à l'abstraction logique (du moins telle qu'explicitée dans le langage), et non comme simple théorie constituée d'éléments statiques et de leurs règles de formation et de transformation. La notion fondamentale des mathématiques intuitionnistes est en ce sens un élément qui comprend en soi l'idée de croissance : le *déploiement* (néerl. : *spreiding*, angl. : *spread*), un terme à la connotation dynamique, par opposition à l'élément au prime abord statique de la conception standard des mathématiques, l'ensemble (all. : *Menge*, angl. : *set*, néerl. : *verzameling*)[85]. Le déploiement est une suite qui se développe en un *arbre*, dont les différents *nœuds* sont les éléments de base de la génération mathématique, indicés par des nombres. Les points extrêmes de cette génération sont, à l'origine, des *racines*, et à son terme, des *feuilles*, ces dernières pouvant être *vivantes* ou *stérilisées*, continuant à se déployer ou non. Le suivi d'une lignée de cet

[85] Dans ses premiers écrits, Brouwer utilise néanmoins le terme « ensemble » tout en lui donnant un sens intuitionniste spécifique. Il nomme plus tard les ensembles discrets cantoriens des « espèces » (*species*), cf. van Dalen (2013 : 304). L'usage du terme *spread* en un sens apparenté à celui des mathématiques intuitionnistes est en fait antérieur et semble avoir été introduit par William K. Clifford en 1878, dans son article « On the Classification of Loci ». Peirce le définit en 1889, dans le *Century Dictionary*, de la manière suivante : « *In math.*, a continuous manifold of points: thus, space is a three-way spread. » Dans les suppléments de 1909 au *CD*, on trouve cet ajout : « *In math.*: b) A continuous or discontinuous connected aggregate, assemblage, or manifold of elements: thus, for instance, a two-spread may be considered as a surface with points or lines as elements. » L'auteur définit aussi, dans le *CD* de 1889, le terme *continuum* comme suit : « A continuous spread or extension; a continuity; a continuous quantity. »

arbre est un *chemin*, tandis que la saisie d'un fragment fini d'un déploiement constitue un *éventail*, d'où le théorème de Brouwer sur les suites finies (*fan theorem*).[86]

L'origine immédiate de la notation arborescente en logique est toutefois à situer dans le formalisme des séquents de Gentzen (1934-1935), qui s'inspire lui-même des formalismes axiomatiques de Hilbert & Ackermann (1928), pour la logique classique, et de Heyting (1930), pour la logique intuitionniste ; mais également des travaux de Paul Hertz (1929), sur les systèmes d'axiomes, ainsi que de Herbrand (1930), sur la démonstration[87]. Gentzen caractérise les dérivations en méthode des séquents comme étant « en forme d'arbre généalogique » (*stammbaumförmig*), suivant donc une inspiration peut-être brouwerienne, mais sans doute plus directement hilbertienne. Il élabore aussi la typologie des éléments de la notation, ce développement allant de pair avec celui de la méthode.

Les séquents s'avèrent être dès lors, si l'on peut dire, la mère de tous les systèmes de déduction en notation arborescente, le modèle de base duquel ceux-ci découlent : par leurs propriétés logiques, les séquents fournissent des ressources conceptuelles pouvant servir au développement de ces autres systèmes. Cela vaut surtout d'un point de vue logique, car la déduction naturelle et les arbres de

---

[86] Ce vocabulaire est repris et développé ensuite en logique chez : Hilbert & Bernays (1934) : trames de preuve (*Beweisfäden*) ; Gentzen (1934-1935) : forme d'arbre généalogique (*Stammbaumform*), dérivation (*Herleitung*), séquence (*Sequenz*), trame (*Faden*) ; Kleene (1952) : *tree*, *branch*, *height*, *sequent* ; Beth (1955) : *points*, *line segments*, *tree*, *fork*, *branch*, *origin*, *rank*, *zero-tree*, *endpoint*, *subtree* ; Prawitz (1965) : *tree*, *path*, *thread*, *segment*, *sequence* ; Dummett (1977) : *proof tree-trunk*, *proof tree*, *vertex*, *nodes*, *sequents*. La théorie des arbres dans les mathématiques modernes a été développée en premier par Cayley (1857), ainsi que dans des travaux subséquents du même auteur. La métaphore de l'arbre en géométrie, reprise cette fois du vernaculaire des charpentiers, se trouve aussi fameusement chez Desargues, dans son *Brouillon project* de 1639. En philosophie, nous trouvons une telle inspiration depuis au moins l'arbre de Porphyre, présenté dans l'*Isagoge* dudit auteur, c. 268-270, comme manière de représenter les catégories ontologiques dans leur ordre propre. Cela est en quelque sorte préfiguré par l'analogie de la ligne (*La République*) et les développements dichotomiques (*Le Sophiste*, *Philèbe*, *Le Politique*) dans les dialogues de Platon. Hertz (1929), pour sa part, semble utiliser le premier une notation logique arborescente rudimentaire, mais il n'élabore pas la typologie de ses éléments, l'apport conceptuel de l'auteur touchant plutôt à la méthode des séquents qu'à leur notation.

[87] Gentzen fait explicitement référence à Hilbert & Ackermann (1928), Heyting (1930) et Herbrand (1930 (1968)) dans son texte de 1934-1935, et avait auparavant déjà consacré un article aux travaux de Hertz (1929), cf. Gentzen (1932 (1969)).

consistance sont, à tort ou à raison, mais parce qu'ils sont plus simples, généralement préférés aux séquents dans l'enseignement de la logique. Nous commencerons donc par présenter la notation des séquents, pour ensuite aborder une autre notation arborescente d'usage courant, celle de la déduction naturelle, sans nous occuper par surcroît des arbres de consistance et des tableaux dialogiques. Malgré le fait qu'ils se basent toujours avant tout sur le symbolisme de l'algèbre, les arbres constituent un pas de plus dans le développement d'une notation logique hétérogène, qui exploite pleinement la multiplicité des formes sémiotiques disponibles à l'écrit. Leur diagrammaticité est notamment plus complexe que dans la notation linéaire et est davantage exploitée, afin de faire ressortir différents aspects phénoménaux de la notation et propriétés métalogiques des systèmes de logique.

2.3.1. Méthode des séquents

Le formalisme des séquents a été développé par Gentzen dans sa dissertation inaugurale de 1934, alors qu'il poursuivait le programme de recherche lancé par Hilbert en théorie de la démonstration. Ce programme consiste à fonder les mathématiques en cherchant des preuves de complétude pour les systèmes formels de la logique et des métamathématiques. Ces preuves ne peuvent être totales — les systèmes considérés ne peuvent englober toute la logique ou toutes les mathématiques —, ce que Gödel et d'autres à sa suite démontrèrent, mais donnent du moins des solutions partielles, c'est-à-dire pour des fragments des systèmes concernés. De façon plus générale, la théorie de la démonstration étudie aussi les propriétés métathéoriques des systèmes formels. Le résultat le plus important dans l'œuvre de Gentzen est, au niveau du calcul logique, la formulation de son fameux théorème principal sur l'élimination des coupures (le *Hauptsatz*). Mais un autre résultat non moins important est, au niveau avant tout de la grammaire de la logique et ensuite de son calcul, l'explicitation des structures argumentatives de la logique et de leurs règles correspondantes ; ce qui ouvre la voie au développement des logiques sous-structurelles, auxquelles nous nous intéresserons d'ici peu. La mise en relief des structures argumentatives permet d'articuler la logique à un niveau phénoménal supplémentaire (les actes d'inférence), ce qui va dans le sens de notre approche sémiotique, selon laquelle nous reconnaissons l'importance, pour la logique, non seulement des principes mathématiques, mais aussi de certains principes empiriques qui viennent conditionner la réalisation effective du raisonnement.

Gentzen rapporte au début de sa thèse qu'il avait d'abord développé le système de la déduction naturelle, afin de rendre compte du déroulement naturel du raisonnement, avant tout mathématique, de manière plus adéquate que ne le faisaient les systèmes développés jusqu'alors, ceux de l'axiomatique, disons de Frege à Hilbert. Mais comme la déduction naturelle ne convenait pas bien à l'expression de certaines propriétés de la logique (par exemple, la symétrie dans le calcul), entre autres parce que cette méthode est plus appropriée au traitement de la logique intuitionniste qu'à celui de la logique classique, il conçut alors le formalisme des séquents, qui permet de traiter adéquatement la logique classique aussi bien que la logique intuitionniste, tout en donnant expression à un nouveau principe fondamental, le théorème principal.[88]

---

[88] Gentzen (1934-1935) nomme ses deux trouvailles, communément appelées de nos jours le « calcul des séquents » et la « déduction naturelle », de façon générale : des « formalismes » (*Formalismus*) ; et en particulier : « calcul logique » (*logische Kalkül*) ou « calcul de la déduction logique » (*Kalkül des logischen Schließens*), et « calcul naturel » (*natürliche Kalkül*) ou « calcul de la déduction naturelle » (*Kalkül des natürlichen Schließens*). Le terme « séquent » vient de l'anglais *sequent*, traduction du mot allemand *Sequenz* introduite par Kleene (1952) et reprise dans l'édition des *Collected Papers* de Gentzen par Szabo (1969) ; en français, Feys & Ladrière (1955) traduisent plutôt par « séquence » ; Anderson & Belnap (1975) et à leur suite Restall (2000) préfèrent le terme *consecution*. L'expression « calcul des séquents » n'est pas non plus utilisée dans le texte de Gentzen et vient plutôt de la postérité (Johansson (1937) : *Sequenzkalkül* ; Prawitz (1965) : *calculi of sequents* ; Kleene (1967) : *sequent calculus* ; l'introduction de Szabo à Gentzen (1969) : *sequent calculi*). Suivant la distinction faite dans la correspondance de Curry-Howard entre systèmes fonctionnels (des modèles de calcul, mathématiques) et systèmes formels (des formalismes, proprement logiques), nous préférons parler tout simplement de *séquents* (versus « séquences », afin de garder la spécificité technique) et de *déduction naturelle*, pour désigner les systèmes formels en question. Rappelons que dans notre perspective sémiotique, il s'agit plus exactement d'aspects méthodeutiques des systèmes de logique.

La méthode des séquents possède des bases communes avec à la fois l'axiomatique et la déduction naturelle, en cela que, tout comme la première, les séquents ne présupposent pas d'hypothèses externes, dont on pourrait perdre la trace dans une dérivation, et, tout comme la seconde, elle fait usage de règles d'inférence analogues aux règles d'introduction et d'élimination des opérateurs (Gentzen 1934-1935 : 190). Un séquent est constitué, à l'antécédent, d'une ou plusieurs suites finies de formules[89], concaténées « intuitivement » en conjonction ($A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$) ; desquelles on peut déduire, au conséquent, une conclusion constituée d'une seule formule, pour la logique intuitionniste, ou, possiblement aussi, de conclusions auxiliaires composées d'une ou plusieurs suites finies de formules, concaténées « intuitivement » en disjonction ($A_1 \vee \ldots \vee A_n$), pour la logique classique. Les suites indéterminées de formules sont notées par des lettres grecques majuscules (Γ, Λ, ..., à l'antécédent ; Δ, Π, ..., au conséquent), les formules spécifiques par des lettres latines majuscules italisées (A, B, C, ...) et l'inférence même par le signe $\vdash$ (le tourniquet)[90]. Un séquent, dans sa forme générale, est noté de la façon suivante :

$$\Gamma \vdash \Delta \quad \text{(forme générale)},$$

---

[89] Certains auteurs parlent d'ensembles ou d'ensembles multiples, plutôt que de suites finies de formules (Dummett (1977), Troelstra & Schwichtenberg (1996), Restall (2000), Negri & von Plato (2001)). L'interprétation originale de Gentzen, en termes de suites ou séquences finies de formules, est reprise notamment par Prawitz (1965), Sørensen & Urzyczyn (2006) et Girard (2006-2007). Dans un ensemble, il n'y a pas au prime abord d'ordre entre les éléments et la commutativité est donc une propriété primitive, implicite au système ; tandis que dans une suite, les éléments sont ordonnés dans leur génération même et la commutativité est par conséquent une propriété additionnelle et secondaire, seule l'associativité étant primitive.

[90] Le symbole $\vdash$ a été introduit et utilisé pour exprimer un jugement par Frege (1879) et puis comme signe d'assertion d'une proposition par Russell (1908) et Whitehead & Russell (1910-1913). Il est utilisé par Rosser (1935), Church (1956), Curry & Feys (1958), Anderson & Belnap (1975), Girard (1987a, 2006-2007), Restall (2000) et Sørensen & Urzyczyn (2006) au sens de déductibilité ou dérivabilité syntaxique, sens que nous retenons ici pour son usage spécifique dans le séquent. Il se nomme communément « tourniquet » (*turnstile*) et peut se lire « de [l'antécédent] on peut déduire [le conséquent] » ou, de manière plus laconique, « ... déductible... », voire « ... tourniquet... ». Gentzen (1934-1935), Kleene (1952), Prawitz (1965) et Takeuti (1975) notent plutôt l'inférence dans le séquent par la flèche $\rightarrow$; Troelstra & Schwichtenberg (1996) et Negri & von Plato (2001) utilisent la flèche $\Rightarrow$; tandis que Dummett (1977) fait usage des deux points : . Le nom « *turnstile* » (en mention) vient de Rosser (1953) qui propose de le lire « *yield* » (en usage), bien que « *entail* » soit devenu plus commun depuis (avec Kleene (1952), Curry & Feys (1958), Anderson & Belnap (1975)). Dans ce dernier cas, nous suggérons de le lire, en français, « entraîne ».

ce qui se précise, dans les cas classique et intuitionniste, en :

$$\Gamma \vdash A, \Delta \quad \text{(cas classique)}$$

$$\text{et} \quad \Gamma \vdash A \quad \text{(cas intuitionniste).}$$

La concaténation des formules en suites et la déductibilité de l'antécédent au conséquent d'un séquent, de même que la dérivation du séquent de la conclusion à partir des séquents en prémisses dans un arbre de démonstration, ne sont pas ici tout à fait du même genre que la conjonction, la disjonction et l'implication des propositions au sein des formules. C'est ce que fait ressortir le formalisme des séquents élaboré par Gentzen, qui permet de distinguer deux niveaux de la logique : 1° celui des structures argumentatives au sein desquelles on démontre des théorèmes en effectuant des inférences à partir de formules et 2° celui des formules qui sont formées de propositions et d'opérations de base sur ces propositions. Le rapport entre ces deux niveaux grammaticaux est défini par le théorème de déduction, selon lequel de l'affirmation qu'une formule B est déductible sous hypothèse A (au niveau argumentatif : $A \vdash B$), il est dérivable sans hypothèse restante (cela devient une thèse dans l'argument) que la formule A implique la formule B (au niveau propositionnel : $A \to B$) ; ce que l'on note comme suit :

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A \to B} \, .$$

À un niveau plus fin de l'analyse, les propositions qui constituent des formules sont par ailleurs elles-mêmes décomposables en termes, dans la logique dite « prédicative » ou, plus justement, « des propositions analysées » (en leurs sèmes). Le théorème fondamental et, avant lui, le théorème de déduction sont des conséquences normatives, au niveau de la critique logique, de ces distinctions grammaticales.

D'un point de vue sémiotique, la formule est un *phème* ou proposition simple, qui se compose avec d'autres formules en propositions complexes, aussi des phèmes. En tant que phème, la formule est une unité de sens complète, à laquelle peut être accordée une valeur de vérité. Le séquent, pour sa part, formalise le raisonnement à un autre niveau grammatical : c'est un composé de formules, qui, bien que lui-même un phème, n'est pas précisément du même genre que les formules simples ou composées, puisqu'il est relatif à un niveau sémiotiquement distinct, celui de l'*argument* (ou delôme). Le séquent est une formule sous hypothèse, qui se compose avec d'autres séquents en une dérivation, la réalisation particulière et effective d'un argument, catégorique. La dérivation, qui se termine en un seul séquent dans sa conclusion, constitue une preuve de la formule au conséquent de ce séquent, sous les hypothèses notées dans l'antécédent, s'il en reste. Une conclusion sans antécédent peut être légitimement considérée comme assertorique.

Ainsi, les séquents permettent d'exprimer des règles qui définissent les opérateurs propositionnels et d'autres règles qui servent à manipuler les structures des arguments constitués de propositions. Ils présupposent en cela une distinction d'ordre phénoménal, qu'on retrouvera dans la méthode de déduction naturelle, entre les *actes* d'inférence des niveaux opératoire, de la mise en relation des propositions, ou structurel, de la démonstration comme série d'inférences sur les propositions ; et les *règles* d'inférence qui définissent les opérateurs et éléments structurants, un niveau législatif des opérations et déductions. Plus spécifiquement, à ce dernier niveau législatif, le formalisme des séquents comprend une règle d'identité entre propositions, de laquelle découle comme corollaire une règle de coupure, la relation entre ces deux règles étant fondamentale pour la compréhension de la logique[91]. Le formalisme contient ensuite des règles opératoires, qui permettent d'introduire des

---

[91] Gentzen (1934-1935), Kleene (1952) et Troelstra & Schwichtenberg (1996) incluent la coupure parmi les règles structurelles, tandis que Girard ((2006-2007), et le plus explicitement dans Girard et al. (1989)) la relie à l'identité, dont elle est la duale (le *modus ponens* et la transitivité étant à leur tour, parmi les règles d'identité, des versions décontextualisées de la coupure). Girard (1987b) et Sørensen & Urzyczyn (2006) la rangent plutôt à part. Takeuti (1975) présente la coupure dans le groupe des règles structurelles, mais il qualifie les règles d'affaiblissement, de contraction et d'échange de règles « faibles », tandis que la coupure et les autres règles d'inférence seraient des règles « fortes ». Il convient de dégager la coupure des autres règles structurelles, puisqu'elle n'est pas essentielle à la démonstration, mais elle ne peut pas non plus servir d'axiome, comme la règle d'identité proprement dite. Dans tous les cas, la coupure est dispensable et sert à simplifier le raisonnement afin que les dérivations restent finies, dans les limites de longueur demandées par l'effectivité. Nous examinons les règles d'inférence de façon plus systématique et détaillée dans l'analyse de la notation des différents systèmes de logique en méthode des séquents ci-après.

opérateurs dans l'antécédent ou le conséquent du séquent, avant ou après l'acte d'inférence portant sur la structure interne des propositions complexes, ainsi que des règles structurelles, qui permettent d'effectuer des inférences portant sur la structure externe des propositions, sans affecter leur structure interne.

Considérons maintenant les signes particuliers introduits dans la notation des séquents. Le signe utilisé pour représenter la déductibilité, le tourniquet $\vdash$, est un *légisigne symbolique onomatique* de seconde intention, puisque : 1° en soi (en tant que légisigne), il est institué par convention ; 2° dans son rapport à l'objet, qui est une inférence déductive possible, (en tant que symbole donc) son sens est également défini par une règle conventionnelle, ce que la lecture du signe rend manifeste ; 3° dans son rapport à l'interprétant (en tant que sème onomatique), ce signe indique avant tout le diagramme des antécédents et du conséquent comme éléments de la conséquence, dont l'inférence est la réalisation en tant qu'acte ; mais comme la déduction (l'objet) est qualifiée de possible, la médiation symbolique fait aussi ressortir le caractère propre à un mouvement de pensée de ce genre.

On retrouve ici la médiation d'une conceptualisation qui ne saisit pas directement l'acte, mais le rejoint à travers une mise en contexte langagière et psychique, ou du moins phénoménale, comme pour les symboles de prédicat (lui-même une icône) ou de sujet (lui-même un indice). Ces divers cas ne sont pas tout à fait pareils puisque le prédicat et le sujet peuvent être compris à un niveau strictement grammatical de la logique, donc au niveau avant tout de la Troisièmeté, tandis que dans l'interprétation du tourniquet, nous devons passer de la représentation de la logique à l'acte d'inférence, par conséquent d'un niveau phénoménal (la Troisièmeté) à un autre (la Deuxièmeté). La représentation doit ultimement nous montrer comment reproduire l'acte : le tourniquet nous dit (symbole explicite) qu'ici (index implicite) il y a déductibilité (icône implicite). L'implicite dans ce cas-ci est ce qui se trouve dans le contexte psychique et langagier ou, plus généralement, phénoménal. En tant qu'il indique le sens de l'inférence, le tourniquet est un sème onomatique, mais en tant qu'il montre une déduction qualifiée de *possible*, on peut aussi considérer qu'il s'agit d'un sème rhématique.

Il n'y a par ailleurs de conséquence possible que dans la mise en commun des propositions et le tourniquet est en ce sens un terme syncatégorématique, de seconde intention, dépendant du diagramme de l'antécédent et du conséquent. De plus, sous un autre aspect, c'est-à-dire interprété comme un tourniquet (au sens premier du terme) qui contrôle le déplacement d'objets d'une section à une autre dans une voie de passage, tout comme la déduction qui donne une forme particulière à la pensée lors de son « passage » des prémisses à la conclusion, ce signe est un légisigne *iconique* sémique d'un type particulier, la *métaphore*.

Les virgules qui articulent les séquents et les traits de déduction qui articulent l'argument global vont de pair avec le tourniquet dans la représentation de la structure des arguments et ce sont également des symboles onomatiques. Mais, pour bien les comprendre, il faut considérer le fonctionnement de la méthode des séquents en son entier, telle qu'appliquée aux systèmes de logique particuliers. Nous remettons donc leur analyse aux sections qui suivent, sur les systèmes de séquents pour la logique classique et pour les logiques sous-structurelles, intuitionniste et linéaire. Le sens de la ponctuation ressort alors d'autant mieux que son interprétation devient explicite et nécessaire à la compréhension de la logique.

Le « sens intuitif » de Gentzen

Par ailleurs, il n'est pas sûr que Gentzen distinguait bien l'implication comme connecteur logique ou opération de niveau propositionnel, qui compose des propositions complexes à partir de propositions simples ou complexes, de la déduction comme type d'inférence ou opération de niveau argumentatif, qui forme des arguments à partir de propositions simples ou complexes. Dans la perspective sémiotique, la distinction entre les deux types d'opération est grammaticale, mais se base aussi sur des agencements de catégories phanéroscopiques différents[92]. La distinction grammaticale repose donc sur une base phénoménale. Chez Gentzen, et cela conformément à l'approche hilbertienne de la théorie de la démonstration (dans Hilbert & Bernays (1934)), la distinction des structures de l'inférence déductive relève du métalangage, du discours sur les opérations logiques et l'élaboration des démonstrations. Au lieu d'être une distinction grammaticale intrinsèque au discours logique, bien que basée sur des distinctions catégorielles d'ordre phanéroscopique, il s'agit d'une distinction d'un ordre supérieur dans la connaissance, entre la logique et le discours sur la logique. Cette dernière distinction va de pair avec une distinction ontologique entre la logique qui porte sur les faits du monde et le discours qui porte sur le langage de la logique, par contraste avec la distinction phanéroscopique et sémiotique entre l'opération immédiate de composition des propositions et l'opération finalisée de construction d'un argument. La distinction à la Gentzen transparaît dans les passages suivants :

> Une séquence est une opération de la forme
>
> $$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu,$$
>
> où $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$, peuvent représenter des formules quelconques. (Le $\rightarrow$, tout comme les virgules, n'est qu'un signe auxiliaire et non un signe logique.) [...]
>
> La séquence $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$, possède, d'un point de vue intuitif, exactement la même signification que la formule
>
> $$(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu)\,.$$ (Gentzen 1934-1935 (1955) : 11)

La formule et le séquent correspondant ne se distinguent pas selon leur « sens intuitif » (*inhaltlichen Bedeutung*), mais seulement selon leur « structure formelle » (*formalen Struktur*) (Gentzen 1934-1935 : 191). Gentzen appelle aussi les lettres gothiques et grecques des « signes de communication » (*Mitteilungszeichen*) ; ce qu'il ne dit pas, du moins explicitement, du signe de déductibilité ($\rightarrow$), qui est un

---

[92] La distinction entre implication et déductibilité n'est donc pas *seulement* grammaticale ; cela à l'encontre de la conception de la grammaire proposée par Anderson & Belnap (1975), dans l'appendice « Grammatical Propaedeutic », pour qui cette distinction relève d'une conception métaphysique impropre (ce qui ne touche pas la phanéroscopie, base empirique de la réflexion philosophique).

« signe auxiliaire » (*Hilfszeichen*) tout comme les parenthèses (Gentzen 1934-1935 : 179). Derrière la distinction entre logique et discours sur la logique de Gentzen se cache une ontologie naïve à la Hilbert, que nous pouvons qualifier (suivant nominalement Girard (2006-2007)) d'essentialiste. Ainsi, Gentzen distingue le sens intuitif, c'est-à-dire le raisonnement en tant qu'acte, du formalisme, c'est-à-dire la théorie de la logique en tant que représentation. L'essentialisme tient à ce que le formalisme semble pouvoir être considéré indépendamment du raisonnement en tant qu'acte, comme en témoignent les citations suivantes :

> Nous voulons édifier un formalisme qui reflète le plus exactement possible les raisonnements logiques qui sont réellement utilisés dans les démonstrations mathématiques. (Gentzen 1934-1935 (1955) : 17)
>
> Notons-le bien, il n'est nullement nécessaire de tenir compte en tout ceci d'un « sens intuitif » du signe $\supset$. (Gentzen 1934-1935 (1955) : 27)
>
> C'est pourquoi nous avons introduit le concept de séquence (I, 2. 3). Nous écrivons donc, au lieu d'une formule du type $(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$, la séquence $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}$. Celle-ci ne se distingue pas de la formule ci-dessus selon sa signification intuitive, mais seulement selon sa structure formelle [...] (Gentzen 1934-1935 (1955) : 42)

Le formalisme exprime donc une théorie du raisonnement et devient lui-même un objet de la réflexion à un autre niveau du formalisme, le métalangage hilbertien, qui n'est pas désigné comme tel, mais qu'on entrevoit tout de même de manière implicite en plusieurs endroits du texte, comme celui-ci :

> Les majuscules allemandes et grecques nous serviront de « signes syntaxiques », ce ne sont donc pas des signes de la logique formalisée, mais des variables qui s'introduisent dans les considérations que nous faisons sur cette logique. (Gentzen 1934-1935 (1955) : 9)

La distinction entre sens intuitif et formalisme trouve un certain parallèle dans la sémiotique peircéenne avec la distinction entre *logica utens* (ou logique implicite, de sens commun) et *logica docens* (ou théorie réfléchie et enseignée de la logique), à cette différence près que la théorie de la logique se construit sur la logique implicite en étant critique de celle-ci et non pas de manière indépendante. La *logica docens*, dans son développement formel, reste basée sur la *logica utens*.

Récapitulation

Pour récapituler, il importe de bien considérer les différents niveaux grammaticaux de la logique dans l'analyse de ses systèmes particuliers. Déjà la logique des propositions analysées (en prédicats et sujets) n'est pas une logique strictement sémique, puisque le « centre » de la logique, le niveau où se construit explicitement la signification en logique reste le phème (la proposition). De même la logique argumentative ou inférentielle des séquents se construit sur la base des phèmes dont elle est en quelque sorte la « sur-structure » (bien que l'on parle de logiques « sous-structurelles », en référence à la structure interne des arguments). La méthode des séquents, dans sa notation arborescente, rend explicites les structures inférentielles ou argumentatives qui sinon restent implicites à la logique, lorsqu'on représente avant tout son niveau propositionnel.

Le formalisme sémiotique permet de distinguer plusieurs niveaux de la logique dans sa formulation arborescente en méthode des séquents. L'implication interpropositionnelle et le tourniquet du séquent font ainsi partie du formalisme, mais à des niveaux différents, qui ressortent avec évidence lorsqu'on considère dans leur ensemble les seuls éléments sémiques de la notation et leur lien avec les éléments d'autres types. Ainsi, comme élément sémique agissant au niveau conceptuel des relations propres à la structure interne de la proposition, se trouve la ponctuation (parenthèses), qui marque la syntaxe, la connexion entre prédicat et sujets, en plus de la contiguïté entre sujets (d'un même ensemble, domaine). Les éléments sémiques fonctionnant au niveau opératoire ou judicatif des propositions sont, pour leur part : la flèche ou le fer à cheval de l'implication, qui est une opération logique (constante), et la ponctuation (parenthèses), qui marque à nouveau la syntaxe, cette fois-ci la connexion entre les propositions. Les éléments sémiques qui agissent au niveau inférentiel des arguments sont quant à eux : la ponctuation (virgules) en tant qu'elle marque l'ordre, la relation entre les formules du séquent ; le tourniquet du séquent, qui note la déduction sous hypothèse, une inférence immédiate ; la ligne d'inférence, qui note la déduction catégorique (ici, pour les séquents, mais aussi pour la déduction naturelle ou l'axiomatique en notation arborescente), une inférence immédiate également ; et finalement l'ensemble d'un arbre (la trame de preuve, *Beweisfaden*, de Hilbert), c'est-à-dire la figure de démonstration (ou dérivation) qui note la démonstration en tant que série d'inférences immédiates.

Dans le formalisme des séquents, il y a donc à la fois : une méthode de recherche de preuves basée, au niveau de la critique, sur le *Hauptsatz* et la propriété de sous-formules, et au niveau grammatical, sur la distinction entre formule, séquent et dérivation (exprimée par le biais de la notation arborescente) ; des principes servant à la critique, soit le théorème d'élimination des coupures et la distinction, normative, entre les différents groupes de règles (d'identité, opératoires, structurelles) ; et une distinction grammaticale entre arguments (séquents, trame de preuve) et propositions (formules, suites de formules), en plus des composantes internes des propositions. Le formalisme des séquents constitue en quelque sorte une logique des propositions synthétisées ou une logique des arguments analysés depuis le point de vue des propositions (centrales pour la signification), par contraste avec la logique des propositions analysées, communément appelée « logique des prédicats » (en fait ce qui serait plutôt, de façon plus générale, des sèmes), et la logique des propositions, le cœur signifiant de la logique, son niveau le plus fondamental d'un point de vue sémantique basé sur les conditions de vérité ou d'assertabilité.

2.3.1.1. Système des séquents pour la logique classique

La logique classique est la logique de la pensée déterminée dans le monde actuel, sous le présupposé d'une réalité infinie. Le raisonnement a explicitement recours, dans ce cadre, à des suites finies de formules et une série limitée d'inférences, tandis que la possibilité de son développement infini reste implicite. Autrement dit, on présuppose que l'inférence puisse développer une infinité de conclusions à partir d'une infinité d'hypothèses et cela dans une dérivation possiblement illimitée, bien que les moyens effectifs de la pensée ne permettent de développer qu'un raisonnement fini. La première formulation de la logique classique dans une notation arborescente pour la méthode des séquents (**LC**) se trouve dans la dissertation de Gentzen de 1934. Rappelons que la grande nouveauté de ce système par rapport à l'axiomatique, d'un point de vue notationnel, est l'ensemble composé du symbole de déduction sous hypothèse (tourniquet $\vdash$, au sein du séquent linéaire), des virgules entre les formules spécifiques ou suites de formules indéterminées et du trait de déduction catégorique (déployant l'arborescence) ; de même que la notation du contexte des formules. Ce système comprend aussi, en plus du vocabulaire de base, trois séries de règles d'inférence, soit : les règles d'identité et coupure, les règles opératoires et les règles structurelles. Les deux côtés (gauche et droit) du tourniquet ont la propriété d'être symétriques, c'est-à-dire que les règles qui portent sur l'antécédent sont les duales de celles qui portent sur le conséquent. La négation classique, pour sa part, est involutive et correspond à un échange entre l'antécédent et le conséquent, suivant une certaine polarité de la conséquence.

Les règles d'inférence dans le système des séquents classiques

Dans leur expression formelle, les règles du système de la logique classique en méthode des séquents, en considérant les seuls opérateurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$ comme primitifs, sont les suivantes (Gentzen (1934-1935), Girard (2006-2007)) :

Règles d'identité et coupure :

$$\frac{}{A \vdash A}\ \text{(identité)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Lambda, A \vdash \Pi}{\Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Pi}\ \text{(coupure)}$$

$$\frac{\vdash A \quad A \vdash B}{\vdash B}\ (\textit{modus ponens}) \qquad \frac{A \vdash B \quad B \vdash C}{A \vdash C}\ (\text{transitivité})$$

Règles opératoires :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\vdash \wedge) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge g \vdash) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge d \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee d) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\ (\vdash \exists) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}\ (\exists \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\ (\vdash \forall) \qquad \frac{\Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}\ (\forall \vdash)$$

Le terme arbitraire t ne doit pas apparaître dans la formule quantifiée qui se trouve introduite ou éliminée par la règle d'inférence, ainsi que dans les formules (hypothèses) dont cette formule quantifiée dépend, afin d'assurer l'arbitraire du terme t, c'est-à-dire pour éviter la coïncidence de ce terme et la variable quantifiée x (leur « collision », *clash*) lors de la sélection d'un objet, ce en quoi consiste l'usage du quantificateur : $\exists$, pour quelque, c'est-à-dire pour au moins un parmi les objets circonscrits ; $\forall$, pour tout, c'est-à-dire pour n'importe lequel des objets circonscrits.[93]

L'implication est introduite par définition : $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \coloneqq \neg\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$.

Règles structurelles

P : permutation, *C* : contraction, *A* : affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \tau(\Delta)}\ (P)$$

[93] Dans la notation de la substitution, *t*/*x* signifie « *t* remplace *x* » (Girard (2006-2007), Leblanc & Wisdom (1993)) ; mais l'expression peut aussi s'écrire en sens inverse, selon les auteurs : *x*/*t*, « *x* est remplacé par *t* » (*t substituted for x*) (Troelstra & van Dalen (1988), Troelstra & Schwichtenberg (2000)). La lecture neutre (en mention) des barres obliques est « sur », pour / , et « sous », pour \ (par exemple, dans le calcul de Lambek). La « salade sur la substitution des variables » est bien expliquée par Gentzen (1934-1935), Prior (1955) ou encore Troelstra & van Dalen (1988).

$$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash C) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (C \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash A) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (A \vdash)$$

Exemple de dérivation

Démonstration du principe du tiers-exclu (tirée de Gentzen (1934-1935 : 193)) :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A}\ (\vdash \neg)}{\vdash A, A \vee \neg A}\ (\vdash \vee d)}{\vdash A \vee \neg A, A}\ P}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}\ (\vdash \vee g)}{\vdash A \vee \neg A\,.}\ C$$

Deux principes méthodeutiques de la méthode des séquents classiques

La méthode des séquents, avec sa distinction entre les deux niveaux grammaticaux des formules et des structures, et les deux niveaux phénoménaux des actes et des règles d'inférence, permet à Gentzen de démontrer son théorème principal, qui consiste à dire, de manière générale, que toute démonstration peut être exprimée sous une forme normale, laquelle déploie l'articulation entière de toutes les conséquences possibles menant d'un antécédent au conséquent ; autrement dit sous une forme selon laquelle « elle ne comporte pas de détours » (*er macht keine Umwege*) (Gentzen 1934-1935 : 177). Dans le système des séquents, les détours de la démonstration correspondent à des coupures et le théorème principal, dans son expression technique, affirme la possibilité d'éliminer les coupures dans le cours d'une démonstration :

> **Théorème fondamental.** — Toute *LJ*-dérivation (ou *LK*-) peut être transformée en une *LJ*-dérivation (ou *LK*-) qui possède la même séquence finale et dans laquelle la figure de déduction appelée « coupure » ne figure pas. (Gentzen 1934-1935 (1955) : 49)[94]

Un corollaire important du théorème principal est la propriété de la sous-formule (*Teilformeln-Eigenschaft*), selon laquelle chaque formule essentielle à la dérivation (non sujette à la coupure) parmi les prémisses doit être contenue dans la conclusion :

> Dans une *LJ*- ou *LK*- dérivation sans coupure, toutes les *H-S*-formules qui interviennent sont des formules partielles des *S*-formules qui figurent dans la séquence finale. (Gentzen 1934-1935 (1955) : 51)[95]

Interprétation des règles d'inférence des séquents classiques

Nous pouvons comprendre le premier groupe de règles d'identité et coupure en le comparant d'abord au système déductif de l'axiomatique. La règle d'identité serait de cette manière l'axiome unique de la logique en méthode des séquents, tandis que la coupure en serait la règle de détachement. Une identité est en effet introduite apodictiquement, sur base d'aucune prémisse, alors que la coupure permet de faire avancer la déduction en en simplifiant le contenu. Le *modus ponens* et la règle de transitivité sont d'ailleurs des versions décontextualisées de la coupure, c'est-à-dire des règles dont les séries de formules qui constituent le contexte de la formule principale sont vides ou réduites à des formules déterminées. Pour transformer la

---

[94] « **Hauptsatz:** Jede *LJ*- bzw. *LK*-Herleitung läßt sich in eine *LJ*- bzw. *LK*-Herleitung mit der gleichen Endsequenz unwandeln, in welcher die als „Schnitt" bezeichnete Schlußfigur nicht vorkommt. » (Gentzen 1934-1935 : 195) Calcul *L* pour « logique » (*logische*) ou « logistique » (*logistische*), *J* pour « intuitionniste » (*intuitionistische*, *i* majuscule étant écrit *J* dans la langue de l'époque) et *K* pour « classique » (*klassische*) ; plus loin, nous trouverons aussi *N* pour « naturel » (*natürliche*). Nous préférons franciser ces abréviations en **LC**, **LI** et **LL** pour les séquents classiques, intuitionnistes et linéaires et en **NC** et **NI** pour la déduction naturelle classique et intuitionniste. Les désignations varient selon les auteurs.

[95] « In einer *LJ*- bzw. *LK*-Herleitung ohne Schnitte sind alle vorkommenden *H-S*-Formeln Teilformeln der in der Endsequenz auftretenden *S*-Formeln. » (Gentzen 1934-1935 :196) « *H-S*-formules » (H-S-*Formeln*) pour « formules de séquents dans une dérivation » (*Herleitungs-Sequenz-Formeln*), et « *S*-formules » (S-*Formeln*) pour « formules de séquents » (*Sequenzformeln*).

coupure en *modus ponens*, il suffit d'appliquer une règle d'introduction de l'implication au conséquent sur la deuxième prémisse, et pour la transformer en règle exprimant la transitivité de la déduction, il suffit d'appliquer en plus une règle d'affaiblissement à gauche de la première prémisse, le tout sans contexte indéterminé.

L'identité et la coupure sont également des règles duales, ce qui peut ne pas sembler évident au premier abord, mais devient plus clair lorsque l'on situe ces règles dans la méthode générale des séquents. Le fait que toute démonstration en méthode des séquents doive nécessairement commencer par une ou des identités (axiomes) est lié de près au théorème principal de cette méthode (mais aussi, au fond, de la logique déductive), selon lequel la coupure est éliminable. La méthode générale d'élimination des coupures consiste ainsi à repousser les coupures le plus possible vers les prémisses, en remplaçant la coupure à éliminer par des coupures sur des sous-formules dans le cours de la dérivation, jusqu'à ce que l'une de ces sous-formules se trouve être une identité. La formule en conclusion de la coupure de remplacement est alors redondante avec la prémisse restante, autre que l'identité, et cette coupure est par conséquent éliminable, la formule redondante et l'identité étant logiquement superflues. Les règles d'identité et de coupure permettent donc d'attribuer une certaine *qualité* aux formules qui prennent part à la dérivation, en se basant sur la polarité de l'inférence : une formule est introduite dans la dérivation et son existence possible est de cette manière affirmée (qualité positive), ou elle est exclue de la dérivation et son existence possible est de la sorte niée (qualité négative).[96]

---

[96] Nous pouvons aussi dire métaphoriquement que le groupe d'identité et coupure est notre souverain à deux faces. Selon l'idéologie tripartite des Indo-Européens, telle qu'exposée par Dumézil (1992), et suivant aussi le motif psycho-politique de la *République* de Platon, qui définit la constitution idéale de la cité, le souverain est un philosophe-roi qui, en tant que Philosophe, saisit les principes qui doivent le guider dans son œuvre, sa vertu est la σοφία (la sagesse), et en tant que Politique, sait appliquer ces principes en dirigeant la cité, sa vertu est la φρόνησις (la sagacité, d'après Aristote). La règle d'identité saisit en quelque sorte le principe ultime de la logique déductive, tandis que la coupure permet d'appliquer cette dernière, elle est son moyen effectif. Poussant un peu plus loin l'analogie, les règles opératoires sont semblables aux auxiliaires armés (leur vertu est le courage), qui dirigent les actes d'inférence, introduisant ou éliminant des opérateurs propositionnels, au niveau des formules (l'élimination étant une introduction à l'antécédent) ; tandis que les règles structurelles sont nos producteurs (leur vertu est la modération), qui permettent l'itération ou la déitération, l'introduction ou l'élimination de formules (suivant le sens de l'analyse ou de la synthèse), au niveau des arguments.

