

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

TROIS ESSAIS SUR LA VOLATILITÉ BOURSIÈRE ET SES VARIATIONS  
ASYMÉTRIQUES

THÈSE  
PRÉSENTÉE  
EN EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN ADMINISTRATION

PAR  
MOHAMED BEN BADER

MARS 2012

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de recherche, Monsieur Maher Kooli, pour son soutien, sa disponibilité et ses conseils durant la rédaction de cette thèse.

J'aimerais aussi remercier Madame Geneviève Gauthier et Monsieur Alexandre Roch pour leurs commentaires et leurs suggestions qui m'ont permis d'améliorer le contenu de ce travail. Je suis aussi reconnaissant à Monsieur Guy Charest pour son aide fortement appréciée tout au long de mon cheminement doctoral.

Enfin, mes remerciements s'adressent également à l'institut de finance mathématique (IFM2), à la Caisse de dépôt et placement du Québec et à la Fondation de l'Université du Québec à Montréal (UQAM) pour leur appui financier.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX . . . . .	iv
LISTE DES FIGURES . . . . .	vi
RÉSUMÉ . . . . .	viii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
LE POINT SUR LA VOLATILITÉ BOURSIÈRE . . . . .	7
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Le concept de la volatilité . . . . .	8
1.2.1 La volatilité en tant que mesure de risque . . . . .	9
1.2.2 Composantes de la volatilité . . . . .	11
1.2.3 Volatilité boursière et marché des options . . . . .	14
1.3 Modèles d'estimation de la volatilité . . . . .	15
1.3.1 Modèles autorégessifs conditionnellement hétéroscédastiques . . . . .	16
1.3.2 Modèles de volatilité stochastique . . . . .	22
1.3.3 Modèles de volatilité implicite . . . . .	29
1.4 Conclusion . . . . .	33
CHAPITRE II	
L'ASYMÉTRIE DE LA VOLATILITÉ . . . . .	37
2.1 Introduction . . . . .	37
2.2 Revue des écrits . . . . .	40
2.3 Élaboration du modèle à volatilité asymétrique (MVAS) . . . . .	43
2.3.1 Dynamique du rendement . . . . .	43
2.3.2 Dynamique de la volatilité asymétrique . . . . .	45
2.4 Méthodologie d'estimation: le filtrage particulière . . . . .	46
2.4.1 Principes généraux du filtrage particulière . . . . .	48
2.4.2 Application du filtrage particulière au MVAS . . . . .	54

2.4.3	Estimation des paramètres . . . . .	57
2.5	Tests empiriques et résultats . . . . .	58
2.5.1	Échantillon retenu et données utilisées . . . . .	59
2.5.2	Méthodologie . . . . .	59
2.5.3	Estimation des paramètres . . . . .	65
2.5.4	Volatilité estimée, analyse de performance et pouvoir prédictif . . . . .	69
2.5.5	Asymétrie de la volatilité: analyse des résultats . . . . .	76
2.5.6	Test de robustesse . . . . .	78
2.6	Conclusion . . . . .	81
2.7	Annexes . . . . .	82
2.7.1	Dérivation de la dynamique du rendement . . . . .	82
2.7.2	Dérivation de la dynamique de la volatilité . . . . .	83
2.7.3	Application du filtrage particulière au modèle de Heston (1993) . . . . .	84
CHAPITRE III		
	LA PRIME DE RISQUE DE LA VOLATILITÉ ASYMÉTRIQUE . . . . .	100
3.1	Introduction . . . . .	100
3.2	Revue des écrits . . . . .	102
3.3	Méthodologie d'estimation . . . . .	106
3.4	Tests empiriques et résultats . . . . .	110
3.4.1	Échantillon retenu et données utilisées . . . . .	111
3.4.2	Comparaison entre la volatilité implicite dans les prix d'options sur S&P100 et la volatilité instantanée issue de MVAS . . . . .	115
3.4.3	Calcul du rendement moyen des portefeuilles de réplcation . . . . .	119
3.4.4	Variation de la prime de risque de la volatilité asymétrique . . . . .	126
3.4.5	Test de robustesse . . . . .	133
3.5	Conclusion . . . . .	137
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	141

## LISTE DES TABLEAUX

Table	Page
1.1 Procédure d'estimation de l'indice de volatilité américain (VIX) . . . . .	36
2.1 Quelques critères de rééchantillonnage . . . . .	53
2.2 Importance de l'échantillon retenu dans l'indice SP500 . . . . .	60
2.3 Statistiques descriptives liées aux portefeuilles construits (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003) . . . . .	63
2.4 Statistiques descriptives liées aux portefeuilles construits (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008) . . . . .	64
2.5 Estimateurs optimaux des paramètres des modèles retenus . . . . .	66
2.6 Statistiques descriptives liées aux estimés de la volatilité (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003) . . . . .	71
2.7 Statistiques descriptives liées aux estimés de la volatilité (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008) . . . . .	75
2.8 Test de robustesse: statistiques descriptives et estimateurs optimaux des paramètres (juillet 1990 - décembre 2008) . . . . .	79
2.9 Test de robustesse: statistiques descriptives liés aux estimés de la volatil- ité (juillet 1990 - décembre 2008) . . . . .	80
3.1 Principales études récentes sur la prime de risque de la volatilité . . . . .	103

3.2	Statistiques descriptives liées aux options retenues sur SP100 (2 janvier 2006 - 18 décembre 2010) . . . . .	114
3.3	Volatilités implicites moyennes dans les prix d'options sur SP100 (2 janvier 2006 - 18 décembre 2010) . . . . .	120
3.4	Rendements moyens des portefeuilles de répliation formés avec des options d'achat sur SP100 . . . . .	124
3.5	Rendements moyens des portefeuilles de répliation formés avec des options de vente sur SP100 . . . . .	125
3.6	Rendements moyens des portefeuilles de répliation formés avec des options au jeu sur SP100 selon la volatilité . . . . .	127
3.7	Rendements moyens des portefeuilles de répliation formés avec des options d'achat hors jeu et très hors jeu sur SP100 selon la volatilité . . .	128
3.8	Rendements moyens des portefeuilles de répliation formés avec des options d'achat en jeu et très en jeu sur SP100 selon la volatilité . . . . .	129
3.9	Rendements moyens des portefeuilles de répliation formés avec des options de vente en jeu et très en jeu sur SP100 selon la volatilité . . . . .	130
3.10	Rendements moyens des portefeuilles de répliation formés avec des options de vente hors jeu et très hors jeu sur SP100 selon la volatilité . . .	131
3.11	Régression des rendements des portefeuilles de répliation formés avec des options d'achat sur la volatilité, l'échéance de l'option et le rendement du support . . . . .	135
3.12	Régression des rendements des portefeuilles de répliation formés avec des options de vente sur la volatilité, l'échéance de l'option et le rendement du support . . . . .	136

## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Évolution du volume de transaction des actions versus options sur le marché américain (1930-2005) . . . . .	35
2.1 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier du portefeuille global (2 janvier 1996-31 décembre 2003) . . . .	88
2.2 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des industries et des matériaux (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003) . . . . .	89
2.3 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des technologies et des biens de base (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003) . . . . .	90
2.4 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains de l'énergie et de la santé (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003) . . . . .	91
2.5 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des biens durables et des services publics (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003) . .	92
2.6 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier du portefeuille global (2 janvier 2004-31 décembre 2008) . . . .	93
2.7 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des industries et des matériaux (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008) . . . . .	94

2.8	Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des technologies et des biens de base (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008) . . . . .	95
2.9	Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains de l'énergie et de la santé (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008) . . . . .	96
2.10	Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des biens durables et des services publics (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008) . .	97
2.11	Test de robustesse: évolution de la volatilité, du rendement observé et du levier financier (juillet 1990-décembre 2000) . . . . .	98
2.12	Test de robustesse: évolution de la volatilité, du rendement observé et du levier financier (janvier 2001-décembre 2008) . . . . .	99
3.1	Évolution du rendement observé et celle du levier financier du S&P100 (3 janvier 2006 - 18 décembre 2010) . . . . .	138
3.2	Évolution de la volatilité implicite dans les prix d'options d'achat sur S&P100 versus la volatilité instantanée du S&P100 ( 3 janvier 2006 - 18 décembre 2010) . . . . .	139
3.3	Évolution de la volatilité implicite dans les prix d'options de vente sur S&P100 versus la volatilité instantanée du S&P100 ( 3 janvier 2006 - 18 décembre 2010) . . . . .	140

## RÉSUMÉ

La volatilité boursière joue un rôle central en finance. Elle intervient dans une multitude de décisions telles que le choix de portefeuille et sa diversification, la gestion du risque financier et l'évaluation des contrats financiers dérivés. Connue comme étant l'une des principales mesures de risque, la volatilité a suscité l'intérêt des chercheurs qui visent, notamment, à l'estimer et expliquer son évolution. Plusieurs résultats révèlent que la volatilité se caractérise, entre autres, par ses variations asymétriques (Avramov, Chordia et Goyal, 2006; Mele, 2007; Shamila, Shambora et Rossiter, 2009; etc.). Cette asymétrie veut que pour la même variation absolue du rendement, la hausse de la volatilité due à la variation négative dépasse sa baisse résultant de la variation positive. La contribution de cette thèse, composée de trois essais, consiste à proposer un modèle permettant de refléter au mieux les variations asymétriques de la volatilité et caractériser la prime de risque qui s'y rattache.

Dans le premier essai, nous couvrons, en général, les principaux écrits majeurs, notamment récents, sur la volatilité boursière. En particulier, nous vulgarisons d'abord le concept de la volatilité comme mesure de risque où nous distinguons, d'une part, entre risque et incertitude et d'autre part entre risque existant et risque perçu. Puis, nous présentons les résultats marquants sur ses composantes (systématique et spécifique) en contexte des modèles classiques (de marché, CAPM). Ensuite, nous discutons de l'effet du marché d'options sur la volatilité boursière. Notre intérêt à cet effet se justifie par la croissance grandissante du volume des transactions sur les marchés des options depuis la création en 1973 du marché standardisé des options à Chicago (CBOE). Finalement, nous synthétisons les acquis en matière d'estimation de volatilité et faisons un tour critique des principales classes de modèles servant à en décrire l'évolution où des modèles représentatifs de chaque classe sont caractérisés tant dans leurs hypothèses et leurs dynamiques que dans leur performance au niveau des tests subis.

Dans le deuxième essai, nous proposons un modèle à volatilité stochastique où l'asymétrie de la volatilité résulte de deux effets: l'effet de levier financier et l'effet rétroactif (ou effet feedback). Notre modèle suppose que, pour une firme donnée, la volatilité de son rendement boursier dépend et de la variabilité de sa valeur marchande (reflet de son risque d'exploitation) et de son levier financier (reflet de son risque financier). Nous recourons au filtrage particulière, technique attribuée à Gordon, Salmond et Smith (1993), pour tester notre modèle en considérant son caractère non linéaire. Notre étude empirique est menée avec un échantillon de 332 firmes américaines non financières à données journalières. Elle porte sur la période qui s'étend du 2 janvier 1996 au 31 décembre 2008. Les résultats montrent que l'inclusion de la variation du levier financier dans le processus de la volatilité permet d'améliorer la performance de

prédiction du modèle. Ils révèlent également que l'asymétrie de la volatilité résulte, notamment, de l'effet rétroactif en périodes d'instabilité. Par contre, son ampleur dépend du niveau du levier financier en périodes de stabilité.

Dans le troisième essai, nous caractérisons la prime de risque de la volatilité asymétrique ainsi que les facteurs qui expliquent ses variations. En utilisant les prix d'options (d'achat et de vente) sur l'indice américain S&P 100, pour la période qui s'étend du 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010, nous trouvons que cette prime est, en moyenne, négative. Cela transparait d'ailleurs doublement, et dans l'écart significatif entre la volatilité implicite dans les prix d'options et la volatilité instantanée du S&P100, et dans le rendement moyen négatif des portefeuilles de réplcation jugés sûrs à risque près, celui de la volatilité. De plus, la prime de risque de la volatilité asymétrique s'avère changeante et dépend du niveau de la volatilité et de l'échéance des options vu que la sous-performance des portefeuilles de réplcation augmente en périodes de volatilité accrue, surtout pour les portefeuilles formés avec des options à longue échéance. Également, les résultats dévoilent une asymétrie dans la variation de cette prime voulant qu'en valeur absolue sa hausse due à une volatilité élevée dépasse généralement sa baisse résultant d'une relative stabilité du marché.

**Mots clés :** risque - volatilité boursière - variation asymétrique - effet de levier financier - effet rétroactif - filtrage particulière - prime de risque de la volatilité.

## INTRODUCTION

La volatilité boursière se définit, au sens classique, par l'ampleur moyenne de la variabilité des cours sur un intervalle temporel donné. Elle résulte surtout des chocs informatifs venant ébranler les perceptions de rendement et de risque des investisseurs. La volatilité joue un rôle central en finance moderne, tant théorique que pratique, soit depuis la percée fondatrice de Markowitz (1952) en théorie du portefeuille et l'émergence des modèles d'équilibre de type CAPM attribuables à Sharpe (1964) et à Lintner (1965). En effet, elle est considérée comme l'une des principales mesures de risque. Également, elle importe dans une multitude de décisions financières telles que la composition des portefeuilles et l'optimisation de leur diversification, la gestion du risque financier, l'évaluation des contrats financiers dérivés tels que les options, etc.

D'entrée, rappelons que la volatilité boursière, tenue pour stable et symétrique, ne cesse dans les années 60 et 70 de susciter l'intérêt des chercheurs<sup>1</sup>, un intérêt surtout en rapport avec l'évaluation d'actions via les modèles de type CAPM, et d'options via le modèle de Black et Scholes (1973). Mais dans les années 80, l'on assiste au procès graduel de ces modèles à mesure que les chercheurs constatent une pléthore

---

<sup>1</sup>Par exemple, dans les années 60, Mandelbrot (1963, 1966) observe une répartition anormale, voire instable, dans les rendements sur le marché et des grappes (ou chocs concentrés) dans l'évolution de leur volatilité. Déjà, l'on note la grande volatilité changeante dans les marchés, élevée en période boursière déprimée d'avant la 2<sup>ème</sup> Guerre, et plus faible après la guerre, en période d'expansion. Toutefois cette anomalie, lourde à traiter, ne pouvait que freiner son usage en recherche. D'où l'adoption de la normalité comme approximation utile. Elle se justifiait d'autant plus que l'époque coïncida avec la création du fichier boursier CRSP à données mensuelles, celles-ci s'avérant plus normales que les journalières. Ainsi, grâce à ces données passablement normales, pouvait-on espérer des progrès rapides en matière de caractérisation des phénomènes boursiers et de tests de la nouvelle théorie financière. C'est l'aperçu qu'en donne Fama (1976, 26-38).

d'anomalies boursières persistantes. Après Engle (1982), et son rejet, éventuellement "nobélisé" de l'hypothèse de constance de la volatilité, l'on voit surgir d'innombrables modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (*autoregressive conditional heteroscedastic* ou *ARCH*) selon lesquels la variance du rendement dépend de ses niveaux antérieurs ainsi que des erreurs observées. On assiste également au développement des modèles à volatilité stochastique où les chocs informatifs aléatoires sont susceptibles de refléter l'hétérovolatilité (ou volatilité changeante). Ajoutons aussi la naissance, dans les années 90, des modèles béhavioristes censés refléter les mouvements irrationnels du public investisseur et les modèles multifactoriels, ou à primes multiples de type Fama-French. Ces modèles ont fourni des outils puissants pour expliquer davantage l'évolution de la volatilité ainsi que ses principales caractéristiques.

Dans cette thèse, composée de trois essais, nous nous intéressons particulièrement à une de ces caractéristiques, soit l'asymétrie de la volatilité, mise en évidence dans divers écrits tels que Black (1976), Campbell et Hentschel (1992), Wu (2001), Mele (2007), Shamila, Shambora et Rossiter (2009), etc. Cette asymétrie veut que pour la même variation absolue du rendement, la hausse de la volatilité due à la variation négative soit plus importante que sa baisse résultant de la variation positive. Notre contribution consiste, d'une part, à proposer un modèle permettant de refléter au mieux les variations asymétriques de la volatilité et, d'autre part, à caractériser la prime de risque qui s'y rattache. Notre intérêt à cette prime est justifié par son importance dans la prédiction de la volatilité, l'évaluation des options, la composition des portefeuilles et la gestion du risque financier (Andersen, Benzoni et Lund, 2002; Chernov, 2007; Mixon, 2009 et Carr et Wu, 2009).

Dans le premier essai, nous faisons le point sur la volatilité boursière à travers des écrits jugés pertinents. Cet essai est composé de deux volets. Dans le premier volet, nous vulgarisons d'abord le concept de la volatilité où nous distinguons entre risque et incertitude en misant sur les synthèses de Anderson, Ghysels et Juergens (2009). Nous y traitons du lien positif important entre risque perçu et volatilité, lien soulevé en finance béhavioriste par Lee, Jiang et Indro (2002), Baker et Wurgler (2006, 2007), Kaplanski et

Levy (2010), etc. Ensuite, nous recensons ce qui est connu quant à la distinction entre la volatilité systématique et la volatilité spécifique ou diversifiable. Nous observons que cette dernière, dans bien des travaux, se répartit autour d'une moyenne distincte de zéro, en plus d'afficher un lien souvent négatif avec le rendement (Ang et al., 2006, 2009; Jiang, Xu et Yao, 2009; Brandt et al., 2010; etc.). Nous discutons aussi de l'effet du marché d'options sur la volatilité boursière. Notre intérêt se justifie par la croissance grandissante du volume des transactions sur les marchés des options depuis la création en 1973 du marché standardisé des options à Chicago (CBOE). Les résultats de Pan et Poteshman (2006) et Ni, Poteshman et Pan (2008) révèlent que les transactions sur les options nous renseignent tant sur l'évolution des cours boursiers que sur leur volatilité future.

Quant au deuxième volet, il consiste en une synthèse critique des principales méthodes d'estimation de la volatilité. Nous présentons trois classes de modèles: la classe des modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH) où la volatilité conditionnelle se nourrit de ses erreurs et ses niveaux antérieurs, la classe des modèles à volatilité stochastique s'expliquant par des chocs informatifs aléatoires et la classe des modèles de volatilité implicite dans les prix d'options. Des modèles bien représentatifs de chaque classe sont caractérisés tant dans leurs hypothèses et leurs dynamiques que dans leur performance au niveau des tests subis.

Dans le deuxième essai, nous proposons un modèle permettant de représenter le plus fidèlement possible les variations asymétriques de la volatilité. Ce modèle suppose que, pour une firme donnée, la volatilité de son rendement boursier dépend et de la variabilité de sa valeur marchande (reflet de son risque d'exploitation) et de son levier financier (reflet de son risque financier). Également, dans ce modèle, deux effets sont susceptibles d'expliquer l'asymétrie de la volatilité: l'effet de levier financier et l'effet rétroactif (ou effet feedback). Le premier effet, soulevé d'abord par Black (1976), veut que, d'un côté, une baisse du cours de la firme pour une dette donnée, hausse forcément son levier financier et, du même coup, l'incertitude liée à ses revenus futurs, d'où une hausse de volatilité de disons  $x\%$ . De l'autre côté, une hausse du cours de même

ampleur va certes diminuer le levier mais créer une baisse de volatilité inférieure à  $x\%$ , d'où asymétrie de la volatilité. Le deuxième effet, relevé, entre autres, par Campbell et Hentschel (1992), Bekaert et Wu (2000), Wu (2001) et Mele (2007), se distingue dans sa causalité. Il veut qu'une volatilité en hausse incite les investisseurs à exiger une prime de risque excédentaire pour rémunérer davantage les actifs qui deviennent plus risqués. D'où, une hausse du taux de rendement exigé, et par conséquent un repli immédiat des cours. Or, ce repli est plus élevé que l'appréciation des cours causée par une baisse de la volatilité de même amplitude, ce qui reflète l'asymétrie de la volatilité.

Pour estimer des séries temporelles pour les variables inobservables de notre modèle, nous recourons au filtrage particulaire introduit par Gordon, Salmond et Smith (1993) et bonifié en version auxiliaire par Pitt et Shephard (1999). L'avantage de cette technique réside dans sa capacité à s'accommoder de processus non linéaires sans restriction ou approximation. En effet, elle permet, contrairement au filtrage typique à la Kalman, de relâcher les hypothèses classiques, parfois restrictives, liées au caractère gaussien des bruits et à la linéarité (ou quasi-linéarité) des équations de transition et de mesure du modèle. Pour l'essentiel, il s'agit d'une méthode d'estimation numérique basée sur des simulations Monte Carlo. L'idée est d'approximer la densité de probabilité d'un vecteur de variables inobservables, sur la base de variables observables, en constituant un échantillon de mesures ponctuelles appelées particules simulées selon une distribution d'importance. Notons que le filtrage particulaire est déjà utilisé dans plusieurs domaines tels que l'ingénierie biologique (Liu, 2001), le pistage (Ristic, Arulampalam et Gordon, 2004), la robotique (Thrun, Burgard et Fox, 2005), la généalogie (Del Moral, 2004; Wang et al., 2009), etc. Récemment, cette technique est transposée aux applications financières. Citons, par exemple, l'application du filtrage particulaire afin d'estimation des modèles de crédit (Duan et Fulop, 2009) et des modèles à volatilité stochastique (Johannes, Polson et Stroud, 2009; Christoffersen, Jacobs et Mimouni, 2009).

Dans le troisième essai, nous caractérisons la prime de risque associée à la volatilité asymétrique. En particulier, il nous importe d'ajouter des facteurs explicatifs de

la variation de la dite prime à ceux déjà avancés, tels l'horizon temporel des options (Low et Zhang, 2005), le risque systématique (Carr et Wu, 2009) et les sauts surimposés au processus continu du rendement (Todorov, 2010). Rappelons que la prime de risque de la volatilité représente une rémunération au risque supplémentaire introduit par l'hétérovolatilité. Elle est nulle dans les modèles qui présupposent une volatilité constante ou déterministe (Black et Scholes, 1973; Dumas, Fleming et Whaley, 1998) ou un risque diversifiable de la volatilité (Hull et White, 1987). Par contre, dans le cas d'une volatilité changeante, les résultats de diverses études convergent et révèlent que la prime de risque de la volatilité est négative. Citons, par exemple, les études de Bakshi et Kapadia (2003,a,b), Low et Zhang (2005), Driessen, Maenhout et Vilkov (2009), Carr et Wu (2009), Almeida et Vicente (2009) et Todorov (2010) sur les marchés d'options sur actions, devises et obligations. L'explication résiderait, notamment, dans l'attitude des investisseurs qui se couvrent via des options, moyennant une prime, pour s'assurer contre l'hypermotilité (ou volatilité excessive) qui coïncide d'ordinaire avec un marché baissier (Ang et al., 2006, 2009; Brandt et al., 2010; etc.).

Notre démarche est composée de deux étapes. Dans la première étape, nous mettons en évidence, de façon empirique, la présence de la prime de risque de la volatilité asymétrique dans les prix d'options. L'idée consiste à comparer l'évolution de la volatilité instantanée du support, estimée via notre modèle à volatilité asymétrique, à celle de la volatilité implicite dans les prix d'options sur le même support. Une volatilité implicite plus élevée que la volatilité instantanée soutiendrait l'hypothèse d'une prime négative associée au risque de la volatilité asymétrique. Notons que notre approche diffère partiellement de celle adoptée dans les écrits du domaine (Bakshi et Kapadia, 2003,b; Mixon, 2009; Driessen, Maenhout et Vilkov, 2009; etc.) où on compare plutôt la volatilité implicite à la volatilité réalisée (calculée généralement via la moyenne mobile des variations des cours sur un intervalle temporel donné). Dans la deuxième étape, nous appliquons la méthode de Bakshi et Kapadia (2003,a) à notre modèle à volatilité asymétrique. Cette méthode consiste à former un portefeuille de couverture (ou de réplique) en prenant une position acheteur dans une option d'achat (de vente)

et une position vendeur (acheteur) dans le support. Ce portefeuille devient sûr à un risque près, celui de la volatilité. La technique est telle que le rendement moyen du portefeuille de couverture, durant la vie de l'option, et la prime associée au risque de la volatilité asymétrique du support ont le même signe. Dans cette étape, nous procédons à une analyse plus approfondie qui nous permettrait de déceler l'effet du niveau de la volatilité et l'horizon temporel de l'option sur la variation de la prime de risque de la volatilité asymétrique. Enfin, des tests statistiques seront employés afin de nous assurer de la teneur et la significativité des résultats obtenus.

## CHAPITRE I

### LE POINT SUR LA VOLATILITÉ BOURSIÈRE

#### 1.1 Introduction

Dans cet essai, nous voulons ajouter de la perspective à la recherche sur la volatilité boursière. Pour ce faire, nous couvrons en général les principaux écrits majeurs, notamment récents, dans ce domaine. En particulier, il nous importe de synthétiser les principaux acquis sur le concept de la volatilité, ses composantes, son lien avec le marché d'options et son estimation. Notre objectif se justifie à la base par le rôle central que joue la volatilité dans les décisions financières: choix de portefeuille et sa diversification, gestion du risque, évaluation des produits dérivés, etc. Également, nous jugeons qu'en couvrant en un seul essai autant d'aspects de la volatilité, nous avantageons d'une part les chercheurs étroitement spécialisés et d'autre part les investisseurs, vu l'effet multiforme de la volatilité sur leurs placements, en particulier en période cruciale de récession.

En première moitié de cet essai, vu l'abondance des écrits sur la volatilité, nous avons sélectionné ceux qui aident à en vulgariser le concept, après avoir distingué entre risque et incertitude en se basant sur l'étude de Anderson, Benzoni et Lund (2009). Puis, en succession nous: (a) éclairons le lien entre risque perçu et volatilité, en puisant en finance comportementale (Lee, Jiang et Indro, 2002; Baker et Wurgler, 2006, 2007; Kaplanski et Levy, 2010); (b) décrivons les deux composantes classiques, systématique et

spécifique<sup>1</sup>, de la volatilité et notons que dans plusieurs tests la composante spécifique se répartit autour d'une moyenne distincte de zéro et présente une relation négative avec le rendement (Ang et al., 2006, 2009; Jiang, Xu et Yao, 2009; Brandt et al., 2010); et (c) analysons le lien entre le marché des options et la variation de la volatilité boursière, à savoir que, selon Pan et Poteshman (2006) et Ni, Poteshman et Pan (2008), les transactions sur les options sont informatives de l'évolution tant des cours que de leur volatilité future.

En seconde moitié de cet essai, nous synthétisons les principaux acquis en matière d'estimation de la volatilité selon trois classes de modèles: (1) autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH) où la volatilité conditionnelle se nourrit de ses erreurs et ses niveaux antérieurs; (2) à volatilité stochastique s'expliquant par des chocs informatifs aléatoires<sup>2</sup>; et (3) à volatilité implicite dans les prix d'options. Des modèles bien représentatifs de chaque classe sont caractérisés tant dans leurs hypothèses et leurs dynamiques que dans leur performance au niveau des tests subis.

En résumé, ci-dessous la section 2 concerne la volatilité en tant que mesure de risque, ses composantes classiques et son lien avec le marché des options. La section 3 synthétise les diverses techniques d'estimation de la volatilité, leur finalité et leur performance. Nous concluons à la section 4.

## 1.2 Le concept de la volatilité

Dans cette section, à l'aide d'écrits éclairants, nous faisons le point sur la volatilité en tant que mesure de risque. Ensuite, nous voyons ce qui distinguent les composantes classiques de la volatilité. Enfin, nous synthétisons les principaux résultats sur le lien

---

<sup>1</sup>Pour nos fins, nous nous limitons à ces deux composantes classiques. Pour d'autres fins, l'on peut vouloir, par exemple, décomposer la volatilité entre permanente et temporaire, ou encore distinguer entre composantes de mémoire courte ou longue. Voir Taylor (2005, p.261, 311).

<sup>2</sup>Un choc informatif évoque typiquement une réaction boursière significative inattendue (dite innovation) causée par de l'information non négligeable.

entre le marché d'options et la volatilité boursière.

### 1.2.1 La volatilité en tant que mesure de risque

Pour l'investisseur, la volatilité du marché, ou d'un actif financier, évoque le niveau de risque et donc l'ampleur typique observée (ou attendue) de la variation des cours sur un intervalle donné. La volatilité indiciaire, reflétant la volatilité boursière globale, serait induite par l'ensemble des initiatives d'achats et de ventes des investisseurs, initiatives déclenchées sous l'effet de chocs informatifs et d'emportements du marché. Or, cette volatilité peut différer statistiquement dans son niveau, d'où l'hypervolatilité typique liée aux krachs boursiers.

Ajoutons, selon l'auteur polémiste Haugen (1999), que la volatilité est induite, notamment, par trois facteurs: (1) le facteur-événement, lié aux chocs conformes à une information fondamentale; (2) le facteur-erreur, lié à la sur-réaction ou sous-réaction du public investisseur à l'information; et (3) le facteur anticipatif ou la volatilité se nourrit d'elle-même, voire s'emballe, par anticipation. L'auteur y voit la source de 80% de la volatilité.

Cependant, la diversité des acteurs sur le marché, la différence dans leurs perceptions et leur degré d'aversion au risque font que celui-ci peut se mesurer avec d'autres outils, à part la volatilité, notamment, via la valeur à risque (VaR). Celle-ci se voit comme une mesure qui cerne le risque de perte. Plus précisément, elle estime le niveau de perte à très court terme (1 jour ou 2) dont le dépassement est improbable au seuil donné (souvent 5% ou 1%). Elle est répandue chez les banquiers ainsi que chez ces investisseurs dont les préférences comportent de l'asymétrie: ils se préoccupent plus de pertes que de gains et donc privilégient des mesures à base de perte potentielle. Son utilisation se répandit dans le sillage de désastres financiers majeurs, comme la faillite d'Orange County en 1994 et celle de la banque Barings en 1995.

Par ailleurs, il importe de distinguer entre risque et incertitude (Maenhout, 2004; Liu, Pan et Wang, 2005; Anderson, Ghysels et Juergens, 2009). En effet, le risque se

prédit et se prête à des mesures concrètes alors que l'incertitude se caractérise par son caractère imprévisible et sa relation avec les événements rares. Selon Anderson, Ghysels et Juergens (2009), la volatilité traduit le risque alors que le degré auquel divergent les anticipations des analystes reflète l'incertitude sur le marché. Ils proposent un modèle, qui prolonge celui de Merton (1973), où le rendement excédentaire sur un marché évolue en fonction et du risque et de l'incertitude y régnant, soit:

$$E(R_{t+1}) = \gamma V_t + \theta M_t \quad (1.1)$$

où au temps  $t$ , les niveaux conditionnels de la volatilité  $V$  et de l'incertitude  $M$  expliquent le rendement excédentaire attendu pour  $t+1$ , soit  $E(R_{t+1})$ . Les coefficients d'aversion au risque ( $\gamma$ ) et à l'incertitude ( $\theta$ ) étant constants. Notons qu'il s'agit là d'un modèle bien original et attrayant. Toutefois, il nous semble qu'il comporte des difficultés tout à fait évidentes dans un contexte d'application.

Il importe aussi de distinguer entre risque existant et risque perçu par l'investisseur, celui auquel il se croit exposé et qui peut varier selon ses humeurs et autres sentiments au fil du temps. Or, l'évolution de la volatilité boursière subirait l'influence des sentiments, saisonniers ou autres, du public investisseur et donc de ses perceptions changeantes de risque. À ce sujet, les tests de la finance comportementale se contredisent peu. Ceux de Lee, Jiang et Indro (2002) s'avèrent à la fois étendus et typiques. En appliquant le modèle ARCH-M de Engle, Lilien et Robins (1987) sur la période 1973-1995, les auteurs trouvent une corrélation positive entre le rendement excédentaire du marché et le risque perçu, celui-ci exerçant en plus un effet positif et significatif sur la volatilité du marché. Ainsi, une hausse (baisse) du risque perçu par les investisseurs provoque en général une hausse (baisse) de la volatilité du marché. Récemment, tant Baker et Wurgler (2006, 2007) que Kaplanski et Levy (2010) ont endossé les résultats de Lee, Jiang et Indro (2002) tout en indiquant que l'effet de perception sur la volatilité joue davantage pour les petites firmes, les titres à rendement plus volatil et les firmes des secteurs à rendement instable.

### 1.2.2 Composantes de la volatilité

Depuis les années 60, il est courant de décomposer la volatilité<sup>3</sup> du rendement d'un titre en: (1) volatilité systématique; et (2) volatilité spécifique. On attribue la spécifique à des facteurs propres à la firme et la systématique à l'effet d'entraînement inévitable du marché. Leur rémunération globale serait générée au fil du temps selon le modèle de marché classique, soit:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it} \quad (1.2)$$

qui explique  $r_{it}$ , le rendement du titre  $i$  pour la période  $t$ , par une constante  $\alpha_i$  qui lui est propre, par son coefficient de sensibilité  $\beta_i$  mesurant son risque relatif au risque bêta unitaire attribué au marché, dont le rendement courant est  $r_{mt}$ , et par  $\varepsilon_{it}$ , soit le rendement résiduel à la date  $t$  de moyenne zéro et à covariance nulle avec  $r_m$ . Le risque de la firme, ou la variance totale de son rendement, vu l'équation (1.2) et l'indépendance entre  $r_m$  et  $\varepsilon$ , égale donc  $\beta^2 \sigma_m^2$  (la composante systématique), plus la composante spécifique  $\sigma^2(\varepsilon)$ .

#### 1.2.2.1 Volatilité, CAPM et modèles subséquents

Selon le CAPM, le rendement d'un titre croît uniquement en fonction linéaire de son risque systématique, car son risque spécifique, éliminable par diversification, ne devrait pas être rémunéré. Cette attente s'avère contredite à des degrés divers dans bien des résultats plus ou moins récents. Déjà, durant les années 70 et 80 aux États-Unis, on trouve le CAPM problématique sur le plan empirique (Black, Jensen et Scholes, 1972; Merton, 1987) et l'on débouche plus récemment sur son rejet, notamment, pour manque de pouvoir prédictif, au bénéfice de modèles multifactoriels, ou à primes multiples (de marché, de taille, de valeur et d'inertie ou de momentum), de type Fama-French. Au Canada, après des succès empiriques assez notables en version unipériodique (Calvet et Lefoll, 1988) ou multipériodique (Kryzanowski, Lalancette et To, 1994), le CAPM

---

<sup>3</sup>Notons que, dans cette section, les termes "volatilité" et "risque" ont le même sens.

fait moins l'objet de tests et les chercheurs dérivent vers des études liées aux primes, influencés qu'ils sont par Fama et French (1992, 1993, 1998). Par exemple, Hou et McKnight (2004) découvrent l'existence d'une forte prime de momentum qui serait reliée négativement au ratio Comptable/Marchand<sup>4</sup> et au degré d'intérêt des analystes. Quant à Athanassakos (2009), il étudie la prime de valeur au Canada sur 20 ans et trouve que le ratio Cours/Bénéfice identifie mieux les titres de valeur que le ratio Marchand/Comptable. Finalement, partout dans le monde on semble se rabattre sur des modèles empiriques multifactoriels au détriment de modèles d'équilibre simples, comme le CAPM.

#### 1.2.2.2 Études récentes sur la composante spécifique

Les résultats d'études récentes sur la composante spécifique rejoignent les conclusions de Merton (1987). Celui-ci soutient que cette composante se répartit autour d'une moyenne distincte de zéro, contrairement aux attentes classiques. L'explication résiderait dans le fait que les investisseurs diversifieraient peu leurs portefeuilles. Par exemple, Goetzmann et Kumar (2004) trouvent que, durant la période 1991-1996, la diversification des portefeuilles s'avère faible. À preuve, parmi 60 000 portefeuilles étudiés, plus de la moitié sont composés de 3 titres ou moins et 10% seulement de plus de 10 titres.

Plusieurs études récentes tentent d'estimer la volatilité spécifique d'un titre. Commençons par celle de Campbell et al. (2001) qui l'exprime sur une base mensuelle. Il s'agit d'une mesure de dispersion du rendement du titre autour du rendement pondéré du secteur, à savoir:

$$VS_{ist} = \sum_{j \in t} (R_{isjt} - R_{sjt})^2 \quad (1.3)$$

---

<sup>4</sup>Notons que le ratio Comptable/ Marchand ou C/M (B/M ratio: Book to Market ratio) s'établit en divisant la valeur comptable de l'avoire par sa valeur marchande. Un niveau élevé (faible) peut traduire notamment la faible (forte) valeur que le marché attribue aux investissements de la firme, ou encore, un marché tardif à saisir le potentiel de la valeur de la firme.

où  $VS_{ist}$  symbolise la volatilité spécifique du titre  $i$  du secteur  $s$  au mois  $t$ ,  $R_{ijst}$  le rendement du titre  $i$  du secteur  $s$  au jour  $j$  au mois  $t$  et  $R_{jst}$  est le rendement du secteur  $s$  à la journée  $j$  au mois  $t$ . Les résultats de cette étude révèlent une hausse continue de la volatilité spécifique des firmes sur la période 1962-1997 malgré une relative stabilité économique. On avance diverses explications: les rentrées attendues des firmes deviennent de plus en plus incertaines (Wei et Zhang, 2006); de plus en plus de petites firmes à grand risque s'inscrivent en bourse (Brown et Kapadia, 2007; Fu, 2009 et Brandt et al., 2010); et la compétition entre firmes ne cesse d'augmenter (Irvine et Pontiff, 2009).

Quant à Ang et al. (2006, 2009), ils estiment la volatilité spécifique par l'écart-type du rendement résiduel,  $\varepsilon_{it}$ , obtenu via le modèle à trois primes de Fama et French (1993), à savoir:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{mt} + s_i SMB_t + h_i HML_t + \varepsilon_{it} \quad (1.4)$$

où  $R_i = r_i - r_f$  et  $R_m = r_m - r_f$  symbolisent, respectivement, les primes de rendement du titre  $i$  et du marché  $m$ ,  $SMB$  la prime de taille égale à l'écart de rendement entre petites et grandes firmes et  $HMB$  la prime de valeur égale à l'écart de rendement entre firmes à ratios Comptable/Marchand élevé et faible. Leur étude de 2009, qui porte sur les rendements journaliers de 23 pays durant la période 1980-2003, révèle que les titres à faible volatilité spécifique surperforment ceux à forte volatilité spécifique. Jiang, Xu et Yao (2009) endossent ce résultat et expliquent que plus de volatilité spécifique joue négativement sur les attentes de bénéfice de la firme.

Finalement, Fu (2009) innove en "conditionnant" la volatilité spécifique. Il l'estime par la variance conditionnelle  $\sigma_{it}^2$  du rendement résiduel issu de l'équation (1.4) via le modèle EGARCH de Nelson (1991), soit:

$$\ln \sigma_{it}^2 = a_i + \sum_{l=1}^p b_{i,l} \ln \sigma_{i,t-1}^2 + \sum_{k=1}^q c_{i,k} \left( \theta \frac{\varepsilon_{i,t-k}}{\sigma_{i,t-k}} + \gamma \left[ \left| \frac{\varepsilon_{i,t-k}}{\sigma_{i,t-k}} \right| - (2\pi)^{\frac{1}{2}} \right] \right) \quad (1.5)$$

sous hypothèse que les rendements résiduels  $\varepsilon_{it}$  se répartissent normalement autour de zéro, soit  $\varepsilon_{it} \rightsquigarrow N(0, \sigma_{it}^2)$ , et  $\theta$  et  $\gamma$  sont des paramètres réels. Son étude, menée

avec données mensuelles de titres américains durant la période 1963-2006, indique que la volatilité spécifique est changeante et liée positivement avec le rendement. L'auteur note qu'un portefeuille à investissement nul (via achat de 10 titres aux volatilités spécifiques les plus élevés et vente à découvert de 10 titres aux volatilités les plus faibles) montre un rendement mensuel positif de 1,75%. Selon Huang et al. (2010), la divergence de ces résultats par rapport à ceux de Ang et al. (2006, 2009) est expliquée, notamment, par leur sensibilité au choix de la fréquence des données ainsi que l'échantillon d'étude.

### 1.2.3 Volatilité boursière et marché des options

Les volumes négociés sur les marchés d'actions et d'options aux États-Unis ne cessent de croître depuis 1940, comme la figure 1.1 annexée, tirée de Mixon (2009), en témoigne: le volume annuel d'options à Chicago avoisine le volume d'actions à New York sur la NYSE depuis environ 1980. On notera que le volume d'options a crû en particulier depuis la création en 1973 du marché standardisé des options à Chicago (CBOE). Devant une telle croissance en parallèle, et vu notre sujet d'essai, la question de l'effet du marché d'options sur la volatilité boursière s'impose. Or, déjà plusieurs chercheurs ont décelé un effet direct et significatif de ce marché sur la volatilité boursière. Ce marché fournirait de l'information tant sur l'évolution des cours boursiers (Pan et Poteshman, 2006) que sur leur volatilité future (Chan, Chung et Fong, 2002; Chakravarty, Gulen et Mayhew, 2004; Ni, Poteshman et Pan, 2008; etc.).

Notons que Ni, Poteshman et Pan (2008) font une analyse originale du lien entre le marché des options et la volatilité des cours boursiers. Ils montrent que cette volatilité peut être perçue comme un élément de performance, tout comme un actif au potentiel enrichissant. Ils proposent une méthode pour estimer la demande pour la volatilité du titre  $i$  à la date  $t$ , notée  $DV_{i,t}$ , en tant qu'une somme des volatilités marginales, mesurées via des achats nets d'options d'achat ( $BC-SC$ ) et d'options de vente ( $BP-SP$ ). Ces volatilités marginales sont pondérées par la dérivée du logarithme des prix d'options par

rapport à la volatilité, soit:

$$DV_{i,t} \equiv \sum \frac{\partial \ln C_{i,t}^{K,T}}{\partial \sigma_{i,t}} (BC_{i,t}^{K,T} - SC_{i,t}^{K,T}) + \sum \frac{\partial \ln P_{i,t}^{K,T}}{\partial \sigma_{i,t}} (BP_{i,t}^{K,T} - SP_{i,t}^{K,T}) \quad (1.6)$$

où  $C_i^{K,T}$  ( $P_i^{K,T}$ ) symbolise le prix de l'option d'achat (de vente) de maturité T et de prix de levée K,  $\sigma_i$  la volatilité historique de i,  $BC_i^{K,T}$  ( $BP_i^{K,T}$ ) le nombre d'options d'achat (de vente) achetées et  $SC_i^{K,T}$  ( $SP_i^{K,T}$ ) le nombre d'options d'achat (de vente) vendues. Cette méthode suppose que l'achat (vente) d'une option hausse (baisse) la demande pour la volatilité. Selon leur étude américaine de la période 1990-2001, la demande de volatilité exerce un effet positif et variable sur le prix de l'option. Si elle augmente (diminue), alors le prix de l'option augmente (diminue). L'effet s'accroît en contexte d'asymétrie d'information où l'on accepte une surprime pour se protéger du jeu des détenteurs d'information privilégiée.

Mentionnons aussi que l'effet positif des options sur la volatilité des cours est aussi constaté par Bhamra et Uppal (2009). Ceux-ci décomposent la volatilité en deux: la fondamentale, ou normale, liée au taux de croissance des dividendes prévus, et l'excédentaire, ou anormale, liée au taux de rendement qu'exigent les investisseurs, donc le taux pertinent pour actualiser les dividendes. Les auteurs estiment que la composante anormale est non nulle, grâce aux produits dérivés via lesquels les investisseurs peuvent se protéger de fluctuations indésirables et deviennent moins réfractaires au risque.

### 1.3 Modèles d'estimation de la volatilité

Pour estimer la volatilité des cours boursiers, l'on choisit d'ordinaire entre les modèles: (1) autorégessifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH) ; (2) à volatilité stochastique où l'hétérovolatilité s'explique par des chocs informatifs aléatoires; et (3) à volatilité implicite dans les prix d'options sur l'action en cause.

### 1.3.1 Modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques

Il s'agit des modèles où l'on rejette l'hypothèse classique de la constance de la variance pour lui substituer une hétérovariance (ou variance changeante) autorégressive conditionnelle qui se nourrit d'une information antérieure (chocs, ou erreurs, dans l'équation du rendement et niveaux antérieurs d'hétérovariance). Engle (1982) proposa le premier modèle ARCH en deux équations. La première décrit la relation qui existe, à une date donnée, entre le rendement  $Y$  et le vecteur des variables qui l'expliquent  $X$ , soit:

$$Y_t = X_t\theta + \varepsilon_t \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_t = z_t\sqrt{h_t} \quad \text{et} \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \rightsquigarrow N(0, h_t)$$

où  $\theta$  est un vecteur de réels,  $\varepsilon$  et  $h$  sont, respectivement, le choc et sa variance conditionnelle,  $z$  est un bruit blanc gaussien et  $I_{t-1}$  est l'ensemble de l'information disponible jusqu'à la date  $t - 1$ .

La deuxième équation lie, à travers un processus autorégressif, la variance conditionnelle  $h$  du chocs  $\varepsilon$  aux carrés des valeurs passées de ce choc, soit:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (1.8)$$

où  $\alpha$  est un réel et  $q$  est le nombre de retards choisis pour exprimer  $h$ .

Tel que présenté, le modèle ARCH se particularise en introduisant, à une date donnée, l'information passée contenue dans les séries chronologiques financières dans l'estimation de la variance conditionnelle des chocs. De plus, les tests de Engle (1982), sur l'évolution du taux d'inflation de la Grande-Bretagne durant la période 1958-1977 souligne la capacité de ce modèle à capturer deux évidences empiriques importantes de la volatilité: le regroupement et la persistance (ou longue mémoire). La première, notée par Mandelbrot (1963), implique que les fluctuations se présentent en grappes: les périodes de forte volatilité succèdent à des périodes de faible volatilité et vice-versa.

