UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

INITIATION À LA PREUVE EN CLASSE DE 6E ANNÉE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
ISABELLE LEMAY

AOÛT 2011

REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de recherche M. Stéphane Cyr pour m'avoir donné l'opportunité de faire ce projet intéressant et challengeant.

Aussi, je tiens à remercier tout particulièrement deux enseignantes exceptionnelles et leurs élèves d'avoir bien voulu participer à mes expérimentations. Leur ouverture d'esprit et leur disponibilité ont été des atouts indispensables pour cette recherche.

Merci à mes collègues, Claudia, Doris et Jean-François, pour leurs conseils et leur soutien lors des moments difficiles. Un merci tout à fait spécial à Julia, ma partenaire d'étude depuis des années, sans qui je n'aurais pas eu autant de plaisir à me lancer dans ce projet.

Merci à mes parents pour leur extrême patience, leurs encouragements et leur soutien tout au long de ma maîtrise. Un merci particulier à mon père qui a pris le temps de lire mon travail et d'en commenter la langue.

Finalement, merci à Stefan pour son écoute, ses encouragements, sa confiance et son indulgence.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

De nombreuses recherches ont mis en évidence la difficulté des élèves quant au passage de la géométrie pratique à la géométrie théorique entre l'enseignement primaire et secondaire. Néanmoins, peu de celles-ci se sont penchées sur les solutions à mettre de l'avant afin d'atténuer cette rupture. C'est ce point qui retient notre attention dans le cadre de cette étude.

Plusieurs possibilités sont envisageables pour diminuer la rupture entre les deux géométries. Pour notre part, nous avons choisi de nous concentrer sur des activités de géométrie pouvant mener graduellement les élèves de la géométrie pratique à la géométrie déductive. Notre hypothèse étant que les élèves de troisième cycle de l'école primaire sont en mesure de faire de la déduction et d'être initiés à la géométrie théorique. Cette hypothèse est d'ailleurs soutenue par les travaux de Lester (1975) et Douaire (1999).

Afin de bien cerner les éléments qui distinguent la géométrie pratique de la géométrie théorique, nous avons fait appel aux travaux de Parzysz (2002) basés sur ceux de van Hiele (1984) et de Houdement et Kuzniak (1999). Les outils qu'ils ont développés nous permettent de distinguer plusieurs paradigmes géométriques ainsi que les éléments clés qui les différencient.

En nous basant sur ces précédentes études, nous avons mis sur pied une séquence d'activités mettant en lumière les limites de la démarche instrumentée (utilisation de la règle graduée et rapporteur d'angle) tout en souhaitant mettre à profit le développement du raisonnement déductif. Pour la construction de ces activités, nous avons utilisé une démarche de *Design Research* (Edelson 2002). De plus, nous avons fait appel aux travaux de Coppé et coll. (2005) quant aux différents types de dessin que l'élève rencontre en classe de géométrie. La séquence de neuf activités bâties a été expérimentée dans deux classes de 6^{e} année sur une durée d'environ 4 mois.

Les analyses découlant de ces expérimentations ont mis en évidence dans quelle mesure il est possible de favoriser le développement du raisonnement déductif chez les élèves en utilisant des activités d'initiation à la géométrie déductive. De plus, les analyses nous ont aussi permis d'identifier quelles étaient les tâches pouvant mener l'élève à délaisser la mesure au profit de la déduction, tâches qui étaient construites dans l'objectif que l'élève fasse le passage de la géométrie pratique vers la géométrie déductive.

Mots clés : didactique des mathématiques, raisonnement déductif, paradigmes géométriques, niveaux de van Hiele.

CHAPITRE I : PROBLÉMATIQUE

1.1 Introduction

L'école québécoise a pour principale mission de former des citoyens capables de participer à l'essor de la société. Au Québec comme ailleurs, les citoyens font face à des situations de plus en plus complexes exigeant la maitrise de plusieurs compétences. C'est pourquoi l'école « [...] doit favoriser le développement des habiletés intellectuelles requises dans une *société du savoir* en mouvance. » (Programme de formation de l'école québécoise, Éducation préscolaire, Enseignement primaire, 2006, p.3).

Dans le programme québécois pour l'enseignement primaire, ces habiletés apparaissent à travers les compétences transversales d'ordre intellectuel qui demandent à l'élève de résoudre des problèmes, d'exercer son jugement critique et de mettre en œuvre sa pensée créatrice (MELS, 2006). En mathématique, ces mêmes habiletés sont principalement sollicitées à travers les différentes formes de raisonnement exercées par les élèves. Or, selon ce même programme, le développement du raisonnement mathématique est l'un des aspects les plus fondamentaux dans la formation des élèves, tant au primaire qu'au secondaire. L'une des trois compétences mathématiques du programme du primaire et du secondaire fait d'ailleurs référence de façon explicite au raisonnement[1].

[1] Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques (programme du primaire) et Déployer un raisonnement mathématique (programme du secondaire).

Par ailleurs, différents modes de raisonnement sont abordés au primaire et au secondaire, soit les raisonnements analogique, inductif et déductif. Cependant, si l'on s'attarde à la littérature en didactique des mathématiques, on remarque que le raisonnement déductif est celui qui est principalement étudié par les chercheurs. Ceci s'explique par son rôle fondamental dans la compréhension des énoncés et des définitions en mathématiques ainsi que dans les démonstrations (Duval, 2005). Il contribue notamment au développement de la pensée critique et de l'argumentation, deux aspects essentiels à la formation d'un citoyen autonome, responsable et avisé (Pallascio, 2005). De plus, comme le mentionne English (1997), le raisonnement déductif est fondamental dans le développement de l'enfant puisqu'il est essentiel à diverses activités humaines que ce soit dans le milieu scolaire ou non.