Les règles opératoires permettent quant à elles d'introduire ou d'éliminer des opérateurs logiques, qui complètent la langue des formules simples. Elles établissent ou dissolvent de la sorte des *relations* entre les formules, signifiantes du point de vue du jugement, c'est-à-dire de la compréhension des formules simples ou complexes comme pouvant recevoir une valeur de vérité. Leur propriété la plus remarquable, dans le cadre classique, est que les règles d'introduction à l'antécédent du séquent sont symétriques aux règles d'introduction au conséquent (gauche et droite du tourniquet) et aussi, comme cas particulier de cette symétrie, que la négation classique est involutive. La propriété de symétrie est liée au principe d'inversion en déduction naturelle, selon lequel la règle d'élimination d'un opérateur est l'inverse de la règle d'introduction correspondante, qui définit sur une base inférentielle (argumentative) l'opérateur (propositionnel)[97]. La règle d'introduction en déduction naturelle correspond à la règle d'introduction au conséquent en méthode des séquents et la règle d'élimination, à l'introduction à l'antécédent. Sur la base du même principe, la formule affirmée à l'antécédent devient une formule niée au conséquent et *vice versa*, la négation pouvant s'appliquer à elle-même pour s'annuler, d'où la propriété d'involution propre à la négation classique. D'un point de vue procédural, la négation correspond donc à l'échange entre la gauche et la droite du séquent (Girard (2006-2007)). La symétrie des règles et l'involution de la négation permettent entre autres un calcul tout à droite, où les formules à l'antécédent sont transformées en leurs duales au conséquent, ce qui permet de réduire le nombre de règles opératoires du système, puisqu'il ne subsiste alors que des règles d'introduction au conséquent.

Les règles structurelles modifient pour leur part la structure des séquents, c'est-à-dire l'ordre des formules et le nombre (multiplicité) de leurs occurrences, tels que ceux-ci affectent le cours de l'argument.[98] Elles permettent de comprendre les

---

[97] Le principe d'inversion a été défini sommairement par Gentzen (1934-1935), puis formalisé par Lorenzen (1955) et Prawitz (1965) ; cf. Schroeder-Heister (2008).

[98] C'est ce que Girard (2006-2007) appelle « la gestion des suites ».

relations entre formules du point de vue de l'inférence et donc l'orientation générale de leurs mises en relation. Ce sont les règles qui donnent au raisonnement sa *signification* la plus générale. De manière plus imagée, nous pourrions dire qu'elles donnent son *sens* à l'inférence, qui procède des prémisses à la conclusion dans la démonstration ou à l'inverse dans la recherche de preuve. Nous pouvons également penser ici à la conception de Frege selon laquelle le concept (dont le nombre) et la relation (liée à l'ordre) sont deux sortes de fonction, respectivement à une et plusieurs places d'arguments (sujets logiques). Il s'agit évidemment dans le cas des séquents d'un concept et d'une relation d'ordre supérieur, métalogique, qualifiant la structure de l'argument (comme forme représentationnelle particulière de l'inférence, interprétant immédiat de la relation de signification). La plus fondamentale de ces règles, qui est même seulement sous-entendue et non explicitée dans la plupart des systèmes en méthode des séquents, est la règle exprimant le principe d'associativité des formules. La règle de permutation (ou d'échange) est pour sa part liée à la commutativité, la contraction à l'idempotence (nommée par Benjamin Peirce) et l'affaiblissement à l'addition (axiome des *PM*), en un sens propre au niveau argumentatif de la logique. Notons que les propriétés correspondantes aux règles, normalement attribuées aux opérations logiques, c'est-à-dire de niveau propositionnel, sont ici attribuées aux inférences dans la dérivation, c'est-à-dire de niveau argumentatif.

Les éléments de la notation propres à la méthode des séquents (tourniquet, ponctuation dans les séquents, trait de déduction) articulent donc le niveau argumentatif de la grammaire particulière du formalisme des séquents. Ils structurent à la fois le jugement hypothétique des séquents individuels, le jugement catégorique des inférences immédiates de prémisses à conclusion et le jugement assertorique allant des prémisses ultimes à la conclusion finale dans le cours d'un argument. Leur interprétation, au moyen des règles d'inférence explicitées dans la méthode des séquents, permet de gérer les suites de formules et de diriger les actes inférence au cours de la dérivation jusqu'à l'achèvement de la démonstration.

Analyse grammaticale des séquents classiques

L'usage des signes de la notation propre au système de la logique classique en méthode des séquents est régi par des règles d'inférence distinctes, dans leur ensemble, de celles entrant en jeu dans le cas des logiques sous-structurelles, que nous examinerons plus loin. La perspective classique sur ces règles affecte tout particulièrement l'interprétation des signes du niveau structurel — la structure des séquents (horizontale) et la dérivation allant des prémisses à la conclusion (verticale) —, c'est-à-dire la ponctuation et le tourniquet, au sein des séquents, ainsi que le trait de déduction, suivant le fil de la démonstration[99]. Cependant, elle influence aussi l'interprétation des opérateurs logiques, comme la négation (en comparaison avec les logiques intuitionniste et linéaire), voire la conjonction et la disjonction (en comparaison avec la logique linéaire). La logique classique comprend toutes les règles élémentaires d'identité et coupure, d'opérations logiques et de structure (permutation, contraction, affaiblissement), en plus de donner un sens involutif à la négation.

D'un point de vue sémiotique, les règles d'inférence conditionnent avant tout l'*interprétance*, c'est-à-dire qu'elles affectent l'aspect que prend le signe dans sa relation à l'interprétant[100]. Les signes concernés gardent sinon le même aspect lorsque considérés en soi ou dans leur rapport à l'objet. Dans leur rapport à l'interprétant, peu importe le système de logique, la ponctuation, le tourniquet et le trait de déduction sont des sèmes de seconde intention (syncatégorématiques), des éléments de notation permettant, dans leur composition avec des sèmes de première intention (catégorématiques), de construire des phèmes (propositions) et des delômes

---

[99] Les *Beweisfäden* de Hilbert & Bernays (1934), expression rendue par « trames de preuve » dans la traduction française de Gaillard & Guillaume (2001).

[100] L'explicitation des différents types d'objets (immédiat, dynamique) ne viendra qu'avec l'introduction de la perspective constructiviste dans l'étude de la grammaire même (et non du seul calcul), dans la grammaire inspirée de la théorie des types constructive de Martin-Löf, une autre étape dans la formalisation de la logique, que nous aborderons en section 3.2.1.

(arguments). L'interprétation de la seconde intention de ces signes, dans un processus d'inférence effectif (sémiose), change selon le système de logique et les règles d'inférence qui le caractérisent. Dans le cas de la logique classique, ces trois éléments de la notation sont à interpréter en seconde intention comme des signes qui représentent les règles de permutation, de contraction et d'affaiblissement. Ce sont en quelque sorte des gendarmes ou des bornes qui *indiquent*, en vertu de la loi, quelles transformations peuvent être effectuées sur les formules de l'antécédent et du conséquent, c'est-à-dire quelles formules (des propositions simples ou complexes) et quels opérateurs peuvent être placés dans l'antécédent et le conséquent d'un séquent, au cours de la dérivation allant des prémisses à la conclusion.

Le rôle interprétatif particulier de chaque élément de la notation est : pour les virgules, d'indiquer l'ordre entre les formules spécifiques (A, B, C, ...) ou suites de formules indéterminées (Γ, Δ, ...) ; pour le tourniquet, de marquer le caractère modalisé de la déduction sous hypothèse comme processus d'inférence possible dans un cadre fini ou non (les suites de formules) ; et pour le trait de dérivation, de marquer les conséquences nécessaires d'inférences déterminées sur le processus de dérivation, c'est-à-dire le passage d'une inférence immédiate (catégorique) à une autre, jusqu'à la conclusion (assertorique). La conclusion est une formule simple ou composée, avec ou sans contexte indéterminé, tout comme chaque conséquent. Le contexte indéterminé consiste en un énoncé possiblement infini, mais actuellement fini dans une interprétation constructive de la logique[101]. Le système de la logique classique comprend des suites de formules contextuelles dans le conséquent des séquents et donc dans celui de la conclusion, du moins comme de possibles conclusions auxiliaires indéterminées d'une conclusion principale déterminée.

L'*interprétant immédiat* d'une dérivation en logique classique est l'ensemble des formules, opérations et conséquences exprimées par la notation au premier abord,

---

[101] Girard (1991, 1993) a ainsi donné une interprétation constructive de la logique classique, en lui fournissant un cadre constructif plus général, éventuellement formalisé dans sa logique unifiée (**LU**).

ce qui inclut les suites de formules (Γ, Δ, ...) et suppose aussi l'élimination des coupures, pour que tout soit exprimé. L'*interprétant dynamique* de l'argument représenté par la trame de preuve est la dérivation même, comme série d'actes d'inférences, qui permet d'atteindre effectivement la conclusion sans coupure. Cet aspect de l'interprétance peut rester indéterminé, puisque la logique classique en méthode des séquents n'est pas décidable algorithmiquement, à cause de la contraction qui peut prolonger indéfiniment les dérivations. L'*interprétant final*, la valeur ultime, peut également rester indéterminé, car la conclusion assertorique d'une dérivation classique peut toujours comprendre un contexte indéterminé.

Les règles d'inférence classiques caractérisent d'autre part les différents aspects sémiotiques que prend la notation dans son rapport à l'objet, qui se trouve être le raisonnement. Au niveau du groupe d'identité, la règle d'identité est d'une certaine manière *iconique* dans sa notation, en ce que les signes de formule de part et d'autre du séquent (tourniquet) sont similaires, ils possèdent la même forme. La règle de coupure élimine cet élément iconique dans son application, pour ne conserver que les éléments dissemblables des séquents[102].

Pour ce qui est du groupe opératoire, les règles d'introduction de la négation, en particulier, permettent aussi de distinguer la logique classique de la logique intuitionniste. Elles se basent sur la polarité propre à la conséquence, comme forme générale de l'inférence logique. Ces règles introduisent des *indices* implicites, par le biais des *symboles onomatiques* de seconde intention que sont les opérateurs, afin de faire ressortir les relations qui subsistent entre les formules, en les montrant, tout en spécifiant de quels types de relations il s'agit, le sens spécifique qu'il faut leur accorder.

---

[102] Notons que dans notre présentation les contextes des différentes prémisses sont indépendants les uns des autres, chaque prémisse de la dérivation et antécédent ou conséquent d'un séquent possédant dès lors un contexte qui lui est propre. Il existe cependant des versions du formalisme des séquents dans lesquelles les contextes sont partagés, ce qui permet d'opérer sans règle de contraction ; cf. Negri & von Plato (2001).

En ce qui concerne le groupe structurel, les différentes règles d'inférence de ce niveau ordonnent, introduisent ou éliminent des formules, c'est-à-dire des *symboles phémiques* de première intention, dans la dérivation, à l'aide des éléments de notation propres aux séquents (tourniquet, virgules, trait de déduction), qui sont pour leur part des *symboles onomatiques* de seconde intention. La règle de *permutation* détermine la commutativité des formules de part et d'autre des signes de ponctuation (virgules), dont l'usage et l'interprétation sont par défaut contraints suivant le sens monolinéaire des séquents ou le sens multilinéaire (arborescent) de la dérivation. Cette règle demeure nécessaire dans tout système de logique commutative en notation algébrique linéaire ou arborescente, pour parer au défaut de la notation. Son application est représentée par le trait de déduction, mais elle concerne avant tout la ponctuation. La *contraction* permet quant à elle, suivant la propriété d'idempotence, des transformations à l'infini sur les séquents par l'itération des formules, dans le sens allant de la conclusion vers les prémisses, la recherche d'une démonstration consistant pour l'essentiel à construire une dérivation à rebours d'une conclusion envisagée. La contraction limite l'effectivité de la logique classique puisque, malgré l'élimination des coupures et la propriété de sous-formule, elle empêche la formulation d'un algorithme de décision, les possibilités de dérivation étant infinies. Elle concerne l'interprétation des traits de déduction, avec en vue le développement de l'argument global noté par l'ensemble de la trame de preuve, bien qu'elle fasse aussi apparaître de nouvelles virgules. L'*affaiblissement* présuppose, pour sa part, un contexte indéterminé dans l'antécédent ou le conséquent, duquel, par une inférence catégorique immédiate, on peut extraire une formule afin de l'expliciter, comme nouvelle formule au sens bien défini. Cette règle concerne donc davantage l'interprétation du trait de déduction, avec en vue l'inférence sous hypothèse marquée par le tourniquet, bien qu'elle fasse apparaître aussi une nouvelle virgule explicitant le lien entre le contexte et la formule extraite.

D'un point de vue proprement méthodeutique, finalement, la démonstration est avant tout synthétique et la recherche de preuve analytique, mais la compréhension de l'une et de l'autre implique un jeu allant dans les deux sens de la réflexion. Ainsi, d'une part, quand on cherche une preuve d'une formule en partant de cette formule comme conclusion éventuelle, on a bien en tête que la preuve doit commencer par des axiomes (identités) comme prémisses et que toutes les formules participant à la démonstration doivent être des sous-formules de la conclusion. D'autre part, afin de comprendre une démonstration, bien qu'on la construise dans le sens allant des prémisses à la conclusion, on doit aussi avoir la formule démontrée à l'esprit, tout en étant conscient de la propriété de sous-formule. Il n'y a pas d'algorithme précis pour la recherche de preuve en méthode des séquents classiques, qui comprendrait toutes les tactiques possibles de démonstration, mais la stratégie générale de la méthode fournit déjà un quasi-algorithme, limité seulement par la contraction. La forme arborescente de la notation constitue ainsi, dans son ensemble, une sorte de *diagramme* du sens analytique ou synthétique de la méthode, analytique dans la diffusion des prémisses sur les branches de l'arbre et synthétique dans la concentration des séquents en un seul séquent de conclusion éventuel, à la base de l'arbre.

Récapitulation

Bien que le but premier qui l'ait mené à formuler son théorème principal était de poursuivre le programme de Hilbert en développant la théorie de la démonstration dans ses applications particulières (la démonstration de la consistance de l'arithmétique classique et l'élaboration d'un procédé de démonstration pour la logique des propositions intuitionniste), Gentzen a aussi, en inventant les formalismes des séquents et de la déduction naturelle, qui permettent de dégager des schémas de structure, contribué à un nouvel essor de la théorie de la démonstration et ouvert un nouveau champ de réflexion pour la logique contemporaine, celui des logiques sous-structurelles, que nous allons maintenant aborder. Juste avant cela, nous pouvons, en guise de conclusion de cette section, récapituler l'exposé du système des séquents classiques par le schéma suivant :

*Séquents pour la logique classique (**LC**)*

1. Vocabulaire (syntaxe, grammaire particulière)

$\Gamma, \Delta, \ldots$	suites de formules (vs ensembles, ensembles multiples)
$A, B, C, \ldots$	formules
$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \ldots$	opérateurs
$\vdash$, ——, ‘,’	tourniquet, trait de déduction, virgule
$\exists, \forall$	quantificateurs
(,), [,], …	parenthèses, crochets, etc.

2. Règles d'inférence (critique particulière)

   2.1. Groupe de l'identité et de la coupure (règles de l'identité)

   identité

   coupure (aussi *modus ponens*, transitivité)

   2.2. Groupe des opérateurs (règles opératoires)

   pour $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall \ldots$

   introduction à gauche et à droite du tourniquet

   2.3. Groupe des structures (règles structurelles)

   (associativité),

   permutation (commutativité), *P*

   contraction (itération, déitération), *C*

   affaiblissement (ajout, effacement), *A*

3. Principes de la démonstration (méthodeutique particulière)

   élimination des coupures

   propriété de la sous-formule.

2.3.1.2. Les logiques sous-structurelles

Les logiques sous-structurelles regroupent un ensemble de logiques qui diffèrent les unes des autres, ainsi que de la logique classique, par l'usage particulier qu'elles font des règles d'inférence du formalisme des séquents, principalement les règles structurelles, qui déterminent le cours des dérivations au niveau proprement argumentatif de la logique, mais aussi secondairement les règles opératoires, qui déterminent l'usage des opérateurs au niveau propositionnel. Quelques-uns des plus importants systèmes de logique maintenant qualifiés de « sous-structurels » sont : la logique intuitionniste, développée à partir des travaux de Brouwer (1975, 1981) et formalisée ensuite par Kolmogorov (1925) et Heyting (1930, 1956) ; le calcul syntaxique de Lambek (1958, 1961) ; la logique pertinente, suivant les travaux d'Anderson et Belnap (1975), qui s'inspirent eux-mêmes d'Ackermann (1956) ; et la logique linéaire de Jean-Yves Girard (1987a, 1995, 2006-2007).

Le système commun des logiques sous-structurelles a cependant été distingué de manière explicite bien après leurs premiers développements et leur désignation même n'a été introduite que récemment par Kosta Došen, dans son introduction historique à Došen & Schroeder-Heister (1993), le premier recueil proposant une recherche systématique unifiée sur ces logiques. Depuis, de nombreux articles se sont ajoutés qui abordent le sujet du système des logiques sous-structurelles, ainsi que deux introductions générales plus synthétiques, par Greg Restall (2000) et Francesco Paoli (2002) (voir aussi Galatos et al. (2007), dont l'approche est plus mathématique). Nous partirons du travail de Restall, pour en élaborer une critique dans une perspective sémiotique, ce qui nous permettra de pallier certaines insuffisances, au niveau des fondements, de la manière standard de comprendre les logiques sous-structurelles, tout en tirant profit de certaines avancées techniques dues à ces recherches.

La grammaire

Dans ce qui suit, nous adaptons la notation, le langage et la perspective générale des fondements de Restall à notre propos. Nous tâcherons ainsi de faire ressortir les idées les plus pertinentes de l'auteur concernant les sous-structures, afin de contribuer au projet proprement philosophique d'une interprétation de la logique qui tienne compte de ces avancées. Nous suivons en cela une lignée constructiviste de la logique formelle, qui va de l'intuitionnisme de Brouwer et la théorie de la démonstration de Hilbert (moins ses présupposés métaphysiques), aux méthodes de démonstration de Gentzen (calcul des séquents et déduction naturelle), puis à la logique intuitionniste dûment formalisée et à la logique linéaire de Girard, et nous envisageons les conséquences de ces derniers développements pour la philosophie de la logique. Les logiques intuitionniste et linéaire sont les systèmes de logique sous-structurelle que nous favorisons et confrontons à l'approche sémiotique de Peirce, puisque ce sont ceux qui permettent le mieux de dégager l'articulation interne, c'est-à-dire la grammaire, des structures de séquents. Cela nous permettra aussi d'ajouter de la chair philosophique aux idées de Girard, dans le cas de la logique linéaire. Nous comprendrons alors mieux en quoi les formes logiques particulières des structures de séquents correspondent à certaines formes sémiotiques, c'est-à-dire des types de signe et leur articulation mutuelle, desquels dépend la perspicacité de la notation et dont la distinction relève de la considération non seulement des principes mathématiques sous-jacents, mais aussi de principes empiriques de la phanéroscopie.

Restall définit d'abord la logique comme traitant simplement des conséquences[103], ce qui est une définition plutôt incomplète, qu'on pourrait articuler davantage. Ainsi, dans la perspective sémiotique, la logique est plus exactement une science philosophique normative, une activité intellectuelle humaine qui consiste en l'étude des principes de l'inférence valide, ce qui sous-entend aussi l'inférence

[103] L'auteur commence son livre en disant laconiquement (2000 : 1) : « Logic is about *consequences*. »

invalide. La logique est une science proprement philosophique, mais elle tire ses principes à la fois des mathématiques et de l'expérience, l'expérience de sens commun qu'étudient la phanéroscopie et la philosophie en général, ce qui donne à la logique son point de vue critique, proprement philosophique, sur le raisonnement. La compréhension que Restall a du point de vue philosophique s'avère aussi incertaine, car il ramène d'une manière assez vague l'aspect philosophique d'une théorie à sa généralité[104], ce qui est tout aussi insuffisant que la définition précédente de la logique, puisque l'idée majeure et essentielle d'une réflexion de sens commun critique est à nouveau évacuée.

L'auteur base ensuite son interprétation des logiques sous-structurelles sur la théorie des ensembles et la développe en favorisant l'approche de la théorie des modèles, tout en se référant de préférence au système de la logique pertinente. Il nomme ce qui est communément appelé séquent, « consécution », à la suite d'Anderson & Belnap (1975), et note les suites de formules par des lettres majuscules de la fin de l'alphabet latin plutôt que par des majuscules grecques (un détail), tout en les interprétant comme des ensembles de formules (ce qui est plus significatif). Nous conservons le terme usuel tout en concédant que les suites de formules qui constituent les séquents ne sont pas nécessairement de simples listes et que leur structure interne peut être plus complexe et varier. L'auteur lit aussi le tourniquet $\vdash$, « *entails* », alors que nous préférons « de… on peut déduire… » (au niveau des suites de formules, dans le séquent) ; de même pour le trait d'inférence entre les séquents que nous comprenons comme « de… on peut déduire… » (au niveau des structures) et que l'auteur lit de manière semblable, mais sans entendre de nuance concernant les niveaux grammaticaux. Restall ne fait pas clairement la distinction entre la déduction comme inférence sous hypothèse, dans la perspective de l'argument, et l'implication comme opération propositionnelle, définie par une règle d'inférence immédiate.

104 « Logic has a home in philosophy because it studies reasoning with propositions in their generality », dit Restall (2000 : 1).

Dans son analyse générale des séquents, l'auteur distingue toutefois le niveau des formules (propositions) de celui des structures (arguments) et il s'attache alors à caractériser les propriétés de l'articulation interne de ces structures, l'articulation sous-structurelle, ce qui nous intéressera ici. Il développe son analyse pour l'ensemble des logiques propositionnelles, en théorie de la démonstration et en théorie des modèles, pour finalement considérer le problème de la décidabilité à la lumière de ces éclaircissements.

Restall caractérise d'abord, dans son analyse des séquents, le lien général qui subsiste entre les formules et la structure d'un séquent, tel $\Gamma \vdash A$. Un lien formel élémentaire existe entre le niveau des formules et celui des structures, qui est exprimé par le théorème de déduction. Ce théorème dit en effet, selon la formulation plus spécifique de l'auteur, que si, à partir d'une suite de prémisses en lien avec une certaine formule, on peut déduire une autre formule, alors de cette suite de prémisses, on peut déduire que la première formule implique la seconde et *vice versa* (donc si et seulement si) ; ce qui est noté formellement comme suit (Restall 2000 : 9)[105] :

$$\frac{\Gamma\,; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}.$$

La structure d'un séquent varie par ailleurs selon le mode de combinaison des prémisses à l'antécédent, ce qui est exprimé, d'un point de vue notationnel, par la ponctuation dans le séquent. Selon le théorème de déduction et suivant cette idée d'une interprétation des marques de ponctuation, la combinaison des prémisses est

[105] Le théorème de déduction est généralement présenté de manière univoque, comme le seul passage de la déduction à l'implication (entre autres dans Hilbert & Bernays (1934), Kleene (1952), Church (1956), Dummett (1977), Girard (2006-2007)), l'inverse étant au mieux distinctement présenté comme la règle du *modus ponens* (chez Došen (1989)). Toutefois, si le théorème de déduction est bien primitif, parce qu'il respecte l'ordre des catégories et correspond aussi à l'introduction de l'implication au conséquent (une règle d'inférence canonique), on peut néanmoins douter que le *modus ponens* soit l'inverse proprement dit de ce théorème. C'est qu'il constitue pour sa part un cas particulier de la coupure (Girard (2006-2007)) ou du moins nécessite l'usage de l'identité *et* de la coupure (Došen (1989)) pour permettre l'inversion du théorème de déduction, laquelle coupure est éliminable dans tout système de logique cohérent. De plus, cette inversion ne respecte pas l'ordre des catégories et le *modus ponens* n'est pas la duale de l'introduction de l'implication au conséquent. On ne peut donc présumer juste la stricte équivalence des deux niveaux grammaticaux prônée par l'auteur. Pour assurer ce point, il faudrait critiquer les règles de la critique logique, considérer non seulement le critère catégoriel, mais aussi le critère algorithmique, ce qui dépasse le cadre grammatical de notre réflexion.

donc intrinsèquement liée au mode d'opération du conditionnel au niveau des formules, à l'antécédent ou au conséquent :

> *Structural rules* dictate the properties of premise combination. Because of the deduction theorem, as premise combination varies, the conditional varies as well. Conversely, if I am interested in different sorts of deduction, then correspondingly I will examine different sorts of premise combination and different conditionals too. (Restall 2000 : 2)

De façon générale, les marques de ponctuation jouent un rôle, au niveau des structures, similaire à celui des connecteurs, au niveau des formules. Aussi, puisque la relation de dépendance entre éléments grammaticaux, d'après le théorème de déduction dans sa formulation restallienne, tient dans les deux sens, les deux aspects du système de logique sont ici mis à un même niveau, d'une manière qui reste fidèle à l'approche exposée dans la propédeutique grammaticale d'Anderson & Belnap (1975). Il y a même une certaine inversion de l'ordre systématique puisque le principe général du calcul logique est présenté avant la grammaire, comme sous-tendant donc cette dernière d'une certaine façon.

Les éléments grammaticaux du formalisme logique sont ensuite caractérisés en termes ensemblistes. Une langue est le plus petit sous-ensemble d'enchaînements (*strings*), par l'opération de concaténation, de symboles de formules atomiques et de connecteurs, tel que toute formule atomique fait partie de la langue et les autres formules peuvent être construites à partir de ces formules atomiques, au moyen des connecteurs. La langue ne peut donc se décomposer ultimement que d'une seule manière. Les structures sont à leur tour des ensembles constitués d'une langue et de ponctuation concaténées. Puisqu'une langue peut être minimalement constituée d'une seule formule, une structure peut elle-même consister en une seule ou en plusieurs formules, la distinction avec la langue venant de ce que la concaténation des éléments est effectuée au moyen de la ponctuation et non des connecteurs. Ce sont les propriétés des connecteurs et des marques de ponctuation qui distinguent les deux niveaux, des formules de la langue et des structures, de même que l'ordre méréologique de ces niveaux (une structure peut être composée d'une ou plusieurs formules, mais les formules ne sont pas composées de structures). Les structures et les formules peuvent d'autre part se décomposer en sous-structures et sous-formules et, suivant l'ordre qui subsiste entre les deux, une sous-structure ne peut donc pas être constituée de sous-formules : la sous-structure ne divise pas la formule. Un séquent est dès lors défini comme *quelque chose* ayant *une certaine forme* dont l'antécédent est une structure, composée de formules concaténées au moyen de la ponctuation, et le conséquent une formule atomique ou complexe. Dans les mots de l'auteur, qui parle de « consécution » plutôt que de séquent :

> Given a set Struct of structures over a language Lang, a *consecution* on Struct is of the form $X \vdash A$, where $X \in$ Struct is the *antecedent* of the consecution and $A \in$ Lang is the consequent of the consecution. (Restall 2000 : 20)

Ce genre de définition montre bien que la grammaire est stipulée, sans véritable justification ni donc aucune critique, ce qui est la marque d'une conception essentialiste du langage et de la logique. La définition de Restall est par conséquent insatisfaisante, car il ne nous explique pas vraiment ce qu'est une consécution (« *is of the form* »), même si l'on sait qu'elle est composée, entre autres, des éléments précédemment définis en termes ensemblistes. Ce qu'il manque est une interprétation du tourniquet $\vdash$, le signe référant à la conséquence logique, laquelle constitue un acte d'inférence, par opposition aux marques de ponctuation et aux connecteurs, qui signifient des règles d'inférence.

Qui plus est, l'auteur définit ensuite l'inférence même comme un *ensemble* (une paire) de consécutions et une règle à son tour comme un *ensemble* d'inférences :

> An *inference* is a pair consisting of a set of consecutions (the *premises* of the inference) and a single consecution (the *conclusion* of the inference). The premises may be an empty set, and in that case we call the inference an *axiom*. A *rule* is a set of inferences. A member of a rule is said to be an *instance* of that rule. (Restall 2000 : 21)

On comprend que Restall désigne par « inférence » ce que nous nommerions un *token* (ou sinsigne) d'argument et par « règle », un *type* (légisigne) d'argument, puisque dans sa définition le membre d'une règle, donc une inférence (pour nous un argument ou delôme), est dit être une *instance* de cette règle. L'ensemble de consécutions qui constituent l' « inférence » (argument) n'est donc pas du même genre que l'ensemble d'inférences qui constituent la règle. Le premier est plutôt une suite d'éléments articulant leurs extensions, tandis que le second est une itération d'éléments aux « intensions » apparentées. D'un point de vue sémiotique, ces définitions sont des aberrations typologiques, car l'argument, en tant qu'il a effectivement pouvoir de loi (en soi, c'est un pur légisigne) sur un processus d'inférence, ne peut pas avoir de *token* et c'est ce qui fait qu'il a une valeur normative par rapport au processus de développement du signe. Dans la typologie, il n'y a d'ailleurs pas de sinsigne symbolique argument, l'instance de l'argument (en mention, par exemple) étant plutôt un sinsigne symbolique phémique (composé), sans pouvoir normatif effectif, ce que Peirce désignait par le terme « conséquence », dans son langage issu de la tradition.

L'inférence même tient plutôt au mode de réalisation de l'interprétance, le rapport que le signe peut actualiser avec son interprétant, lorsque cette interprétance est effectivement en cours de réalisation et qu'elle est en cela dynamique. L'inférence est donc l'aspect dynamique selon lequel l'interprétance se réalise, dans un (légisigne symbolique) argument. Ce n'est pas un signe en soi, donc pas une instance de règle, mais un autre aspect phénoménal de l'argument, qui tient à l'action du signe. C'est l'acte, comme interprétant dynamique de l'argument, que la règle ne signifie qu'en seconde intention. L'inférence n'a d'ailleurs pas en soi (en tant qu'acte) de forme particulière, la forme qui lui est assignée (déductive, inductive, abductive) étant plutôt celle de l'argument dont elle est l'interprétant dynamique. L'inférence peut seulement être dite une instance comme acte, de l'argument, et non une instance comme signe. Dans le domaine de l'acte, il n'y a pas de généralité telle celle du type, mais seulement de la singularité telle celle des instances, bien qu'à un autre niveau phénoménal.

La justification de la règle consiste ensuite en une suite d'arguments, ce que Restall appelle convenablement un système de preuves, dont la notation prend une forme arborescente. La méthode de preuve usuelle est l'induction à partir des formules atomiques du langage.

Les règles structurelles

Les règles structurelles permettent d'effectuer des transformations sur les structures (ponctuation, ordre et nombre de prémisses) lors d'une dérivation. Une règle structurelle prend la forme suivante, pour des séquents en « style de déduction naturelle », c'est-à-dire avec des règles structurelles modifiant l'antécédent (dont les contextes indéterminés peuvent être spécifiés en formules) et des règles opératoires d'introduction et d'élimination s'appliquant au conséquent (Restall 2000 : 24) :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma' \vdash A}\,.$$

Dans ce schéma, la forme générale de l'argument est conservée, selon un principe de substituabilité des formules identiques, lorsqu'on remplace une même formule de chaque antécédent par une autre même formule. Les principales règles structurelles (intensionnelles) distinguées par Restall sont les suivantes, notant les transformations de contextes à l'antécédent (Restall 2000 : 26)[106] :

Nom	**Marque**	**Règle**
Associativité	B	$\Gamma ; (\Delta ; \Lambda) \Leftarrow (\Gamma ; \Delta) ; \Lambda$
Associativité commutée	B′	$\Gamma ; (\Delta ; \Lambda) \Leftarrow (\Delta ; \Gamma) ; \Lambda$
Associativité converse	B^c	$(\Gamma ; \Delta) ; \Lambda \Leftarrow \Gamma ; (\Delta ; \Lambda)$
Commutativité forte	C	$(\Gamma ; \Delta) ; \Lambda \Leftarrow (\Gamma ; \Lambda) ; \Delta$
Commutativité faible	CI	$\Gamma ; \Delta \Leftarrow \Delta ; \Gamma$

106 Les « marques » des règles, différentes des nôtres ou de celles d'autres auteurs (tels que Girard (2006-2007)), correspondent aux désignations du système des combinateurs.

Nom	Marque	Règle
Contraction forte	W	$(\Gamma ; \Delta) ; \Delta \Leftarrow \Gamma ; \Delta$
Contraction faible	WI	$\Gamma ; \Gamma \Leftarrow \Gamma$
Mélange	M	$\Gamma \Leftarrow \Gamma ; \Gamma$
Affaiblissement	K	$\Gamma \Leftarrow \Gamma ; \Delta$
Affaiblissement commuté	K′	$\Gamma \Leftarrow \Delta ; \Gamma$

Ces règles affectent les propriétés de la ponctuation et de la conséquence logique, tout comme les règles opératoires déterminent les propriétés des opérateurs logiques du niveau propositionnel. Ainsi, le conditionnel $\rightarrow$ joue, au niveau des formules, un rôle similaire à celui de la conséquence logique $\vdash$, au niveau des structures, tout en interagissant avec la ponctuation (le point virgule ;) selon les modalités définies par le théorème de déduction (à la Restall). La fusion $\circ$ (de la logique pertinente, conjonction multiplicative $\otimes$ de la logique linéaire) joue, au niveau des formules, un rôle similaire à celui du point-virgule ';' au niveau structurel. La conjonction $\wedge$ (conjonction additive & de la logique linéaire) joue le même rôle, au niveau des formules, que la virgule ',' au niveau des structures. Les autres connecteurs interagissent de façon semblable avec la ponctuation selon des modalités qui leur sont propres. Les règles opératoires qui régissent l'usage des connecteurs sont à leur tour déterminées par les règles structurelles, qui définissent l'usage de la ponctuation, suivant la correspondance entre niveaux.

Divers types de ponctuation peuvent aussi être utilisés, dont la distinction tient aux différentes propriétés de la relation de concaténation entre structures que ces types signifient. Selon l'interprétation de Restall, le point-virgule (intensionnel) correspond à une application d'une structure à une autre, tandis que la virgule (extensionnelle) caractérise une simple union de deux structures. La version intensionnelle correspond aux structures du système des séquents standard, l'extensionnelle à une nouvelle sorte de structure. L'usage de la virgule est donc caractérisé de façon générale par les règles structurelles extensionnelles, dont les principales sont les suivantes (Restall 2000 : 36) :

Nom	**Marque**	**Règle**
Associativité	eB	$\Gamma, (\Delta, \Lambda) \Leftarrow (\Gamma, \Delta), \Lambda$
Commutativité	eCI	$\Gamma, \Delta \Leftarrow \Delta, \Gamma$
Contraction	eWI	$\Gamma, \Gamma \Leftarrow \Gamma$
Affaiblissement	eK	$\Gamma \Leftarrow \Gamma, \Delta$

D'autre part, les structures individuelles (Γ, Δ, ...) dont la composition interne peut changer dans le cours d'une dérivation sans affecter la validité de la conclusion sont dites des « paramètres », qui forment le contexte de l'argumentation. La coupure agit sur les structures en éliminant certaines formules, sans modifier le contexte.

Restall propose également de classer les différentes logiques sous-structurelles en énumérant leurs propriétés structurelles, ainsi pour quelques uns des principaux systèmes de logique (Restall 2000 : 40, D := distribution de $\wedge$ sur $\vee$) :

Marque structurelle	**Marque usuelle**	**Nom**
$BB^c[\rightarrow, \leftarrow, \circ]$	L	Calcul de Lambek associatif
DBCW	R^+	Logique pertinente positive
DBCWM	RM^+	Logique pertinente positive avec mélange
BC	$MALL^+$	Logique linéaire multiplicative additive positive
BCWK	J	Logique intuitionniste
$BCWK[\wedge, \vee, \rightarrow]$		Logique minimale

Nous retenons du travail de Restall que la ponctuation peut être interprétée, c'est-à-dire que ses propriétés peuvent être définies, et qu'elle caractérise les sous-structures, de pair avec la conséquence logique. L'auteur introduit un formalisme pour mieux articuler la distinction entre formules et structures, effectuée par Gentzen dans le formalisme des séquents, mais son approche des fondements de la logique et de la philosophie en général doit être amendée. Il introduit de nouvelles idées, sans les définir suffisamment en soi, pour ensuite les appliquer extensivement, à l'ensemble du système de logique (théorie de la démonstration, théorie des modèles, problème de la déductibilité), dans le but de développer un système unifié des logiques sous-structurelles. La rigueur excessive du formalisme semble finalement développer celui-ci en un artifice qui fait écran à la compréhension.

L'interprétation originale de la ponctuation chez Došen

L'article de Došen (1989) est la première interprétation rigoureuse des constantes logiques, les opérateurs propositionnels, à partir des structures de la déduction, le niveau argumentatif de la grammaire. Son approche s'oppose en quelque sorte à l'interprétation d'Anderson & Belnap (1975), selon laquelle la distinction entre les niveaux propositionnel et argumentatif est métaphysique (extra-logique), la grammaire pouvant se réduire à son seul niveau propositionnel. L'approche de Došen n'est pas pour sa part réductrice au sens où elle prônerait l'élimination du niveau propositionnel dans l'analyse grammaticale. L'auteur montre seulement que l'on peut expliquer les constantes logiques à partir du niveau des structures de la déduction et que c'est donc à ce niveau que se situe le critère de logicité, qui permet de déterminer si un formalisme est proprement logique ou non. Il s'inspire en cela de la métaphore selon laquelle les constantes logiques sont des marques de ponctuation, qui donne l'idée d'un parallèle entre deux niveaux grammaticaux, permettant l'explication de l'un par l'autre.[107] Cette idée consiste plus précisément en ceci que les constantes logiques jouent, au niveau des propositions, un rôle semblable à la ponctuation, au niveau des structures du formalisme des séquents. On retrouve donc la thèse, qui sera développée formellement par Restall, selon laquelle la ponctuation des séquents peut être interprétée et que c'est en interprétant ces marques de ponctuation que l'on peut caractériser en leurs fondements les différents systèmes de logique (classique, intuitionniste, linéaire). Došen montre pour sa part que l'introduction des opérateurs propositionnels présuppose des règles d'inférence, tel le théorème de déduction pour l'implication, et que le sens que prennent ces opérateurs dépend donc des règles structurelles qui conditionnent l'inférence, au niveau de sa structure argumentative. La logique intuitionniste, par exemple, n'admet pas l'affaiblissement au conséquent, et l'implication intuitionniste, qui présuppose le théorème de déduction, se trouve elle-même conditionnée parce que l'inférence est caractérisée de cette manière au niveau structurel. Le critère de logicité des constantes logiques est qu'elles doivent être ultimement analysables à partir des règles structurelles.[108]

D'autre part, un problème dans l'interprétation de Došen, que nous notons sans approfondir, est qu'il formule l'inversion du théorème de déduction au moyen du *modus ponens* (voir aussi son interprétation plus formelle dans Došen (1985)). Au niveau du calcul, les expressions des deux niveaux grammaticaux (arguments, propositions) sont de la sorte tenues pour équivalentes. Néanmoins, l'auteur présente

---

[107] L'interprétation de Došen rejoint certaines remarques du *Tractatus logico-philosophicus* de Wittgenstein (1922), où il est dit : « Die logischen Operationszeichen sind Interpunktionen » (5.4611) et « [...] in der Logik ist jeder Satz die Form eines Beweises » (6.1264), mais notre auteur détache ces propositions de sa propre interprétation, dont le contexte spécifique est la théorie de la démonstration.