Cela est dû, notamment, à la survenue en grappes de l'information (Fama, 1965). La seconde a été révélée, entre autres, par Granger (1966). Elle signifie qu'une période de flux d'informatif important provoque une forte volatilité qui tend à persister. Elle résulte des anticipations des acteurs sur le marché et de la sensibilité de ces derniers à l'information (Berger, Chaboud et Hjalmarsson, 2009).

Toutefois, le modèle ARCH présente deux inconvénients majeurs. Le premier, soulevé surtout par Bollerslev (1986), résulte du nombre élevé des paramètres nécessaires dans la modélisation. Par exemple, Engle (1982) a utilisé un modèle ARCH d'ordre 4 dans son étude empirique. Cela peut conduire à la violation de la contrainte de positivité de la variance conditionnelle. Le deuxième s'incarne dans l'incapacité du modèle ARCH à tenir compte de l'asymétrie de la volatilité (Nelson, 1991; Glosten, Jagannathan et Runkle, 1993; Zakoian, 1994; etc.). Pour tenter de résoudre ces imperfections, un volume croissant d'extensions a été généré. Nous distinguons deux principales familles: les modèles de type ARCH à volatilité symétrique et les modèles de type ARCH à volatilité asymétrique.

### 1.3.1.1 Modèles de type ARCH à volatilité symétrique

Il s'agit de modèles linéaires où l'ampleur et non pas le signe des chocs influence la variance conditionnelle. Ainsi, les chocs positifs et négatifs de même amplitude ont le même effet. Pour nos fins, nous retenons, dans cette famille, trois modèles que nous jugeons les plus innovateurs: le modèle ARCH généralisé (GARCH), le modèle ARCH à moyenne (ARCH-M) et le modèle GARCH intégré (IGARCH).

**GARCH.** Il s'agit d'une version généralisée du modèle ARCH, proposée par Bollerslev (1986). Dans ce modèle, la variance conditionnelle  $h$  des chocs  $\varepsilon$ , à une date donnée, est exprimée en fonction d'une combinaison linéaire de ses valeurs passées et des carrés des chocs passés, soit:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (1.9)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres positifs. Dans son étude empirique, Bollerslev (1986) a appliqué son modèle pour mesurer l'incertitude inflationniste aux États-unis durant la période 1948-1983. Il révèle que le modèle GARCH est plus parcimonieux que le modèle ARCH. Ainsi, un modèle GARCH avec très peu de paramètres surperforme un modèle ARCH ayant de nombreux paramètres à estimer. De plus, le modèle GARCH permet une modélisation plus efficace de la persistance vu l'existence d'une relation de récurrence entre la variance conditionnelle des chocs avec ses valeurs passées. Toutefois, le modèle GARCH présente un inconvénient d'ordre économétrique évoqué, entre autres, par Nelson (1991). Il s'agit de l'instabilité des estimateurs des paramètres au fil du temps, ce qui altère la capacité du modèle à répliquer l'évolution du rendement et à reproduire le phénomène de persistance.

**ARCH-M.** Dans ce modèle, introduit par Engle, Lilien et Robins (1987), la dynamique de la variance conditionnelle des chocs est identique à la formulation standard du processus ARCH. Par ailleurs, le processus du rendement inclut la variance conditionnelle  $h$  des chocs  $\varepsilon$  multipliée par un coefficient  $\delta$  représentant l'aversion relative des investisseurs au risque, soit:

$$Y_t = X_t\theta + \delta h_t + \varepsilon_t \quad (1.10)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres positifs. L'un des avantages de ce modèle est sa capacité mettre en évidence l'effet de d'une variance changeante sur l'évolution de la prime de risque du support (McCurdy et Morgan, 1988).

**IGARCH.** Ce modèle, proposé par Engle et Bollerslev (1986), correspond au cas d'une racine unitaire dans le processus de la variance conditionnelle des chocs inhérent au modèle GARCH, c'est à dire:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1 \quad (1.11)$$

Cela signifie une persistance infinie des chocs. En d'autres termes, un choc sur la variance conditionnelle actuelle se répercute sur toutes les valeurs futures. La spécification du modèle IGARCH est identique au modèle GARCH à la différence qu'une

contrainte sur la somme des coefficients est imposée: elle doit être égale à 1. Une extension plus fonctionnelle du modèle IGARCH a été proposée par Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) via le modèle GARCH fractionnellement intégré (FIGARCH). Ce modèle est un cas intermédiaire entre les modèles GARCH et IGARCH. La persistance de la volatilité est mise en évidence dans ce modèle mais l'effet d'un choc n'est pas infini comme dans le modèle IGARCH. Il décroît à un rythme hyperbolique.

### 1.3.1.2 Modèles de type ARCH à volatilité asymétrique

Dans ces modèles, les auteurs introduisent une modélisation explicite de la variance conditionnelle qui répond de manière asymétrique au choc selon son signe. Ainsi, un choc négatif sera suivi d'une hausse plus marquée de la variance conditionnelle que celle provoquée par un choc positif de même ampleur. Pour nos fins, nous retenons, pour cette famille, deux modèles que nous jugeons les plus innovateurs: le modèle GARCH exponentiel (EGARCH) et le modèle de type GARCH à double régime (GJR-GARCH). Pour une description complète des modèles de type ARCH à volatilité asymétrique, tels que le modèle NGARCH introduit par Engle et Ng (1993) et le modèle QGARCH introduit par Engle (1990), nous renvoyons le lecteur aux travaux de Hentschel (1995).

**EGARCH.** Dans ce modèle, proposé par Nelson (1991), la variance conditionnelle des chocs est exprimée sous forme logarithmique. Cela permet d'assurer sa positivité sans pour autant imposer des restrictions sur les différents paramètres de son processus d'évolution. Ce modèle permet une réponse asymétrique de la variance conditionnelle  $h$  aux chocs positifs ou négatifs  $\varepsilon$ . La variance conditionnelle peut augmenter en cas de chocs négatifs et baisser dans le cas contraire. L'effet amplitude ressort dans l'écart entre la valeur absolue des chocs standardisés et son espérance, soit:

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\varphi \varepsilon_{t-i} + \phi |\varepsilon_{t-i}| - \phi E|\varepsilon_{t-i}|) + \sum_{j=1}^p \beta_j \log(h_{t-j}) \quad (1.12)$$

où  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $\phi$  et  $\beta$  sont des paramètres réels. Par ailleurs,  $\varphi \varepsilon_{t-i}$  mesure l'effet signe et  $(\phi |\varepsilon_{t-i}| - \phi E|\varepsilon_{t-i}|)$  correspond à l'effet amplitude. Toutefois, Engle et Ng (1993)

ont montré que la variabilité de la variance conditionnelle dans ce modèle est élevée, c'est-à-dire que l'augmentation de la variance est exagérée dans le cas où l'ampleur du choc est grande. Ceci peut se répercuter exagérément dans la prédiction de la volatilité.

**GJR-GARCH.** Dans ce modèle proposé par Glosten, Jagannathan et Runkle (1993), la variance conditionnelle est modélisée en régime alternatif où le régime choisi dépend du signe du choc à la date précédente via une variable muette égale à 1. (ou à 0) s'il est négatif (ou positif), soit:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma 1_{\varepsilon_{t-i} < 0} \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (1.13)$$

où  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\beta$  sont des paramètres réels. Engle et Ng (1993) reconnaissent le GJR-GARCH comme étant le meilleur modèle paramétrique de type ARCH susceptible de rendre compte du phénomène d'asymétrie de la volatilité. Pour sa part, Zakoian (1994) propose un modèle de type GARCH à seuils (TGARCH) similaire au modèle GJR-GARCH à la différence qu'il base l'asymétrie sur l'écart type plutôt que sur la variance conditionnelle.

### 1.3.1.3 Quelques applications récentes des modèles de type ARCH

L'utilisation des modèles de type ARCH pour décrire l'évolution des rendements boursiers et leurs volatilités ne cessent d'abonder. Pour nos fins, nous présentons, ci-dessous, trois applications récentes qui se distinguent par l'importance accordée à l'asymétrie de la volatilité. Dans la première application, Heston et Nandi (2000) se servent du modèle NGARCH de Engle et Ng (1993) pour décrire l'évolution du rendement  $r$  et sa variance conditionnelle  $h$ , soit:

$$r_{t+1} = \ln \left( \frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = r_f + \lambda h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}} z_{t+1} \quad (1.14)$$

$$h_{t+1} = \omega + \beta h_t + \alpha (z_t - \gamma \sqrt{h_t})^2$$

où  $S$  est le cours de l'action,  $r_f$  est le taux sûr,  $z$  est un bruit blanc gaussien et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  et  $\lambda$  sont des paramètres réels. Ces dynamiques ont servi de support pour élaborer un modèle d'évaluation d'options. Dans leur étude empirique à base d'options sur S&P500, durant la période allant de janvier 1992 à décembre 1994, les auteurs trouvent que le rendement est lié négativement à sa volatilité. De plus, leur modèle démontre une performance supérieure à celle du modèle à volatilité déterministe de Dumas, Fleming et Whaley (1998) dans l'évaluation des options.

Dans la deuxième application, Wu (2001) suppose que le taux de croissance du dividende  $g$ , modélisé selon un processus GARCH, et sa variance conditionnelle soient les deux variables d'état qui subissent des chocs explicatifs de la relation asymétrique du rendement de l'action  $r$  avec sa variance conditionnelle  $\sigma_r^2$ , soit:

$$r_{t+1} = r_f + \lambda_1 \sigma_{d,t}^2 + \lambda_2 \varepsilon_{d,t+1} - \lambda_3 \sigma_{d,t} \nu_{t+1} \quad (1.15)$$

$$\sigma_{r,t}^2 = (\lambda_2^2 + \lambda_3^2 \eta_\nu^2 - 2\lambda_2 \lambda_3 \eta_\nu \rho_l) \sigma_{d,t}^2$$

où  $r_f$  est le taux sûr,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  et  $\rho_l$  sont des paramètres réels,  $D$  est le dividende,  $\sigma_d^2$  est la variance du choc  $\varepsilon_d$  et  $\nu_t$  est le choc de  $\sigma_d^2$  tel que:

$$g_{t+1} = \ln \frac{D_{t+1}}{D_t} = \alpha_0 + \alpha_1 g_t + \varepsilon_{d,t+1} \quad ; \quad \sigma_{d,t+1}^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{d,t}^2 + \sigma_{d,t} \nu_{t+1}$$

$$\varepsilon_{d,t+1} | I_t \rightsquigarrow N(0, \sigma_{d,t}^2) \quad \text{et} \quad \text{corr}(\varepsilon_{d,t+1}, \nu_{t+1}) = \rho_l < 0$$

L'étude empirique à base des rendements mensuels de l'indice CRSP, durant la période allant de janvier 1926 à décembre 1997, révèle que l'asymétrie de la volatilité résulte de l'effet rétroactif qui semble être plus remarquable en période de forte volatilité.

Dans la troisième application, Adrian et Rosenberg (2008) définissent la volatilité comme étant la somme de deux composantes: une composante de mémoire courte et une autre composante à mémoire longue. Ils proposent de modéliser le rendement excédentaire du marché  $r^m$  comme suit:

$$r_{t+1}^m = \mu_t^m + \sqrt{v_t} \varepsilon_{t+1} \quad (1.16)$$

où  $\mu^m$  est le rendement excédentaire attendu,  $\varepsilon$  et  $v$  sont, respectivement, le bruit blanc gaussien et sa variance conditionnelle tel que:

$$\ln \sqrt{v_t} = s_t + l_t$$

avec  $s$  correspond à la composante de mémoire courte de  $v$  et  $l$  sa composante de mémoire longue où:

$$s_{t+1} = \alpha s_t + \beta \varepsilon_t + \delta \left( |\varepsilon_t| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \quad \text{et} \quad l_{t+1} = \theta + \eta l_t + \chi \varepsilon_t + \phi \left( |\varepsilon_t| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\theta$ ,  $\eta$ ,  $\chi$  et  $\phi$  sont les paramètres du modèle. Dans leur études empirique à base des rendements de l'indice CRSP, durant la période allant de juillet 1962 au décembre 2005, les auteurs démontrent que la composante à mémoire courte est fortement corrélée au risque systématique et que la composante à mémoire longue est liée au risque spécifique de la firme. De plus, ils soulignent que la prime de risque de la volatilité est négative et que la prime de risque de chaque composante est statistiquement significative. Notons que cette décomposition innovatrice de Adrian et Rosenberg (2008) est soutenue par Christoffersen et al. (2008) qui révèlent son efficacité, notamment, dans la valorisation d'options.

### 1.3.2 Modèles de volatilité stochastique

Il s'agit de modèles où on introduit, dans le processus du rendement et celui de sa variance instantanée, des chocs informatifs aléatoires susceptibles de refléter l'hétérovolatilité. Ces modèles permettent, entre autres, de modéliser la dépendance qui caractérise l'évolution des rendements boursiers et tenir compte leurs distributions généralement plus épaisses que la normale. Également, ces modèles semblent être un outil privilégié pour la calibration des prix des options. Dans ce sens, Christoffersen, Heston et Jacobs (2009) soulignent la flexibilité des modèles de volatilité stochastique et leur capacité à expliquer les formes de *smile* et *smirk* qui caractérisent la courbe de

la volatilité implicite selon les prix de levée des options, ce qui permettrait de remédier au biais du modèle de Black-Scholes quant à la sous-évaluation des options hors et en jeu<sup>5</sup>.

Cependant, la modélisation de la volatilité selon un processus stochastique viole les conditions d'un marché complet. En effet, le nombre de sources de risque (le rendement et sa volatilité) devient plus élevé que le nombre d'actif échangé (le support). Ce problème de nature technique se traduit par l'incapacité, dans la plupart des cas, de trouver une solution analytique au problème de l'évaluation des options. Un recours aux méthodes numériques, telles que la simulation Monte Carlo et les méthodes des différences finies, est nécessaire pour résoudre ce problème.

Devant le nombre croissant des modèles de volatilité stochastique, nous présentons ci-dessous, selon un ordre chronologique, les modèles que nous jugeons les plus représentatifs durant les trois dernières décennies. Pour chaque modèle, nous caractérisons ses hypothèses, ses dynamiques et sa performance au niveau des tests subis.

**Hull et White (1987).** Leur modèle s'avère le premier en son genre qu'on applique à l'évaluation des options. Il veut que la variance instantanée  $V$  suive un mouvement brownien géométrique classique à variations indépendantes, à tout instant, avec le rendement, soit:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dz_t \quad (1.17)$$

$$dV_t = \varphi V_t dt + \sigma V_t dw_t$$

où  $S$  est le prix de l'actif,  $\mu$  et  $\varphi$  sont, respectivement, le rendement et la variance attendu,  $\sigma$  est la volatilité de  $V$  et  $z$  et  $w$  sont des mouvements browniens classiques indépendants, respectivement, de  $S$  et de  $V$ . Notons que l'étude empirique menée par

---

<sup>5</sup>Rappelons qu'une option d'achat (vente) est au jeu si le cours du support oscille autour du prix de levée. Elle devient en jeu si le cours dépasse (tombe sous) le prix de levée et hors jeu si le cours tombe sous (dépasse) le prix de levée.

les auteurs s'accorde à l'évidence empirique reconnue: le modèle classique de Black-Scholes surévalue les options au jeu et sous-évalue celles hors et en jeu. Toutefois, il est important de noter que l'hypothèse d'indépendance des variations de  $V$  avec celles du rendement se traduit par une prime de risque nulle de la volatilité, ce qui représente un inconvénient majeur de ce modèle.

**Heston (1993).** Tout en gardant la même évolution du rendement que celle suggérée par Hull et White (1987), l'auteur introduit un processus avec retour vers la moyenne pour  $V$  à variations corrélées avec celles du rendement, soit:

$$dV_t = \alpha (\theta - V_t) dt + \sigma V_t dw_t \quad (1.18)$$

$$\text{corr}(z_t, w_t) = \rho$$

où  $\theta$  est la variance instantanée à long terme ou d'équilibre,  $\alpha$  est la vitesse de retour vers  $\theta$ ,  $\sigma$  est la volatilité de  $V$  et  $z$  et  $w$  sont des mouvements browniens, respectivement, de  $S$  et de  $V$ , liée avec le coefficient de corrélation  $\rho$ . Dans ce modèle, l'hypothèse de corrélation entre le rendement et sa volatilité est susceptible de refléter la présence d'une prime de risque de la volatilité. De plus, le modèle veut que lorsque les chocs informatifs produisent de fortes variations du rendement et éloignent la variance instantanée de sa moyenne à long terme, les acteurs du marché anticipent une diminution du niveau de la volatilité, ce qui amène ce mouvement à s'estomper à terme. Ainsi, deux facteurs jouent sur l'évolution de la variance instantanée: sa vitesse de retour à son niveau d'équilibre et les chocs aléatoires générateurs de l'hétérovolatilité. Soulignons enfin que le modèle de Heston (1993) a été utilisé dans l'évaluation des options sur obligations et sur devises. Il est devenu référentiel dans l'évaluation des options européennes vu ses multiples avantages.

**Bates (1996).** L'auteur propose un modèle d'évaluation d'option américaine où la discontinuité dans le processus du rendement est modélisée en terme de chocs. La survenue des chocs se superpose au mouvement brownien classique. Ainsi, le processus

du rendement est régi par trois facteurs: la dérive, l'aléa brownien et l'aléa indépendant dû aux chocs, soit:

$$dS_t = (\mu - \lambda \bar{k}) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dz_t + k_t S_t dq_t \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \text{prob}(dq_t = 1) &= \lambda dt, \quad \text{prob}(dq_t = 0) = 1 - \lambda dt \quad \text{et} \\ \ln(1 + k_t) &\rightsquigarrow N\left(\ln(1 + \bar{k}) - \frac{\delta^2}{2}, \delta^2\right) \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est l'intensité du saut,  $k$  est la taille du saut en pourcentage de variation de  $S$ ,  $q$  est le processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et  $\bar{k}$  et  $\delta^2$  sont, respectivement, la taille moyenne du saut et sa variance. Pour l'essentiel, l'étude à base d'options sur la devise allemande durant la période 1984-1991, révèle que l'importance d'intégrer un processus de saut dans l'évolution du rendement est inversement proportionnelle à l'échéance de l'option. Ainsi, plus l'échéance est courte, plus la nécessité de prendre en considération l'effet du saut s'impose.

**Bakshi, Cao et Chen (1997).** Élaboré dans un contexte de neutralité au risque pour évaluer les options, ce modèle à trois facteurs généralise celui de Bates (1996). Il rejette l'hypothèse d'une structure horizontale des taux d'intérêt. Ainsi, le processus du rendement est donné par:

$$dS_t = (r_t - \lambda \bar{k}) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dz_t + k_t S_t dq_t \quad (1.20)$$

$$dr_t = (\alpha_r - \beta_r r_t) dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dm_t$$

où  $r$  est le taux sûr à horizon réduit,  $\alpha_r$  est le taux d'équilibre à long terme,  $\beta_r$  est la force de rappel vers  $\alpha_r$ ,  $\sigma_r$  est la volatilité de  $r$  et  $m$  est le mouvement brownien de  $r$  indépendant de celui de  $S$ . Les auteurs utilisent un échantillon composé de prix d'options sur S&P 500 durant la période allant de juin 1988 à mai 1991. Comme Bates (1996), ils décèlent l'importance du saut dans l'évaluation des options à échéance courte. De plus, ils trouvent opportun d'assujettir le taux sûr à un processus avec retour vers

la moyenne lorsqu'il s'agit d'évaluer des options à échéances éloignées. Par ailleurs, ils estiment qu'en matière de couverture dynamique, leur modèle performe mieux que celui de Black-Scholes, à volatilité constante, mais moins bien que celui de Hestn (1993). Cela rejoint l'intuition, car une couverture dynamique nécessite un ajustement fréquent. D'où l'improbabilité que le taux sûr varie et qu'un saut survienne entre deux ajustements et d'où l'effet presque nul du taux et du saut sur la qualité de la couverture.

**Barndorff-Nielsen et Shephard (2001)**. Il s'agit de l'un des modèles où on intègre les processus de Lévy dans la dynamique de la volatilité boursière<sup>6</sup>. Dans ce modèle, la volatilité  $V$  est modélisée selon un processus d'Ornstein-Uhlenbeck régi par un processus de Lévy non-gaussien à sauts positifs soit:

$$dV_t = -\lambda V_t dt + dZ_{\lambda t} \quad (1.21)$$

où  $\lambda$  est un réel positif et  $Z$  est un processus de Lévy à incréments positifs et aucune composante gaussienne. Quant au processus du rendement, il est lié à celui de la volatilité via le coefficient négatif  $\rho$  susceptible de traduire la baisse (hausse) du rendement suite à une hausse (baisse) de la volatilité. Il est donné par l'équation suivante:

$$d \ln S_t = (\alpha + \beta V_t) dt + \sqrt{V_t} dw_t + \rho dZ_{\lambda t} \quad (1.22)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres réels et  $w$  est le mouvement brownien de  $S$ .

**Andersen, Benzoni et Lund (2002)**. Il s'agit d'une extension du modèle de Bates (1996) où l'intensité du saut  $\lambda$  est changeante, soit:

$$dS_t = (\mu + cV_t - \lambda_t \bar{k}) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dz_t + k_t S_t dq_t \quad (1.23)$$

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 V_t$$

---

<sup>6</sup>Notons que d'autres auteurs ont utilisé les processus de Lévy pour modéliser l'évolution des rendements boursiers ainsi que celle de leur volatilité. Citons, par exemple, les contributions de Eberlein et Jacod (1997) et Carr et al. (2003).

où  $c$ ,  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  sont des paramètres réels. À partir de tests à base de rendements journaliers du S&P 500 sur la période 1953-1996, deux résultats ressortent: (1) la prime liée au risque de saut est changeante; et (2) le saut et la volatilité stochastique, de même que la corrélation négative prononcée entre les rendements et les chocs de volatilité, aident tous à expliquer l'évolution asymétrique du rendement.

**Pan (2002).** Dans ce modèle, l'auteur intègre le dividende  $D$  dans le processus du rendement, soit:

$$dS_t = (r_t - D_t + \eta^S V_t - \lambda V_t \bar{k}) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dz_t + dq_t \quad (1.24)$$

$$dD_t = \xi (\omega - D_t) dt + \sigma_D \sqrt{D_t} dx_t$$

où  $\omega$  est le niveau de dividende d'équilibre à long terme,  $\xi$  est la force de rappel vers  $\omega$ ,  $\sigma_D$  est la volatilité de  $D$  et  $x$  est le mouvement brownien de  $D$ . Notons que  $\eta^S V$  et  $\lambda V_t (\mu - \bar{k})$  mesurent, respectivement, la prime de risque de  $S$  et celle du saut. L'étude empirique, menée sur les prix des options sur l'indice S&P500 entre janvier 1989 et décembre 1996, dévoile que la prime de risque du saut est fortement corrélée avec la volatilité et qu'elle influence significativement le prix des options, surtout en périodes d'instabilité.

**Liu, Longstaff et Pan (2003).** Dans ce modèle, les auteurs intègrent un processus de saut dans l'évolution de la variance instantanée  $V$ , soit:

$$dS_t = (r + \eta V_t - \mu \lambda V_t) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dz_t + k_t S_t dq_t \quad (1.25)$$

$$dV_t = (\alpha - \beta V_t - \bar{k}_v \lambda_v V_t) dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dw_t + k_{v,t} dq_{v,t}$$

où  $k_v$  est la taille du saut en pourcentage de variation de  $V$ ,  $\bar{k}_v$  est la taille moyenne du saut et  $q_v$  est le processus de poisson d'intensité  $\lambda_v$ . Ce modèle a été utilisé pour dériver une solution analytique dans un contexte de choix de portefeuille. Les auteurs révèlent que dans le cas d'une évolution du rendement avec saut (la taille du

saut est déterministe) et une volatilité constante, le choix de portefeuille optimal ne dépend pas de l'horizon d'investissement. L'investisseur se rabat sur les titres sûrs à cause du risque de saut. Par ailleurs, s'il y a intégration d'un processus de saut dans l'évolution du rendement et dans celle de sa variance instantanée, le choix du portefeuille optimal dépend de l'horizon d'investissement et l'investisseur a tendance à investir dans les titres risqués. Cela s'explique par le fait que le saut de la volatilité peut couvrir, en partie, le saut du rendement vu la corrélation négative qui existe entre le rendement et sa volatilité.

**Eraker (2004).** À l'instar de Liu, Longstaff et Pan (2003), l'auteur estime que le saut dans l'évolution du rendement ne peut pas expliquer à lui seul l'hypervolatilité après le krach de 1987. Il suggère d'intégrer un processus de saut dans l'évolution de la variance instantanée  $V$ , soit:

$$dS_t = aS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dz_t + k_t S_t dq_t \quad (1.26)$$

$$dV_t = \alpha(\theta - V_t) dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dw_t + k_{v,t} dq_{v,t}$$

où  $a$  est un paramètre réel. L'étude empirique menée sur un échantillon d'options sur S&P500 entre janvier 1987 et décembre 1990 révèle une supériorité significative de la performance de ce modèle dans la prédiction du rendement et l'estimation des prix d'options.

**Christoffersen, Heston et Jacobs (2009).** Élaboré dans un contexte neutre au risque, les auteurs proposent un modèle de volatilité stochastique à deux facteurs où l'évolution du rendement est donnée:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_{1t}} S_t dz_{1t} + \sqrt{V_{2t}} S_t dz_{2t} \quad (1.27)$$

$$dV_{1t} = (a_1 - b_1 V_{1t}) dt + \sigma_1 V_{1t} dz_{3t} \quad \text{et} \quad dV_{2t} = (a_2 - b_2 V_{2t}) dt + \sigma_2 V_{2t} dz_{4t}$$

où  $V_1$  et  $V_2$  sont les deux composantes de la volatilité. Chaque composante évolue selon un processus de retour à la moyenne similaire à celui proposé par Heston (1993).

L'étude empirique, menée sur un échantillon d'options européennes sur S&P500 entre 1990-2004, révèle une supériorité significative de la performance de ce modèle par rapport à celui de Heston (1993). Les auteurs soulignent que l'avantage majeur de ce modèle réside dans sa capacité à capturer le changement, au fil du temps, de la forme *smirk* qui caractérise la courbe de la volatilité implicite selon les prix de levée des options.

### 1.3.3 Modèles de volatilité implicite

D'entrée, rappelons que Latane et Rendleman (1976) furent parmi les premiers à estimer la volatilité future d'une action par sa volatilité implicite dans les prix d'options. D'innombrables auteurs (Beckers, 1981; Canina et Figlewski, 1993; Christensen et Prabhala, 1998; etc.) ont renchéri sur le pouvoir prédictif de la volatilité implicite. Récemment, ce pouvoir prédictif fut reconnu dans plusieurs études (Ederington et Guan, 2002; Pong et al., 2004; Jiang et Tian, 2005; etc.).

Par ailleurs, les écrits récents révèlent une évidence empirique largement soutenue: la volatilité implicite est généralement plus élevée que la volatilité réalisée (Jackwerth et Rubinstein, 1996; Bakshi et Kapadia, 2003,b; Chernov, 2007; Mixon, 2009; Driessen, Maenhout et Vilkov, 2009; etc.). Par exemple, Mixon (2009), illustre l'évolution de la volatilité implicite (calculée via des options au jeu) et la volatilité réalisée (calculée via la moyenne mobile sur un mois des variations journalières) d'un portefeuille composé de 17 actions américaines durant la période 2001-2004. Ils trouvent que la volatilité implicite est plus élevée, dans la plupart des cas, que la volatilité réalisée.

De leur côté, Driessen, Maenhout et Vilkov (2009) ont estimé la volatilité implicite dans les prix d'options sur l'indice S&P100 durant la période allant du janvier 1996 au décembre 2003. En la comparant à la volatilité réalisée de cet indice sur la même période, ils trouvent qu'elle la dépasse significativement. Les auteurs attribuent ce résultat à la hausse de la corrélation entre les rendements des titres lors de la baisse du marché, ce qui affaiblit l'effet de diversification au sein de l'indice et augmente ainsi sa volatilité. Pour expliquer cette évidence empirique, divers auteurs, dont Bakshi et Kapadia (2003,a), y

voient l'effet d'une prime négative associée au risque de la volatilité. Les investisseurs n'exigeraient pas cette prime mais la paieraient pour s'assurer contre l'hypervolatilité qui coïncide d'ordinaire avec une baisse de marché.

Ci-dessous, nous présentons deux méthodes d'estimation de la volatilité implicite: (1) la méthode indirecte où la volatilité implicite est estimée à partir d'un modèle d'évaluation d'options; et (2) la méthode directe où la volatilité implicite est directement calculée à partir des prix d'options sur le marché.

### 1.3.3.1 Méthodes d'estimation indirectes

Selon cette méthode, la volatilité implicite correspond à l'écart-type du rendement qui égalise, à une date donnée, la prime de l'option  $\hat{C}$  évaluée via le modèle à sa prime  $C$  observée sur le marché, soit:

$$C_t = \hat{C}_t(S_t, K, \sigma_{imp}, \tau) \quad (1.28)$$

où  $S$  est le prix du support,  $K$  et  $\tau$  sont, respectivement, le prix de levée et le temps à échéance de l'option et  $\sigma_{imp}$  est la volatilité implicite de  $S$ , seul paramètre inconnu dans l'équation.

Traditionnellement, les intervenants sur le marché affichent leurs cotations en termes de volatilité implicite au modèle de Black-Scholes. Ainsi, l'équation (1.28) se ramène, dans le cas d'une option d'achat, à:

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) \quad (1.29)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma_{imp}^2}{2}\right)\tau}{\sigma_{imp}\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma_{imp}\sqrt{\tau}$$

où  $r$  est le taux sûr et  $N$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Soulignons qu'il n'est pas possible d'inverser l'équation (1.29) et de déterminer une expression analytique de  $\sigma_{imp}$ , ce qui nous amène à procéder via un calcul itératif.

Cependant, on admet que le modèle de Black-Scholes présente un biais systématique dans l'évaluation des options. D'une part, il surévalue les options au jeu et, d'autre part, il sous-évalue celles qui sont hors et en jeu. Ce biais d'évaluation, attribué notamment à la présupposition d'une distribution lognormale du rendement, évolue en fonction de l'écart entre le prix du support et le prix de levée de l'option (Rubinstein, 1994) et influence l'estimation de la volatilité implicite. En effet, les études empiriques menées, entre autres, par Rubinstein (1994) et Jackwerth et Rubinstein (1996), révèlent que, pour une même option, la volatilité implicite change à mesure que le cours du support s'éloigne du prix de levée de l'option. Elle est plus élevée pour les options hors et en jeu que pour les options au jeu, ce qui conduit à la forme *smile* dans la dynamique de la volatilité implicite. Cette forme serait plus accentuée pour les options à courte échéance, tendrait à décroître de façon monotone pour les options à longue échéance et disparaîtrait avec l'allongement de l'horizon temporel des options. Les explications de ce phénomène font appel, notamment, aux coûts de transaction (Leland, 1985) ou d'information (Bellalah et Jaquillat, 1995) ou à la variabilité de la liquidité des options lorsque la valeur du support s'éloigne du prix de levée de l'option (Merton, 1987).

Par ailleurs, d'autres études soutiennent plutôt l'hypothèse d'une asymétrie dans cette forme *smile*, ce qui la ramène à une forme *smirk*. Cela implique que la volatilité implicite pour les options hors jeu diffère selon la nature de l'option: elle est plus élevée dans le cas des options de ventes que dans le cas des options d'achat. Bates (1991) évoque la présence de cette forme lors de l'estimation de la volatilité implicite à partir des prix des options sur l'indice S&P500 après le krach de 1987. Il attribue l'existence d'une telle allure à l'assurance que le marché est prêt à payer pour se couvrir contre un nouveau krach en accordant une prime plus élevée aux options de vente hors jeu et aux options d'achat en jeu. Ce résultat est accrédité par Bollen et Whaley (2004) qui révèlent une demande spéciale pour les options de ventes hors jeu, utilisées comme assurance-portefeuille et Liu, Pan et Wang (2005) qui démontrent que l'aversion des investisseurs aux événements rares explique cette asymétrie. Pour leur part, Carr et Wu (2003) attribuent, à l'instar de Das et Sundaram (1999), la forme *smirk* à l'asymétrie négative

dans la distribution du rendement. Leur étude à partir d'options sur le S&P500, durant la période allant d'avril 1999 à mai 2000, indiquent que cette forme de la volatilité implicite persiste même avec des options d'une maturité élevée. Récemment, Mixon (2009) dresse une liste exhaustive des principaux résultats empiriques liés à la volatilité implicite. Outre les caractéristiques déjà soulevées, il note une certaine convexité dans l'asymétrie de la volatilité implicite.

### 1.3.3.2 Méthodes d'estimation directes

La volatilité implicite peut être extraite directement à partir des prix des options observés sur le marché sans passer par un modèle d'évaluation d'options. Pour nos fins, nous retenons le modèle de Britten-Jones et Neuberger (2000) et celui élaboré par le CBOE pour établir la valeur du VIX. Notons que plusieurs modèles ont été proposés dans ce contexte. Mentionnons Dumas, Fleming et Whaley (1998) qui modélisent la volatilité implicite comme étant une fonction déterministe de l'échéance et du prix du support, donc en l'absence d'une structure formelle pour la volatilité. Mentionnons aussi l'estimation analytique de la volatilité implicite proposée par Dupire (1994), ou numérique, par Rubinstein (1994) et Derman et Kani (1994).

**Britten-Jones et Neuberger (2000).** Les auteurs proposent une méthode simple permettant d'estimer la volatilité implicite directement à partir d'un échantillon de prix d'options sans se baser sur une modélisation spécifique de la volatilité. Ils démontrent que, dans un univers à neutre au risque, la variance du rendement d'une action ne versant pas de dividende, entre les dates  $T_1$  et  $T_2$ , est donnée par:

$$E^Q \left[ \int_{T_1}^{T_2} \left( \frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] = 2 \int_0^\infty \frac{C(T_2, K) - C(T_1, K)}{K^2} dK \quad (1.30)$$

où  $C$  est le prix observé de l'option d'achat de prix de levée  $K$  et d'échéance  $T$  et  $S$  est le prix de l'action.

L'équation (1.30) permet d'estimer la volatilité implicite d'un support à partir de

la date courante jusqu'à l'échéance  $T$ , notée  $\sigma_{0,T}$ , soit:

$$\sigma_{0,T} = \sqrt{2 \int_0^{\infty} \frac{C(T, K) - \max(S_0 - K, 0)}{K^2} dK} \quad (1.31)$$

**Modèle d'estimation du VIX.** L'indice de volatilité VIX est établi quotidiennement par la Bourse des options de Chicago (CBOE). Son niveau reflète, en tout temps, l'information disponible sur le marché susceptible d'influencer la volatilité future. Il se calcule à partir de volatilités implicites extraites des prix d'options (d'achat et de vente) sur l'indice S&P500 dont l'expiration est dans les deux mois les plus proches. Le tableau 1.1 annexé présente la procédure d'estimation du VIX, toutes définitions utiles comprises.

Notons qu'un niveau relativement élevé du VIX signale une période de grande nervosité et de forte incertitude au cours de laquelle le marché anticipe une forte volatilité, exigeant ainsi une prime de risque élevée sur les titres qui deviennent plus risqués. Par contre, un faible niveau du VIX indique, généralement, une tendance à la prise de risque. De plus, le VIX ne peut jamais avoir une valeur nulle parce que cela impliquerait une stabilité dans la dynamique de l'indice S&P 500. De la même façon, il est peu probable que son niveau se situe continuellement à des valeurs élevées parce qu'il faudrait une anticipation de variation de valeur très importante sur l'indice S&P 500. Finalement, signalons que cet indice a été utilisé, récemment, par Baker et Wurgler (2007) et Kaplanski et Levy (2010) pour mesurer la perception de risque des investisseurs sur un marché donné.

#### 1.4 Conclusion

Dans le premier essai, nous avons donné un aperçu des écrits sur la volatilité boursière. Notre revue est axée sur deux volets. Dans le premier volet, nous avons vulgarisé, d'abord, le concept de la volatilité tout en rappelant son utilité en tant que mesure du risque et son lien positif avec la perception de risque des acteurs sur le marché. Ensuite, nous avons recensé les résultats marquants touchant les deux composantes, systéma-

tique et spécifique, de la volatilité issues des modèles classiques (de marché, CAPM). Également, nous avons analysé l'effet du marché d'options sur la volatilité boursière. Finalement, nous avons synthétisé les principaux acquis en matière d'estimation de la volatilité en distinguons entre les classes de modèles à volatilité conditionnelle (de type ARCH), à volatilité stochastique et à volatilité implicite. Des modèles bien représentatifs de chaque classe sont caractérisés tant dans leurs hypothèses et leurs dynamiques que dans leur performance au niveau des tests subis. Signalons que dans les deux essais qui suivent, nous traiterons l'asymétrie de la volatilité et la prime de risque s'y rattachant.

Figure 1.1 Évolution du volume de transaction des actions versus options sur le marché américain (1930-2005)

Source : Mixon (2009), p.172. Cette figure illustre l'évolution du volume de transaction sur le marché d'actions à New-York (NYSE) comparée à celle sur le marché d'options à Chicago (CBOE).

Tableau 1.1 Procédure d'estimation de l'indice de volatilité américain (VIX)

Étapes	Démarche
Sélection de deux échantillons d'options sur S&P500	<p><b>Échantillon 1 :</b> options au jeu dont le temps à échéance est inférieur à 30 jours</p> <p><b>Échantillon 2 :</b> options au jeu dont le temps à échéance est supérieur à 30 jours.</p>
Calcul de l'indice à terme $F$ pour chaque échantillon d'options	$F_i = K_{m_i} + e^{r_i T_i} (C_{m_i} - P_{m_i})$ <p>avec <math>T_i = \frac{MM_i}{MY}</math> et <math>i = 1, 2</math></p>
Calcul de la volatilité $\sigma$ pour chaque échantillon d'options	$\sigma_i^2 = \frac{2e^{r_i T_i}}{T_i} \sum_j \frac{\Delta K_{ij}}{K_{ij}^2} Q(K_{ij}) - \frac{1}{T_i} \left( \frac{F_i}{K_{0i}} - 1 \right)^2$ <p>avec <math>\Delta K_j = 0,5 (K_{j+1} - K_{j-1})</math></p>
Calcul de VIX	$VIX = 100 \times \left( \left[ T_1 \sigma_1^2 \left( \frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) + T_2 \sigma_2^2 \left( \frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \right] \times \left( \frac{N_{365}}{N_{30}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$
	<p><math>K_{m_i}</math> est le prix de levée, dans l'échantillon <math>i</math>, pour lequel la différence absolue entre le prix de l'option d'achat <math>C_{m_i}</math> et le prix de l'option de vente <math>P_{m_i}</math> est la plus petite; <math>r_i</math> est le taux sûr jusqu'à l'échéance des options de l'échantillon <math>i</math>; <math>T_i</math> (<math>MM_i</math>) est le temps à échéance, en fraction d'année (en minutes), des options appartenant à l'échantillon <math>i</math>; <math>MY</math> est le nombre de minutes par année; <math>K_{0i}</math> est le premier prix de levée, dans l'échantillon <math>i</math>, inférieur à <math>F_i</math>; <math>Q(K_{ij})</math> est le centre de l'écart entre le cours acheteur et le cours vendeur d'une option dont le prix de levée est <math>K_{ij}</math>; <math>K_{ij}</math> est le prix de levée du <math>j^{ème}</math> option hors jeu (pour les options d'achat <math>K_{ij} &gt; F</math> et pour les options de vente <math>K_{ij} &lt; F</math>) dans l'échantillon <math>i</math>; <math>N_{T_i}</math> est le nombre de minutes jusqu'à l'échéance des options de l'échantillon <math>i</math>; <math>N_{30}</math> est le nombre de minutes par 30 jours et <math>N_{365}</math> est nombre de minutes par année.</p>

## CHAPITRE II

### L'ASYMÉTRIE DE LA VOLATILITÉ

#### 2.1 Introduction

L'entendement général veut que la volatilité des cours boursiers résulte surtout des chocs informatifs venant ébranler les perceptions de rendement et de risque des investisseurs. Il s'ensuit de brusques hausses ou baisses des cours dont l'ampleur augmente en marché nerveux, ce qui serait le cas en périodes baissières. D'où une volatilité plus grande en marché baissier qu'en marché haussier. Mais il y a plus. Que ce soit en période d'expansion ou de récession, la baisse des cours fait croître davantage la volatilité qu'une hausse des cours de même ampleur la fait décroître. Cette asymétrie dans la variation de la volatilité a été soulevée d'abord par, entre autres, Black (1976), French, Schwert et Stambaugh (1987) et Campbell et Hentschel (1992). Récemment, elle semble peu remise en question en milieu académique (Wu, 2001; Avramov, Chordia et Goyal, 2006; Bollerslev, Litvinova et Tauchen, 2006; Mele, 2007; Shamila, Shambora et Rossiter, 2009; etc.).

D'entrée, rappelons que l'explication de l'asymétrie de la volatilité passe par divers modèles issus du modèle classique de Black et Scholes (1973) où la volatilité du rendement du support est supposée constante. S'agissant des modèles de type ARCH à volatilité asymétrique, la variance conditionnelle est supposée répondre de manière asymétrique au choc selon son signe. Ainsi, un choc négatif sera suivi d'une hausse plus marquée de la variance conditionnelle que celle provoquée par un choc positif de

même ampleur. Citons, par exemple, le modèle NGARCH de Engle et Ng (1993), GJR-GARCH de Glosten, Jagannathan et Runkle (1993) et TGARCH de Zakoian (1994). Également, le développement des modèles à volatilité stochastique, où l'hétérovolatilité est due aux chocs informatifs aléatoires, a permis d'expliquer, en partie, les variations asymétriques de la volatilité. Par exemple, Hull et White (1987) attribuent à l'actif une volatilité stochastique plutôt que constante et à variations indépendantes de celles du rendement. Heston (1993) souligne ensuite les limites de cette indépendance et établit dans son modèle une corrélation, supposée négative, entre le processus du rendement et celui de sa volatilité<sup>1</sup>. Puis, Bates (1996) se particularise en ajoutant un processus de saut dans la dynamique du rendement. Plusieurs extensions ont suivi notamment celles redevables à Bakshi, Cao et Chen (1997) où le taux d'intérêt devient stochastique, à Andersen, Benzoni et Lund (2002) où l'intensité du saut est supposée changeante et à Liu, Longstaff et Pan (2003) et Eraker (2004) qui intègrent un processus de saut dans la dynamique de la volatilité. Il importe de noter aussi le recours de divers auteurs à l'utilisation des processus de Lévy pour modéliser la dynamique de la volatilité. Nous citons, par exemple, les modèles de Barndorff-Nielsen et Shephard (2001) et Carr et al. (2003)<sup>2</sup>.

Pour la plupart, les modèles évoqués ci-dessus tiennent compte de l'asymétrie de la volatilité via une corrélation négative entre la dynamique du rendement et celle de sa volatilité, ce qui permettrait d'expliquer la baisse (hausse) du rendement suite à hausse (baisse) de la volatilité, d'où l'effet rétroactif (ou effet feedback) de la volatilité. Or, même si plusieurs résultats empiriques accréditent cet effet (Campbell et Hentschel, 1992; Bekaert et Wu, 2000; Mele 2007; etc.), il ne suffirait pas à lui seul pour expliquer l'asymétrie de la volatilité en divers contextes (Wu, 2001), notamment au niveau des

---

<sup>1</sup>Cette hypothèse semble obtenir un soutien significatif dans plusieurs études empiriques récentes (Ang et al., 2006, 2009; Jiang, Xu et Yao, 2009; Brandt et Kang, 2010; etc.). Elle permet, entre autres, de mettre en évidence la présence d'une prime de risque de la volatilité.

<sup>2</sup>Pour plus de détails sur les processus qui fondent les modèles évoqués dans cette section, voir l'essai I intitulé « *Le point sur la volatilité boursière* ».

firmes (Bekaert et Wu, 2000), ce qui exige une modélisation plus développée.

Notre contribution consiste à proposer un nouveau modèle où nous ajoutons un deuxième effet, soit l'effet de levier financier, susceptible de mieux expliquer l'asymétrie de la volatilité. Notons que cet effet, soulevé d'abord par Black (1976), fait appel à l'importance de la variation du levier financier de la firme qui se répercute asymétriquement sur la volatilité de son action. Notre modèle suppose que, pour une firme donnée, la volatilité de son rendement boursier dépend de la variabilité de sa valeur marchande (reflet de son risque d'exploitation) et de son levier financier (reflet de son risque financier).

Pour estimer les paramètres de notre modèle et reconstituer des séries temporelles pour ses variables inobservables, nous recourons à la technique du filtrage particulière. Cette technique est attribuée à Gordon, Salmond et Smith (1993) et destinée au départ à des fins militaires tels que le repérage et le suivi des missiles et avions. Sa transposition aux applications financières est de plus en plus répandue. Citons, par exemple, les apports récents de Duan et Fulop (2009), Johannes, Polson et Stroud (2009) et Christoffersen, Jacobs et Mimouni (2009) dans l'estimation des modèles de crédit et de volatilité stochastique. Mentionnons que le filtrage particulière sert mieux nos fins que le filtrage typique à la Kalman vu qu'il relâche les hypothèses classiques, parfois restrictives, liées au caractère gaussien des bruits et à la linéarité (ou quasi-linéarité) des équations de transition et de mesure du modèle.

Notre étude empirique est menée avec un échantillon réunissant 332 firmes non financières du S&P500. Elle porte sur la période qui s'étend du 2 janvier 1996 au 31 décembre 2008. Les résultats montrent que, peu importe la méthodologie d'estimation utilisée (filtrage particulière ou filtrage de Kalman étendu), l'inclusion de la variation du levier financier dans le processus de la volatilité boursière permet d'améliorer la performance de prédiction du modèle. Ils révèlent également que l'asymétrie de la volatilité résulte, notamment, de l'effet rétroactif en périodes d'instabilité. Par contre, son ampleur dépend du niveau du levier financier en périodes de stabilité. En matière

de test de robustesse, les résultats obtenus, durant la période 1990-2008, avec à un échantillon de 96 firmes à données mensuelles convergent vers ceux déjà trouvés.