En mathématique, le raisonnement déductif occupe une place de choix qui se justifie notamment par son apport à la construction de la rationalité et dans le développement de l'argumentation logique (Cyr, 2006, Houdebine, 1990). Il est sollicité à travers différentes formes d'activités mathématiques mais traditionnellement et principalement, il est développé lors des activités de validation, qui prennent le plus souvent la forme de preuves mathématiques dans des contextes géométriques (Arsac, et coll, 1992, Duval, 2005, 1991; Reid, 1995). Or, fondamental dans la formation scolaire des enfants, la rédaction de preuves est en même temps l'une des activités les plus complexes et qui pose le plus de problèmes aux élèves du secondaire (Cyr, 2001; Houdebine, 1990 ; Senk, 1985).

1.2 Preuve et démonstration

Pour mieux comprendre l'activité de preuve en milieu scolaire, il est nécessaire de préciser ce qui se cache sous ce vocable. Dans un premier temps, une distinction est à faire entre la preuve et la démonstration. Bien que dans la vie de tous les jours, ces deux vocables soient considérés comme synonymes, ils sont utilisés selon des sens différents dans la littérature francophone de recherche en didactique des mathématiques. Pour les distinguer, nous retenons les définitions de Balacheff puisqu'il s'agit des définitions les plus couramment explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. » (Balacheff, 1987, p.148.). Elle se caractérise par une dimension sociale; une explication peut donc obtenir le statut de preuve dans une communauté, mais être refusée par une autre communauté. Imaginons un argument basé sur des tracés de figures dans un environnement papier crayon. Dans ce cas, l'argument pourrait être considéré comme une preuve par des élèves, mais il pourrait n'être qu'une explication illustrée pour des enseignants ou des mathématiciens. Quant à la démonstration, Balacheff la définit comme une preuve acceptée par la communauté mathématique et organisée selon une structure précise. Ainsi, toute preuve n'est pas une démonstration. Ce qui est encore plus vrai à l'école primaire puisque les critères utilisés pour accepter une preuve sont très éloignés de ceux utilisés par le mathématique, par exemple un dessin pourrait être suffisant. Il est à noter qu'une preuve à l'école élémentaire ne se doit pas d'être une démonstration mathématique au sens défini par Balacheff. Il importe de considérer la communauté dans laquelle l'action a lieu afin de déterminer s'il s'agit d'une preuve ou non.

1.3 Les rôles de la preuve

1.3.1 La preuve en mathématiques

La preuve constitue l'intermédiaire par lequel la validation des énoncés s'opère en mathématiques (Vadcard, 1999), mais son champ d'activité ne s'arrête pas seulement à la validation. Par exemple, la preuve permet entre autres de développer de nouvelles théories par la découverte de nouveaux résultats (Herhs, 1997), de systématiser des énoncés et de communiquer à l'aide du langage mathématique (Hanna, 1983; Knuth, 2002). Dans le premier cas, la preuve est l'instrument par lequel le mathématicien opère pour mettre en lumière de nouvelles théories. Il peut à partir de deux ou trois énoncés en déduire un nouveau en utilisant le raisonnement déductif. Lorsqu'on parle de systématisation des énoncés, nous faisons référence au regroupement de plusieurs propriétés des éléments de même nature en un théorème qui permet, à lui seul, de définir un groupe d'objets mathématiques. Finalement, la preuve permet la communication mathématique, car c'est à partir de celle-ci que l'on peut exprimer ses idées mathématiques à l'intérieur d'un langage cohérent et pertinent permettant à notre interlocuteur d'avoir en main tous les éléments nécessaires afin de comprendre le message transmis.

Ces différents rôles associés à la preuve dans la littérature permettent de mettre en lumière sa place prépondérante dans l'activité mathématique. Cependant, il n'est pas possible de transposer directement l'activité de rédaction de preuve dans le curriculum scolaire telle qu'elle est dans la discipline mathématique. Cette différenciation des rôles nous renvoie au concept de transposition didactique (Chevallard, 1985). Comme tout objet d'enseignement, la preuve doit subir des transformations afin de s'adapter au niveau des élèves auxquels elle s'adresse en plus de s'adapter aux buts et visées de l'enseignement. Ce processus de transformation du *savoir savant* correspondant au savoir de la discipline vers le *savoir enseigné* est nommé par Chevallard (1985) la *transposition didactique*. Il serait erroné de décrire ce processus de transformation comme étant une simple diminution du niveau de difficulté. Il s'agit d'un processus plus global par lequel l'objet d'enseignement est modifié tant au niveau de la présentation, que de son contenu et sa fonction. C'est pourquoi nous croyons qu'il est nécessaire de préciser le sens donné à la preuve dans la discipline mathématique et celui donné dans le milieu scolaire (Cyr, 2004). Nous faisons cette précision en spécifiant ce que nous acceptons comme preuve ainsi que les rôles qui y sont associés.

1.3.2 La preuve en milieu scolaire

Comme nous venons de le mentionner à travers l'idée de transposition didactique, les rôles de la preuve ne sont pas exactement les mêmes que l'on se situe à l'intérieur même de la discipline ou dans une optique de formation. Du point de vue de l'enseignement, la preuve ainsi que ses activités préparatoires ont plusieurs portées didactiques qui diffèrent de celles de la discipline.

> La rédaction de preuves en classe permet en effet de favoriser la compréhension et l'apprentissage, grâce à son caractère explicatif, de convaincre de la véracité d'une proposition, de développer les

> capacités de raisonnement, de jugement critique et d'argumentation, de même que l'autonomie de l'élève, en plus de jouer un rôle dans la socialisation et dans la communication du savoir mathématique. (Cyr, 2004, p.2).

Ces dernières fonctions ont des retombées très intéressantes au niveau de l'enseignement puisqu'elles permettent de travailler au développement de plusieurs habiletés intellectuelles dans le cadre d'une même activité.