[108] Prior, dans sa fameuse note « The Runabout Inference-Ticket » (1960), fait remarquer qu'il faut justifier et non seulement stipuler la grammaire (par son exemple du pseudo-connecteur « plonk »). Il faut donc comprendre comment la déductibilité fonde les opérations propositionnelles, en commençant par l'implication (théorème de déduction). Belnap (1962) répond en formulant un critère de démarcation des constantes logiques, la *consistance* avec certains présupposés acceptés du système, soit que la déductibilité est formalisée par les règles d'inférence structurelles, que toute introduction d'un nouvel opérateur constitue une extension de ce système et que cette extension doit conserver les propriétés structurelles fondamentales du système, tout en assurant l'unicité des éléments introduits. Le développement des logiques sous-structurelles poursuit cette réflexion à l'origine grammaticale et dont les conséquences portent aussi sur la critique.

aussi, dans le métalangage, certains présupposés concernant la définition de la logique, soit qu'elle est formelle, structurelle et analysable ultimement en termes de structures. Il développe une certaine conception de l'analyse selon laquelle il distingue l'analyse des expressions, que nous dirions en leur sens mathématique, de la définition explicite de ces expressions. Sur cette base, il pose alors le niveau des structures comme étant plus fondamental que celui des propositions, les règles structurelles donnant un sens aux opérations propositionnelles. L'ordre grammatical est donc imposé dans le métalangage, tandis que le calcul n'en présume aucun. Bien que Došen développe une interprétation preuve-théorétique des constantes logiques, il reste prisonnier de l'essentialisme ainsi que d'un certain « mathématicisme ».[109]

D'un point de vue sémiotique, le niveau argumentatif complète la grammaire de la logique, sans qu'il y ait réduction d'un niveau grammatical à un autre. La grammaire de la logique est essentiellement constituée des trois niveaux du terme, de la proposition et de l'argument, qui ne sont eux-mêmes que des aspects que prend le signe dans son rapport à l'interprétant, complétant d'autres perspectives sur la relation triadique constitutive du signe. Le critère de logicité dans l'approche sémiotique est la triadicité catégorielle, qui se reflète à plusieurs niveaux de la théorie. Une expression est considérée comme proprement logique lorsqu'elle est analysable ultimement en suivant le principe de la triade fondamentale. Le fondement de cette triade est empirique dans sa formulation phanéroscopique, qui distingue les catégories universelles de l'expérience à travers une description du phénomène, mais devient proprement logique lorsque l'on considère le signe tel qu'il s'articule et se complexifie en vue d'une certaine fin, ce qui rend la logique normative. Le critère qui permet de déterminer si une expression est logique est que l'on doit pouvoir en faire ressortir la structure triadique en tant que signe. Une expression mathématique pure, telle que la

---

[109] Comme pour le cas de l'inversion chez Restall, l'approfondissement de ce sujet nous mènerait à la critique logique et son critère algorithmique, ce qui serait hors de propos. Les réflexions métalogiques de Došen ont cependant plus d'affinité avec notre approche et l'interprétation sémiotique de la grammaire type-théorétique constructive permettra d'éclairer quelque peu les idées de l'auteur.

variable d'objet simple dans le calcul lambda (voir l'annexe), ne possède pas en tant qu'expression mathématique d'interprétant déterminé, son interprétant étant seulement déterminable dans une interprétation éventuelle en un sens logique.

De plus, la logicité ne se détermine pas seulement au niveau grammatical de la constitution du signe et de l'élaboration de la typologie, mais aussi avec la complexification du motif triadique dans l'articulation du système logique, en grammaire, critique et méthodeutique. C'est lorsque la grammaire est complétée en ses différents niveaux et de même également pour l'ensemble du système de logique, que la logique prend pleinement son sens. Ce qui veut dire, concernant l'interprétation d'un système de logique formalisé suivant la méthode des séquents, qu'on ne peut le comprendre pleinement que lorsque l'on considère les catégories de sa grammaire particulière (sa syntaxe), les règles de la critique logique particulière qu'il formalise et ses principes méthodeutiques de démonstration et recherche de preuve. Il ne suffit pas non plus de réduire la grammaire à l'un ou l'autre de ses niveaux, mais de comprendre la spécificité de chacune des catégories grammaticales selon la place qu'elle occupe dans l'ordre des catégories et le rôle qu'elle joue dans la constitution de la signification d'un énoncé plus complexe, voire d'une argumentation. Cela dit, Došen voit juste lorsqu'il interprète les constantes logiques en termes de structures des séquents, puisque les arguments (structures) sont plus complexes, selon l'ordre de dépendance non réciproque entre les catégories, que les propositions et les opérateurs propositionnels, et contiennent donc les principes qui permettent de constituer les niveaux grammaticaux antérieurs, tandis que ceux-ci ne suffisent pas à déterminer la signification au niveau des arguments. Le théorème de déduction doit être univoque du point de vue catégoriel de la grammaire.

La métaphore selon laquelle les constantes logiques sont des marques de ponctuation, peut finalement être comprise comme voulant dire que les opérateurs propositionnels jouent un rôle semblable aux marques de ponctuation des structures de séquents, en ce sens que tous deux sont, d'un point de vue grammatical, des *légisignes symboliques onomatiques* de seconde intention qui désignent le diagramme en première intention du niveau propositionnel, pour les uns, et du niveau argumentatif, pour les autres. Le point de vue sémiotique, formulé ici de manière générale, sera rendu plus clair par l'analyse des notations, les grammaires particulières effectives, des logiques intuitionniste et linéaire en méthode des séquents, qui se distinguent de la logique classique par leurs règles structurelles.

2.3.1.3. Système des séquents pour la logique intuitionniste

La logique intuitionniste est la logique de la pensée comme processus finalisé dans un monde fini. Ce type de raisonnement exclut l'infini actuel, mais comprend un infini potentiel. L'inférence peut bien avoir comme source une infinité d'hypothèses, mais dans le raisonnement effectif elle ne réalise que certaines de ces possibilités, à travers un nombre fini de conséquences actuelles, et ne vise aussi qu'une seule conclusion. Par raisonnement effectif, nous entendons ici celui qui se déroule dans les faits, la réalité actuelle, voire le monde matériel. La logique intuitionniste a été formulée pour la première fois en méthode des séquents (**LI**) par Gentzen, dans son texte de 1934. La notation y est identique à celle de la logique classique, mais les règles d'inférence y sont quelque peu modifiées, en particulier les règles structurelles, qui doivent tenir compte de la spécificité du mode de pensée intuitionniste et ne sont dès lors plus symétriques, ainsi que la négation, qui n'est plus involutive.

Les règles d'inférence dans le système des séquents intuitionnistes

Les règles du système des séquents intuitionnistes, formellement exprimées, sont les suivantes (Gentzen (1934-1935), Girard (2006-2007)) :

Règles d'identité et coupure :

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\text{identité}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \quad \Lambda, A \vdash B}{\Gamma, \Lambda \vdash B}\ (\text{coupure})$$

Règles opératoires :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\vdash \wedge) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ (\wedge g \vdash) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ (\wedge d \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vdash \vee g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vdash \vee d) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ (\vee \vdash)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ (\vdash \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Lambda, B \vdash C}{\Gamma, \Lambda, A \rightarrow B \vdash C}\ (\rightarrow \vdash)$$

$$\frac{}{\Gamma, \perp \vdash A}\ (\perp \vdash)$$

La négation intuitionniste est définie à partir de l'absurdité : $\neg p \coloneqq p \rightarrow \perp$.[110]

$$\frac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x A}\ (\vdash \exists) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \exists x A \vdash B}\ (\exists \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\ (\vdash \forall) \qquad \frac{\Gamma, A[t/x] \vdash B}{\Gamma, \forall x A \vdash B}\ (\forall \vdash)$$

Les mêmes remarques s'appliquent, concernant la portée du terme arbitraire t et de la variable x, que pour les séquents classiques.

Règles structurelles :

P : permutation, C : contraction, A : affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\sigma(\Gamma) \vdash A}\ (P)$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (C \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (A \vdash)$$

---

[110] Le signe $\perp$, dans son usage logique, vient de Quine (1941, 1950). Gentzen (1934-1935) et Prawitz (1965) utilisent le signe $\curlywedge$. Comme symbole de l'orthogonalité en mathématiques, il a été introduit par Pierre Hérigone dans son *Cursus mathematicus* de 1634, cf. Cajori (1928-1929).

Exemple de dérivation et principes méthodeutiques des séquents intuitionnistes

Démonstration de l'introduction de la double négation au conséquent (d'après Girard (2006-2007), en définissant la négation) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \vdash A}\ \text{id.} \qquad \overline{\bot \vdash \bot}\ (\bot \vdash)}{A, A \rightarrow \bot \vdash \bot}\ (\rightarrow \vdash)}{A \vdash (A \rightarrow \bot) \rightarrow \bot}\ (\vdash \rightarrow)}{A \vdash \neg\neg A}\ \text{déf.}$$

La logique intuitionniste en méthode des séquents vérifie le théorème principal sur l'élimination des coupures, de même que son corrélat, la propriété de la sous-formule. De plus, comme la contraction au conséquent est éliminée, le calcul propositionnel intuitionniste est décidable (contrairement au calcul classique).

Interprétation des règles d'inférence des séquents intuitionnistes

Une des premières choses que nous pouvons remarquer, c'est que les règles intuitionnistes sont asymétriques, par contraste avec la symétrie des règles classiques examinées précédemment. Il n'y a de contexte indéterminé que dans l'antécédent et le conséquent ne contient au plus qu'une formule, possiblement aucune selon les systèmes. Cette restriction syntaxique affecte plus précisément le système des règles d'inférence structurelles, car il n'y a pas de permutation, de contraction ou d'affaiblissement au conséquent ; sauf si l'on permet le conséquent vide, dans le cas de l'affaiblissement (ainsi dans Dummett (1977)).

En plus de représenter des conséquences multiples éventuelles, une variable de contexte indéterminé au conséquent pourrait contenir la négation de la proposition déterminée, ce qui donnerait, au niveau argumentatif (en interprétant la virgule), une « disjonction » de la proposition et sa négation, le tiers exclu ($p \vee \neg p$), que le mode de pensée intuitionniste ne permet pas d'évaluer de manière déterminée. En effet, la logique intuitionniste étant constructive, une proposition que l'on peut asserter est une proposition que l'on sait comment prouver dans les faits. Une même inférence ne peut cependant pas constituer une preuve effective, comme objet singulier et actuel, du tiers exclu, car la disjonction entre deux propositions quelconques est définie intuitionnistiquement par un processus d'inférence effectif, la preuve, qui mène soit à l'une, soit à l'autre proposition. La disjonction entre une proposition et sa négation signifie alors que l'on peut effectivement démontrer soit que p, soit que p entraîne une absurdité, par définition de la négation. L'absurdité n'est cependant pas démontrable et $\neg p$ signifie dès lors qu'on ne peut pas effectivement démontrer que p. Le tiers exclu veut donc dire que l'on peut effectivement démontrer soit que p, soit que p n'est pas démontrable dans les faits. Toutefois, comme le processus d'inférence doit être fini, ce qui est requis par l'effectivité, il se peut que le disjoint nié reste indéterminé et la disjonction s'avère pour cette raison indécidable.[111] Il n'y a donc pas de preuve constructive du tiers exclu.

Une autre façon de comprendre pourquoi il n'y a pas de conclusions multiples, c'est-à-dire de suite de formules, dans le conséquent, consiste à partir de la propriété d'asymétrie des règles d'inférence, qui dépend de l'irréversibilité du sens de l'inférence globale, au niveau argumentatif des structures, et dont la non-involution de la négation intuitionniste est un cas particulier, au niveau opératoire des formules. Ainsi, l'irréversibilité de l'inférence comme processus finalisé ne permet pas de comprendre l'antécédent et le conséquent comme des duaux, qui se définiraient réciproquement à travers une certaine réversibilité de leur sens. La « conjonction » des formules et contextes de l'antécédent, au niveau argumentatif, n'est dès lors pas

[111] « [...] the truth of $A \vee \neg A$ depends on our being able either to prove A or to show that we can never do so, which we cannot in general claim to be able to do. » (Dummett 1977 : 13) L'aspect contourné de cette explication vient de ce que la démonstration porte (en seconde intention) sur une non-démonstration. L'indétermination est due à ce que la démonstration de l'indémontrable peut ne pas se terminer. On a l'impression de repousser la négation dans le métalangage plutôt que de la soumettre à la procédure.

traductible en une « disjonction » au conséquent. Il n'y a tout simplement pas de disjonction structurelle au conséquent, afin de respecter l'ordre d'avancement vers la conclusion dans un processus fini. De même, la négation ne devient pas une affirmation en passant au conséquent, mais une négation niée par une autre négation, parce que le sens local d'une proposition dépend de la finalité du processus et n'est donc pas réversible. La triple négation équivaut toutefois à la simple négation, puisque le sens de la proposition simple négative, prise en quelque sorte comme primitive, n'est pas dirigée dans le sens positif de l'inférence. Si l'on regarde vers l'avant, on ne peut pas reculer sans percevoir ses traces et contempler la négativité du mouvement, mais si l'on avance à reculons, on peut toujours revenir sur ses pas sans en apprécier directement la régression dans l'acte.

La non-involution de la négation, le fait qu'elle ne puisse pas s'appliquer à elle-même seule et s'annuler, empêche aussi l'interdéfinissabilité des opérateurs propositionnels : $\rightarrow$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, qui dès lors ne soutiennent pas la dualité à la De Morgan. La démonstration du tiers exclu ($p \vee \neg p$) et de l'élimination de la double négation ($\neg\neg p \rightarrow p$) ou le raisonnement par l'absurde, à partir de l'identité et des autres règles d'inférence, ne sont pas possibles. Il n'y a pas non plus de formulation tout à droite du système, comme nous en retrouverons dans la logique linéaire et qui était déjà possible en logique classique. Néanmoins, bien que la négation ne soit pas involutive, il y a moyen de traduire la logique intuitionniste en logique classique, en ajoutant des doubles négations devant chaque formule et chaque opérateur (Gödel (1933), Gentzen (1936)). Le séquent classique doit alors être formulé en séquent intuitionniste tout à gauche, afin d'éliminer les suites de formules à droite, et les triples négations résultantes peuvent être simplifiées en simples négations.

Au sujet de la distinction entre restrictions structurelles et opératoires, une remarque de Gentzen nous suggère qu'en étant basée sur les règles structurelles, la méthode des séquents (*LJ*, *LK*) est différemment constructive, car autrement procédurale, que la méthode de déduction naturelle (*NJ*, *NK*), basée sur les règles opératoires, les règles structurelles n'étant le plus souvent pas distinguées explicitement dans cette autre méthode :

> La distinction entre logique *intuitionniste* et logique *classique*, est, extérieurement, d'une tout autre nature dans les calculs *LJ* et *LK* que dans les calculs *NJ* et *NK*. Pour ceux-ci, cette distinction se fondait sur l'élimination ou l'adjonction du principe du tiers-exclu alors qu'ici elle est exprimée par la condition du conséquent. (Gentzen 1955 (1934-1935) : 48)

Notez, pour l'aspect procédural, le passage « extérieurement, d'une tout autre nature » (*äußerlich ganz anderer Art*), et pour la distinction implicite entre niveaux grammaticaux, l'opposition entre « principe du tiers exclu » (*ausgeschlossenen Dritten*) et « condition du conséquent » (*Sukzedensbedingung*). Gentzen pose toutefois l'équivalence des deux niveaux de la distinction, ce qui nous laisse songeurs quant à l'ordre grammatical impliqué. Nos principes sémiotiques nous portent à penser que les séquents sont plus constructifs que la déduction naturelle, car leur procéduralité est mieux articulée, à ses différents niveaux grammaticaux.

Analyse de la grammaire des séquents intuitionnistes

Dans une approche sémiotique, la conception intuitionniste de l'inférence peut être comprise comme une interprétation particulière de la sémiose, l'action du signe, qui prend un autre sens qu'en logique classique. On peut distinguer, dans la théorie du signe peircéenne, deux sens de la détermination du signe, soit la détermination interne entre composantes de la relation de signification et la détermination externe lors du développement du signe en d'autres signes par le biais de l'interprétance. Dans les deux cas, la détermination se fait en un sens univoque, de la dépendance non réciproque d'une catégorie par rapport à une autre. La détermination n'est donc pas une sorte de relation causale au sens ordinaire, physique, du terme, qui serait idéalement réversible (tel un cycle de Carnot). Elle ne vise pas non plus un résultat déterminé, mais plutôt général : celui des composantes corrélées, d'après l'ordre catégoriel structurant la relation de signification, ou des signes produits, suivant le sens de la sémiose, du processus d'inférence. Le sens de la détermination correspond de la sorte à celui de la signification, qui dans sa définition passe de plus vague à plus général[112]. L'asymétrie propre aux règles d'inférence de la logique intuitionniste est liée à la détermination univoque du cours de la sémiose. La logique intuitionniste reconnaît explicitement cette deuxième sorte de détermination du signe, au niveau de l'interprétance. Son explicitation dans une perspective sémiotique passe par l'articulation de l'interprétance en ses aspects immédiat, dynamique et final, ce qui va de pair avec la distinction entre objets immédiat et dynamique. Ces distinctions ne seront pleinement explicitées dans la notation qu'avec la théorie des types constructive et la grammaire logique qui s'en inspire.

La négation et l'implication intuitionnistes, en particulier parmi les opérateurs logiques, sont aussi interprétées d'une autre façon que leurs correspondants classiques. D'un point de vue géométrique, les règles d'inférence de la logique intuitionniste sont asymétriques, ce qui veut dire que procéduralement la négation d'une proposition ne correspond pas seulement à un changement de côté du tourniquet, à un passage de l'antécédent au conséquent ou vice-versa. Le processus d'inférence en logique intuitionniste est explicitement finalisé dans un certain sens et l'inférence ne peut donc pas être renversée librement comme en logique classique. Les opérations effectuées sur les propositions dans le contexte de l'inférence logique sont également contraintes par le sens du processus d'inférence, allant de l'antécédent vers le conséquent. D'un point de vue plus strictement logique, on pourrait dire que les formules à l'antécédent et au conséquent sont liées par une relation de dépendance non réciproque, qui contraint le cours de l'inférence, ici la déduction hypothétique du séquent.

---

[112] Short (2007) propose aussi de comprendre la détermination comme une limite imposée par une composante de la relation de signification sur une autre.

Dans le cas de la négation d'une proposition, l'explication constructive la plus commune de cette opération consiste à dire que la proposition niée entraîne en soi une contradiction, une proposition constante fausse, dans le processus d'inférence. La négation est simplement définie en termes d'autres éléments de la grammaire logique particulière. La contradiction du *definiens*, en tenant compte de l'aspect dynamique de la compréhension constructive — c'est-à-dire que les opérations logiques sont comprises comme advenant dans le cours d'une inférence —, est appelée plus spécifiquement l' « absurdité » (ou encore la « fausseté ») et notée $\perp$. L'absurdité est donc considérée comme primitive et la négation définie sur cette base (ou vice versa selon les approches, ainsi chez Gentzen (1934-1935)). L'interprétation constructive de la négation en logique intuitionniste peut se résumer de la façon suivante[113] :

$$\neg p \coloneqq p \text{ est absurde} \coloneqq p \text{ entraîne une contradiction}$$

$$\perp \coloneqq \text{absurdité} \coloneqq \text{contradiction (en un sens constructif)}$$

$$\neg p \coloneqq p \rightarrow \perp.$$

D'un point de vue sémiotique, la distinction entre la négation et l'absurdité est signifiante. D'une part, la négation, en tant qu'opérateur unaire, est un *symbole onomatique* de seconde intention, qui montre la relation entre la proposition niée et son contexte logique — le reste du séquent, représentant un processus d'inférence finalisé — en lui donnant un sens particulier, le changement de détermination de l'antécédent au conséquent ou inversement, selon la contrainte de dépendance non réciproque des énoncés dans le séquent (classique, intuitionniste, linéaire). Elle est

[113] La distinction entre négation et absurdité se trouve exprimée informellement chez Heyting (1930a), puis formellement chez, entre autres, Gentzen (1934-1935), Kleene (1952), Prawitz (1965), Dummett (1977), van Dalen (1980). Notons, toutefois, que Brouwer (1923, 1925) parle plutôt d'un « prédicat d'absurdité » (par exemple, l'absurdité d'une propriété x), ce qui en ferait un *symbole rhématique* ; peut-être dans la compréhension constructive de l'auteur un prédicat de l'inférence, puisque le séquent contenant une absurdité au conséquent serait absurde. Brouwer oppose l'absurdité à la rectitude (all. *Richtigkeit*, angl. *correctness*), plutôt qu'à la vérité. Glivenko (1928, 1929) parle à son tour de fausseté et de proposition falsifiée, désignées dans la même notation que les *PM* (par exemple, $\sim p$), et Heyting (1930a) de négation comprise en un sens constructif, c'est-à-dire que $\sim p$ signifie que « p implique une contradiction » (le signe $\neg$ de la négation intuitionniste est introduit dans Heyting (1930b)).

aussi, relativement au processus d'inférence dans son ensemble, un acte d'inférence positif, puisqu'elle n'élimine aucune formule ; par opposition à la coupure, de même que l'affaiblissement et la contraction, selon leur sens de lecture. D'autre part, l'absurdité, en tant que proposition constante, est un *symbole phémique* de première intention dont le sens est déterminé, sa valeur de vérité, finalité de l'interprétance, étant constamment fausse. L'absurdité ainsi comprise n'est donc pas un acte d'inférence, mais une proposition à la valeur déterminée et négative par rapport au processus d'inférence comme démonstration de la validité d'un énoncé. Cependant, l'absurdité est aussi interprétée chez certains (Negri & von Plato (2001)) comme un opérateur nullaire[114], qui est alors un *symbole onomatique* de seconde intention, tout comme les autres opérateurs, la différence avec ceux-ci tenant au sens accordé à la relation désignée par le signe, à travers la médiation symbolique. L'absurdité comme opérateur nullaire montre qu'aucune relation ne subsiste entre des éléments logiques au moment désigné de l'inférence.

L'oscillation entre deux interprétations de l'absurdité, comme proposition constante (fausse) ou opérateur (nullaire), semble liée à ce que Peirce appelle une *médade*, soit un prédicat (symbole *rhématique*) sans aucune place d'argument, c'est-à-dire déjà saturé en soi (EP2 : 173, 1903). La médade correspond, au niveau propositionnel, à une proposition complète (phème) pouvant recevoir une valeur de vérité, constante ou factuelle. Cependant, dans le cas de l'absurdité, on trouve à l'inverse un opérateur nullaire comme symbole *onomatique* de seconde intention, qui, s'il correspondait à quelque chose dans les faits, porterait sur le diagramme de la relation entre propositions, mais qui prend ici toute la place et joue le rôle d'une proposition constante fausse.

---

[114] L'interprétation de Negri & von Plato (2001) semble quelque peu confuse, puisque les auteurs classent d'abord, dans leur présentation de la langue formelle, la fausseté $\perp$ parmi les formules primitives, avec les formules atomiques P, Q, R, … , auxquelles ils attribuent un type de catégorie élémentaire commun, la proposition, marquée *Prop* ; ainsi $P : Prop$, $Q : Prop$, $R : Prop$, … et $\perp : Prop$.

Ce qui change, d'une caractérisation à l'autre parmi les approches communes, c'est le point de vue grammatical qui est adopté sur le signe de l'absurdité : dans un cas ce signe est considéré comme un sème de seconde intention (opérateur), dans l'autre comme un phème de première intention (proposition). Bien qu'on puisse toujours distinguer des points de vue différents dans la compréhension de l'interprétance, la différence est particulièrement signifiante dans le cas de l'absurdité, car chaque niveau grammatical confère à l'élément de notation des caractéristiques qui lui sont propres. La perspective choisie dans l'interprétation de la grammaire importe donc. Si l'on veut faire ressortir l'attribution potentielle d'une valeur de vérité à l'élément grammatical, ici constamment fausse, on doit l'interpréter comme une proposition constante. Si l'on veut plutôt faire ressortir son rôle inférentiel, comme opération propositionnelle à valeur nulle, on doit l'interpréter comme un opérateur nullaire.[115]

On peut déjà se demander si, dans la perspective de l'interprétation globale de la grammaire de la logique intuitionniste, complétée par le niveau argumentatif, il est préférable d'interpréter l'absurdité comme une proposition constante ou comme un opérateur nullaire. Une particularité des opérateurs est que ce sont des sèmes onomatiques de seconde intention, qui portent sur des propositions, et ce ne sont donc pas des éléments internes aux propositions comme les sujets et prédicats logiques de première intention. Les opérateurs sont relatifs à des signes plus élémentaires, les propositions composantes et le diagramme de leur relation. La proposition simple est pour sa part un signe de première intention, portant directement sur l'objet du signe, dans une perspective logique pure, ou sur un correspondant non logique, dans une perspective syntaxique appliquée. En logique intuitionniste, cependant, c'est la construction du diagramme qui prime, comme objet de la proposition complexe

[115] Une situation semblable advient dans le cas de l'argument (du delôme) qui peut être considéré comme une proposition complexe (un phème de seconde intention, la conséquence au sens traditionnel et peircéen). L'argument ne se réduit pas à la proposition complexe, car il possède un caractère normatif supplémentaire, selon lequel il justifie la valeur de vérité accordée à la conclusion.

(plutôt l'interprétant dynamique de l'argument, dans une perspective sémiotique), sur la représentation de la valeur de vérité (plutôt l'interprétant final). L'inférence au niveau argumentatif se construit avant tout à partir des indications données par les opérateurs du niveau propositionnel. Ce que l'on veut savoir, ce n'est pas quelle est la valeur de vérité d'une proposition dans l'absolu, mais si l'on peut effectivement réaliser l'inférence à tel moment, dans telle séquence de la dérivation. Bien que la définition de l'absurdité comme contradiction — une proposition contradictoire dans sa structure composée (tel $p \wedge \neg p$) ou une proposition simple absurde en soi (tel p signifiant $1 = 0$, donc comme énoncé non logique) — aide à conceptualiser l'élément grammatical, il est préférable de l'interpréter comme un opérateur nullaire puisque son rôle principal du point de vue de l'argumentation, qui complète la compréhension globale de la grammaire logique, est de marquer un point nul où l'inférence ne peut se poursuivre plus avant. L'opérateur nullaire montre que la mise en relation devient impossible à tel moment de l'inférence. Il n'y a pas de preuve de l'absurdité, ni de la négation simple, puisque celle-ci implique une preuve de l'absurdité.

Il serait d'ailleurs plus exact d'interpréter l'absurdité comme un opérateur binaire sur des propositions quelconques, plutôt que nullaire, car, dans une compréhension vériconditionnelle des opérateurs, la combinatoire des valeurs de vérité (vrai et faux) en seize combinaisons possibles, définissant chacune un opérateur, nous suggère de comprendre la contradiction ou, plus adéquatement nommée, l'*antilogie*, comme une opération entre deux propositions dont le résultat est dans tous les cas faux (une sorte d'opération cul-de-sac ou d'impasse inférentielle) :

p	$\perp$	q
v	f	v
v	f	f
f	f	v
f	f	f

Donc, l'absurdité serait mieux comprise comme un opérateur binaire mettant en relation des propositions quelconques, de la manière suivante : $p \perp q$, ce que l'on peut lire « p contredit q (et inversement) » et nommer plutôt « antilogie ». La définition de la négation peut être rendue à son tour par : $\neg p \coloneqq p \rightarrow (q \perp r)$. À la rigueur, comme le résultat de l'opération logique est toujours le même (le faux) peu importe les propositions mises en relation par l'opérateur de l'antilogie, on peut considérer que la notation des propositions antilogiques n'est pas nécessaire et ne conserver que le signe d'opérateur $\perp$, comme dans la notation standard. En ce sens, l'icône (prédicat) de la relation entre propositions contradictoires (indices de la proposition complexe), désignée par le sème onomatique de seconde intention qu'est l'antilogie, se réduit à un phème (proposition constante), également désigné par le signe d'opération en seconde intention, mais l'opérateur même n'est réduit qu'en vertu de sa dépendance envers le diagramme de la relation. L'interprétation ne doit pas passer outre l'abréviation et doit dûment noter que l'opération de l'antilogie est binaire, portant sur deux propositions, et non « nullaire », tournant en soi dans le vide.[116]

L'interprétation constructive de l'opérateur d'antilogie est alors qu'il représente une opération pour laquelle nous ne connaissons aucune preuve effective, peu importe que nous sachions comment donner une preuve de chacune de ses composantes ou non. L'opération antilogique nullifie en quelque sorte le lieu ou le moment qu'elle occupe dans le processus d'inférence. La négation peut être comprise à son tour comme l'implication d'une proposition qu'on ne sait pas comment prouver.

---

[116] Quine (1941, 1950) introduisit à l'origine les symboles $\top$ et $\perp$ pour noter la vérité et la fausseté, c'est-à-dire les valeurs de vérité déterminées (vrai ou faux), sur lesquelles il opère directement le calcul logique. Suivant cette interprétation, $\top$ et $\perp$ désignent les interprétants finaux de propositions aux valeurs de vérité déterminées ou, si l'on veut, constantes, mais en ce dernier sens seulement par défaut puisqu'on ne retient qu'un cas de valeur de vérité au lieu de considérer toutes les combinaisons possibles, selon le nombre de valeurs de vérités possibles et le nombre de propositions en composition. Cependant, la compréhension de la tautologie et de l'antilogie comme opérations binaires est aussi usuelle, ainsi dans la définition des opérateurs binaires par les tables de vérité (Wittgenstein (1922)), et ces deux symboles leur sont alors communément attribués (par exemple, dans Vernant (2001)). Notons que l'orthogonalité en mathématiques désigne notamment une relation entre deux vecteurs ($x \perp y$) dont le produit intérieur est égal à zéro, donc plutôt une opération binaire (à deux places d'argument) au résultat nul qu'une opération « nullaire » (à zéro place d'argument).

La définition commune de la contradiction comme conjonction d'une proposition et sa négation, bien qu'elle soit facile à comprendre intuitivement, est dès lors inadéquate, puisqu'elle devient circulaire dans son appel à la définition de la négation, donnée à son tour en termes de contradiction ou antilogie.

Toutefois, cette interprétation en termes de connaissance des moyens de démonstration ne nous satisfait pas complètement, parce qu'elle reste engagée épistémologiquement. Elle présuppose une compréhension de la notion de connaissance, ce qui nécessite une réflexion d'ordre métaphysique dépassant le cadre strict de la réflexion logique. Son pendant ontologique, selon lequel tel objet est une preuve de telle proposition (pour la composition des propositions simples en compositions complexes, on spécifie aussi le sens de l'opérateur dans le métalangage), traîne quant à lui un présupposé essentialiste, selon lequel il y a un objet comme preuve en soi de la proposition, qui existe indépendamment de la proposition et du sens de la relation logique de seconde intention entre cette proposition et son objet-preuve.

Il faudrait plutôt rendre compte de l'opérateur à partir des ressources internes à la logique, c'est-à-dire, dans une perspective sémiotique, l'articulation de la relation de signification constitutive du signe et la typologie conséquente des aspects du signe. La distinction entre les différents types d'interprétant (immédiat, dynamique et final) permet déjà d'expliquer la dynamique propre aux opérateurs dans le processus d'inférence, l'interprétant dynamique étant l'acte d'inférence sous-jacent à l'opérateur et dirigé vers l'interprétant final selon des modalités qui lui sont propres, c'est-à-dire en vertu des valeurs de vérité définies dans la combinatoire ou des conditions d'assertabilité correspondantes. Une preuve, en termes sémiotiques, est une construction (objet dynamique) tel un calcul effectif, mais avec en plus, sous son aspect logique et en tant que processus finalisé (interprétant dynamique), l'évaluation de la valeur de vérité des propositions et de la validité de l'argument, comme finalité du processus d'inférence (interprétant final)[117]. La réflexion ultérieure en termes de catégories particulières de la signification permet ensuite de caractériser le processus de signification en seconde intention, en spécifiant le sens de l'interprétance sous ses différents aspects. Si l'on se souvient que la signification tend à se développer déductivement dans le sens de la généralité, on peut comprendre l'antilogie comme un retournement du sens de l'inférence logique, du général vers le vague et même vers l'extrêmement vague ; ce qui correspond, dans une conception classique, aux valeurs de vérité extrémales définissant l'antilogie de manière combinatoire, c'est-à-dire un résultat faux dans tous les cas possibles, ou, dans notre conception sémiotique, une indétermination extrême et d'une manière indéfinie de la relation constitutive du signe, c'est-à-dire la détermination des composantes les unes par les autres, ou d'un signe par un autre dans un signe complexe.

Finalement et plus brièvement, dans le cas de l'implication intuitionniste, l'opération propositionnelle $(p \rightarrow q)$ est comprise en un sens constructif comme donnant une preuve du conséquent q à partir d'une preuve de l'antécédent p et non plus au sens de l'implication matérielle, équivalente à une disjonction de l'antécédent nié avec le conséquent affirmé $(\neg p \vee q)$. Elle se distingue de l'implication matérielle en ce qu'elle est positivement constructive, c'est-à-dire qu'elle ne fait pas intervenir d'opération nullifiante dans le processus d'inférence, comme la négation ou l'antilogie. Elle se distingue aussi de la déduction, hypothétique (dans un séquent) ou catégorique (dans une dérivation), en ce qu'elle ne fait que mettre en relation des propositions, tout en donnant un sens à cette relation, composant de la sorte une autre proposition dont on peut juger de la valeur de vérité ; tandis que la déduction, lorsque complète et assertorique, doit justifier la valeur de vérité accordée à sa conclusion, pour que l'on puisse la considérer à son tour comme constituant un argument valide. Notre réflexion est ici à nouveau limitée parce que c'est la déduction, primitive d'un point de vue normatif, qui donne sens à l'implication et qui devrait être à son tour

---

[117] Ceci sera rendu plus clair avec la formulation explicite de la théorie des types constructive.

comprise en un sens procédural, en considérant donc de manière plus détaillée le lien entre la grammaire et la critique, de même qu'entre le calcul mathématique et la critique logique.

2.3.1.4. Système des séquents pour la logique linéaire

La logique linéaire est la logique du raisonnement fini en soi, mais ouvert sur les possibilités infinies de la pensée. Le raisonnement, dans ce système de logique, se développe vers l'infini de manière contrôlée, par le biais des opérateurs imparfaits (ou « exponentielles »), les modalités linéaires. De manière plus prosaïque, la logique linéaire peut aussi être comprise comme une logique qui tient compte des ressources utilisées dans le processus du raisonnement ou, de façon plus générale, lors du développement de la connaissance. Dans sa formulation d'origine en méthode des séquents (**LL**), elle a été inventée par Jean-Yves Girard dans les années 1980 et exposée depuis par l'auteur dans plusieurs textes (1987a, 1995, 2006-2007). Une remarque de Gentzen (1934-1935 : 184, § 2.2) mentionne déjà la contrainte de la linéarité de la pensée sur le raisonnement et un certain écart de la représentation en notation arborescente à cet égard. Toutefois, la linéarité du calcul logique chez Girard renvoie plus exactement à la conception algébrique, selon laquelle une fonction est dite linéaire si elle préserve les unions quelconques ; ainsi, en simplifiant : $F(a \cup b) = F(a) \cup F(b)$. La logique linéaire a trouvé tôt des applications, tout d'abord en informatique (Girard et al. (1995), Ehrhard et al. (2004)) et plus récemment dans un champ élargi de la philosophie des sciences (Bailly & Longo (2006), Joinet & Tronçon (2009)). En ce qui nous concerne, elle permet surtout d'approfondir l'analyse logique du raisonnement, non seulement au niveau de la critique, le système des règles d'inférence, mais aussi de la grammaire logique même.

Dans son interprétation en termes de ressources, la logique linéaire permet de formaliser adéquatement, par exemple, l'implication causale, qui ne peut être itérée puisque les conditions matérielles de l'inférence changent tandis qu'elle se réalise. Par contraste, la déduction classique ou intuitionniste peut être répétée, car ses prémisses valent toujours à la suite de l'inférence (propriété d'idempotence, liée à la règle de contraction). La logique classique traite de vérités qui sont considérées tenir de toute éternité, tandis que la logique intuitionniste s'occupe d'énoncés que l'on sait comment prouver en suivant un processus d'inférence effectif.

La logique linéaire permet tout de même l'itération ou l'ajout de formules au cours de la déduction, mais en les contrôlant alors par le biais d'opérateurs imparfaits, les exponentielles (*bien sûr* '!' et *pourquoi pas* '?'). Ces opérateurs règlent en quelque sorte l'effectivité du processus de signification de la logique, qui ne va pas de soi, mais dépend d'une certaine perspective formelle sur le raisonnement, voire de l'activité du sujet de la connaissance (l'agent cognitif, point focal de la perspective phénoménale). L'inférence est donc mise en perspective et relativisée, ce qui, pour nous, sera expliqué sur une base sémiotique et phanéroscopique, tandis que l'auteur tâche de fonder sa logique dans la perspective même des mathématiques qui lui sont sous-jacentes. L'implication conditionnée de la sorte, dont l'implication causale est un cas matériel particulier, est traitée formellement, au niveau du calcul logique, en tant qu'implication linéaire $\multimap$. Dans la pratique du calcul, toutefois, l'implication linéaire peut être traduite en conjonction (additive) & et négation linéaire $(\ )^{\perp}$ et donc éliminée par définition. La négation linéaire correspond à la transposition de part et d'autre du séquent, l'antécédent prenant la place du conséquent et vice versa. Elle est involutive et permet dès lors la dualité à la De Morgan. Dans la logique linéaire, il n'y a pas au prime abord de règles structurelles de contraction et d'affaiblissement. Leur effet est plutôt réalisé sous condition, au moyen des exponentielles, et donc contrôlé par des règles d'inférence opératoires. Seule la permutation (l'échange) est conservée sans restriction supplémentaire. La logique linéaire vérifie l'élimination des coupures.

Grammaire du système des séquents linéaires

Nous présentons ici les principaux éléments grammaticaux des séquents linéaires, qui diffèrent des autres systèmes, d'après Girard (1987a, 1995, 2006-2007).

Opérateurs logiques linéaires :

- généraux :

  $\multimap$ « implique », implication linéaire (multiplicative) ;

  $(\ )^{\perp}$ « non ( ) », « ( ) nul », négation linéaire ; aussi notée ~ ;

  $\perp$ « absurde », absurdité (en tout, plusieurs éléments neutres : **0**, **1**, $\perp$, $\top$) ;

- fragment parfait :

  $\otimes$ « fois », « tenseur », conjonction multiplicative ;

  $\invamp$ « par », « ou parallèle », « cotenseur », disjonction multiplicative ;

  $\oplus$ « plus », disjonction additive ;

  & « et », conjonction additive ;

- fragment imparfait (exponentielles) :

  ! « bien sûr » [significateur vague] ;

  ? « pourquoi pas » [significateur général][118] ;

- quantificateurs :

  $\exists$ « pour quelque », quantificateur particulier ;

  $\forall$ « pour tout », quantificateur universel ;

- déduction séquentielle :

  $\vdash$ « tourniquet », « conséquemment », conséquence logique (inférence déductive).

---

[118] Des « significateurs » de vagueur et de généralité, selon notre interprétation présentée plus loin.

Définitions et isomorphismes canoniques pour les séquents linéaires :

Les opérateurs linéaires sont définis, dans une première interprétation, en termes catégoriels d'espaces cohérents, ce qui reste une approche essentialiste, débutant par la stipulation des types, et non purement constructive. Toutefois, sur la base de cette interprétation, les opérateurs se correspondent mutuellement selon des lois de dualité à la De Morgan :

- pour les multiplicatifs :

  $\sim(A \otimes B) \coloneqq \sim A \parr \sim B$;

  $\sim(A \parr B) \coloneqq \sim A \otimes \sim B$.

Les opérateurs multiplicatifs sont commutatifs et associatifs et ont pour éléments neutres $\mathbf{1}$ et $\perp$.

L'implication linéaire est définie à partir des opérateurs multiplicatifs :

  $A \multimap B \coloneqq \sim A \parr B \coloneqq \sim(A \otimes \sim B)$.

- pour les additifs :

  $\sim(A \,\&\, B) \coloneqq \sim A \oplus \sim B$;

  $\sim(A \oplus B) \coloneqq \sim A \,\&\, \sim B$.