Ci-dessous, nous synthétisons, à la section 2, les principaux acquis au sujet de l'asymétrie de la volatilité. À la section 3, nous proposons un modèle de volatilité stochastique et asymétrique. La section 4 nous sert à présenter la technique de filtrage particulière nécessaire à l'estimation des suites inobservables de la volatilité. La section 5 est consacrée à la présentation de l'échantillon, la description de la méthodologie et les tests effectués sur le marché américain et l'analyse des résultats obtenus. Nous concluons à la section 6.

## 2.2 Revue des écrits

L'on sait depuis longtemps que la volatilité boursière au cours d'une récession marquée, comme celle d'avant la 2ème Guerre, dépasse largement celle observée en expansion, comme celle d'après Guerre. Fama (1976, p.27) souligne le danger de mêler sans discernement des données à volatilité très différentes dans leurs travaux en longue période. Mais ce sont les observations de la variation asymétrique de la volatilité qui ont tardé. Cela n'étonne pas vu que, conformément au CAPM classique, il n'existe pas de raisons, à première vue, pour qu'une même baisse ou hausse (en %) du cours d'un titre se répercute asymétriquement sur sa volatilité: la baisse du cours accroît plus sa volatilité que la hausse la fait décroître. Ce phénomène a suscité de multiples écrits où l'asymétrie de la volatilité résulte, notamment, de l'effet de levier financier ou de l'effet rétroactif<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Notons que, dans les écrits retenus, quelques autres effets, peu répandus, ont été utilisés pour expliquer, en partie, l'asymétrie de la volatilité. Par exemple, Avramov, Chordia et Goyal (2006) remettent ce phénomène à l'accès à l'information où les transactions moins fréquentes des investisseurs mieux renseignés tendent à freiner la volatilité en période haussière des cours, alors que les moins renseignés contribueraient à accentuer la volatilité en périodes baissières, d'où un effet d'asymétrie sur la volatilité.

Commençons par Black (1976) qui fut parmi les premiers à mettre en évidence le phénomène de l'asymétrie de la volatilité et qui l'explique, notamment, par l'effet de levier financier. Dans son étude empirique, menée avec 11 firmes américaines durant la période 1964-1975, il constate que la variation du levier financier de la firme se répercute asymétriquement sur la volatilité de son action. En effet, la baisse des cours augmente le poids de la dette et donc le levier financier, ce qui signifie plus de variabilité dans le bénéfice net à venir et donc plus de volatilité dans les cours<sup>4</sup>. De sa part, Christie (1982) soutient les résultats de Black (1976) en attribuant surtout au levier financier l'élasticité négative de la volatilité par rapport au niveau des cours. Plus tard, Schwert (1989) examine l'évolution de la volatilité sur le marché américain durant la période 1857-1987. Ses résultats révèlent une volatilité excessive durant la dépression des années 30 expliquée, notamment, par le levier financier et le volume des transactions.

Par ailleurs, Pindyck (1984), French, Schwert et Stambaugh (1987) et Campbell et Hentschel (1992) remettent l'asymétrie de la volatilité à l'effet rétroactif, appelé aussi l'effet feedback. Leurs études empiriques constatent qu'une volatilité en hausse incite les investisseurs à exiger une prime de risque excédentaire pour rémunérer davantage les actifs qui deviennent plus risqués. D'où, une hausse du taux de rendement exigé, et par conséquent un repli immédiat des cours. Or, ce repli est plus élevé que l'appréciation des cours causée par une baisse de la volatilité de même amplitude, ce qui reflète l'asymétrie de la volatilité. Pour Campbell et Hentschel (1992), cette asymétrie s'explique, notamment, par la variation du niveau d'aversion au risque des investisseurs qui tolèrent moins le risque en cas d'augmentation de la volatilité. D'ailleurs, ces auteurs révèlent que l'asymétrie de la volatilité s'accroît sur un marché instable. Ce résultat est soutenu, récemment, par Shamila, Shambora et Rossiter (2009), qui montrent que, durant la période 1992-2007, l'asymétrie s'accroît dans un marché instable,

---

<sup>4</sup>Mentionnons que dans le cas des firmes à dette nulle, Black (1976) évoque l'effet de levier d'exploitation comme facteur d'asymétrie. Cet effet veut qu'une même baisse ou hausse (en %) des recettes se répercute asymétriquement sur la volatilité des cours: la baisse des recettes accroît plus la volatilité des cours que la hausse la fait décroître.

particulièrement en marchés émergents sous récession.

Ajoutons aussi que l'effet rétroactif est considéré, dans divers écrits récents, comme la source principale des variations asymétriques de la volatilité. Par exemple, Bekaert et Wu (2000) intègre cet effet pour expliquer l'asymétrie au niveau de la volatilité de la valeur de la firme<sup>5</sup>. Leur étude empirique est menée avec un échantillon de 172 firmes japonaises durant la période de janvier 1985 à juin 1994. Elle révèle que la covariance entre le rendement du marché et celui de la firme est asymétrique. Elle est plus élevée en cas de chute du marché qui s'accompagne, généralement, d'une hausse brutale de la volatilité. Également, Wu (2001) propose un modèle à volatilité asymétrique, qui prolonge celui de Campbell et Hentschel (1992), où l'évolution de la volatilité, supposée conditionnelle, est régie par deux variables, soit le taux de croissance de dividende et sa variance. Son étude empirique, menée sur le marché américain durant la période 1926-1997, révèle que l'effet rétroactif est significatif surtout en période de forte volatilité. Ajoutons aussi que Mele (2007) constate que la prime de risque varie d'une manière asymétrique. Elle est plus élevée en cas d'une hausse de volatilité qu'en cas d'une baisse, ce qui explique cette variation asymétrique de la volatilité résultant de l'effet rétroactif.

Globalement, les écrits retenus soutiennent l'effet de levier financier et l'effet rétroactif comme principaux facteurs explicatifs de l'asymétrie de la volatilité. Ces deux effets se distinguent dans le type de causalité qu'il implique. En effet, l'effet rétroactif repose sur l'idée que la variation de la volatilité est à l'origine de la variation du rendement alors que l'effet de levier financier considère plutôt le contraire. Dans ce qui suit, nous jumulons ces deux effets, que nous jugeons qu'ils seraient moins concurrents que complémentaires, pour proposer un modèle susceptible de mieux refléter l'asymétrie dans la variation de la volatilité.

---

<sup>5</sup>Bekaert et Wu (2000) observent que l'effet rétroactif est rarement employé pour expliquer l'asymétrie de la volatilité au niveau des firmes. C'est plutôt l'effet de levier financier qui est communément utilisé.

## 2.3 Élaboration du modèle à volatilité asymétrique (MVAS)

Dans cette section, nous proposons un modèle où la volatilité varie asymétriquement au changement du rendement. Nous faisons appel à des variables fondamentales, telles que la dette corporative et la valeur marchande de la firme, et intégrons l'ampleur de leurs variations dans le processus de la volatilité. L'élaboration de notre modèle exige d'abord qu'on définisse la dynamique de ces variables. Ensuite, l'application du lemme d'Itô permet de décrire l'évolution du rendement ainsi que sa volatilité.

### 2.3.1 Dynamique du rendement

Soit un espace probabilisé  $(\Omega, H, Q)$  qui décrit les aléas observés sur le marché. Nous supposons que cet espace est muni d'une sigma-algèbre  $(H_t)_{t \geq 0}$  de  $H$  qui contient l'information révélée aux investisseurs à chaque instant. Dans cet espace, nous considérons les processus stochastiques  $S = (S_t : 0 \leq t \leq T)$ ,  $D = (D_t : 0 \leq t \leq T)$  et  $V = (V_t : 0 \leq t \leq T)$  qui représentent, respectivement, l'évolution du prix de l'action, la dette corporative par action et la valeur marchande de la firme par action.

**Hypothèse 1.** Supposons que  $V$  évolue selon un processus stochastique adapté à  $H$  tel que:

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma_{v,t} V_t dz_t \quad (2.1)$$

Pour sa part, la variance instantanée de  $V$ , notée  $\sigma_v^2$ , soit de type stochastique avec retour vers la moyenne. Elle obéit au processus stochastique suivant:

$$d\sigma_{v,t}^2 = \kappa (\alpha - \sigma_{v,t}^2) dt + \eta \sigma_{v,t} dw_t \quad (2.2)$$

En (2.1) et (2.2),  $\mu$  symbolise la variation attendue de  $V$ ,  $\alpha$  sa variance instantanée à long terme ou d'équilibre,  $\kappa$  la force de rappel ou de tendance vers  $\alpha$ ,  $\eta$  la volatilité de la variation de  $\sigma_v^2$  tandis que  $z$  et  $w$  représentent des mouvements browniens classiques, respectivement, de  $V$  et  $\sigma_v^2$ , liés avec le coefficient de corrélation  $\rho$ , soit:

$$\text{corr}(z_t, w_t) = \rho$$

Notons que la modélisation de l'évolution de  $\sigma_v^2$  implique que les chocs informatifs produisent de fortes variations de la valeur marchande de la firme et éloignent ainsi sa volatilité de son niveau à long terme. Il s'en suit des anticipations d'une baisse du niveau de  $\sigma_v^2$ , ce qui amène ce mouvement à s'estomper à terme. Ajoutons aussi que cette modélisation prolonge, entre autres, celle de Merton (1974), Black et Cox (1976), Fisher, Heinkel et Zechner (1989) et Longstaff et Schwartz (1995), où la variance de  $V$  est supposée constante, ce qui implique que  $V$  suit un mouvement brownien géométrique.

**Hypothèse 2.** Considérons que, pour tout instant  $t$ , la valeur de la firme par action  $V$  est strictement supérieure à la dette corporative par action  $D^6$ . Nous supposons que celle-ci évolue selon l'équation différentielle suivante:

$$dD_t = rD_t dt \quad (2.3)$$

où  $r$  est le taux sûr supposé à structure horizontale et fixe.

Sous ces hypothèses, la dynamique du rendement de l'action satisfait l'équation différentielle stochastique suivante<sup>7</sup>:

$$dS_t = \mu_{s,t} S_t dt + \sigma_{s,t} S_t dz_t \quad (2.4)$$

$$\text{avec: } \mu_{s,t} = \frac{\mu - rL_t}{1 - L_t} \quad \text{et} \quad \sigma_{s,t} = \frac{\sigma_{v,t}}{1 - L_t}$$

où  $\mu_s$  représente le coefficient de dérive (ou le rendement boursier attendu) et  $\sigma_s$  le coefficient de diffusion (ou écart-type instantanée du rendement), susceptible de mesurer la volatilité.

On constate que la volatilité du rendement boursier,  $\sigma_s$ , dépend tant de  $\sigma_v$ , la volatilité instantanée de  $V$  (reflet de son risque économique) que de son levier  $L$  (reflet

---

<sup>6</sup> Cette hypothèse permet de garantir que, pour tout instant  $t$ , le prix de l'action  $S$ , issu de notre modèle, soit toujours positif.

<sup>7</sup> Voir le calcul détaillé à l'annexe 2.7.1.

de son risque financier). Toutes autres choses égales, la hausse (baisse) de l'un de ces deux facteurs produit une hausse (baisse) du risque total,  $\sigma_s$ , des actions de la firme. Observons que  $\sigma_s$  tend vers  $\sigma_v$  si l'endettement relatif (ou  $L$ ) s'amenuise ou qu'il explose avec un endettement extrême ( $L$  tend vers 1). Également, nous constatons que pour un niveau donné de  $\sigma_v$ , le risque total,  $\sigma_s$ , réagit asymétriquement aux changements de  $L$ . Il répond différemment aux chocs de même amplitude selon leurs signes. Ainsi, pour une même variation absolue de  $L$ , la hausse de  $\sigma_s$  due à la variation positive dépasse sa baisse résultant de la variation négative.

### 2.3.2 Dynamique de la volatilité asymétrique

Tel que démontré ci-dessus, la variance instantanée du rendement  $\sigma_s^2$  dépend de la variance instantanée de la valeur de la firme  $\sigma_v^2$  et du levier financier  $L$ , soit:

$$\sigma_{s,t}^2 = \frac{\sigma_{v,t}^2}{(1 - L_t)^2} \quad (2.5)$$

En appliquant le lemme d'Itô à l'équation (2.5)<sup>8</sup>, nous obtenons la dynamique de  $\sigma_s^2$ , soit:

$$d\sigma_{s,t}^2 = (\phi_t + \omega_t \sigma_{s,t}^2 + \chi_t \sigma_{s,t}^4) dt + a_t \sigma_{s,t}^3 dz_t + b_t \sigma_{s,t} d\omega_t \quad (2.6)$$

avec:  $\sigma_{s,t} = \frac{\sigma_{v,t}}{1 - L_t}$ ;  $b_t = \frac{\eta}{1 - L_t}$ ;  $a_t = -2L_t$ ;  $\phi_t = \frac{\kappa\alpha}{\eta^2} b_t^2$ ;  $\omega_t = \frac{a_t b_t}{\eta} (\mu - r + \rho\eta) - \kappa$   
et  $\chi_t = \frac{a_t^2}{4} - a_t$

L'équation (2.6) montre que la variation de  $\sigma_s^2$  est la somme d'une dérive et de deux composantes. La première composante dépend du choc lié au processus du rendement pondéré par la variable négative  $a$ . Ainsi, un choc positif (négatif) dans le processus du rendement implique une variation négative (positive) de  $\sigma_s^2$  proportionnelle au niveau de  $L$ . Tant que ce dernier est élevé, l'effet du choc est plus remarquable. La deuxième composante dépend du choc lié au processus de  $\sigma_s^2$  pondéré par la variable

<sup>8</sup> Voir le calcul détaillé à l'annexe 2.7.2.

positive  $b$ . Or, celle-ci varie d'une manière asymétrique par rapport à  $L$ , tel que discuté ci-dessus, ce qui traduit l'effet de levier financier dans notre modèle. Mentionnons aussi que le coefficient de corrélation  $\rho$  qui lie les mouvements browniens  $z$  et  $w$  reflète l'effet rétroactif dans notre modèle.

Ajoutons aussi que pour un levier financier nul,  $S$  serait égal à  $V$ . Notre modèle se ramène, dans ce cas, à celui de Heston (1993) où la dynamique du rendement et celle de sa variance instantanée seront exprimées, respectivement, par les équations (2.1) et (2.2). Dans la partie empirique, nous comparons notre modèle à celui de Heston (1993) afin de mettre en évidence l'importance de l'inclusion du levier financier dans la modélisation de la volatilité.

Finalement, il importe de noter que notre modélisation de la volatilité, basée sur des variables fondamentales de la firme, diffère de l'approche classique adoptée dans les écrits du domaine. Elle nous permet d'expliquer davantage les variations asymétriques de la volatilité via un effet additionnel, soit l'effet de levier financier. Cependant, l'hypothèse d'absence de faillite représente une faiblesse même si nous croyons que cette supposition est assez réaliste pour les grandes firmes pour constituer une approximation acceptable.

## 2.4 Méthodologie d'estimation: le filtrage particulière

Nous procédons, en premier lieu, à une estimation d'une série temporelle de la volatilité vu que celle-ci est la seule variable inobservable dans notre modèle. Or, il existe plusieurs méthodes concurrentes pour cette estimation, notamment, celles à base de coupes transversales des prix d'options (Bakshi, Cao et Chen, 1997; Bates, 2000 et Christoffersen, Jacobs et Mimouni, 2009), des chaînes de Markov Monte Carlo (Jones, 2003 et Eraker, 2004), des moments généralisés (Pan, 2002), des moments efficaces (Andersen, Benzoni et Lund, 2002 et Chernov et al., 2003) et du maximum (ou quasi-maximum) de vraisemblance (Aït-Sahalia et Kimmel, 2007). Leur utilisation

repose d'ordinaire sur les volatilités implicites estimées à partir des prix d'options<sup>9</sup>. Or, l'évidence empirique sur la prime négative associée au risque de la volatilité indiquerait que les prix des options intègre une surprime à cause du risque de la volatilité inconstante (Bakshi et Kapadia, 2003,a,b; Carr et Wu, 2009; Todorov, 2010), ce qui indiquerait que la volatilité implicite est supérieure à la volatilité réalisée provoquant ainsi un biais d'estimation.

Afin de remédier à ce biais, nous proposons d'estimer la volatilité à partir des rendements observés. Pour ce faire, nous recourons à la technique de filtrage particulière attribuée à Gordon, Salmond et Smith (1993)<sup>10</sup>. L'avantage d'une telle technique est qu'elle permettrait, entre autres, de prendre en compte les aspects dynamiques et non-linéaires des processus sans aucune restriction ou approximation. Notons que cette technique sert déjà dans plusieurs domaines tels que l'ingénierie biologique (Liu, 2001), le pistage (Ristic, Arulampalam et Gordon, 2004), le traitement du signal, l'optimisation combinatoire (Rubinstein et Kroese, 2004), la généalogie (Del Moral, 2004), la robotique (Thrun, Burgard et Fox, 2005), le lignage des cellules (Wang et al., 2009), etc. Sa transposition aux applications financières est de plus en plus répandue. Citons les apports de Duan et Fulop (2009), Johannes, Polson et Stroud (2009) et Christoffersen, Jacobs et Mimouni (2009) pour fin d'estimation des modèles de crédit et des modèles de volatilité stochastique.

Ci-dessous, nous décrivons, en premier lieu, les principes généraux du filtrage particulière. Puis, nous appliquons cette technique pour estimer une série temporelle pour la volatilité dans notre modèle. Enfin, nous exposons la méthode d'estimation

---

<sup>9</sup>Notons qu'avec la méthode du maximum (ou quasi- maximum) de vraisemblance, les séries du rendement peuvent être utilisées pour estimer la volatilité sous condition d'approximation de la fonction de vraisemblance.

<sup>10</sup>Le filtrage particulière a été introduit par Gordon, Salmond et Smith (1993) sous le nom du *bootstrap filter*. Ces auteurs constatent que cette technique est amplement supérieure au filtrage étendu de Kalman. Avec le temps, il fut connu sous étiquette de filtrage particulière, grâce à Carpenter, Clifford et Fearnhead (1998).

paramétrique utilisée.

### 2.4.1 Principes généraux du filtrage particulaire

Pour l'essentiel, il s'agit d'une méthode d'estimation numérique basée sur des simulations séquentielles de type Monte Carlo. L'idée consiste à approximer la densité de probabilité conditionnelle du vecteur des états, compte tenu d'observations, par un échantillon de mesures ponctuelles aléatoires pondérées, appelées particules, simulées selon une distribution d'importance. Ici, on cherche à construire un ensemble de particules distribuées selon la densité approximative en cause. Notons la nature stochastique du filtrage particulaire puisque le mouvement des particules résulte de tirages aléatoires.

Il existe plusieurs versions de filtrage particulaire vu que les algorithmes diffèrent selon les distributions d'importance. Pour notre part, nous retenons la version classique de Gordon, Salmond et Smith (1993) où on intègre, dans le domaine de filtrage non linéaire, les simulations séquentielles de type Monte Carlo et le rééchantillonnage. À sa base se trouve un algorithme itératif d'échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage (EIR)<sup>11</sup>.

#### 2.4.1.1 Modèle espace-états

Le modèle espace-états est composé de deux équations. La première, dite équation de transition ou d'évolution, exprime la dépendance entre la valeur du vecteur des états  $x$  (ou variable inobservable) à une date donnée avec sa valeur passée, soit:

$$x_t = f(x_{t-1}, w_t) \quad (2.7)$$

La deuxième équation, dite équation de mesure ou d'observation, établit la relation, à une date donnée, entre  $x$  et le vecteur des observations  $y$ , soit:

$$y_t = g(x_t, v_t) \quad (2.8)$$

---

<sup>11</sup>«Sampling/ Importance Resampling method (SIR)» en anglais.

où  $w$  et  $v$  sont les bruits du modèle et  $f$  et  $g$  sont, respectivement, la fonction de transition et la fonction de mesure.

Les principales hypothèses de ce modèle espace-états sont :

**Hypothèse 1.** Le vecteur  $x$  est une chaîne de Markov de premier ordre, soit:

$$p(x_t | x_{0:t-1}) = p(x_t | x_{t-1}) \quad (2.9)$$

avec:  $x_{0:t-1} = x_0, x_1, \dots, x_{t-1}$

**Hypothèse 2.** Connaissant le vecteur des états  $x$ , les observations sont indépendantes les unes des autres, soit:

$$p(y_t | x_t, y_{0:t-1}) = p(y_t | x_t) \quad (2.10)$$

avec:  $y_{0:t-1} = y_0, y_1, \dots, y_{t-1}$

**Hypothèse 3.** À chaque date  $t$ , les densités de probabilité des bruits, notées  $p(w_t)$  et  $p(v_t)$ , sont connues.

Dans ces conditions, l'estimateur optimal, au sens de minimum de variance, du vecteur des états  $x$ , à la date  $t$ , que l'on note  $\hat{x}_t$ , est donné par:

$$\hat{x}_t = E(x_t | y_{0:t}) = \int x_t p(x_t | y_{0:t}) dx_t \quad (2.11)$$

où  $E(x_t | y_{0:t})$  et  $p(x_t | y_{0:t})$  sont, respectivement, l'espérance et la densité de probabilité, à la date  $t$ , du vecteur des états  $x$ , compte tenu des observations  $y$ .

Tel qu'exprimé dans l'équation (2.11), le calcul de  $\hat{x}$  passe par l'estimation, à chaque date  $t$ , de la densité  $p(x_t | y_{0:t})$ . Une estimation analytique de cette densité serait possible via le filtre de Kalman avec ses différentes versions (simple, étendu, sans biais<sup>12</sup>, etc.), là où les bruits du modèle sont gaussiens et les équations en cause

---

<sup>12</sup>Le filtre de Kalman sans biais («*Unscented Kalman Filter*») est attribué à Julier et Uhlmann (2004).

linéaires ou linéarisables. Quand ce n'est pas le cas, le filtrage particulaire permet une estimation numérique de cette densité sans aucune restriction. L'idée consiste à approximer cette densité par des particules dont l'évolution temporelle de chacune représente une évolution possible de  $x$ .

#### 2.4.1.2 Algorithme d'échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage (EIR)

Pour approximer la densité de probabilité  $p(x_t | y_{0:t})$  selon l'algorithme EIR, on procède en trois phases pour chaque itération : l'échantillonnage d'importance, le calcul des poids d'importance et le rééchantillonnage. Notons que pour initialiser l'algorithme EIR, on suppose une estimation de la densité à la date initiale, notée  $p(x_0)$ <sup>13</sup>. Puis on génère un ensemble de  $N$  particules suivant  $p(x_0)$ , auxquelles on accorde le même poids, soit  $1/N$ . Nous constituons ainsi un support particulaire initial, noté  $\{x_0^i\}_{i=1}^N$ .

##### Phase 1 : Échantillonnage d'importance

Il s'agit de propager aléatoirement, dans le temps, le support particulaire initial  $\{x_0^i\}_{i=1}^N$  selon la distribution d'importance caractérisée par la densité  $\pi(x_t | x_{t-1}, y_{0:t})$ . Le choix de celle-ci conditionne le bon fonctionnement de l'algorithme EIR. Cette densité doit, notamment, intégrer l'observation courante, minimiser la variance de l'erreur d'estimation du vecteur des états et limiter la dégénérescence des particules<sup>14</sup>. Elle est optimale si elle égale la densité de probabilité du vecteur des états  $x$ , vu sa valeur passée et l'observation courante, soit:

$$\pi(x_t | x_{t-1}, y_{0:t}) = p(x_t | x_{t-1}, y_t) \quad (2.12)$$

---

<sup>13</sup>La densité initiale peut être approximée par un peigne de Dirac (voir Schwartz, 1997, chap. 2 et 5).

<sup>14</sup>La dégénérescence signifie que les plus grands poids se concentrent sur un nombre limité de particules.

Dans le cadre de l'algorithme EIR retenu, Gordon, Salmond et Smith (1993) ont affiné l'équation (2.12) en approximant la densité de la distribution d'importance par la densité du vecteur des états  $x$ , vu sa valeur passée seulement, soit:

$$\pi(x_t | x_{t-1}, y_{0:t}) = p(x_t | x_{t-1}) \quad (2.13)$$

Cette approximation implique que l'évolution de chaque particule  $x^i$  évolue entre deux dates successives, de façon aléatoire et indépendante, selon l'équation de transition déjà évoquée, soit:

$$x^i = f(x_{t-1}^i, w_t) \quad (2.14)$$

où  $w_t$  est généré à partir de la densité de probabilité  $p(w_t)$  supposée connue.

Compte tenu de cette approximation, nous aurons, à chaque date  $t$ , un ensemble de  $N$  particules, soit  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$ .

### Phase 2 : Calcul des poids d'importance

Le poids d'importance d'une particule représente la probabilité que celle-ci soit un estimateur optimal du vecteur des états  $x$ . À chaque date  $t$ , nous associons à chaque particule  $x^i$ , estimée à la phase 1, le poids d'importance  $m^i$ . En général, le calcul du poids se fait d'une manière récursive en tenant compte de l'observation courante, soit:

$$m_t^i = m_{t-1}^i \frac{p(y_t | x_t^i) \times p(x_t^i | x_{t-1}^i)}{\pi(x_t^i | x_{t-1}^i, y_{0:t})} \quad (2.15)$$

L'approximation selon Gordon, Salmond et Smith (1993) réduit l'équation (2.15) à une forme simplifiée, soit:

$$m_t^i = m_{t-1}^i p(y_t | x_t^i) \quad (2.16)$$

Pour s'assurer que la somme des poids d'importance égale l'unité, la normalisation s'impose. Cela nous permettra de trouver, à chaque date  $t$ , le poids d'importance normalisé  $\hat{m}^i$ , soit:

$$\hat{m}_t^i = \frac{m_t^i}{\sum_{i=1}^N m_t^i} \quad (2.17)$$

Ainsi, l'ensemble de  $N$  particules  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$ , estimé à la phase 1, sera associé à une suite de poids  $\{\hat{m}_t^i\}_{i=1}^N$ . Mentionnons que dans le cas où la distribution d'importance diffère significativement de la distribution à estimer, les poids auront tendance à prendre des valeurs disparates. En effet, tous les poids d'importance normalisés deviennent nuls sauf un qui prend tout le poids et ceci à cause du caractère multiplicatif de la formule récursive de calcul des poids, d'où la nécessité du rééchantillonnage.

### Phase 3: Rééchantillonnage

On rééchantillonne pour éviter que les poids dégèrent en se concentrant sur peu de particules. Pour y obvier, on élimine de l'ensemble  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$  les particules ayant des poids négligeables et on duplique les particules à grands poids, ce qui permet d'uniformiser périodiquement les poids d'importance à  $1/N$ .

À noter que plusieurs techniques concurrentes de rééchantillonnage existent<sup>15</sup>. Le rééchantillonnage multinomial s'avère le plus simple. Il vise à réduire la variance des poids d'importance. Il se pratique en simulant une suite de  $N$  aléas,  $\{u_i\}_{i=1}^N$ , tirés d'une distribution uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ , selon un ordre croissant. La particule ayant un poids d'importance  $\hat{m}_t^i$  est retenu si  $u_i$  satisfait l'équation suivante:

$$u_i \in \left[ \sum_{j=1}^{i-1} \hat{m}_j, \sum_{j=1}^i \hat{m}_j \right] \quad (2.18)$$

Les poids des particules retenues sont ensuite uniformisés à  $1/N$ .

À noter que le rééchantillonnage ne devient propice qu'en cas de dégénérescence poussée des poids d'importance. On pratique donc le rééchantillonnage à des dates aléatoires dictées par divers critères, dont ceux présentés au tableau 2.1.

Le rééchantillonnage ayant produit  $N$  particules  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$ , chacune à poids  $1/N$ , l'on peut approximer la densité conditionnelle  $p(y_t | y_{0:t})$  et initier la prochaine itération.

<sup>15</sup>Pour plus de détails sur les techniques de rééchantillonnage, lire Devroye (1986, chapitre 5).

Tableau 2.1 Quelques critères de rééchantillonnage

Critère	Démarche
<p>Coefficient de variation (CV)</p>	<p>Ce critère est utilisé par Kong, Liu et Wang (1994). Il est s'agit d'une mesure du nombre de particules inutiles; c'est-à-dire celles qui ne contribuent pas significativement à l'estimation du vecteur des états <math>x</math>. Il est donné par:</p> $CV(\{\hat{m}_i\}_{i=1}^N) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (N\hat{m}_i - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ <p>Ce critère est nul si chaque poids d'importance est égal à <math>1/N</math>. Sa valeur maximale est <math>\sqrt{N-1}</math> quand l'un des poids <math>\hat{m}_i</math> vaut 1 et les autres sont nuls. Notons que le rééchantillonnage est requis si CV est supérieur à un seuil critique donné.</p> <p>Ce critère est proposé par Liu (1996). Il est convexe et a une interprétation plus simple que CV. Il est donné par:</p> $N_{eff}(\{\hat{m}_i\}_{i=1}^N) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{m}_i)^2 \right]^{-1}$ <p>Sa valeur varie entre 1 (tous les poids d'importance sont nuls sauf un) et N (poids égaux de toutes les particules).</p> <p>Ce critère peut être exprimé en fonction du coefficient de variation CV, soit :</p> $N_{eff}(\{\hat{m}_i\}_{i=1}^N) = \frac{N}{1 + CV^2(\{\hat{m}_i\}_{i=1}^N)}$ <p>Le rééchantillonnage est requis si <math>N_{eff}</math> est inférieur à un seuil fixé par l'utilisateur.</p>
<p>L'opposé de l'entropie de Shannon (<math>\epsilon</math>)</p>	<p>Ce critère est utilisé par Pham (2001). Il s'exprime comme suit:</p> $\epsilon(\{\hat{m}_i\}_{i=1}^N) = \sum_{i=1}^N \hat{m}_i \log \hat{m}_i$ <p>Quand tous les poids d'importance sont nuls sauf un, <math>\epsilon</math> est nul. Au contraire, si tous les poids sont égaux à <math>1/N</math> alors <math>\epsilon</math> est maximal et vaut <math>\log N</math>. Le rééchantillonnage est requis si <math>\epsilon</math> est supérieur à un seuil critique.</p>

Notons qu'en l'absence de rééchantillonnage, cette densité s'approxime à partir des  $N$  particules  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$  ayant les poids d'importance  $\{\hat{m}_t^i\}_{i=1}^N$  trouvés en fin de phase 2.

Une fois réalisée l'itération à la date  $t$ , l'estimateur optimal à minimum de variance du vecteur des états  $\hat{x}_t$  se calcule soit comme suit, advenant rééchantillonnage:

$$\hat{x}_t \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{x}_t^i \quad (2.19)$$

Sinon:

$$\hat{x}_t \simeq \sum_{i=1}^N \hat{m}_t^i x_t^i \quad (2.20)$$

## 2.4.2 Application du filtrage particulaire au MVAS

Nous appliquons le filtrage particulaire afin de constituer une série temporelle représentative des volatilités inobservables. La première étape consiste à exprimer notre modèle à volatilité asymétrique (MVAS) sous forme espace-états. Puis, à la deuxième étape, nous appliquons l'algorithme EIR.

### 2.4.2.1 Expression espace-états du MVAS

L'équation de transition du modèle à volatilité asymétrique est issue de la discrétisation, avec la méthode d'Euler<sup>16</sup>, de la dynamique de  $\sigma_s^2$  établie à l'équation (2.6) comme suit:

$$\sigma_{s,t+\Delta t}^2 = \sigma_{s,t}^2 + (\phi_t + \omega_t \sigma_{s,t}^2 + \chi_t \sigma_{s,t}^4) \Delta t + a_t \sigma_{s,t}^3 \sqrt{\Delta t} z_{t+\Delta t} + b_t \sigma_{s,t} \sqrt{\Delta t} w_{t+\Delta t} \quad (2.21)$$

Quant à l'équation de mesure, nous savons que le rendement de l'action, entre les dates  $t$  et  $t + 1$ , est donné par:

$$R_{t+1} = \ln \frac{S_{t+1}}{S_t} \quad (2.22)$$

---

<sup>16</sup>A l'instar de Christoffersen, Jacobs et Mimouni (2009), nous utilisons la méthode de discrétisation d'Euler vu son utilité lorsqu'elle est appliquée aux modèles de type stochastiques.

En appliquant le lemme d'Itô à l'équation (2.22), nous aurons la dynamique suivante:

$$d \ln S_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t^2} d\langle S \rangle_t = \left( \mu_{s,t} - \frac{\sigma_{s,t}^2}{2} \right) dt + \sigma_{s,t} dz_t \quad (2.23)$$

Finalement, la discrétisation, avec la méthode d'Euler, de l'équation (2.23) nous donne:

$$\ln(S_{t+\Delta t}) = \ln(S_t) + \left( \mu_{s,t} - \frac{\sigma_{s,t}^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_{s,t} \sqrt{\Delta t} z_{t+\Delta t} \quad (2.24)$$

#### 2.4.2.2 Estimation de la volatilité avec EIR

Nous utilisons l'algorithme EIR afin d'estimer, à chaque date  $t$ , la variance instantanée du rendement  $\sigma_s^2$  sachant l'information sur  $S$ . L'initialisation de cet algorithme se fait via la variance non conditionnelle des rendements durant la période d'étude, ce qui nous permettra d'estimer  $\sigma_{s,0}^2$ . Chaque itération de cet algorithme est composée de trois phases.

La première phase correspond à l'échantillonnage d'importance. Il s'agit de propager dans le temps la variance instantanée initiale. L'objectif est de générer, à chaque date  $t$ , un ensemble de  $N$  particules qui décrivent les valeurs possibles de  $\sigma_{s,t}^2$ . Ainsi, l'ensemble  $\left\{ \sigma_{s,t+\Delta t}^{2(i)} \right\}_{i=1}^N$  est généré à partir de  $\left\{ \sigma_{s,t}^{2(i)} \right\}_{i=1}^N$ . S'agissant d'une particule donnée, notée  $\sigma_{s,t+\Delta t}^{2(i)}$ , qui décrit une valeur possible de  $\sigma_s^2$  à la date  $t + \Delta t$ , nous avons:

$$\sigma_{s,t+\Delta t}^{2(i)} = \sigma_{s,t}^{2(i)} + \left( \phi_t + \omega_t \sigma_{s,t}^{2(i)} + \chi_t \sigma_{s,t}^{4(i)} \right) \Delta t + a_t \sigma_{s,t}^{3(i)} \sqrt{\Delta t} z_{t+\Delta t}^{(i)} + b_t \sigma_{s,t}^{(i)} \sqrt{\Delta t} w_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (2.25)$$

En introduisant une transformation sur les deux processus Wiener  $z$  et  $w$ , il est possible d'éliminer cette corrélation, soit:

$$w_{t+\Delta t}^{(i)} = \rho z_{t+\Delta t}^{(i)} + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (2.26)$$

$$\text{corr} \left( z_{t+\Delta t}^{(i)}, \varepsilon_{t+\Delta t}^{(i)} \right) = 0$$

De plus, nous déduisons à partir de l'équation (2.24) que:

$$z_{t+\Delta t}^{(i)} = \frac{\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) - \left(\mu_{s,t} - \frac{\sigma_{s,t}^{2(i)}}{2}\right) \Delta t}{\sigma_{s,t}^{(i)} \sqrt{\Delta t}} \quad (2.27)$$

En substituant les équations (2.26) et (2.27) dans (2.25), nous aurons:

$$\begin{aligned} \sigma_{s,t+\Delta t}^{2(i)} &= \sigma_{s,t}^{2(i)} + \left(\phi_t + \omega_t \sigma_{s,t}^{2(i)} + \chi_t \sigma_{s,t}^{4(i)}\right) \Delta t \\ &+ \left(a_t \sigma_{s,t}^{2(i)} + b_t \rho\right) \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) - \left(\mu_{s,t} - \frac{\sigma_{s,t}^{2(i)}}{2}\right) \Delta t}{\sqrt{\Delta t}} \right] \\ &+ b_t \sigma_{s,t}^{(i)} \sqrt{(1-\rho^2) \Delta t} \varepsilon_{t+\Delta t}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

La deuxième phase correspond au calcul des poids d'importance. Ainsi, à chaque date  $t$ , nous calculons pour chaque particule  $i$  de l'ensemble  $\left\{\sigma_{s,t+\Delta t}^{2(i)}\right\}_{i=1}^N$  son poids d'importance, noté  $m_{t+\Delta t}^i$ , comme suit:

$$m_{t+\Delta t}^i = \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta t} \sigma_{s,t+\Delta t}^{(i)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(\ln\left(\frac{S_{t+2\Delta t}}{S_{t+\Delta t}}\right) - \left(\mu_{s,t} - \frac{1}{2} \sigma_{s,t+\Delta t}^{2(i)}\right) \Delta t\right)^2}{\sigma_{s,t+\Delta t}^{2(i)} \Delta t}\right) \quad (2.29)$$

Par la suite, nous normalisons ces poids d'importance comme démontré à l'équation (2.17). Nous aurons ainsi une suite de poids d'importance  $\{\hat{m}_{t+\Delta t}^i\}_{i=1}^N$  qui sera associée à l'ensemble de  $N$  particules  $\left\{\sigma_{s,t+\Delta t}^{2(i)}\right\}_{i=1}^N$ , établi à la phase 1.

La troisième phase correspond au rééchantillonnage. Cette phase est nécessaire si nous détectons la dégénérescence dans la suite des poids d'importance  $\{\hat{m}_{t+\Delta t}^i\}_{i=1}^N$ . Notre objectif consiste à éliminer les particules avec faible poids d'importance et répliquer celles avec des poids élevés. En utilisant le rééchantillonnage multinomial, nous aurons, à la fin de cette phase, un ensemble de  $N$  particules, noté  $\left\{\hat{\sigma}_{s,t+\Delta t}^{2(i)}\right\}_{i=1}^N$ , où

le poids de chaque particule est de  $1/N$ , ce qui permettra d'approximer la densité de probabilité conditionnelle  $p(\sigma_{s,t}^2 | S_{0:t})$ .

À la fin de l'itération réalisée à la date  $t$ , l'estimateur optimal au sens du minimum de variance, soit  $\hat{\sigma}_{s,t}^2$ , est calculé de deux façons. Si la phase de rééchantillonnage est requise alors ce dernier est donné par:

$$\hat{\sigma}_{s,t+\Delta t}^2 \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{s,t+\Delta t}^{2(i)} \quad (2.30)$$

Sinon:

$$\hat{\sigma}_{s,t+\Delta t}^2 \simeq \sum_{i=1}^N \hat{m}_t^i \sigma_{s,t+\Delta t}^{2(i)} \quad (2.31)$$

### 2.4.3 Estimation des paramètres

L'objectif est de trouver un estimateur optimal du vecteur des paramètres du modèle MVAS, soit  $\theta = \{\kappa, \alpha, \eta, \mu, \rho\}$ , qui s'ajuste le mieux aux données disponibles. Cependant, il vaut mieux calibrer les paramètres du processus de la volatilité relativement aux rendements des actions sans passer par la méthode du maximum (ou quasi-maximum) de vraisemblance. Celle-ci s'avère trop difficile à appliquer dans les modèles à volatilité stochastique car la fonction de vraisemblance ne peut être généralement exprimée avec précision.

Pour atteindre notre objectif, nous cherchons un estimateur du vecteur  $\theta$ , noté  $\hat{\theta}$ , qui minimise une *fonction objectif* écrite comme étant la moyenne des carrés des erreurs d'évaluation entre les prédictions du rendement dans MVAS et les observations du marché. Plus précisément, l'estimateur  $\hat{\theta}$  s'obtient en minimisant la *fonction objectif*  $Q$ , soit:

$$Q(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ \hat{R}_t(\theta, \hat{\sigma}_{s,t}^2) - R_t \right]^2 \quad (2.32)$$

où  $R_t$  et  $\hat{R}_t$  sont, respectivement, le rendement observé et le rendement estimé, à la date  $t$ ,  $\hat{\sigma}_t^2$  est la variance instantanée estimative de  $R_t$  et  $T$  est le nombre d'observations.

Vu que la variance instantanée du rendement est inobservable, la minimisation de cette fonction non linéaire exige le recours à une procédure d'optimisation itérative. Chaque itération est composée de deux étapes.

**Étape 1 :** Pour un vecteur des paramètres  $\theta$  donné, nous estimons une série temporelle pour  $\sigma_s^2$ .

**Étape 2 :** En utilisant la série temporelle de  $\sigma_s^2$  trouvée à l'étape 1, nous déduisons l'estimateur  $\hat{\theta}$  qui permet de minimiser la *fonction objectif*  $Q$ . Cet estimateur initialise la prochaine itération qui obéira la même démarche.

L'estimateur optimal de  $\theta$  est obtenu si la variation de la valeur de la fonction  $Q$  entre deux itérations est inférieure à un seuil de tolérance fixé ou si le nombre maximum d'itérations fixé est atteint.

## 2.5 Tests empiriques et résultats

L'évaluation de notre modèle à volatilité asymétrique (MVAS) se fait avec des données américaines. La performance est fonction de la capacité du modèle à approximer la volatilité et le rendement de notre échantillon composé des 332 firmes non financières, à données complètes, du S&P500. L'étude porte sur les périodes 1996-2003 et 2004-2008. La première sert à l'estimation des paramètres et à l'analyse de performance. La deuxième sert à évaluer le pouvoir prédictif de notre modèle. Nous comparons nos résultats à ceux qu'on a obtenus via le modèle MVH (modèle de volatilité stochastique proposé par Heston en 1993) afin de mettre en évidence l'importance de l'inclusion de la variation du levier financier dans la dynamique de la volatilité.

### 2.5.1 Échantillon retenu et données utilisées

Notre échantillon déjà évoqué de 332 firmes non financières<sup>17</sup> est présenté au tableau 2.2 en parallèle avec la composition du S&P500 dont il est issu. On y voit qu'il représente 71,02% de la capitalisation boursière<sup>18</sup> du S&P500. Le pourcentage monte à 85,20% si la comparaison exclut le secteur financier.

Pour chaque firme retenue, l'on extrait du fichier *COMPUSTAT* deux séries temporelles: celle de la valeur comptable de sa dette corporative sur une base annuelle et celle de sa capitalisation boursière sur une base journalière. Pour estimer le taux d'intérêt supposé constant dans notre étude, nous prenons la moyenne des 52 rendements annualisés successifs des bons du Trésor américain à 3 mois, ce qui couvre les 13 années de la période étudiée.

### 2.5.2 Méthodologie

Pour estimer les paramètres et la performance de notre modélisation, il nous faut constituer des portefeuilles indiciaires<sup>19</sup>, un par secteur d'échantillon. Comme dans l'indice S&P500, ces portefeuilles sont pondérés selon la capitalisation boursière, c'est-à-dire que l'importance de chaque firme dans le portefeuille indiciaire est proportionnelle à sa capitalisation. Pour chaque portefeuille construit, nous calculons, sur une base journalière, deux variables: sa valeur et son levier financier.

---

<sup>17</sup>Notre échantillon est composé notamment des grandes et moyennes firmes, ce qui respectera en grande partie l'hypothèse de l'absence de faillite qui fonde notre modèle à volatilité asymétrique.

<sup>18</sup>Les pondérations et les capitalisations boursières sont établies en fonction des prix de fermeture du 7 mai 2010.

<sup>19</sup>Un portefeuille indiciaire est considéré, dans notre étude, comme étant un portefeuille représentatif de son secteur.

Tableau 2.2 Importance de l'échantillon retenu dans l'indice SP500

Secteur	Composition de l'indice S&P500				Composition de l'échantillon retenu			
	N	PDI (%)	PDISF (%)	N	PDS (%)	PDI (%)	PDISF (%)	
Industries	58	10,96	13,15	47	86,30	9,46	11,35	
Matériaux	31	11,67	14,00	26	86,19	10,06	12,07	
Technologies	83	10,71	12,85	60	82,30	8,81	10,58	
Biens de consommation	41	3,39	4,07	33	82,96	2,81	3,37	
Énergie	39	21,49	25,78	31	87,62	18,83	22,59	
Santé	52	11,13	13,35	42	90,30	10,05	12,06	
Biens durables	81	10,50	12,60	62	75,94	7,97	9,57	
Services publics	36	3,50	4,20	31	86,23	3,02	3,62	
Services financiers	79	16,65	***	***	***	***	***	
Total	500	100	***	332	***	71,02	85,20	

Ce tableau rapporte la composition de l'échantillon retenu comparée à celle de l'indice S&P500. En tout, notre échantillon englobe 332 firmes non financières appartenant à 9 secteurs du S&P500. PDI, PDISF et PDS signifient, respectivement, le poids dans l'indice S&P500, le poids dans l'indice S&P500 excluant le secteur financier et le poids dans le secteur. Notons que ces poids sont établis sur la base des prix de fermeture du 7 mai 2010. N est le nombre de firmes.

La valeur du portefeuille indiciaire du secteur  $j$  à la date  $t$ , notée  $PIS_t^j$ , est donnée par:

$$PIS_t^j = \frac{\sum_{i=1}^m S_{it}^j \times N_{it}}{\sum_{i=1}^m S_{i0}^j \times N_{i0}} PIS_0^j \quad (2.33)$$

où  $S_i^j$  et  $N_i$  sont, respectivement, le prix unitaire et le nombre d'actions de la firme  $i$  qui appartient au secteur  $j$ ,  $m$  est le nombre de firmes retenues dans le secteur  $j$  et  $PIS_0^j$  est la valeur du portefeuille indiciaire à la journée de base<sup>20</sup>.

Par ailleurs, le levier financier du portefeuille indiciaire du secteur  $j$  à la date  $t$ , noté  $PILF_t^j$ , se calcule comme suit:

$$PILF_t^j = \frac{\sum_{i=1}^m D_{it}^j}{\sum_{i=1}^m D_{it}^j + (S_{it}^j \times N_{it})} \quad (2.34)$$

où  $D_i^j$  correspond à la valeur comptable de la dette corporative, supposée constante durant l'année<sup>21</sup>, de la firme  $i$  qui appartient au secteur  $j$ .