D'ailleurs, Reid (1995) mentionne que le raisonnement déductif est l'une des habiletés de base que les élèves doivent développer à l'école, et la rédaction de preuves en classe de mathématiques peut y jouer un rôle fondamental. De plus, la preuve favorise la compréhension et joue un rôle explicatif (Hanna, 1995). Elle sert aussi au développement de la pensée critique chez les élèves (Duval, 1990 ; Houdebine, 1990), à la socialisation et à la communication des savoirs (Herbst, 1998), ainsi qu'à la vérification des solutions (Houdebine, 1990), tout en favorisant l'autonomie (Knuth, 1990). Son rôle est aussi celui de convaincre de la véracité d'un énoncé (Arsac et coll., 1992). Il est donc convenable de prétendre que la preuve a sa place dans les curriculums de formation. Pour certains auteurs, la preuve devrait même être un sujet à part entière dans le cheminement mathématique des élèves, et ce, à tous les niveaux scolaires (Stylianides, Stylianides, 2006; Hanna, 1995).

1.3.3 La preuve dans les programmes d'études

L'importance attribuée à la preuve tant en mathématique que dans la littérature en didactique des mathématiques, transparait également dans les programmes de formation de l'école québécoise. Effectivement, la preuve est présente dans les programmes de formation pour l'école primaire et l'école secondaire. Au primaire, elle y est de façon implicite, mais on peut déceler des éléments propices à son initiation tels que le développement du raisonnement déductif, la démarche de justification, l'explication précise et complète d'un raisonnement. (MELS, 2006). De plus, on exige de l'élève une justification des énoncés en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques dans la compétence *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématique.* Au niveau de l'enseignement secondaire, la preuve est présente de façon explicite, et ce, dès le premier cycle. En effet, il est mentionné que *Réaliser des preuves et des démonstrations* est une des composantes de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique* (MELS, 2006). De même, on retrouve des habiletés nécessaires à la rédaction de preuve dans la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique* tel que produire et transmettre des messages à caractère mathématique. De plus, les habiletés à la rédaction de preuve sont aussi dans les compétences transversales d'ordre intellectuel. Selon le programme québécois, l'élève «[...]analyse une situation, établit une conjecture, réalise une preuve, justifie une solution [...] Il est en mesure de valider ses conjectures en s'appuyant sur des définitions, des théorèmes ou des énoncés déjà admis qui lui permettent de bâtir, le cas échéant, une solide argumentation.» (MELS, 2003, p. 10). Il nous apparait donc nécessaire d'initier les élèves à la rédaction de preuves en classe de 6^e année, afin de les préparer aux attentes de l'école secondaire.

1.4 Les difficultés

Fondamentale dans la formation mathématique des élèves, l'activité de rédaction de preuve est cependant une source importante de difficultés pour ces derniers (Weber, 2001; Cyr, 2004), plusieurs facteurs en sont la cause. La compréhension du raisonnement déductif en tant qu'instrument (Duval, 1991) est un premier obstacle chez les élèves. Un autre facteur qui explique les difficultés des élèves quant à la rédaction de preuve se rapporte au sens donné à la preuve et à la géométrie, par exemple, les difficultés causées par les différents statuts donnés aux dessins en géométrie (Coppé, Dorier et Moreau, 2005). Finalement, certaines difficultés proviennent de la rupture dans le cheminement scolaire des élèves, ainsi que d'une initiation abrupte à la démonstration au secondaire (Arsac et coll., 1992 ; Gousseau-Coutat, 2006). Nous reprenons chacune de ces difficultés dans les paragraphes suivants afin d'en expliciter le contenu.

1.4.1 La rupture de contrat didactique

Selon certains auteurs (Balacheff, 1987; Stylianides, Stylianides, 2006 ; Coppé et coll., 2005), on peut expliquer en partie les difficultés de l'apprentissage de la preuve chez les élèves par son introduction trop abrupte. Comme le mentionne Stylianides :

> [...] I assert that theses students' difficulties are likely to be due to abrupt introduction into deductive modes of reasoning. More generally, I argue that a significant part of improving in all students' understanding of, and skill at, reasoning and proving depends on how well students' engagement with reasoning and proving is facilitated in the pre-high school grades (Stylianides, 2005, p.2).

Selon Balacheff (1987), ce phénomène s'expliquerait par une rupture causée par un passage trop soudain d'une géométrie *pratique* au primaire à une géométrie *théorique* au secondaire. La première, qu'il qualifie de *pratique,* est celle des instruments géométriques et de la production de figures tandis que la géométrique dite *théorique* est une géométrie déductive. Toujours selon Balacheff (1987), les élèves voient se modifier rapidement les exigences de l'enseignant par rapport à leur preuve en géométrie. Par exemple, lors de la géométrie *pratique*, l'élève produit des preuves basées sur l'observation et la manipulation des instruments et des figures, c'est ce qu'on appelle des *preuves pragmatiques*. Cependant, au secondaire ses preuves doivent évoluer pour en arriver à des *preuves intellectuelles* où la théorie prend une place prédominante et où le travail de réflexion se fait sur les définitions et les propriétés géométriques des figures en jeu et non plus sur le dessin. Ce changement cause une rupture du contrat didactique entre les élèves et l'enseignant concernant l'activité mathématique, et ce, plus particulièrement dans le cas de la géométrie. Cependant, toujours selon Balacheff (1987) les difficultés d'enseignement de la preuve ne peuvent pas toutes être expliquées par la rupture du contrat didactique. La nature et le statut des connaissances peuvent aussi y jouer un rôle. L'objectif de l'activité géométrique à l'école secondaire n'est plus simplement de résoudre le problème posé, mais plutôt de le résoudre en faisant appel à la rigueur et à la déduction.

1.4.2 La confusion sur ce qui est demandé

L'élève est confronté à deux géométries lors de leur cheminement scolaire, une première à l'école primaire basée sur l'observation, la règle graduée et le rapporteur d'angle et une deuxième à l'école secondaire, basée sur les propriétés et les définitions. La différence entre les deux géométries est, comme nous l'avons déjà mentionné, une source de difficulté (Coppé, Dorier et Moreau 2005). De plus, ce changement de point de vue peut porter à confusion pour l'élève.