Les opérateurs additifs sont commutatifs, associatifs et distributifs et ont pour éléments neutres $\mathbf{0}$ et $\top$. Les éléments neutres permettent l'absorption sur les multiplicatifs.

D'autres définitions à la De Morgan pour la négation et les exponentielles :

$\sim \mathbf{1} \coloneqq \perp$	$\sim \perp \coloneqq \mathbf{1}$
$\sim \mathbf{0} \coloneqq \top$	$\sim \top \coloneqq \mathbf{0}$
$\sim (p) \coloneqq \sim p$	$(\sim p) \coloneqq p$
$\sim (!A) \coloneqq ?\sim A$	$\sim(?A) \coloneqq !\sim A$
$\sim (\exists x\, A) \coloneqq \forall x \sim A$	$\sim (\forall x\, A) \coloneqq \exists x \sim A$.

Les isomorphismes suivant définissent aussi les exponentielles :

$$!(X \,\&\, Y) \simeq\, !X \otimes\, !Y \qquad !\top \simeq \mathbf{1}$$

$$?(X \oplus Y) \simeq\, ?X \parr\, ?Y \qquad ?\mathbf{0} \simeq \bot.$$

L'ensemble de ces définitions et isomorphismes illustre bien la symétrie du système.

Les règles d'inférence dans le système des séquents linéaires

Les règles du système des séquents pour la logique linéaire sont les suivantes, en forme tout à droite pour réduire le nombre de règles, d'après Girard (1987a, 1995, 2006-2007) :

Règles d'identité et coupure :

$$\frac{}{\vdash A, A^{\perp}}\ \text{(identité)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash A^{\perp}, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}\ \text{(coupure)}$$

Règles opératoires :

$$\frac{}{\vdash \mathbf{1}}\ \text{(un)} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot}\ \text{(faux)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash B, \Delta}{\vdash \Gamma, A \otimes B, \Delta}\ \text{(fois)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\Gamma \vdash A \parr B}\ \text{(par)}$$

(pas de règle pour zéro) $\qquad \dfrac{}{\vdash \Gamma, \top}$ (vrai)

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\ \text{(plus gauche)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\ \text{(plus droit)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}\ \text{(avec)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}\ \text{(déréliction)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}\ \text{(contraction)}$$

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\ \text{(promotion)} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}\ \text{(affaiblissement)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A[t/x]}{\vdash \Gamma, \exists x A}\ \text{(pour quelque)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \forall x A}\ \text{(pour tout)}$$

Concernant la portée du terme arbitraire t et de la variable x, les mêmes remarques que pour les séquents classiques et intuitionnistes s'appliquent.

Règle structurelle :

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma'}\ (X)$$

X : échange (permutation)

Principes méthodeutiques des séquents linéaires

La logique linéaire en méthode des séquents vérifie l'élimination des coupures et possède la propriété de la sous-formule, tout en étant contrainte par la linéarité du calcul. Ainsi, pour éliminer la coupure dans la démonstration suivante :

$$\frac{\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma', A}\ (\mathrm{r}) \qquad \dfrac{\vdash A^{\perp}, \Delta}{\vdash A^{\perp}, \Delta'}\ (\mathrm{s})}{\vdash \Gamma', \Delta'}\ (\text{coupure})$$

il y a deux façons de procéder, en respectant la linéarité :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash A^{\perp}, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (\text{coupure})}{\vdash \Gamma', \Delta}\ (\mathrm{r})}{\vdash \Gamma', \Delta'}\ (\mathrm{s}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash A^{\perp}, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (\text{coupure})}{\vdash \Gamma, \Delta'}\ (\mathrm{s})}{\vdash \Gamma', \Delta'.}\ (\mathrm{r})$$

Analyse de la grammaire des séquents linéaires

La différence principale entre la logique linéaire et les logiques classique et intuitionniste se situe au niveau des opérateurs et des modalités. Les opérateurs de la logique linéaire sont, tout comme en logique classique et intuitionniste, des *légisignes symboliques onomatiques* de seconde intention, pour les connecteurs propositionnels, aussi bien que pour les exponentielles, modalités du fragment imparfait de la logique linéaire, et les quantificateurs. Ces opérateurs se distinguent de leurs correspondants classiques et intuitionnistes par la manière dont leur interprétance se réalise, c'est-à-dire par la portée grammaticale de la polarité en ce qui concerne les opérateurs propositionnels et par la portée catégorielle particulière en ce qui concerne les exponentielles, la signification des quantificateurs changeant peu dans la logique linéaire par rapport aux autres systèmes (selon Girard (2006-2007)).

Ainsi, la logique linéaire est caractérisée au niveau propositionnel par la polarité locale des éléments grammaticaux, c'est-à-dire que la polarité est relative aux propositions avant de l'être à l'argument[119]. Cette polarité, qui se manifeste, au niveau des opérateurs propositionnels, dans la négation ou le rapport de l'antilogie avec la tautologie, correspond à l'orientation des propositions par rapport au sens de l'inférence. La polarité détermine localement le sens qu'un opérateur donne à une mise en relation, avant même de tenir compte de la finalité globale de l'inférence dans l'ensemble d'un argument. Puisque la polarité peut être locale en plus d'être globale, les opérateurs propositionnels de base sont dédoublés : ainsi retrouve-t-on deux antilogies ($\mathbf{0}$, $\perp$) et tautologies ($\mathbf{1}$, $\top$), de même que deux conjonctions ($\otimes$, $\&$) et disjonctions ($⅋$, $\oplus$), respectivement multiplicatives et additives. Seule l'implication linéaire est unique et suit localement le sens de l'inférence, les autres types d'implication, propres aux autres sortes de logique (classique, intuitionniste), étant obtenus par définition à partir de la version linéaire.

Les exponentielles ou opérateurs imparfaits permettent à leur tour de modifier la portée de la signification locale d'une proposition, au sein d'un processus d'inférence, c'est-à-dire par rapport au sens global de l'argument, en contrôlant les itérations et ajouts de propositions, lieux de la polarité qui donne sens à l'inférence. Plus précisément, l'opérateur ! (*bien sûr*) permet l'itération et l'opérateur ? (*pourquoi pas*) l'ajout de propositions, dans le sens de la synthèse de l'argument (des prémisses à la conclusion), ou respectivement la déitération et l'effacement de propositions, dans le sens inverse, de l'analyse de l'argument. Ils reprennent donc, d'une certaine

---

[119] La notion de polarité est implicite dans le formalisme des séquents linéaires et ne sera dûment formalisée qu'avec la ludique, dont nous présenterons brièvement certains principes à la section 3.2.2.

manière, au niveau opératoire des propositions, les fonctions qu'accomplissent les règles de la contraction et de l'affaiblissement au niveau structurel des arguments.

En termes de catégories particulières, les exponentielles expriment l'indétermination du sens local des propositions modalisées, dans leur rapport au sens global de l'argument auquel elles prennent part. Les modalités linéaires conditionnent donc matériellement des actions imparfaites, au sens de non achevées, et formellement des actes d'inférence imparfaits, au sens d'indéterminés dans la portée de leur signification, actes auxquels prennent part ou pour lesquels sont disponibles les propositions dans le cadre du raisonnement. Le « bien sûr » exprime plus exactement la vagueur de la proposition dans le cadre de l'argument, tandis que le « pourquoi pas » exprime sa généralité. Nous pourrions dès lors les appeler des « significateurs » vague et général. L'itération d'une proposition au conséquent à partir d'une identité, si elle est suivie de l'introduction d'une négation à l'antécédent, peut mener à une contradiction ($p \wedge \neg p$), ce qui est une marque de vagueur. L'ajout peut concerner pour sa part une tierce proposition au conséquent, autre que ($p \vee \neg p$), ce qui est une marque de généralité. Une proposition sans exponentielle possède quant à elle un sens déterminé, relativement au processus d'inférence dans lequel elle s'insère, ce qui présuppose formellement qu'elle respecte à la fois la non-contradiction et le tiers exclu, au niveau structurel de l'argument. Matériellement, elle prend part à une action parfaite, c'est-à-dire achevée. Les exponentielles sont donc des opérateurs qui représentent les catégories particulières de la signification, déterminant le sens de l'inférence logique ; ce que saisit la notion de « modalité linéaire ».[120]

---

[120] La logique unifiée (LU) de Girard (1993) est plus explicite, car elle montre la reprise des formules du contexte imparfait dans un contexte parfait, par le biais (contrôle) des exponentielles. Par ailleurs, Okada (2004) donne une interprétation du multiplicatif en termes de concomitance (*concurrency*) et de l'additif en termes de choix « subjectif » libre, qui rappelle l'interprétation dialogique des catégories particulières de la signification (et des quantificateurs) chez Peirce (sur quoi, cf. Hilpinen (1982)).

La distinction entre les modalités d'être (possibilité, actualité, nécessité)[121], dont le motif est en quelque sorte une épure des autres ensembles de catégories particulières, n'a pas trouvé jusque maintenant d'application en logique linéaire, mais leur lien avec les exponentielles a déjà été souligné (Okada (2004), Girard (2006-2007)), ce qu'il sera intéressant de considérer ici. Ainsi, le système **S4** de la logique modale aléthique correspond à la structure des opérateurs imparfaits (les exponentielles) de la logique linéaire, du moins à la promotion et à la déréliction, tandis que le système **S5** correspond au fragment classique de la logique linéaire. Les propriétés métalogiques reconnues des différents systèmes de Lewis pour la logique modale confirment d'ailleurs l'analyse sémiotique sur certains points. La relation d'accessibilité entre mondes possibles, suivant l'interprétation modèle-théorétique de la logique modale, a dans les principaux systèmes de Lewis les propriétés suivantes (selon Hughes & Cresswell (1968))[122] :

pour **T** : réflexivité, non-transitivité et non-symétrie ;

pour **S4** : réflexivité, transitivité et non-symétrie ;

pour **S5** : réflexivité, transitivité et symétrie.

Les opérateurs imparfaits de la logique linéaire permettent de retrouver une symétrie relative en localisant la polarité dans les propositions et en contrôlant le développement de celles-ci en arguments, sinon asymétriques dans leur fragment parfait (par exemple, dans l'interprétation en termes d'usage des ressources). Les axiomes qui définissent la relation entre mondes possibles en **S4** correspondent donc, d'une certaine manière, aux règles d'inférences qui déterminent l'usage des opérateurs

---

[121] Notons que les opérateurs modaux, $\Diamond$ (possible) et $\Box$ (nécessaire), sont des *légisignes symboliques onomatiques* de seconde intention, comme tous les autres opérateurs (tous les signes qui expriment des catégories particulières appliquées à la logique). Ils indiquent, par la médiation du symbolisme, des éléments diagrammatiques du raisonnement, tout en leur donnant un sens particulier, propre au point de vue modal sur la logique. Plus exactement, selon la définition traditionnelle (Gardies 1979 : 12), la détermination du sens qu'ils opèrent consiste à modifier la relation d'inhérence d'un prédicat dans un sujet, lors de l'analyse de la proposition.

[122] Le « S » de **S4**, **S5**, etc. désigne le *Survey* de C. I. Lewis (1918), dans lequel les premiers de ces systèmes ont été introduits. Le « T » vient de Feys (1937), qui note par une série de lettres quelconques (*r*, *s*, *t*) différents systèmes de logique modale (la majuscule apparaît dans Sobociński (1953)).

imparfaits en logique linéaire. Aussi, la formule de Barcan, $\forall x \Box Fx \rightarrow \Box \forall x Fx$ (ou, de manière équivalente, $\Diamond \exists x Fx \rightarrow \exists x \Diamond Fx$), selon l'interprétation de Prior (1956), permet de reconnaître **S5** comme un système qui présuppose l'infini actuel. Cette formule, qui présuppose que la quantification sur des individus dans un domaine actuel est en quelque sorte plus forte que la modalité, y est valide, tandis qu'elle est invalide dans les systèmes **T** et **S4**.[123] La correspondance entre la structure des logiques modales et celle de la logique linéaire montre donc l'importance du respect de l'ordre des catégories dans les opérations logiques. Afin de rester légitime à travers ses différents niveaux d'analyse, le raisonnement formel de la logique doit s'effectuer à l'aide d'opérateurs de niveau propositionnel, qui explicitent les catégories particulières de la métalogique et en respectent l'ordre. C'est le niveau propositionnel qui importe puisque c'est à partir des propositions que le diagramme du raisonnement logique se construit, en tant que ce raisonnement vise la formulation de théorèmes valides, des formules vraies parce que soutenues par des arguments.

Les quantificateurs déterminent pour leur part, comme dans les autres systèmes de logique, la portée quantitative (particulière, singulière, universelle) des propositions analysées ou, plus exactement, de la fonction sur son domaine d'arguments (fregéens) au sein d'une formule. Girard ne les considère cependant pas comme élémentaires : seule la logique propositionnelle est pure, c'est-à-dire procédurale, car la logique prédicative, dans sa compréhension habituelle, cache des présupposés essentialistes, en reste de la logique des termes. La logique prédicative

---

[123] La formule de Barcan est également invalide dans les modèles de Kripke pour **S5**, que Girard (2006-2007) critique comme étant quand même beaucoup trop permissifs. Le critère principal de Girard est algorithmique, **S5** devant être rejeté parce qu'il ne permet pas de vérifier l'élimination des coupures en méthode des séquents. On pourrait dire ici, dans le même esprit, mais en se basant sur notre critère catégoriel, que ces modèles kripkéens phagocytent les distinctions logiques en ne permettant pas de distinguer les différents systèmes d'après le critère de l'acceptation ou non de l'infini actuel, marque caractéristique de la logique classique dans son interprétation essentialiste. Le raisonnement infini n'est qu'une possibilité que les opérateurs modaux et imparfaits permettent d'explorer de manière contrôlée par un raisonnement fini et actuel. L'ordre catégoriel, au niveau des règles d'inférence, semble correspondre à ce que Girard appelle le « temps logique », c'est-à-dire le fait qu'il y ait un ordre à respecter dans l'application des règles. Un ordre catégoriel semble aussi suggéré dans la critique que fait l'auteur de la logique pertinente, laquelle élimine l'affaiblissement tout en gardant la contraction.

serait d'ailleurs récusée par la géométrie de l'interaction, un appareil interprétatif du même auteur, de conception plus récente (Girard (2011)). De plus, selon la table peircéenne des catégories particulières, la quantification est logiquement postérieure à la signification, dont traitent les modalités linéaires suivant notre interprétation. La quantification, sous-entendue insignifiante selon Girard (et problématique aussi selon Restall (2000)), ne serait donc pas fondamentale à l'analyse de la logique linéaire, bien qu'elle serait sans aucun doute comprise dans une logique à la fois fondationnelle et plus englobante[124].

Les opérateurs de la logique linéaire peuvent finalement être groupés, selon leur adicité, en trois ensembles de relations, qui articulent les trois niveaux médians des catégories particulières, soit : la qualité comme polarité locale, négative ou positive, exprimée par la présence ou l'absence de l'opérateur monadique de la négation ; la mise en relation exprimée par les connecteurs interpropositionnels comme opérateurs dyadiques ; et la modalité imparfaite ou parfaite de la signification des expressions logiques, exprimée par les exponentielles comme opérateurs triadiques, en ce sens qu'ils complètent la signification des expressions en indiquant, à travers l'interprétation, la finalité en vue de laquelle la polarité et la mise en relation des propositions sont signifiantes.

2.3.2. Méthode de la déduction naturelle pour la logique intuitionniste

Le formalisme de la déduction naturelle en notation arborescente a été développé, par Gentzen (1934-1935) et puis Prawitz (1965), dans le but de reproduire d'une manière plus directe le raisonnement tel que nous semblons l'élaborer naturellement, sans les détours de l'axiomatique, qui doit postuler des axiomes. Cette approche distingue donc d'emblée la déduction en tant qu'acte d'inférence

[124] Telle que la logique unifiée (**LU**) nous en trace peut-être les contours.

(représentée, en notation arborescente, par le trait de déduction horizontal tiré entre les prémisses et la conclusion ou, en notation linéaire, par le tourniquet $\vdash$), de l'implication en tant qu'opération définie par une règle d'inférence (représentée par la flèche $\rightarrow$ ou le fer à cheval $\supset$), qui peut être elle-même définie en termes de déductibilité. Seulement, à la différence du formalisme des séquents, la déduction naturelle prend une forme asymétrique à travers sa trame de preuve même et non seulement les règles d'inférence de la logique intuitionniste. L'introduction ou l'élimination d'opérateurs se fait toujours dans le conséquent, ici le dessous du trait de déduction, qui correspond donc à la droite du tourniquet dans la méthode des séquents, tandis que le dessus du trait à chaque introduction d'hypothèse correspond en partie à la gauche du séquent. Autrement dit, l'inférence à l'horizontale dans les séquents correspond en partie à l'inférence verticale en déduction naturelle, mais pas tout à fait puisqu'on ne distingue pas l'inférence hypothétique du séquent horizontal de l'inférence catégorique de la dérivation verticale. La forme arborescente de la notation rend de la sorte la dérivation en déduction naturelle asymétrique. Il ne peut y avoir qu'une conclusion dans l'antécédent final, sans contexte indéterminé ou conclusions auxiliaires. On peut d'autre part tenir un registre des hypothèses de la déduction naturelle à l'aide d'indices (Gentzen (1934-1935), Prawitz (1965)) ou en les faisant suivre, comme dans les séquents, à la gauche du conséquent de l'inférence au fur et à mesure de la dérivation (Dummett (1977)). Toutefois, ce dernier registre ne correspond pas à l'antécédent des séquents, car il n'est pas sujet aux opérations : on ne le manipule pas, sauf par l'accumulation et la décharge d'hypothèses.

Vocabulaire et règles d'inférence de la déduction naturelle intuitionniste

Le système de la logique intuitionniste en méthode de déduction naturelle (NI), sur lequel nous nous concentrerons ici, puisque c'est à lui que le formalisme est le mieux adapté et qu'il est aussi repris dans la théorie des types constructive, est construit à partir du vocabulaire usuel de la logique déductive, auquel s'ajoute le signe indiquant le diagramme de la conséquence, le trait de déduction. Il se fonde sur un seul postulat, le principe d'identité (de toute proposition à elle-même), sur la base duquel on peut poser des formules comme hypothèses à démontrer. Des règles d'introduction (*I*) et d'élimination (*E*) des opérateurs sont ensuite utilisées pour manipuler les prémisses (Prawitz (1965), Girard (2006-2007)) :

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\,(\wedge I) \qquad \frac{A \wedge B}{A}\,(\wedge g E) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,(\wedge d E)$$

$$\frac{A}{A \vee B}\,(\vee g I) \qquad \frac{B}{A \vee B}\,(\vee d I) \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\,(\vee E)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \rightarrow B}\,(\rightarrow I) \qquad \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}\,(\rightarrow E)$$

$$\frac{A[t/x]}{\exists x A}\,(\exists I) \qquad \frac{\exists x A \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{B}\,(\exists E)$$

$$\frac{A}{\forall x A}\,(\forall I) \qquad \frac{\forall x A}{A[t/x]}\,(\forall E)$$

$$\frac{\begin{array}{c}(\neg A)\\ \vdots\\ \wedge\end{array}}{A}\,(\wedge E)$$

Une règle structurelle d'affaiblissement à gauche peut aussi être ajoutée lorsque le calcul est formulé en « style séquent », c'est-à-dire avec des contextes indéterminés inscrits à la gauche des formules de la dérivation, ceux-ci étant interprétés comme des ensembles plutôt que des suites de formules, ce qui rend les règles de permutation et de contraction non nécessaires. La règle d'affaiblissement de ce formalisme particulier est formulée comme suit, d'après Dummett (1977) :

$$\frac{\Gamma : B}{\Gamma, A : B} \quad \text{ou plus généralement} \quad \frac{\Gamma : B}{\Gamma, \Delta : B}.$$

Exemple de démonstration en déduction naturelle intuitionniste

Les règles sont appliquées dans le cours d'une dérivation qui démontre la déductibilité d'un énoncé, par exemple dans la preuve suivante de la distributivité de la disjonction sur la conjonction, d'après Gentzen (1934-1935 : 188) :

$$\dfrac{\dfrac{A \vee (B \wedge C) \qquad \dfrac{\dfrac{A}{A \vee B}\,(\vee g I) \quad \dfrac{A}{A \vee C}\,(\vee g I)}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,(\wedge I) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \wedge C}{B}\,(\wedge g E)}{A \vee B}\,(\vee d I) \quad \dfrac{\dfrac{B \wedge C}{C}\,(\wedge d E)}{A \vee C}\,(\vee d I)}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,(\wedge I)}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,(\vee E)}{(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))}\,(\rightarrow I)$$

Principes méthodeutiques de la déduction naturelle intuitionniste

Les règles d'inférence opératoires de la déduction naturelle respectent un principe d'inversion, formulé d'abord de manière informelle par Gentzen (1934-1935), puis formalisé par Lorenzen (1955) et Prawitz (1965), selon lequel la règle d'introduction d'un opérateur est en quelque sorte l'inverse de sa règle d'élimination. Dans une interprétation constructive de la logique en déduction naturelle, la règle d'introduction d'un opérateur peut être comprise comme définissant cet opérateur sur une base effective, tandis que la règle d'élimination n'est que l'analyse à rebours de cette définition. Une séquence qui débute par une règle d'introduction d'un opérateur sur des propositions et se termine par une règle d'élimination du même opérateur sur les mêmes propositions n'ajoute rien à la signification globale de l'argument développé dans la dérivation, argument qui doit permettre d'analyser et de comprendre le sens d'une formule démontrée. Il en résulte que l'on peut réduire les dérivations en éliminant ces séquences superflues, qui débutent et se terminent par les règles d'introduction et d'élimination d'un même opérateur sur les mêmes propositions.

D'un point de vue grammatical, le principe d'inversion est à relier à l'asymétrie locale, la polarité des propositions, que la méthode de déduction naturelle ne permet cependant pas de distinguer clairement, puisqu'elle confond cette asymétrie avec celle de la dérivation, c'est-à-dire l'asymétrie globale de la logique intuitionniste à travers sa trame de preuve. Seule la logique linéaire formalisée par la méthode des séquents permet de distinguer les deux niveaux de la polarité, propositionnel et argumentatif, et leur géométrie asymétrique ou symétrique, locale ou globale, comme propriété métalogique. La base calculatoire effective de la polarité est à son tour explicitée par la ludique (voir section 3.2.2). Cette distinction entre les deux méthodes et leurs notations correspondantes se fait par l'ajout d'un élément grammatical dans la notation des séquents, le tourniquet, au trait de déduction, seul présent en déduction naturelle. Rappelons que le tourniquet et le trait de déduction sont tous deux des légisignes symboliques onomatiques de seconde intention qui permettent chacun d'expliciter un niveau d'articulation du diagramme du raisonnment, en indiquant ce diagramme par le truchement du symbolisme et en donnant à chaque aspect du diagramme son sens particulier, c'est-à-dire l'inférence hypothétique du séquent linéaire et l'inférence catégorique de la dérivation arborescente.

Les réductions (de « rédex » à « contracté ») des dérivations, suivant le principe d'inversion, sont quant à elles caractérisées dans leur ensemble par la propriété de confluence, c'est-à-dire que si l'on peut réduire une dérivation en deux dérivations distinctes, alors on peut réduire ces dérivations en une autre dérivation commune. Cette propriété des réductions se trouve formellement exprimée dans le théorème de Church-Rosser, d'après Girard (2006-2007 : 86) :

> THÉORÈME DE CHURCH-ROSSER. La réduction est *confluente*, plus précisément, si [d ⇝ d', d"], on peut trouver [d'"] telle que [d', d" ⇝ d'"].

De plus, la réduction des dérivations, de pair avec la propriété de confluence, permet leur normalisation, c'est-à-dire la réduction ultime en une forme unique, dite « forme normale », dans laquelle aucune séquence de la dérivation n'est superflue. Cette forme normale est équivalente à la dérivation sans coupure dans la méthode des séquents. Par ailleurs, la méthode de déduction naturelle peut être considérée comme possédant la propriété de la sous-formule, mais il faut alors bien noter le sens des règles d'inférence, en introduction ou élimination, et le suivi conséquent des sous-formules.

Interprétation du formalisme

Comme nous l'avons dit, la grande avancée dans cette notation, du point de vue sémiotique et phanéroscopique, est la représentation de l'acte d'inférence, maintenant clairement distingué des opérateurs définis par des règles d'inférence. Dans l'axiomatique, cet aspect du raisonnement logique restait présupposé dans la diagrammaticité de la ponctuation (en tant que reproduction des *mises* en relation), cette dernière seulement implicitement reconnue comme signe à part entière ou reléguée aux seules parenthèses et indices du système de déduction. La distinction entre l'acte d'inférence et les règles d'inférence est importante parce qu'elle fait ressortir des aspects phénoménaux différents de la logique, qui participent tous deux à la signification du raisonnement logique, à son mode de pensée propre qu'est la critique. L'inférence en tant qu'acte est néanmoins toujours représentée en déduction naturelle par un symbole, dans l'interprétation duquel est stipulé le sens que prend le signe alors qu'il tient lieu de son objet. De plus, la méthode de déduction naturelle n'est pas diagrammatique au même sens que les séquents, puisque les introductions croissent, tandis que les éliminations décroissent. Le schéma global d'une dérivation ne représente pas un sens univoque de l'inférence, analytique dans la recherche de preuve ou synthétique dans la démonstration. Ainsi, la critique des notations nous montre que les différents types de signe distingués par la sémiotique, tels qu'on peut les retrouver dans une notation adéquate de la logique, ont chacun des caractéristiques propres qui les rendent plus aptes à représenter ou reproduire certains aspects de la logique plutôt que d'autres.

2.4. Les graphes existentiels

L'élaboration des graphes existentiels constitue un développement majeur dans l'œuvre de Peirce, que nous pourrions appeler son « tournant sémiotique »[125]. Insatisfait de l'aspect symbolique de la notation algébrique de la logique, Peirce cherche à élaborer une notation qui soit davantage iconique, reflétant le mode de représentation le plus élémentaire de l'inférence logique. Dès 1882, il commence à développer une notation diagrammatique, s'inspirant probablement des travaux de ses collègues d'un moment à Johns Hopkins, les algébristes anglais James J. Sylvester et William K. Clifford, qui utilisaient des diagrammes chimiques pour représenter des invariants algébriques. Un essai similaire par Alfred B. Kempe, publié en 1886, le pousse à poursuivre ses recherches sur la notation diagrammatique, surtout de 1889 à 1896, ce qui mènera à la publication, en 1897, d'un article sur la logique des relations utilisant une notation diagrammatique (CP 3.456-552, 1897, « The Logic of

---

[125] Sur le développement de la logique peircéenne en général et en particulier de sa logique algébrique, on peut consulter Brady (2000), Dipert (1995, 2004), Hilpinen (2004), Houser et al. (1997), Thibaud (1975). La meilleure introduction aux graphes existentiels est Roberts (1973). Nous recommandons de lire la description du système en se référant aux illustrations des pages suivantes (p. 172 ff.).

Relatives »), qu'il appellera plus tard rétrospectivement les « graphes d'entité » (*entitative graphs*) ou « essentiels ». Certaines caractéristiques de la logique algébrique rendent l'expression des propositions particulières difficile et la quantification universelle s'impose alors naturellement, dans ce type de formalisme, comme plus fondamentale, la quantification particulière étant définie par dérivation. Dans les graphes d'entité, les deux types de quantification prennent une importance égale, leur définition réciproque étant rendue plus explicite par la représentation graphique. Les signes désignent clairement des propositions et non des classes et l'opération de disjonction, avec la négation, remplace la relation transitive d'inclusion utilisée dans la logique algébrique. La juxtaposition de termes sur une feuille d'assertion représente la disjonction, l'encerclement d'un terme, sa négation, et un point ou une ligne reliée à des termes, la relation entre ceux-ci.

Peirce ne reste cependant pas longtemps satisfait par les graphes d'entité et, rapidement après la publication de l'article de 1897, la duale de ce système, les graphes existentiels, s'impose à son tour, constituant la base définitive de la notation diagrammatique, que l'auteur continue de développer et de raffiner jusqu'à la fin de sa vie. Les graphes existentiels prennent ainsi pour connecteur primitif la conjonction, de pair avec la négation, et pour quantification implicite et fondamentale la quantification particulière, à partir de laquelle la quantification universelle est dérivée. La juxtaposition de termes en vient à représenter la conjonction et l'existence particulière est reconnue implicitement par la seule présence de la feuille d'assertion comme univers du discours, à déterminer par des inscriptions. Notons en passant que le terme « existentiel » dans « graphes existentiels » ne désigne pas la quantification particulière, mais un mode ontologique (une manière d'interpréter et un aspect de l'analyse grammaticale de premier ordre) de la notation (des graphes, du langage de la logique). De façon semblable, le système dual est appelé « graphes entitatifs » (graphes d'entité), ce qui ne fait pas directement référence à la quantification.

Les graphes existentiels de Peirce sont le premier formalisme logique à se baser explicitement sur une théorie des signes et à considérer de façon critique l'apport de la diversité des signes à la notation. Ces graphes tâchent notamment de représenter le raisonnement nécessaire d'une manière plus diagrammatique que la logique algébrique, dans laquelle l'aspect symbolique est prépondérant. Peirce envisageait de faire porter ses graphes aussi bien sur l'inférence abductive et inductive que sur l'inférence déductive (à travers la preuve du pragmatisme, CP 4.530-72, 1906)[126], bien qu'il ne les ait développés effectivement que comme système de logique déductive. Il n'a pas formalisé ce système de la même façon que la logique contemporaine, avec par exemple l'axiomatique ou la méthode des séquents, mais le présente généralement d'une manière rigoureuse en suivant un certain ordre. Les graphes existentiels comportent ainsi un vocabulaire, présenté au fur et à mesure de l'exposé, des conventions (définitions, règles de formation) et des permissions (règles de transformation, d'inférence), en plus de certains principes méthodeutiques.

Le point de départ de la construction des graphes est la *feuille d'assertion*, c'est-à-dire un espace graphique vierge (feuille, tableau) représentant l'espace logique (l'univers du discours), dont le sens sera déterminé lors de l'inscription et la transformation des graphes. La feuille d'assertion est signifiante en ce qu'elle comprend l'ensemble des présupposés du raisonnement qui sera construit. En cela, elle est déjà un graphe. La feuille d'assertion est également modalisée et quantifiée implicitement, tout élément inscrit étant supposé exister en une certaine quantité. La quantité logique de la particularité est plus fondamentale que celle de l'universalité et l'existence présupposée correspond à un mode d'être actuel, l'univers du discours étant déterminé par l'acte d'assertion. Sur la feuille d'assertion sont inscrits des *graphes*, c'est-à-dire des lettres ou ensembles de mots exprimant des états de faits (*states of facts*) dans l'univers du discours. La juxtaposition des graphes sur l'espace

[126] « [...] it is certain that the Method could be applied to aid the development and analysis of any kind of purposive thought. » (CP 4.552, 1906, « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism »)

graphique représente leur conjonction logique. Une ligne encerclant un graphe, appelée *coupure*, nie ce graphe (une coupure n'encerclant rien est un pseudo-graphe, qui n'a pas de sens). Dans certains exposés du système (CP 4.564, 1906), la coupure en tant que négation est dérivée de la *volute* (*scroll*), un signe composé de deux coupures jointes ensemble ou non et imbriquées l'une dans l'autre, qui représente un conditionnel matériel *de inesse*. Elle est aussi parfois interprétée comme faisant changer de surface (CP 4.435, 1903). Ces trois éléments de notation (feuille d'assertion, graphe, coupure ou volute) suffisent pour construire, avec leurs conventions et permissions, un système de logique déductive propositionnelle. L'ajout de deux types de signe particuliers, un trait épais appelé *ligne d'identité* et des lettres, mots ou ensembles de mots nommés *lieux* (*spots*), que la ligne d'identité relie entre eux ou non, permet de décomposer les graphes élémentaires afin de développer une logique prédicative. La ligne d'identité et les lieux sont des éléments de graphe, qui peuvent être eux-mêmes considérés comme des graphes.[127]

Peirce présente le plus souvent ces deux parties de la logique déductive séparément, respectivement dans les parties Alpha et Beta du système des graphes existentiels, tandis qu'une partie Gamma, comportant des éléments de notation supplémentaires, permet de représenter plus expressément le sens de la seconde intention, dans une logique d'ordre supérieur, et les modalités. Toutefois, dans ses derniers écrits (MS 514, 1909), l'auteur joint plutôt ces différentes parties ensemble,

---

[127] Peirce définit les graphes existentiels, dans un texte destiné au *Century Dictionary*, de la manière suivante : « **Existential graphs** are graphs of a logical system whose essential features are these. A sheet of paper, or blackboard, with the exception of such parts of it as are sundered from the rest by "cuts", is called the *sheet of assertion*, and the "scribing" (writing or drawing) of a graph upon it is understood to be an assertion concerning some "universe of discourse" or collection of individuals, which may be creatures of the imagination. Of two graphs scribed upon the sheet of assertion in different places (however close together) each is asserted in the same sense as if the other were not there. But any heavily marked point common to two graphs denotes a single individual. Accordingly a heavily drawn line must be a graph asserting the identity of the individuals denoted by all its points. An oval lightly described (conveniently in another color) is said to be "cut", not "scribed", being conceived not to be a graph but to sever its "area" or enclosed place from the sheet of assertion. The cut together with whatever graph may be scribed on its area constitute a graph called an *enclosure*. The interpretation of an enclosure depends on the texture of the cut (as smooth, sawed, dotted, etc.), but the usual smooth cut gives an enclosure which precisely denies that the graph on its area is entirely true. » (MS 1597)

en un seul exposé. Nous présentons ici les conventions et les permissions des parties Alpha et Beta en les intégrant ensemble et illustrons la méthode de dérivation par des cas correspondant à chaque partie, suivant l'exposé de Roberts (1973) :

Conventions :

C1. La feuille d'assertion dans son ensemble est un graphe.

C2. Tout ce qui est inscrit sur une feuille d'assertion est déclaré vrai dans l'univers représenté par cette feuille.

C3. Les graphes inscrits sur des parties différentes de la feuille d'assertion sont déclarés vrais.

C4. La volute est le signe d'une proposition conditionnelle *de inesse*.[128]

C5. La coupure vide est un pseudo-graphe ; la coupure niant précisément son contenu.

C6. L'inscription d'un point gras ou d'une ligne épaisse non attachée sur la feuille d'assertion dénote l'existence d'un objet individuel et seul (mais du reste indésigné) dans l'univers du discours. Il est toujours permis d'inscrire un tel point ou ligne sur la feuille.

C7. Une ligne épaisse, appelée ligne d'identité, est un graphe assertant l'identité des individus dénotés par ses deux extrémités.

C8. Une ligne d'identité en fourche avec un nombre n de branches est utilisée pour exprimer l'identité des individus dénotés par ses n extrémités.

C9. Un point sur une coupure est considéré comme étant en dehors de l'aire de cette coupure.[129]

---

[128] Par la « conditionnelle *de inesse* » Peirce désigne une implication matérielle, relative à l'univers du discours actuel (cf. l'article de Jay Zeman, « Peirce and Philo », dans Houser et al. (1997 : 402-17)). La traduction de *scroll* par « volute » vient de Krief (2001). Le sens de l'inférence dans la volute formelle des graphes existentiels est en fait inverse au sens d'écoulement dans la volute matérielle en mécanique des fluides lorsque le fluide est source d'énergie et le même quand le fluide est mis en mouvement. C'est que nos idées sont en quelque sorte mues par le principe anhypothétique à travers l'usage de la notation (« utiliser le vent pour aller contre le vent », disait Frege (1882 (1964 : 107))).

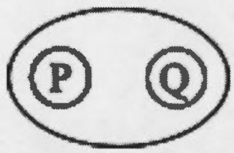
[129] La feuille d'assertion vierge de C1 et la ligne d'identité (avec ses points extrémaux) de C7, en tant que phèmes potentiels ou effectifs, sont d'une certaine manière les axiomes du système.

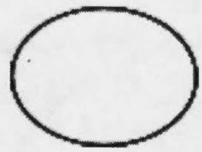
Illustrations des graphes élémentaires :

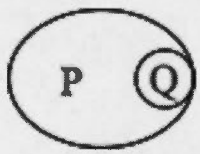
P ⇒ **P**

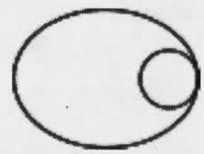
non *P* ⇒ 

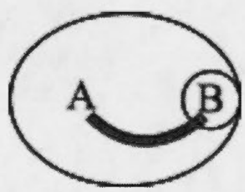
P et *Q* ⇒ **P** **Q**

P ou *Q* ⇒ 

coupure ⇒ 

si *P* alors *Q* ⇒ 

volute (*scroll*) ⇒ 

Tous les *A* sont *B*. ⇒ 

ligne d'identité ⇒

Permissions :

R1. Règle d'*effacement*. Tout graphe encerclé pairement ou nullement et toute partie d'une ligne d'identité encerclée pairement ou nullement peuvent être effacés.

R2. Règle d'*insertion*. Tout graphe peut être inscrit sur n'importe quelle aire encerclée impairement et deux lignes d'identité (ou portions de lignes) encerclées impairement sur une même aire peuvent être jointes ensemble.

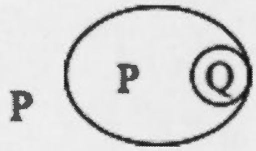
R3. Règle d'*itération*. Si un graphe $\mathscr{G}$ apparaît sur la feuille d'assertion ou dans un nid (*nest*) de coupures, il peut être inscrit sur n'importe quelle aire ne faisant pas partie de $\mathscr{G}$, qui est contenue dans $\{\mathscr{G}\}$ (l'aire dans laquelle $\mathscr{G}$ est inscrit). Conséquemment, (a) une branche avec une extrémité libre peut être ajoutée à n'importe quelle ligne d'identité, à condition qu'aucun croisement de coupure ne résulte de cet ajout ; et (b) n'importe quelle extrémité libre d'une ligne embranchée (*ligature*) peut être étendue vers l'intérieur à travers une coupure.

R4. Règle de *déitération*. Tout graphe dont l'occurrence pourrait être le résultat d'une itération peut être effacé.

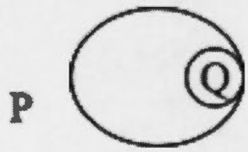
R5. Règle de la *volute vide*. Une volute vide (ou double coupure) peut être insérée autour ou enlevée de n'importe quel graphe sur n'importe quelle aire.

Illustrations des dérivations :

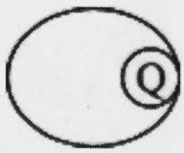
Modus ponens (en Alpha)

1. 

Prémisses

2. 

de 1, par R4

3. 

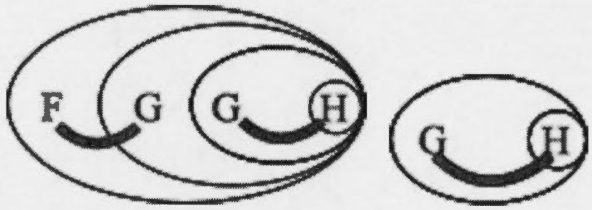
de 2, par R1

4. Q de 3, par R5

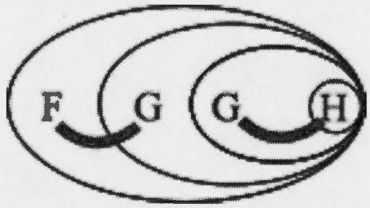
Barbara (en Beta)

1. 

Prémisses



2. de 1, par R3

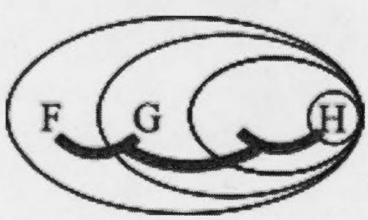


3. de 2, par R1

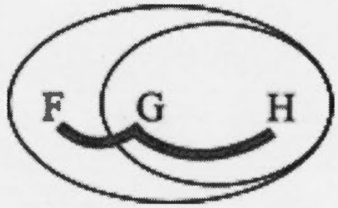
4. de 3, par R3 (a)

5. de 4, par R3 (b)

6. de 5, par R2



7. de 6, par R4

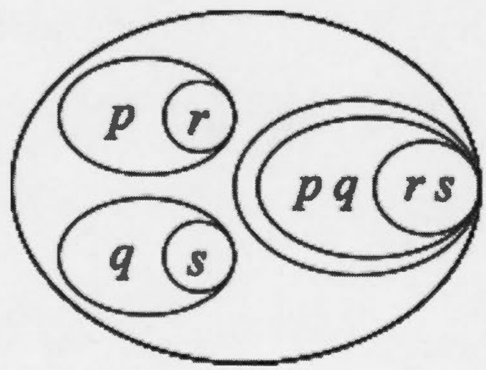
8. 

de 7, par R5

9. 