Puis, nous construisons notre portefeuille global de 332 firmes, supposé représentatif de notre échantillon. Nous procédons d'une façon similaire à celle utilisée pour construire et calculer les différentes variables des portefeuilles indiciaires. Les tableaux 2.3 et 2.4 donnent les statistiques descriptives des portefeuilles construits pour les deux sous-périodes étudiées, toutes définitions utiles comprises. Nous constatons que la première sous-période, soit de 2 janvier 1996 au 31 décembre 2003, se démarque par des rendements annuels moyens positifs, et ce pour tous les portefeuilles construits (variant entre 9,05% et 18,31%). En revanche, la deuxième sous-période, soit de 2 janvier 2004 au 31 décembre 2008, se distingue par l'instabilité de la performance de ces portefeuilles.

<sup>20</sup>La journée de base correspond au début de la période d'étude, soit le 2 janvier 1996.

<sup>21</sup>Cette hypothèse a été utilisée par Bekaert et Wu (2000) pour estimer le levier financier de la firme sur une base journalière.

En effet, 4 portefeuilles sur 9 présentent un rendement annuel moyen négatif (variant entre -4,20% et -0,20%). Pour le reste, le rendement annuel moyen est positif et varie entre (0,02% et 18,83%). Quant au portefeuille global, sa performance est largement positive à la première sous-période, soit un rendement annuel moyen de 14,50%, et plutôt légèrement négative à la deuxième sous-période, soit un rendement annuel moyen de -0,20%.

Par ailleurs, il importe de noter que le niveau d'endettement, calculé via le levier financier, semble varier d'un portefeuille à un autre. À la première-sous période, les portefeuilles indiciaires des secteurs des services publics et des matériaux affichent des leviers financiers les plus élevés (respectivement 54,52% et 31,25%) contre un plus faible niveau de levier financier pour les portefeuilles indiciaires des secteurs de santé et des technologies (respectivement 7,27% et 9,41%). La deuxième sous-période s'avère liée à un niveau du levier financier toujours élevé pour le secteur de services publics (45,46%) et relativement stable pour les secteurs de santé et des technologies (respectivement 10,24% et 11,01%). Quant au portefeuille global, son levier financier a considérablement augmenté entre les deux périodes pour passer de 15,65% à 28,17%, soit une variation positive de 80%. Cela pourrait être expliqué en partie par la chute du rendement moyen de ce portefeuille pendant la deuxième sous-période.

Finalement, nous constatons que les coefficients d'asymétrie des distributions des rendements des portefeuilles construits, durant les deux sous-périodes, sont différents de zéro (4 sur 9 portefeuilles ont des coefficients d'asymétrie positifs à la première sous-période contre 6 sur 9 à la deuxième sous-période). Cela reflète une asymétrie qui caractérise ces distributions. Il importe de noter qu'un coefficient d'asymétrie positif (négatif) signifie une probabilité de hausse (baisse) du rendement plus grande que celle de sa baisse (hausse). Également, ces distributions s'avèrent plus épaisses que la distribution normale (les coefficients d'aplatissement sont largement plus grands que 3), surtout à la deuxième-sous période, indiquant ainsi que la probabilité des événements rares est plus élevée que celle dans la distribution normale. Cela n'est pas surprenant vu que, généralement, cette probabilité augmente en périodes de forte instabilité.

Tableau 2.3 Statistiques descriptives liées aux portefeuilles construits (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003)

Portefeuille	N	Moyenne	Écart-type	Max	Min	S	K
Industries	47	$\Delta PIS$ 0,1731	0,2971	0,1140	-0,1029	0,1453	5,7873
		$PILF$ 0,1155	0,4519	0,1788	0,0642	0,1228	1,9377
Matériaux	26	$PIS$ 0,0905	0,1829	0,0717	-0,0496	0,2851	5,9760
		$PILF$ 0,3125	0,6483	0,4107	0,2424	0,2557	1,8989
Technologies	60	$\Delta PIS$ 0,1565	0,2729	0,1022	-0,0655	0,1599	4,6873
		$PILF$ 0,0941	0,3757	0,1644	0,0452	-0,1561	2,4835
Biens de consommation	33	$\Delta PIS$ 0,1295	0,1667	0,0605	-0,0816	-0,2155	7,4244
		$PILF$ 0,1690	0,3277	0,2203	0,1233	-0,1233	2,2608
Énergie	31	$\Delta PIS$ 0,1181	0,1986	0,0763	-0,0675	0,0520	5,5470
		$PILF$ 0,1884	0,7207	0,3021	0,1120	0,5623	2,1804
Santé	42	$\Delta PIS$ 0,1515	0,2022	0,0647	-0,0653	-0,0949	4,8590
		$PILF$ 0,0727	0,2102	0,1078	0,0430	-0,0311	2,2024
Biens durables	62	$\Delta PIS$ 0,1831	0,2737	0,0850	-0,1730	-0,4752	9,8132
		$PILF$ 0,2211	0,9721	0,3614	0,1137	0,2882	2,1009
Services publics	31	$\Delta PIS$ 0,0953	0,1664	0,0835	-0,0869	-0,2716	12,0693
		$\Delta PILF$ 0,5452	0,7187	0,6778	0,4516	0,3310	2,4374
Portefeuille global	332	$\Delta PIS$ 0,1450	0,2058	0,0656	-0,0756	-0,0227	5,6097
		$PILF$ 0,1565	0,5080	0,2252	0,0985	0,1326	1,7664

Ce tableau rapporte les statistiques descriptives des portefeuilles construits durant la première sous-période, soit du 2 janvier 1996 au 31 décembre 2003. Toutes ces statistiques sont exprimées sur une base journalière sauf la moyenne et l'écart-type qui sont annualisés. Les portefeuilles construits sont pondérés selon la capitalisation boursière. La valeur de base de chaque portefeuille correspond à la valeur au marché de celui-ci au 2 janvier 1996.  $\Delta PIS$  et  $PILF$  signifient, respectivement, le rendement du portefeuille et son levier financier.  $S$  est le coefficient d'asymétrie alors que  $K$  est le coefficient d'aplatissement.  $N$  est le nombre de firmes par secteur.

Tableau 2.4 Statistiques descriptives liées aux portefeuilles construits (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008)

Portefeuille	N	Moyenne	Écart-type	Max	Min	S	K
Industries	47	$\Delta PIS$ -0,0420	0,2587	0,1104	-0,1076	-0,3148	15,5056
		<i>PILF</i> 0,1466	0,4134	0,3014	0,1238	2,9861	12,5819
Matériaux	26	<i>PIS</i> 0,0002	0,2854	0,1241	-0,1286	-0,2065	13,6563
		<i>PILF</i> 0,2434	0,5871	0,4226	0,1957	1,5449	6,0165
Technologies	60	$\Delta PIS$ -0,0069	0,2273	0,1229	-0,0870	0,4055	14,1842
		<i>PILF</i> 0,1101	0,3185	0,2016	0,0880	1,9818	7,2615
Biens de consommation	33	$\Delta PIS$ 0,0458	0,1546	0,0983	-0,0636	0,7355	20,3595
		<i>PILF</i> 0,1751	0,1122	0,2065	0,1591	1,0391	4,6071
Énergie	31	$\Delta PIS$ 0,1883	0,3243	0,1824	-0,1543	0,0633	16,2439
		<i>PILF</i> 0,1372	0,4102	0,2006	0,0967	0,6333	2,5991
Santé	42	$\Delta PIS$ 0,0088	0,1762	0,1229	-0,0717	0,6248	22,0502
		<i>PILF</i> 0,1024	0,2038	0,1575	0,0851	1,4712	5,2335
Biens durables	62	$\Delta PIS$ -0,0298	0,2613	0,1191	-0,0893	0,3361	10,9542
		<i>PILF</i> 0,1905	0,4525	0,3580	0,1548	2,2880	10,0697
Services publics	31	$\Delta PIS$ 0,1003	0,2116	0,1347	-0,0835	0,8425	19,5462
		$\Delta PILF$ 0,4546	0,7733	0,5538	0,3632	0,1771	2,0769
Portefeuille global	332	$\Delta PIS$ -0,0020	0,2063	0,1047	-0,0866	-0,2008	15,7539
		<i>PILF</i> 0,2817	0,2894	0,3706	0,2411	2,9064	12,4916

Ce tableau rapporte les statistiques descriptives des portefeuilles construits durant la deuxième sous-période, soit du 2 janvier 2004 au 31 décembre 2008. Toutes ces statistiques sont exprimées sur une base journalière sauf la moyenne et l'écart-type qui sont annualisés. Les portefeuilles construits sont pondérés selon la capitalisation boursière.  $\Delta PIS$  et *PILF* signifient, respectivement, le rendement du portefeuille et son levier financier. *S* est le coefficient d'asymétrie alors que *K* est le coefficient d'aplatissement. *N* est le nombre de firmes par secteur.

### 2.5.3 Estimation des paramètres

Le vecteur des paramètres  $\theta = \{\kappa, \alpha, \eta, \mu, \rho\}$  définit le processus du rendement et celui de sa variance instantanée dans les deux modèles sélectionnés, soit MVAS et MVH. Son estimateur optimal est obtenu en minimisant la fonction objectif  $Q$  établie dans l'équation (2.32). Le tableau 2.5 rapporte, pour chaque modèle et selon le portefeuille construit, les estimateurs paramétriques optimaux ainsi que leurs intervalles de confiance à 95% et ce durant la première sous-période, soit du 2 janvier 1996 au 31 décembre 2003.

Il importe de noter que la signification de ces paramètres communs n'est pas la même pour les deux modèles. En effet, dans MVH ces paramètres caractérisent le processus du rendement ainsi que sa variance instantanée alors que dans MVAS ces paramètres sont liés plutôt à la variation de la valeur marchande de la firme ( $V$ ) et à sa variance instantanée  $\sigma_v^2$ . Ainsi, les paramètres  $\mu$ ,  $\alpha$  et  $\eta$  représentent, respectivement dans MVH (MVAS), le rendement attendu (la variation attendue de  $V$ ), le rendement d'équilibre à long terme (la variation d'équilibre à long terme de  $V$ ) et l'écart-type de la variance du rendement (de  $V$ ). Par ailleurs,  $\kappa$  et  $\rho$  sont, respectivement, la force de rappel vers  $\alpha$  et le coefficient corrélation entre les mouvements browniens du processus du rendement (de  $V$ ) et celui de sa variance instantanée.

Rappelons que la minimisation de la *fonction objectif*  $Q$  exige l'utilisation d'un algorithme d'optimisation itératif. À chaque itération, deux critères d'arrêt sont utilisés: (1) l'atteinte de 1000 itérations ou (2) la convergence, au seuil de  $10^{-7}$ , des valeurs des paramètres ou de la *fonction objectif*  $Q$ . De plus, l'initialisation de notre algorithme obéit à deux règles. Premièrement, les paramètres et sont initialisés dans MVH (MVAS), respectivement, avec le rendement moyen (la variation moyenne de  $V$ ) du portefeuille indiciaire et la variance non conditionnelle du rendement (de  $V$ ) durant la première sous-période. Quant aux autres paramètres, soit  $\kappa$ ,  $\eta$  et  $\rho$ , ils sont initialisés avec des valeurs arbitraires différentes afin d'augmenter la probabilité que les estimateurs obtenus coïncident avec la valeur minimale de la fonction objectif  $Q$ .

Tableau 2.5 Estimateurs optimaux des paramètres des modèles retenus

Portefeuille	Modèle	$\mu$	$\kappa$	$\alpha$	$\eta$	$\rho$
Industries	MVH	0,1708 [0,1610 0,1806]	2,5831 [2,3675 2,7987]	0,0901 [0,0803 0,0998]	0,1062 [0,0913 0,1211]	-0,3832 [-0,4048 -0,3616]
	MVAS	0,1661 [0,1573 0,1749]	2,5468 [2,3411 2,7526]	0,0653 [0,0533 0,0773]	0,1004 [0,0841 0,1167]	-0,3036 [-0,3212 -0,2860]
Matériaux	MVH	0,0877 [0,0808 0,0946]	2,6188 [2,4424 2,7952]	0,0325 [0,0263 0,0387]	0,1048 [0,0907 0,1189]	-0,4157 [-0,4303 0,4011]
	MVAS	0,0841 [0,0763 0,0919]	2,6216 [2,4472 2,7962]	0,0154 [0,0113 0,0195]	0,1001 [0,0861 0,1140]	-0,2946 [-0,3083 -0,2809]
Technologies	MVH	0,1506 [0,1445 0,1567]	2,5572 [2,3945 2,7199]	0,0765 [0,0726 0,0804]	0,1023 [0,0923 0,1123]	-0,4059 [-0,4177 -0,3941]
	MVAS	0,1429 [0,1360 0,1498]	2,5810 [2,4320 2,7299]	0,0629 [0,0584 0,0674]	0,1012 [0,0922 0,1092]	-0,2899 [-0,2997 -0,2801]
Biens de consommation	MVH	0,1285 [0,1211 0,1359]	2,5150 [2,3680 2,6620]	0,0277 [0,0236 0,0318]	0,1043 [0,0955 0,1131]	-0,4023 [-0,4141 -0,3906]
	MVAS	0,1210 [0,1133 0,1286]	2,4808 [2,3260 2,6356]	0,0194 [0,0184 0,0204]	0,1001 [0,0921 0,1081]	-0,3067 [-0,3194 -0,2940]
Énergie	MVH	0,1207 [0,1150 0,1264]	2,5754 [2,4598 2,6910]	0,0375 [0,0363 0,0386]	0,1030 [0,0955 0,1091]	-0,4088 [-0,4209 -0,3966]
	MVAS	0,1238 [0,1189 0,1287]	2,5203 [2,3713 2,6693]	0,0265 [0,0251 0,0278]	0,1008 [0,0939 0,1076]	-0,3002 [-0,3104 -0,2901]

(VOIR SUITE)

Portefeuille	Modèle	$\mu$	$\kappa$	$\alpha$	$\eta$	$\rho$
Santé	MVH	0,1578 [0,1537 0,1619]	2,5243 [2,3891 2,6595]	0,0405 [0,0393 0,0417]	0,1019 [0,0952 0,1086]	-0,4011 [-0,4107 -0,3915]
	MVAS	0,1469 [0,1421 0,1518]	2,6606 [2,5273 2,7939]	0,0338 [0,0324 0,0352]	0,1002 [0,0927 0,1076]	-0,2965 [-0,3067 -0,2863]
Biens durables	MVH	0,1776 [0,1735 0,1817]	2,5348 [2,4074 2,6622]	0,0730 [0,0720 0,0739]	0,1032 [0,0971 0,1093]	-0,4163 [-0,4259 -0,4067]
	MVAS	0,1420 [0,1375 0,1465]	2,5493 [2,4239 2,6747]	0,0472 [0,0460 0,0484]	0,1053 [0,0986 0,1120]	-0,3031 [-0,3121 -0,2941]
Services publics	MVH	0,0968 [0,0917 0,1019]	2,6256 [2,4943 2,7569]	0,0234 [0,0223 0,0245]	0,1062 [0,0989 0,1135]	-0,4044 [-0,4120 -0,3967]
	MVAS	0,1018 [0,0967 0,1069]	2,4354 [2,3041 2,5667]	0,0125 [0,0114 0,0136]	0,1040 [0,0967 0,1113]	-0,3066 [-0,3142 -0,2990]
Portefeuille global	MVH	0,1452 [0,1395 0,1509]	2,5203 [2,3870 2,6536]	0,0445 [0,0433 0,0457]	0,1008 [0,0932 0,1084]	-0,4002 [-0,4076 -0,3928]
	MVAS	0,1322 [0,1267 0,1377]	2,5171 [2,3858 2,6484]	0,0303 [0,0291 0,0315]	0,1001 [0,0932 0,1069]	-0,3141 [-0,3209 -0,3072]

Ce tableau rapporte, pour chaque modèle et selon le portefeuille construit, les estimateurs paramétriques optimaux ainsi que leurs intervalles de confiance à 95% et ce durant la première sous-période, soit du 2 janvier 1996 au 31 décembre 2003. MVH et MVAS signifient, respectivement, le modèle à volatilité stochastique de Heston (1993) et le modèle à volatilité asymétrique.  $\mu$ ,  $\alpha$  et  $\eta$  représentent, respectivement dans MVH (MVAS), le rendement attendu (la variation attendue de  $V$ ), le rendement d'équilibre à long terme (la variation d'équilibre ou à long terme de  $V$ ) et l'écart-type de la variance du rendement (de  $V$ ). De plus,  $\kappa$  est la force de rappel vers  $\alpha$  et  $\rho$  est le coefficient de corrélation. Les estimateurs optimaux de ces paramètres sont exprimés sur une base annuelle.

D'une façon générale, les résultats révèlent une relative faiblesse de l'estimateur de la force de rappel  $\kappa$  dont la valeur ne dépasse pas 2,6256 pour MVH contre 2,6606 pour MVAS. Cela pourrait être interprété comme indice du lent retour de la variance instantanée (du rendement dans MVH et de la variation de  $V$  dans MVAS) vers son niveau d'équilibre à long terme. À noter que nos résultats sont différents de ceux de Christoffersen, Jacobs et Mimouni (2009) où l'estimateur de  $\kappa$ , dans MVH, est de l'ordre de 5,7903, obtenu en appliquant la méthode de maximum de vraisemblance sur une série de rendement de S&P500 durant 1980-1999. Il semble que cette différence est inhérente au choix de la période de l'étude et de la méthode d'estimation. D'ailleurs, en utilisant la méthode de moindres carrées sur une série temporelle de coupes transversales de prix d'options durant 1990-1992, ces auteurs trouvent que l'estimateur de  $\kappa$  baisse considérablement à 0,8727.

Par ailleurs, les résultats connus sur la relation négative entre la variation du rendement et celle de sa variance instantanée (Eraker, 2004; Ang et al., 2006, 2009; Jiang, Xu et Yao, 2009; etc.) se retrouvent dans les nôtres via notre estimateur de  $\rho$  (allant de 38,32% à 41,63% en valeur absolue selon le portefeuille construit) dans MVH<sup>22</sup>. Aussi, il s'avère que la variation de  $V$  et celle de sa variance instantanée sont inversement liées vue la valeur négative de l'estimateur de  $\rho$  (allant de 28,99% à 31,41% en valeur absolue selon le portefeuille indiciaire) dans MVAS. Notons que la valeur négative de  $\rho$  traduit l'effet rétroactif dans les deux modèles étudiées, ce qui signifie qu'une hausse (baisse) du rendement s'accompagne d'une chute (hausse) de la volatilité.

Finalement, il semble que le rendement attendu et la variation attendue de  $V$  soient influencés négativement pour les portefeuilles indiciaires surendettés. En effet, nous constatons que les portefeuilles indiciaires des secteurs des matériaux et des services publics, soit les plus endettés, se distinguent par des rendements attendus relativement

---

<sup>22</sup>Notons que nos résultats sont comparables à ceux d'Eraker (2004) où l'estimateur de  $\rho$  est égal à -0,5690 et différent, encore une fois, de ceux de Christoffersen, Jacobs et Mimouni (2009) où cet estimateur est évalué à -0,9087.

faibles de l'ordre de 8,77% et 9,68% respectivement (une variation attendu de  $V$  de 8,41% et 10,18% respectivement). En revanche, les portefeuilles indiciaries les moins endettés, tels que ceux des secteurs de la santé, des technologies et des industries, se distinguent par un rendement attendu qui dépasse 15% (une variation attendue de  $V$  dépassant 14%). Cela s'accorde à nos attentes et révèle l'effet significatif du niveau d'endettement de la firme sur son rendement boursier attendu ainsi que sa valeur marchande anticipée. Toutefois, il faut préciser, qu'aucune relation évidente entre le rendement attendu (variation attendue de  $V$ ) et le levier financier ne peut être décelée, ce qui signifie l'existence d'autres facteurs explicatifs de l'évolution du rendement et de la valeur marchande de la firme.

#### **2.5.4 Volatilité estimée, analyse de performance et pouvoir prédictif**

Dans cette section, nous analysons d'abord les séries temporelles de la volatilité estimée obtenues pour chaque portefeuille construit selon les deux modèles retenus, MVH et MVAS. Puis, nous analysons leur performance durant la première sous-période, soit de 2 janvier 1996 au 31 décembre 2003. Enfin, nous jugeons de leur pouvoir prédictif durant la deuxième sous-période, soit du 2 janvier 2004 au 31 décembre 2008.

##### **2.5.4.1 Analyse de la volatilité estimée**

Vu les valeurs paramétriques optimales obtenues au tableau 2.5, nous estimons, pour chacun des portefeuilles construits, la série temporelle de la variance instantanée de son rendement durant la première sous-période. Au tableau 2.6, on caractérise les estimés de la variance instantanée obtenues avec MVH et celles obtenues avec MVAS. De plus, les figures 2.1 à 2.5 annexées illustrent l'évolution de ces estimés comparée à celle du rendement observé et du levier financier, et ce pour tous les portefeuilles construits.

En général, on constate que l'écart, en valeur absolue, entre les moyennes des volatilités estimées avec les deux modèles est grand pour les portefeuilles indiciaries à

levier financier élevé et réduit pour ceux à levier faible. En effet, pour le portefeuille indiciaire du secteur de la santé, à levier le plus faible (7,27%), l'écart est à son minimum, soit 0,19% (20,09% moins 19,90%). En revanche, cet écart s'accroît à mesure que le levier du portefeuille augmente. Il atteint un maximum de 9,87% (25,47% moins 15,60%) dans le cas du portefeuille indiciaire du secteur des services publics à levier le plus élevé (54,52%). Ainsi, les séries des volatilités obtenues révèlent que les firmes les plus endettées présentent, en moyenne, le risque le plus élevé, ce qui s'accorde aux résultats de Black (1976).

Par ailleurs, il semble que s'agissant des secteurs carrément plus endettés, MVAS comparé au MVH génère des suites de volatilité à dispersion plus grande. En effet, nous constatons que pour les portefeuilles indiciaires des secteurs des matériaux et des biens durables, qui ont des leviers financiers moyens relativement élevés (respectivement 31,25% et 22,11%), l'écart entre l'écart-type de la volatilité estimée avec MVAS (respectivement 4,28% et 3,83%) et celui de la volatilité estimée avec MVH (respectivement 1,26% et 1,33%) est relativement élevé. Cet écart se creuse encore, toujours en faveur du MVAS, pour atteindre un niveau maximal, soit de 5,70% (7,16% pour MVAS contre 1,46% pour MVH) pour le portefeuille indiciaire du secteur des services publics à levier le plus grand. Notons par ailleurs que le portefeuille indiciaire du secteur de la santé affiche l'écart minimal, soit 0,42% (2,27% pour MVAS moins 1,85% pour MVH), alors que son levier est le plus faible (7,27%).

Finalement, nous constatons que la distribution des séries de la volatilité estimée est plutôt asymétrique, et ce pour les deux modèles utilisés. En effet, les coefficients d'asymétrie diffèrent de zéro quoiqu'ils soient généralement positifs, ce qui signifie que la probabilité de hausse de la volatilité est plus grande que celle de sa baisse durant la première sous-période d'étude. Notons aussi que les distributions des séries obtenues avec MVAS paraissent plus épaisses des deux côtés par rapport à celles obtenues avec MVH. Ceci se révèle dans des coefficients d'aplatissement plus élevés (de 2,7239 à 4,0370 pour MVAS et de 2,3452 à 3,7741 pour MVH). L'indication ici serait que l'inclusion du levier dans le processus de la volatilité influence positivement la probabilité des événements rares.

Tableau 2.6 Statistiques descriptives liées aux estimés de la volatilité (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003)

Portefeuille	Moy.	É-type	Max	Min	S	K	RMSE	DM	pv	RMSE <sub>k</sub>	DM <sub>k</sub>	pv <sub>k</sub>
Industries	MVH	0,2990	0,0109	0,3564	0,2773	0,79	2,45	0,0164	4,78	0,0093	5,97	0,0097
	MVAS	0,2968	0,0233	0,3523	0,2221	-0,11	2,72	0,0148		0,0201		
Matériaux	MVH	0,1798	0,0126	0,2181	0,1518	0,30	2,34	0,0109	6,05	0,0008	8,25	0,0089
	MVAS	0,1912	0,0428	0,3138	0,0659	0,24	3,14	0,0085		0,0127		
Technologies	MVH	0,2756	0,0144	0,3198	0,2482	0,63	2,45	0,0141	2,78	0,1208	2,31	0,0643
	MVAS	0,2662	0,0297	0,3576	0,2075	0,56	3,05	0,0142		0,0162		
Biens de consommation	MVH	0,1652	0,0122	0,2393	0,1435	1,05	2,47	0,0112	5,73	0,0019	6,11	0,0081
	MVAS	0,1720	0,0267	0,2380	0,1068	0,14	3,44	0,0095		0,0157		
Énergie	MVH	0,1942	0,0103	0,2504	0,1701	0,28	3,24	0,0123	6,72	0,0001	8,72	0,0075
	MVAS	0,1898	0,0244	0,2601	0,1381	0,70	3,08	0,0108		0,0135		
Santé	MVH	0,2009	0,0185	0,2391	0,1790	0,16	3,14	0,0115	2,09	0,0552	3,99	0,0252
	MVAS	0,1990	0,0227	0,2443	0,1351	0,09	3,30	0,0109		0,0137		
Biens durables	MVH	0,2665	0,0133	0,3105	0,2342	0,09	3,09	0,0143	5,80	0,0023	5,56	0,0098
	MVAS	0,2762	0,0383	0,3712	0,1951	0,03	3,16	0,0123		0,0163		
Services publics	MVH	0,1547	0,0146	0,2361	0,1056	0,60	3,77	0,0128	9,47	0,0001	8,53	0,0051
	MVAS	0,2560	0,0716	0,5091	0,0876	0,84	4,03	0,0089		0,0132		
Portefeuille global	MVH	0,2098	0,0128	0,2513	0,1794	0,56	2,90	0,0125	4,24	0,0067	6,91	0,0075
	MVAS	0,2007	0,0215	0,2592	0,1481	-0,19	3,36	0,0108		0,0146		

Ce tableau rapporte les estimés de la volatilité, les mesures *RMSE*, les statistiques *DM* et les *p*valeurs (*pv*) du test du Diebold et Mariano (1995), et ce durant la première sous-période, soit du 2 janvier 1996 au 31 décembre 2003. La volatilité représente l'écart-type estimé (É-type), sur une base journalière puis annualisée, en utilisant l'algorithme EIR (avec un nombre de particules égal à 1000) et les valeurs optimales des paramètres présentées dans le tableau 2.5. *RMSE* est la racine de la moyenne des carrés des erreurs d'estimation. Elle est calculée sur une base journalière puis annualisée. *pv* correspond à la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse nulle (aucun des deux modèles n'est préférable à l'autre). Par exemple, si *pv* est inférieur à 1% alors l'hypothèse nulle est rejetée au seuil de 1%. Les trois dernières colonnes du tableau présentent les mesures *RMSE*, les statistiques *DM* et les *p*valeurs obtenus en utilisant la méthode de filtrage de Kalman étendu plutôt que le filtrage particulière.

### 2.5.4.2 Analyse de la performance des modèles étudiés

Pour apprécier la performance des deux modèles étudiés, nous comparons d'abord leurs erreurs d'évaluation entre les rendements observés sur le marché et les rendements théoriques obtenus avec les séries de la volatilité estimée, et ce pour chacun des portefeuilles construits. Puis, nous appliquons le test statistique de Diebold et Mariano (1995) pour déduire et illustrer la significativité des écarts entre les erreurs d'estimation trouvés.

Pour atteindre notre objectif, nous adoptons la racine de la moyenne des carrés des erreurs (*Root Mean Squared Error*, *RMSE*) comme critère de performance, soit:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \hat{R}_t(\hat{\theta}, \hat{\sigma}_{s,t}^2) - R_t \right)^2} \quad (2.35)$$

où  $R_t$  et  $\hat{R}_t$  sont, respectivement, le rendement observé et le rendement estimé, à la date  $t$ , du portefeuille construit,  $\hat{\sigma}^2$  est la variance instantanée estimée du rendement,  $\hat{\theta}$  est l'estimateur du vecteur des paramètres  $\theta$  et  $T$  est le nombre d'observations.

Quant au test de Diebold et Mariano (1995), l'hypothèse nulle suppose que les erreurs d'estimation des deux modèles sont égales et que, par conséquent, aucun des deux modèles n'est préférable à l'autre. Ainsi, il faut rejeter l'hypothèse nulle pour avoir un résultat statistiquement significatif et ainsi affirmer qu'un des deux modèles est plus performant. La statistique de ce test, notée  $DM$ , est donnée par:

$$DM = \frac{\sum_{t=1}^T d_t}{\sqrt{T \times Var(d)}} \quad (2.36)$$

où  $d$  représente le différentiel d'erreur d'estimation  $\varepsilon_{MVH}$  et  $\varepsilon_{MVAS}$  des deux modèles, soit:

$$d_t = \varepsilon_{t,MVH} - \varepsilon_{t,MVAS}$$

Mentionnons que le calcul du *p*valeur du test (la probabilité de rejeter à tort de l'hypothèse nulle) suppose que *DM* suit asymptotiquement (lorsque *T* tend vers l'infini) une distribution normale centrée réduite<sup>23</sup>. Nous rapportons au tableau 2.6 les mesures *RMSE* trouvées, les statistiques *DM* et les *p*valeurs du test de Diebold et Mariano (1995), et ce pour chaque modèle et selon le portefeuille construit.

Pour l'essentiel, l'analyse des résultats révèle que *MVAS* performe mieux que *MVH* dans la plupart des cas. Son *RMSE*, calculé sur une base journalière puis annualisé, ne dépasse pas 1,48%, contre 1,64% pour *MVH*. La supériorité du *MVAS* s'avère plus significative pour les portefeuilles à levier financier élevé, vu l'écart plus prononcé entre les *RMSE* des deux modèles. Cet écart tend à s'estomper à mesure que le levier financier du portefeuille baisse. En effet, s'il est de 0,39%, soit 1,28% moins 0,89%, et de 0,24%, soit 1,09% moins 0,85%, pour les deux portefeuilles indiciaires aux leviers les plus élevés (services publics et matériaux), l'écart ne dépasse pas 0,06%, soit 1.15% moins 1.09%, pour le portefeuille indiciaire de la santé où le levier financier est à son plus bas (7,27%).

Ajoutons que les résultats obtenus du test de Diebold et Mariano (1995) soutiennent, en général, la surperformance du modèle *MVAS*. En effet, ce test s'avère significatif (rejet de l'hypothèse nulle au seuil de 1%) pour 7 des 9 portefeuilles construits où le levier financier moyen est supérieur à 10%. Les seuls portefeuilles indiciaires où le test n'enregistre aucune différenciation significative entre les deux modèles sont ceux à faibles leviers financiers (santé et technologies). Ces résultats sont cohérents avec le classement de performance préétabli avec le critère *RMSE* et témoignent de l'importance de l'inclusion du levier financier dans le processus de la volatilité dans l'atténuation des erreurs d'estimation, surtout pour les firmes à niveau d'endettement élevé.

---

<sup>23</sup>Notons que la puissance du test utilisé dépend du nombre d'observations. Ainsi, pour les échantillons où le nombre d'observations est réduit, ce test s'avère peu significatif, ce qui augmenterait le nombre de rejets à tort de l'hypothèse nulle. Dans ce cas, il est fortement recommandé d'utiliser la version bonifiée proposée par Harvey, Leybourne et Newbolde (1997).

Finalement, et afin de nous assurer des résultats obtenus ainsi que leur sensibilité à la méthode d'estimation utilisée, nous proposons d'estimer les deux modèles (MVH et MVAS) via le filtrage de Kalman étendu. Nous rapportons dans les 3 dernières colonnes du tableau 2.6 les résultats trouvés, et ce pour chaque modèle et selon le portefeuille construit. Globalement, les résultats trouvés convergent à ceux déjà obtenus soutenant ainsi la surperformance du MVAS. Également, la méthode d'estimation basée sur le filtrage particulière paraît plus performante que celle basée sur le filtrage de Kalman étendu vu qu'elle permet d'avoir des *RMSE* plus faibles.

#### 2.5.4.3 Pouvoir prédictif des modèles étudiés

Dans cette section, nous analysons le pouvoir prédictif des modèles MVAS et MVH en trois étapes. La première consiste à se placer au début de la deuxième sous-période, soit au 2 janvier 2004, et à obtenir, pour chaque portefeuille construit, les deux séries de volatilité prédite selon les deux modèles. Il faut alors utiliser les estimateurs paramétriques optimaux établis au tableau 2.5. À la deuxième étape, nous calculons d'abord les valeurs théoriques des rendements issues de chaque modèle en utilisant les séries des volatilités estimées à la première étape, puis nous en déduisons l'ampleur des erreurs via *RMSE*, et ce pour chaque modèle. À la troisième étape, nous appliquons le test de Diebold et Mariano (1995) afin de déterminer la significativité des écarts de prédiction obtenus. Le tableau 2.7 rapporte les statistiques descriptives des estimés de la volatilité obtenus avec les deux modèles, les mesures *RMSE* trouvés et les statistiques du test utilisé. De plus, les figures 2.6 à 2.10 annexées illustrent, pour chaque portefeuille construit, l'évolution de la volatilité estimée comparée à celle du rendement observé et du levier financier durant la deuxième sous-période, soit de 2 janvier 2004 au 31 décembre 2008.

Tableau 2.7 Statistiques descriptives liées aux estimés de la volatilité (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008)

Portefeuille	Moy.	É-type	Max	Min	S	K	RMSE	DM	$pv$	$RMSE_k$	$DM_k$	$pv_k$
Industries	MVH	0,3060	0,3736	0,2867	2,28	12,63	0,0169	5,09	0,0005	0,0243	4,29	0,0029
	MVAS	0,3057	0,0241	0,3869	0,2483	-0,11	2,84	0,0152		0,0191		
Matériaux	MVH	0,1798	0,0164	0,2827	0,1582	2,81	12,76	0,0132	6,64	0,0002	0,0174	0,0052
	MVAS	0,1874	0,0297	0,2864	0,1180	0,39	3,40	0,0109		0,0151		
Technologies	MVH	0,2760	0,0081	0,3120	0,2529	0,65	4,92	0,0153	2,56	0,0096	0,0239	0,0361
	MVAS	0,2802	0,0260	0,3589	0,2298	0,81	2,86	0,0141		0,0208		
Biens de consommation	MVH	0,1685	0,0099	0,2393	0,1501	2,16	11,78	0,0142	7,19	0,0001	0,0246	0,0020
	MVAS	0,1705	0,0198	0,2226	0,1172	-0,11	2,50	0,0121		0,0198		
Énergie	MVH	0,1927	0,0131	0,2719	0,1690	2,46	11,99	0,0133	8,88	0,0001	0,0209	0,0033
	MVAS	0,1674	0,0260	0,2304	0,0915	0,10	2,57	0,0118		0,0171		
Santé	MVH	0,2038	0,0089	0,2606	0,1865	2,13	10,90	0,0129	3,75	0,0048	0,0205	0,0112
	MVAS	0,2005	0,0193	0,2558	0,1434	-0,35	3,32	0,0112		0,0173		
Biens durables	MVH	0,2746	0,0121	0,3267	0,2527	0,79	3,80	0,0147	6,96	0,0002	0,0216	0,0078
	MVAS	0,2694	0,0329	0,4201	0,1945	0,62	4,27	0,0124		0,0171		
Services publics	MVH	0,1459	0,0146	0,2184	0,1173	1,93	8,50	0,0148	10,36	0,0001	0,0192	0,0081
	MVAS	0,1978	0,0404	0,2985	0,1063	0,12	2,36	0,0092		0,0152		
Portefeuille global	MVH	0,2158	0,0098	0,2758	0,1938	1,41	8,38	0,0140	4,49	0,0003	0,0205	0,0095
	MVAS	0,2170	0,0257	0,2840	0,1570	0,01	2,46	0,0123		0,0185		

Ce tableau rapporte les estimés de la volatilité, les mesures  $RMSE$ , les statistiques  $DM$  et les valeurs ( $pv$ ) du test du Diebold et Mariano (1995), et ce durant la deuxième sous-période, soit du 2 janvier 2004 au 31 décembre 2008. La volatilité représente l'écart-type estimé (É-type), sur une base journalière puis annualisée, en utilisant l'algorithme EJR (avec un nombre de particules égal à 1000) et les valeurs optimales des paramètres présentées dans le tableau 2.5.  $RMSE$  est la racine de la moyenne des carrés des erreurs d'estimation. Elle est calculée sur une base journalière puis annualisée.  $pv$  correspond à la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse nulle (aucun des deux modèles n'est préférable à l'autre). Par exemple, si  $pv$  est inférieur à 1% alors l'hypothèse nulle est rejetée au seuil de 1%. Les trois dernières colonnes du tableau présentent les mesures  $RMSE$ , les statistiques  $DM$  et les  $pv$  obtenus en utilisant la méthode de filtrage de Kalman étendu plutôt que le filtrage particulaire.

Conformément aux conclusions précédentes, il ressort des résultats obtenus que MVAS surperforme clairement MVH. En effet, quel que soit le portefeuille construit, *RMSE* est toujours plus faible dans le cas du MVAS. Il varie entre 0,92% et 1,52% pour MVAS contre une variation entre 1,09% et 1,69% pour MVH. De plus, l'écart entre les *RMSE* des deux modèles dépend du levier financier du portefeuille. Il varie entre 0,17% pour le portefeuille indiciaire du secteur de la santé à levier le plus faible (10,24%) et 0,56% pour le portefeuille indiciaire du secteur des services publics à levier financier le plus élevé (45,46%). Également, les résultats du test de Diebold et Mariano (1995) révèlent que l'écart de performance est significatif pour tous les portefeuilles construits vu les faibles valeurs (inférieurs à 1%) des *p*valeurs. Ces résultats confirment que, pour les firmes endettées, le niveau du levier financier, reflet du risque financier, doit être reflété dans l'évolution de leurs volatilités boursières, ce qui explique que le pouvoir prédictif de notre modèle dépasse distinctement celui de Heston (1993).

### 2.5.5 Asymétrie de la volatilité: analyse des résultats

Dans cette section, nous examinons l'évolution, réputée asymétrique, de la volatilité ainsi que les effets qui l'expliquent. Notons que l'asymétrie de la volatilité résulte de l'effet rétroactif dans MVH. En revanche, l'effet du levier financier s'ajoute à l'effet rétroactif pour générer l'asymétrie dans la l'évolution de la volatilité selon MVAS. Notre objectif ici est de déduire et d'illustrer l'importance des deux effets pour le portefeuille global, supposé représentatif de notre échantillon. Notons que les figures 2.1 et 2.6 illustrent, pour ce portefeuille, l'évolution de la volatilité estimée comparée à celle du rendement observé et du levier financier, et ce pour les deux sous-périodes étudiées, soit 1996-2003 et 2004-2008. Rappelons que la première sous-période se distingue par son grand rendement annuel moyen (14,80%) contre un levier financier moyen assez faible (15,65%) alors que la deuxième sous période se caractérise par son faible rendement moyen (-0,20%) et un levier financier moyen plus élevé (28,17%).

L'analyse de ces figures semble révéler des indications de variation asymétrique de la volatilité boursière pour les deux sous-périodes. Par exemple, la figure 2.1 révèle une

hausse prononcée (de 6% à peu près) de la volatilité en deuxième demie des années 1997, 1998 et 2001. Ces périodes sont caractérisées par des rendements journaliers instables et plutôt négatifs (dépassant 5% en valeur absolue). Par ailleurs, une année de stabilité où le rendement a tendance à être positifs (par exemple l'année 2000 et la fin de l'année 2002), l'on voit une baisse de volatilité (de 3% à 4% à peu près). À première vue, la disproportion entre la hausse de volatilité pendant les périodes d'instabilité et sa baisse durant les périodes de stabilité indique de l'asymétrie. Dans la même veine selon la figure 2.6, le début de la crise financière mondiale, durant l'année 2008, s'est accompagné d'une hausse significative de la volatilité (presque 6% pour MVH et doublement au moins pour MVAS).

Poursuivons en notant que, quelle que soit la sous-période d'étude, un écart significatif entre les volatilités estimées via MVH et MVAS est nettement visible pendant les périodes de relative stabilité. Par exemple, la figure 2.6, montre un écart de 5% à 8% à peu près durant la relative stabilité des années 2004 et 2006. Par contre, cet écart tend à s'estomper, dans la plupart des cas, pendant les périodes d'instabilité. Par exemple, les figures 2.1 et 2.6 révèlent un écart à son niveau minimal durant les fortes turbulences des années 2001, 2002 et surtout à la fin de l'année 2008. Cela nous semble signifier que l'effet de levier financier serait presque marginal pendant les périodes d'instabilité alors que l'effet rétroactif serait dominant. La cause pourrait être liée à une plus grande aversion au risque du public investisseur en périodes d'instabilité. En revanche, on notera qu'un lien positif semble s'instaurer, durant les périodes de stabilité, entre l'évolution de la volatilité estimée via MVAS et celle du levier financier. Cela est apparent à la figure 2.6 où l'évolution de la volatilité semble traîner derrière celle du levier financier, ce qui suppose que tout changement dans le levier financier de la firme annoncera un degré informatif aux yeux des investisseurs pendant les périodes de stabilité.

Globalement, notre analyse des séries de la volatilité obtenues via MVH et MVAS nous indique que l'intégration du levier financier dans le processus de la volatilité con-

tribuerait à expliquer l'évolution de celle-ci surtout en périodes de stabilité. Ces résultats semblent rejoindre l'idée considérant que le marché n'attribue une importance particulière au risque financier de la firme qu'en périodes de stabilité, ce qui nous laisse croire que l'évolution de la volatilité, pendant ces périodes, s'appuie pesamment sur celle du levier financier.

### 2.5.6 Test de robustesse

Afin de nous assurer de la robustesse des résultats obtenus ainsi que leur sensibilité à la fréquence des données utilisées, nous considérons, dans cette section, un nouvel échantillon composé de 96 firmes aux données les plus complètes et qui font parties de l'échantillon initialement retenu<sup>24</sup>. L'étude porte sur deux sous-périodes, soit de juillet 1990 à décembre 2000 et de janvier 2001 à décembre 2008, et les données utilisées sont mensuelles.

Nous reproduisons la même méthodologie d'estimation et d'analyse de performance déjà appliquée dans les sections précédentes. Les tableaux 2.8 et 2.9 détaillent les statistiques descriptives du portefeuille construit, les estimateurs optimaux des paramètres ainsi que les statistiques descriptives des estimés de la volatilité obtenus avec les deux modèles retenus, soit MVH et MVAS. Quant aux figures 2.11 à 2.12, elles illustrent l'évolution de la volatilité estimée comparée à celle du rendement observé et du levier financier du portefeuille construit durant les deux sous-périodes étudiées.

Visiblement, les résultats trouvés convergent à ceux déjà obtenus, soutenant ainsi la supériorité de performance du MVAS et laissant croire que celui-ci se transpose avec succès aux données mensuelles. En effet, les valeurs du *RMSE* sont plus faibles dans le cas de MVAS et ce pour les deux sous-périodes (1,48% et 1,88% pour MVAS contre 1,76% et 2,34% pour MVH). De plus, l'écart de performance paraît fortement significatif vu la faiblesse des *pvaleurs* trouvés comparativement au seuil classique de 5%.

---

<sup>24</sup>Les firmes retenues sont notamment de grande taille. En date du 7 mai 2010, elles représentent 47.12% de la capitalisation boursière totale de S&P500, soit 56.54% en excluant les firmes financières.

Tableau 2.8 Test de robustesse: statistiques descriptives et estimateurs optimaux des paramètres (juillet 1990 - décembre 2008)

Pan A. Statistiques descriptives du portefeuille construit													
Première sous-période: juillet 1990 - décembre 2000					Deuxième sous-période: janvier 2001 - décembre 2008								
	Moy.	É-type	Max	Min	S	K	Moy.	É-type	Max	Min	S	K	
$\Delta PIS$	0,1656	0,1348	0,1198	-0,1130	-0,20	3,29	$\Delta PIS$	-0,0108	0,1276	0,0919	-0,1303	-0,59	4,45
$PILF$	0,2503	0,1233	0,3601	0,1475	0,95	5,56	$PILF$	0,2145	0,1098	0,2787	0,1811	0,94	4,68

Pan B. Estimateurs optimaux des paramètres

Modèle	$\mu$	$\kappa$	$\alpha$	$\eta$	$\rho$
MVH	0,1801 [0,1781 0,1812]	1,7225 [1,6833 1,7617]	0,0176 [0,0158 0,0194]	0,0365 [0,0326 0,0404]	-0,5032 [-0,5071 -0,4993]
MVAS	0,1415 [0,1376 0,1454]	1,6149 [1,5894 1,6404]	0,0112 [0,0095 0,0129]	0,0378 [0,0337 0,0419]	-0,4993 [-0,5028 -0,4958]

Ce tableau rapporte, pour chaque modèle, les statistiques descriptives du portefeuille construit et les estimateurs optimaux des paramètres. MVH et MVAS signifient, respectivement, le modèle à volatilité stochastique de Heston (1993) et le modèle à volatilité asymétrique. Dans le pan A, la moyenne et l'écart-type sont calculés sur une base mensuelle puis annualisés.  $\Delta PIS$  et  $PILF$  signifient, respectivement, le rendement du portefeuille et son levier financier.  $S$  est le coefficient d'asymétrie (Skewness) alors que  $K$  est le coefficient d'aplatissement (Kurtosis).  $N$  est le nombre de firmes. Dans le pan B, les estimateurs paramétriques optimaux sont exprimés sur une base annuelle et les intervalles de confiance sont à 95%.