En effet, ce qui attendu de lui en matière de preuve en géométrie est modifié sans qu'il puisse en saisir toutes les raisons. Dans un premier temps, on lui demande de faire de la *géométrie pratique*. Au Québec, on retrouve cette géométrie principalement à l'école primaire. Tandis que lors du passage au secondaire, l'élève fait face à une nouvelle géométrie que l'on nomme la *géométrie théorique* ou encore la *géométrie déductive*. Bien qu'on parle de différentes géométries à ces deux niveaux scolaires, l'objet mathématique est le même. C'est-à-dire que l'élève travaille avec les polygones et le cercle tout en connaissant les propriétés de ceux-ci (Coppé, Dorier et Moreau 2005). Cependant, le travail qui est demandé à l'élève est d'un tout autre niveau cognitif à l'école secondaire. En effet, dans le cas de la géométrie déductive l'élève doit se détacher de la figure comme objet pour se concentrer sur les propriétés de celle-ci afin de déployer un raisonnement déductif. La différenciation au niveau du travail sur la figure est déjà une étape importante. Dans le cas de la géométrie pratique, le travail de l'élève se situe sur le dessin. Pour lui, la figure géométrique est un dessin. Il perçoit la figure comme un objet sur lequel il effectue des mesures et des manipulations. Ce statut d'objet donné à la figure doit être modifié lors du passage à la géométrie déductive, l'élève ne doit plus travailler sur le dessin, mais plutôt sur l'ensemble des figures que son dessin représente. Coppe et coll. (2005) expliquent bien la difficulté de l'enseignement lors du passage d'une géométrie à l'autre :

> Il y a bien ici une réelle difficulté d'enseignement : comment signifier aux élèves qu'une pratique qui était utilisée précédemment dans d'autres types de tâches (lire, prendre des informations sur le dessin) n'est plus valide (même si elle peut les aider) et qu'il est désormais nécessaire de passer au raisonnement en utilisant des propriétés. (Coppe, Dorier et Moreau, 2005, p.12)

Le cadre théorique de Houdement et Kuzniak (1999) en ce qui concerne la géométrie nous permet de bien distinguer les différentes géométries dont il est question ici. Ces derniers mettent en évidence que le vocable *géométrie* ne renvoie pas à la même idée tout au long du parcours scolaire, et ce, tant au niveau des activités que l'on propose qu'au niveau des raisonnements auxquels on fait appel. Plus précisément, Houdement et Kuzniak mettent de l'avant trois différentes géométries : la géométrie 1 (*géométrie naturelle*) qui trouve sa source de validation dans la réalité, la géométrie 2 (*géométrie axiomatique naturelle*) qui renvoie elle aussi à la réalité, mais en accord avec un effort d'axiomatisation et la géométrie 3 (*géométrie axiomatique formaliste*), qui de son côté coupe tous fils la connectant à la réalité. Ces trois géométries composent selon ces auteurs, les paradigmes de la géométrie. Nous reviendrons sur le cadre théorique de ces auteurs dans le chapitre II.

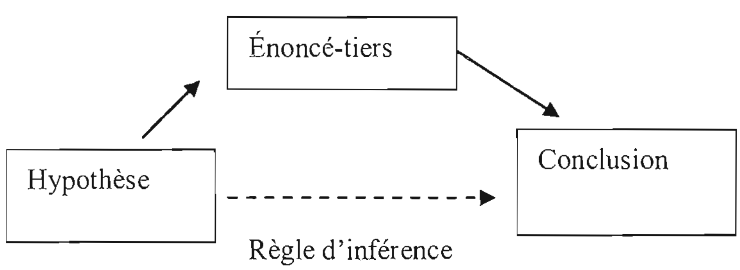
1.4.3 Le rapport au dessin

Le rôle du dessin dans les activités de géométrie n'est pas le même selon la géométrie où on se trouve (Houdement, 2007, 2006). L'élève se doit de modifier son rapport à la géométrie et aux figures lorsqu'il passe de la géométrie pratique à la géométrie théorique. Lors de sa formation à l'école primaire, l'élève a pour mandat de mesurer et de travailler directement sur la figure. Cependant, le contrat didactique est modifié avec la venue de la géométrie déductive à l'école secondaire. La difficulté des élèves provient du fait qu'ils s'appuient sur ce qu'ils observent sur le dessin au lieu de raisonner à partir des propriétés des figures géométriques représentées par l'intermédiaire du dessin (Perrin-Glorian, 2003). Cette difficulté est facilement explicable par le changement abrupt que rencontre l'élève. Pourquoi l'élève devrait-il délaisser les outils qui lui ont été utiles jusqu'à maintenant? De plus, le dessin joue un double rôle en géométrie. D'une part, il peut être un renforcement à l'argumentation, et d'autre part, il peut être une des causes de blocage du raisonnement de l'élève due à l'évidence du résultat par l'observation du dessin (Coppé, Dorier et Moreau, 2005). Délaisser l'évidence et comprendre l'importance et le rôle de prouver l'énoncé n'est pas un passage qui se fait naturellement chez les élèves (Balacheff, 1987; Chazan, 1993; Tanguay, 2000).

1.4.4 La compréhension du raisonnement déductif

Cette nouvelle géométrie à laquelle est confronté l'élève le force à modifier son rapport au dessin, mais plus encore, la géométrie *théorique* lui demande d'utiliser une nouvelle forme de raisonnement. En effet, l'élève doit désormais appréhender le raisonnement déductif, puisque comme le mentionne Duval (1991), le raisonnement déductif constitue la tâche principale et décisive de l'activité de preuve. Cette forme de raisonnement est un mode de pensée dont le fonctionnement ne lui est pas évident (Duval, 1991; Tanguay, 2005; Coutat, 2005). En effet, la structure du raisonnement déductif est difficilement maitrisée par les élèves et cette structure est à la base de sa différentiation de l'argumentation. Puisque la compréhension de son fonctionnement est préalable à l'activité de démonstration, ceci rend la rédaction de preuve difficile. La structure ternaire du raisonnement déductif serait donc une des causes de son incompréhension. Selon les travaux de Duval (1993) le raisonnement déductif est construit comme suit :

Figure 1.1 Le raisonnement déductif selon Duval (1993)