8, par R1

Un autre exemple fameux (en Alpha) est la démonstration du Théorème remarquable (*Praeclarum theorema*)[130] de Leibniz qui, par la méthode des graphes existentiels, dans Sowa (2011), est accomplie en 7 étapes, alors que par la méthode axiomatique, dans les *Principia mathematica* de Whitehead & Russell (1910-1913), elle nécessite pas moins de 43 étapes. Nous reproduisons ici la démonstration de Sowa, en utilisant nos propres règles[131] :



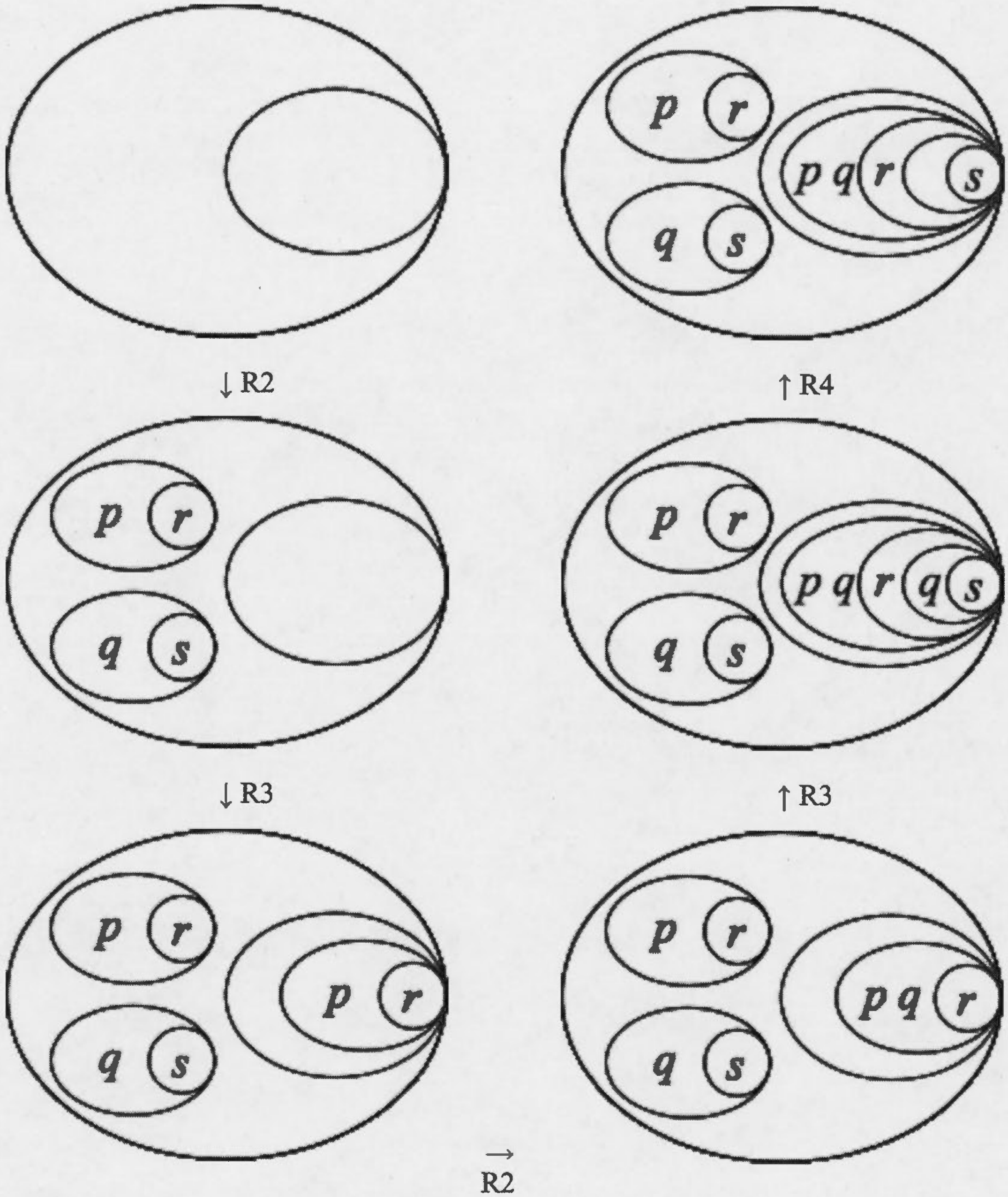
[feuille d'assertion vierge]

↓ R5

↑ R5

[130] Dont la formule algébrique est : $((p \to r) \wedge (q \to s)) \to ((p \wedge q) \to (r \wedge s))$.

[131] Nous utilisons la version avec volutes, qui marque bien la liaison des conséquences dans l'acte, tandis que Sowa fait usage d'une version avec coupures détachées, aux aires ombragées en alternance.



Analyse générale du système

Nous développerons l'analyse du système des graphes existentiels en le comparant avec le système des séquents. Rappelons que ce dernier est constitué :

1° d'une grammaire particulière ou syntaxe, c'est-à-dire un vocabulaire, dont chaque élément est défini par la fonction qu'il remplit dans le système de logique ; et des règles de formation d'expressions bien formées à partir des éléments de ce vocabulaire ; 2° d'une critique particulière ou canon de règles d'inférence, constitué de trois groupes de règles, ayant trait à l'identité et la coupure de propositions, aux opérations sur les propositions et aux structures argumentatives ; et 3° de principes méthodeutiques particuliers, spécifiant le cours de la démonstration ; principalement le théorème d'élimination des coupures et la propriété de la sous-formule. Les éléments internes à la grammaire, les groupes de règles de la critique et la méthode sont eux-mêmes structurés selon un certain ordre catégoriel et selon le sens qui est donné au système de logique, dépendamment de sa finalité.

En examinant soigneusement le système des graphes existentiels, on constate qu'il est structuré d'une manière similaire au système des séquents, bien qu'avec certaines caractéristiques qui lui sont propres[132]. Ainsi, les conventions définissent la grammaire particulière ou syntaxe des graphes existentiels et on peut supposer que les éléments de cette grammaire sont aussi structurés d'une manière déterminée. Les permissions peuvent quant à elles être organisées d'une manière plus spécifique en trois groupes principaux qui comprennent : 1° les règles qui constituent en soi des axiomes du système, c'est-à-dire, en Alpha, la convention de la feuille d'assertion et la permission de la volute vide (ou double coupure) et, en plus en Beta, la convention de la ligne d'identité ; 2° les règles d'insertion et d'effacement des opérateurs, plus précisément la volute (implication), la coupure (négation) et la juxtaposition (conjonction) ; 3° les règles implicites de l'associativité et de la commutativité, ainsi que les règles d'insertion et d'effacement ou d'itération et de déitération de graphes, différents ou identiques, qui affectent la structure de l'argument. De plus, certains

[132] La déduction naturelle est même, sur certains points, plus proche des graphes existentiels que les séquents, puisqu'on ne conserve pas les prémisses au fur et à mesure de la démonstration et que la déduction hypothétique n'est pas bien distinguée de la déduction catégorique. Mais cette méthode ne permet pas une analyse aussi fine des règles d'inférence et des propriétés métalogiques correspondantes, ce qui nous intéresse également ici.

principes méthodeutiques dirigent l'interprétation des graphes, tels l'endoporeusis et, de façon plus générale, la doctrine du pragmatisme. La complétude et la consistance des parties Alpha et Beta, interprétées comme logiques propositionnelle et prédicative du formalisme des graphes existentiels, ont d'autre part été démontrées par Roberts (1973 : Appendix 4). Nous pouvons récapituler l'exposé du système par le schéma suivant :

Graphes existentiels (GE)

1. Conventions pour les éléments de la grammaire :
   - feuille d'assertion
   - graphe (prose)
   - volute/coupure
   - ligne d'identité
   - lieu (prose)
   - (*selectives, potentials*...)
2. Permissions :
   - 2.1. Axiomes
     - en Alpha : feuille d'assertion (et volute vide/double coupure)
     - en Beta : de plus, ligne d'identité
   - 2.2. Pour les opérateurs propositionels : volute/coupure, juxtaposition
     - insertion/itération (introduction de l'opérateur)
     - effacement/déitération (élimination de l'opérateur)
   - 2.3. Pour les graphes dans la structure de l'argument
     - (associativité)
     - (commutativité)
     - insertion/itération (introduction d'un graphe, différent ou même)
     - effacement/déitération (élimination d'un graphe, différent ou même)
3. Principes méthodeutiques :
   - interprétation par la méthode endoporeutique
   - doctrine du pragmatisme.

Éléments de la grammaire

En adoptant le point de vue sémiotique, nous étudierons à présent les graphes existentiels sous les trois aspects de la grammaire, de la critique et de la méthodeutique. Au niveau de la grammaire particulière des graphes existentiels, nous examinerons d'abord les éléments principaux de la notation que sont la feuille d'assertion, le graphe, la coupure et la volute, le lieu (*spot*) et la ligne d'identité. Nous regarderons ensuite comment ce système de notation affecte, par les propriétés de sa grammaire, la critique logique et, en particulier, l'expression des règles d'inférence. Les points de méthode abordés auront trait surtout à l'endoporeusis, qui est une façon d'interpréter les graphes dépendant également de certaines propriétés de la notation.

La feuille d'assertion est un *légisigne iconique sémique* qui, dans l'interprétation lors de son usage effectif, devient un *légisigne symbolique phémique* ; dans les deux cas en première intention. La feuille vierge est un sème par la signification potentielle qu'elle présuppose et devient un phème dès qu'on l'interprète dans les faits, en ce qu'elle affirme alors l'identité de toute chose à elle-même. Cette affirmation peut être démontrée par n'importe quelle construction valide d'un graphe, suivie de son analyse jusqu'au retour à la feuille sans inscription. Ce mouvement pourrait être interprété différemment selon qu'on adopte un mode de pensée classique (réversibilité absolue), intuitionniste (irréversibilité) ou linéaire (réversibilité relative). L'analyse de n'importe quel graphe bien construit est donc une preuve du principe d'identité exprimé par la feuille. Une aire déterminée sur la feuille d'assertion correspond par ailleurs à un paramètre comme partie du contexte ($\Gamma, \Lambda, \ldots, \Delta, \Pi, \ldots$), dans le formalisme des séquents. La feuille d'assertion est un graphe.

Le graphe est un *légisigne symbolique phémique*, de première intention lorsque élémentaire. Dans la logique des propositions inanalysées, le graphe est une proposition écrite en prose ou pouvant être abréviée par une lettre. En logique des propositions analysées, le graphe est un ensemble constitué d'un ou plusieurs symboles de lieu (*spot*) joints à une ligne d'identité, le sens de chacun de ces éléments, sémiques, n'étant que potentiel en soi et actualisé seulement dans le cadre d'une proposition. Il n'y a pas de variable libre dans la logique des graphes existentiels. Une feuille d'assertion contenant un graphe est aussi un graphe. Un graphe complexe peut pour sa part contenir des éléments de seconde intention. Le graphe est donc un légisigne symbolique phémique puisque : 1° en soi (en tant que légisigne), ce signe est institué par convention, on a choisi d'utiliser cette surface continue en l'interprétant de telle manière, plutôt que d'autres signes, par convenance ; 2° dans son rapport à l'objet qu'il désigne (en tant que symbole), ce signe est aussi institué par convention, ici une définition donne à chacun de ces signes la valeur générale d'une proposition, plutôt que d'un autre élément grammatical ; 3° dans son rapport à l'interprétant (en tant que phème), le graphe asserte un état de faits qui peut être vrai ou faux.

La coupure et la volute ne sont pas des signes positifs qui constitueraient des graphes en soi. Elles ne représentent aucun fait, mais articulent des faits spécifiés par les graphes sur le fond de la feuille d'assertion. Ces signes sont des *légisignes indexicaux sémiques* de seconde intention, car : 1° en soi (en tant que légisignes), ils sont institués par convention, comme pour les signes de propositions et d'opérateurs ; 2° dans leur rapport à l'objet (en tant qu'indices), ils désignent la place logique que prend chacun des éléments de la formule, le diagramme de la structure logique de cette formule, au sein de la feuille s'assertion ; 3° dans leur rapport à l'interprétant (en tant que sèmes), ces signes ne font sens que joints à des graphes, dans le cadre d'une proposition simple ou complexe ; la coupure simple vide étant un pseudo-graphe, une contradiction en soi. Ce sont donc aussi, en ce sens, des syncatégorèmes, bien qu'ils n'aient en plus qu'une lecture de mention et non d'usage, l'usage étant l'acte silencieux de la mise en ordre. La double coupure ou volute vide, dans son rapport à la feuille d'assertion, exprime la polarité du formalisme. Elle constitue un axiome, lorsque comprise avec les aires qu'elle circonscrit (CP 4.415, 567).

La ligne d'identité est un *légisigne iconique sémique* de première intention, qui représente le prédicat ultime de la proposition dans une analyse logique parachevée. Elle est proprement une *icône*, c'est-à-dire un signe qui représente son objet en vertu d'une similarité de caractères. Elle remplit deux rôles principaux, de prédication et de quantification. La fonction prédicative, la représentation de la relation d'identité, est accomplie grâce à l'aspect iconique que prend la ligne d'identité dans sa relation à l'objet, sa *diagrammaticité*, c'est-à-dire que la ligne d'identité représente la relation d'identité parce qu'elle présente en soi une relation entre les lieux du graphe (des sèmes onomatiques) similaire à la relation d'identité entre les termes du raisonnement. Par elle-même, lorsqu'elle n'est reliée à aucun symbole de lieu, la ligne d'identité représente une simple existence positive, qui est une qualité pure, sans sujet déterminé. Puisque la feuille d'assertion est potentiellement pleine de sujets logiques, on peut interpréter la ligne d'identité seule sur une feuille sans coupure comme étant liée à quelque sujet logique, possiblement tous.

Le second rôle de la ligne d'identité, la quantification, est moins évident à interpréter, mais réfère à un autre caractère fondamental du signe et de son objet. C'est tout simplement par la situation du signe sur la feuille d'assertion que la situation correspondante de l'objet dans l'univers du discours est représentée. La situation de l'un dans l'espace graphique et de l'autre dans l'espace logique définit l'existence positive (particulière ou universelle) de chacun de ces éléments. La quantification au moyen de la ligne d'identité procède également par diagrammaticité puisque la situation est essentiellement la mise en relation du signe avec les autres éléments de son contexte, la feuille d'assertion ; tout comme la quantification sélectionne un ou des arguments dans le domaine de la fonction. D'une part donc, ces mises en relation des éléments de la notation entre eux, de même qu'avec leur contexte d'inscription, en tant qu'actes d'inscription des instances de signes (sinsignes), reproduisent l'articulation (Deuxième) propre au raisonnement. D'autre part, le graphe de la ligne d'identité, en tant que signe général (légisigne), représente les relations comme éléments abstraits (Troisièmes) du raisonnement. La notation graphique permet ainsi, dans une perspective sémiotique, de rendre explicite des éléments phénoménaux du raisonnement sinon occultés par la logique symbolique, sans perspective critique sur la notation. La ligne d'identité est un élément du graphe.

Le lieu (*spot*) est un *légisigne symbolique onomatique* de seconde intention puisque : 1° en soi (en tant que légisigne), il est institué par convention, notre choix ne retenant qu'une variante de caractères ; 2° dans son rapport à l'objet (en tant que symbole), ce signe reçoit un sens spécifique par convention ; 3° dans son rapport à l'interprétant (en tant que sème onomatique), ce signe ne fait sens que lorsque joint à une ligne d'identité au sein d'une proposition, dont il désigne un sujet logique par le biais du symbolisme (ce que nous précisons ci-après). Le lieu est un élément du graphe.

Un problème d'exégèse

Remarquons que l'analyse du symbole de lieu et de la ligne d'identité dans les graphes existentiels est sujette à débat, la plupart des commentateurs (dont Zeman (1964), Roberts (1973), Shin (2002), Dau (2006), Pietarinen (2006), Sowa (2011))[133] interprétant le lieu comme un prédicat logique et la ligne d'identité comme le sujet

---

[133] Aucun de ces commentateurs ne base son interprétation des graphes existentiels sur une étude approfondie de la grammaire spéculative dans son ensemble, son tout organique (ou triadique), qui fonde pourtant le reste du système de la sémiotique. Shin (2002) et Dau (2006) présentent quelques éléments de grammaire, mais réduits à un fragment insuffisant (la trichotomie icône/index/symbole ou le couple type/*token*). Pietarinen (2006) survole rapidement l'ensemble en laissant certains points, objets de contentieux, irrésolus (dont la distinction entre rhème et sème et donc le développement de la typologie à travers l'œuvre peircéenne). Zeman (1964) et Sowa (2011) négligent presque entièrement la base sémiotique et les détails de la réflexion grammaticale de Peirce, dans sa discussion des graphes existentiels. Un défaut commun de ces commentaires est qu'ils semblent prendre la logique formelle contemporaine comme étalon, au lieu de comprendre la logique peircénne avant tout par ses propres ressources (ce que note aussi Dipert (2004)). Le meilleur exposé reste celui de Roberts (1973), qui présente la grammaire particulière des graphes existentiels pour elle-même, sans y introduire de notions étrangères à l'original, en interprétant prudemment par la suite quelques points de la théorie, dont certains aspects sémiotiques de la notation.

logique. Mais cela va à l'encontre de la doctrine de la proposition de Peirce (et aussi de Frege), bien avérée (voir section 1.2.2.1. plus haut), selon laquelle, dans son analyse ultime (ce dont s'occupe avant tout la logique pure, norme des graphes existentiels), la proposition est, dans son rapport à l'objet, un symbole composé d'une seule icône (prédicat logique), l'identité, et d'un ou plusieurs indices (sujets logiques). Les premiers écrits de Peirce sur les graphes, qui partent de l'idée de rhème, peuvent suggérer l'interprétation commune (CP 3.456-552, 1897, « The Logic of Relatives » ; CP 4.398-417, 1903, *A Syllabus of Certain Topics of Logic* ; CP 4.418-508, c. 1903, « Logical Tracts, No. 2 »), tandis que les textes plus tardifs, coïncidant avec la révision de la typologie qui inclut la notion de sème, soutiennent plus clairement notre interprétation (CP 4.530-572, 1906, « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism » ; MS 514, 1909). Un exemple tout à fait limpide de passage semblant appuyer la première interprétation se trouve dans le *Syllabus* de 1903 (CP 4.404), où le symbole de lieu est qualifié de rhème (qu'on peut supposer comme prédicat) et le point marqué (*dot*) attaché au « crochet » du lieu, une place sur la périphérie du rhème, de signe d'individu (qu'on peut supposer comme sujet) :

> A heavy *dot* scribed at the hook of a spot shall be understood as filling the corresponding blank of the rheme of the spot with an indefinite sign of an individual, so that when there is a dot attached to every hook, the result shall be a proposition which is particular in respect to every subject.

Les « Logical Tracts, No. 2 », datés d'environ 1903, disent à leur tour (CP 4.441, nous inversons les italiques ; voir aussi la récapitulation dans le même texte en CP 4.474) :

> Convention No. 4. In this system, the unanalyzed expression of a rhema shall be called a *spot*. A distinct place on its periphery shall be appropriated to each blank, which place shall be called a *hook*. A spot with a dot at each hook shall be a graph expressing the proposition which results from filling every blank of the rhema with a separate sign of an indesignate individual existing in the universe and belonging to some determinate category, usually that of "things."

On retrouve également ce genre de présentation clairement exprimé dans le MS 491 : 4, qui n'est pas daté, mais qu'on peut rapprocher des textes de 1903 ci-avant, puisqu'il utilise le terme *hook* (ici tel que cité par Pietarinen (2006 : 123)) :

> A spot has a definite place upon its periphery, called a *hook*, corresponding to each blank; and to each hook an extremity of a line of connection may be attached, with the effect of filling the blank with a designation of the individual denoted by the line. When all the hooks have received such attachments, the spot with these attachments becomes a graph signifying a proposition.

Ce qui semble confirmé par des textes plus tardifs, tel celui-ci des « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism », de 1906 (CP 4.560) :

> An ordinary predicate of which no analysis is intended to be represented will usually be *written* in abbreviated form, but having a particular point on the periphery of the written form appropriated to each of the blanks that might be filled with a proper name. Such written form with the appropriated points shall be termed a *Spot*; and each appropriated point of its periphery shall be called a *Peg* of the Spot. If a heavy dot is placed at each Peg, the Spot will become a Graph expressing a proposition in which every blank is filled by a word (or concept) denoting an indefinite individual object, "something."

Toutefois, le lieu (*spot*) n'est pas dans ces cas-ci un prédicat (une icône) ou un sujet (un index) de la logique pure, mais une expression de la langue usuelle dont la fonction logique est réalisée par le truchement du symbolisme. C'est pour cela que nous l'analysons comme un symbole onomatique, c'est-à-dire un symbole dont le rôle logique premier est de servir d'index, tout en qualifiant cet index de manière secondaire, en deuxième intention.[134] En tous les cas, la ligne d'identité est bien le prédicat ultime de la proposition logique, l'icône (un diagramme) en première intention de la relation entre les indices (dans la logique pure) ou les symboles onomatiques (dans une logique plus matérielle de la langue usuelle) des sujets logiques. Le « crochet » (*hook*, *peg*) imaginaire est ce qui subsiste de l'index pur au sein du symbole onomatique. Il consiste plus exactement en un point invisible (*point*)

[134] Peirce dit lui-même, dans les « Logical Tracts, No. 2 » (CP 4.441, cité ci-haut, et CP 4.474, 503), que le *spot* est un rhème non analysé. Mais la logique pure doit procéder à cette analyse.

ou endroit de la feuille d'assertion, à la périphérie du symbole rhématique. Ainsi, dans des textes plus tardifs, le crochet lui-même est dit dénoter un individu (objet, sujet) :

> Here K with a "peg" at the side asserts that the object denoted by the peg is a cyclic system. The letter M with one peg at the top and another placed on either side without any distinction of meaning, asserts that the object denoted by the side-peg is a *member* of the system denoted by the top-peg. (CP 4.621, 1908, « Some Amazing Mazes » ; les lettres sont des symboles de lieux dans un graphe que le texte commente)
>
> Indivisible graphs usually carry "*pegs*" which are places on their periphery appropriated to denote, each of them, one of the subjects of the graphs. (MS 514, 1909, cité par Sowa (2011 : 353))

Le symbole visible qui porte les crochets invisibles est bien un rhème, qualifié de médade, monade, dyade, triade, selon le nombre de crochets qu'il porte ; mais l'ensemble constitué du symbole rhématique et du crochet imaginaire est un symbole onomatique, qui sert de sujet logique et qui est, lui, lié à la ligne d'identité, dénotant le prédicat logique ultime. Seul le rhème médadique, sans crochet (et donc non lié à une ligne d'identité), est en fait un phème, une proposition. On pourrait expliciter cette analyse de la sorte, pour la proposition « il y a un homme » (une monade) et avec un signe ∿ pour désigner le crochet :

——∿un homme .

Pour mieux comprendre ce point, il faut considérer les conventions suivantes des « Logical Tracts, No. 2 » de 1903, qui introduisent la ligne d'identité, élément diagrammatique central dans l'analyse de la proposition :

> Convention No. 5. Two coincident points, not more, shall denote the same individual. (CP 4.443)
>
> Convention No. 6. A heavy line, called a *line of identity*, shall be a graph asserting the numerical identity of the individuals denoted by its two extremities. (CP 4.444 ; nous inversons les italiques)
>
> Convention No. 7. A branching line of identity shall express a triad rhema signifying the identity of the three individuals, whose designations are represented as filling the blanks of the rhema by coincidence with the three terminals of the line. (CP 4.446)

Un passage des « Prolegomena » de 1906 éclaire quelque peu la Convention No. 7, où le rhème du lieu et la ligne d'identité semblent se confondre, comme graphe de « teridentité » :

> A heavy line shall be considered as a continuum of contiguous dots; and since contiguous dots denote a single individual, such a line without any point of branching will signify the identity of the individuals denoted by its extremities, and the type of such unbranching line shall be the Graph of Identity, any instance of which (on one area, as every Graph-instance must be) shall be called a *Line of Identity*. The type of a three-way point of such a line (Fig. 198) shall be the *Graph of Teridentity*; and it shall be considered as composed of three contiguous Pegs of a Spot of Identity.

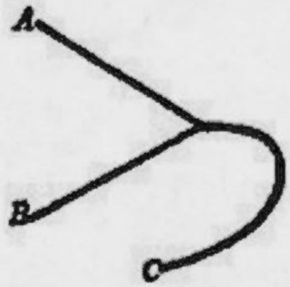


Fig. 198 (CP 4.561)

Sur la base de ces conventions et explications de la grammaire particulière des graphes existentiels, ainsi que des principes de la grammaire spéculative, notre explication d'ensemble serait que les points marqués qui constituent la ligne d'identité dénotent des individus indéfinis, mais la ligne d'identité même dénote l'identité de ces points, en particulier l'identité des points situés à ses extrémités, où se fixent les crochets, autres désignateurs des individus représentés par ces points.[135] La ligne d'identité est donc une icône (diagramme) de la relation entre ses points extrémaux où se fixent les crochets. Du point de vue de la ligne d'identité, les sujets sont ses points extrémaux, tandis que du point de vue des symboles de lieux, ce sont leurs crochets, point marqué et crochet imaginaire étant les deux faces d'une même individualité (un Deuxième, car il n'y a pas d'ego sans non-ego ; l'erreur métaphysique étant de se

[135] La continuité de la ligne est distincte de la contiguïté des points. Sur la topologie peircéenne, de même que son lien avec les graphes existentiels, nous renvoyons à Havenel (2008), Moore (2010) et Zalamea (2012).

penser seul, comme Premier, alors que c'est la qualité qui est Première). La dualité est toutefois asymétrique en ce sens que l'analyse logique de la proposition se fait à partir du prédicat logique dénoté par la ligne d'identité (l'erreur grammaticale étant de penser le sujet logique comme Premier). Le point marqué est donc le signe par lequel l'individu est qualifié en première intention, par la ligne d'identité, tandis que le crochet est le signe invisible par lequel l'individu est qualifié en seconde intention, par le symbole rhématique qui prend part au symbole onomatique global du lieu.[136]

N'oublions pas, d'autre part, que ce n'est pas la ligne d'identité qui porte en soi tout le sens de la quantification (une autre erreur fréquente chez les commentateurs), mais qu'elle situe le sujet logique dans l'univers du discours selon sa propre situation sur la feuille d'assertion et que c'est dans ce rapport à trois termes que la proposition est quantifiée (la quantification proprement dite est implicite à la relation, constituée par celle-ci).[137] Il ne faut pas méprendre la qualification d'existence positive de la ligne d'identité, avec la quantité particulière implicite à l'interrelation entre éléments du graphe. La qualification d'existence positive n'est d'ailleurs pas particulière à la ligne d'identité, mais propre à tout graphe inscrit sur la feuille d'assertion, qui affirme ce qu'il représente, dans les limites de son aire. Dans la perspective de l'analyse de la proposition, cette qualification est un prédicat de deuxième intention, secondaire par rapport à la diagrammaticité, la représentation iconique de la relation en première intention. On peut retenir ici que si Peirce illustre souvent sa logique avec des exemples informels, en langue usuelle, il n'en demeure pas moins que les principes

---

[136] Ce qui va dans le sens de l'analyse fregéenne, dans la *Begriffsschrift*, selon laquelle les expressions de contenu, à droite du diagramme du jugement, sont des expressions non logiques, correspondant aux *secondary propositions* de Boole (1854), mais dans une notation distincte de celle de la forme logique. Dans la logique pure, ces expressions désignent (expriment en tant que sens selon Peirce, dénotent en tant qu'objets selon Frege) des valeurs de vérité, à la rigueur métalogiques ou du moins normatives.

[137] Chez Frege, le quantificateur ne s'applique pas seulement au prédicat, mais à toute la proposition : « Les propositions universelles [*allgemein*] et particulières [*partikulär*], affirmatives et négatives, expriment des relations entre concepts et indiquent par ces mots (tous, chaque, quelques) le type particulier [*besondere*] de la relation ; du point de vue de la logique, ces mots ne doivent pas être liés étroitement au terme conceptuel qui fait suite mais doivent être rapportés à la proposition toute entière. » (Frege 1971 (1892) : 133, « Concept et objet », trad. C. Imbert)

syntaxiques des graphes existentiels sont basés sur la grammaire spéculative de la sémiotique, la grammaire pure de la logique. De plus, la conception que l'auteur se fait de la grammaire spéculative évolue au cours de son œuvre, alors même qu'il développe en parallèle son système des graphes existentiels.

Transformation des graphes

Le système des règles d'inférence est structuré, en tant que canon de la critique, selon l'ordre des catégories, mais dépend aussi des possibilités d'expression propres à la notation et sa grammaire particulière. Dans le cas des graphes existentiels, la propriété essentielle qui les distingue des notations algébriques est que la continuité y est primitive, inhérente au signe de la feuille d'assertion, qui sert de base à la construction des graphes ; alors que dans les notations algébriques, par contraste, les éléments continus de la logique (par exemple, les suites de formules indéterminées dans les séquents) sont exprimés par des symboles, des signes discrets dans leur rapport à l'ensemble du système de notation. Au niveau propositionnel de la logique, vient ensuite l'inscription des graphes comme symboles phémiques et des volutes ou coupures, tandis qu'au niveau de la logique des propositions analysées, vient l'inscription des graphes et leurs éléments comme les lignes d'identité, les symboles de lieux et aussi les volutes ou coupures. Cette organisation des différents éléments grammaticaux conditionne la critique logique, dont les règles d'inférence participent fondamentalement d'un même ordre catégoriel.

Ainsi, les permissions ou règles d'inférence dans le système des graphes existentiels sont structurées à leur tour, suite à la grammaire, selon l'ordre des catégories universelles. Les axiomes du système des graphes existentiels sont, en premier lieu, la feuille d'assertion, qui représente le fondement commun à toute expression du système, l'univers du discours ; puis la volute vide ou double coupure, qui est éliminable. Ces axiomes correspondent respectivement à la règle d'identité et à la coupure du système des séquents. Dans l'analyse interne de la proposition, l'identité est explicitée par la ligne d'identité, qui asserte l'identité comme existence commune de tout symbole onomatique lui étant joint, sur la base de sa propre présence sur la feuille ainsi que de son iconicité, c'est-à-dire l'expression diagrammatique du lien entre les termes au sein de la proposition. Les séquents ne possèdent pas une expression équivalente à la ligne d'identité du point de vue sémiotique, puisque l'analyse interne de la proposition y est exprimée symboliquement.

Les règles d'insertion et d'effacement, d'itération et de déitération appliquées aux opérateurs propositionnels permettent quant à elles d'introduire ou d'éliminer l'implication, exprimée par la volute, la négation, indiquée par la coupure simple, et la conjonction, notée par la juxtaposition de termes. Les autres opérateurs sont définis à partir des premiers. On voit d'emblée que la conjonction est un opérateur plus fondamental que la disjonction si l'on considère la continuité de la feuille d'assertion comme étant primitive. De même, la volute est un signe plus fondamental que la coupure, dans le sens de l'abstraction propre à la logique pure, puisque la première représente une opération qui exprime la continuité de ses termes, dans l'enveloppement d'une aire par une autre ; alors que la seconde est un signe représentant une discontinuité d'un terme par rapport à son contexte, d'une aire par rapport à une autre, ce qui peut toutefois s'avérer adéquat si l'on considère la logique dans le sens de son application. L'introduction et l'élimination des opérateurs se fait originellement dans un travail continu du graphe, sur la base chaque fois du graphe actuel, tel que présent au logicien ; donc à partir de ce qui suit dans l'ordre temporel de l'inscription, qui s'identifie à l'ordre logique du processus d'inférence. Dans les systèmes en notation algébrique, les prémisses de l'inférence sont plutôt exprimées séparément et précédemment dans le sens de l'arborescence ou de la linéarité verticale, et peuvent être examinées après coup sans tenir compte de l'ordre temporel. La réflexion logique est de cette manière discontinue, en ce qu'elle analyse le processus d'inférence en différents moments, qui peuvent être abstraits de leur ordre dans l'inférence logique ou l'inscription de la notation. Toutefois, dans la pratique, la méthode des graphes existentiels permet les deux sortes de construction du raisonnement. Le travail continu des graphes sur la base d'un seul graphe actuel rend cette méthode plus apte à reproduire le processus d'inférence de la logique pure, tandis que l'analyse discrète des graphes lors de leur inscription par étapes successives rend ceux-ci plus appropriés à l'expression effective de la logique appliquée.

Les règles qui permettent de modifier la structure de l'inférence en introduisant ou en éliminant des formules, règles dites « structurelles » dans la méthode des séquents, trouvent leurs correspondants exprimés de manière explicite dans les règles d'insertion et d'effacement, d'itération et de déitération de graphes. Les propriétés d'associativité et de commutativité, bien que sans règles explicites correspondantes, font aussi partie implicitement du formalisme, car elles sont inhérentes à la topologie des graphes, du point de vue de la notation. Le formalisme des graphes existentiels ne contient pas de règles explicites concernant ces deux propriétés, mais Peirce les souligne bien dans son commentaire[138]. L'associativité des formules est une propriété essentielle à tout système de logique (il n'y a pas de logique non associative, selon Girard (2006-2007)), tandis que la commutativité, en quelque sorte la duale de la première, est une propriété essentielle si l'on cherche à rendre la logique plus effective dans son application à des cas plus matériels, mais dont on peut bien se passer lorsque l'on ne considère que la logique pure.[139] Dans une notation algébrique, l'associativité est la propriété la plus fondamentale de la

[138] « Operations of commutation, like $xy\therefore yx$, may be dispensed with by not recognizing any order of arrangement as significant. Associative transformations, like $(xy)z\therefore x(yz)$, which is a species of commutation, will be dispensed with in the same way; that is, by recognizing an equiparant as what it is, a symbol of an unordered set. » (CP 4.374, 1901, contribution à l'article « Symbolic Logic » du dictionnaire de Baldwin, où Peirce décrit une version linéarisée des graphes existentiels.)

[139] On pourrait donc développer une logique non commutative, ce qui n'est pas encore bien avéré, mais certaines bases mathématiques ont déjà été développées en ce sens, cf. Lambek (1958, 1961), Girard (2006-2007). Dans la citation précédente, Peirce inverse l'ordre des deux propriétés.

diagrammaticité minimale à la base de l'algèbre : l'iconicité dans la similarité ou la différence des signes d'une même formule ou de formules différentes et leur rapport de contiguïté dans une même formule composée de l'algèbre. De façon similaire, la propriété d'associativité se trouve exprimée implicitement dans les graphes existentiels, par l'inscription de signes semblables ou dissemblables et de manière contiguë sur un même plan de la feuille d'assertion. Cependant, puisque la feuille d'assertion constitue un plan continu en toutes directions, qui représente la continuité en tous sens de l'univers du discours (l'espace logique), la propriété de commutativité s'y trouve aussi exprimée implicitement. Parce que la feuille d'assertion est continue en toutes directions, l'ordre des graphes qui y sont inscrits sur une même aire, c'est-à-dire non séparés par une coupure, importe peu. L'opération de juxtaposition, correspondant à la conjonction, qui ne fait pas intervenir de coupure, est de la sorte implicitement commutative, par son ancrage même dans la feuille d'assertion continue. Une règle de permutation, instituant la commutativité comme propriété fondamentale du système de logique particulier, n'est donc pas nécessaire dans le système des graphes existentiels.

Les règles d'insertion et d'effacement, ainsi que d'itération et de déitération de graphes sont facilement rendues compte dans les termes du formalisme des séquents, si, en présupposant le théorème de déduction[140], on interprète la volute comme une déduction hypothétique (notée par le tourniquet), plutôt qu'une implication (assertée au conséquent d'un séquent), ou la coupure et le changement d'aire qui en résulte comme le passage de l'antécédent au conséquent ou inversement (d'un côté à l'autre du tourniquet), plutôt qu'une négation. Les règles d'insertion (en aire impaire) et d'effacement (en aire paire ou nulle) de graphes trouvent leurs correspondants respectifs dans les règles de l'affaiblissement à l'antécédent (dans le sens de la

[140] Peirce formule explicitement le théorème de déduction dans son *Logic Notebook*, en 1898 et 1900, alors qu'il développe une réflexion sur les règles de transformation des graphes existentiels (MS 339 : 118r, 180r, cité par Roberts (1973 : 121) ; voir aussi l'analyse syllogistique de « On the Algebra of Logic », W4 : 169, 1880).

synthèse, vers le bas) et au conséquent (dans le sens de l'analyse, vers le haut). L'insertion est plus fondamentale que l'effacement, puisque l'effacement suppose qu'une formule a déjà été introduite auparavant.

Les règles d'itération et de déitération sont un peu particulières. L'itération et la déitération d'un graphe sur une même aire correspondent à la contraction, respectivement, dans le sens de l'analyse (vers le haut) et dans le sens de la synthèse (vers le bas), et ce, aussi bien à l'antécédent qu'au conséquent. Toutefois, l'itération et la déitération dans une aire, incluse à son tour dans l'aire contenant le graphe initial ou restant, n'ont pas d'équivalents immédiats dans le formalisme des séquents et correspondent au mieux à une contraction simultanée avec un passage de l'antécédent au conséquent ou à l'inverse, respectivement. Aussi, l'itération est plus fondamentale que la déitération, puisque la déitération suppose qu'une formule ait déjà été itérée auparavant. La dualité des règles d'insertion et d'effacement, ainsi que d'itération et de déitération, correspond, au niveau structurel, au principe d'inversion de la déduction naturelle et à la symétrie des séquents, plutôt explicités au niveau opératoire dans ces deux formalismes.

Par ailleurs, les illustrations fournies plus haut ne reproduisent pas le travail actuel et continu de la transformation des graphes par le logicien, qui s'effectue sur un seul graphe progressivement transformé (en diachronie), mais représentent plutôt des étapes discrètes et successives de ce travail, chacune figée en un nouveau graphe (en synchronie). Ce qui fait que les annotations — les indices marquant l'étape, la règle de transformation (permission) utilisée et l'étape du graphe à laquelle cette règle est appliquée — ne font pas partie du graphe, mais servent seulement à en commenter la transformation. Peirce lui-même a recours, dans un but pédagogique (une sorte d'application de la logique), à une représentation du processus d'inférence en plusieurs étapes successives, bien que théoriquement la critique pure ne présuppose qu'un graphe en transformation continue et que pratiquement le logicien puisse aussi travailler avec un seul graphe. L'interprétation subséquente de la critique logique peut cependant être aidée par l'utilisation d'un registre, tel celui des étapes successives et leurs annotations[141]. On retrouve ici une dualité entre deux sens de la logique, qui se spécifie dans la distinction entre le continu de la logique pure et le discret de la logique appliquée. L'aspect pragmatique de la méthode des graphes existentiels rend toutefois la critique effective dans le sens même de l'abstraction, propre à la logique pure.