Tableau 2.9 Test de robustesse: statistiques descriptives liés aux estimés de la volatilité (juillet1990 - décembre 2008)

Première sous-période: juillet 1990 - décembre 2000												
Modèle	Moy.	É-type	Max	Min	S	K	RMSE	DM	pv	RMSE <sub>k</sub>	DM <sub>k</sub>	pv <sub>k</sub>
MVH	0,1325	0,0124	0,1557	0,1045	-0,0925	3,1422	0,0176	3,89	0,0008	0,0294	5,89	0,0004
MVAS	0,1260	0,0275	0,1749	0,0734	-0,0478	2,8581	0,0148			0,0205		

Deuxième sous-période: janvier 2001 - décembre 2008												
Modèle	Moy.	É-type	Max	Min	S	K	RMSE	DM	pv	RMSE <sub>k</sub>	DM <sub>k</sub>	pv <sub>k</sub>
MVH	0,1545	0,0099	0,1838	0,2398	1,2451	4,1466	0,0234	5,21	0,0001	0,0356	6,33	0,0003
MVAS	0,1552	0,0162	0,2049	0,1250	0,1472	4,3773	0,0188			0,0267		

Ce tableau rapporte les statistiques descriptives liées aux estimés de la volatilité durant la période qui s'étend de juillet 1990 au décembre 2008. MVH et MVAS signifient, respectivement, le modèle à volatilité stochastique de Heston (1993) et le modèle à volatilité asymétrique. La volatilité représente l'écart-type instantané estimé, sur une base journalière puis annualisé, en utilisant l'algorithme EIR (avec un nombre de particules égal à 1000) et les valeurs optimales des paramètres présentées dans le tableau 2.8. RMSE est la racine de la moyenne des carrés des erreurs d'estimation (différence entre le rendement théorique et le rendement observé). Elle est calculée sur une base journalière puis annualisée. Le *pvaleur* correspond à la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse nulle (aucun des deux modèles n'est préférable à l'autre). Par exemple, si *pv* est inférieur à 1% alors l'hypothèse nulle est rejetée au seuil de 1%. Les trois dernières colonnes du tableau présentent les mesures *RMSE*, les statistiques *DM* et les *pvaleurs* obtenus en utilisant la méthode de filtrage de Kalman étendu plutôt que le filtrage particulier.

Également, les figures 2.12 et 2.13 démontrent qu'un écart significatif entre les volatilités estimées via MVH et MVAS serait visible pendant les périodes de relative stabilité (durant l'année 1999 par exemple). Par contre, cet effet perd sa significativité pendant les périodes d'instabilité (durant 2008 par exemple) où l'effet rétroactif serait dominant et l'écart entre les volatilités estimées via MVH et MVAS serait à son minimum.

## 2.6 Conclusion

Dans le deuxième essai, nous avons élaboré un modèle où l'asymétrie de la volatilité est expliquée par deux effets, soit l'effet de levier financier et l'effet rétroactif. Notre modèle suppose que, pour une firme donnée, la volatilité de son rendement boursier dépend de la variabilité de sa valeur marchande (reflet de son risque d'exploitation) et de son levier financier (reflet de son risque financier). Pour estimer ses paramètres et approximer des suites de ses variables inobservables, nous avons recouru à la technique de filtrage particulière. Notre étude empirique est menée avec un échantillon de 332 firmes américaines non financières à données journalières. Elle porte sur la période qui s'étend du 2 janvier 1996 au 31 décembre 2008. Nos résultats montrent que l'inclusion de la variation du levier financier dans le processus de la volatilité permet d'améliorer la performance de prédiction du modèle. De plus, l'asymétrie de la volatilité résulterait, notamment, de l'effet rétroactif pendant les périodes d'instabilité. Par contre, son ampleur semble dépendre davantage de la variation du levier financier en période de stabilité. Les résultats obtenus, durant la période 1990-2008, avec à un échantillon de 96 firmes à données mensuelles convergent vers ceux déjà trouvés.

Finalement, il importerait de poursuivre cette étude en mettant l'accent sur certains aspects. Par exemple, un élargissement du champ temporel de notre étude permettrait de mieux confirmer les résultats obtenus. De plus, nous croyons qu'une généralisation de notre étude pourrait être envisagée en lâchant l'hypothèse liée à l'absence de faillite des firmes, ce qui permettrait d'appliquer notre modèle aux firmes de moyennes et petites tailles et ainsi généraliser nos résultats.

## 2.7 Annexes

### 2.7.1 Dérivation de la dynamique du rendement

En adoptant la supposition classique voulant qu'un changement dans la structure financière de la firme n'influence pas sa valeur marchande, nous aurons que celle-ci vaut, à chaque date  $t$ , la valeur de sa dette corporative et de son propre. Par conséquent, la variation de la valeur de l'action  $S$  est donnée par:

$$dS_t = dV_t - dD_t \quad (2.37)$$

En substituant dans (2.37) les équations (2.1) et (2.3), on obtient:

$$dS_t = (\mu V_t - r D_t) dt + \sigma_{v,t} V_t dz_t \quad (2.38)$$

Soit le levier financier de la firme, noté  $L$ , qui exprime le pourcentage de ses engagements financiers par rapport à la valeur marchande de son actif<sup>25</sup>, soit:

$$L_t = \frac{D_t}{V_t} \quad (2.39)$$

Par conséquent, l'équation (2.38) se ramène à:

$$dS_t = (\mu - r L_t) V_t dt + \sigma_{v,t} V_t dz_t \quad (2.40)$$

En remplaçant  $V_t$  par  $\frac{S_t}{1 - L_t}$ , nous aurons la dynamique du rendement de l'action établie à l'équation (2.4).

---

<sup>25</sup> À noter que le levier financier peut se calculer aussi en divisant  $D_t$  par  $S_t$  (Black, 1976 ; Bekaert et Wu, 2000).

## 2.7.2 Dérivation de la dynamique de la volatilité

L'application du lemme d'Itô à l'équation (2.5) permet d'obtenir:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{s,t}^2 &= d\left(\frac{\sigma_{v,t}}{1-L_t}\right)^2 = d\frac{\sigma_{v,t}^2}{(1-L_t)^2} \\
 &= \frac{d\sigma_{v,t}^2}{(1-L_t)^2} + \frac{2\sigma_{v,t}^2}{(1-L_t)^3}dL_t + \\
 &\quad \frac{1}{2}\frac{6\sigma_{v,t}^2}{(1-L_t)^4}d\langle L \rangle_t + \frac{2}{(1-L_t)^3}d\langle \sigma_v^2, L \rangle_t
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Or, l'application du lemme d'Itô à l'équation (2.39) qui exprime le levier financier de la firme  $L$  permet d'obtenir l'évolution de celui-ci, soit:

$$\begin{aligned}
 dL_t &= d\frac{D_t}{V_t} = \frac{1}{V_t}dD_t - \frac{D_t}{V_t^2}dV_t + \frac{1}{2}\frac{2D_t}{V_t^3}d\langle V \rangle_t \\
 &= (r - \mu + \sigma_{v,t}^2)L_t dt - \sigma_{v,t}L_t dz_t
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

En substituant les équations (2.2) et (2.42) dans (2.41), nous aurons:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{s,t}^2 &= \frac{\kappa(\alpha - \sigma_{v,t}^2)dt + \eta\sigma_{v,t}dw_t}{(1-L_t)^2} + \frac{2\sigma_{v,t}^2}{(1-L_t)^3}[(r - \mu + \sigma_{v,t}^2)L_t dt - \sigma_{v,t}L_t dz_t] \\
 &\quad + \frac{1}{2}\frac{6\sigma_{v,t}^2}{(1-L_t)^4}(\sigma_{v,t}^2 L_t^2 dt) - \frac{2\eta\sigma_{v,t}^2 L_t \rho}{(1-L_t)^3}dt
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Finalement, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{s,t}^2 &= \left[ \frac{\kappa\alpha}{\eta^2} \left(\frac{\eta}{1-L_t}\right)^2 + \left( \frac{(-2L_t)\left(\frac{\eta}{1-L_t}\right)}{\eta} (\mu - r + \rho\eta) - \kappa \right) \left(\frac{\sigma_{v,t}}{1-L_t}\right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{(-2L_t)^2}{4} - (-2L_t) \right) \left(\frac{\sigma_{v,t}}{1-L_t}\right)^4 \right] dt \\
 &\quad + \left(\frac{\eta}{1-L_t}\right) \left(\frac{\sigma_{v,t}}{1-L_t}\right) dw_t + (-2L_t) \left(\frac{\sigma_{v,t}}{1-L_t}\right)^3 dz_t
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

L'arrangement de l'équation (2.44) permet de présenter la dynamique de la variance instantanée  $\sigma_s^2$  sous la forme établie à l'équation (2.6).

### 2.7.3 Application du filtrage particulière au modèle de Heston (1993)

L'application du filtrage particulière vise à constituer une série temporelle représentative des volatilités inobservables dans le modèle de Heston (1993) où l'évolution du rendement est donnée par:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dz_t \quad (2.45)$$

Pour sa part, la variance instantanée, notée  $\sigma^2$ , soit de type stochastique avec retour vers la moyenne. Elle obéit au processus stochastique suivant

$$d\sigma_t^2 = \alpha (\theta - \sigma_t^2) dt + \eta \sigma_t^2 dw_t \quad (2.46)$$

En (2.45) et (2.46),  $S$  correspond au prix de l'actif,  $\sigma^2$  sa variance instantanée,  $\mu$  est le rendement attendu,  $\eta$  est la volatilité de  $\sigma^2$ ,  $\theta$  est la variance instantanée à long terme ou d'équilibre,  $\alpha$  est la force de rappel vers  $\theta$  et  $z$  et  $w$  sont des mouvements browniens, respectivement, de  $S$  et de  $\sigma^2$ , liée avec le coefficient de corrélation  $\rho$ , soit:

$$\text{corr}(z_t, w_t) = \rho$$

La première étape consiste à exprimer le modèle de Heston (1993) sous forme espace-états. Puis, à la deuxième étape, nous appliquons l'algorithme EIR.

#### 2.7.3.1 Expression espace-états du modèle de Heston (1993)

L'équation de transition du modèle de Heston (1993) est issue de la discrétisation, avec la méthode d'Euler, de la dynamique de  $\sigma^2$  établie à l'équation (2.46) comme suit:

$$\sigma_{t+\Delta t}^2 = \sigma_t^2 + \alpha (\theta - \sigma_t^2) \Delta t + \eta \sigma_t^2 \sqrt{\Delta t} w_{t+\Delta t} \quad (2.47)$$

Quant à l'équation de mesure, elle est donnée par:

$$\ln(S_{t+\Delta t}) = \ln(S_t) + \left( \mu - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_t \sqrt{\Delta t} z_{t+\Delta t} \quad (2.48)$$

### 2.7.3.2 Estimation de la volatilité avec EIR

Nous utilisons l'algorithme EIR afin d'estimer, à chaque date  $t$ , la variance instantanée du rendement  $\sigma^2$  sachant l'information sur  $S$ . L'initialisation de cet algorithme se fait via la variance non conditionnelle des rendements durant la période d'étude, ce qui nous permettra d'estimer  $\sigma_0^2$ . Chaque itération de cet algorithme est composée de trois phases: l'échantillonnage d'importance, le calcul des poids d'importance et le rééchantillonnage.

#### Phase 1: Échantillonnage d'importance

La première phase correspond à l'échantillonnage d'importance. Il s'agit de propager dans le temps la variance instantanée initiale. L'objectif est de générer, à chaque date  $t$ , un ensemble de  $N$  particules qui décrivent les valeurs possibles de  $\sigma_t^2$ . Ainsi, l'ensemble  $\{\sigma_{t+\Delta t}^{2(i)}\}_{i=1}^N$  est généré à partir de  $\{\sigma_t^{2(i)}\}_{i=1}^N$ . S'agissant d'une particule donnée, notée  $\sigma_{t+\Delta t}^{2(i)}$ , qui décrit une valeur possible de  $\sigma_s^2$  à la date  $t + \Delta t$ , nous avons:

$$\sigma_{t+\Delta t}^{2(i)} = \sigma_t^{2(i)} + \alpha (\theta - \sigma_t^{2(i)}) \Delta t + \eta \sigma_t^{2(i)} \sqrt{\Delta t} w_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (2.49)$$

En introduisant une transformation sur les deux processus Wiener  $z$  et  $w$ , il est possible d'éliminer cette corrélation, soit:

$$w_{t+\Delta t}^{(i)} = \rho z_{t+\Delta t}^{(i)} + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (2.50)$$

$$\text{corr} (z_{t+\Delta t}^{(i)}, \varepsilon_{t+\Delta t}^{(i)}) = 0$$

De plus, nous déduisons à partir de l'équation (2.51) que:

$$z_{t+\Delta t}^{(i)} = \frac{\ln \left( \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) - \left( \mu_t - \frac{\sigma_t^{2(i)}}{2} \right) \Delta t}{\sigma_t^{(i)} \sqrt{\Delta t}} \quad (2.51)$$

En substituant les équations (2.50) et (2.51) dans (2.47), nous aurons:

$$\begin{aligned}
\sigma_{t+\Delta t}^{2(i)} &= \sigma_t^{2(i)} + \alpha \left( \theta - \sigma_t^{2(i)} \right) \Delta t \\
&\quad + \eta \sigma_t^{(i)} \sqrt{\Delta t} \left[ p \frac{\ln \left( \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) - \left( \mu_t - \frac{\sigma_t^{2(i)}}{2} \right) \Delta t}{\sigma_t^{(i)} \sqrt{\Delta t}} \right] \\
&\quad + \sqrt{(1-\rho^2)} \varepsilon_{t+\Delta t}^{(i)}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

### Phase 2: Calcul des poids d'importance

La deuxième phase correspond au calcul des poids d'importance. Ainsi, à chaque date  $t$ , nous calculons pour chaque particule  $i$  de l'ensemble  $\left\{ \sigma_{t+\Delta t}^{2(i)} \right\}_{i=1}^N$  son poids d'importance, noté  $m_{t+\Delta t}^i$ , comme suit:

$$m_{t+\Delta t}^i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t} \sigma_{s,t+\Delta t}^{(i)}} \exp \left( - \frac{\left( \ln \left( \frac{S_{t+2\Delta t}}{S_{t+\Delta t}} \right) - \left( \mu_t - \frac{1}{2} \sigma_{t+\Delta t}^{2(i)} \right) \Delta t \right)^2}{\sigma_{t+\Delta t}^{2(i)} \Delta t} \right) \tag{2.53}$$

Par la suite, nous normalisons ces poids d'importance comme démontré à l'équation (2.17). Nous aurons ainsi une suite de poids d'importance  $\left\{ \hat{m}_{t+\Delta t}^i \right\}_{i=1}^N$  qui sera associée à l'ensemble de  $N$  particules  $\left\{ \sigma_{t+\Delta t}^{2(i)} \right\}_{i=1}^N$ , établi à la phase 1.

### Phase 3: Rééchantillonnage

La troisième phase correspond au rééchantillonnage. Nous aurons, à la fin de cette phase, un ensemble de  $N$  particules noté  $\left\{ \hat{\sigma}_{t+\Delta t}^{2(i)} \right\}_{i=1}^N$  où le poids de chaque particule est de  $1/N$ , ce qui permettra d'approximer la densité de probabilité  $p(\sigma_t^2 | S_{0:t})$ .

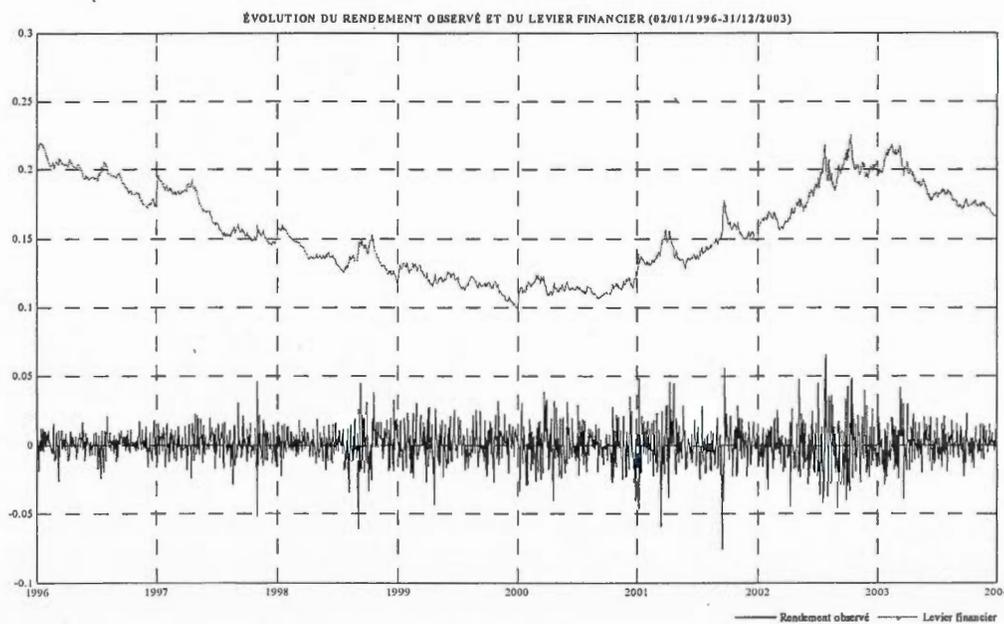
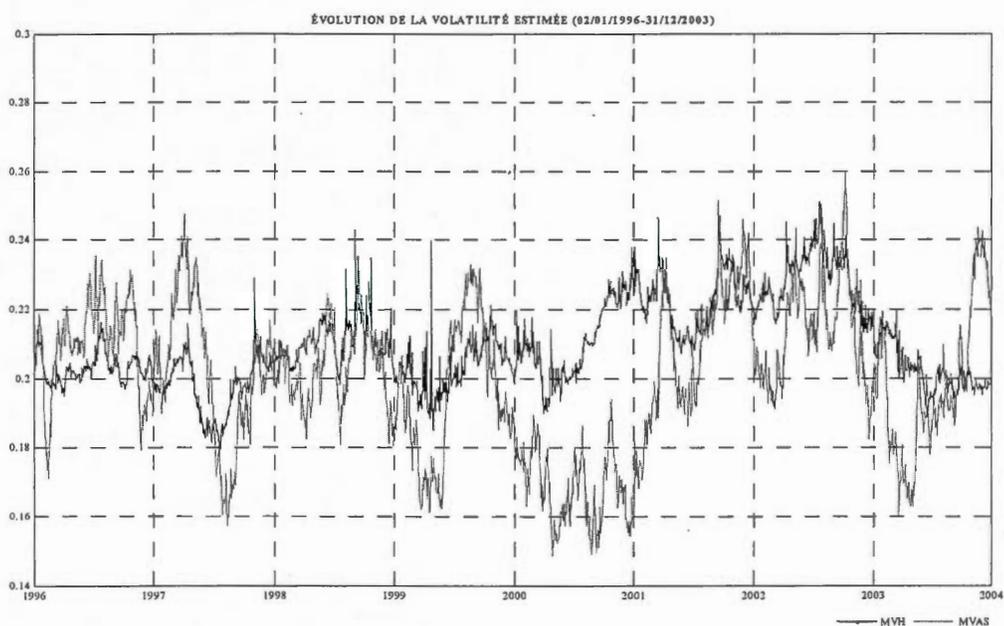
À la fin de l'itération réalisée à la date  $t$ , l'estimateur optimal au sens du minimum de variance, soit  $\hat{\sigma}_t^2$ , est calculé de deux façons. Si la phase de rééchantillonnage est requise alors ce dernier est donné par:

$$\hat{\sigma}_{t+\Delta t}^2 \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{t+\Delta t}^{2(i)} \tag{2.54}$$

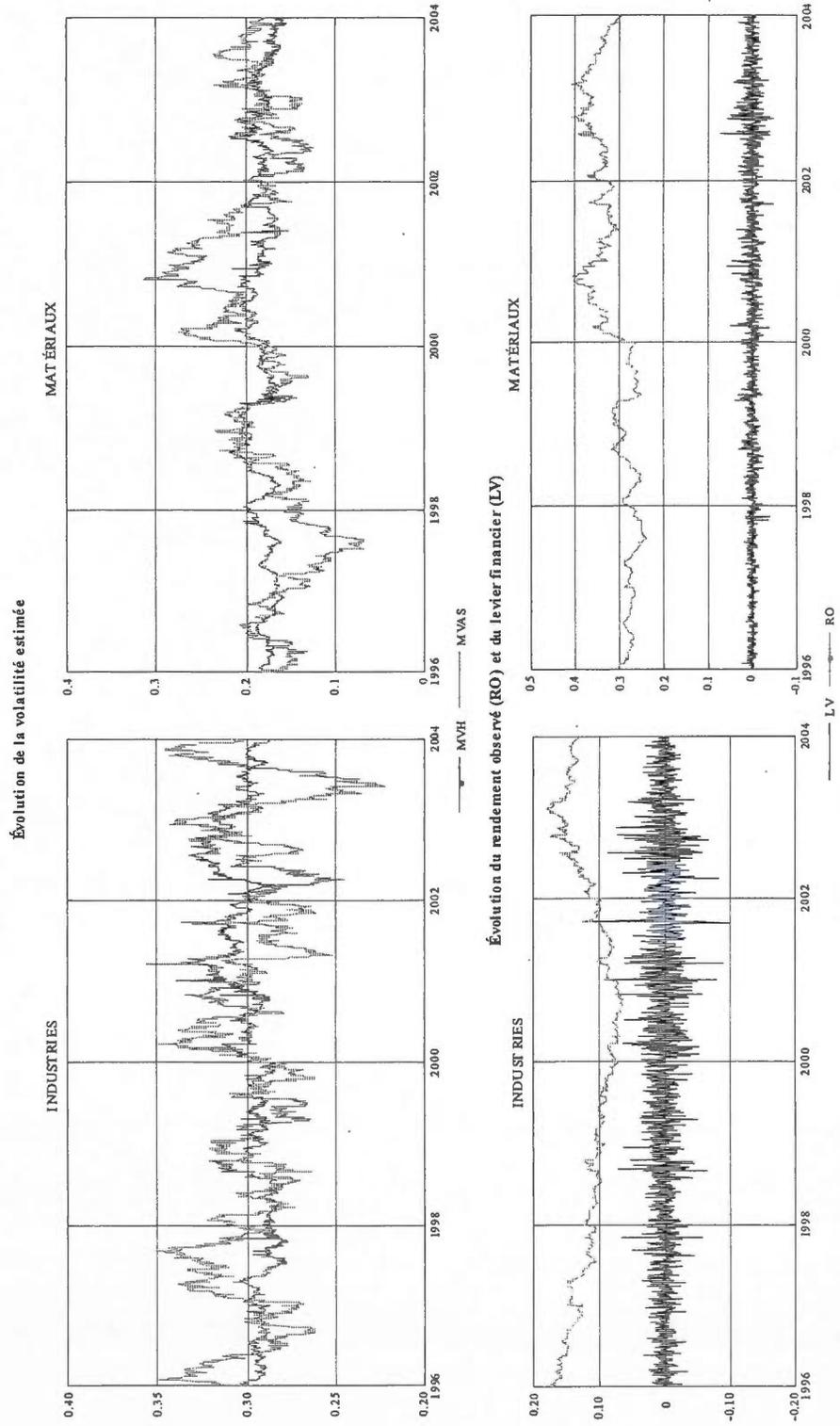
Sinon:

$$\hat{\sigma}_{t+\Delta t}^2 \approx \sum_{i=1}^N \hat{m}_t^i \sigma_{t+\Delta t}^{2(i)} \quad (2.55)$$

Figure 2.1 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier du portefeuille global (2 janvier 1996-31 décembre 2003)



**Figure 2.2** Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des industries et des matériaux (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003)



**Figure 2.3** Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des technologies et des biens de base (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003)

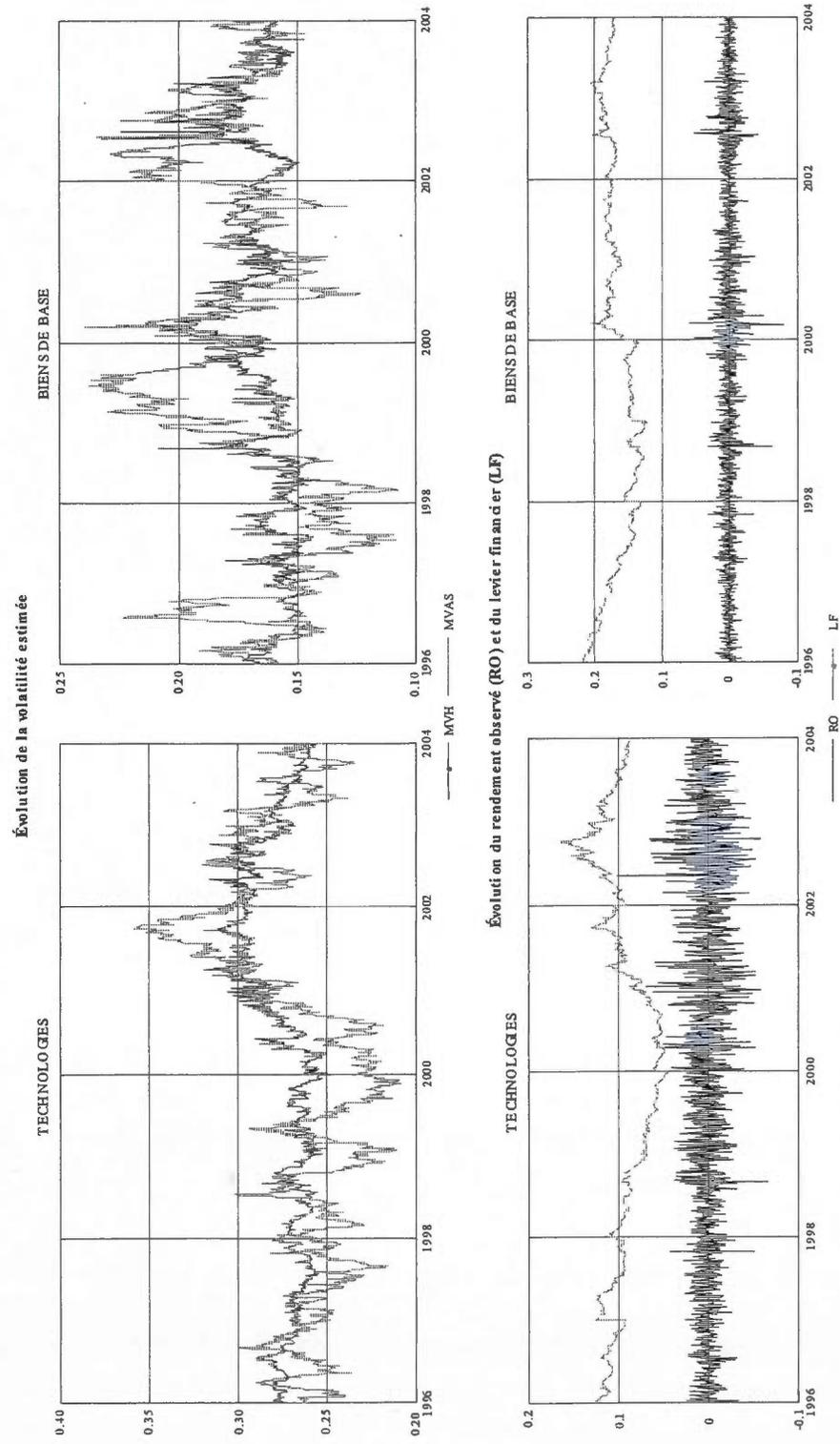
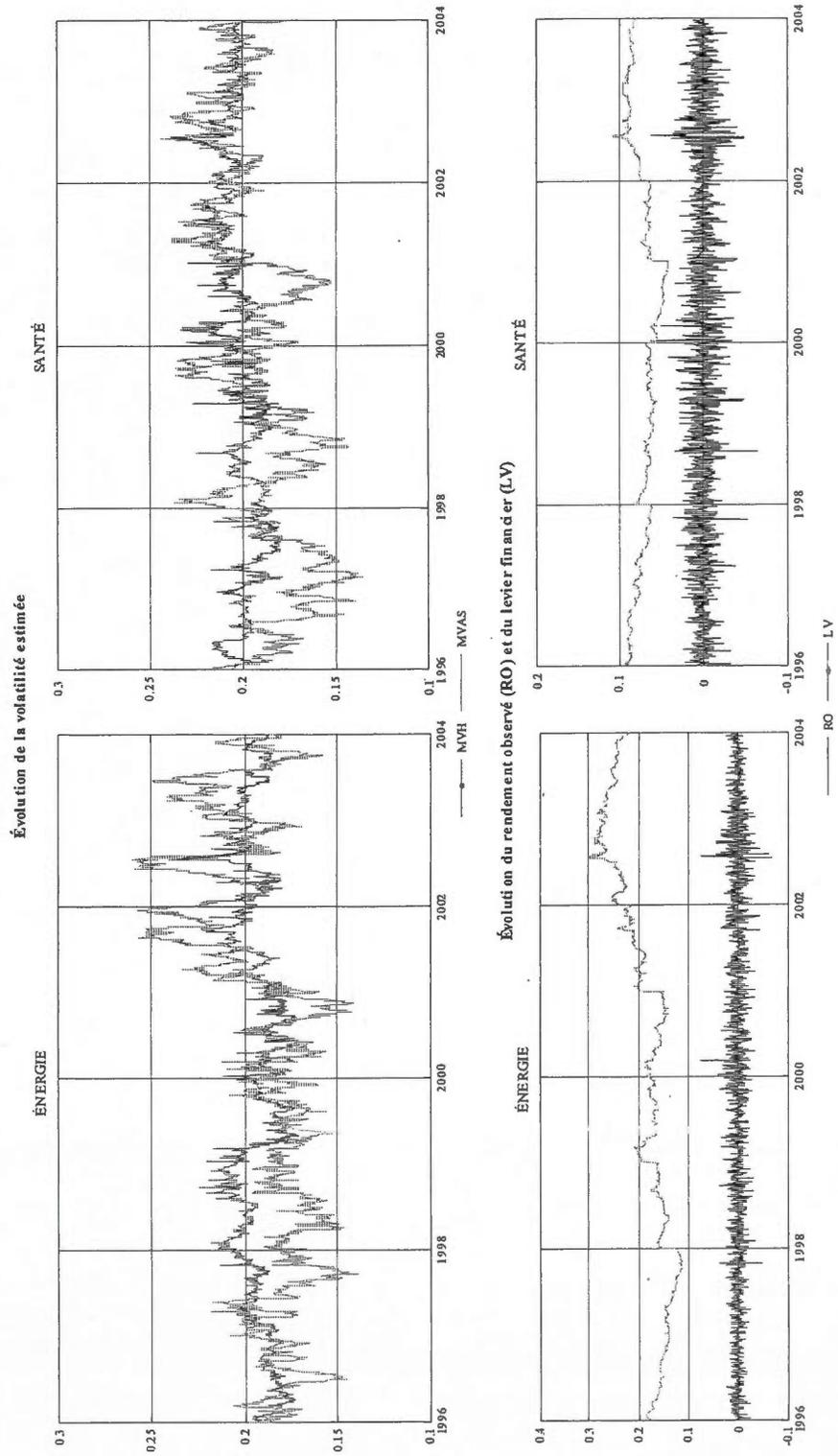


Figure 2.4 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains de l'énergie et de la santé (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003)



**Figure 2.5** Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des biens durables et des services publics (2 janvier 1996 - 31 décembre 2003)

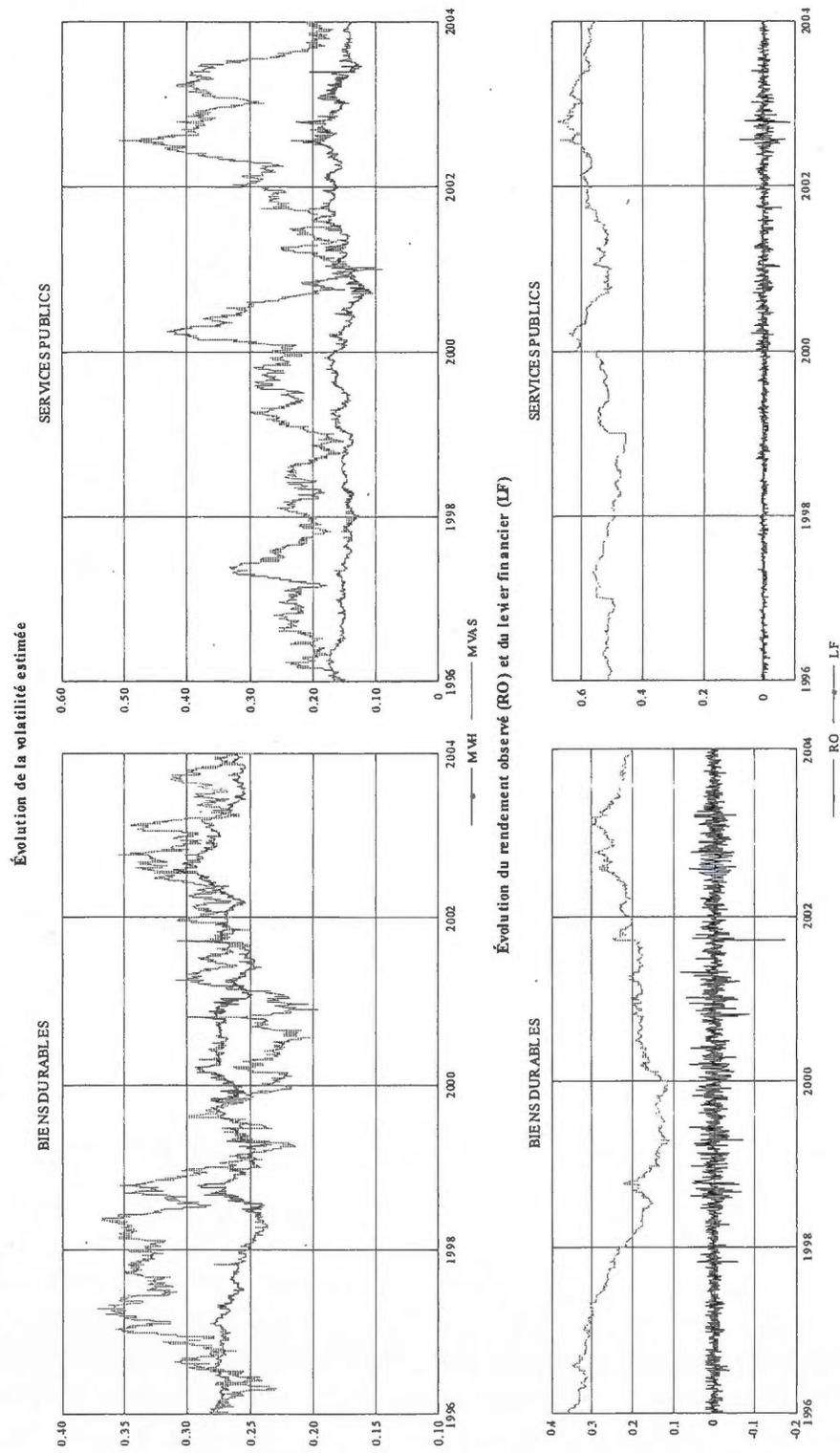
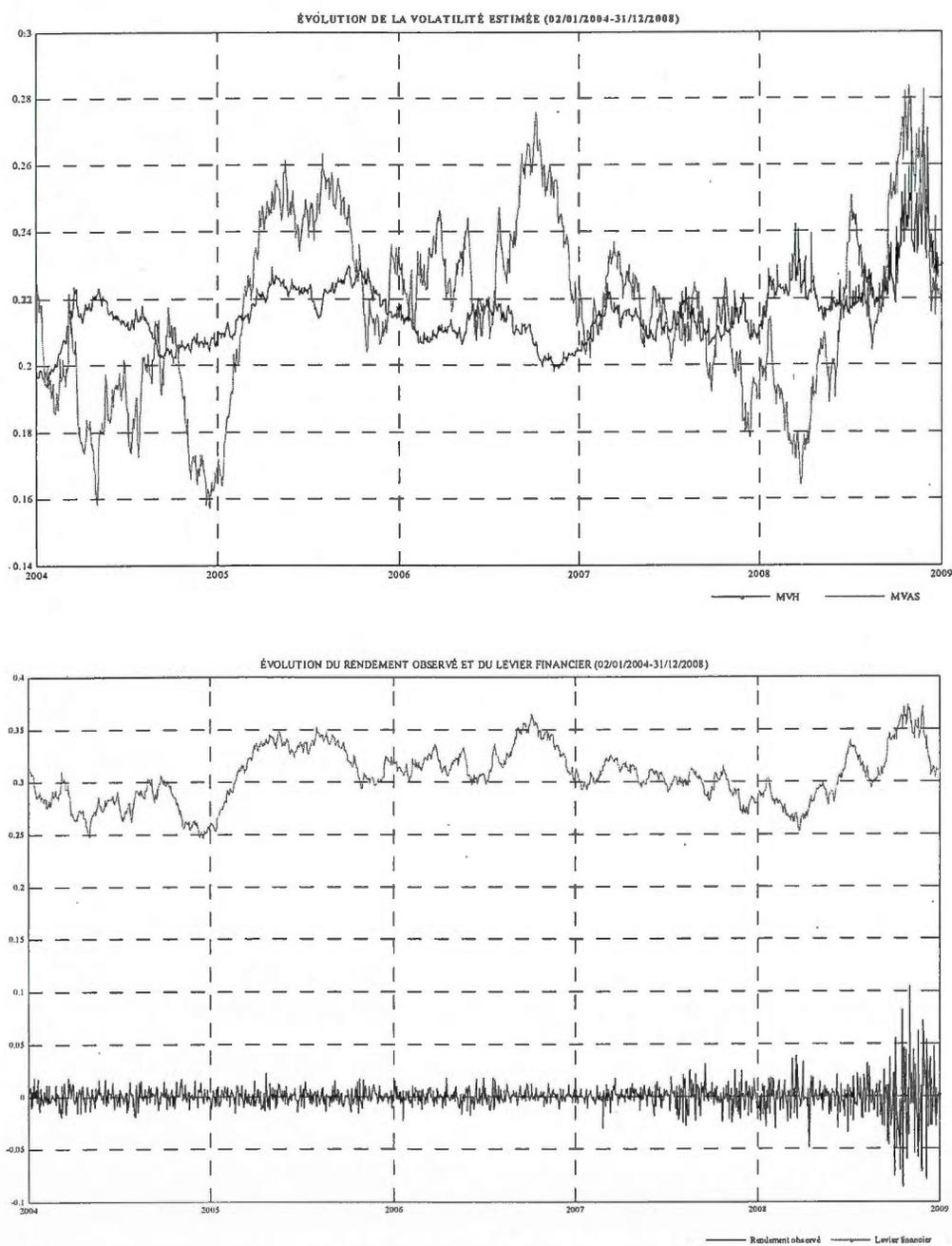


Figure 2.6 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier du portefeuille global (2 janvier 2004-31 décembre 2008)



**Figure 2.7** Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des industries et des matériaux (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008)

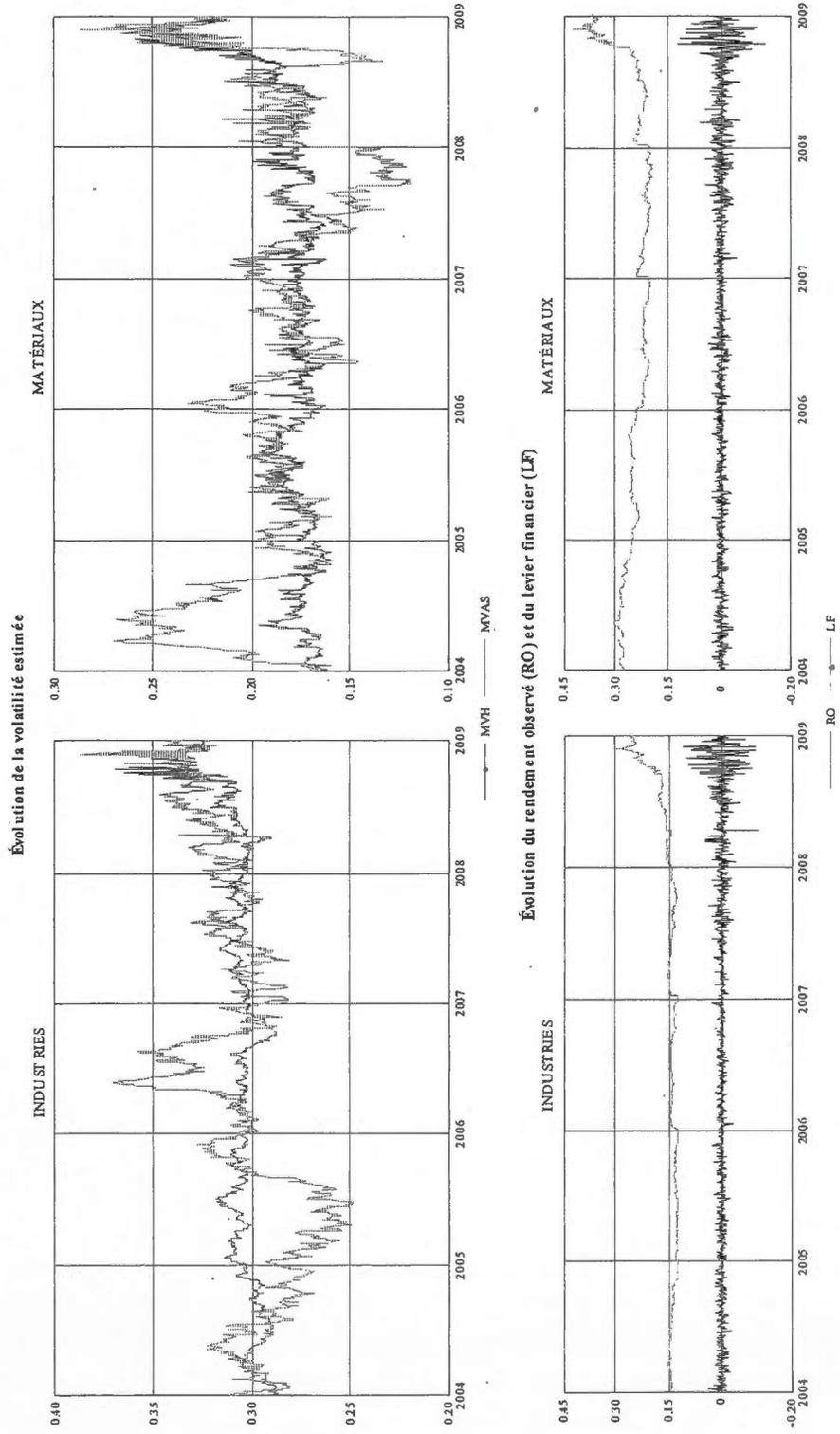


Figure 2.8 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des technologies et des biens de base (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008)