Le raisonnement s'articule entre trois éléments : l'hypothèse qui sert de point d'ancrage au raisonnement, l'énoncé-tiers qui part de l'hypothèse pour aller vers la conclusion voulue et finalement la conclusion. Ces trois éléments s'articulent ensemble grâce à une règle d'inférence. La règle d'inférence relève généralement des définitions ou des théorèmes ayant cours dans le raisonnement. Par conséquent, l'utilisation d'une propriété théorique issue d'une définition ou d'un théorème est un élément essentiel du raisonnement déductif puisqu'elle agit à titre de règle d'inférence. Une des difficultés de ce type de raisonnement est que le statut opératoire des propositions est indépendant de leur contenu. Par exemple, une proposition peut changer de statut opératoire à l'intérieur d'une même démonstration. La conclusion d'un premier pas de déduction devient la prémisse du pas suivant. Cette chaine de pas de déduction est la structure d'une démonstration mathématique. Selon Duval, la difficulté des élèves à reconnaitre la structure déductive et à en comprendre le fonctionnement provient de la confusion qu'ils entretiennent avec l'argumentation. Par exemple, lors d'une argumentation il s'agit d'accumuler des éléments appuyant le propos, l'ordre de présentation de ces derniers n'est pas un facteur déterminant comme c'est le cas dans le raisonnement déductif.

1.5 Les pistes de solution

La rédaction de preuve étant une activité complexe pour les élèves, comment peut-on faire pour en faciliter l'apprentissage? Selon la littérature à ce sujet, une des possibilités est d'harmoniser l'enseignement de la rédaction de preuve entre l'enseignement primaire et secondaire afin de diminuer la rupture didactique (Stylianides, 2007a). Selon Perrin-Glorian (2003), une des solutions est de commencer le développement des habiletés nécessaires à la rédaction de preuve avant son apprentissage au lycée (école secondaire au Québec). Toujours selon cette chercheure, le moment idéal se situe à la transition entre l'enseignement élémentaire et le lycée, c'est-à-dire au troisième cycle du primaire et au premier cycle du secondaire au Québec. C'est donc à ce moment que les efforts doivent être déployés pour débuter la transition entre la *géométrie pratique* et la *géométrie théorique*. Effectivement, une formation qui offre une plus grande continuité entre l'enseignement primaire et l'enseignement secondaire ne peut être que plus cohérente pour l'élève et faciliter son évolution vers un raisonnement déductif et l'élaboration de démonstration (Stylianides, 2007 ; Tanguay, 2005). Pour obtenir cette continuité, il faut commencer à exiger des élèves des justifications basées sur des déductions et non pas sur des mesures, et ce, dès l'enseignement primaire. De plus, cette démarche doit être en accord avec le principe de continuum de Stylianides. Ce principe stipule qu'il devrait y avoir cohérence et continuité entre les différentes exigences de preuve à travers le parcours scolaire de l'élève. L'activité de preuves doit pouvoir trouver sa place dès les pratiques mathématiques des premières classes, en acceptant que soit reconnue pour preuves autre chose que des démonstrations au sens strict. Comme le mentionne Balacheff (1987), il faut prendre en considération la nature de la rationalité des élèves lorsque vient le temps de valider une preuve en classe de mathématique. Plus précisément, il faut s'assurer que le e niveau de difficulté est adéquat pour les élèves tout comme les raisonnements utilisés.

1.6 Les études de psychologie

Une question se pose lorsque vient le temps de promouvoir le raisonnement déductif dès l'école primaire : les élèves sont-ils en mesure de faire preuve de déduction à cet âge? Selon la littérature, les élèves sont d'ores et déjà aptes à faire preuve de logique, de pensée critique et d'argumentation (Douaire 1999). Plusieurs études ont été mises sur pied pour vérifier à quel âge les élèves peuvent débuter l'introduction aux preuves. Selon Lester (1975, p.23) « [...] certain aspects of mathematical proof can be understood by children nine years old or younger. » Ce résultat appuie notre hypothèse, c'est-à-dire qu'il est possible d'initier les élèves aux habiletés préparatoires à la rédaction de preuve dès le troisième cycle de l'enseignement primaire. C'est d'ailleurs l'avis du programme de formation québécois de l'enseignement primaire au troisième cycle en mathématique. Effectivement, le programme souhaite favoriser l'émergence de raisonnement chez les élèves. Selon ce programme « Raisonner c'est organiser de façon logique un enchaînement de faits, d'idées ou de concepts pour arriver à une conclusion qui se veut plus fiable que si elle était le seul fait de l'impression ou de l'intuition.» (MELS, 2006, p.124).

1.7 Les preuves dans une collection de manuels de mathématiques

Pour favoriser une continuité dans l'enseignement de la géométrie, nous sommes en accord avec Stylianides (2007a) pour dire que les élèves doivent être initiés à la rédaction de preuves dès l'école primaire. Nous avons donc cherché à vérifier si les problèmes rencontrés au primaire permettent aux élèves de se préparer adéquatement à la géométrie théorique du secondaire. En effet, nous voulions vérifier dans quelle mesure ceux-ci comblaient ce besoin et de quelle manière. Ceci a pour but non pas de fournir une analyse complète, mais plutôt de nous éclairer sur ce que les élèves vivent en terme de preuve au quotidien dans leur classe et si l'initiation à la preuve est réalisée. La méthodologie que nous avons utilisée pour cette analyse est présentée en appendice A. Cependant, voici les grandes lignes de nos travaux et notez qu'il y a des exemples dans l'appendice A afin d'éclairer nos propos..

Nous avons fait appel à la littérature pour nous créer une typologie basée sur les travaux de Tanguay (2000) et ceux de van Hiele (Gutiérrez, 1992):

<u>Source de validation : Sensible</u>

1. *Jugement d'une seule venue sur une perception visuelle* : Ce type de preuve s'applique dans le cas où l'élève doit appliquer un jugement d'une seule venue sur la perception globale qu'il a de l'objet. Plus précisément, l'élève est dans une situation où le résultat lui semble évident, et ce, par le biais de sa perception visuelle de l'objet (voir exemple appendice A). Rappelons que nous considérons une situation évidente au sens de Rouche (1989) si elle remplit les conditions nécessaires et suffisantes suivantes :

- qu'on en discerne à vue la réalisation sur un cas particulier
- que la pensée s'engage sans accroc dans l'imagination de tous les cas possibles

(Rouche, 1989., p.14.)