Méthodeutique

L'endoporeusis, pour sa part, est la méthode générale d'interprétation des graphes existentiels, qui consiste à partir de l'extérieur des coupures, sur l'espace libre de la feuille d'assertion, pour analyser les graphes en se concentrant progressivement vers l'intérieur des coupures, le tout dans un dialogue entre Graphiste et Interprète (aussi appelés d'autres façons par Peirce ; voir à ce sujet Hilpinen (1982) et Pietarinen (2006)). D'un point de vue sémiotique, cette méthode révèle le sens du développement de la réflexion logique, qui part de conceptions plus vagues pour développer des conceptions plus générales, en passant par les voies déterminées du raisonnement comme processus d'inférence logique effectif. Dans la méthode endoporeutique, c'est la feuille d'assertion en tant qu'ensemble de présupposés non déterminés qui représente l'état vague de la conception, tandis que le logicien se forme progressivement une conception générale représentée par l'ensemble du graphe, au fur et à mesure qu'il interprète les éléments du graphe en se concentrant vers l'intérieur de l'espace graphique. Cette méthode constitue une réalisation particulière de la doctrine du pragmatisme, en ce sens que de multiples voies

---

[141] Peirce n'utilise pas exactement un système d'indices tel que dans la présentation des graphes ci-dessus. Il numérote en général, dans les textes des *Collected Papers*, les graphes comme des figures, auxquelles il fait ensuite référence dans son commentaire, et n'indique pas directement, en parallèle avec les graphes, les règles qui leurs sont appliquées. Il présente aussi parfois les graphes en les insérant dans le fil de son texte en prose, par exemple dans ses lettres à Lady Welby (S&S).

d'interprétation peuvent être explorées, qui contribuent à la précision de la conception.

Telle qu'illustrée plus haut avec la preuve du Théorème remarquable, une méthode plus spécifique de démonstration par les graphes existentiels consiste à partir d'une feuille d'assertion vierge, à y inscrire une volute vide et à insérer ou effacer, itérer ou déitérer des formules, prémisses de la conclusion recherchée. La démonstration se fait, dans ce cas, en contexte classique et l'on peut apprécier la symétrie du système dans la polarité des aires, la dualité des règles d'inférence et le cours réversible de la dérivation, soit la trame de preuve dans une version discontinue de la représentation. Finalement, la méthode effective des graphes existentiels élimine, dans la constitution même du formalisme, la coupure argumentative (des séquents) en l'identifiant à la coupure opérant sur les propositions — dont on perçoit immédiatement la superfluité, s'il en est, dans leur insertion et effacement (par « normalisation ») — et respecte dès lors la propriété de la sous-formule. Cela ressemble d'ailleurs à la réduction de la contraction et l'affaiblissement à des modalités linéaires (opérateurs propositionnels) pour en contrôler l'effet dans les séquents. La manière de formaliser la déduction et la méthode d'analyse et de démonstration du formalisme des graphes existentiels l'apparentent à la déduction naturelle, mais ses règles d'inférence sont aussi expressives que celles des séquents.

Annexe : notation du calcul lambda

Le calcul lambda et les combinateurs sont des modèles de calcul mathématique effectif, qui peuvent être utilisés pour donner, suivant la correspondance de Curry-Howard, une interprétation fonctionnelle des systèmes formels de la logique, tout en n'étant pas eux-mêmes des systèmes de logique[142]. D'un point de vue sémiotique, les grammaires de ces systèmes sont des variantes de celles des formalismes algébriques (linéaires et arborescents, axiomatiques et séquents), ce qui se comprend notamment dans l'analyse de leurs notations. Curry & Feys (1958) illustrent la portée des combinateurs et, par extension, du modèle apparenté du calcul lambda sur la logique à l'aide du paradoxe de Russell, qu'ils formalisent de la sorte (f désignant une propriété et F, une propriété de propriété) :

(1) $F(f) = \neg f(f)$.

Dans cette expression on remplace f par F, ce qui nous donne une contradiction :

(2) $F(F) = \neg F(F)$.

Une des solutions au paradoxe consiste à rejeter d'emblée la première expression comme insensée, la partie de droite ne constituant pas une expression bien formée, puisqu'une expression ne peut s'appliquer comme fonction à une autre fonction de même niveau syntaxique. Cette idée est à la base de la théorie des types. Les combinateurs et le calcul lambda, par contraste, ne font pas de distinction au premier abord entre diverses catégories d'expressions et ne considèrent que les différentes opérations entre des expressions considérées comme participant d'une

[142] Le nom d'origine « logique combinatoire » (chez Curry & Feys (1958) et dès Curry (1930)) ne rend donc pas bien le sens proprement critique de la logique.

même catégorie élémentaire. La première formule est donc syntaxiquement bien formée et la seconde, bien qu'exprimant effectivement une contradiction selon certaines règles de la logique, reste signifiante ou du moins opérationnelle. Pour les combinateurs et le calcul lambda, la seconde formule est signifiante au niveau opératoire et c'est donc à ce niveau qu'il faut en faire sens. Ces formalismes s'occupent avant tout des modes de combinaison d'expressions de types quelconques, bien que différents types d'expression puissent, éventuellement, aussi être distingués.

Nous pouvons déjà analyser les expressions utilisées dans cet exemple d'un point de vue notationnel, selon les conceptions grammaticales de la sémiotique. L'expression de gauche en (1) est une expression bien formée constituée d'un argument *f*, de sa fonction *F* et des parenthèses qui marquent la portée de la fonction, ici le seul argument *f*, tout en faisant ressortir la relation entre les deux termes. Le signe *f* qui représente l'argument est un *symbole onomatique*, qui désigne en fait un *index* dans son contexte symbolique : le sujet logique indéterminé, qui pourrait aussi être une fonction. Le signe *F*, qui représente le prédicat, est pour sa part un *symbole rhématique*, qui désigne en fait une *icône* dans son contexte symbolique : le prédicat logique déterminé de manière générale comme fonction. Les parenthèses forment quant à elles, dans leur ensemble et sous l'aspect qui nous intéresse le plus, un *index*, qui montre le diagramme de la relation entre les signes tenant lieu de sujets et de prédicats logiques, la relation constitutive donc d'une proposition logique complète. L'index des parenthèses porte sur un diagramme, qui consiste en la concaténation des signes de sujet et de prédicat sur la feuille, et ce signe des parenthèses relève par conséquent de la seconde intention : c'est un signe qui porte sur un autre signe.

Maintenant, l'expression de droite en (1), ou bien les expressions de chacun des deux côtés du signe d'égalité en (2), c'est-à-dire après la substitution, ne seraient pas, selon la logique standard, des expressions bien formées, puisque ne respectant pas la règle de composition spécifiée par la théorie des types. Selon les combinateurs et le calcul lambda, ces expressions restent toutefois signifiantes d'un point de vue opératoire. L'analyse sémiotique nous montre justement que les parenthèses sont signifiantes au niveau opératoire, car elles font ressortir la relation entre les termes de l'opération logique. Elles contribuent donc à la signification de l'expression logique dans son interprétation, en caractérisant le diagramme de la relation logique entre les termes, en tant qu'icône sémique à l'interprétation déterminée. Seulement, dans l'expression bien formée $F(f)$, à gauche en (1), l'opération en est une de prédication, si l'on tient compte des types de termes en jeu ; alors que dans les autres expressions, les opérations sont d'une autre sorte, qui ne respecte pas les règles de la prédication, mais qui peut rester signifiante, dans une théorie plus générale, permettant d'autres combinaisons de types, ou dans une théorie strictement opératoire, restant neutre quant aux types de termes en jeu.

Calcul lambda pur

Le calcul lambda pur (sans typage) a été conçu, à partir des travaux de Church (1936a, 1936b), comme une alternative à la théorie des ensembles pour rendre compte de manière plus adéquate, au niveau des fondements, du dynamisme des fonctions. Au lieu d'être comprises comme des ensembles de paires ordonnées (des graphes, au sens mathématique), les fonctions sont plutôt interprétées comme des processus ou opérations qui transforment des objets formels au prime abord indéterminés, ces objets pouvant être eux-mêmes des fonctions. L'analyse prend donc avant tout le point de vue du processus d'inférence plutôt que celui des objets, qui ne deviennent signifiants que dans l'articulation qu'ils permettent du processus. Un opérateur d'abstraction est introduit à cette fin, noté par la lettre grecque λ, qui permet d'isoler la fonction et de la caractériser pour elle-même, à part du reste de la formule — variables d'arguments et valeur de la fonction —, en l'abstrayant donc de cette dernière. Puisqu'il ne subsiste de différence catégorielle signifiante qu'entre les fonctions et les opérations élémentaires sur ces fonctions (abstraction, application), le calcul lambda évacue donc tout contenu logique (objet de type catégoriel déterminé).

Considérons maintenant le formalisme en suivant son exposé systématique (d'après Barendregt (1984), Girard (2006-2007)). Tout d'abord, les éléments de base de la grammaire particulière du calcul lambda sont :

- des *variables* d'objets simples : $x, y, z, \ldots$;
- des *opérateurs* d'abstraction : λ, et d'application : (,) (la concaténation de termes et les parenthèses, facultatives) ;
- et des variables générales de *λ-termes* quelconques : t, u, v, ..., les λ-termes spécifiés pouvant consister soit en de simples variables, soit en des composés de variables comprenant des opérateurs d'abstraction et d'application.

Les règles syntaxiques du calcul lambda pur ou règles de formation des expressions bien formées, appelées des « λ-termes », sont ensuite :

- pour les variables : Une variable $x, y, z, \ldots$ est un λ-terme ;
- pour la λ-abstraction : Si t est un λ-terme, alors $\lambda x.t$ est un λ-terme ;[143]
- pour l'application : Si t, u sont des λ-termes, $(t)u$ est un λ-terme.[144]

Les λ-termes sont des termes qui prennent sens par le rôle qu'ils jouent dans un calcul fonctionnel, donc relativement aux fonctions en tant que processus ou opérations. Mais avant d'en venir au calcul proprement dit, analysons plus en profondeur la grammaire de ces expressions bien formées.

D'un point de vue sémiotique, nous pouvons remarquer que la grammaire du calcul lambda diffère de manière significative de celle de la logique standard. Les signes de *variables* sont des *légisignes symboliques*, dont l'interprétance (le rôle inférentiel rhématique, onomatique, phémique) n'est pas déterminée. Ces signes peuvent ainsi représenter, en tant que *sèmes*, des sujets logiques non quantifiés ou des

---

[143] L'expression $\lambda x.t$ peut se lire « λx de t » ou « abstraction (de) x (hors) de t ».

[144] L'expression $(t)u$ peut se lire « application de t à u ». L'inversion des parenthèses, $(t)u$ au lieu de $u(t)$, permet de simplifier la notation (manière due à Krivine (1990), voir aussi Girard (2006-2007)).

prédicats logiques ouverts (sans sujets logiques déterminés) ; et en tant que *phèmes*, des propositions aux relations variables, c'est-à-dire sans connecteurs (des constantes logiques) pour les relier, mais seulement les fonctions du calcul lambda. C'est en ce sens que l'on peut dire que le calcul lambda n'a pas de contenu logique, ce dernier étant d'une certaine façon absent puisqu'indéterminé, seule la place de ce contenu subsistant alors de manière signifiante. Le signe de la variable est bien lié à travers son interprétation à un objet, mais l'interprétation même de la variable, la détermination de son rôle inférentiel, est laissée ouverte. L'objet formel est en quelque sorte plus strictement formel, plus mathématique, que dans un formalisme logique proprement dit, car le sens ultime de son interprétation, c'est-à-dire la portée des sujets logiques et la valeur de vérité des propositions, éventuellement dans le cadre d'un argument valide ou non, demeure indéterminé. Il ne reste que son sens relatif aux opérations du calcul.

Les *opérateurs* du calcul lambda sont quant à eux des *légisignes symboliques onomatiques* opérant en deux sens différents, de l'abstraction et de l'application. Le signe de l'opérateur d'abstraction (le lambda, λ) est un symbole renvoyant dans son contexte symbolique à un *index* de seconde intention, qui désigne la fonction permettant d'obtenir le λ-terme sur lequel l'opérateur agit (le terme t) à partir de l'argument qui le suit (la variable x). L'expression complète de l'abstraction, le λ-terme $\lambda x.t$, est une proposition incomplète, un légisigne symbolique phémique dont la composition interne n'est pas déterminée, mais dont on a abstrait l'un des sèmes, la fonction s'appliquant à la variable désignée. Cette variable est elle-même indéterminée puisque seulement liée en seconde intention, par l'opérateur d'abstraction, et non en première intention, par des opérateurs tels que les quantificateurs ou les connecteurs. Le point (facultatif) situé entre l'occurrence de la variable liée par l'opérateur d'abstraction et le λ-terme auquel celui-ci s'applique, est à son tour un *index* de seconde intention, qui montre le diagramme, dans la notation, de la relation entre les deux éléments de l'opération, l'abstracteur avec sa variable et le λ-terme.

L'opérateur d'application (les parenthèses, facultatives, avec la concaténation), pour sa part, est également un symbole onomatique renvoyant dans son contexte symbolique à un *index* de seconde intention, mais qui compose un λ-terme avec un autre, sans ouvrir davantage ce terme à la seconde intention, par-delà son incomplétude au niveau qui lui est propre. Les parenthèses, en particulier, forment un index qui montre la relation subsistant entre les λ-termes par leur simple concaténation. L'abstraction ouvre les fonctions sur un autre niveau formel, tandis que l'application ne fait que lier des fonctions à un même niveau.

Les *λ-termes* sont, tout comme les variables, des *légisignes symboliques* à l'interprétation indéterminée, mais dont on sait pour le moins qu'ils peuvent aussi représenter des opérations et non seulement des variables, ainsi d'ailleurs que des expressions complexes comprenant plusieurs opérations. Les expositeurs du calcul lambda (Church (1941), Barendregt (1984), Hindley & Seldin (2008)) les présentent comme des expressions du métalangage, mais soulignons bien qu'ils font partie de la grammaire du calcul lambda tout autant que les λ-termes élémentaires. D'un point de vue sémiotique, le calcul lambda n'est de toute façon qu'un système formel particulier, dont l'articulation en plusieurs niveaux épistémiques va de soi, et non une grammaire pure à distinguer strictement des autres niveaux logiques et métalogiques.

Ces distinctions sont rendues plus claires par la considération des opérations complexes de la conversion lambda, que nous allons maintenant aborder. Les opérations complexes du calcul lambda sont appelées de manière générale « λ-conversion » et leurs trois principaux types sont : l'équivalence, la réduction et l'expansion. En pratique, seuls différents types d'équivalence et de réduction sont généralement utilisés. La réduction est plus spécifiquement définie à partir d'un processus de calcul de base, la contraction d'un λ-terme (le « rédex ») en un autre λ-terme (le « contracté ») ; l'opération de réduction consistant en une série, possiblement vide, de telles contractions. Autrement dit, la contraction serait une réduction en une seule étape. Les preuves en calcul lambda peuvent être formalisées par la méthode axiomatique en postulant des axiomes et en définissant des règles de la manière suivante, en premier lieu pour le type particulier de conversion nommé β-conversion (ou β-égalité) (d'après Hindley & Seldin (2008) ; *N*, *M*, ..., désignant des variables générales de λ-termes) :

Schémas d'axiomes :

(α) $\lambda x.\ M = \lambda y.\ [y/x]\ M$ si $y \notin \mathrm{FV}\ (M)$;

(β) $(\lambda x.\ M)\ N = [N/x]\ M$;

(ρ) $M = M$.

Règles d'inférence :

(μ) $M = M' \Rightarrow NM = NM'$;

(ν) $M = M' \Rightarrow MN = M'N$;

(ξ) $M = M' \Rightarrow \lambda x.\ M = \lambda x.\ M'$;

(τ) $M = N, N = P \Rightarrow M = P$;

(σ) $M = N \Rightarrow N = M$.

La β-réduction se base sur les mêmes axiomes et est régie par les mêmes règles d'inférence, moins la règle (σ). Le signe d'opérateur est bien entendu également changé du signe de la conversion $=$ à celui de la réduction $\triangleright$.

Considérons, d'un point de vue sémiotique, la règle la plus caractéristique de la β-réduction, soit :

$(\lambda x.\ M)\ N \triangleright_\beta [N/x]\ M$.

Si l'on suit dans l'ordre inférentiel le processus de calcul qui y est décrit, on distingue d'abord 1° l'abstraction $\lambda x.\ M$, qui définit la fonction donnant le λ-terme *M* à partir de la variable *x*, puis 2° l'application $(\lambda x.\ M)\ N$, qui définit la fonction fusionnant l'abstraction $\lambda x.\ M$ au λ-terme *N* ; cette fonction complexe étant dite convertible, selon le type de conversion particulière qu'est la β-réduction, en 3° un terme *M* dans lequel les occurrences de la variable x sont remplacées par des λ-termes N (autrement dit, une substitution de N pour chaque x dans M), ce qui est noté $[N/x]\ M$.

Du point vue grammatical de la logique pure, la série de transformations correspondante se déroule comme suit. Le légisigne symbolique à l'interprétation indéterminée, mais de composition possiblement complexe en tant que λ-terme, M, est concaténé à un index de seconde intention, connoté par le symbole d'opérateur λ, qui lie un légisigne symbolique, la variable x, dont l'interprétation demeure indéterminée et dont la composition en tant que λ-terme reste simple. Cette opération a pour sens, dans l'interprétation de seconde intention du calcul lambda, l'abstraction de la fonction donnant M à partir de x. L'expression globale de l'abstraction est un légisigne symbolique phémique dont le sens inférentiel, comme valeur de vérité, est indéterminé et qui demande à être rempli par une variable dont le sens serait déterminé.

Un autre légisigne symbolique au sens inférentiel indéterminé, le λ-terme N, est ensuite concaténé au légisigne symbolique de l'abstraction $\lambda x.\ M$, la signification particulière de cette concaténation, en tant qu'application, étant que le second terme de cette opération remplit le premier terme qui lui est appliqué. Le second terme N, par sa position dans l'opération d'application, devient un symbole onomatique ouvert dans un sens (tel un sujet logique), tandis que l'abstraction, par son indétermination propre et sa position comme premier terme appliqué au second terme, est un symbole rhématique ouvert (tel un prédicat logique) dans le sens que complète le second terme.

La réduction est une opération complexe de conversion, qui résout la composition des opérations simples d'abstraction et d'application présentes en son rédex, en montrant que celui-ci est équivalent à la seule opération de substitution de N pour chaque x dans M, représentée dans le contracté. Le signe de la réduction $\triangleright_\beta$ est donc un symbole connotant un index de seconde intention, qui montre lui-même le diagramme des λ-termes du rédex et du contracté, le lien (comme équivalence opératoire) entre les relations propres à l'un et les relations propres à l'autre.[145]

Typage

Le typage est pour sa part un procédé inspiré des approches ensemblistes (telles que dans les *Principia mathematica* de Russell et Whitehead) qui permet de contrôler la portée des λ-termes, en distinguant différents niveaux fonctionnels et en spécifiant leurs relations mutuelles, par l'annotation des termes à l'aide de différents types. Ces types sont notés, selon les auteurs, par des lettres latines majuscules ou des lettres grecques minuscules et peuvent être composés en types complexes par des constructeurs de type[146]. Dans le cas du calcul lambda simplement typé qui nous intéresse présentement, le seul constructeur est la flèche $\rightarrow$ ou $\Rightarrow$, qui construit un type appelé « type de fonction », c'est-à-dire le type d'une fonction faisant passer d'un type de variable vers l'autre (par exemple, la fonction de A vers B, pour $A \Rightarrow B$). Les types peuvent être notés sous forme d'exposants ou après deux points faisant eux-mêmes suite aux termes.

---

[145] Une analyse intéressante des λ-termes et de l'opération de réduction a été proposée par Tanaka-Ishii & Ishii (2008), puis reprise dans Tanaka-Ishii (2010). Il s'agit à notre connaissance de la seule analyse sémiotique approfondie d'un fragment de notation mathématique ou logique, hors du contexte de la logique peircéenne (algèbre de la logique, graphes existentiels) ; les théories du raisonnement diagrammatique, du genre de Allwein & Barwise (1996), étant à classer parmi les grammaires essentialistes de la stipulation des types. Cependant, l'approche de Tanaka-Ishii est d'inspiration saussurienne et son analyse diffère de la nôtre sur au moins un point essentiel, qui est que l'auteur conçoit le λ-terme comme un signe dont les éléments sont les composantes d'un modèle de signe saussurien (signifié, signifiant) modifié, tandis que selon notre approche il s'agirait plutôt d'un signe complexe dont les éléments sont eux-mêmes des signes de types différents (icône, index, symbole, etc., et non seulement signe, objet et interprétant, dans le cours d'une sémiose), simples ou complexes. Elle remarque toutefois correctement que les λ-termes ainsi analysés sont des signes ouverts, ce qui rend compte du dynamisme qui leur est propre, notamment dans l'opération complexe de la réduction.

[146] Les « constructeurs » sont compris ici comme des opérateurs composant des types et non des règles de calcul, comme ce sera le cas dans la grammaire type-théorétique constructive, abordée plus loin.

Le typage introduit ainsi une hiérarchie grammaticale dans les opérations du calcul. L'usage des types conjointement au calcul pur respecte également certaines règles. Les règles de formation des termes pour le calcul lambda simplement typé, c'est-à-dire ne comprenant que le constructeur du type de fonction, sont les suivantes (Girard (2006-2007), typage à la Church) :

Variable : Une variable $x^A, y^A, z^A, \ldots$ est un terme de type A ;

λ-abstraction : Si t est un terme de type B, alors $\lambda x^A t$ est un terme de type $A \Rightarrow B$;

Application : Si t, u sont des termes de types respectifs $A \Rightarrow B$ et A, alors $(t)u$ est un terme de type B.

Il existe cependant deux façons principales de typer des termes, nommées, suivant les auteurs à leurs origines, le typage à la Church (approche ensembliste) et le typage à la Curry (approche opérationnelle). Dans le typage à la Church les types sont intégrés au calcul pur, en ce sens que les variables de termes d'abstraction sont elles-mêmes typées (Sørensen & Urzyczyn (2006)) :

(Var) $\quad \Gamma, x : \tau \vdash x : \tau$

(Abs) $$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma\, M) : \sigma \to \tau}$$

(App) $$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau}.$$

Le typage à la Curry est pour sa part moins explicite que le typage à la Church, puisque les variables de formules d'abstraction n'y sont pas typées, les types étant notés de manière complètement distincte des termes auxquels ils s'appliquent, sans intervenir à l'intérieur des opérations du calcul, sur les termes liés par des opérateurs (Sørensen & Urzyczyn (2006)) :

(Var) $\quad \Gamma, x : \tau \vdash x : \tau$

(Abs) $$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x\, M) : \sigma \to \tau}$$

$$\text{(App)} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau}.$$

D'un point de vue sémiotique, le typage comprend deux éléments grammaticaux principaux : le type qui précise la catégorie du terme et la place d'exposant ou les deux points qui marquent le rapport entre le terme et le type. Le type est un légisigne symbolique qui peut être simple ou complexe : en tant que sème jouant le rôle de sujet logique, le type est simple ; et en tant que phème constitué de types simples et de constructeurs, avec éventuellement des parenthèses pour distinguer les différents composés, le type est complexe. Le dispositif de la notation qui marque le rapport entre le terme et son type, c'est-à-dire la place d'exposant ou les deux points, est un index de seconde intention montrant le diagramme de la relation entre le terme fonctionnel et le type spécifiant le contenu sinon indéterminé du terme. Le contenu spécifié par le typage, le type comme catégorie du terme, n'est cependant pas un contenu logique proprement dit, mais un contenu relatif à l'opération mathématique explicitée dans le calcul lambda. Il peut être éventuellement interprété en un sens logique (le λ-terme correspond à une preuve et le type à une formule) ou en un autre sens, informatique par exemple (le λ-terme correspond à un programme et le type du calcul à un type de la programmation). Ces interprétations font l'objet de la correspondance dite de Curry-Howard, sur laquelle nous reviendrons brièvement plus loin (section 3.2).

Résumons maintenant les différences grammaticales entre le calcul pur et le typage, entre le typage à la Church et le typage à la Curry, et entre le typage du calcul lambda et la logique propositionnelle. Le calcul pur est, au niveau de l'interprétance, strictement fonctionnel et ne laisse qu'une place ouverte aux objets formels, sans spécifier leurs types catégoriels plus avant ; tandis que le calcul lambda typé spécifie les catégories de ces objets formels, les types de sèmes (ou de phèmes composés de sèmes) dont il s'agit, tout en les relativisant par rapport au calcul mathématique. Le typage à la Church, d'inspiration ensembliste, catégorise les éléments des termes d'abstraction, définissant donc l'abstraction comme un graphe composé d'une relation entre des ensembles de ses éléments (ce qui est rendu possible par la catégorisation de ces éléments : la variable et le terme qui suit) ; tandis que le typage à la Curry, d'inspiration opérationnelle, ne catégorise que les termes non liés par des opérateurs, l'opération du calcul demeurant ainsi première par rapport au typage, c'est-à-dire que, grammaticalement, aucun index de seconde intention du calcul pur (abstracteur λ, parenthèses) ne porte sur des termes déjà typés. Finalement le typage du calcul lambda diffère de la logique propositionnelle en ce que les types sont eux-mêmes seconds dans l'interprétation du calcul lambda, qui est avant tout fonctionnel et peut donc fonctionner, dans le calcul pur, sans typage ; tandis que l'analyse grammaticale de la logique à son niveau propositionnel est centrale à l'interprétation de la logique en termes de fonctions de vérité (suivant l'ordre des catégories, il n'y a pas de logique purement opératoire).

3

Méthodeutique

La méthodeutique est la partie de la sémiotique qui considère quelle est la meilleure façon pour le raisonnement nécessaire de la science de parvenir à ses fins. Le pragmatisme peircéen nous propose une telle méthode, en considérant que le but du raisonnement nécessaire dont s'occupe la logique est de préciser la signification de nos conceptions, c'est-à-dire de rendre déterminées ou plus générales nos conceptions qui sont d'abord plus vaguement définies. La méthode endoporeutique d'interprétation des graphes existentiels, qui reprend le motif du pragmatisme, vient d'autre part appuyer l'idée selon laquelle la logique intrinsèque du pragmatisme est dialogique, l'interprétation des graphes s'effectuant alors dans un dialogue. Elle développe de plus la signification des conceptions représentées dans le sens de leur généralisation. Dans ce chapitre, nous ne considérons pas la méthodeutique pour elle-même, mais relativement à l'étude de la notation logique, c'est-à-dire les aspects méthodeutiques qui ressortent dans l'étude et l'usage de la notation.

3.1. La doctrine du pragmatisme

Peirce énonce sa maxime du pragmatisme, dans sa formulation d'origine, comme suit :

> Consider what effects, which might conceivably have practical bearings, we conceive the object of our conception to have. Then, our conception of these effects is the whole of our conception of the object. (W3 : 266, 1878, « How to Make Our Ideas Clear »)

La maxime du pragmatisme est une formule qui énonce un principe méthodeutique des sciences heuristiques et plus spécifiquement de la logique, nous disant quelle est la meilleure façon de procéder pour déterminer et aussi développer la signification de nos conceptions. Dans la perspective sémiotique, lorsqu'on précise la signification d'une conception, tel que dans une définition, la signification n'est pas complètement fixée dans sa seule règle d'interprétation, car les règles de ce genre s'inscrivent dans un processus d'interprétation au cours duquel elles engendrent des conséquences (leur usage est signifiant). De plus, ces règles langagières mêmes, qui déterminent la signification de nos conceptions, évoluent[147]. Donc, la doctrine du pragmatisme fournit un principe méthodeutique, le développement de la généralité, qui prend lui-même comme principe directeur une certaine croissance des idées.

C'est en un sens logique que nous comprendrons ici la doctrine du pragmatisme, c'est-à-dire qu'elle doit nous expliquer comment déterminer la signification de nos conceptions, en tant que cette détermination consiste en une critique logique. Nous pouvons distinguer trois éléments de la méthode préconisée par la maxime pragmatiste. Il y a en premier lieu un ensemble de *possibilités*, d'effets possibles, dont on doit tenir compte lorsque l'on précise la signification d'une conception. Puis, il y a une certaine façon, dans un *sens pratique*, dont ces possibilités doivent pouvoir s'actualiser, une contrainte donc sur les transformations possibles de ces possibilités initiales. Finalement, la signification d'une conception saisit un *ensemble* de ces possibilités qui peuvent s'actualiser en un sens pratique. Cette idée d'un ensemble de possibilités à réaliser reflète le caractère général et téléologique de la signification. La signification de la conception, bien qu'en soi générale, est d'abord plus vague et devient ensuite plus générale. À travers le processus du raisonnement, nous essayons donc de développer la signification dans le sens de la généralité.

---

[147] Cette idée d'une évolution des lois est propre à la métaphysique évolutionnaire développée par Peirce dans la série d'articles métaphysiques publiés dans la revue *The Monist*, en 1891-1893 (cf. W8 : 84-205).

3.2. Formalisation de la méthode dans l'analyse de la notation

Dans notre critique des notations, l'attribution des types est en partie intuitive et la critique est informelle, car les principes phanéroscopiques et sémiotiques sont explicités, mais pas la méthode. Le développement d'une méthode pour l'étude des notations logiques a pour but de formaliser la critique des notations et d'en expliciter la finalité. Cette formalisation consiste à réduire les intuitions larges de l'assignation des types à des opérations logiques aux principes bien définis, opérations qui restent cependant en soi des actes de la pensée et donc, ultimement, intuitives. La finalité est pour sa part une idée générale qui donne un sens à un acte ou une série d'actes, l'idéal que vise la notation à travers son usage étant l'expressivité. Le développement de la méthode s'avère ainsi être la recherche d'une notation plus expressive.

3.2.1. Grammaire catégorielle et théorie des types constructive

Nous étudierons d'abord les aspects méthodeutiques des grammaires formelles issues de la grammaire catégorielle et la théorie des types. Nous y constaterons une certaine progression dans l'expressivité de la logique, au fur et à mesure que la méthode se développe, dans les cas que nous avons retenus de la grammaire d'Ajdukiewicz, du calcul de Lambek et de la théorie des types de Martin-Löf.

La grammaire catégorielle d'Ajdukiewicz

Revenons au formalisme d'Ajdukiewicz (1935), mais cette fois en examinant la méthode même de vérification de la bonne connexion syntaxique des énoncés analysés. Reprenons d'abord l'exemple d'analyse (de la section 2.2.2.) :

	$P \vee P . \supset . P$	expression analysée en notation standard des *PM*
(1)	*s s/ss s s/ss s*	attribution des indices de l'analyse syntaxique
(2)	*s/ss s/ss s s s*	mise en ordre préfixé
(3)	*s/ss s s*	réduction
(4)	*s*	réduction finale (et valeur globale de l'expression).

Une méthode en logique est une manière de réaliser un processus de raisonnement finalisé, une série d'actes d'inférence visant un certain but. La règle qui régit les actes d'inférence dans la présente méthode d'analyse est essentiellement la règle de transitivité, avec d'abord les permutations de la mise en ordre syntaxique, et le but visé est une expression qui représente le type grammatical de l'expression complexe analysée. Dans le cas d'une expression de la logique propositionnelle, pour que l'expression soit bien formée, le type final doit être une proposition. La méthode particulière d'Ajdukiewicz consiste à : 1° attribuer des types de sa grammaire aux éléments de l'expression analysée, attribution qui est intuitive ou canonique ; puis à 2° ordonner les éléments et leurs types selon l'ordre préfixé de la notation polonaise, soit du foncteur le plus englobant (le foncteur principal) à ceux qui le sont moins, suivis de leurs arguments respectifs ; pour ensuite 3° réduire progressivement les types par l'application de la règle de transitivité (implicite chez Ajdukiewicz) ; jusqu'à 4° l'obtention d'un type irréductible, qui correspond au type visé lorsque l'expression est bien formée.

Notons que dans cette méthode l'attribution des types aux éléments de l'expression analysée reste intuitive ou canonique, elle n'est en tous les cas pas critique, puisque non constructive, c'est-à-dire qu'elle n'explicite pas les principes du processus qui la constitue. Le processus de transformation du typage, la mise en ordre et la réduction des types, est formalisé, régi par des principes rigoureux, mais les règles mêmes de transformation ne sont pas exprimées explicitement. L'atttribution des types est donc non critique, stipulée, et l'évaluation du typage, bien que formalisée, répond à un principe implicite. À ce sujet, les algorithmes d'attribution des types, dans les grammaires formelles développées à la suite des travaux de Bar-Hillel (1964) et Chomsky (1957), ne font pour leur part qu'expliciter la référence au canon, le dictionnaire, dont l'élaboration même demeure intuitive (une convention établie par l'usage). Ces algorithmes n'établissent pas les types en soi, mais les appliquent sur une base conventionnelle. L'abstraction des types est quant à elle l'œuvre d'une réflexion critique sur les fondements empiriques de la grammaire, les fondements phanéroscopiques de la sémiotique, ce que réalise le plus souvent de manière naïve la convention établie par l'usage. La grande avancée des méthodes formelles contemporaines est plutôt au niveau de l'évaluation du typage.

Le formalisme d'Ajdukiewicz est néanmoins structuré d'une manière qui nous informe sur la méthode à suivre dans la critique des notations d'un point de vue sémiotique. On peut considérer que les étapes délimitées par la méthode constituent différents moments ou niveaux de l'interprétance du signe de la notation, c'est-à-dire de la définition de la signification de cette notation. Le signe est ici l'ensemble de la représentation de l'analyse d'une expression logique par le typage. L'expression initiale en notation logique, l'objet immédiat du signe en seconde intention de l'analyse, est structurée d'après une grammaire particulière, par exemple celle des *Principia mathematica*, dont les catégories constituent l'interprétant immédiat de l'expression initiale et du signe de la dérivation d'un type final. Le typage de l'expression initiale, avant la mise en ordre et la réduction, consiste en l'analyse de la forme de cette expression en des types, qui représentent les catégories de la grammaire particulière et forment donc l'aspect que prend le signe global dans son rapport à l'interprétant immédiat. Le typage fait ressortir le diagramme de la notation en l'articulant autour des foncteurs comme indices des relations internes à l'expression. Par ailleurs, l'attribution des types, leur mise en ordre et leur réduction sont, en tant qu'actes, des interprétants dynamiques qui donnent un sens constructif à l'expression analysée, dont ils synthétisent la forme. Le rapport du signe au processus de l'interprétant dynamique peut être représenté, en seconde intention, par la convention du dictionnaire et des règles d'inférence, mais reste dans ce cas-ci implicite. Le type final est pour sa part l'aspect que prend le signe dans son rapport à l'interprétant final, le produit ultime de la synthèse. Ce type peut être directement évalué en considérant s'il correspond ou non au type visé, celui qui doit normalement être attribué à l'expression globale. L'expression est alors évaluée comme étant bien formée ou non (Ajdukiewicz dit « syntaxiquement connexe »), selon que le type final correspond ou non au type visé. La valeur de l'expression, comme bien formée ou non, est son interprétant final, qui est explicité dans le métalangage seulement.

Notons que dans cette analyse, en plus des règles qui restent implicites, aucun signe ne représente l'aspect que prend le signe dans son rapport à l'objet immédiat ou dynamique, puisque l'expression initiale, comme objet de la représentation, est laissée derrière après l'attribution des types. Ce défaut de la représentation constitue une limite à l'expressivité du formalisme d'Ajdukiewicz. Le schéma suivant résume notre interprétation :

expression analysée en notation standard des *PM* (**Oi**)

$\downarrow$ [$\mathbf{S}^\frown\mathbf{Id}$] dictionnaire

(1) indices attribués de l'analyse syntaxique ($\mathbf{S}^\frown\mathbf{Ii}$)

$\downarrow$ [$\mathbf{S}^\frown\mathbf{Id}$] règle implicite

(2) indices mis en ordre préfixé ($\mathbf{S}^\frown\mathbf{Ii}$)

$\downarrow$ [$\mathbf{S}^\frown\mathbf{Id}$] règle implicite

(3) séquence d'indices réduite ($\mathbf{S}^\frown\mathbf{Ii}$)

$\downarrow$ [$\mathbf{S}^\frown\mathbf{Id}$] règle implicite

(4) contracté final de la séquence d'indices ($\mathbf{S}^\frown\mathbf{If}$) .

Le calcul syntaxique de Lambek

Le calcul syntaxique de Lambek (1958, 1961) reprend la méthode canonique d'attribution des types aux éléments de l'expression analysée (d'une langue formelle ou naturelle), mais distingue plusieurs opérateurs primitifs, au lieu du seul foncteur d'Ajdukiewicz, et développe le calcul en un système d'axiomes et de règles d'inférence plus complexe, constituant une véritable logique (appliquée). L'approche suivie par l'auteur est preuve-théorétique et s'apparente à un fragment simple de la logique linéaire, sans aucune règle structurelle, si ce n'est que la règle exprimant l'associativité des types, plutôt présentée comme un axiome avec la règle d'identité.[148] Le calcul comprend la coupure comme règle d'inférence, sans que son rapport de dualité avec l'identité soit souligné. Il vérifie l'élimination des coupures.

Les types du calcul de Lambek sont définis de manière canonique par l'usage d'un dictionnaire, qui spécifie les types de base et à quels éléments de l'expression analysée ces types sont attribués. Les propositions complètes sont de type s, les noms de type n, etc. suivant la grammaire particulière de la langue objet. L'attribution d'un type à un élément de l'expression analysée est notée par une flèche $\rightarrow$, par exemple Jean $\rightarrow n$ veut dire que l'élément Jean est de type n, défini comme le type de base des noms. Le calcul même s'effectue au niveau des types seulement et la flèche $\rightarrow$, par exemple dans $x \rightarrow y$, veut alors dire qu'une expression de type x, noté à l'antécédent, possède aussi le type y, noté au conséquent. L'attribution correspond en quelque sorte à la déductibilité des séquents, notée par le tourniquet $\vdash$. Les opérateurs primitifs sont, pour leur part, la multiplication (tenseur non commutatif, noté par le point $\cdot$ ou par la simple concaténation), la division vers la droite (/ , « sur ») et la division vers la gauche (\ , « sous »). Ces opérateurs correspondent d'une certaine manière à la conjonction $\wedge$, à l'implication $\rightarrow$ et à l'implication inverse $\leftarrow$ de la logique standard. Les axiomes et règles d'inférence du calcul syntaxique associatif sont, d'après Lambek (1958, 1961) :

Axiomes : (1) $x \rightarrow x$

(2) $(xy)z \rightarrow x(yz)$ (2') $x(yz) \rightarrow (xy)z$

[148] Le calcul syntaxique est donc non commutatif, sans affaiblissement et sans contraction. Lambek (1961) a aussi développé une version non associative de son calcul, mais cette idée reste sujette à débat. Ainsi, tel que déjà noté, Girard (2006-2007) considère que l'associativité est une propriété structurelle minimale à tout calcul logique.

Règles d'inférence :

$$(3)\ \frac{xy \rightarrow z}{x \rightarrow z/y} \qquad (3')\ \frac{xy \rightarrow z}{y \rightarrow x\backslash z}$$

$$(4)\ \frac{x \rightarrow z/y}{xy \rightarrow z} \qquad (4')\ \frac{y \rightarrow x\backslash z}{xy \rightarrow z}$$

$$(5)\ \frac{x \rightarrow y \quad y \rightarrow z}{x \rightarrow z\,.}$$

La méthode du calcul de Lambek est enrichie, par rapport au formalisme d'Ajdukiewicz, tout d'abord d'opérateurs qui définissent mieux les contraintes de la linéarité de l'écriture, mais aussi d'un système de règles d'inférence qui définissent mieux les transformations possibles des types. Les différents opérateurs améliorent l'expressivité des signes de la grammaire particulière dans leur rapport à l'interprétant immédiat comme forme particulière de l'écriture linéaire, sa « signification » en un sens ordinaire. Les règles d'inférence explicitent pour leur part, en seconde intention, le rapport du signe à l'interprétant dynamique comme processus d'inférence, ce qui reste opaque dans le formalisme d'Ajdukiewicz, qui se limite à une règle implicite exprimant la transitivité de la relation entre les types à travers une série de foncteurs. L'ensemble des éléments de l'interprétance est finalement articulé suivant une méthode inspirée du calcul des séquents. La démonstration par synthèse explicite le processus qui mène à l'interprétant final, la valeur syntaxique de l'expression considérée, tandis que la recherche de preuve par analyse explicite les types des éléments de la langue objet selon les principes de la grammaire particulière de cette langue. L'explicitation globale de la logique du langage selon le calcul de Lambek suit ces deux mouvements de la méthode dans une sorte de rapport dialectique. Toutefois, l'aspect que prend le signe global dans son rapport à l'objet immédiat ou dynamique n'est toujours pas représenté.