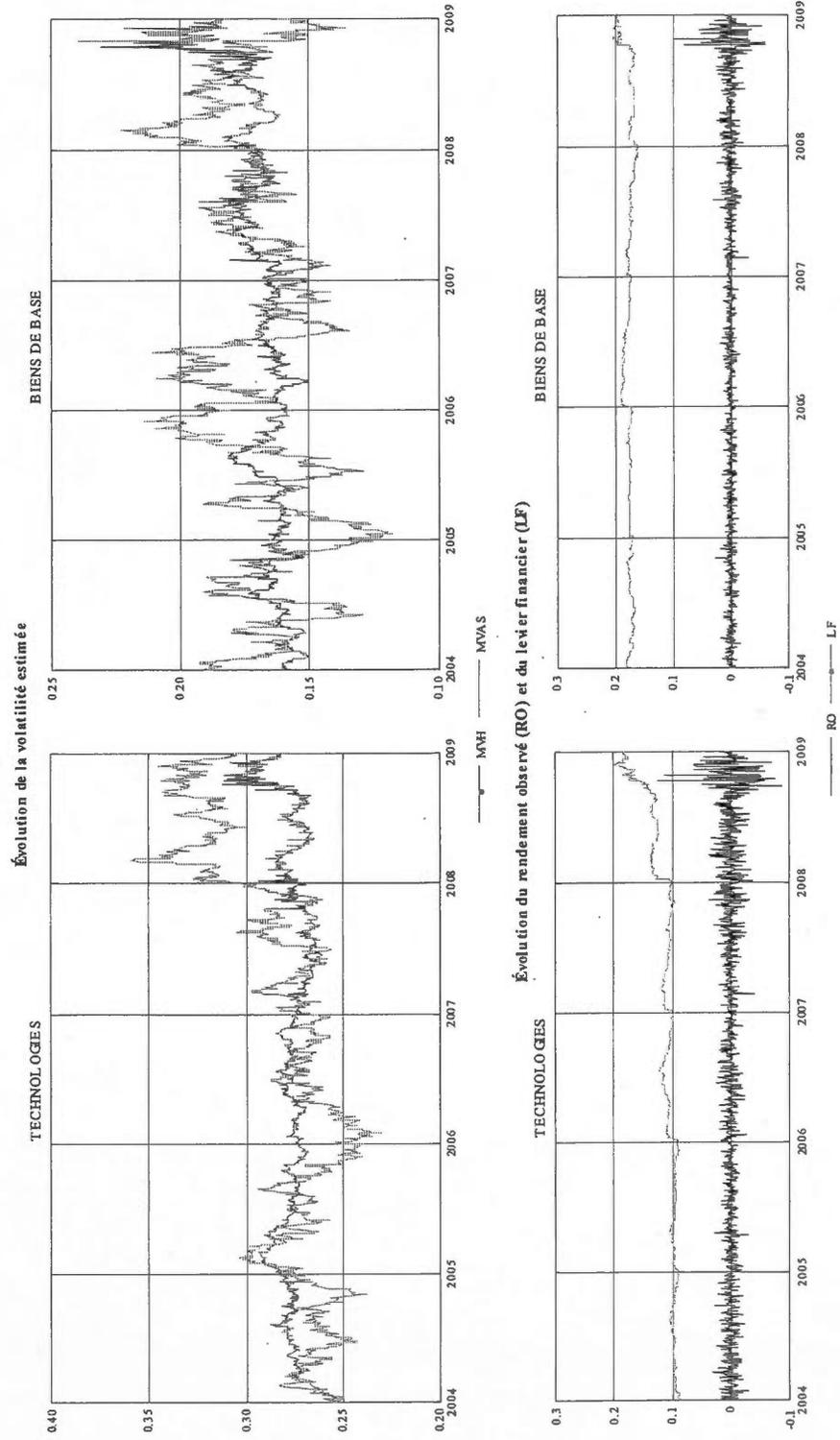
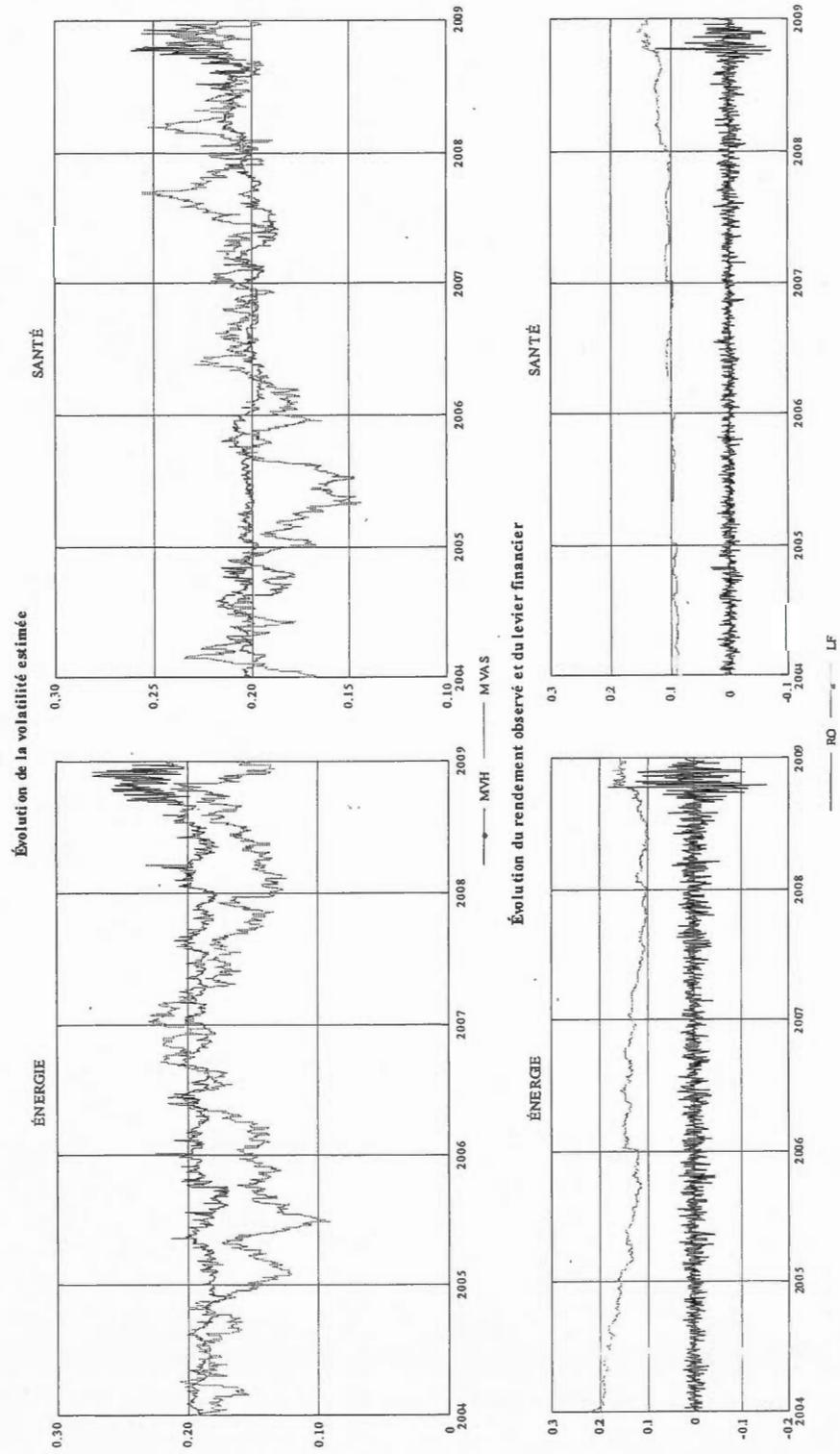


Figure 2.9 Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains de l'énergie et de la santé (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008)



**Figure 2.10** Évolution de la volatilité estimée, du rendement observé et du levier financier des portefeuilles indiciaires des secteurs américains des biens durables et des services publics (2 janvier 2004 - 31 décembre 2008)

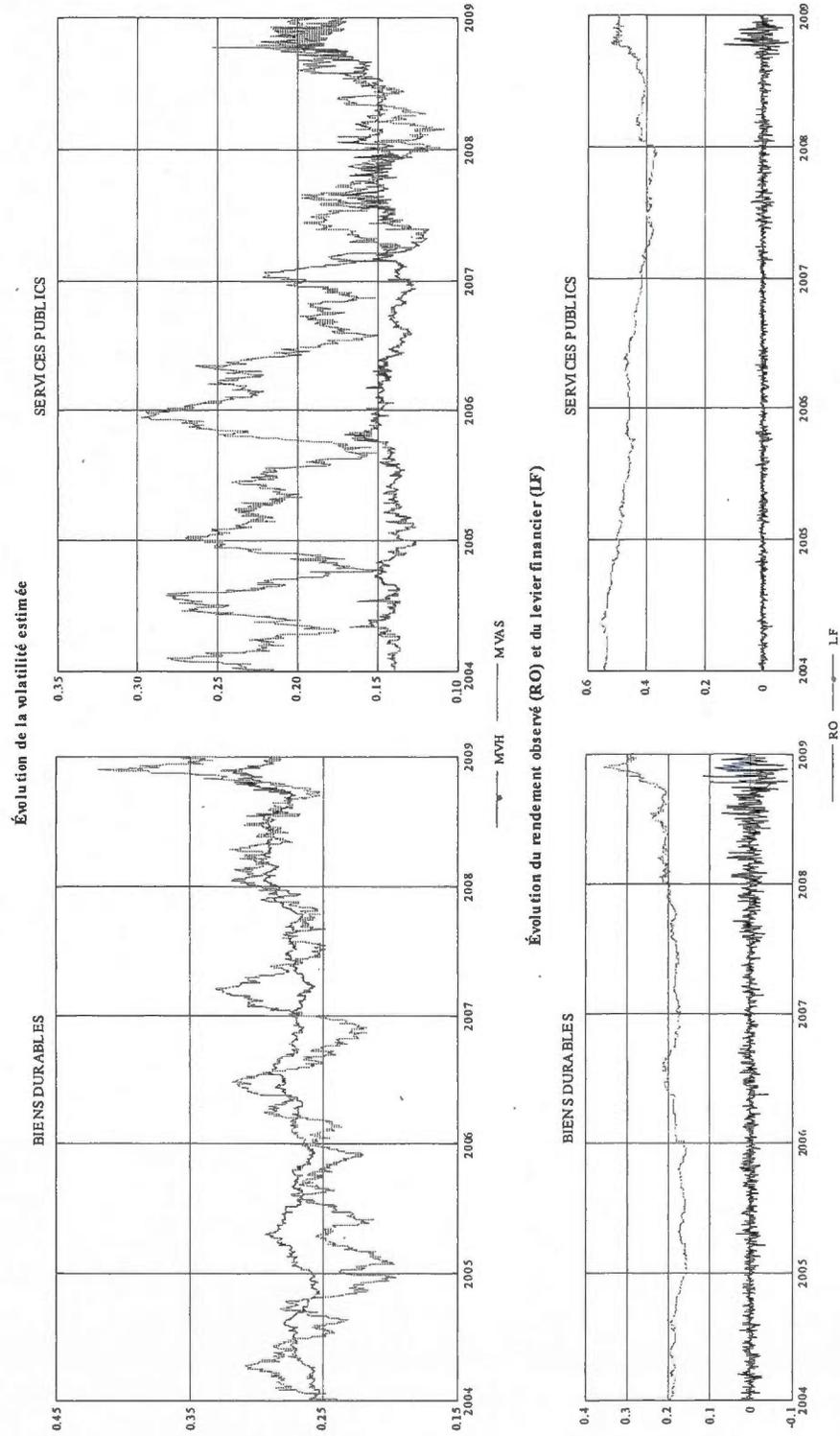


Figure 2.11 Test de robustesse: évolution de la volatilité, du rendement observé et du levier financier (juillet 1990-décembre 2000)

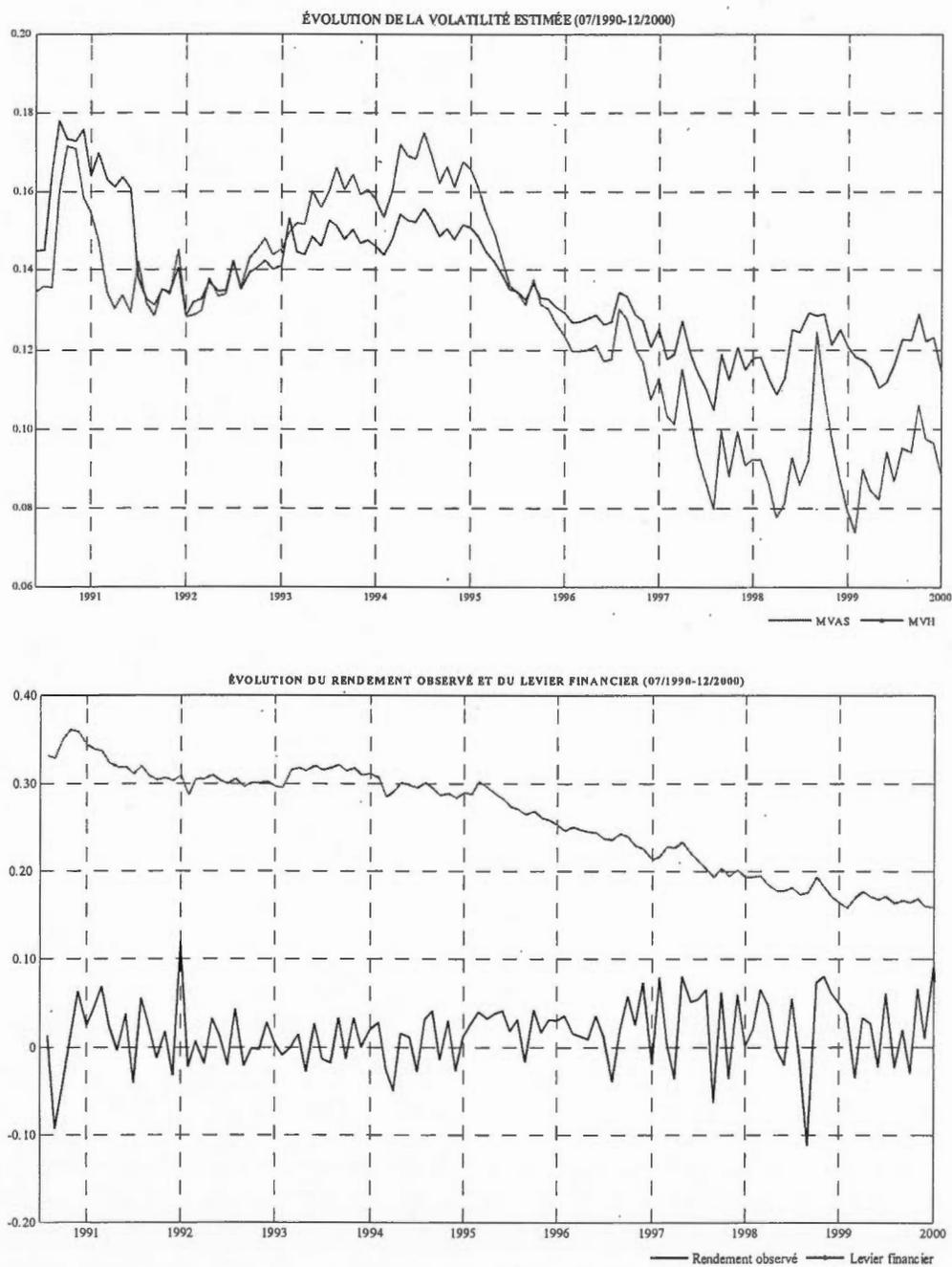
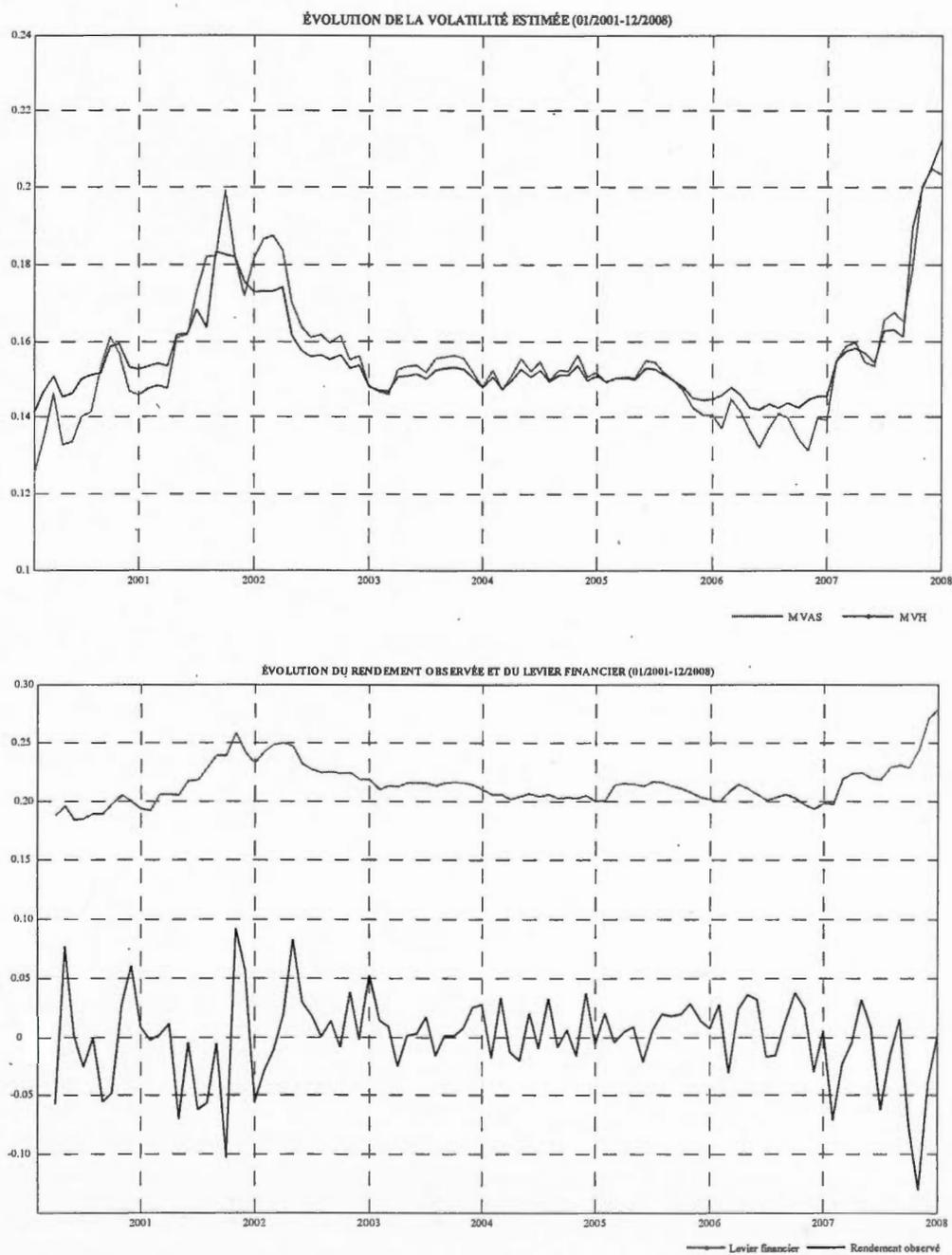


Figure 2.12 Test de robustesse: évolution de la volatilité, du rendement observé et du levier financier (janvier 2001-décembre 2008)



## CHAPITRE III

### LA PRIME DE RISQUE DE LA VOLATILITÉ ASYMÉTRIQUE

#### 3.1 Introduction

Il est communément connu que le marché fixe les prix d'actifs risqués de façon à obtenir des primes de rendement accordées aux risques qu'il s'attend à subir. Le plus connu des risques est le bêta, dit systématique, ou relatif au marché. Sa prime se mesure d'ordinaire par le taux justifié selon le modèle CAPM classique diminué du taux sûr, sous hypothèse implicite d'un marché à volatilité constante. Or, cette volatilité s'avère inconstante et son constat est acquis depuis les travaux fondateurs d'Engle (1982). D'où l'existence d'une prime de risque de la volatilité qui représente une rémunération au risque supplémentaire introduit par l'hétérovolatilité.

Diverses études récentes sur la prime de risque de la volatilité inconstante concernent trois marchés d'options, sur les actions (Bakshi et Kapadia, 2003,a,b; Carr et Wu, 2009; Driessen, Maenhout et Vilkov, 2009; Todorov, 2010), sur les devises (Low et Zhang, 2005) et sur les titres à revenu fixe (Almeida et Vicente, 2009). En général, leurs résultats convergent et révèlent que ladite prime est négative. L'explication résiderait, notamment, dans l'attitude des investisseurs qui sont très nombreux à se couvrir via options, moyennant une prime, pour s'assurer contre l'hypervolatilité (ou volatilité excessive) qui coïncide d'ordinaire avec un marché baissier (Ang et al., 2006, 2009; Jiang, Xu et Yao, 2009; etc.).

Que nous sachions, il n'existe pas d'études sur la prime de risque associée à une

volatilité caractérisée par ses variations asymétriques, ce qui justifie notre tentative. En particulier, il nous importe d'étudier l'effet de l'asymétrie de la volatilité sur sa prime de risque, ce qui permettrait d'ajouter des facteurs explicatifs de la variation de la dite prime à ceux déjà avancés, tels l'échéance des options (Low et Zhang, 2005), le risque systématique (Carr et Wu, 2009) et les sauts surimposés au processus continu du rendement (Todorov, 2010). Notre intérêt se justifie par l'importance de cette prime dans diverses applications financières telles que la prédiction de la volatilité, l'évaluation des options, la composition des portefeuilles et la gestion du risque financier (Andersen, Benzoni et Lund, 2002; Chernov, 2007; Mixon, 2009; Carr et Wu, 2009; etc.).

Pour y arriver, nous procédons en deux étapes. Dans la première étape, nous mettons en évidence, de façon empirique, la présence de la prime de risque de la volatilité asymétrique dans les prix d'options. L'idée consiste à comparer l'évolution de la volatilité instantanée du support, estimée via le modèle établi au deuxième essai, à celle de la volatilité implicite dans les prix d'options sur le même support. Une volatilité implicite plus élevée que la volatilité instantanée soutiendrait l'hypothèse d'une prime négative associée au risque de la volatilité asymétrique. Dans la deuxième étape, nous utilisons la méthode de Bakshi et Kapadia (2003,a) qui consiste à former un portefeuille de couverture (ou de réplcation) en prenant une position acheteur dans l'option d'achat (de vente) et une position vendeur (acheteur) dans le support. Ce portefeuille devient sûr à un risque près, celui de la volatilité. La technique est telle que le rendement moyen du portefeuille de couverture, durant la vie de l'option, et la prime associée au risque de la volatilité asymétrique du support ont le même signe. Dans cette étape, nous procédons à une analyse plus approfondie qui nous permettrait, en plus, de déceler l'effet du niveau de la volatilité et l'échéance de l'option sur la prime de risque de la volatilité.

Notre étude empirique porte sur les prix d'options (d'achat et de vente) sur l'indice américain S&P100 durant la période allant du 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. Pour l'essentiel, les résultats obtenus révèlent que la prime de risque de la volatilité asymétrique est, en moyenne, négative. Cela transparait d'ailleurs doublement, et dans l'écart significatif entre la volatilité implicite dans les prix d'options et

la volatilité instantanée du S&P100, et dans le rendement moyen négatif des portefeuilles de réplication. De plus, la prime de risque de la volatilité s'avère changeante et dépend du niveau de la volatilité et de l'échéance des options vu que la sous-performance des portefeuilles de réplication augmente en périodes de volatilité accrue, surtout pour les portefeuilles formés avec des options à longue échéance. Également, les résultats dévoilent une asymétrie dans la variation de la prime de risque de la volatilité voulant qu'en valeur absolue sa hausse due à une volatilité accrue dépasse généralement sa baisse résultant d'une relative stabilité du marché.

Successivement ci-dessous, nous revoyons d'abord les acquis sur la prime de risque de la volatilité (section 2), décrivons notre méthodologie (section 3), puis présentons notre échantillon, nos tests et les résultats obtenus (section 4) avant de conclure (section 5).

### 3.2 Revue des écrits

Notre revue des écrits, notamment récents, sur la prime de risque de la volatilité révèle que l'hétérovolatilité constitue un risque non diversifiable et que la prime de risque qui s'y rattache est négative. Nous présentons dans le tableau 3.1 un résumé des principaux résultats des études sélectionnées. Notons que les écrits antérieurs (Lamoureux et Lastrapes, 1993; Coval et Shumway, 2001; Andersen, Benzoni et Lund, 2002) indiquent que cela résulte de l'aversion au risque des investisseurs. Ceux-ci préfèrent payer des primes d'options pour s'assurer contre le risque d'une volatilité en hausse qui coïncide généralement avec des périodes de récession. Or, la preuve empirique vient de Jackwerth et Rubinstein (1996) qui furent parmi les premiers à examiner la volatilité implicite dans les prix d'options. Ils constatent que celle-ci dépasse, en général, la volatilité réalisée. Ce constat empirique est soutenu, récemment, par, entre autres, Bakshi et Kapadia (2003,a,b), Chernov (2007) et Mixon (2009) à travers leurs tests appliqués aux prix d'options sur actions américaines, sur indices S&P100, S&P500 et Nasdaq 100 et sur devises (livre sterling, franc suisse et yen japonais par rapport au dollar américain). D'où l'interprétation voulant que les prix d'options comprennent une

surprime due au risque de volatilité inconstante, ce qui s'accorde aux observations de Bakshi et Kapadia (2003,a) voulant que les options deviennent plus chères après chaque baisse du marché.

**Tableau 3.1** Principales études récentes sur la prime de risque de la volatilité

Étude	Échantillon et période d'étude	Principaux résultats
Bakshi et Kapadia (2003,a)	Prix d'options sur S&P500 durant 1988-1995	Prime de risque de la volatilité est en moyenne négative et plus significative dans le cas des options d'achat au jeu.
Bakshi et Kapadia (2003,b)	Prix d'options sur 25 actions américaines durant 1991-1995	Prime de risque négative de la volatilité et plus faible, en valeur absolue, dans le cas des actions.
Low et Zhang (2005)	Prix d'options sur devises durant 1996-2003	Prime de risque négative de la volatilité des taux de change. Lien négatif entre la valeur absolue de cette prime et l'horizon temporel de l'option.
Driessen, Maenhout et Vilkov (2009)	Options sur l'indice S&P100 durant 1996-2003	Prime de risque négative de la volatilité vu que la volatilité implicite dépasse la volatilité réalisée.
Carr et Wu (2009)	Options sur 35 actions et indices américains durant 1996-2003	Prime de risque négative de la volatilité. Elle est liée négativement avec le risque relatif bêta de la firme
Todorov (2010)	Prix d'options sur S&P500 durant 1990-2002	Prime de risque négative de la volatilité. Elle augmente, en valeur absolue, après une chute significative du rendement et tend à s'estomper par la suite.

Toujours d'après Bakshi et Kapadia (2003,a), le recours à une technique non paramétrique semble une solution pratique pour identifier la nature de la prime de risque

de la volatilité<sup>1</sup>. L'idée consiste à former un portefeuille de couverture, à vocation de réplcation. Celui-ci devient sûr à un risque près, celui de la volatilité. La technique est telle que le rendement moyen du portefeuille de réplcation, durant la vie de l'option, et la prime liée au risque de la volatilité du support ont le même signe. Les résultats de leurs tests à base des prix d'options sur S&P500, durant la période 1988-1995, révèlent que cette prime est en moyenne négative vu le rendement moyen négatif des portefeuilles de réplcation formés. Il est de l'ordre de -0,05% en moyenne de la valeur du S&P500. Cette sous-performance s'accroît dans le cas des options d'achat au jeu où le rendement moyen atteint -0,13% de la valeur du S&P500, soit 8% en valeur absolue du prix moyen de ces options. On notera aussi que, Bakshi et Kapadia (2003,b) ont examiné la prime de risque de la volatilité d'un échantillon de 25 actions américaines durant la période 1991-1995. Leurs résultats montrent que cette prime est belle et bien négative mais plus faible, en valeur absolue, que dans le cas de l'indice S&P500. Ils attribuent ce résultat au risque spécifique des firmes qui ne semble pas être rémunéré par le marché.

Plus tard, Low et Zhang (2005) recourent à la méthode de Bakshi et Kapadia (2003, a) pour examiner la prime de risque de la volatilité sur le marché de devises. Ils furent parmi les premiers à étudier l'évolution de cette prime au fil du temps. Leur étude porte sur les prix d'options sur quatre devises liquides, soit le livre sterling, le yen japonais, le franc suisse et l'Euro, durant la période allant du 3 juin 1996 au 31 décembre 2003. Leurs résultats révèlent que les prix d'options sur ces devises comprennent une surprime, d'où une prime négative liée au risque de la volatilité des taux de change. De plus, les tests à base des prix d'options avec diverses échéances (1, 3, 6 et 12 mois) dévoilent un lien négatif entre la valeur absolue de cette prime et l'horizon temporel de l'option voulant que la prime de risque de la volatilité diminue, en valeur absolue, pour les options à longue échéance.

---

<sup>1</sup>Notons que l'estimation paramétrique de la prime pour volatilité est possible dans le cas des modèles de volatilité stochastique mais dans un univers neutre au risque. Pour plus de détails, voir, par exemple, les méthodes paramétriques de Bates (1996, 2000), Pan (2002), Eraker (2004), Jones (2006) et Aït-Sahalia et Kimmel (2007).

Récemment, l'hypothèse d'une prime négative associée au risque de la volatilité semble être bien soutenue dans la plupart des études empiriques menées, soit à l'aide de données sur indices boursiers, soit en utilisant des échantillons d'actions. Les résultats de ces études convergent, généralement, vers la supériorité de la volatilité implicite dans les prix d'options comparativement à la volatilité réalisée. Par exemple, Mixon (2009) montre que, durant la période 2001-2004, la volatilité implicite dans les prix d'options d'un échantillon de 17 actions américaines dépasse, en moyenne, leur volatilité réalisée. L'écart pouvant même atteindre 10%. De leur côté, Driessen, Maenhout et Vilkov (2009) recourent à la méthode de Britten-Jones et Neuberger (2000) et Jiang et Tian (2005)<sup>2</sup> pour estimer la volatilité implicite dans les prix d'options sur l'indice S&P100 durant la période allant du janvier 1996 au décembre 2003. En la comparant à la volatilité réalisée de cet indice, ils trouvent qu'elle la dépasse significativement<sup>3</sup>. Les auteurs attribuent ce résultat à la volatilité excessive de l'indice lors des périodes de récession expliquée, notamment, par la hausse de la corrélation entre les rendements des titres, ce qui affaiblit l'effet de diversification au sein de l'indice et augmente ainsi sa volatilité<sup>4</sup>.

Par ailleurs, il importe de noter que quelques écrits récents ont permis d'estimer la prime de risque de la volatilité plutôt qu'identifier seulement son signe. Par exemple, Carr et Wu (2009) procèdent via swaps de variance, ces contrats financiers hors cote où la prime pour volatilité se mesure en proportion d'une variance prédéfinie et celle observée sur l'horizon du contrat. Dans leur étude, qui va de janvier 1996 à février 2003,

---

<sup>2</sup>Pour plus de détails sur la méthode de Britten-Jones et Neuberger (2000) et Jiang et Tian (2005), voir l'essai I intitulé «*Le point sur la volatilité boursière*».

<sup>3</sup>Notons que Driessen, Maenhout et Vilkov (2009) ont testé aussi l'hypothèse d'une prime de risque négative de la volatilité avec des données relatives aux prix d'options sur toutes les actions appartenant au S&P100. Contrairement aux attentes, leurs résultats révèlent un rejet de cette hypothèse voulant que cette prime soit plutôt positive. Cette divergence inattendue de ces résultats semble être attribuée à la méthodologie d'estimation utilisée.

<sup>4</sup>Mentionnons que cette explication est inspirée des travaux de Roll (1988) et Jorion (2000) sur, respectivement, la Krach boursière de 1987 et la crise de la dette russe en 1998.

ils estiment la prime liée au risque de la volatilité via un échantillon d'options sur 35 actions et d'indices (S&P500, S&P100 et Dow Jones). Deux résultats ressortent: (1) la prime de risque de la volatilité, quoique changeante, s'avère négative en moyenne, que le marché soit haussier ou baissier; (2) il existe un lien négatif entre la prime liée au risque de la volatilité d'un titre et son risque relatif bêta: plus monte le bêta, plus la prime devient négative. Quant à Todorov (2010), il mesure la prime de risque de la volatilité par l'écart entre la volatilité issue d'un modèle stochastique avec sauts et le niveau de l'indice de volatilité VIX<sup>5</sup>. Son étude allant du 2 janvier 1990 au 29 novembre 2002 porte sur les prix d'options sur le S&P 500. L'auteur dévoile que le saut qui caractérise le processus du rendement influence l'évolution de cette prime. En effet, celle-ci augmente, considérablement (en valeur absolue) après une chute significative du rendement et tend à s'estomper par la suite.

Globalement, il nous apparaît que l'hypothèse d'une prime négative liée au risque de la volatilité demeure, en général, soutenue dans les écrits étudiés. Le lien négatif entre le rendement et sa volatilité semble une explication plausible à ce résultat. Nos tests plus loin permettront de contribuer à la recherche dans ce domaine en caractérisant la prime de risque associée à la volatilité asymétrique ainsi que les facteurs qui expliquent ses variations.

### 3.3 Méthodologie d'estimation

Dans cette section, nous présentons d'abord les processus stochastiques qui fondent le modèle à volatilité asymétrique (MVAS), retenu pour décrire l'évolution du rendement ainsi que sa volatilité. Puis, nous dérivons l'équation différentielle partielle de ce modèle. Enfin, nous recourons à la méthode de Bakshi et Kapadia (2003,a) afin de caractériser la nature de la prime associée au risque de la volatilité asymétrique.

---

<sup>5</sup>Rappelons que l'indice de volatilité VIX, établi par la Bourse des options de Chicago (CBOE), reflète l'information disponible sur le marché, susceptible d'influencer la volatilité future. Le calcul de VIX se base sur les volatilités implicites extraites des prix d'options (d'achat et de vente) sur l'indice S&P500. Pour plus de détails, voir l'essai I intitulé «*Le point sur la volatilité boursière*».

Selon MVAS, l'évolution du cours de l'actif financier,  $S$ , et celle de sa variance instantanée,  $\sigma_s^2$ , sous probabilité physique  $P$ , obéissent aux processus stochastiques suivants:

$$dS_t = \mu_{s,t} S_t dt + \sigma_{s,t} S_t dz_t \quad (3.1)$$

$$d\sigma_{s,t}^2 = (\phi_t + \omega_t \sigma_{s,t}^2 + \chi_t \sigma_{s,t}^4) dt + a_t \sigma_{s,t}^3 dz_t + b_t \sigma_{s,t} dw_t \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \mu_{s,t} &= \frac{\mu - rL_t}{1 - L_t} ; \sigma_{s,t} = \frac{\sigma_{v,t}}{1 - L_t} ; b_t = \frac{\eta}{1 - L_t} ; a_t = -2L_t ; \phi_t = \frac{\kappa\alpha}{\eta^2} b_t^2 ; \\ \omega_t &= \frac{a_t b_t}{\eta} (\mu - r + \rho\eta) - \kappa ; \chi_t = \frac{a_t^2}{4} - a_t \end{aligned}$$

où  $\mu$  symbolise la variation attendue de la valeur marchande de la firme  $V$ ,  $\sigma_v$  la variance instantanée de  $V$ ,  $\alpha$  la variance instantanée d'équilibre à long terme de  $V$ ,  $\kappa$  la force de rappel vers  $\alpha$ ,  $\eta$  la volatilité de la variation de  $\sigma_v$ ,  $r$  le taux d'intérêt supposé à structure horizontale et fixe,  $L$  le levier financier de la firme et  $z$  et  $w$  des mouvements browniens classiques corrélés à hauteur de  $\rho$ .

Dans un monde neutre au risque, sous probabilité  $Q$ , les équations (3.1), (3.2) se ramènent à:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_{s,t} S_t dz_t^Q \quad (3.3)$$

$$d\sigma_{s,t}^2 = (\phi_t + \omega_t \sigma_{s,t}^2 + \chi_t \sigma_{s,t}^4 - \lambda_{s,t}) dt + a_t \sigma_{s,t}^3 dz_t^Q + b_t \sigma_{s,t} dw_t^Q \quad (3.4)$$

où  $\lambda_s$  est la prime de risque de la volatilité et  $z^Q$  et  $w^Q$  sont des  $Q$ -mouvements browniens corrélés à hauteur de  $\rho$ .

Supposons une option dont le prix  $C$  est une fonction deux fois continûment différentiable du temps  $t$ , du prix de l'actif  $S$  et de sa variance instantanée  $\sigma_s^2$ , soit:

$$C_t = f(S, \sigma_s^2, t) \quad (3.5)$$

À partir de (3.5), l'application du lemme d'Itô permet d'obtenir la dynamique de  $C$ , soit:

$$dC_t = \frac{\partial C_t}{\partial t} dt + \frac{\partial C_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_{s,t}^2} d\sigma_{s,t}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} d\langle S \rangle_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{(\partial \sigma_{s,t}^2)^2} d\langle \sigma_s^2 \rangle_t + \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t \partial \sigma_{s,t}^2} d\langle S, \sigma_s^2 \rangle_t \quad (3.6)$$

En substituant dans (3.6) les équations (3.3) et (3.4), on obtient:

$$dC_t = \mu_{C,t} dt + \left( \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \sigma_{s,t} S_t + \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_{s,t}^2} a_t \sigma_{s,t}^3 \right) dz_t^Q + \left( \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_{s,t}^2} b_t \sigma_{s,t} \right) d\omega_t^Q \quad (3.7)$$

$$\mu_{C,t} = A(C_t) + \frac{1}{2} B(C_t)$$

$$A(C_t) = \frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{\partial C_t}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_{s,t}^2} (\phi_t + \omega_t \sigma_{s,t}^2 + \chi_t \sigma_{s,t}^4 - \lambda_{s,t})$$

$$B(C_t) = \left[ \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} S_t^2 + \frac{\partial^2 C_t}{(\partial \sigma_{s,t}^2)^2} (a_t^2 \sigma_{s,t}^4 + b_t^2 + 2a_t b_t \rho \sigma_{s,t}^2) + 2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t \partial \sigma_{s,t}^2} (a_t \sigma_{s,t}^2 + b_t \rho) S_t \right] \sigma_{s,t}^2$$

Or, la valeur actualisée de  $C$  est une martingale sous la probabilité risque-neutre  $Q$ . Nous aurons ainsi :

$$dC_t = r C_t dt \quad (3.8)$$

En substituant (3.7) dans (3.8), nous obtenons:

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} + r \left( \frac{\partial C_t}{\partial S_t} S_t - C_t \right) + \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_{s,t}^2} (\phi_t + \omega_t \sigma_{s,t}^2 + \chi_t \sigma_{s,t}^4 - \lambda_{s,t}) + \frac{1}{2} B(C_t) = 0 \quad (3.9)$$

Pour déterminer la nature de la prime de risque de la volatilité asymétrique, notée  $\lambda_s$ , nous utilisons la méthode de Bakshi et Kapadia (2003,a). L'idée consiste à former un portefeuille de réplcation avec une position acheteur dans l'option d'achat européenne au prix  $C$  et une position vendeur dans la quantité  $\Delta_t$  du support au prix  $S^6$ . Ainsi, l'investissement net, noté  $I$ , à la date  $t$ , est donné par:

$$I_t = C_t - \Delta_t S_t \quad (3.10)$$

<sup>6</sup>Mentionnons qu'un portefeuille de réplcation peut être formé aussi avec une position acheteur

où  $\Delta_t = \frac{\partial C_t}{\partial S_t}$  représente le coefficient delta de l'option d'achat, c'est-à-dire le taux de variation de sa valeur par rapport à celui du support.

Par conséquent, le rendement excédentaire de ce portefeuille, noté  $R$ , entre la date  $t$  et l'échéance de l'option  $t + \tau$ , est donné par:

$$R_{t,t+\tau} = C_{t+\tau} - C_t - \Delta_t (S_{t+\tau} - S_t) - rI_t\tau \quad (3.11)$$

où  $r$  et  $\tau$  représentent, respectivement, le taux sûr et le temps à échéance de l'option.

Il importe de noter que le portefeuille de réplication formé est delta-neutre, c'est-à-dire couvert contre tous les risques sauf celui de la volatilité. Ainsi, son rendement est égal au taux sûr si le risque de la volatilité est nul, soit un rendement excédentaire  $R$  nul.

En intégrant l'équation (3.11), nous obtenons l'expression suivante:

$$R_{t,t+\tau} = C_{t+\tau} - C_t - \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial S_u} dS_u - \int_t^{t+\tau} r \left( C_u - \frac{\partial C_u}{\partial S_u} S_u \right) du \quad (3.12)$$

Or, l'intégration de l'équation (3.6) nous donne:

$$C_{t+\tau} = C_t + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial S_u} dS_u + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_{s,u}^2} d\sigma_{s,u}^2 + \int_t^{t+\tau} \left( \frac{\partial C_u}{\partial u} + \frac{1}{2} B(C_u) \right) du \quad (3.13)$$

Avec la substitution des équations (3.2) et (3.9) dans l'équation (3.13), nous

dans une option de vente européenne au prix  $P$  et une position vendeur dans la quantité  $\Delta_t$  du support. Dans ce cas, l'investissement net  $I$ , à la date  $t$ , est donné par:

$$I_t = P_t - \Delta_t S_t$$

où  $\Delta_t = \frac{\partial P_t}{\partial S_t}$  représente le coefficient delta de l'option de vente.

obtenons:

$$\begin{aligned}
 C_{t+\tau} = & C_t + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial S_u} dS_u + \int_t^{t+\tau} r \left( C_u - \frac{\partial C_u}{\partial S_u} S_u \right) du + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_{s,u}^2} \lambda_{s,u} du \\
 & + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_{s,u}^2} a_u \sigma_{s,u}^3 dz_u + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_{s,u}^2} b_u \sigma_{s,u} dw_u
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Par conséquent, la substitution de l'équation (3.14) dans (3.12) nous donne:

$$R_{t,t+\tau} = \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_{s,u}^2} \lambda_{s,u} du + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_{s,u}^2} a_u \sigma_{s,u}^3 dz_u + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_{s,u}^2} b_u \sigma_{s,u} dw_u \quad (3.15)$$

Notons que  $\frac{\partial C}{\partial \sigma_s^2}$  représente le coefficient véga de l'option d'achat, c'est-à-dire le taux de variation de sa valeur par rapport à la volatilité du support. Si ce coefficient est élevé alors la valeur de l'option est très sensible au moindre changement de la volatilité. Autrement, un changement de la volatilité n'aura qu'un léger impact sur la valeur de cette option.

Les deux dernières composantes de l'équation (3.15) représentent des intégrales stochastiques. En utilisant les propriétés de martingale nous aurons:

$$E_t(R_{t,t+\tau}) = \int_t^{t+\tau} E_u \left( \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_{s,u}^2} \lambda_{s,u} \right) du \quad (3.16)$$

L'équation (3.16) montre, qu'en temps continu, le rendement moyen du portefeuille de réplication, entre  $t$  et  $t + \tau$ , a le même signe que celui de la prime de risque de la volatilité  $\lambda_s$ , vu que le coefficient véga est toujours positif. Particulièrement, si ce rendement est nul alors les prix des options ne contiennent aucune surprime liée au risque de la volatilité, c'est à dire que le risque de la volatilité n'est pas rémunéré par le marché. Autrement, un rendement moyen négatif (positif) reflète une prime de risque négative (positive) de la volatilité en moyenne.

### 3.4 Tests empiriques et résultats

Dans cette section, nous présentons d'abord notre échantillon ainsi que les données utilisées. Puis, nous procédons à une comparaison entre la volatilité implicite dans

les prix d'options sur S&P100 et la volatilité instantanée issue du modèle à volatilité asymétrique (MVAS). Ensuite, nous formons les portefeuilles de réplifications, calculons leurs rendements moyens selon les échéances des options et analysons les résultats trouvés. Enfin, nous étudions les variations de la prime de risque de la volatilité asymétrique ainsi que les facteurs qui les expliquent avant de procéder à des tests de robustesse pour évaluer la significativité des résultats obtenus.

### 3.4.1 Échantillon retenu et données utilisées

Notre étude est menée avec un échantillon composé de données journalières, provenant de la base de données *OptionMetrics*, relatives aux cours de l'indice S&P100<sup>7</sup> et aux prix d'options sur cet indice<sup>8</sup>. Elle porte sur la période qui s'étend du 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. Le choix de cette période est influencé, entre autres, par l'existence de différentes phases d'évolution des cours boursiers. Par exemple, nous assistons à une phase de relative stabilité durant l'année 2006. Par contre, la fin de l'année 2008 se caractérise par une forte instabilité boursière due, notamment, à la crise financière mondiale. Nous espérons ainsi évaluer l'effet d'une telle volatilité changeante et asymétrique dans sa relation avec le rendement sur la prime de risque qui s'y rattache.

Nous commençons par ajuster, pour chaque observation relative aux options retenues, le prix du support  $S$  en enlevant la valeur actualisée des dividendes  $D$  versés entre la date  $t$  et l'échéance de l'option  $t + \tau$ , soit:

$$S_t^* = S_t - \sum_{s=1}^{\tau} e^{-rs} D_{t+s} \quad (3.17)$$

---

<sup>7</sup>Rappelons que l'indice américain S&P 100 est composé des 100 plus grandes firmes du S&P500. L'importance de chaque firme dans cet indice est proportionnelle à sa capitalisation boursière.

<sup>8</sup>Les options sur cet indice, négociées sur la Bourse des options de Chicago (CBOE), sont de deux types: américain et européen. Les options américaines se transigeaient sur le marché depuis 11 mars 1983 alors que les options européennes existaient depuis 23 juillet 2001. Dans notre étude, nous retenons celles de type européen, c'est-à-dire les options qui ne peuvent être exercées qu'à leurs dates d'expiration. Le prix de l'option correspond à la moyenne entre son prix acheteur et son prix vendeur.

où  $S^*$  et  $\tau$  correspondent, respectivement, au prix du support ajusté aux dividendes et au temps à échéance de l'option. Par ailleurs,  $r$  est le taux sûr périodique supposé constant.

Également, nous nous inspirons des travaux de Bakshi, Cao et Chen (1997), Goyal et Saretto (2009) et Driessen, Maenhout et Vilkov (2009) pour établir des critères de sélection des observations relatives aux options retenues. Ainsi, nous écartons de notre échantillon initial les observations dont: (1) le prix de l'option viole les conditions d'absence d'arbitrage<sup>9</sup>; (2) la volatilité implicite dans le prix de l'option, calculée via le modèle de Black-Scholes, est excessive (supérieure à 100%) ou faiblement significative (inférieur à 1%); (3) le temps à échéance de l'option est relativement court (inférieur à 5 jours); (4) le prix de l'option est relativement faible (inférieur à 0,50\$); et (5) l'intérêt en cours est nul<sup>10</sup>. L'idée est d'éliminer le biais que pourrait introduire la faible liquidité de ces options sur les résultats de nos tests.

Au total, l'application des critères ci-dessus nous donne un échantillon final composé de 376 454 observations relatives aux options d'achat et de vente sur l'indice S&P100. Nous les subdivisons, en 30 classes, selon: (1) la nature de l'option (achat ou vente); (2) le temps à échéance de l'option (inférieur à 60 jours, entre 60 et 180 jours ou supérieur à 180 jours<sup>11</sup>); et (2) le prix relatif du support<sup>12</sup> définit comme étant le

---

<sup>9</sup>Les conditions d'absence d'arbitrage exigent qu'à une date  $t$ , le prix de l'option d'achat (de vente) est limité à l'intérieur d'un intervalle allant de  $S_t^* - Ke^{-r\tau}$  ( $Ke^{-r\tau} - S_t^*$ ) à  $S_t^*(Ke^{-r\tau})$  où  $S^*$  est le prix ajusté du support,  $r$  est le taux sûr et  $K$  et  $\tau$  sont, respectivement, le prix de levée et le temps à échéance de l'option.

<sup>10</sup>L'intérêt en cours (ou « *open interest* » en anglais) correspond au nombre d'options qui n'ont pas été annulées par des contrats opposés.

<sup>11</sup>Contrairement à Bakshi et Kapadia (2003,a), nous jugeons qu'il serait intéressant d'utiliser, dans nos tests, des options à longue échéance, ce qui permettrait d'évaluer la sensibilité de la prime de risque de la volatilité au temps à échéance de l'option.

<sup>12</sup>Le prix relatif du support évalue le degré d'éloignement de la valeur du support ajustée aux dividendes du prix de levée de l'option.

rapport entre la valeur du support ajustée aux dividendes ( $S^*$ ) et le prix de levée de l'option ( $K$ ). On notera que, dans notre étude, une option d'achat (vente) est considérée au jeu si le prix relatif varie entre 0,98 et 1,02. Par contre, l'option d'achat (vente) est très hors jeu si ce prix est inférieur (supérieur) à 0,95 et très en jeu s'il dépasse (tombe sous) 1,05. Finalement, l'option d'achat (vente) est en jeu (hors jeu) si le prix relatif varie entre 1,02 et 1,05 et hors jeu (en jeu) s'il varie entre 0,95 et 0,98. Le tableau 3.2 présente, selon la classe d'options sur S&P100, les statistiques descriptives, toutes définitions utiles comprises.