2. *Jugement d'une seule venue sur une perception des propriétés* : Tout comme le type de preuve précédent, le *jugement d'une seule venue sur une perception des*

propriétés est mis de l'avant lorsque l'élève est face à un résultat qui lui semble évident. Cependant, dans ce cas-ci, l'évidence n'est pas perceptive par le biais d'une perception visuelle de l'objet, mais plutôt par une analyse de ses propriétés. Il est donc nécessaire que l'élève se distance de sa perception globale de l'objet pour se centrer sur certaines de ses caractéristiques pour obtenir le résultat attendu (voir exemple appendice A).

3. *Induction empirique sur une perception visuelle* : Ce type de validation est exigé des élèves lorsqu'un problème demande une validation qui n'est pas accessible par l'intuition. Ce type de problème doit pouvoir être résolu à l'aide d'une démarche empirique. Ainsi, l'élève a recours à une expérimentation ou à une induction pour résoudre le problème. L'induction ou l'expérimentation effectuée par l'élève doit se situer au niveau de sa perception visuelle de l'objet à l'étude. Plus précisément, la réflexion de l'élève se situe sur une perception globale (voir exemple appendice A).

4. *Induction empirique sur une perception des propriétés* : Ce type de problème est très semblable au type précédent. La seule distinction que l'on retrouve entre les deux types de preuve par induction empirique se situe au niveau de la perception de l'objet à l'étude. En effet, dans le cas précédent la perception est globale, c'est-à-dire que le travail s'effectue sur l'aspect visuel tandis que dans le cas présent, la perception est au niveau des propriétés. Le travail se situe donc sur les propriétés de la figure et non sur son apparence visuelle (voir exemple appendice A).

5. *Induction empirique sur des relations* : Tout comme les autres formes de validation par induction empirique, elle est basée sur une expérience réalisée par l'élève ou encore sur une induction. Cependant, elle se distingue des types de validation précédents par la nature de l'objet sur lequel l'élève effectue sa réflexion. En effet, dans les cas précédents, l'élève a soit une perception visuelle ou une perception des propriétés de la figure, mais dans ce cas-ci, l'élève doit situer sa réflexion sur les relations entre les figures et leurs propriétés (voir exemple appendice A).

Source de validation double : argumentation raisonnée articulée sur le sensible

6. *Expérience mentale* : Ce type de preuve se retrouve lors des situations où le résultat est accessible à l'élève par l'intuition. Nous considérons qu'il s'agit d'une expérience mentale si la réponse que doit formuler l'élève est calquée sur une expérience physicomécanique. Cette expérience doit être réalisée par l'esprit et non par une manipulation de l'élève (voir exemple appendice A).

7. *Empirico-déductif* : Afin de prouver la proposition ou de résoudre le problème, l'élève doit mettre en œuvre une série d'évidences partielles. Plusieurs petites évidences sont mises en relation avant d'en arriver à l'évidence de la proposition donnée dans sa globalité ou à la solution du problème posé. Il est à noter que ces évidences partielles peuvent être utilisées sans pour autant avoir été prouvées préalablement. Bien qu'il s'agisse d'une pensée logico-déductive, la validation peut se trouver au niveau des perceptions (voir exemple appendice A)

À cette typologie nous avons ajouté une catégorie afin de pouvoir classer tous les problèmes rencontrés dans les manuels. Cet ajout a été nécessaire pour classer certains problèmes qui ne demandaient pas à l'élève une réflexion, mais plutôt l'application de connaissances mémorisées. Cette tâche n'était pas incluse dans les autres catégories de la typologie.

8. *Application directe* : Pour répondre à la question posée, l'élève doit mobiliser ses connaissances et les appliquer de façon directe. Plus précisément, l'élève n'a qu'à mettre de l'avant un calcul simple ou une définition pour répondre à la question. La réflexion s'effectue en une seule étape (voir exemple appendice A).

De plus, nous avons croisé cette typologie avec les travaux de Pallascio et coll. (1993) sur les activités propres à la géométrie afin d'identifier de façon plus précise les activités que rencontrent les élèves dans les manuels de la collection *Clicmath*. Nous reviendrons en détails sur cette typologie dans le cadre théorique. Suite à ce croisement, nous avons obtenu un tableau qui présente le nombre de problèmes rencontré dans la collection pour chacune des opérations mentales en précisant à quel niveau de la typologie se situe la démarche attendue.

Tableau 1.1 Résultats de l'analyse des manuels de la collection Clicmath

Opérations mentales	Jugement d'une seule venue sur une perception visuelle	Jugement d'une seule venue sur une perception des propriétés	Induction empirique sur une perception visuelle	Induction empirique sur une perception des propriétés	Induction empirique sur des relations	Expérience mentale	**Empirico-déductif**	Application directe	Total
Classifier		9				3		4	16
Décrire	1	2		2	2	6	**1**	4	18
Transposer						9			9
Déterminer		1	1	3	2	1			8
Générer	5		8	4	6		**1**	24	48
Valider					2	4		1	7
Total	6	12	9	9	12	23	**2**	33	106