La grammaire type-théorétique constructive

La grammaire catégorielle développée selon les principes de la théorie des types constructive de Martin-Löf (Martin-Löf (1984), Ranta (1994), Negri & von Plato (2001)) permet de donner une interprétation fonctionnelle de la logique et de sa notation, en explicitant son aspect calculatoire par la correspondance (dite de Curry-Howard, d'après sa formulation chez Curry & Feys (1958) et Howard (1980)) entre modèle de calcul effectif et formalisme logique. Une expression de la grammaire type-théorétique constructive appliquée à la logique est composée d'un terme du calcul lambda, interprété comme une preuve de la proposition logique qui lui est attribuée comme type, d'un index d'attribution du type (: ou $\in$) et d'une proposition de la logique intuitionniste en méthode de déduction naturelle, comme type attribué au terme lambda. La proposition logique, en tant qu'elle est soutenue par sa preuve en calcul lambda, est plus exactement assertée dans une sorte de jugement, c'est-à-dire tenue pour vraie dans le fil d'un argument, lui-même soutenu par l'algorithme sous-jacent. De la même manière, des règles de calcul effectif correspondent aux règles d'inférence du cours de la démonstration, et la méthode de réduction du calcul lambda, à la normalisation de la déduction naturelle. Plus exactement, c'est l'acte de calcul mathématique qui coïncide avec l'acte d'inférence logique, servant ainsi de base phénoménale à la correspondance entre les représentations de l'expression fonctionnelle des mathématiques et de l'expression signifiante (c'est-à-dire qui explicite l'interprétance) de la logique. Ce qu'exprime le schéma suivant :

$$\begin{array}{rccl} \text{mathématiques (calcul)} & & & \text{(langue) logique} \\ & \text{terme} & & \text{type} \\ \text{règle de calcul} \downarrow & \dfrac{\text{preuve}}{\text{preuve}} & \dfrac{:}{:} & \dfrac{\text{proposition}}{\text{proposition}} \downarrow \text{règle d'inférence} \end{array}$$

La théorie des types constructive distingue de plus quatre espèces élémentaires de jugement assertorique au niveau logique :

1. A est une proposition. A : prop

2. A et B sont des propositions identiques. A = B : prop

3. a est une preuve de la proposition A. a : A

4. a et b sont des preuves identiques[149] de la proposition A. a = b : A

Le sens constructif de chaque sorte de jugement est donné par des termes et des types correspondants en calcul lambda. Celui-ci étant purement fonctionnel, les termes ne représentent que des fonctions comme actes sans contenu logique déterminé, tandis que le formalisme logique correspondant est constitué de signes dont la signification est déterminable dans l'interprétance. Rappelons ici que la notation de la déduction naturelle exprime moins adéquatement le jugement hypothétique, introduisant les prémisses ultimes du raisonnement, que celle des séquents. Les prémisses doivent être indicées, pour les faire suivre dans le cours de la dérivation, tandis que dans le second formalisme les hypothèses sont notées et accumulées à l'antécédent du séquent. La dérivation est aussi marquée de façon semblable dans les deux cas, par la série de traits de déduction, mais avec une asymétrie globale imposée dans la trame de preuve en déduction naturelle. La théorie des types constructive possède l'avantage supplémentaire de bien exprimer le jugement assertorique, en précisant son type, ce qui n'est sinon indiqué, dans les séquents, que par un signe surchargé dans l'expression, le tourniquet, qui ne distingue pas les différentes sortes de jugement.

La théorie des types constructive permet aussi d'exprimer la dépendance des types (catégories grammaticales) envers d'autres types et introduit de la sorte un certain ordre parmi ceux-ci. Un des principes du constructivisme, en plus du réquisit d'effectivité, est l'idée que la continuité est primitive. L'expression de la dépendance entre types logiques assure la continuité de ces types dans l'inférence. Elle constitue donc un apport dans la formalisation de l'approche constructiviste de la logique. Dans l'application linguistique de la théorie, la dépendance entre types permet d'expliquer

[149] Suivant son approche basée sur une théorie des « ensembles » constructive (1970, 1984), Martin-Löf dit plutôt « égales » qu' « identiques ». Notre point de vue est plus directement logique.

des phénomènes tels l'anaphore, l'accord des verbes dans le temps, la structuration progressive d'un texte ou encore la situation en contexte du discours (Ranta (1994)).

Dans le développement du formalisme, maintenant, des règles de formation sont d'abord spécifiées qui définissent les types élémentaires des expressions simples ou composées de la logique. Les expressions logiques composées sont ensuite définies dans leur articulation interne par des règles d'inférence mises en parallèle avec des règles de calcul sur les termes lambda, qui leur donnent un sens constructif. Les règles d'introduction des opérateurs logiques correspondent à des constructeurs fonctionnels et les règles d'élimination à des sélecteurs. Les règles de conversion éliminent les fragments de calcul qui contiennent un sélecteur précédé d'un constructeur liés à une même opération logique, tout en normalisant la dérivation des expressions logiques correspondantes. Plus précisément, les règles d'introduction de la conjonction et de la quantification particulière correspondent à deux sortes de couplage du calcul lambda, celle de la disjonction à l'injection, et celles de l'implication et la quantification universelle à deux sortes d'abstraction lambda. Les règles d'élimination de la conjonction et du quantificateur particulier correspondent à deux sortes de projection, celles de l'implication et du quantificateur universel à deux sortes d'application et celle de la disjonction à une abstraction fonctionnelle (semblable à l'abstraction de la théorie des types simple). L'équivalence (définitionnelle) de la logique correspond finalement à l'égalité (de conversion) des mathématiques et le processus de normalisation en déduction naturelle, à la réduction en calcul lambda.

Sur la base du calcul fonctionnel, la formulation des types peut aussi être interprétée dans une théorie des ensembles constructive, plus générale, car mathématique, que la logique, ce qui permet l'application à divers formalismes (mathématique, informatique, linguistique). Les types mêmes de l'implication et la quantification universelle sont alors des sortes de produit cartésien (de familles d'ensembles), construit par abstraction, tandis que la conjonction, la quantification particulière et la disjonction deviennent des sortes d'union disjointe (de familles d'ensembles ou de deux ensembles), construite par couplage ou injection. La quantification universelle s'avère être, d'un point vue constructif, une généralisation de l'implication et la quantification particulière, une généralisation de la conjonction.

Les règles d'inférence et de calcul de la logique intuitionniste en correspondance avec le calcul lambda, selon la méthode de la théorie des types constructive, sont les suivantes (Martin-Löf (1984), Ranta (1994), Negri & von Plato (2001), sans la formulation des types dans la théorie des ensembles constructive) :

Règles de formation

$$\frac{A : \text{prop} \quad B : \text{prop}}{A \wedge B : \text{prop}}\ \wedge F \qquad \frac{A : \text{prop} \quad B : \text{prop}}{A \vee B : \text{prop}}\ \vee F \qquad \frac{A : \text{prop} \quad B : \text{prop}}{A \rightarrow B : \text{prop}}\ \rightarrow F$$

$$\frac{A : \text{prop} \quad \begin{array}{c}[x : A] \\ \vdots \\ B : \text{prop}\end{array}}{(\forall x : A)\, B : \text{prop}}\ \forall F \qquad \frac{A : \text{prop} \quad \begin{array}{c}[x : A] \\ \vdots \\ B : \text{prop}\end{array}}{(\exists x : A)\, B : \text{prop}}\ \exists F$$

Règles d'introduction des opérateurs logiques, constructeurs fonctionnels

couplage $\dfrac{a : A \quad b : B}{(a, b) : A \wedge B}\ \wedge I$

injection $\dfrac{a : A}{i(a) : A \vee B}\ \vee Ig \qquad \dfrac{b : B}{j(b) : A \vee B}\ \vee Id$

λ-abstraction $\dfrac{\begin{array}{c}[x : A] \\ \vdots \\ b : B\end{array}}{\lambda x.b : A \rightarrow B}\ \rightarrow I$

(quantificateurs) $\dfrac{\begin{array}{c}[x : A] \\ \vdots \\ b : B\end{array}}{\lambda x.b : (\forall x : A)B}\ \forall I \qquad \dfrac{a : A \quad b : B(a/x)}{(a, b) : (\exists x : A)B}\ \exists I$

Règles d'élimination des opérateurs logiques, sélecteurs fonctionnels

projection $\dfrac{c : A \wedge B}{p(c) : A}\ \wedge Eg \qquad \dfrac{c : A \wedge B}{q(c) : B}\ \wedge Ed$

abstraction $$\dfrac{c : A \vee B \qquad \begin{array}{c}[x : A]\\ \vdots\\ d : C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[y : B]\\ \vdots\\ e : C\end{array}}{\vee E\,(c, (x)d, (y)e) : C}\ \vee E$$

application $$\dfrac{c : A \rightarrow B \qquad a : A}{ca : B}\ \rightarrow E$$

(quantificateurs) $$\dfrac{c : (\forall x : A)B \qquad a : A}{ca : B(a/x)}\ \forall E \qquad \dfrac{c : (\exists x : A)B}{p(c) : A}\ \exists Eg \qquad \dfrac{c : (\exists x : A)B}{q(c) : B(p(c)/x)}\ \exists Ed$$

(*ex falso quodlibet*) $$\dfrac{c : \bot}{efq(c) : C(c/x)}\ \bot E$$

Les règles d'élimination de la conjonction et du quantificateur particulier peuvent être généralisées en :

$$\dfrac{c : A \wedge B \qquad \begin{array}{c}[x : A]\ [y : B]\\ \vdots\\ d : C\end{array}}{\wedge E\,(c, (x)(y)d) : C}\ \wedge E \qquad \dfrac{c : (\exists x : A)B(x) \qquad \begin{array}{c}[x : A]\ [y : B(x)]\\ \vdots\\ d(x, y) : C(x, y)\end{array}}{\exists E\,(c, (x, y)d(x, y) : C(x)}\ \exists E$$

Règles de normalisation des expressions logiques, conversion des fonctions

conjonction $$\dfrac{a : A \qquad b : B}{p(a, b) = a : A}\ \wedge C \qquad \dfrac{a : A \qquad b : B}{q(a, b) = b : B}\ \wedge C$$

disjonction $$\dfrac{a : A \qquad \begin{array}{c}[x : A]\\ \vdots\\ d : C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[y : B]\\ \vdots\\ e : C\end{array}}{\vee E\,(i(a), (x)d, (y)e) = d(a/x) : C}\ \vee C \qquad \dfrac{b : B \qquad \begin{array}{c}[x : A]\\ \vdots\\ d : C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[y : B]\\ \vdots\\ e : C\end{array}}{\vee E\,(j(b), (x)d, (y)e) = e(b/y) : C}\ \vee C$$

implication $$\dfrac{\begin{array}{c}[x : A]\\ \vdots\\ b : B\end{array}}{(\lambda x.b)a = b(a/x) : B}\ \rightarrow C$$

quantificateur universel $$\dfrac{\begin{array}{c}[x : A]\\ \vdots\\ b(x) : B(x)\end{array} \qquad a : A}{(\lambda x.b(x))a = b(a) : B(a)}\ \forall C$$

quantificateur particulier $$\dfrac{a : A \qquad b : B(a)}{p(a, b) = a : A}\ \exists C \qquad \dfrac{a : A \qquad b : B(a)}{q(a, b) = b : B(a)}\ \exists C$$

Exemple de preuve en théorie des types constructive, pour la logique intuitionniste

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{3.}{z : (\exists x : A)\, B(x)} \qquad \dfrac{\overset{1.}{x : A} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{4.}{f : (\forall x : A)\, (B(x) \rightarrow C(x))} \quad \overset{1.}{x : A}}{fx : B(x) \rightarrow C(x)}\;\forall E \qquad \overset{2.}{y : B(x)}}{(fx)y : C(x)}\;{\rightarrow}E}{(x, y)\, (x, (fx)y) : (\exists x : A)\, C(x)}\;\exists I}{\dfrac{E(z, (x, y)\, (x, (fx)y) : (\exists x : A)\, C(x)}{\lambda z.\, E(z, (x, y)\, (x; (fx)y)) : (\exists x : A)\, B(x) \rightarrow (\exists x : A)\, C(x)}\;{\rightarrow}I,\ 3.}\;\exists E,\ 1.,\ 2.}{\lambda f \lambda z.\, E(z, (x, y)\, (x, (fx)y)) : (\forall x : A)\, (B(x) \rightarrow C(x)) \rightarrow ((\exists x : A)\, B(x) \rightarrow (\exists x : A)\, C(x))}\;{\rightarrow}I,\ 4.
$$

La grammaire type-théorétique constructive, en comparaison avec la grammaire catégorielle basée sur le calcul de Lambek, est enrichie de tout un niveau de langage, celui du modèle de calcul effectif (mathématique) du calcul lambda, qui permet d'expliciter la base interprétative fonctionnelle du formalisme logique dans une même notation. Le calcul lambda représente le fondement de la signification du formalisme logique, comme objet dynamique de ce formalisme. Le formalisme logique tâche de représenter, depuis son propre niveau de langage, le niveau purement opératoire du calcul fonctionnel à travers les règles d'inférence, mais puisque celles-ci prennent part à un processus finalisé, visant l'interprétant final, elles restent surdéterminées par rapport à leur objet. Le calcul lambda, dont l'interprétance est indéterminée, représente plus adéquatement cette base calculatoire du formalisme logique. L'expression séparée et en seconde intention, dans le signe complexe de la notation, de l'aspect que prend le signe dans sa relation à l'objet dynamique et de l'aspect qu'il prend dans son rapport à l'interprétant dynamique, c'est-à-dire respectivement les règles du calcul lambda et les règles d'inférence en déduction naturelle, parachève l'expression du système de logique à travers sa notation.

Ainsi, la notation de la grammaire type-théorétique constructive permet d'exprimer de nouveaux aspects du signe qui ne sont pas représentés dans la notation standard, linéaire ou arborescente, des formalismes étudiés jusqu'à présent. Elle permet d'exprimer plus clairement les différents aspects du signe qui ressortent lorsque l'on tient compte de la finalité du processus de signification et la distinction conséquente entre les différents types d'objet (immédiat, dynamique) et d'interprétant (immédiat, dynamique, final). Le signe est la notation même comme système d'écriture, essentiellement conventionnel. L'objet immédiat est le raisonnement mathématique tel que représenté par le signe, une sorte de substance formelle, immatérielle bien que particulière (apparentée au λεκτόν des Stoïciens, un incorporel dicible). L'objet dynamique est le calcul comme acte, c'est-à-dire le raisonnement comme acte pur « mental » ou formel précédant la signification, qui constitue le fondement de la signification. Il est représenté en seconde intention par les règles du modèle de calcul mathématique effectif (ici le calcul lambda). L'interprétant immédiat est, pour sa part, la forme particulière de l'écriture consignée dans le signe de la notation (ce que désigne communément la notion de signification). L'interprétant dynamique est l'inférence logique en tant qu'acte, prenant part à la constitution des termes, propositions et arguments comme éléments signifants. L'interprétant final est une idée générale qui constitue la finalité du processus. Selon le niveau grammatical, il s'agit soit de la simple signifiance d'un terme, de la vérité d'une proposition ou de la validité d'un argument.

L'aspect que prend le signe en soi dans la notation de la grammaire type-théorétique constructive est un légisigne, la notation en tant que convention, dont l'instance est un sinsigne, notre idée actuelle de la convention. L'aspect qu'il prend dans sa relation à l'objet immédiat, c'est-à-dire l'objet tel que représenté, est la notation du terme lambda. Dans sa relation à l'objet dynamique, le signe est un ensemble de symboles comme éléments de la grammaire spéculative, parmi lesquels les symboles de termes lambda simples, en particulier, n'ont pas d'interprétation déterminée. Par exemple, le x, dans $\lambda x.(Fx)x$, est un symbole dont l'aspect interprétatif (sème, phème, delôme) reste indéterminé. Le processus de calcul global est pour sa part exprimé en seconde intention par la suite des règles du calcul lambda appliquées lors de la démonstration. Dans sa relation à l'interprétant immédiat, l'aspect que prend le signe en première intention est un élément de la grammaire particulière effective de la logique, la notation, telle que définie dans le système de logique intuitionniste en déduction naturelle. C'est, autrement dit, la notation du type de la grammaire type-théorétique constructive. Le signe dans sa relation à l'interprétant dynamique est l'écriture comme acte, représentée en seconde intention par les règles d'inférence du système de logique. Le signe dans sa relation à l'interprétant final est un sème, un phème ou un delôme, catégories de la grammaire spéculative de la sémiotique, une grammaire « universelle » ou, plus exactement, générale et normative, par opposition à la grammaire particulière de l'interprétant immédiat, plutôt descriptive.

Le signe d'attribution du type, les deux points, et le trait de déduction marquent la légitimité des signes de la notation dans leur relation à l'interprétant final, qui est qualifié d'hypothétique, de catégorique ou d'assertorique selon le moment du raisonnement, dans le cours de l'argumentation des prémisses à la conclusion. On remarque que c'est par l'acte que le calcul coïncide ou même s'identifie avec l'inférence logique, dans la grammaire type-théorétique constructive, et que les deux types d'acte sont représentés par le même signe, soit le trait de déduction ou de calcul, en tant que sinsigne indexical sémique (tandis qu'il représente la règle qui régit l'acte en seconde intention en tant que légisigne symbolique onomatique). Le trait représente à la fois la déduction catégorique et un acte du calcul effectif, qui soutiennent par leur correspondance l'assertion de la thèse comme conclusion de l'argument, sur la base des prémisses et axiomes.[150]

---

[150] « There are an Immediate Interpretant and a Dynamical Interpretant corresponding closely to the Immediate and Dynamical Objects. But there is, in addition, a Final Interpretant, to which no particular kind of object corresponds. » (MS 295 : 28, c. 1906, pages rejetées par l'éditeur du *Monist*, des « Prolegomena to an Apology for Pragmaticism », 1906 ; passage cité par Pietarinen (2006 : 34)). Nous n'irons pas jusqu'à suggérer que la sémiotique peircéenne *préfigure* la correspondance de Curry-Howard et la théorie des types constructive, mais force est de constater que la sémiotique de Peirce peut être interprétée de manière à donner un certain fondement grammatical à ces développements récents de la logique, la sémiotique étant dûment basée sur des principes logiques, phanéroscopiques et mathématiques. La ligne d'identité des graphes existentiels nous rappelle par ailleurs, au niveau de l'analyse de la proposition (la coïncidence entre sujets logiques, Deuxièmes), le rôle constructif de la correspondance entre le calcul et la critique, au niveau du trait de calcul ou de déduction.

Le schéma général de la grammaire type-théorétique constructive peut être repris comme suit :

$$\begin{array}{ccc} & \text{mathématiques (calcul)} \qquad \text{(langue) logique} & \\ & \mathbf{S^\frown Oi}\ \ \text{terme} \qquad\qquad \text{type}\ \ \mathbf{S^\frown Ii} & \\ \mathbf{S^\frown Od}\ \ \text{règle de calcul} \downarrow & \dfrac{\text{preuve} \ : \ \text{proposition}}{\text{preuve} \ : \ \text{proposition}} & \downarrow \text{règle d'inférence}\ \ \mathbf{S^\frown Id} \\ & \mathbf{S^\frown If} & \end{array}$$

Rappelons que le signe en soi est la notation dans son ensemble, comme convention. Il est clair que la correspondance entre l'objet (acte de la pensée) et l'interprétant (formalisme logique) se fait par le biais du signe, qui explicite le point de vue de la signification sur la réalité, à travers son articulation globale.[151]

Pour conclure cette section, nous remarquons qu'en se basant sur la correspondance dite de Curry-Howard, la théorie des types constructive de Martin-Löf permet de remonter à un niveau de la réflexion logique antérieur à la distinction entre syntaxe et sémantique. Le formalisme de la théorie des types constructive — à la fois mathématique et logique, mais centré sur le point de vue logique : seule la proposition du formalisme logique est un légisigne de première intention — exprime des distinctions qui précèdent la spécification de la grammaire et de la signification. Il est donc plus apte à représenter la grammaire pure de la sémiotique, qui précède également la grammaire particulière effective de la notation, ce qui nous intéresse ici. La théorie des types constructive peut servir de cadre à l'expression de la sémiotique, qui fournit les principes normatifs des logiques particulières et de leurs notations. Son apport est avant tout grammatical et méthodeutique, car elle ne sert pas en soi à critiquer le calcul de la logique (classique, intuitionniste, linéaire) ou à développer de

---

[151] Ainsi, nous pouvons comprendre la notion de manifestation de Dummett (1978, 1991) comme désignant l'explicitation des différents aspects phénoménaux de la logique et celle d'harmonie comme faisant référence à la correspondance entre ces aspects phénoménaux, en particulier l'acte et la représentation. D'autre part, la distinction de Došen (1989) entre l'analyse minimale et la définition explicite d'une expression trouve un parallèle dans la correspondance entre modèle de calcul effectif et formalisme logique. L'analyse minimale est une définition du point de vue mathématique, calculatoire, tandis que la définition explicite ajoute un sens proprement logique à l'analyse. Dans la perspective sémiotique, toutefois, l'expression du calcul reste signifiante, son interprétance étant seulement indéterminée. Cette distinction est motivée, aussi, dans la grammaire pure et non dans un métalangage.

nouveaux calculs, ni même de nouveaux types généraux de notation (linéaire, arborescente, graphique), mais propose un formalisme plus expressif, qui permet, comparé aux autres formalismes de la logique standard, de représenter des aspects additionnels de la logique, ceux qui ressortent lorsque l'on considère la logique comme un processus d'inférence finalisé et articulé dans la perspective du signe.

3.2.2. Logique dialogique et ludique

Nous examinerons pour terminer deux formalismes qui tiennent compte plus spécifiquement de l'aspect dialectique de la méthode en logique, soit la logique dialogique et la ludique. Ces formalismes tâchent d'exprimer, avec divers degrés de succès et d'une manière plus consciente pour le second que pour le premier, la polarité qui est à la base du mouvement dialectique de la méthodeutique, mais qui se retrouve aussi au niveau des règles d'inférence, voire des éléments grammaticaux de la logique. Nous atteignons ici le point culminant de la recherche d'expressivité en logique, qui s'avère être un projet inachevé et qui mériterait d'être poursuivi.

Logique dialogique

La logique dialogique permet d'explorer, dans le développement d'un dialogue, plusieurs conséquences possibles d'une assertion, en suivant les ramifications de l'inférence. Elle formalise ainsi le processus que la doctrine du pragmatisme préconise de suivre afin de préciser la signification d'un énoncé, ultimement pour confirmer la validité logique des énoncés à travers leur déductibilité, et constitue en cela une sorte de logique intrinsèque au pragmatisme. Cette logique pourrait permettre aussi de formaliser la méthode d'interprétation des graphes existentiels, qui est elle-même dialogique, explicitement en ce qui concerne la quantification. Elle contribue déjà à la prise de conscience de l'aspect processuel du raisonnement étudié par la logique et des distinctions phénoménales sous-jacentes, entre l'inférence comme acte et les règles de l'inférence comme représentation guidant le processus d'inférence. Le retour analytique ou correctif de la réflexion sur l'inférence en tant qu'acte constitue de la sorte un aspect pratique de la précision des concepts logiques, allant dans le sens du pragmatisme.

La logique dialogique, suivant les travaux de Paul Lorenzen et son école (Lorenzen (1960, 1961), Felscher (1986), Rückert (2001), Rahman & Keiff (2004), Fontaine & Redmond (2008)), se présente comme une méthode générale à la fois de critique logique et d'expression logique, en ce qu'elle permet de décider de la validité d'arguments et de confirmer la vérité des propositions qui y sont énoncées, tout en combinant dans l'expression des fragments de plusieurs sortes de logique (intuitionniste, modale, libre, etc.). Par ses réalisations, la logique dialogique soutient donc déjà un certain pluralisme des logiques particulières. Mais en plus d'être une technique de décision pluraliste de la logique, la logique dialogique développe aussi une certaine conception pragmatiste de la logique, du point de vue méthodeutique, puisque qu'elle permet de suivre dans un même dialogue différentes conséquences possibles d'une thèse assertée. Certains instigateurs de la logique dialogique (Rahman & Keiff (2004), Fontaine & Redmond (2008)) soulignent par ailleurs l'aspect pragmatique de leur logique en faisant référence au développement épistémique des agents cognitifs et non simplement idéalisés, qui jouent le rôle de participants au dialogue. Mais il s'agit alors d'une conception proprement métaphysique de la pragmatique qui dépasse le cadre sémiotique du pragmatisme.[152] La stratégie des agents idéalisés de la logique dialogique est, pour sa part, fonctionnelle et non cognitive, apparaissant dans le cadre de jeux formels et non matériels. Nous tâcherons donc de faire ressortir l'aspect pragmatique de la dialogique sous son versant formel.

La logique dialogique distingue d'abord un certain *vocabulaire*, ce qui constitue pour une part le contexte pragmatique de cette logique. Seuls les signes qui font partie de ce vocabulaire sont pertinents au contexte de la logique dialogique et peuvent servir à son élaboration ultérieure (l'élément pragmatique n'est pas tant dans le vocabulaire, que dans la pertinence par rapport au contexte langagier). Le contexte comprend déjà un certain degré de complexité, car les signes primitifs (propositions ou fonctions et arguments, connecteurs, quantificateurs, modalités, symboles de force dialogique, parenthèses) se combinent en formules complexes qui, elles, subissent des transformations suivant les différentes opérations logiques qui leur sont appliquées dans le processus de décision, le dialogue. Les seuls éléments grammaticaux et de notation additionnels, par rapport à la logique standard, en plus de la forme tabulaire avec les indices nécessaires à l'annotation du déroulement du dialogue (indices désignant les joueurs : proposant *P* et opposant *O*, indices numériques désignant le coup joué et le coup sur lequel porte le coup joué), sont les symboles de force dialogique : ? pour l'attaque (par *P* ou *O*) et ! pour l'assertion de la thèse (par *P*), la défense (par *P* ou *O*) ou la concession (par *O*). Dans la pratique, seule l'attaque est notée explicitement avec son marqueur ?, la défense étant laissée pour implicite dans la notation et comprise dans la seule inscription d'une formule au cours du dialogue.

[152] Il en est de même pour la sémantique des jeux dans la lignée de Hintikka (Hintikka (1973), Hintikka & Sandu (1997), Pietarinen (2006)), qui constitue avant tout une réflexion métalogique sur le lien entre syntaxe et sémantique plutôt qu'un approfondissement de la logique pure, le jeu « sémantique » *G* se jouant sur une phrase *S* de la langue objet *L* et le modèle *M* (donnant une interprétation des éléments non logiques) de cette langue : *G*(*S*; *M*). Il n'y a pas non plus de « marqueurs de force » (pour l'attaque et la défense) dans le vocabulaire de la logique et sa notation, l'aspect dialogique étant explicité au niveau du métalangage seulement, par les règles du jeu pour les différents opérateurs. Hintikka fait toutefois la différence entre la sémantique des jeux pour les langues naturelles et celle pour les langues formelles, dont les formalismes logiques. La sémantique des jeux définit aussi la vérité comme l'existence d'une stratégie gagnante pour le joueur proposant la thèse (appelé *Myself* dans Hintikka & Sandu (1997)).

Différentes *règles* sont ensuite distinguées, qui permettent de *transformer* les expressions logiques dans le processus de décision. En tant qu'elles sont présupposées par le dialogue, ces règles font implicitement partie du contexte pragmatique, mais en tant qu'elles sont appliquées lors de la critique des expressions logiques, dans le déroulement du dialogue, elles font plutôt partie de l'élément d'usage propre à l'aspect pragmatique de la logique. Ces règles permettent ou interdisent certains types de coups dans le cours du dialogue. La logique dialogique en distingue deux principales sortes : les règles de *particules*, qui déterminent la façon dont on peut attaquer ou défendre une formule spécifique, et les règles *structurelles*, qui déterminent la façon dont le dialogue se déroule en général, c'est-à-dire en vue d'atteindre sa fin, soit une décision quant à la validité ou non de l'expression logique critiquée, sa vérité dans le cadre d'un argument.

Les règles de particules pour la logique propositionnelle sont les suivantes[153], d'après Fontaine & Redmond (2008) (X et Y sont des variables désignant respectivement les joueurs P et O) :

	conjonction		disjonction	implication	négation
assertion	X-!-$A \wedge B$		X-!-$A \vee B$	X-!-$A \rightarrow B$	X-!-$\neg A$
attaque	Y-?-$\wedge_g$	Y-?-$\wedge_d$	Y-?-$\vee$	Y-!-A	Y-!-A
défense	X-!-A	X-!-B	X-!-A ou X-!-B	X-!-B	aucune

Les règles structurelles, pour leur part, donnent les conditions du début de la partie, de la clôture d'une ronde (classique ou intuitionniste), de la ramification du dialogue, de l'usage formel des formules atomiques et du gain d'une partie. Nous ne les détaillons pas puisqu'elles ne sont généralement pas présentées d'une manière tout à fait formelle, par des schémas d'inférence qui se retrouveraient dans la langue objet,

[153] Nous laissons de côté le traitement dialogique de la quantification et des modalités, qui n'ajoute rien à notre discussion de la notation logique.

mais d'une manière plus informelle, en prose et dans le métalangage, ce qui n'ajoute rien à la notation du formalisme des dialogues mêmes. Notons toutefois qu'une partie qui est à la fois terminée, parce que l'opposant ne peut plus continuer en avançant un nouveau coup, et close, parce que le proposant a utilisé une formule concédée par l'opposant, établissant ainsi un fondement commun dans l'argumentation, est une partie gagnée par le proposant. Une partie terminée, mais ouverte, c'est-à-dire sans commun accord sur les prémisses ultimes, est une partie gagnée par l'opposant.

Un troisième élément du dialogue, qui est aussi distingué par les dialogiciens, mais demeure insuffisamment traité, est l'idée d'une *stratégie gagnante*, qui se rapporte à l'élément pragmatique de la finalité. Un participant, proposant une thèse à critiquer, possède une stratégie gagnante lorsqu'il connaît (en tant qu'agent cognitif ou idéalisé) au moins une façon de prouver sa thèse peu importe les critiques que peut lui adresser son opposant. Une partie importante du projet de développement de l'aspect pragmatique de la logique dialogique consiste à trouver un moyen d'élaborer des stratégies gagnantes (Rahman & Keiff (2004)).

Voici deux exemples de dialogue qui illustrent le principe pragmatiste de la multiplication des conséquences, le premier n'ayant pas de ramification et le deuxième en comportant une avec deux conséquences possibles (tirés de Fontaine & Redmond (2008)) :

Cas 1 : $D((p\wedge q)\rightarrow p)$ (dialogue pour la thèse $(p\wedge q)\rightarrow p$)

	O			P		
				$(p\wedge q)\rightarrow p$	0	
1	$p\wedge q$	0		p	4	× en LI
3	p		1	$?\text{-}\wedge_g$	2	

Le dialogue peut être décrit de manière plus détaillée dans le métalangage de la manière suivante :

0. <-, P-!-$(p\wedge q)\rightarrow p$> P asserte la thèse.
1. <?, O-!-$(p\wedge q)$> O attaque en concédant l'antécédent de l'implication.
2. <?, P-?-$\wedge_g$> P contre-attaque en attaquant le conjoint de gauche.
3. <!, O-!-p> O se défend en concédant p.
4. <!, P-!-p> P défend l'attaque du coup 1 en affirmant p concédé par O.

Le proposant gagne, car la partie est terminée et close. La partie est terminée, parce que l'opposant ne peut continuer en avançant de nouveaux coups, et close, parce qu'une même formule apparaît deux fois, concédée par l'opposant, puis affirmée par le proposant (constituant ainsi un fondement commun dans l'argumentation, un axiome).

Cas 2 : $D[((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p]$ (Loi de Peirce)

	O			P	
				$((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$	0
1	$(p\rightarrow q)\rightarrow p$	0			
			1	$p\rightarrow q$	2

➥ Ramification 1

	O			P		
				$((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$	0	
1	$(p\rightarrow q)\rightarrow p$	0		p	4	× en LC
			1	$p\rightarrow q$	2	
3	p	2				

➥ Ramification 2

	O			*P*	
				$((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$	0
1	$(p\rightarrow q)\rightarrow p$	0		p	4	× en LC
3	p		1	$p\rightarrow q$	2

Dans cette façon de représenter les ramifications, l'arborescence et son aspect diagrammatique sont en partie perdus, puisque les deux ramifications ne se suivent pas dans un même tableau. Le tableau simple, sans ramifications, est d'ailleurs lui-même imparfaitement arborescent, puisque l'ordre du dialogue dans la suite des coups ne suit pas nécessairement l'ordre de l'argument dans la suite des rondes, c'est-à-dire les couples d'attaque et de défense. Felscher (1986) utilise une notation qui permet de représenter les ramifications dans un même tableau, les coups étant notés à la verticale l'un à la suite de l'autre, suivant l'alternance entre proposant et opposant, mais alors l'aspect dialogique de cette alternance est exprimé moins clairement par la notation, de même que sa correspondance avec le calcul des séquents.

La méthode dialogique, dans l'approche constructiviste issue des travaux de Lorenzen, reprend en effet le formalisme en notation arborescente des séquents, mais renversé (dans le style des tableaux analytiques de Beth (1955, 1959)), avec la thèse à démontrer inscrite en haut de l'arbre, comme point de départ du dialogue. Le proposant fournit ainsi la conclusion de la dérivation et les conséquents des séquents, tandis que l'opposant fournit les antécédents des séquents et concède des formules atomiques, qui peuvent servir d'antécédents aux axiomes lorsque reprises aux conséquents par le proposant.

Le formalisme dialogique marque aussi une certaine polarité de la logique, dans l'alternance entre attaque et défense, ce qui constitue, suivant l'ordre des catégories particulières, un aspect distinct de la grammaire exprimé moins clairement ou pas du tout dans les autres formalismes logiques présentés jusque maintenant. Cette polarité de la logique est une qualité de l'acte d'inférence (positif, négatif), qui caractérise le raisonnement à ses différents niveaux grammaticaux : lieux négatif et positif (en ludique), règles gauche et droite (en méthode des séquents) ou d'élimination et introduction (en déduction naturelle), analyse et synthèse (dans le processus d'inférence global). La défense est un acte local allant dans le sens de la synthèse, vers la conclusion de l'argument (la thèse assertée), tandis que l'attaque est un acte local allant dans le sens de l'analyse, vers les prémisses de l'argument (les axiomes).

Seulement, la polarité dans la méthode dialogique demeure imparfaitement formalisée et donc non suffisamment explicitée, car métaphorique. Tout d'abord, comme nous l'avons déjà noté, les règles structurelles de la logique dialogique sont formulées de manière plutôt informelle, en prose, et non avec des schémas d'inférence, comme pour les règles structurelles du formalisme des séquents. Mais aussi, le développement métaphorique de la logique dialogique soulève des problèmes d'ordres épistémologique et méthodeutique. En effet, dans une métaphore telle celle de la logique dialogique, le principe commun des formes mises en relation n'est pas explicité. Plutôt que de dire que la logique est comme un dialogue (ou un jeu), en présupposant que logique et dialogue suivent des principes communs, il vaudrait mieux directement exprimer le principe de la logique sous-entendu implicitement dans la métaphore et représenter ainsi une forme logique structurée d'après des principes mathématiques explicités, propres également à la structure du dialogue. La construction du formalisme logique doit se faire par le haut, à partir des structures mathématiques, plutôt que par le bas, par un phénomène matériel dont le sens est plus restreint que celui de la logique, la structuration du phénomène matériel étant en fait une spécification de la logique. Le développement métaphorique de la logique dialogique, s'il permet de faire ressortir de nouvelles intuitions (telle celle de la polarité) dans un premier temps, finit malgré cela par sembler *ad hoc*, non justifié par des principes clairement définis (ainsi, dans la formulation des règles structurelles). Le risque est alors grand que le formalisme verse dans la tératologie méthodeutique, plutôt que de donner une juste appréciation du pluralisme logique.

Ludique

La ludique de Jean-Yves Girard (2001, 2006-2007) est un formalisme pour la logique qui se base explicitement sur l'idée de polarité. L'auteur tâche de formaliser cette idée dans son système en se basant sur les algèbres d'opérateurs, ainsi que sur la correspondance de Curry-Howard[154]. Cette dernière est moins clairement représentée dans la notation, mais motive la ludique dans ses principes d'une manière semblable à la théorie des types contructive de Martin-Löf, en cela que le formalisme comprend à la fois un aspect du modèle de calcul effectif et un autre du formalisme proprement logique. Par contraste, la logique linéaire, bien qu'elle soit aussi basée sur Curry-Howard, n'est elle-même qu'un formalisme logique auquel doit être adjoint un modèle de calcul effectif qui lui donne son sens constructif ou, plus exactement, interactif et non seulement fonctionnel.

La polarité, en ludique, est explicitée dès le premier niveau grammatical de la logique, c'est-à-dire à partir des formules, qui sont réinterprétées comme des lieux, éléments explicitement polarisés.[155] On la retrouve aussi aux autres niveaux grammaticaux et à travers toute la logique, dans son calcul et sa méthode, de même que dans son interprétation sur une base phénoménale (le quantique) et mathématique

---

[154] Girard (2006-2007 : 115) considère la correspondance comme étant « complète, totale », car « il s'agit vraiment de *structures* isomorphes ». Mais on peut nuancer ce propos avec l'explication de Hindley (1997 : 79-85), qui remarque que le mappage des éléments des structures n'est pas un-à-un, donc ne soutient pas une inversion stricte. D'un point de vue sémiotique, le sens de la correspondance est univoque, puisque la logique est en plus signifiante, d'une manière définie dans l'interprétance.

[155] C'est en quelque sorte le versant subjectif de notre souverain à deux faces, au niveau de l'âme individuelle ou du microcosme. « Subjectif, mais pas subjectiviste », dit bien Girard (2006-2007 : 541).

(le modèle de calcul). La base calculatoire effective, plutôt que d'être simplement fonctionnelle comme le calcul lambda, est exprimée dans les *desseins*, un fondement mathématique interactif qui tire ses principes des algèbres d'opérateurs. Le formalisme logique se trouve pour sa part exprimé dans les *comportements*, définis comme des ensembles de desseins, qui suivent les principes de la base calculatoire tout en y ajoutant une perspective propre à la logique, son sens critique. L'exploration des fondements mathématiques de cette nouvelle logique polarisée et expressément perspectiviste est le sujet d'une théorie également développée par Girard et appelée la « géométrie de l'interaction » (cf. ses derniers développements dans Girard (2011)).

Malgré cela, au niveau notationnel, les avancées de la ludique ne sont pas jusqu'à maintenant suffisamment signifiantes pour nous intéresser. Le changement de polarité est noté par le fléchage, l'adjonction d'une flèche (↓ positive, ↑ négative) à un dessein ou un comportement, dans la suite linéaire des symboles, qui marque une opération positive ou négative sur la polarité de l'élément. Cette flèche est elle-même un symbole, qui indique de manière indirecte le changement de qualité, sans que cette qualité (positive, négative) soit elle-même notée explicitement. Bien que la théorie distingue la polarité des formes, la notation ne représente pas les termes ultimes de cette polarité par un signe adéquat, qui serait une sorte d'icône, l'image, marque de la valeur positive ou négative comme qualité, élément local du raisonnement. La polarité sert de principe au calcul ludique (dit « hyperséquentialisé ») de la logique linéaire et des règles de calcul conséquentes sont dès lors formulées (Girard (2006-2007), Lecomte (2011)), mais elle n'est pour le reste explicitée dans l'expression du calcul que par la situation des énoncés dans la trame de preuve (en prémisse ou en conclusion) et le séquent (à l'antécédent ou au conséquent), l'usage de la négation et l'interprétation des symboles de lieu. Seule la diagrammaticité des séquents et des arbres de la dérivation exprime un certain sens de l'inférence, la différence de qualité comme marque de seconde intention de la polarité, en tant que cette dernière est déterminée par la finalité du processus d'inférence.

Conclusion : les limites expressives de la notation

Il est temps de conclure et nous résumerons donc maintenant les points saillants de cette thèse, ses avancées et les limites de la réflexion qui y est développée. Nous avons tout d'abord défini la notation logique comme une grammaire particulière effective de la logique. Nous avons présenté pour cela, dans la grammaire, une définition générale du signe, les principaux types de signe qui en découlent et l'émergence éventuelle de la notation, selon l'approche sémiotique de Peirce. Dans cette perspective, nous avons critiqué quelques notations usuelles parmi les plus importantes de la logique, ainsi que le chef d'œuvre peircéen du système des graphes existentiels. Nous avons de la sorte attribué des types de signe aux éléments de ces notations, afin de juger de leur adéquation comme expressions du raisonnement logique, ce en quoi consiste leur critique dans une première approche.