Pour l'essentiel, les résultats se conforment à la théorie d'évaluation d'options voulant que toutes autres choses égales: (1) le lien est positif (négatif) entre le prix moyen de l'option d'achat (de vente) et le prix relatif du support; et (2) l'allongement de l'horizon temporel (ou l'échéance) de l'option hausse le prix moyen de l'option. En effet, celui-ci est à son niveau maximal (minimal) pour les options en jeu (hors jeu) où l'horizon temporel dépasse 180 jours (tombe sous 60 jours). Il est de 67,28\$ (2,34\$) pour les options d'achat contre 81,07\$ (3,08\$) pour les options de vente.

Toujours au tableau 3.2, l'on voit qu'en moyenne, les options de vente sont plus chères que les options d'achat. En effet, le prix moyen des options de vente est de 28,09\$ contre 23,04\$ pour les options d'achat. Cette avancée tient aussi bien pour les options au jeu que celles hors ou en jeu. On notera aussi qu'en pourcentage du prix moyen des options d'achat, cet écart est plus prononcé dans le cas des options très hors jeu où il est égal à 32,88% (différence entre 9,16\$ et 6,96\$). Toutefois, il est de moindre ampleur pour les options au jeu où il est à son niveau minimal, soit 11,24% (différence entre 65,84\$ et 58,68\$). Nous attribuons ce résultat à la demande spéciale pour les options de vente, surtout celles qui sont très hors jeu, utilisées généralement pour se couvrir contre la baisse du marché.

Tableau 3.2 Statistiques descriptives liées aux options retenues sur SP100 (2 janvier 2006 - 18 décembre 2010)

Pan A. Options d'achat sur S&P100				Pan B. Options de vente sur S&P100							
<i>y</i>	Temps à échéance (en jours)			<i>y</i>	Temps à échéance (en jours)						
	<60	60 - 180	180<		<60	60 - 180	180<				
OTHJ	<0,95	13432 (2,34)	18541 (7,67)	11344 (11,28)	43317 (6,96)	O TEJ	<0,95	11395 (52,54)	10632 (67,20)	8640 (81,70)	30667 (65,84)
OHJ	0,95 - 0,98	16832 (6,34)	15320 (13,45)	10834 (19,45)	42986 (12,18)	O EJ	0,95 - 0,98	9416 (24,35)	10812 (31,63)	9831 (45,43)	30059 (33,86)
OAJ	0,98 - 1,02	18450 (12,65)	19430 (18,98)	10632 (26,56)	48512 (18,23)	O AJ	0,98 - 1,02	13421 (15,45)	14614 (20,54)	11140 (25,76)	39175 (20,28)
OEJ	1,02 - 1,05	14415 (19,56)	13420 (24,54)	12643 (38,52)	40478 (27,13)	O HJ	1,02 - 1,05	11344 (10,52)	12828 (16,44)	11432 (20,41)	35604 (15,83)
O TEJ	1,05<	10111 (48,56)	13697 (59,41)	10741 (67,28)	34549 (58,68)	O THJ	1,05<	10856 (3,08)	11426 (10,43)	8825 (14,98)	31107 (9,16)
Total		73240 (15,36)	80408 (23,13)	56194 (32,58)	209842 (23,04)	Total		56432 (21,05)	60312 (27,69)	49868 (36,19)	166612 (28,09)

Ce tableau rapporte le nombre d'observations et le prix journalier moyen en dollars (valeurs entre parenthèses) pour chacune des classes d'options retenues sur l'indice S&P100, et ce durant la période allant de 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. Le prix journalier d'une option correspond à la moyenne entre son prix acheteur et son prix vendeur. *y* correspond au prix relatif du support, soit le rapport entre la valeur du S&P100 ajustée aux dividendes et le prix de levée de l'option. OTHJ, OHJ, OAJ, OTEJ et OEJ signifient, respectivement, options très hors jeu, options hors jeu, options au jeu, options très en jeu et options en jeu.

### 3.4.2 Comparaison entre la volatilité implicite dans les prix d'options sur S&P100 et la volatilité instantanée issue de MVAS

Pour déterminer la nature de la prime de risque de la volatilité issue de notre modèle à volatilité asymétrique (MVAS), nous mettons, d'abord, en évidence la présence d'une telle prime dans les prix d'options de façon empirique. L'idée consiste à comparer l'évolution de la volatilité instantanée du S&P100, issue de MVAS, à celle de la volatilité implicite dans les prix d'options (d'achat et de vente) sur cet indice, et ce durant la période qui s'étend du 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. Pour atteindre notre objectif, nous procédons, d'abord, à une estimation des séries temporelles pour ces deux mesures de volatilité vu que celle-ci est inobservable sur le marché.

Commençons avec la volatilité instantanée. Elle est estimée via l'écart-type instantané du rendement, obtenu en appliquant la technique de filtrage particulière au MVAS défini par le processus du rendement et celui de sa variance instantanée établis dans les équations (3.1) et (3.2)<sup>13</sup>. Précisons que l'utilisation du MVAS requiert le calcul du levier financier du S&P100 sur une base journalière durant la période d'étude. Ce calcul nécessite le recours, pour chacune des firmes non financières du S&P100<sup>14</sup>, à deux séries temporelles: celle de la valeur comptable de la dette corporative sur une base annuelle et celle de la capitalisation boursière sur une base journalière. Les données nous proviennent du fichier *COMPUSTAT*. Ainsi, le levier financier du S&P100 à la date  $t$ , noté  $LF$ , est approximé par:

$$LF_t = \frac{\sum_{i=1}^n B_{it}}{\sum_{i=1}^n B_{it} + (S_{it} \times N_{it})} \quad (3.18)$$

où  $B_i$ ,  $S_i$  et  $N_i$  correspondent, respectivement, à la valeur comptable de la dette

<sup>13</sup>Pour plus de détails sur la technique de filtrage particulière et son application au MVAS, voir l'essai II intitulé «*L'asymétrie de la volatilité boursière*».

<sup>14</sup>Notons qu'à chaque date donnée, nous retenons, dans notre calcul, seulement les firmes non financières qui appartiennent à l'indice S&P100.

corporative, supposée constante durant l'année, le prix de l'action et le nombre d'actions en circulation de la firme  $i$ . Par ailleurs,  $n$  est le nombre total des firmes non financières appartenant l'indice S&P100. La figure 3.1 annexée illustre l'évolution du levier financier comparée à celle du rendement observé du S&P100 durant la période allant du 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010.

Quant à la volatilité implicite, elle est estimée par l'écart-type du rendement du S&P100 qui égalise, à une date donnée, le prix de l'option évalué avec le modèle de Black-Scholes à son prix observé sur le marché. Ainsi, la volatilité implicite  $\sigma_{imp}$ , dans les prix d'options d'achat, est donnée par l'équation suivante<sup>15</sup>:

$$C_t = \hat{C}_t (S_t^*, K, \sigma_{imp}, \tau) \quad (3.19)$$

où  $S^*$ ,  $K$  et  $\tau$  correspondent, respectivement, au prix du support ajusté au dividende, le prix de levée de l'option et son temps à échéance. Par ailleurs,  $C$  est le prix de l'option d'achat observé sur le marché et  $\hat{C}$  est son prix donné par le modèle de Black-Scholes, soit:

$$\hat{C}_t = S_t^* N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) \quad (3.20)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t^*}{K}\right) + \left(\tau + \frac{\sigma_{imp}^2}{2}\right)\tau}{\sigma_{imp}\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma_{imp}\sqrt{\tau}$$

où  $r$  est le taux sûr et  $N$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Rappelons que  $\sigma_{imp}$  est la seule variable inconnue dans l'équation (3.20) et que son estimation se base sur un calcul itératif, vu l'impossibilité d'inverser cette équation.

Une fois que nous avons estimé la série temporelle de la volatilité implicite et celle de la volatilité instantanée du S&P100, nous comparons leurs évolutions durant

---

<sup>15</sup>Notons que la volatilité implicite  $\sigma_{imp}$ , dans les prix d'options de vente, est obtenue en égalisant, à une date donnée, le prix de l'option de vente  $\hat{P}$  évalué avec le modèle de Black-Scholes à son prix  $P$  observé sur le marché, soit :  $P_t = \hat{P}_t (S_t^*, K, \sigma_{imp}, \tau)$  où  $\hat{P}_t = K e^{-r\tau} N(-d_2) - S_t^* N(-d_1)$ .

la période allant du 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. Pour déduire et illustrer la significativité des écarts entre ces deux séries, nous recourons au test statistique de Diebold et Mariano (1995). L'hypothèse nulle de ce test suppose qu'en moyenne les deux mesures sont égales, c'est à dire que les prix des options ne contiennent aucune surprime due au risque de la volatilité. Notons que la statistique de ce test, notée  $DM$ , est donnée par <sup>16</sup>:

$$DM = \frac{\sum_{t=1}^T d_t}{\sqrt{T \times Var(d)}} \quad (3.21)$$

où  $d$  représente le différentiel entre la volatilité implicite  $\sigma_{imp}$  et la volatilité instantanée  $\sigma_{MVAS}$ , soit:

$$d_t = \sigma_{t,imp} - \sigma_{t,MVAS} \quad (3.22)$$

Nous rapportons au tableau 3.3 les estimés de la volatilité implicite moyenne (VIM), de même que les résultats du test de Diebold et Mariano (1995), et ce pour chaque classe d'options retenues. Aussi, les figures 3.2 et 3.3 annexées illustrent l'évolution de VIM (estimée via des options d'achat et de vente sur S&P100) comparée à celle de la volatilité instantanée et ce durant la période d'étude, soit du 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010.

En général, on constate que VIM augmente à mesure que la valeur du S&P100 ajustée aux dividendes s'éloigne du prix de levée de l'option, et ce peu importe l'horizon temporel de celle-ci. En effet, VIM semble relativement plus élevée lorsqu'elle est estimée via des options très hors jeu ou très en jeu. Par exemple, au pan A, l'on constate que, pour tous les horizons temporels confondus, VIM est égale à 22,38% pour les options d'achat au jeu contre 24,84% et 26,44% pour, respectivement, les options d'achat très hors jeu et très en jeu. Également, les estimés du VIM via des options de vente,

---

<sup>16</sup>Mentionnons que le calcul du *p*valeur de ce test (probabilité de rejeter à tort de l'hypothèse nulle) suppose que, pour un nombre élevé d'observation,  $DM$  suit asymptotiquement la distribution normale centré réduite.

présentés au pan B, obéissent à la même règle où VIM vaut 21,23% pour les options au jeu contre 27,48% et 25,67% pour, respectivement, les options très hors jeu et très en jeu. Ce résultat s'accorde avec ceux des écrits classiques du domaine. Il est attribué, notamment, au biais d'évaluation du modèle de Black-Scholes qui tend à surévaluer les options au jeu et sous-évaluer celles qui sont hors ou en jeu (Rubinstein, 1994; Jackwerth et Rubinstein, 1996; etc.). Les explications de ce phénomène font appel, entre autres, à la liquidité changeante des options lorsque la valeur du support s'éloigne du prix de levée de l'option (Leland, 1985; Merton, 1987). Par contre, dans nos résultats et contrairement à Rubinstein (1994), la variabilité du VIM ne semble pas s'estomper avec la hausse du temps à échéance de l'option<sup>17</sup>.

Ajoutons aussi que le biais d'évaluation du modèle de Black-Scholes paraît plus significative dans le cas des options de vente très hors jeu et les options d'achat très en jeu où VIM atteint ses niveaux maximaux (27,48% et 26,44% respectivement). Ce résultat n'est pas surprenant vu que ces options sont généralement utilisées pour se couvrir contre la baisse du marché, d'où leur forte liquidité qui fait que leur valeur marchande dépasse considérablement celle établie par le modèle de Black-Scholes.

Également, il est apparent d'après les graphiques des figures 3.2 et 3.3 que VIM est, dans la plus part des cas, plus élevée que la volatilité instantanée. Pareillement, on peut y voir que l'écart entre ces deux mesures de volatilité a tendance à être plus élevé dans le cas des options de vente. En moyenne, il est de 0,57% dans le cas des options d'achat contre 1,13% pour les options de vente<sup>18</sup>. Ajoutons aussi que les *pvaleurs* du test de Diebold et Mariano (1995) sont clairement faibles, ce qui démontrent que cet

---

<sup>17</sup>Rappelons que, selon Rubinstein (1994), l'écart entre la volatilité implicite dans les prix d'options au jeu et celle dans les prix d'options hors jeu ou en jeu s'accroît pour les options à courte échéance et tend à décroître avec l'allongement de l'horizon temporel des options.

<sup>18</sup>Notons que nos résultats sont comparables à ceux de Driessen, Maenhout et Vilkov (2009) même si ces auteurs révèlent un écart moyen plus prononcé entre la volatilité implicite et la volatilité réalisée du S&P100, soit de 4% à peu près, durant la période 2001-2004.

écart est statistiquement significatif, au seuil de 1%, et ce pour la plupart des classes d'options.

Globalement, nos résultats laissent présumer l'existence d'une surprime dans les prix d'options due au risque de la volatilité vu l'écart significatif existant entre la volatilité implicite et la volatilité instantanée. Des tests plus directs, plus loin, permettront d'éprouver l'existence d'une telle prime, déterminer son signe, expliquer sa variation et évaluer ses liens avec le niveau de la volatilité et l'horizon temporel de l'option.

### 3.4.3 Calcul du rendement moyen des portefeuilles de réplication

D'entrée, rappelons qu'un portefeuille de réplication est sûr à un risque près, celui de la volatilité. Il se forme en prenant une position acheteur dans une option d'achat au prix  $C$  et une position vendeur dans la quantité  $\Delta$  du support au prix  $S$ . Son rendement moyen, noté  $R$ , entre la date  $t$  et l'échéance de l'option  $t + \tau$ , s'obtient en discrétisant l'équation (3.12), soit<sup>19</sup>:

$$R_{t,t+\tau} = \max(S_{t+\tau}^* - K, 0) - C_t - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_{t_n} (S_{t_{n+1}}^* - S_{t_n}^*) - \frac{\tau}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r_n (C_t - \Delta_{t_n} S_{t_n}^*) \quad (3.23)$$

$$\text{avec } t_0 = t, t_N = t + \tau \text{ et } t_{n+1} - t_n = \frac{\tau}{N}.$$

où  $S^*$  et  $K$  correspondent, respectivement, à la valeur du support ajustée au dividende et au prix de levée de l'option. Par ailleurs,  $r$  est le taux sûr supposé changeant au fil du temps<sup>20</sup>.

<sup>19</sup>En utilisant des options de vente, le rendement moyen  $R$  du portefeuille de réplication, entre la date  $t$  et l'échéance de l'option  $t + \tau$ , est donné par :

$$R_{t,t+\tau} = \max(K - S_{t+\tau}^*, 0) - P_t - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_{t_n} (S_{t_{n+1}}^* - S_{t_n}^*) - \frac{\tau}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r_n (P_t - \Delta_{t_n} S_{t_n}^*)$$

où  $P$  correspond à la valeur de l'option de vente au prix de levée  $K$  et  $\Delta_{t_n}$  à son coefficient delta.

<sup>20</sup>Notons que le relâchement de l'hypothèse classique liée à la constance du taux sûr vise à réduire, voire neutraliser, l'effet de cette hypothèse sur nos résultats, surtout que notre échantillon contient des options à longue échéance.

Tableau 3.3 Volatilités implicites moyennes dans les prix d'options sur SP100 (2 janvier 2006 - 18 décembre 2010)

Pan A. Options d'achat sur S&P100				Pan B. Options de vente sur S&P100							
	$y$	Temps à échéance (en jours)			$y$	Temps à échéance (en jours)					
		<60	60 - 180	180<		<60	60 - 180	180<			
OTHJ	<0,95	0,2534 (0,0092)	0,2476 (0,0127)	0,2438 (0,0256)	0,2484 (0,0102)	OTEJ	<0,95	0,2589 (0,0078)	0,2465 (0,0003)	0,2664 (0,0009)	0,2567 (0,0032)
OHJ	0,95 - 0,98	0,2345 (0,0028)	0,2238 (0,0127)	0,2101 (0,0073)	0,2245 (0,0065)	OEJ	0,95 - 0,98	0,2267 (0,0005)	0,2178 (0,0098)	0,2072 (0,0024)	0,2171 (0,0034)
OAJ	0,98 - 1,02	0,2262 (0,0045)	0,2167 (0,0078)	0,2326 (0,0012)	0,2238 (0,0031)	OAJ	0,98 - 1,02	0,2301 (0,0001)	0,2289 (0,0009)	0,2095 (0,0045)	0,2238 (0,0027)
OEJ	1,02 - 1,05	0,2387 (0,0026)	0,2214 (0,0054)	0,2606 (0,0072)	0,2398 (0,0034)	OHJ	1,02 - 1,05	0,2620 (0,0032)	0,2546 (0,0045)	0,2435 (0,0076)	0,2534 (0,0098)
OTEJ	1,05<	0,2694 (0,0089)	0,2549 (0,0054)	0,2718 (0,0037)	0,2644 (0,0058)	OTHJ	1,05<	0,2856 (0,0036)	0,2767 (0,0145)	0,2591 (0,0008)	0,2748 (0,0044)
Total		0,2415 (0,0023)	0,2325 (0,0063)	0,2443 (0,0051)	0,2389 (0,0049)	Total		0,2524 (0,0034)	0,2446 (0,0067)	0,2355 (0,0045)	0,2445 (0,0026)

Ce tableau rapporte, selon la classe d'options, la volatilité implicite annuelle moyenne dans les prix d'options d'achat et de vente sur S&P100 durant la période allant de 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. La volatilité implicite est calculée via le modèle de Black-Scholes.  $y$  est le prix relatif du support. OTHJ, OHJ, OAJ, OTEJ et OEJ signifient, respectivement, options très hors jeu, options hors jeu, options au jeu, options très en jeu et options en jeu. Les valeurs entre parenthèses correspondent aux *valeurs* du test de Diabold et Mariano (1995), soit la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse nulle qui suppose qu'en moyenne, la volatilité implicite du S&P100 est égale à sa volatilité instantanée et ainsi les prix des options ne contiennent aucune surprime due au risque de la volatilité.

Précisons aussi que, dans l'équation (3.23), le rendement moyen du portefeuille de réplication permet de capturer le signe de la prime de risque de la volatilité. Particulièrement, si ce rendement est nul alors cette prime est nulle, c'est-à-dire que les prix des options ne contiennent aucune surprime liée au risque de la volatilité. Autrement, un rendement moyen négatif (positif) reflète une prime négative (positive) associée au risque de la volatilité.

À l'instar de Jackwerth et Rubinstein (1996), Buraschi et Jackwerth (2001) et Bakshi et Kapadia (2003,a), le taux sûr est estimé, à chaque date  $t$ , via la relation de parité des prix d'options. Il correspond à la moyenne entre le taux emprunteur moyen et le taux prêteur moyen. Ainsi, pour une date donnée  $t$  et un temps à échéance de l'option  $\tau$ , le taux emprunteur moyen  $r_e$  se calcule comme suit:

$$r_{e,t} = -\frac{1}{\tau \times m} \sum_{j=1}^m \ln \left( \frac{P_t^a(K_j) - C_t^v(K_j) + S_t^*}{K_j} \right) \quad (3.24)$$

Par ailleurs, le taux prêteur moyen  $r_p$  est obtenu via:

$$r_{p,t} = -\frac{1}{\tau \times m} \sum_{j=1}^m \ln \left( \frac{P_t^v(K_j) - C_t^a(K_j) + S_t^*}{K_j} \right) \quad (3.25)$$

Dans les équations (3.24) et (3.25),  $C^a(K_j)$  et  $C^v(K_j)$  ( $P^a(K_j)$  et  $P^v(K_j)$ ) correspondent, respectivement, au prix acheteur et aux prix vendeur de l'option d'achat (vente) au prix d'exercice  $K_j$ . Par ailleurs,  $m$  correspond au nombre d'options (d'achat et de vente) où le temps à échéance est égal à  $\tau$ .

Également, le coefficient delta de l'option d'achat est changeant. Sa valeur, à la date  $t$ , est approximée via le modèle de Black-Scholes, soit:

$$\Delta_t = N \left( \frac{\ln \left( \frac{S_t^*}{K} \right) + \left( r + \frac{1}{2} \sigma_{t,t+\tau}^2 \right) \tau}{\sigma_{t,t+\tau} \sqrt{\tau}} \right) \quad (3.26)$$

où  $N$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et  $\sigma_{t,t+\tau}$  est

la volatilité instantanée moyenne, entre  $t$  et  $t + \tau$ , donnée par:

$$\sigma_{t,t+\tau} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\sigma}_{t_n}^2} \quad (3.27)$$

où  $\hat{\sigma}_{t_n}^2$  représente la variance instantanée annualisée issue de MVAS à la date  $t_n$ .

Notons que l'approximation utilisée du coefficient delta est raisonnable dans le cas d'une volatilité constante ou une corrélation nulle entre rendement ou volatilité. Autrement, Heston (1993) démontrent que cette approximation est biaisée. Nous procédons, dans la section 3.5, à un test statistique afin d'évaluer l'effet de ce biais sur les résultats obtenus<sup>21</sup>.

Les tableaux 3.4 et 3.5 montrent les rendements moyens des portefeuilles de réplcation formés selon la classe d'options, et ce durant la période d'étude, soit du 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. Ces rendements sont exprimés en dollars et en pourcentage de la valeur de l'option utilisée dans le portefeuille de réplcation. Il nous a importé d'ajouter à la dernière colonne de ce tableau, le pourcentage des portefeuilles de réplcation dont le rendement est négatif. Le souci est de vérifier que les cas extrêmes n'influencent pas sur nos résultats.

Quoique les résultats varient d'une classe d'options à une autre, on constate qu'ils apportent un soutien apparent à l'hypothèse d'une prime négative liée au risque de la volatilité asymétrique. Il suffit de voir que les rendements moyens des portefeuilles de réplcation (RMPR) sont tous négatifs et statistiquement distincts de zéro, tant pour les portefeuilles de réplcation utilisant des options d'achat que ceux formés avec des options de vente. En effet, au tableau 3.3, l'on voit que, pour toutes les classes d'options

---

<sup>21</sup>Notons aussi que, vu le caractère changeant du delta, un réajustement dans la position du support est nécessaire pour maintenir le portefeuille de réplcation delta neutre. Bakshi et Kapadia (2003,a) soulignent que l'effet du biais d'un tel réajustement fréquent est négligeable sur le rendement du portefeuille de réplcation.

d'achat retenues, RMPR vaut  $-0,43\$$ , soit  $-1,89\%$  du prix moyen des options d'achat retenues. Pareillement, les résultats du tableau 3.4 démontrent que la sous-performance de tous les portefeuilles de répliation formés avec des options de vente est en moyenne plus remarquable, soit  $-1,04\$$  ou  $3,72\%$  du prix moyen de toutes les options de ventes retenues. À priori, ce résultat laisse croire que l'importance de la surprime due au risque de la volatilité diffère selon la nature de l'option utilisée. Elle est plus élevée, en valeur absolue (en dollars qu'en proportion) avec des options de vente.

Également, on constate que la sous-performance des portefeuilles de répliation s'accroît avec l'allongement de l'horizon temporel des options. En effet, au tableau 3.3, l'on voit que RMPR vaut  $-0,37\$$ , dans le cas options d'achat à courte échéance (inférieure à 60 jours) contre  $-0,54\$$  dans le cas des options d'achat à longue échéance (supérieure à 180 jours). Pareillement, les résultats du tableau 3.4 démontrent que la sous-performance de tous les portefeuilles de répliation formés avec des options de vente est plus significative à mesure que l'échéance des options augmente (RMPR vaut  $-0,78\$$  pour les options à courte échéance contre  $-1,31\$$  pour celles à longue échéance). Ce résultat montre qu'en valeur absolue, la prime de risque de la volatilité dépend positivement de l'horizon de couverture choisi par l'investisseur.

Par ailleurs, il s'avère que la sous-performance des portefeuilles de répliation est plus accentuée pour les options au jeu et moins importante à mesure que le prix du support ajusté aux dividendes s'éloigne du prix de levée de l'option. En effet, pour les options d'achat (de vente), elle est de  $-0,62\$$  ( $-1,20\$$ ) pour les options au jeu contre  $-0,43\$$  ( $-1,12\$$ ) et  $-0,31\$$  ( $-0,93$ ) pour, respectivement, les options très en jeu et les options très hors jeu. Ajoutons aussi qu'en pourcentage du prix de l'option, les options de vente très hors jeu présentent le pourcentage le plus élevé, soit  $10,15\%$ . Il importe de noter que ce résultat ne signifie pas que la sur prime due au risque de la volatilité est plus élevée pour les options au jeu vu que le rendement moyen des portefeuilles de répliation dépendent et de la prime de risque de la volatilité et du coefficient *véga*. Donc, il n'est pas exclu que cette sous-performance soit induite par ce dernier puisque la sensibilité du prix de l'option à la variation de la volatilité est relativement élevée pour les options au jeu.

Tableau 3.4 Rendements moyens des portefeuilles de réplication formés avec des options d'achat sur SP100

$y$	N	Temps à échéance (en jours)						Total		$1_{R<0}(\%)$	
		<60		60-180		180<		\$	%		
		\$	%	\$	%	\$	%				
<b>OTHJ</b>	<0,95	43317	-0,29 (0,03)	-12,39 (0,42)	-0,31 (0,02)	-4,04 (0,35)	-0,33 (0,04)	-2,92 (0,52)	-0,31 (0,03)	-4,44 (0,44)	79,61
<b>OHJ</b>	0,95-0,98	42986	-0,32 (0,02)	-5,04 (0,29)	-0,43 (0,01)	-3,20 (0,27)	-0,44 (0,02)	-2,26 (0,23)	-0,39 (0,02)	-3,20 (0,25)	78,30
<b>OAJ</b>	0,98-1,02	48512	-0,46 90,02)	-3,64 (0,41)	-0,55 (0,01)	-2,90 (0,38)	-0,71 (0,01)	-2,67 (0,34)	-0,62 (0,02)	-3,40 (0,28)	85,57
<b>OEJ</b>	1,02-1,05	40478	-0,42 (0,01)	-2,15 (0,13)	-0,56 (0,01)	-2,28 (0,33)	-0,68 (0,01)	-1,76 (0,22)	-0,55 (0,01)	-2,03 (0,29)	88,17
<b>OTEJ</b>	1,05<	34549	-0,33 (0,01)	-0,68 (0,09)	-0,41 (0,02)	-0,69 (0,47)	-0,54 (0,01)	-0,80 (0,14)	-0,43 (0,01)	-0,73 (0,34)	86,94
<b>Total</b>		209842	-0,37 (0,02)	-2,37 (0,21)	-0,42 (0,01)	-1,82 (0,36)	-0,54 (0,01)	-1,66 (0,23)	-0,43 (0,02)	-1,89 (0,31)	84,58

Ce tableau rapporte, selon la classe d'options d'achat, le rendement moyen des portefeuilles de réplication en dollars et en pourcentage du prix moyen des options d'achat durant la période allant de 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. Les valeurs entre parenthèses correspondent à l'écart-type du rendement divisé par la racine carrée du nombre des observations. Une faible valeur indique que le rendement moyen est statistiquement distinct de zéro.  $y$  est le prix relatif du support. OTHJ, OHJ, OAJ, OTEJ et OEJ signifient, respectivement, options très hors jeu, options hors jeu, options au jeu, options très en jeu et options en jeu.  $1_{R<0}$  correspond au pourcentage des portefeuilles de réplication dont le rendement moyen est négatif. N est le nombre de portefeuilles de réplication formés.

Tableau 3.5 Rendements moyens des portefeuilles de réplication formés avec des options de vente sur SPI100

y	N	Temps à échéance (en jours)						Total		1 <sub>R&lt;0</sub> (%)
		<60		60-180		180<		\$	%	
		\$	%	\$	%	\$	%			
OTEJ <0,95	30667	-0,99 (0,02)	-1,88 (0,38)	-1,13 (0,03)	-1,68 (0,52)	-1,29 (0,05)	-1,58 (0,43)	-1,12 (0,03)	-1,71 (0,46)	88,69
OEJ 0,95-0,98	30059	-0,79 (0,01)	-3,24 (0,34)	-0,95 (0,02)	-3,01 (0,65)	-1,23 (0,02)	-2,71 (0,67)	-0,99 (0,02)	-2,93 (0,54)	94,35
OAJ 0,98-1,02	39175	-0,87 (0,02)	-5,63 (0,54)	-1,23 (0,02)	-5,99 (0,67)	-1,56 (0,02)	-6,06 (0,54)	-1,20 (0,02)	-5,92 (0,61)	92,37
OHJ 1,02-1,05	35604	-0,75 (0,03)	-7,13 (0,45)	-0,98 (0,02)	-5,96 (0,77)	-1,12 (0,02)	-5,49 (0,78)	-0,95 (0,02)	-6,01 (0,59)	84,26
OTHJ 1,05<	31107	-0,49 (0,01)	-15,91 (0,39)	-1,03 (0,02)	-9,87 (0,65)	-1,34 (0,02)	-8,94 (0,89)	-0,93 (0,02)	-10,15 (0,61)	92,61
Total	166612	-0,78 (0,02)	-3,72 (0,41)	-1,07 (0,02)	-3,87 (0,64)	-1,31 (0,03)	-3,62 (0,71)	-1,04 (0,02)	-3,72 (0,58)	90,36

Ce tableau rapporte, selon la classe d'options de vente, le rendement moyen des portefeuilles de réplication en dollars et en pourcentage du prix moyen des options de vente durant la période allant de 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. Les valeurs entre parenthèses correspondent à l'écart-type du rendement divisé par la racine carrée du nombre des observations. Une faible valeur indique que le rendement moyen est statistiquement distinct de zéro. y est le prix relatif du support. OTHJ, OHJ, OAJ, OTEJ et OEJ signifient, respectivement, options très hors jeu, options hors jeu, options très en jeu et options en jeu. 1<sub>R<0</sub> correspond au pourcentage des portefeuilles de réplication dont le rendement moyen est négatif. N est le nombre de portefeuilles de réplication formés.

### 3.4.4 Variation de la prime de risque de la volatilité asymétrique

Pour caractériser la variation de la prime de risque de la volatilité asymétrique, nous sous-classons d'abord les rendements des portefeuilles de réplication, calculés à la section précédente, selon le niveau moyen de la volatilité instantanée durant la vie de l'option. Ensuite, nous calculons, pour chaque niveau, le rendement moyen de ces portefeuilles. On répète l'opération pour chaque classe d'options. Les tableaux 3.6 à 3.10 rapportent les résultats trouvés.

Examinons d'abord les résultats relatifs aux portefeuilles de réplication formés avec des options au jeu dans le tableau 3.6. Outre que ces portefeuilles se caractérisent par la sous-performance moyenne la plus élevée, les résultats dévoilent aussi un lien positif et direct entre la sous-performance de ces portefeuilles et l'évolution de la volatilité. En effet, la hausse (baisse) de celle-ci tend à accentuer (réduire) la perte moyenne des portefeuilles de réplication. Par exemple, au pan B (A), l'on voit que, pour tous les horizons temporels, le rendement moyen des portefeuilles de réplication (RMPR), formés avec des options d'achat (vente), est de -0,40\$ (-1,01\$) pour une volatilité moyenne inférieure à 23%. Par contre, et en particulier lorsque celle-ci dépasse 26%, soit son niveau le plus élevé, ces portefeuilles enregistrent leur pire performance avec un rendement moyen négatif de -0,71\$ (-1,51\$). Ces résultats n'ont rien d'étonnant puisque l'attitude des investisseurs vis-à-vis un marché plus volatil, coïncidant d'ordinaire avec une baisse de marché, devrait se traduire par la hausse de la prime à payer pour couvrir leurs placements.

Ajoutons aussi que RMPR apparaît clairement plus sensible à la variation de la volatilité si les portefeuilles de réplication sont formés avec des options de vente au jeu. En effet, pour un même changement de la volatilité, la perte de ces portefeuilles s'accroît de 0,55\$ (différence entre -1,01\$ et -1,51\$) avec des options de vente contre 0,31\$ (différence entre -0,40\$ et -0,71\$) seulement pour les options d'achat. Il est possible que le marché attribue une prime substantielle pour les options de vente pendant les périodes de volatilité excessive.

Tableau 3.6 Rendements moyens des portefeuilles de réplication formés avec des options au jeu sur SP100 selon la volatilité

Pan A: Portefeuille de réplication formés avec des options de vente au jeu															
y	$\sigma_{t,t+\tau}$ (%)	Temps à échéance de l'option (en jours)													
		<60				60-180				180<					
		N	\$	%	%	N	\$	%	%	N	\$	%	%		
0,98-1,02	<23	1782	-0,75	-5,89	-6,09	2065	-1,01	-6,09	-6,37	1580	-1,31	-6,37	5427	-1,01	-5,18
	23-24	3297	-0,77	-5,48	-6,23	4529	-1,12	-6,23	-6,54	3560	-1,42	-6,54	11386	-1,11	-5,42
	24-25	4028	-0,83	-6,82	-6,56	3981	-1,31	-6,56	-6,89	2581	-1,56	-6,89	10590	-1,19	-5,82
	25-26	3191	-1,01	-4,78	-5,87	2610	-1,35	-5,87	-6,11	2141	-1,75	-6,11	7942	-1,32	-6,61
	26<	1123	-1,10	-7,23	-6,11	1429	-1,45	-6,11	-5,98	1278	-1,94	-5,98	3830	-1,51	-8,04
Pan B: Portefeuille de réplication formés avec des options d'achat au jeu															
y	$\sigma_{t,t+\tau}$ (%)	Temps à échéance de l'option (en jours)													
		<60				60-180				180<					
		N	\$	%	%	N	\$	%	%	N	\$	%	%		
0,98-1,02	<23	3012	-0,32	-3,87	-2,87	2781	-0,43	-2,87	-2,31	1376	-0,51	-2,31	7169	-0,40	-2,51
	23-24	5168	-0,36	-3,65	-2,98	5695	-0,45	-2,98	-2,56	2777	-0,58	-2,56	13640	-0,44	-2,78
	24-25	4679	-0,48	-4,06	-3,09	4782	-0,56	-3,09	-2,78	2981	-0,74	-2,78	12442	-0,57	-3,12
	25-26	3376	-0,59	-3,24	-2,67	3527	-0,67	-2,67	-2,91	2569	-0,85	-2,91	9472	-0,69	-3,56
	26<	2215	-0,64	-3,65	-3,07	2645	-0,71	-3,07	-3,01	929	-0,91	-3,01	5789	-0,71	-4,12

Ce tableau rapporte le rendement moyen des portefeuilles de réplication, formés avec des options au jeu ( $y$  varie entre 0,98 et 1,02), en dollars et en pourcentage du prix de l'option en fonction du niveau de la volatilité instantanée moyenne durant la vie de l'option, notée  $\sigma_{t,t+\tau}$ , et ce durant la période allant de 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010.  $y$  est le rapport entre la valeur du S&P100 ajustée aux dividendes et le prix de levée de l'option. N est le nombre de portefeuilles de réplication formés selon la classe d'options et le niveau de la volatilité instantanée.

**Tableau 3.7 Rendements moyens des portefeuilles de réplication formés avec des options d'achat hors jeu et très hors jeu sur SP100 selon la volatilité**

$y$	$\sigma_{t,t+\tau}$ (%)	Temps à échéance (en jours)												Total		
		<60				60-180				180<				N	\$	%
		N	\$	%		N	\$	%		N	\$	%				
<0,95	<23	1437	-0,15	-11,45	1934	-0,18	-4,56	1729	-0,23	-3,01	5100	-0,19	-2,37			
	23-24	3812	-0,19	-9,34	5219	-0,23	-4,98	3712	-0,27	-3,67	12743	-0,23	-2,82			
	24-25	4619	-0,28	-11,28	5782	-0,31	-4,01	2756	-0,38	-2,87	13157	-0,31	-4,01			
	25-26	2581	-0,44	-13,15	4332	-0,42	-4,87	2010	-0,40	-3,85	8923	-0,42	-5,89			
	26<	983	-0,54	-14,16	1274	-0,46	-5,02	1137	-0,43	-4,21	3394	-0,47	-7,34			
0,95-0,98	<23	2184	-0,19	-4,91	2018	-0,29	-3,01	1293	-0,31	-2,01	5495	-0,25	-2,76			
	23-24	4598	-0,22	-4,65	4716	-0,32	-3,45	3429	-0,35	-2,09	12743	-0,29	-3,09			
	24-25	4477	-0,33	-5,32	3812	-0,46	-4,07	3077	-0,43	-1,98	11366	-0,40	-4,07			
	25-26	4295	-0,42	-5,89	3318	-0,54	-3,09	2101	-0,54	-2,67	9714	-0,49	-5,18			
	26<	1278	-0,53	-5,67	1456	-0,65	-3,25	934	-0,76	-2,89	3668	-0,64	-7,01			

Ce tableau rapporte le rendement moyen des portefeuilles de réplication, formés avec des options d'achat hors jeu ( $y$  varie entre 0,95 et 0,98) et très hors jeu ( $y$  inférieur à 0,95), en dollars et en pourcentage du prix de l'option, en fonction du niveau de la volatilité instantanée moyenne durant la vie de l'option, notée  $\sigma_{t,t+\tau}$ , et ce durant la période allant de 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010.  $y$  est le rapport entre la valeur du S&P100 ajustée aux dividendes et le prix de levée de l'option. N est le nombre de portefeuilles de réplication formés selon la famille d'options et le niveau de la volatilité instantanée.

**Tableau 3.8** Rendements moyens des portefeuilles de réplication formés avec des options d'achat en jeu et très en jeu sur SP100 selon la volatilité

$y$	$\sigma_{t,t+\tau}$ (%)	Temps à échéance (en jours)												Total		
		<60				60-180				<180				N	\$	%
		N	\$	%	N	\$	%	N	\$	%	N	\$	%			
1,02-1,05	<23	1829	-0,29	-2,09	1792	-0,42	-2,76	1126	-0,53	-1,15	4747	-0,40	-1,12			
	23-24	4393	-0,34	-2,41	3828	-0,47	-2,54	3653	-0,58	-1,74	11874	-0,46	-1,89			
	24-25	4289	-0,45	-2,54	3432	-0,59	-2,01	3981	-0,69	-1,86	11702	-0,57	-2,09			
	25-26	2031	-0,52	-2,01	3023	-0,65	-1,98	2791	-0,78	-2,03	7845	-0,66	-2,45			
	26<	1873	-0,56	-2,32	1345	-0,72	-2,19	1092	-0,88	-2,10	4310	-0,69	-3,07			
1,05<	<23	1928	-0,21	-0,55	1835	-0,25	-0,63	1284	-0,53	-0,76	5047	-0,31	-0,45			
	23-24	2891	-0,24	-0,71	4446	-0,31	-0,75	3872	-0,41	-0,85	11209	-0,33	-0,51			
	24-25	2156	-0,37	-0,82	3219	-0,43	-0,65	1875	-0,59	-0,74	7250	-0,45	-0,84			
	25-26	2089	-0,45	-0,76	2178	-0,56	-0,91	2876	-0,69	-0,91	7143	-0,58	-0,62			
	26<	1047	-0,48	-0,65	2019	-0,58	-0,82	834	-0,81	-0,89	3900	-0,60	-0,67			

Ce tableau rapporte le rendement moyen des portefeuilles de réplication, formés avec des options d'achat en jeu ( $y$  varie entre 1,02 et 1,05) et très en jeu ( $y$  supérieur à 1,05), en dollars et en pourcentage du prix de l'option en fonction du niveau de la volatilité instantanée moyenne durant la vie de l'option, notée  $\sigma_{t,t+\tau}$ , et ce durant la période allant de 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010.  $y$  est le rapport entre la valeur du S&P100 ajustée aux dividendes et le prix de levée de l'option. N est le nombre de portefeuilles de réplication formés selon la famille d'options et le niveau de la volatilité instantanée.

**Tableau 3.9 Rendements moyens des portefeuilles de réplication formés avec des options de vente en jeu et très en jeu sur SP100 selon la volatilité**

$y$	$\sigma_{t,t+\tau}$ (%)	Temps à échéance de l'option (en jours)												Total		
		<60				60-180				180<				N	\$	%
		N	\$	%	N	\$	%	N	\$	%	N	\$	%			
<0,95	<23	2019	-0,76	-1,76	1525	-0,86	-1,56	745	-0,99	-1,49	4289	-0,84	-0,85			
	23-24	3199	-0,84	-1,95	2161	-0,94	-1,23	3018	-1,07	-1,54	8378	-0,95	-1,52			
	24-25	2478	-1,03	-1,65	3134	-1,15	-1,89	1423	-1,29	-1,61	7035	-1,14	-1,82			
	25-26	2156	-1,16	-1,99	2845	-1,29	-1,72	2176	-1,46	-1,81	7177	-1,30	-2,09			
	26<	1543	-1,30	-2,06	967	-1,44	-1,56	1278	-1,69	-1,57	3788	-1,47	-2,45			
0,95-0,98	<23	1534	-0,55	-3,56	1865	-0,72	-3,07	2018	-1,05	-2,54	5417	-0,79	-2,31			
	23-24	3178	-0,62	-2,78	2756	-0,81	-3,15	3125	-1,11	-2,86	9059	-0,85	-2,54			
	24-25	1484	-0,85	-3,56	3041	-0,97	-2,87	2871	-1,27	-2,91	7396	-1,06	-3,07			
	25-26	2186	-1,01	-2,67	1821	-1,15	-2,12	923	-1,45	-2,63	4930	-1,14	-3,87			
	26<	1034	-1,12	-2,89	1329	-1,24	-2,45	894	-1,70	-2,42	3257	-1,33	-3,91			

Ce tableau rapporte le rendement moyen des portefeuilles de réplication, formés avec des options de vente en jeu ( $y$  varie entre 0,95 et 0,98) et très en jeu ( $y$  inférieur à 0,95), en dollars et en pourcentage du prix de l'option en fonction du niveau de la volatilité instantanée moyenne durant la vie de l'option, notée  $\sigma_{t,t+\tau}$ , et ce durant la période allant de 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010.  $y$  est le rapport entre la valeur du S&P100 ajustée aux dividendes et le prix de levée de l'option. N est le nombre de portefeuilles de réplication formés selon la famille d'options et le niveau de la volatilité instantanée.

**Tableau 3.10** Rendements moyens des portefeuilles de réplication formés avec des options de vente hors jeu et très hors jeu sur SP100 selon la volatilité

$y$	$\sigma_{t,t+\tau}$ (%)	Temps à échéance de l'option (en jours)												Total		
		<60				60-180				180<				N	\$	%
		N	\$	%	N	\$	%	N	\$	%	N	\$	%			
1,02-1,05	<23	2657	-0,56	-7,12	1730	-0,67	-5,78	1589	-0,92	-7,11	5976	-0,69	-4,25	9001	-0,79	-5,16
	23-24	2296	-0,61	-6,87	3487	-0,76	-5,21	3218	-0,96	-6,54	8919	-0,97	-5,92	7000	-1,15	-7,49
	24-25	2561	-0,73	-5,98	3589	-1,02	-5,39	2769	-1,12	-6,34	4708	-1,27	-8,23	4209	-0,81	-9,05
	25-26	2081	-0,92	-9,01	2897	-1,24	-6,91	2022	-1,25	-6,08	8956	-0,83	-8,71	6159	-1,14	-11,45
	26<	1749	-1,05	-7,34	1125	-1,34	-5,43	1834	-1,43	-5,78	1729	-0,87	-10,23	1453	-1,11	-12,56
1,05<	<23	1027	-0,32	-14,34	1729	-0,87	-10,23	1453	-1,11	-12,56	4209	-0,81	-9,05	8956	-0,83	-8,71
	23-24	3567	-0,35	-12,39	3791	-0,91	-8,56	1598	-1,17	-9,08	8956	-0,83	-8,71	6159	-1,14	-11,45
	24-25	2891	-0,51	-15,23	2014	-1,05	-8,75	1963	-1,39	-11,78	6868	-0,92	-9,91	4915	-1,22	-11,82
	25-26	1642	-0,63	-17,89	2519	-1,18	-9,54	1998	-1,56	-13,09	6159	-1,14	-11,45	4915	-1,22	-11,82
	26<	1729	-0,71	-16,67	1373	-1,26	-8,99	1813	-1,67	-10,43	4915	-1,22	-11,82	4915	-1,22	-11,82

Ce tableau rapporte le rendement moyen des portefeuilles de réplication, formés avec des options de vente hors jeu ( $y$  varie entre 1,02 et 1,05) et très hors jeu ( $y$  supérieur à 1,05), en dollars et en pourcentage du prix de l'option en fonction du niveau de la volatilité instantanée moyenne durant la vie de l'option, notée  $\sigma_{t,t+\tau}$ , et ce durant la période allant de 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010.  $y$  est le rapport entre la valeur du S&P100 ajustée aux dividendes et le prix de levée de l'option.  $N$  est le nombre de portefeuilles de réplication formés selon la famille d'options et le niveau de la volatilité instantanée.