D'abord, il est aisé de constater qu'un nombre important de problèmes exige de l'élève une application directe de ses connaissances. Cependant, nous considérons qu'il est normal que cette catégorie soit si fortement représentée étant donné que nous y avons classé tous les problèmes où l'élève effectue des activités de traçage de figures géométriques, c'est-à-dire des activités dans lesquelles il trace un carré par exemple mais sans suivre les dictats de la construction à la règle non-graduée et au compas. Ce qui est aussi remarquable c'est que toutes les catégories et les opérations mentales sont sollicitées chez l'élève. Ce qui nous indique qu'un même niveau de validation peut se retrouver à travers différentes opérations mentales. Cependant, un plus grand échantillon de problèmes serait nécessaire afin de confirmer cette hypothèse. Néanmoins, en regardant de façon ponctuelle chacune des situations, nous observons que les catégories et les opérations mentales sont reliées aux sujets géométriques des situations. Par exemple, les situations sur les solides sont plus propices aux expériences mentales puisque plusieurs problèmes demandent à l'élève quel est le polyèdre associé à un développement. Pour répondre à une telle question, l'enfant peut faire une expérience mentale et tenter de reconstruire le polyèdre à partir du développement qui lui est fourni ou encore l'inverse. Ces résultats nous suggèrent donc que le sujet géométrique peut être une composante importante à regarder lors de la construction d'activités sollicitant des raisonnements déductifs. De plus, nous remarquons que peu de problèmes font appel aux raisonnements empirico-déductifs, ce qui nous suggère que les élèves ne sont pas invités fréquemment à mettre de l'avant leur habileté en rédaction de preuves.

Finalement, cette analyse nous permet d'identifier quels sont les types de problèmes de géométrie proposés aux élèves et il en ressort que la majorité des activités proposées sont des activités de construction de figures à la règle ou des activités de mesurage et font peu appel au raisonnement déductif.

1.8 En résumé

Nous concentrons notre recherche sur le développement du raisonnement déductif chez les élèves de troisième cycle du primaire. Par ailleurs, nous croyons en son développement à l'intérieur de l'activité de preuve en géométrie. À notre avis, cette activité mathématique qui, de manière générale, débute lors de l'enseignement secondaire pourrait se faire dès le troisième cycle de l'enseignement primaire. Plusieurs études en didactique des mathématiques ainsi qu'en psychologie appuient cette hypothèse. De plus, la rupture didactique entre l'enseignement primaire et secondaire au niveau de la preuve en géométrie étant aussi une importante cause de difficultés, une fois l'élève rendu au secondaire, nous considérons nécessaire de favoriser un pont entre les géométries pratiques et théoriques. Ayant fait une brève analyse des manuels québécois du troisième cycle du primaire, nous en sommes venue à la conclusion que peu d'activités proposées favorisaient l'initiation à la preuve et au raisonnement déductif. Ainsi, peu de problèmes permettent la transition entre les deux géométries, c'est pourquoi nous souhaitons nous pencher sur ce problème.

1.9 Questions de recherche

1-Le passage d'une géométrie pratique à une géométrie théorique est-il possible chez des élèves de 3^{e} cycle du primaire?

2-Dans quelle mesure est-il possible de favoriser le développement du raisonnement déductif chez les élèves de troisième cycle de l'enseignement primaire?

3- Quelles sont les activités permettant aux élèves de délaisser la mesure au profit de l'utilisation de la déduction dans l'activité géométrique?

CHAPITRE II: CADRE THÉORIQUE

2.1 Introduction

Nos préoccupations quant à l'initiation à la preuve nous amènent à nous pencher sur la rupture entre l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et à l'école secondaire. Nous nous intéressons particulièrement à cette question puisque nous souhaitons voir une diminution de cette rupture afin de faciliter l'apprentissage de la géométrie *théorique*. Plus précisément, nous nous intéressons aux différentes activités géométriques favorisant le passage de la géométrie *pratique* à la géométrie *théorique*. Pour spécifier notre pensée à ce sujet, nous nous intéressons aux travaux de van Hiele (1984). Ces travaux nous seront très utiles puisqu'ils décrivent les stades de l'évolution de la pensée géométrique, et ce, dès les premières étapes du développement, soit celles que l'on retrouve à l'école primaire. De plus, nous souhaitons identifier les différents paradigmes à l'intérieur desquels les élèves se situent, afin de nous aider à identifier les activités qui permettent aux élèves de délaisser la mesure pour l'utilisation de la déduction. Pour ce faire, nous portons une attention particulière aux travaux de Houdement et Kuzniak (1998-1999, 1999, 2000) quant aux paradigmes de la géométrie. Nous jumelons les approches de van Hiele avec Houdement et Kuzniak afin de pouvoir dégager des similitudes entre elles, tel que Parzysz (2002) l'a fait dans ses travaux. Ce rapprochement nous permettra de décrire les démarches des élèves en mettant en perspective le paradigme géométrique et le stade de développement de la pensée géométrique. Nous nous penchons aussi sur les rôles de la figure et du dessin dans l'activité mathématique puisque ceux-ci jouent des rôles primordiaux en géométrie élémentaire tout comme dans l'argumentation et le raisonnement de l'élève. En effet, nous souhaitons amener les élèves à remettre en cause la lecture directe sur le dessin, par conséquent il nous semble nécessaire de connaitre les rôles de la figure et du dessin. Nous avons aussi fait le choix de nous intéresser aux différentes activités géométriques par lesquelles l'élève met de l'avant ses connaissances, car nous souhaitons analyser des manuels de mathématiques québécois afin de vérifier ce qui se fait en classe en terme d'activités géométriques (voir Chapitre 1). Pour ce faire, nous avons visité les travaux de Pallascio, Allaire, et Mongeau (1993). Finalement, nous avons choisi d'inclure dans nos travaux la notion de zone proximale de développement de Vygotski. Celle-ci nous offre, dans le cadre de notre recherche, des arguments justifiant le moment et la manière de développer de la façon la plus efficiente le raisonnement déductif chez l'élève en le soumettant à des apprentissages nouveaux se situant dans sa zone proximale de développement. Tel que le mentionnent plusieurs auteurs, il semble que le meilleur moment pour favoriser le passage d'une géométrie à l'autre (Stylianides, 2005; Perrin-Glorian, 2003) se situe entre l'enseignement primaire et secondaire. En bref, nous nous intéressons aux théories suivantes;

- Les niveaux de pensée géométrique selon van Hiele.
- Les paradigmes géométriques selon Houdement et Kuzniak.
- Les paradigmes géométriques revus selon Parzysz.
- Le rôle de la figure et du dessin selon Coppé et coll.
- Les activités géométriques selon Pallascio, Allaire et Mongeau.
- La zone proximale de développement selon Vygostki.