Il en ressort notamment que tout élément de notation est un légisigne. De même, la distinction entre sujet et prédicat n'est pas essentiellement de niveau interprétatif, confusion qui tient à un défaut de la notation, puisque le prédicat en logique pure est une icône sémique et le sujet un index sémique, la distinction étant relative au rapport entre le signe et son objet, tandis que dans les logiques symboliques particulières, il s'agit respectivement d'un symbole rhématique et d'un symbole onomatique, la distinction dépendant de l'interprétation du symbolisme. Un autre point signifiant de l'analyse est que les opérateurs sont tous des légisignes symboliques sémiques (onomatiques) de seconde intention et expriment des catégories particulières de la métalogique dans la composition des éléments grammaticaux, le seul signe de première intention en logique propositionnelle étant la proposition simple comme symbole phémique. Le diagramme de la notation s'avère être l'épine dorsale de la logique effective, autour de laquelle s'articule le reste de la grammaire de la logique. L'expression de la diagrammaticité en première intention, dans le système des graphes existentiels, est le point culminant du développement de la notation du point de vue de la grammaire pure. Les graphes existentiels représentent ainsi la proposition, le prédicat et les sujets logiques en première intention, par des signes adéquats, convenant à la représentation de l'analyse logique ultime, c'est-à-dire respectivement le symbole phémique du graphe, le diagramme sémique de la ligne d'identité et les indices sémiques des points marqués de la ligne d'identité et des crochets de lieux. Par ailleurs, le terme du calcul lambda est un symbole dont l'interprétance reste indéterminée, ce qui marque son aspect mathématique et calculatoire, alors que dans un formalisme logique tous les éléments prennent un aspect bien défini dans leur rapport à l'interprétant, du moins de façon générale dans leur typologie, comme sèmes, phèmes ou delômes.

D'un point de vue phanéroscopique, l'expressivité d'une notation perspicace se réalise aussi par l'explicitation des différents aspects phénoménaux entrant en jeu dans l'expression du raisonnement nécessaire de la logique. La distinction des différents niveaux grammaticaux du terme, de la proposition et de l'argument fait ressortir le lien, plus spécialement, entre les niveaux structurel et opératoire des séquents, qui s'exprime à travers le théorème de déduction et les règles d'inférence de la critique. Ces dernières régissent à partir d'expressions d'un niveau grammatical supérieur les opérations d'un niveau inférieur, tel que dans l'introduction des opérateurs propositionnels suivant leurs règles d'inférence opératoires. On effectue ici, en plus de la distinction entre les différents niveaux grammaticaux, une autre distinction d'ordre phénoménal entre les règles et les actes d'inférence. C'est toutefois par le développement de la méthode, de même que par les distinctions grammaticales conséquentes entre les différents types d'objets et d'interprétants, faisant ressortir l'aspect processuel et finalisé du raisonnement, que l'expressivité de la notation d'un point de vue phénoménal est éventuellement parachevée.

Dans une perspective plus proprement critique, nous avons distingué deux critères pour déterminer la cohérence des systèmes de logique, soit un critère catégoriel, jusqu'alors plutôt implicite en logique contemporaine, selon lequel les principes de la logique doivent respecter un certain ordre des catégories, parmi les éléments grammaticaux et les règles d'inférence, et un critère algorithmique, explicité dans le calcul des séquents par le théorème principal de Gentzen, selon lequel le calcul logique doit vérifier l'élimination des coupures. L'approfondissement de ces idées nécessiterait une étude plus poussée du lien entre la grammaire et la critique logiques, de même qu'entre le calcul mathématique et la critique logique, dont nous avons rencontré le problème du sens univoque ou non, dans l'exposé de la grammaire des logiques sous-structurelles chez Restall et Došen, ainsi que dans la correspondance, dite de Curry-Howard, entre modèle de calcul effectif et formalisme logique. La distinction entre les critères catégoriel et algorithmique est donc une piste pour la continuation de la réflexion, par le développement de l'approche sémiotique de la logique à son niveau proprement critique et, éventuellement, méthodeutique. Les travaux de Girard (1987b, 2006-2007) suggèrent à ce sujet que la théorie des catégories de Peirce pourrait être formalisée plus avant par la confrontation avec la théorie de la complexité mathématique et logique, laquelle demande encore à être dûment conceptualisée.

D'autre part, d'un point de vue méthodeutique, nous avons fait remarquer l'importance de la représentation dans le formalisme de tous les aspects phénoménaux et grammaticaux de la notation logique, ce qui est le mieux accompli pour l'instant dans la grammaire inspirée de la théorie des types constructive de Martin-Löf, elle-même basée sur la correspondance entre modèle de calcul effectif et formalisme logique. Cette avancée technique constitue en quelque sorte une réalisation formelle de la doctrine du pragmatisme comme principe général de la méthode en logique. Il reste cependant à exprimer de manière plus adéquate la finalité de la logique comme processus d'inférence et sa dialectique conséquente, basée sur la polarité du formalisme, ce que la logique dialogique et la ludique thématisent et formalisent déjà jusqu'à un certain point. La ludique en particulier, dans sa formulation en style des séquents, permet de représenter plus adéquatement le cours de la dérivation que la grammaire type-théorétique constructive, formulée en style de la déduction naturelle. Elle exprime de manière expresse la polarité aux différents niveaux de la grammaire en exploitant l'aspect le plus fondamental de la notation logique, qui est sa diagrammaticité, en tant que représentation de l'articulation interne du raisonnement et reproduction simultanée de l'acte sous-jacent, à la fois strictement opératoire comme calcul et déjà signifiant comme critique.

D'ailleurs, nous atteignons peut-être avec le formalisme de la ludique le seuil minimal de la signifiance dans la notation, la diagrammaticité comme limite ultime ou axe central de l'expression du raisonnement nécessaire des mathématiques et de la logique. L'iconicité antérieure de l'image serait alors une sorte d'élément neutre de la notation dans le sens de son analyse, tandis que l'excès du symbolisme, d'une complexité qui dépasserait les limites de l'effectivité, serait celui dans le sens de la synthèse. Au-delà de ces limites, les représentations s'avèrent non signifiantes pour la logique et relèvent d'autres types d'activité intellectuelle (poésie, discours religieux, etc.), qui ont aussi leur valeur propre et leur rôle à jouer dans l'odyssée de la raison humaine. Finalement, la critique en philosophie, en tant que cette dernière constitue une science heuristique et — il est vrai — une pensée agonistique, c'est un peu comme le travail du sapeur, qui construit ses propres voies de passage tout en sabotant les lignes ennemies, le moment positif étant le plus important. Nous espérons avoir contribué à cette lignée qui est la nôtre, qui se poursuit depuis des temps immémoriaux et dont la visée reste toujours le principe de la raison pure.

Appendice : tableau récapitulatif de l'attribution des types

Notation algébrique linéaire de la logique classique en méthode axiomatique

Notation standard

Logique des propositions inanalysées :			
propositions	$p, q, r, \ldots$	légisignes symboliques phémiques	1°
opérateurs ou connecteurs	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \ldots$	lég. symboliques onomatiques	2°
signes de ponctuation	(,), [,], {, }	lég. indexicaux sémiques	2°
Logique des propositions analysées :			
prédicats	$F, G, H, \ldots$	lég. symboliques rhématiques	2°
variables d'individu	$\ldots, x, y, z,$	lég. symboliques onomatiques	2°
constantes	$a, b, c, \ldots$	lég. symboliques onomatiques	2°
quantificateurs (opérateurs)	$\exists, \forall$	lég. symboliques onomatiques	2°
modalités d'être	$\Diamond, \Box$	lég. symboliques onomatiques	2°
Autres éléments de notation communs :			
expressions neutres	$A, B, C, \ldots$	lég. symboliques phémiques	2°
indices de la dérivation		lég. indexicaux sémiques	2°
définitions		lég. symboliques phémiques	2°
règles de formation des ebf.		lég. symboliques phémiques	2°
règles d'inférence		lég. symboliques phémiques	2°
axiomes		lég. symboliques phémiques	2°

Notation polonaise

proposition complexe		lég. symbolique phémique (aspect diagrammatique important)	2°

Notation algébrique arborescente en méthode des séquents

Structure interne du séquent (niveau propositionnel) :

formules	$A, B, C, \ldots$	lég. symboliques phémiques	1°
suites finies de formules	$\Gamma, \Lambda, \ldots, \Delta, \Pi, \ldots$	lég. symboliques phémiques	2°
absurdité	$\perp$	lég. symbolique onomatique	2°
tourniquet	$\vdash$	lég. symbolique onomatique	2°
séquents	$\Gamma \vdash A$	lég. symboliques phémiques	2°
exponentielles	!, ?	lég. symboliques onomatiques	2°

Structure externe des séquents, figure de dérivation (niveau argumentatif) :

éléments de la ponctuation	,	lég. symboliques onomatiques	2°
tourniquet	$\vdash$	lég. symbolique onomatique	2°
trait de déduction	———	lég. symbolique onomatique	2°

Notation algébrique arborescente en déduction naturelle

trait de déduction	———	lég. symbolique onomatique	2°

Notation des graphes existentiels

feuille d'assertion	lég. symbolique phémique	1°
graphe (élémentaire)	lég. symbolique phémique	1°
symbole de lieu (*spot*)	lég. symbolique onomatique	2°
coupure ou volute	lég. indexicaux sémiques	2°
ligne d'identité	lég. iconique sémique	1°
point marqué (*dot*)/crochet (*hook*, *peg* = *point*)	lég. indexicaux sémiques	1°

Notation du calcul lambda

variable d'objet simple	lég. symbolique (interprétance indéterminée)	
variable générale de termes lambda	lég. symbolique phémique	2°
opérateur d'abstraction (λ)	lég. symbolique onomatique	2°
opérateur d'application	lég. symbolique onomatique	2°

Notation de la théorie des types constructive

symbole d'attribution du type	: ou $\in$	lég. symbolique onomatique	2°
trait de déduction ou de calcul	———	lég. symbolique onomatique	2°
		(sinsigne indexical sémique	1°)

Bibliographie

Ackermann, Wilhelm. 1956. « Begründung einer Strengen Implikation ». *Journal of Symbolic Logic*, 21, p. 113-128.

Ajdukiewicz, Kazimierz. 1935. « Die syntaktische Konnexität ». *Studia Philosophica*, 1, p. 1-27.

Allwein, Gerard & Jon Barwise (éds). 1996. *Logical Reasoning with Diagrams*. Oxford : Oxford University Press, 270 p.

Anderson, Alan Ross & Nuel D. Belnap. 1975. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. 1. Princeton : Princeton University Press, 542 p.

Aristote. 2007. *Catégories. Sur l'interprétation*. Trad. et prés. par M. Crubellier, C. Dalimier et P. Pellegrin. Paris : Flammarion, 370 p.

Bailly, Anatole. 1901. *Abrégé du dictionnaire grec-français*. Paris : Hachette, 1012 p.

Bailly, Francis & Giuseppe Longo. 2006. *Mathématiques et sciences de la nature*. Paris : Hermann, 284 p.

Baldwin, James Mark (éd.). 1960 (1925). *Dictionary of Philosophy and Psychology*, 4 vol. Gloucester (Mass.) : P. Smith.

Barendregt, Hendrik Pieter. 1984. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Amsterdam : North Holland, 621 p.

Bar-Hillel, Yehoshua. 1964. *Language and Information*. Reading (Mass.) : Addison-Wesley, 388 p.

Belnap, Nuel. 1962. « Tonk, Plonk and Plink ». *Analysis*, vol. 22, n° 6, p. 130-134.

Beth, Evert Willem. 1955. « Semantic Entailment and Formal Derivability ». *Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letterkunde*, vol 18, n° 13, p. 309-42.

Beth, Evert Willem. 1959 (1968). *The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Science*. Amsterdam : North Holland, 741 p.

Bocheński, Józef Maria. 1948. *Précis de logique mathématique*. Bussum : F. G. Kroonder, 90 p.

Boole, George. 1854 (1958). *An Investigation of the Laws of Thought*. New York : Dover, 424 p.

Bourbaki, Nicolas. 1954 (1960). *Éléments de mathématique : Première partie, Livre I, Théorie des ensembles*. Paris : Hermann, 137 p.

Brady, Geraldine. 2000. *From Peirce to Skolem: A Neglected Chapter in the History of Logic*. Amsterdam : Elsevier Science, 480 p.

Brandom, Robert. 1983. « Asserting ». *Noûs*, vol. 17, n° 4, p. 637-50.

Brandom, Robert. 1994. *Making It Explicit*. Cambridge (Mass.) : Harvard University Press, 741 p.

Brandom Robert. 2008. *Between Saying and Doing: Towards an Analytic Pragmatism*. Oxford : Oxford University Press, 251 p.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1923. « Intuitionistische splitsing van mathematische grondbegrippen ». *Verslagen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 32, p. 877-80.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1925. « Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe ». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* , 33, p. 251-56.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1975. *Collected Works*, vol. 1. Amsterdam : North Holland.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1981 (2011). *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism.* Éd. par Dirk van Dalen. Cambridge (Angl.) : Cambridge University Press, 122 p.

Burch, Robert W. 1991. *A Peircean Reduction Thesis: The Foundations of Topological Logic.* Lubbock : Texas Tech University Press, 152 p.

Cajori, Florian. 1928-1929. *A History of Mathematical Notations*, 2 vol. Londres : Open Court.

Carnap, Rudolf. 1934 (1937). *The Logical Syntax of Language*. Trad. A. Smeaton. New York : Harcourt, Brace & Co., 352 p.

Cayley, Arthur.1857. « On the Theory of the Analytical Forms Called Trees ». *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4th series, vol. 13, p. 172-6.

Chomsky, Noam. 1957. *Syntactic Structures*. La Haye : Mouton, 117 p.

Church, Alonzo. 1932. « A Set of Postulates for the Foundation of Logic ». *Annals of Mathematics*, vol. 33, n° 2, p. 346-66.

Church, Alonzo. 1936a. « An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory ». *American Journal of Mathematics*, vol. 58, n° 2, p. 345-63.

Church, Alonzo. 1936b. « A Note on the Entscheidungsproblem ». *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 1, n° 1, p. 40-1.

Church, Alonzo. 1940. « A Formulation of the Simple Theory of Types ». *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 5, n° 2, p. 56-68.

Church, Alonzo. 1941. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Princeton : Princeton University Press, 82 p.

Church, Alonzo. 1956. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton : Princeton University Press, 378 p.

Clifford, William K. 1878. « On the Classification of Loci ». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 169, p. 663-81.

Coquand, Thierry & Gérard Huet. 1988. « The Calculus of Constructions ». *Information and Computation*, vol. 76, p. 95-120.

Coulmas, Florian. 2003. *Writing Systems: An Introduction to their Linguistic Analysis.* Cambridge (Angl.) : Cambridge University Press, 270 p.

Curry, Haskell Brooks. 1930. « Grundlagen der kombinatorischen Logik ». *American Journal of Mathematics*, vol. 52, n° 3, p. 509-36 ; n° 4, p. 789-834.

Curry, Haskell Brooks. 1963 (1977). *Foundations of Mathematical Logic*. New York : Dover, 408 p.

Curry, Haskell Brooks & Robert Feys. 1958 (1968). *Combinatory Logic*, vol. 1. Amsterdam : North-Holland, 416 p.

van Dalen, Dirk. 1980 (1983). *Logic and Structure*. Berlin : Springer, 207 p.

van Dalen, Dirk. 2013. *L.E.J. Brouwer: Topologist, Intuitionist, Philosopher*. Londres : Springer, 875 p.

Dau, Frithjof. 2006. *Mathematical Logic with Diagrams: Based on the Existential Graphs of Peirce*. Texte inédit, disponible sur la toile à l'adresse suivante : <www.dr-dau.net/ eg_readings.shtml> [accédé le 7 janvier 2010].

DeFrancis, John. 1989. *Visible Speech: The Diverse Oneness of Writing Systems*. Honolulu : University of Hawai'i Press, 330 p.

De Tienne, André. 2000. « Quand l'apparence (se) fait signe ». *Recherches sémiotiques / Semiotic Inquiry*, 20, p. 95-144.

Desargues, Girard. 1639. *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*. Paris : 30 p.

Dipert, Randall. 1995. « Peirce's underestimated place in the history of logic ». Dans Kenneth Laine Ketner (éd.). *Peirce and Contemporary Thought: Philosophical Inquiries*. New York : Fordham University Press, p. 32-58.

Dipert, Randall. 2004. « Peirce's Deductive Logic: Its Development, Influence, and Philosophical Significance ». Dans Cheryl Misak (éd.). *The Cambridge Companion to Peirce*. Cambridge (Angl.) : Cambridge University Press, p. 287-324.

Došen, Kosta. 1985. « Sequent-Systems for Modal Logics ». *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 50, n° 1, p. 149-168.

Došen, Kosta. 1989. « Logical Constants as Punctuation Marks ». *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 30, n° 3, p. 362-381.

Došen, Kosta & Peter Schroeder-Heister. 1993. *Substructural Logics*. Oxford : Oxford University Press, 386 p.

Dumézil, Georges. 1992. *Mythes et Dieux des Indo-Européens*. Paris : Flammarion, 321 p.

Dummett, Michael. 1977 (2000). *Elements of Intuitionism*. Oxford : Oxford University Press, 331 p.

Dummett, Michael. 1978. *Truth and Other Enigmas*. Cambridge (Mass.) : Harvard University Press, 470 p.

Dummett, Michael. 1991. *The Logical Basis of Metaphysics*. Cambridge (Mass.) : Cambridge University Press, 355 p.

Ehrhard, Thomas et al. (éd.). 2004. *Linear Logic in Computer Science*. Cambridge (Angl.) : Cambridge University Press, 392 p.

Felscher, Walter. 1986. « Dialogues as a Foundation for Intuitionistic Logic ». Dans Dov Gabbay & Franz Guenthner. *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 3. Dordrecht : D. Reidel, p. 341-372.

Feys, Robert. 1937. « Les logiques nouvelles des modalités ». *Revue néo-scolastique de philosophie*, 56, p. 517-553.

Feys, Robert & Frederic Brenton Fitch. 1969. *Dictionary of Symbols of Mathematical Logic*. Amsterdam : North Holland, 175 p.

Fisch, Max. 1986. *Peirce, Semeiotic, and Pragmatism*. Bloomington : Indiana University Press, 464 p.

Fitch, Frederic Brenton. 1952. *Symbolic Logic: An Introduction*. New York : The Ronald Press Company, 238 p.

Frege, Gottlob. 1879 (1964). *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Hildesheim : Georg Olms, 124 p.

Frege, Gottlob. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau : Wilhelm Kuebner, 119 p.

Frege, Gottlob. 1893, 1903 (1962). *Grundgesetze der Arithmetik*. Hildesheim : Georg Olms.

Frege, Gottlob. 1962 (2008). *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien*. Gœttingue : Vandenhoek & Ruprecht, 84 p.

Frege, Gottlob. 1966 (2003). *Logische Untersuchungen*. Gœttingue : Vandenhoeck & Ruprecht, 146 p.

Frege, Gottlob. 1969. *Nachgelassene Schriften*. Hambourg : Felix Meiner, 322 p.

Frege, Gottlob. 1969. *Les fondements de l'arithmétique*. Trad. C. Imbert. Paris : Vrin, 235 p.

Frege, Gottlob. 1971. *Écrits logiques et philosophiques*. Trad. C. Imbert. Paris : Seuil, 234 p.

Frege, Gottlob. 1994. *Écrits posthumes*. Nîmes : Jacqueline Chamblon, 348 p.

Frege, Gottlob. 1999. *Idéographie*. Trad. C. Besson. Paris : Vrin, 213 p.

Gabbay, Dov & John Woods (éds). 2004. *Handbook of the History of Logic. The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, vol. 3. Amsterdam : Elsevier, 780 p.

Galatos, Nikolaos, Peter Jipsen, Tomasz Kowalski & Hiroakira Ono. 2007. *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*. Amsterdam : Elsevier, 532 p.

Gardies, Jean-Louis. 1975. *Esquisse d'une grammaire pure*. Paris : J. Vrin, 299 p.

Gardies, Jean-Louis. 1979. *Essai sur la logique des modalités*. Paris : Presses universitaires de France, 239 p.

Gentzen, Gerhard. 1934-1935. « Untersuchungen über das logische Schließen ». *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, p. 176-210 et 405-431. Trad. française et notes de Robert Feys et Jean Ladrière. 1955. *Recherches sur la déduction logique*. Paris : Presses universitaires de France, 170 p. Aussi dans Gentzen (1969 : 68-131).

Gentzen, Gerhard. 1936. « Die Widerspruchfreiheit der reinen Zahlentheorie ». *Mathematische Annalen*, vol. 112, p. 493–565. Aussi dans Gentzen (1969 : 132-213).

Gentzen, Gerhard. 1969. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Éd. par M. E. Szabo. Amsterdam : North Holland, 338 p.

Gergonne, Joseph Diaz. 1816-17. « Essai de dialectique rationnelle ». *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 7, p. 189-228.

Girard, Jean-Yves. 1987a. « Linear Logic ». *Theoretical Computer Science*, vol. 50, n°1, p. 1-102.

Girard, Jean-Yves. 1987b. *Proof Theory and Logical Complexity*. Naples : Bibliopolis, 504 p.

Girard, Jean-Yves. 1991. « A New Constructive Logic: Classical Logic ». *Mathematical Structures in Computer Science*, 1, p. 255-296.

Girard, Jean-Yves. 1993. « On the Unity of Logic ». *Annals of Pure and Applied Logic*, 59, p. 201-217.

Girard, Jean-Yves. 1995. « Linear Logic: Its Syntax and Semantics ». Dans Girard et al. (1995 : 1-42).

Girard, Jean-Yves. 2001. « Locus Solum: From the Rules of Logic to the Logic of Rules ». *Mathematical Structures in Computer Science*, 11, p. 301-506.

Girard, Jean-Yves. 2006-2007. *Le Point Aveugle. Cours de logique*, 2 tomes. Paris : Hermann.

Girard, Jean-Yves. 2011. « Geometry of Interaction V: Logic in the Hyperfinite Factor ». *Theoretical Computer Science*, vol. 412, p. 1860-1883.

Girard, Jean-Yves, Yves Lafont & Laurent Regnier (éd.). 1995. *Advances in Linear Logic*. Coll. « London Mathematical Society Lectures Notes Series ». Cambridge (Angl.) : Cambridge University Press, 389 p.

Girard, Jean-Yves, Paul Taylor & Yves Lafont. 1989. *Proofs and Types*. Cambridge (Angl.) : Cambridge University Press, 175 p.

Glivenko, Valerii. 1928. « Sur la logique de M. Brouwer ». *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, 5, p. 225-28.

Glivenko, Valerii. 1929. « Sur quelques points de la logique de M. Brouwer ». *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, 15, p. 183-88.

Godart-Wendling, Béatrice (dir. publ.). 2002. *Les grammaires catégorielles*. Numéro thématique de *Langages*, 36e année, n° 148.

Gödel, Kurt. 1933. « Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie ». *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, vol. 4, p. 34–38.

Greimas, Algirdas Julien. 1966. *Sémantique structurale*. Paris : Librairie Larousse, 262 p.

Havenel, Jérôme. 2008. « Peirce's Clarifications of Continuity ». *Transactions of the Charles Sanders Peirce Society*, vol. 44, no. 1, p. 86-133.

van Heijenoort, Jean (éd.). 1967a. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*. Cambridge (Mass.) : Harvard University Press, 660 p.

van Heijenoort, Jean. 1967b. « Logic as Calculus and Logic as Language ». *Synthese*, vol. 17, n° 3, p. 324-330.

Herbrand, Jacques. 1968. *Écrits logiques*. Paris : Presses universitaires de France, 243 p.

Hertz, Paul. 1929. « Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme ». *Mathematische Annalen*, vol. 101, p. 457-514.

Heyting, Arend. 1930a. « Sur la logique intuitionniste ». *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, 16, p. 957-63.

Heyting, Arend. 1930b. « Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik ». *Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Klasse*, p. 42-65.

Heyting, Arend. 1956 (1971). *Intuitionism: An Introduction*. Amsterdam : North Holland, 145 p.

Hilbert, David. 1922. « Die logischen Grundlagen der Mathematik ». *Mathematische Annalen*, 88, p. 151-165.

Hilbert, David & Wilhelm Ackermann. 1928 (1950). *Principles of Mathematical Logic*. Trad. anglaise de L. Hammond, G. Leckie et F. Steinhardt. New York : Chelsea, 1972 p.

Hilbert, David & Paul Bernays. 1934 (1968). *Grundlagen der Mathematik*, 2 vol. Berlin : Springer. Traduit en français par François Gaillard & Marcel Guillaume. 2001. *Fondements des mathématiques*, 2 vol. Paris : L'Harmattan.

Hilpinen, Risto. 1982. « On Peirce's Theory of the Proposition: Peirce as a Precursor of Game-Theoretical Semantics ». *The Monist*, vol. 65, p. 182-88.

Hilpinen, Risto. 2004. « Peirce's Logic », dans Gabbay et Woods (2004 : 611-58).

Hindley, J. Roger. 1997. *Basic Simple Type Theory*. Cambridge : Cambridge University Press, 186 p.

Hindley, J. Roger & Jonathan P. Seldin. 2008. *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction*. Cambridge : Cambridge University Press, 360 p.

Hintikka, Jaakko. 1973. *Logic, Language Games and Information*. Oxford : Clarendon Press, 291 p.

Hintikka, Jaakko & Gabriel Sandu. 1997. « Game-Theoretical Semantics ». Dans Johan van Benthem et Alice ter Meulen (éds). *Handbook of logic and Language*. Amsterdam : Elsevier, p. 361-410.

Hogan, Edward R. 2008. *Of the Human Heart: A Biography of Benjamin Peirce*. Bethlehem : Lehigh University Press, 429 p.

Houser, Nathan, Don Roberts & James Van Evra (éds). 1997. *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. Bloomington : Indiana University Press, 653 p.

Howard, William A. 1980. « The Formulae-as-Types Notion of Construction ». Dans Jonathan P. Seldin & J. Roger Hindley (éds). *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus, and Formalism*. Londres : Toronto Academic Press, p. 479-490.

Hughes, George E. & Max J. Cresswell. 1968. *An Introduction to Modal Logic*. Londres : Methuen, 388 p.

Husserl, Edmund. 1900, 1901 (2009). *Logische Untersuchungen*. Hambourg : Felix Meiner, 811 p.

Johansson, Ingebrigt. 1937. « Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus ». *Compositio Mathematica*, tome 4, p. 119-36.

Joinet, Jean-Baptiste & Samuel Tronçon. 2009. *Ouvrir la logique au monde*. Paris : Hermann, 348 p.

Kent, Beverley. 1987. *Charles S. Peirce: Logic and the Classification of the Sciences*. Kingston, Montréal : McGill-Queen's University Press, 258 p.

Ketner, Kenneth Laine (éd.). 1995. *Peirce and Contemporary Thought: Philosophical Inquiries*. New York : Fordham University Press, 444 p.

Kleene, Stephen Cole. 1952 (1971). *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam : North-Holland, 550 p.

Kleene, Stephen Cole. 1967 (2002). *Mathematical Logic*. New York : Dover, 416 p.

Kneale, William & Martha Kneale. 1962. *The Development of Logic*. Oxford : Oxford University Press, 783 p.

Kolmogorov, Andrey. 1925. « On the Principle of the Excluded Middle ». Dans van Heijenoort (1969 : 414–37).

Kotarbiński, Tadeusz. 1964. *Leçons sur l'histoire de la logique*. Paris : Presses universitaires

de France, 388 p.
Krief, Hervé. 2001. *Les graphes existentiels*. Paris : L'Harmattan, 135 p.
Krivine, Jean-Louis. 1990. *Lambda-calcul : types et modèles*. Paris : Masson, 176 p.
Lambek, Joachim. 1958. « The Mathematics of Sentence Structure ». *American Mathematical Monthly*, vol. 65, n° 3, p. 154-170.
Lambek, Joachim. 1961. « On the Calculus of Syntactic Types », dans *Structures of Language and its Mathematical Aspects*. Providence : American Mathematical Society, p. 166-178, 264-265.
Largeault, Jean. 1992. *L'intuitionisme*. Paris : Presses universitaires de France, 125 p.
Leblanc, Hugues & William A. Wisdom. 1993. *Deductive Logic*. Englewood Cliffs (N.J.) : Prentice-Hall, 436 p.
Lecomte, Alain. 2011. *Meaning, Logic and Ludics*. Londres : Imperial College Press, 369 p.
Lewis, Clarence Irving. 1918 (1960). *A Survey of Symbolic Logic*. New York : Dover, 327 p.
Lewis, Clarence Irving & Cooper Harold Langford. 1932 (1959). *Symbolic Logic*. New York : Dover, 518 p.
Liszka, James Jakob. 1996. *A General Introduction to the Semeiotic of Charles Sanders Peirce*. Bloomington & Indianapolis : Indiana University Press, 151 p.
Lorenzen, Paul. 1955 (1969). *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Berlin : Springer, 298 p.
Lorenzen, Paul. 1960. « Logik und Agon ». Dans *Atti del XII Congresso Internazionale di Filosofia, 1958*, vol. 4. Florence : Sansoni, p. 187-194.
Lorenzen, Paul. 1961. « Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium ». Dans *Infinistic Methods*. New York : Pergamon Press, p. 193-200.
Łukasiewicz, Jan. 1925. « Démonstration de la compatibilité des axiomes de la théorie de la déduction ». *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, vol. 3, p. 149.
Łukasiewicz, Jan. 1929 (1963). *Elements of Mathematical Logic*. New York : MacMillan, 124 p.
Martin-Löf, Per. 1970. *Notes on Constructive Mathematics*. Stockholm : Almqvist & Wiksell, 109 p.
Martin-Löf, Per. 1984. *Intuitionistic Type Theory*. Naples : Bibliopolis, 91 p.
McCall, Storrs (éd.). 1967. *Polish Logic 1920-1939*. Oxford : Oxford University Press, 406 p.
McDowell, John. 1994. *Mind and World*. Cambridge (Mass.) : Harvard University Press, 224 p.
Misak, Cheryl (éd.). 2004. *The Cambridge Companion to Peirce*. Cambridge (Angl.) : Cambridge University Press, 362 p.
Montague, Richard. 1974. *Formal Philosophy*. New Haven : Yale University Press, 369 p.
Moore, Matthew E. 2010. *New Essays on Peirce's Mathematical Philosophy*. LaSalle, Ill. : Open Court, 402 p.
Morris, Charles. 1938. *Foundations of the Theory of Signs*. Chicago : University of Chicago Press, 59 p.
Negri, Sara & Jan von Plato. 2001. *Structural Proof Theory*. Cambridge : Cambridge University Press, 257 p.
von Neumann, John. 1927. « Zur Hilbertschen Beiweistheorie ». *Mathematische Zeitschrift*, vol. 26, p. 1-46.
Nicod, Jean. 1917. « A Reduction in the number of the Primitive Propositions of Logic ». *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 19, p. 32-41.
Okada, Mitsuhiro. 2004. « Linear Logic and Intuitionistic Logic ». *Revue internationale de philosophie*, vol. 4, n° 230, p. 449-81.
Paoli, Francesco. 2002. *Substructural Logics: A Primer*. Berlin : Springer, 304 p.
Peano, Giuseppe. 1889. *Arithmetices principia novo methodo exposita*. Turin : Bocca, 20 p. Dans Peano (1973 : 101-34).

Peano, Giuseppe. 1897. « Studii di logica mathematica ». *Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino*, 32, p. 565-83. Dans Peano (1973 : 190-205).

Peano, Giuseppe. 1973. *Selected Works of Giuseppe Peano*. Toronto : University of Toronto Press, 249 p.

Peckhaus, Volker. 2004. « Calculus ratiocinator versus characteristica universalis? The two traditions in logic, revisited ». *History and Philosophy of Logic*, vol. 25, n° 1, p. 3-14.

Peirce, Charles Sanders. 1960 (1931-5, 1958). *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, 4e éd. Vols 1-6 éd. par Charles Hartshorne & Paul Weiss ; vols 7-8 éd. par Arthur W. Burks. Cambridge (Mass.) : The Belknap Press of Harvard University Press. [abbr. CP]

Peirce, Charles Sanders. 1967 (1857-1914). *The Papers of Charles S. Peirce: Microfilm Edition*. The Harvard University Library Microreproduction Service, Houghton Library, Cambridge (Mass.), rouleaux 1-30. [MS, L]

Peirce, Charles Sanders. 1977. *Semiotics and Significs: The Correspondence between Charles S. Peirce and Victoria Lady Welby*. Éd. par Charles S. Hardwick. Bloomington : Indiana University Press, 201 p. [S&S]

Peirce, Charles Sanders. 1982-2009. *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*, 6 vols. Éd. par le Peirce Edition Project. Bloomington : Indiana University Press. [W]

Peirce, Charles Sanders. 1992, 1998. *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings*. Vol. 1 éd. par Nathan Houser et Christian Klœsel ; vol. 2 éd. par le Peirce Edition Project. Bloomington & Indianapolis : Indiana University Press. [EP]

Peirce, Charles Sanders. Banque de données du Projet d'édition Peirce (UQAM) : <www.pep.uqam.ca> [accédé pour la dernière fois en juillet 2013].

Pietarinen, Ahti-Veikko. 2006. *Signs of Logic: Peircean Themes on the Philosophy of Language, Games, and Communication*. Dordrecht : Springer, 496 p.

Platon. 2002. *La République*. Trad. G. Leroux. Paris : Flammarion, 801 p.

Prawitz, Dag. 1965. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Stockholm : Almqvist & Wiksell, 113 p.

Priest, Graham. 2007. « How the Particular Quantifier Became Existentially Loaded Behind our Backs ». *Soochow Journal of Philosophical Studies*, n° 16, p. 197-213.

Prior, Arthur. 1955 (1962). *Formal Logic*. Oxford : Clarendon Press, 341 p.

Prior, Arthur. 1956 (1979). *Time and Modality*. Wesport (Conn.) : Greenwood Press, 148 p.

Prior, Arthur. 1960. « The Runabout Inference Ticket ». *Analysis*, vol. 21, n° 2, p. 38-39.

Putnam, Hilary. 1990. *Realism with a Human Face*. Cambridge (Mass.) : Harvard University Press, 422 p.

Quine, Willard Van Orman. 1941. *Elementary Logic*. New York : Harper & Row, 130 p.

Quine, Willard Van Orman. 1950 (1982). *Methods of Logic*. Cambridge (Mass.) : Harvard University Press, 333 p.

Rahman, Shahid & Laurent Keiff. 2005. « How to be a Dialogician ». Dans D. Vanderveken (dir.), *Logic, Thought and Action*. Dordrecht : Springer, p. 359-408.

Ranta, Aarne. 1994. *Type-Theoretical Grammar*. Oxford : Clarendon Press, 226 p.

Restall, Greg. 2000. *An Introduction to Substructural Logics*. Londres : Routledge, 381 p.

Rivenc, François & Gabriel Sandu. 2009. *Entre logique et langage*. Paris : J. Vrin, 171 p.

Roberts, Don. 1973. *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*. La Haye : Mouton, 168 p.

Rogers, Henry. 2005. *Writing Systems: A Linguistic Approach*. Oxford : Blackwell, 322 p.

Rosier-Catach, Irène. 2009. « Sur le verbe substantif, la prédication et la consignification ». Dans Suzanne Husson (éd.). 2009. *Interpréter le* De Interpretatione. Paris : Vrin, p. 97-131.

Rosser, J. Barkley. 1935. « A Mathematical Logic without Variables, I ». *The Annals of Mathematics*, Second Series, vol. 36, p. 127-150.

Rosser, J. Barkley. 1953 (1978). *Logic for Mathematicians*. Mineola, N.Y. : Dover, 574 p.

Rückert, Helge. 2002. « Why Dialogical Logic? ». Dans H. Wansing (dir.). *Essays on Non-Classical Logic*. Singapore : World Scientific, p. 165-185.

Russell, Bertrand. 1903 (1938). *The Principles of Mathematics*. Londres : Norton, 534 p.

Russell, Bertrand. 1908. « Mathematical Logic as Based on the Theory of Types ». *American Journal of Mathematics*, 30, p. 222-262.

de Saussure, Ferdinand. 1916 (1995). *Cours de linguistique générale*. Paris : Payot, 520 p.

de Saussure, Ferdinand. 2002. *Écrits de linguistique générale*. Paris : Gallimard, 353 p.

Savan, David. 1988. *An Introduction to C. S. Peirce's Full System of Semeiotic*. Toronto : Toronto Semiotic Circle, 74 p.

Schröder, Ernst. 1890-1905. *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 3 vol. Leipzig : Teubner.

Schroeder-Heister, Peter. 2008. « Lorenzen's Operative Justification of Intuitionistic Logic ». Dans Mark van Atten et al. *One Hundred Years of Intuinionism (1907-2007)*. Basel : Birkhäuser, p. 214-240.

Sellars, Wilfrid. 1967 (1992). *Science and Metaphysics*. Atascadero : Ridgeview, 259 p.

Shin, Sun-Joo. 2002. *The Iconic Logic of Peirce's Graphs*. Cambridge (Mass.) : MIT Press, 208 p.

Short, Thomas Lloyd. 2007. *Peirce's Theory of Signs*. Cambridge (Angl.) : Cambridge University Press, 374 p.

Smullyan, Raymond. 1968. *First-Order Logic*. Berlin : Springer, 158 p.

Sobociński, Bolesław. 1953. « Note on a Modal System of Feys-von Wright ». *The Journal of Computing Systems*, 1, p. 171-8.

Sørensen, Morten Heine & Pawel Urzyczyn. 2006. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*. Amsterdam : Elsevier, 456 p.

Sowa, John. 2011. « Peirce's Tutorial on Existential Graphs ». *Semiotica*, 186, 1/4, p. 347-394.

Takeuti, Gaisi. 1975. *Proof Theory*. Amsterdam : North Holland, 372 p.

Tanaka-Ishii, Kumiko. 2010. *Semiotics of Programming*. Cambridge : Cambridge University Press, 217 p.

Tanaka-Ishii, Kumiko & Yuichiro Ishii. 2008. « Sign and the Lambda-Term ». *Semiotica*, 169, 1/4, p. 197-220.

Tarski, Alfred. 1933 (1935). « Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen ». *Studia Philosophica*, vol. I, p. 261-405.

Tarski, Alfred. 1956. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford : Clarendon Press, 471 p.

Thibaud, Pierre. 1975. *La logique de Charles Sanders Peirce : de l'algèbre aux graphes*. Aix-en-Provence : Université de Provence, 184 p.

Trendelenburg, Adolf. 1846. *Historische Beiträge zur Philosophie*. Berlin : G. Bethge.

Troelstra, Anne Sjerp & Dirk van Dalen. 1988. *Constructivism in Mathematics: An Introduction*, 2 vol. Amsterdam : North Holland.

Troelstra, Anne Sjerp & Helmut Schwichtenberg. 2000 (1996). *Basic Proof Theory*. Cambridge : Cambridge University Press, 417 p.

Vernant, Denis. 2001 (2006). *Introduction à la logique standard*. Paris : Flammarion, 447 p.

Whitehead, Alfred North & Bertrand Russell. 1910, 1912, 1913. *Principia mathematica*, 3 vol. Cambridge (Angl.) : Cambridge University Press.

Wittgenstein, Ludwig. 1922. *Tractatus logico-philosophicus*. Trad. de l'allemand par C. K. Ogden. Londres : Routledge & Kegan Paul, 207 p.

Zalamea, Fernando. 2012. *Peirce's Logic of Continuity: A Conceptual and Mathematical Approach*. Boston : Docent Press, 192 p.

Zeman, Jay. 1964. *The Graphical Logic of C. S. Peirce*. Thèse doctorale de l'Université de Chicago.

Zeman, Jay. 1997. « Peirce and Philo ». Dans Houser et al. (1997 : 402-17).