Également, les résultats révèlent une certaine asymétrie dans la variation des rendements moyens des portefeuilles de réplication. En effet, tant dans l'absolu qu'en proportion, la hausse de la sous-performance de ces portefeuilles due à la variation positive de la volatilité est généralement plus élevée que sa baisse résultant de la variation négative de la volatilité. Par exemple, les résultats du Pan B montrent que RMPR est de -0,44\$ pour une volatilité située entre 23% et 24%. En passant à un niveau de volatilité plus élevé (entre 24% et 25%), RMPR devient égal à -0,57\$, soit une augmentation moyenne de 29,54%. Par contre, la baisse de la volatilité à un niveau inférieur à 23% ne fait que bouger à peine RMPR à -0,40\$, soit une diminution moyenne de 9,09%. Notons que cette asymétrie est moins visible pour un niveau de volatilité élevée, contrairement aux portefeuilles de réplication formés avec des options de vente où les résultats, au pan A, dévoilent que l'asymétrie est plus apparente dans le cas d'une volatilité excessive. En effet, RMPR est de -1,32\$ pour une volatilité située entre 25% et 26%. En passant à une volatilité plus élevée que 26%, RMPR devient égal à -1,51\$, soit une augmentation moyenne de 14,39%. Par contre, la baisse de la volatilité à un niveau inférieur à 23% ne fait bouger RMPR qu'à -1,19\$, soit une diminution moyenne de 9,85%.

Or, il importe de noter que RMPR dépendent et de la prime de risque de volatilité et du coefficient *véga*. Donc, il n'est donc pas exclu que cette sous-performance soit induite par ce dernier vu que la sensibilité du prix de l'option à la variation de la volatilité est relativement élevée pour les options au jeu. Il nous a donc importé de valider ces résultats avec ceux obtenus via les options très hors jeu, hors jeu, très en jeu et en jeu aux tableaux 3.6 à 3.9. Notre recours à ces options se justifie par la faible sensibilité du prix de l'option à la variation de la volatilité pour ces options.

Visiblement, la teneur des résultats déjà trouvés ne change pas à mesure que le prix du support s'éloigne du prix de levée. En effet, le lien positif et direct entre la sous-performance des ces portefeuilles et le niveau de la volatilité est dans la plupart des cas vérifié. Par exemple, l'on voit que, pour tous les horizons temporels, le rendement moyen des portefeuilles de réplication formés avec des options d'achat (vente) très en jeu (très hors jeu) est de -0,31\$ (-0,81\$) pour une volatilité moyenne inférieure à 23%.

Par contre, et en particulier lorsque celle-ci dépasse 26%, soit son niveau le plus élevé, ces portefeuilles enregistrent leur pire performance avec un rendement moyen négatif de -0,47\$ (-1,22\$). Aussi, les résultats révèlent une certaine asymétrie dans la variation du RMPR puisque la sous-performance de ces portefeuilles due à la variation positive de la volatilité est généralement plus élevée que sa baisse résultant de la variation négative de la volatilité.

### 3.4.5 Test de robustesse

Afin de nous assurer de la robustesse des résultats obtenus, nous effectuons un test statistique afin d'évaluer, d'une part, l'effet de la volatilité asymétrique et l'échéance de l'option sur la prime de risque de la volatilité et, d'autre part, la sensibilité de ces résultats au biais introduit par l'approximation du coefficient delta, dans l'équation (3.26), via le modèle de Black-Scholes. Pour atteindre notre objectif, nous procédons en deux étapes. Dans la première étape, nous subdivisons la série des rendements des portefeuilles de réplication, estimée via l'équation (3.23), en deux sous-échantillons. Le premier (deuxième) contient les rendements des portefeuilles de réplication qui correspondent à un rendement positif (négatif) du support durant la vie de l'option. Dans la deuxième étape, nous effectuons, selon le sous-échantillon établi à la première étape, la régression suivante:

$$R_{t,t+\tau} = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t,t+\tau} + \alpha_2 R_{t-1,t+\tau} + \alpha_3 E_t + \alpha_4 S_{t,t+\tau} + \varepsilon_t \quad (3.28)$$

où  $R_{t,t+\tau}$  correspond, à la date  $t$ , au vecteur des rendements, exprimés en dollars, des portefeuilles de réplication entre la date  $t$  et l'échéance de l'option  $t + \tau$ . Par ailleurs,  $\sigma_{t,t+\tau}$  correspond à la volatilité instantanée moyenne durant la vie de l'option,  $R_{t-1,t+\tau}$  est le rendement, exprimé en dollars, du portefeuille de réplication entre la date  $t - 1$  et l'échéance de l'option  $t + \tau$ , susceptible de capturer l'autocorrélation,  $S_{t,t+\tau}$  le rendement du support durant la vie de l'option,  $E$  l'horizon temporel de l'option en année et  $\varepsilon$  le résidu.

Notons que l'estimation de cette régression se fait avec la méthode des moindres

carrés ordinaires (MCO). Nous recourons à la méthode de White (1980) afin d'obtenir des écart-types corrigés pour l'hétéroscédasticité, ce qui permettrait de calculer les t-statistiques et ainsi les *p*valeur du test (la probabilité de rejeter à tort de l'hypothèse nulle). Nous rapportons au tableaux 3.11 et 3.12 les résultats de la régression.

On constate que les résultats se ressemblent d'un sous-échantillon à un autre et apportent un soutien apparent à l'effet significatif de la volatilité sur la prime de risque de la volatilité vu que le coefficient  $\alpha_1$  s'avère partout significatifs au seuil de 1% ou 5%. De plus, son estimateur est toujours négatif, ce qui confirme les résultats obtenus révélant une prime négative associée au risque de la volatilité asymétrique. Par conséquent, la volatilité instantanée moyenne a un effet statistiquement significatif sur le rendement du portefeuille de réplication impliquant ainsi que le risque de la volatilité est rémunéré et ainsi une prime de risque non nulle de la volatilité. Également, le coefficient  $\alpha_3$  est généralement significatif au seuil de 1% ou 5%. De plus, son estimateur est toujours négatif montrant ainsi que la prime de risque de la volatilité augmente avec l'échéance de l'option.

Par ailleurs, le coefficient  $\alpha_4$  est positif et significatif au seuil de 1% pour le premier sous-échantillon où les rendements sont positifs et négatif et significatif au seuil de 5% pour le deuxième sous-échantillon où les rendements sont négatifs. Ce résultat démontre que l'approximation du coefficient delta via le modèle de Black-Scholes ne permet pas de couvrir le portefeuille de réplication contre le risque de l'action. Il s'avère que ce portefeuille est partiellement couvert contre ce risque et que les résultats de la régression décèlent un effet positif du rendement de l'action sur celui du portefeuille de réplication, ce qui implique que l'approximation adoptée n'affecte pas la teneur de nos résultats.

Finalement, il importe de noter que le coefficient de détermination est élevé, ce qui implique que les variables explicatives choisies explique, en grande partie, la variation du rendement des portefeuilles de réplication.

**Tableau 3.11** Régression des rendements des portefeuilles de réplication formés avec des options d'achat sur la volatilité, l'échéance de l'option et le rendement du support

$y$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$R^2(\%)$
<b>Sous-échantillon 1: Portefeuilles de réplication correspondant</b>						
<b>à un rendement positif du support durant la vie de l'option</b>						
<0,95	-0,0127*	-0,3692**	0,5613**	-0,0136**	0,4326*	44,89
0,95-0,98	-0,0209	-0,4518**	0,4178**	-0,0278**	0,5619**	37,91
0,98-1,02	-0,0312*	-0,5139**	0,3672**	-0,0439*	0,3376*	45,79
1,02-1,05	-0,0246	-0,4719*	0,6614**	-0,0861**	0,4518**	52,98
1,05<	-0,0312	-0,4911**	0,5243**	-0,0523**	0,6230**	53,29
Total	-0,0279	-0,4310**	0,5425**	-0,0619**	0,4981**	49,25
<b>Sous-échantillon 2: Portefeuilles de réplication correspondant</b>						
<b>à un rendement négatif du support durant la vie de l'option</b>						
<0,95	-0,0113*	-0,3532**	0,5192**	-0,0112**	-0,4326	42,89
0,95-0,98	-0,0198	-0,4271**	0,6752**	-0,0530**	-0,5139*	48,34
0,98-1,02	-0,0345	-0,5012**	0,5451**	-0,0841*	-0,4529*	56,29
1,02-1,05	-0,0192	-0,4289*	0,4012**	-0,0729**	-0,4321**	49,34
1,05<	-0,0361	-0,5329**	0,5129**	-0,0291**	-0,8210**	51,67
Total	-0,0421	-0,4623**	0,4972**	-0,0729**	-0,4056*	60,28

Ce tableau rapporte, selon la classe d'options d'achat, les estimateurs de la régression linéaire des rendements des portefeuilles de réplication, en dollars, par leurs rendements antérieurs, la volatilité instantanée moyenne, le rendement du support durant la vie de l'option et l'échéance en année de l'option, et ce durant la période allant de 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. \* signifie que l'estimateur est significatif au seuil de 1% alors que \*\* signifie que l'estimateur est significatif au seuil de 5%.

**Tableau 3.12** Régression des rendements des portefeuilles de réplication formés avec des options de vente sur la volatilité, l'échéance de l'option et le rendement du support

$y$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$R^2(\%)$
<b>Sous-échantillon 1: Portefeuilles de réplication correspondant</b>						
<b>à un rendement positif du support durant la vie de l'option</b>						
<0,95	-0,0345*	-0,6091**	0,6528**	-0,0094**	0,1987**	77,28
0,95-0,98	-0,0327	-0,6192**	0,6045**	-0,0186**	0,4278**	60,29
0,98-1,02	-0,0289	-0,5428*	0,4719**	-0,0391**	0,4189**	69,19
1,02-1,05	-0,0518*	-0,3287*	0,4342*	-0,0529**	0,4912*	71,24
1,05<	-0,0221	-0,5271**	0,5327**	-0,0927**	0,4056**	72,67
Total	-0,0312	-0,4189**	0,5527**	-0,0724**	0,4018**	60,29
<b>Sous-échantillon 2: Portefeuilles de réplication correspondant</b>						
<b>à un rendement négatif du support durant la vie de l'option</b>						
<0,95	-0,0253*	-0,5416**	0,4539**	-0,0154**	-0,2345**	64,76
0,95-0,98	-0,0289	-0,5923**	0,5281**	-0,0529**	-0,5467*	76,71
0,98-1,02	-0,0345	-0,6126*	0,4519**	-0,0816**	-0,3256**	72,84
1,02-1,05	-0,0391*	-0,5723*	0,6274*	-0,0729**	-0,4414**	51,83
1,05<	-0,0379	-0,6923**	0,5106**	-0,1078**	-0,4519**	59,67
Total	-0,0402	-0,5310**	0,5524**	-0,0629**	-0,4425**	63,92

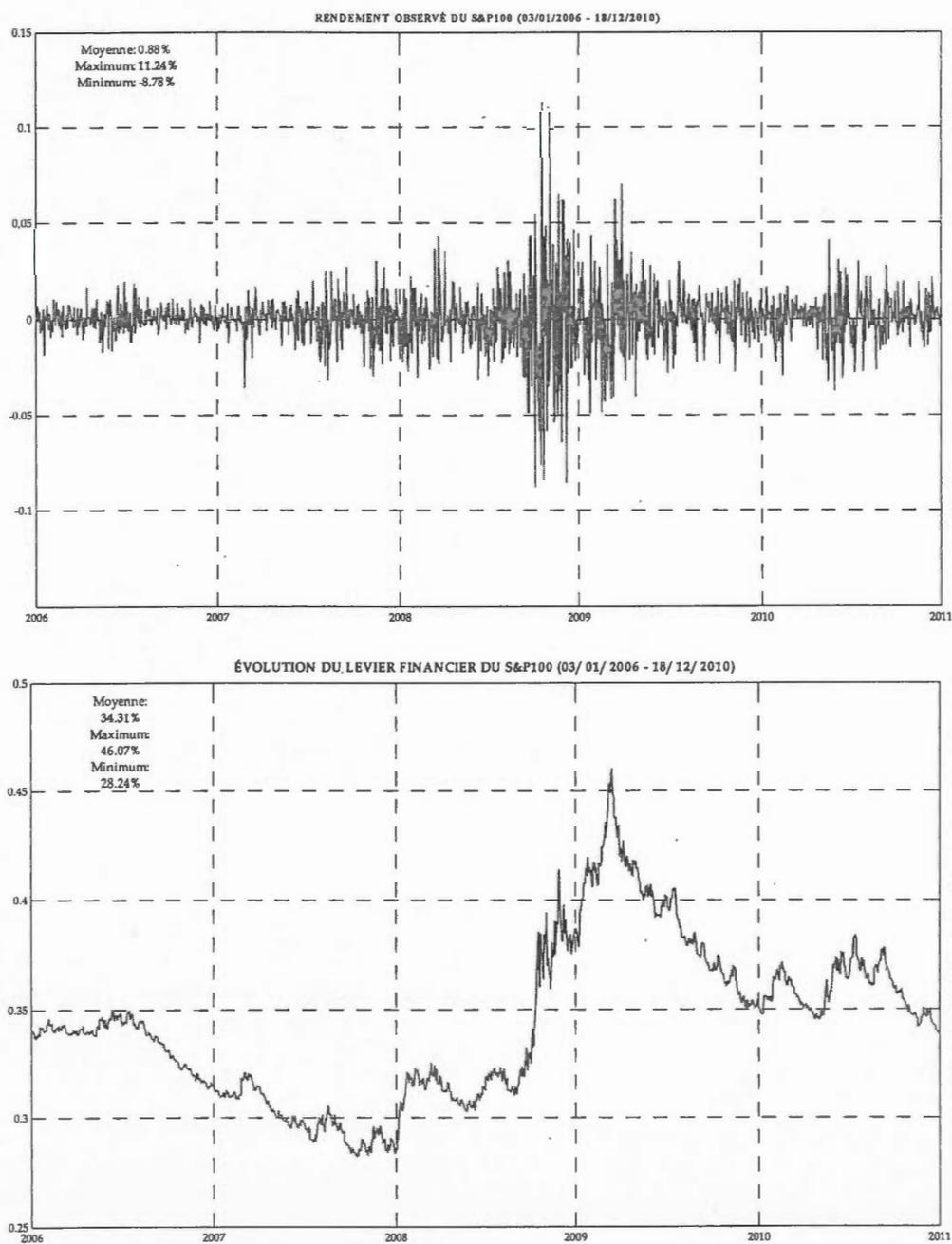
Ce tableau rapporte, selon la classe d'options de vente, les estimateurs de la régression linéaire des rendements des portefeuilles de réplication, en dollars, par leurs rendements antérieurs, la volatilité instantanée moyenne, le rendement du support durant la vie de l'option et l'échéance en année de l'option, et ce durant la période allant de 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. \* signifie que l'estimateur est significatif au seuil de 1% alors que \*\* signifie que l'estimateur est significatif au seuil de 5%.

### 3.5 Conclusion

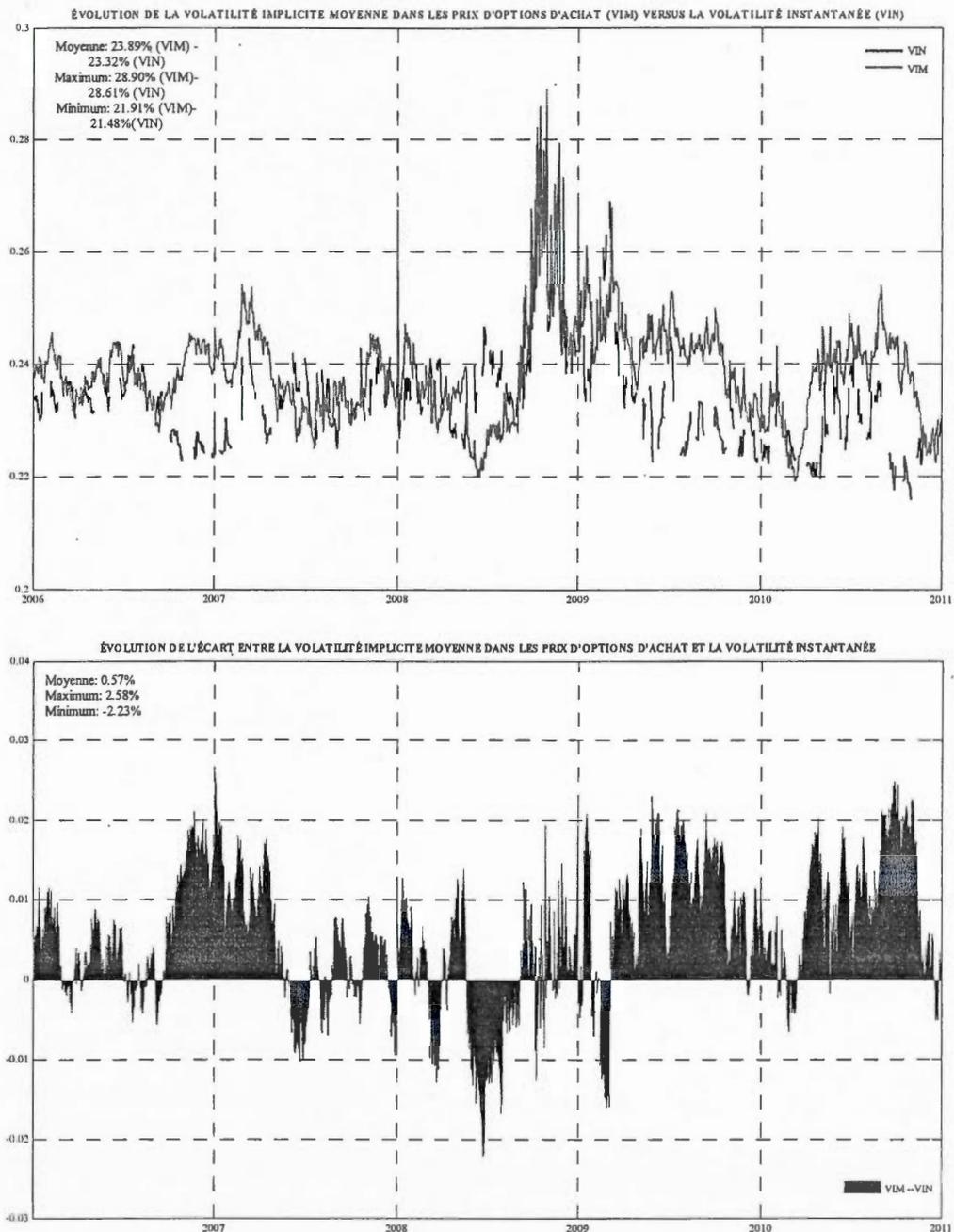
Dans le troisième essai, nous avons caractérisée la prime de risque de la volatilité asymétrique tout en identifiant les facteurs qui expliquent ses variations. Pour y arriver, nous avons procédé en deux étapes. Dans la première étape, nous avons mis en évidence, de façon empirique, la présence de la prime de risque de la volatilité asymétrique dans les prix d'options. L'idée consiste à comparer l'évolution de la volatilité instantanée du support, estimée via le modèle établi au deuxième essai, à celle de la volatilité implicite dans les prix d'options sur le même support. Dans la deuxième étape, nous avons utilisé la méthode de Bakshi et Kapadia (2003,a) qui consiste à former un portefeuille de réplification sûr à un risque près, celui de la volatilité. La technique est telle que le rendement moyen du portefeuille de couverture, durant la vie de l'option, et la prime associée au risque de la volatilité asymétrique du support ont le même signe. Dans cet étape, nous avons procédé à une analyse plus approfondie qui nous a permis de déceler l'effet du niveau de la volatilité et l'échéance de l'option sur la prime de risque de la volatilité asymétrique.

Notre étude empirique porte sur les prix d'options (d'achat et de vente) sur l'indice américain S&P100 durant la période allant du 3 janvier 2006 au 18 décembre 2010. Les résultats indiquent que la prime liée au risque de la volatilité asymétrique est négative. De plus, un lien positif entre la volatilité et la prime est nettement visible voulant que la dite prime augmente, en valeur absolue, dans un marché plus volatil, surtout pour les portefeuilles à longue échéance. Cette variation paraît asymétrique. En effet, pour la même variation absolue de la volatilité, cette asymétrie veut que la hausse de la prime due à la variation positive dépasse sa baisse résultant de la variation négative. Ce résultat indiquerait que l'hypervolatilité porte les investisseurs à payer une prime relativement excessive pour se couvrir contre la baisse du marché.

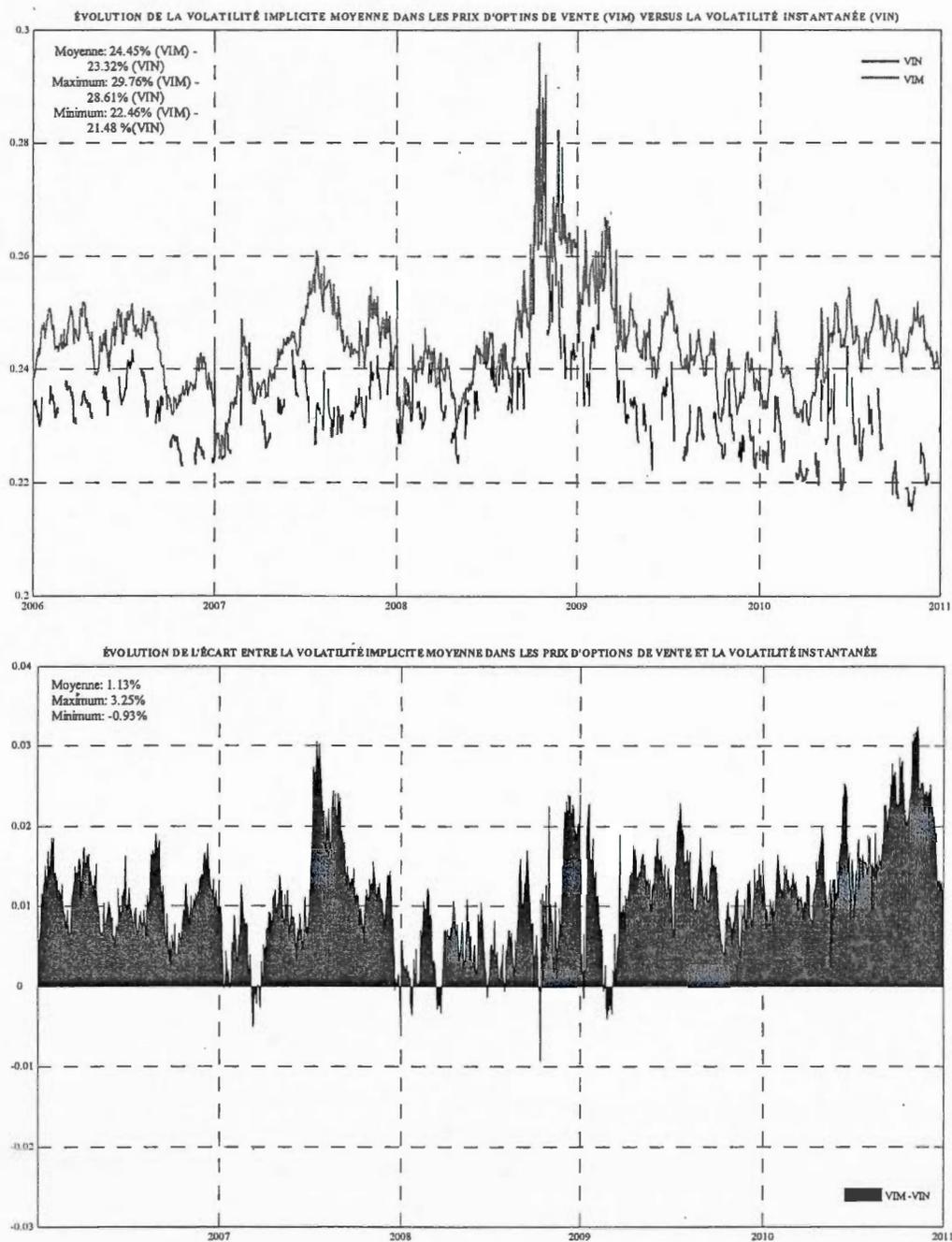
Figure 3.1 Évolution du rendement observé et celle du levier financier du S&P100 (3 janvier 2006 - 18 décembre 2010)



**Figure 3.2** Évolution de la volatilité implicite dans les prix d'options d'achat sur S&P100 versus la volatilité instantanée du S&P100 ( 3 janvier 2006 - 18 décembre 2010)



**Figure 3.3** Évolution de la volatilité implicite dans les prix d'options de vente sur S&P100 versus la volatilité instantanée du S&P100 ( 3 janvier 2006 - 18 décembre 2010)



## BIBLIOGRAPHIE

- Adrian, Tobias, et Joshua V. Rosenberg, 2008, Stock returns and volatility: Pricing the short-run and long-run components of market risk, *Journal of Finance* 63, 2997-3030.
- Aït-Sahalia, Yacine, et Robert Kimmel, 2007, Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models, *Journal of Financial Economics* 83, 413-452.
- Almeida, Caio, et José Vicente, 2009, Identifying volatility risk premium from fixed income asian options, *Journal of Banking & Finance* 33, 652-661.
- Andersen, Torben G., Luca Benzoni, et Jesper Lund, 2002, An empirical investigation of continuous-time equity return models, *Journal of Finance* 57, 1239-1284.
- Anderson, Evan W., Eric Ghysels, et Jennifer L. Juergens, 2009, The impact of risk and uncertainty on expected returns, *Journal of Financial Economics* 94, 233-263.
- Ang, Andrew, Robert J. Hodrick, Yuhang Xing, et Xiaoyan Zhang, 2006, The cross-section of volatility and expected returns, *Journal of Finance* 61, 259-299.
- Ang, Andrew, Robert J. Hodrick, Yuhang Xing, et Xiaoyan Zhang, 2009, High idiosyncratic volatility and low returns: International and further U.S. evidence, *Journal of Financial Economics* 91, 1-23.
- Athanassakos, George, 2009, Value versus growth stock returns and the value premium: The Canadian experience 1985-2005, *Canadian Journal of Administrative Sciences* 26, 109-121.
- Avramov, Doron, Tarun Chordia, et Amit Goyal, 2006, The impact of trades on daily volatility, *Review of Financial Studies* 19, 1241-1277.
- Baillie, Richard T., Tim Bollerslev, et Hans Ole Mikkelsen, 1996, Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 74, 3-30.
- Baker, Malcolm, et Jeffrey Wurgler, 2006, Investor sentiment and the cross-section of stock returns, *Journal of Finance* 61, 1645-1680.
- Baker, Malcolm, et Jeffrey Wurgler, 2007, Investor sentiment in the stock market, *Journal of Economic Perspectives* 21, 129-151.

- Bakshi, Gurdip, Charles Cao, et Zhiwu Chen, 1997, Empirical performance of alternative option pricing models, *Journal of Finance* 52, 2003-2049.
- Bakshi, Gurdip, et Nikunj Kapadia, 2003a, Delta-hedged gains and the negative market volatility risk premium, *Review of Financial Studies* 16, 527-566.
- Bakshi, Gurdip, et Nikunj Kapadia, 2003b, Volatility risk premiums embedded in individual equity options: Some new insights, *Journal of Derivatives* 11, 45-54.
- Barndorff-Nielsen, Ole E., et Neil Shephard, 2001, Non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics, *Journal of the Royal Statistical Society* 63, 167-241.
- Bates, David S., 1991, The crash of '87: Was it expected? The evidence from options markets, *Journal of Finance* 46, 1009-1044.
- Bates, David S., 1996, Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutschemark options, *Journal of Econometrics* 94, 69-107.
- Bates, David S., 2000, Post-'87 crash fears in the S&P 500 futures option market, *Journal of Econometrics* 94, 181-238.
- Beckers, Stan, 1981, Standard deviations implied in option prices as predictors of future stock price variability, *Journal of Banking & Finance* 5, 363-368.
- Bekaert, Geert, et Guojun Wu, 2000, Asymmetric volatility and risk in equity markets, *Review of Financial Studies* 13, 1-42.
- Bellalah, Mondher, et Bertrand Jacquillat, 1995, Option valuation with information costs: Theory and tests, *The Financial Review* 30, 617-635.
- Berger, David, Alain Chaboud, et Erik Hjalmarsson, 2009, What drives volatility persistence in the foreign exchange market?, *Journal of Financial Economics* 94, 192-213.
- Bhamra, Harjoat S., et Raman Uppal, 2009, The effect of introducing a non-redundant derivative on the volatility of stock-market returns when agents differ in risk aversion, *Review of Financial Studies* 22, 2303-2330.
- Black, Fisher, Michael C. Jensen, et Myron S. Scholes, 1972, The capital asset pricing model: Some empirical tests, *Studies in the Theory of Capital Markets*, 79-124.
- Black, Fisher, et Myron S. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659.
- Black, Fisher, et John C. Cox, 1976, Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions, *Journal of Finance* 31, 351-367.
- Black, Fisher, 1976, Studies of stock price volatility changes, in *Proceedings of the 1976 Meetings of the Business and Economics Section*, 177-181 (American Statistical

Association).

- Bollen, Nicolas P., et Robert E. Whaley, 2004, Does net buying pressure affect the shape of implied volatility functions?, *Journal of Finance* 59, 711-753.
- Bollerslev, Tim, 1986, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
- Bollerslev, Tim, Julia Litvinova, et George Tauchen, 2006, Leverage and volatility feedback effects in high-frequency data, *Journal of Financial Econometrics* 4, 353-384.
- Brandt, Michael W., Alon Brav, John R. Graham, et Alok Kumar, 2010, The idiosyncratic volatility puzzle: Time trend or speculative episodes?, *Review of Financial Studies* 23, 863-899.
- Britten-Jones, Mark, et Anthony Neuberger, 2000, Option prices, implied price processes, and stochastic volatility, *Journal of Finance* 55, 839-866.
- Brown, Gregory, et Nishad Kapadia, 2007, Firm-specific risk and equity market development, *Journal of Financial Economics* 84, 358-88.
- Buraschi, Andrea, et Jens C. Jackwerth, 2001, The price of smile: Hedging and spanning in option markets, *Review of Financial Studies* 14, 495-527.
- Calvet, Louis A., et Jean Lefoll, 1988, Risk and return on Canadian capital markets, *Canadian Journal of Administrative Sciences* 5, 1-12.
- Campbell, John Y., et Ludger Hentschel, 1992, No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns, *Journal of Financial Economics* 31, 281-318.
- Campbell, John Y., Martin Lettau, Burton G. Malkiel, et Yexiao Xu, 2001, Have individual stocks become more volatile? An empirical exploration of idiosyncratic risk, *Journal of Finance* 56, 1-43.
- Canina, Linda, et Stephen Figlewski, 1993, The informational content of implied volatility, *Review of Financial Studies* 6, 659-681.
- Carpenter, James, Peter Clifford, et Paul Fearnhead, 1998, An improved particle filter for non-linear problems, Document inédit, Université d'Oxford.
- Carr, Peter, Hélyette Geman, Dilip B. Madan, et Mar Yor, 2003, Stochastic volatility for Lévy processes, *Mathematical Finance* 13, 345-382.
- Carr, Peter, et Liuren Wu, 2003, The finite moment log stable process and option pricing, *Journal of Finance* 58, 753-778.
- Carr, Peter, et Liuren Wu, 2009, Variance risk premiums, *Review of Financial Studies* 22, 1311-1341.

- Chan, Kalok, Y. Peter Chung, et Wai-Ming Fong, 2002, The informational role of stock and option volume, *Review of Financial Studies* 15, 1049-1075.
- Chakravarty, Sugato, Huseyin Gulen, et Stewart Mayhew, 2004, Informed trading in stock and option markets, *Journal of Finance* 59, 1235-1258.
- Chernov, Mikhail, A. Ronald Gallant, Eric Ghysels, et George Tauchen, 2003, Alternative models for stock price dynamics, *Journal of Econometrics* 116, 225-257.
- Chernov, Mikhail, 2007, On the role of risk premia in volatility forecasting, *Journal of Business & Economic Statistics* 25, 411-426.
- Christensen, Bent J., et Nagpurnanand R. Prabhala, 1998, The relation between implied and realized volatility, *Journal of Financial Economics* 50, 125-150.
- Christoffersen, Peter, Kris Jacobs, Chayawat Ornthanalai, et Yintian Wang, 2008, Option valuation with long-run and short-run volatility components, *Journal of Financial Economics* 90, 272-297.
- Christoffersen, Peter, Kris Jacobs, et Karim Mimouni, 2009, Volatility dynamics for the S&P500: Evidence from realized volatility, daily returns and option prices, Document inédit, McGill University.
- Christoffersen, Peter, Steven Heston, et Kris Jacobs, 2009, The shape and term structure in the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well, *Management Science* 55, 1914-1932.
- Christie, Andrew A., 1982, The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage, and interest rate effects, *Journal of Financial Economics* 10, 407-432.
- Coval, Joshua D., et Tyler Shumway, 2001, Expected option returns, *Journal of Finance* 56, 983-1009.
- Das, Sanjiv Ranjan, et Rangarajan K. Sundaram, 1999, Of smiles and smirks: A term-structure perspective, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 34, 211-239.
- Del Moral, Pierre, 2004, Feynman-Kac formulae. Genealogical and interacting particle approximations, Springer-Verlag, New York, 555 pages.
- Derman, Emanuel, et Iraj Kani, 1994, Riding on a smile, *Risk* 7, 32-39.
- Devroye, Luc, 1986, Non-uniform random variate generation, Springer-Verlag, New York, 843 pages.
- Diebold, Francis X., et Roberto S. Mariano, 1995, Comparing predictive accuracy, *Journal of Business and Economic Statistics* 13, 253-265.
- Driessen, Joost, Pascal J. Maenhout, et Grigory Vilkov, 2009, The price of correlation risk : Evidence from equity options, *Journal of Finance* 64, 1377-1406.

- Duan, Jin-Chuan, et Andras Fulop, 2009, Estimating the structural credit risk model when equity prices are contaminated by trading noises, *Journal of Econometrics* 150, 288-296.
- Dumas, Bernard, Jeff Fleming, et Robert E. Whaley, 1998, Implied volatility functions: Empirical tests, *Journal of Finance* 53, 2059-2106.
- Dupire, Bruno, 1994, Pricing with a smile, *Risk* 7, 18-20.
- Eberlein, Ernst, et Jean Jacod, 1997, On the range of option prices, *Finance and Stochastics* 1, 131-140.
- Ederington, Louis, et Wei Guan, 2002, Is implied volatility an informationally efficient and effective predictor of future volatility?, *Journal of Risk* 4, 29-46.
- Engle, Robert F., 1982, Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of the UK inflation, *Econometrica* 50, 987-1007.
- Engle, Robert F., et Tim Bollerslev, 1986, Modeling the persistence of conditional variances, *Econometric Review* 5, 1-50.
- Engle, Robert F., David M. Lilien, et Russel P. Robins, 1987, Estimating time-varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model, *Econometrica* 55, 391-408.
- Engle, Robert F., 1990, Discussion: Stock market volatility and the crash of '87, *Review of Financial Studies* 3, 103-106.
- Engle, Robert F., et Victor K. Ng, 1993, Measuring and testing the impact of news on volatility, *Journal of Finance* 48, 1749-1778.
- Eraker, Bjorn, 2004, Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices, *Journal of Finance* 59, 1367-1404.
- Fama, Eugene F., 1965, The behavior of stock market prices, *Journal of Business* 38, 34-105.
- Fama, Eugene F., 1976, *Foundations of Finance*, Basic Books, New York, 395 pages.
- Fama, Eugene F., et Kenneth R. French, 1992, The cross-section of expected stock returns, *Journal of Finance* 47, 427-465.
- Fama, Eugene F., et Kenneth R. French, 1993, Common risk factors in the returns on stocks and bonds, *Journal of Financial Economics* 33, 3-56.
- Fama, Eugene F., et Kenneth R. French, 1998, Value versus growth: The international evidence, *Journal of Finance* 53, 1975-1999.
- Fisher, Edwin O., Robert Heinkel, et Josef Zechner, 1989, Dynamic capital structure

- choice: Theory and tests, *Journal of Finance* 44, 19-40.
- French, Kenneth R., William G. Schwert, et Robert F. Stambaugh, 1987, Expected stock returns and volatility, *Journal of Financial Economics* 19, 3-29.
- Fu, Fangjian, 2009, Idiosyncratic risk and the cross-section of expected stock returns, *Journal of Financial Economics* 91, 24-37.
- Glosten Lawrence R., Ravi Jagannathan, et David E. Runkle, 1993, On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance* 48, 1779-1801.
- Goetzmann, William N., et Alok Kumar, 2007, Why do individual investors hold underdiversified portfolios?, document inédit, Yale University and University of Texas at Austin.
- Gordon, Nadria J., James D. Salmond, et Adrian F. Smith, 1993, Novel approach to nonlinear/ non-Gaussian Bayesian state estimation, *IEE-Proceedings-F*, 140, 107-133.
- Goyal, Amit, et Alessio Saretto, 2009, Cross-section of option returns and volatility, *Journal of Financial Economics* 94, 310-326.
- Granger, Clive, 1966, The typical spectral shape of an economic variable, *Econometrica* 34, 150-161.
- Harvey, David, Stephen Leybourne, et Paul Newbold, 1997, Testing the equality of prediction mean squared errors, *International Journal of Forecasting* 13, 281-291.
- Haugen, Robert A., 1999, *Beast on Wall Street: How stock volatility devours our wealth*, Prentice Hall, 144 pages.
- Hentschel, Ludger, 1995, All in the family: Nesting symmetric and asymmetric GARCH models, *Journal of Financial Economics* 39, 71-104.
- Heston, Steven L., 1993, A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies* 6, 327-343.
- Heston, Steven L., et Saikat Nandi, 2000, A closed-form GARCH option valuation model, *Review of Financial Studies* 13, 585-625.
- Hou, Tony C. T., et Phillip J. McKnight, 2004, An explanation of momentum in Canadian stocks, *Canadian Journal of Administrative Sciences* 21, 334-343.
- Huang, Wei, Qianqiu Liu, S. Ghon Rhee, et Liang Zhang, 2010, Return reversals, idiosyncratic risk, and expected returns, *Review of Financial Studies* 23, 147-168.
- Hull, John C., et Alan D. White, 1987, The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance* 42, 281-300.

- Irvine, Paul J., et Jeffrey Pontiff, 2009, Idiosyncratic return volatility, cash flows, and product market competition, *Review of Financial Studies* 22, 1149-1177.
- Jackwerth, Jens C., et Mark Rubinstein, 1996, Recovering probability distributions from option prices, *Journal of Finance* 51, 1611-1631.
- Jiang, George J., et Yisong S. Tian, 2005, The model-free implied volatility and its information content, *Review of Financial Studies* 18, 1305-1342.
- Jiang, George J., Danielle Xu, et Tong Yao, 2009, The information content of idiosyncratic volatility, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 44, 1-28.
- Johannes, Michael S., Nick Polson, et Jonathan R. Stroud, 2009, Optimal filtering of jump diffusions: Extracting latent states from asset prices, *Review of Financial Studies* 22, 2559-2599.
- Jones, Christopher S., 2003, The dynamics of stochastic volatility: Evidence from underlying and options markets, *Journal of Econometrics* 116, 181-224.
- Jones, Christopher S., 2006, A nonlinear factor analysis of S&P500 index option returns, *Journal of Finance* 61, 2325-2363.
- Jorion, Philippe, 2000, Risk management lessons from long-term capital management, *European Financial Management* 6, 277-300.
- Julier, Simon J., et Jeffrey K. Uhlmann, 2004, Unscented filtering and nonlinear estimation, *Proceedings of the IEEE*, 401-422.
- Kaplanski, Guy, et Haim Levy, 2010, Sentiment and stock prices: The case of aviation disasters, *Journal of Financial Economics* 95, 174-201.
- Kong, Augustine, Jun S. Liu, et Wing H. Wong, 1994, Sequential imputations and Bayesian missing data problems, *Journal of the American Statistical Association* 89, 278-288.
- Kryzanowski, Lawrence, Simon Lalancette, et Minh Chau To, 1994, Performance attribution using a multivariate intertemporal asset pricing model with one state variable, *Canadian Journal of Administrative Sciences* 11, 75-85.
- Lamoureux, Christopher G., et William D. Lastrapes, 1993, Forecasting stock-return variance: Toward an understanding of stochastic implied volatilities, *Review of Financial Studies* 6, 293-326.
- Latane, Henry A., et Richard J. Rendleman, 1976, Standard deviation of stock price ratios implied in option prices, *Journal of Finance* 31, 369-381.
- Lee, Wayne Y., Christine X. Jiang, et Daniel C. Indro, 2002, Stock market volatility, excess returns, and the role of investor sentiment, *Journal of Banking & Finance* 26, 2277-2299.

- Leland, Hayne E., 1985, Option pricing and replication with transactions costs, *Journal of Finance* 40, 1283-1301.
- Lintner, John, 1965, The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets, *Review of Economics and Statistics* 47, 13-37.
- Liu, Jun S., 1996, Metropolized independent sampling with comparisons to rejection sampling and importance sampling, *Statistics and Computing* 6, 113-119.
- Liu, Jun S., 2001, Monte carlo strategies in scientific computing, Springer-Verlag, New York, 346 pages.
- Liu, Jun, Francis A. Longstaff, et Jun Pan, 2003, Dynamic asset allocation with event risk, *Journal of Finance* 58, 231-259.
- Liu, Jun, Jun Pan, et Tan Wang, 2005, An equilibrium model of rare-event premia and implication for option smirks, *Review of Financial Studies* 18, 131-164.
- Longstaff, Francis A., et Eduardo S. Schwartz, 1995, A simple approach to valuing risky and floating rate debt, *Journal of Finance* 3, 789-819.
- Low, Buen Sin, et Shaojun Zhang, 2005, The volatility risk premium embedded in currency options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 40, 803-832.
- Maenhout, Pascal J., 2004, Robust portfolio rules and asset prices, *Review of Financial Studies* 17, 951-983.
- Mandelbrot, Benoit, 1963, The variation of certain speculative prices, *Journal of Business* 36, 394-419.
- Mandelbrot, Benoit, 1966, Forecasts of future prices: Unbiased markets, and martingale models, *Journal of Business* 39, 242-255.
- Markowitz, Harry, 1952, Portfolio selection, *Journal of Finance* 7, 77-91.
- Mele, Antonio, 2007, Asymmetric stock market volatility and the cyclical behaviour of expected returns, *Journal of Financial Economics* 86, 446-478.
- Merton, Robert C., 1973, An intertemporal capital asset pricing model, *Econometrica* 41, 867-887.
- Merton, Robert C., 1974, On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, *Journal of Finance* 29, 449-470.
- Merton, Robert C., 1987, An equilibrium market model with incomplete information, *Journal of Finance* 42, 483-510.
- McCurdy, Thomas, et Ieuan Morgan, 1988, Testing the martingale hypothesis in

- Deutsche Mark futures with models specifying the form of heteroscedasticity, *Journal of Applied Econometrics* 3, 187-202.
- Mixon, Scott, 2009, Option markets and implied volatility: Past versus present, *Journal of Financial Economics* 94, 171-191.
- Nelson, Daniel B., 1991, Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica* 5, 347-370.
- Ni, Sophie X., Allen M. Poteshman, et Jun Pan, 2008, Volatility information trading in the option market, *Journal of Finance* 63, 1059-1091.
- Pan, Jun, 2002, The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study, *Journal of Financial Economics* 63, 3-50.
- Pan, Jun, et Allen M. Poteshman, 2006, The information in option volume for future stock prices, *Review of Financial Studies* 19, 871-908.
- Pham, Dinh T., 2001, Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems, *Monthly Weather Review* 129, 1194-1207.
- Pindyck, Robert S., 1984, Risk, inflation, and the stock market, *American Economic Review* 74, 334-351.
- Pitt, Michael K., et Neil Shephard, 1999, Filtering via simulation: Auxiliary particle filters, *Journal of the American Statistical Association* 94, 590-599.
- Pong, Shiu-yan Eddie, Mark B. Shackleton, Stephen J. Taylor, et Xinzhong Xu, 2004, Forecasting currency volatility: A comparison of implied volatility and AR(FI)MA models, *Journal of Banking and Finance* 28, 2541-2563.
- Ristic, Branko, Sanjeev Arulampalam, et Neil Gordon, 2004, *Beyond Kalman filters: Particle filters for target tracking*, Artech House, 318 pages.
- Roll, Richard, 1988, The international crash of October 1987, *Financial analysts Journal* 44, 19-35.
- Rubinstein, Mark, 1994, Implied binomial trees, *Journal of Finance* 49, 771-818.
- Rubinstein, Reuven Y., et Dirk P. Kroese, 2004, *The cross-entropy method: A unified approach to combinatorial optimization, Monte-Carlo simulation, and machine learning*, Springer-Verlag, New York, 300 pages.
- Shamila, Jayasuriya, William Shambora, et Rosemary Rossiter, 2009, Asymmetric volatility in emerging and mature markets, *Journal of Emerging Market Finance* 8, 25-43.
- Sharpe, William F., 1963, A simplified model of portfolio analysis, *Management Science* 9, 277-293.

- Schwartz, Laurent, 1997, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, 391 pages.
- Schwert, William G., 1989, Why does stock market volatility change over time? *Journal of Finance* 44, 1115-1153.
- Taylor, Stephen J., 2005, *Asset price dynamics, volatility, and prediction*, Princeton, 525 pages.
- Thrun, Sebastian, Wolfram Burgard, et Dieter Fox, 2005, *Probabilistic Robotics*, MIT press, Cambridge, Massachusetts, USA.
- Todorov, Viktor, 2010, Variance risk-premium dynamics: The role of jumps, *Review of Financial Studies* 23, 345-383.
- Wang, Quanli, Jarad Niemi, Chee-Meng Tan, Lingchong You, et Mike West, 2009, Image segmentation and dynamic lineage analysis in single-cell fluorescence microscopy, *Cytometry Part A* 77, 101-110.
- Wei, Steven X., et Chu Zhang, 2006, Why did individual stocks become more volatile?, *Journal of Business* 79, 259-292.
- White, Halbert, 1980, A heteroscedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroscedasticity, *Econometrica* 48, 817-838.
- Wu, Guojun, 2001, The determinants of asymmetric volatility, *Review of Financial Studies* 14, 837-859.
- Zakoian, Jean-Michel, 1994, Threshold heteroskedastic models, *Journal of Economic Dynamics and Control* 18, 931-955.