2.2 Les niveaux de pensée géométrique selon Pierre et Dina van Hiele

Les travaux de van Hiele (1984) ont pour objectif de développer une théorie de l'apprentissage de la géométrie. La théorie développée est basée sur une progression de l'élève à travers différents niveaux de pensée en géométrie. Ce modèle prend pour point de départ la perception globale des figures géométriques faites par l'élève à ses débuts pour aller vers une compréhension des preuves formelles de géométrie. Cette évolution de la perception globale à la compréhension des preuves se fait de façon graduelle à travers différents niveaux caractéristiques importantes à connaitre par rapport à la théorie de van Hiele comme le mentionne Clements (1997). Les niveaux sont ordonnés de manière hiérarchique et pour être en mesure de fonctionner adéquatement dans l'un des niveaux, il est nécessaire d'avoir une bonne maitrise de l'ensemble des niveaux inférieurs. Le passage d'un niveau au suivant ne dépend pas de l'âge de l'élève, mais bien de l'apprentissage effectué par celui-ci. Chaque passage amène une meilleure compréhension des concepts. Par exemple, un concept compris de manière implicite à un niveau donné peut devenir explicite au niveau suivant. Finalement, chacun des niveaux possède son propre langage et certaines formulations langagières peuvent être adéquates à un niveau donné, mais se retrouver inadéquates à des niveaux supérieurs. Selon cette théorie, l'apprentissage est perçu comme étant discontinu, c'est-à-dire qu'il y aurait présence de sauts. Cependant, nous ne nous accordons pas avec l'idée que l'apprentissage se fait par bonds, en effet

> [...] il a été montré que près d'un élève sur deux pouvait se situer entre deux niveaux ou encore ne maîtriser un niveau qu'à moitié, c'est-à-dire maîtriser certaines facettes de celui-ci mais pas d'autres comme les caractéristiques figurales ou verbales d'un même niveau (Braconne-Michoux, 2008, p.41).

De plus, un élève peut se situer dans un niveau pour une tâche, mais se déplacer dans un autre niveau pour une autre tâche. C'est pourquoi nous considérons plutôt les niveaux comme un fil continu sur lequel la pensée de l'élève évolue en effectuant des allers-retours.

Il est à noter que la numération des différents niveaux de compréhension varie d'un article à l'autre dans la littérature. Dans le cas présent, nous commencerons la numération à 1 puisque ce niveau n'est pas nécessairement atteint et qu'il existe donc un état de base le précédent, que nous pourrions noter le niveau 0. Dans le niveau de base (0), qu'il est usuel d'appeler niveau de *préreconnaissance*, les élèves ne sont pas en mesure de reconnaitre les figures dans leur globalité, ils peuvent seulement en percevoir certaines caractéristiques par exemple l'usage de courbes ou de lignes droites. Ce niveau n'étant pas d'un grand intérêt pour notre travail, nous nous concentrerons sur ce qui est plus couramment reconnu comme étant les niveaux de van Hiele :

- *Niveau 1 : Perception visuelle* : Les élèves sont en mesure de reconnaitre les figures géométriques dans leur ensemble, mais il s'agit principalement d'une reconnaissance visuelle. Plus précisément, l'élève ne concentre pas ses efforts sur les propriétés de la figure, mais sur son ensemble. Par exemple, un élève peut voir que deux triangles sont semblables sans pour autant être en mesure d'en expliquer les raisons. À l'occasion, l'élève peut utiliser des attributs non pertinents pour décrire la forme d'une figure. Le jugement de l'élève sur la figure se fait à partir de son apparence et il peut être influencé par l'orientation de la figure dans l'espace. Par exemple, un carré ayant un de ses sommets pointant vers le bas pourra être identifié comme un losange.

- *Niveau 2 : Analyse des propriétés (descriptif)* : À ce niveau de pensée géométrique, l'élève identifie les propriétés et les caractéristiques des figures géométriques. Il voit les figures comme étant un ensemble de propriétés. Il est en mesure de reconnaitre les propriétés et de travailler avec ces dernières. Un élève se situant à ce niveau est apte à travailler avec des figures à main levée. Par exemple, il admet qu'un tracé soit un rectangle avec des côtés opposés de même grandeur et des angles droits même si la figure réellement tracée ne respecte pas ces propriétés. Cependant, un élève évoluant dans le niveau *Analyse des propriétés* ne fait aucun lien entre les figures et les propriétés de celles-ci. Il n'a pas développé les habiletés lui permettant de travailler sur des relations. Par exemple, il n'accepte pas que le carré soit un rectangle et ainsi de suite. De plus, ces élèves sont souvent poussés à appliquer toute une panoplie de propriétés au lieu de déterminer les propriétés essentielles à la situation.

- *Niveau 3 : Déduction informelle (Relationnel)* : Les élèves pouvant effectuer des relations entre les figures et leurs propriétés se situent dans le niveau *déduction informelle*.

> [...] students can form abstract definitions, distinguish between necessary and sufficient sets of conditions for a concept, and understand and sometimes even

> provide logical arguments in the geometry domain. (Clements, Battista, 1992, p. 427)

Ce niveau se caractérise aussi par la possibilité de rédiger des preuves informelles. Par cela, on entend que l'élève possède toutes les habiletés nécessaires à la rédaction de preuves sans utiliser le formalisme et où les preuves font appel aux propriétés, mais celles-ci peuvent être énoncées dans différents ordres sans altérer le résultat.

- *Niveau 4 : Déduction formelle*: À ce niveau, les élèves possèdent une compréhension du rôle de la déduction dans l'établissement de vérités géométriques, ainsi que de la réciproque d'un théorème. De plus, les élèves possèdent un vocabulaire riche par rapport aux lemmes, aux axiomes, etc. L'élève émet des conjectures et les vérifie fréquemment par la déduction.

- *Niveau 5 : Rigueur mathématique* : Au dernier niveau du modèle de van Hiele, l'élève est en mesure de travailler dans des systèmes mathématiques très abstraits. Par exemple, il est capable de comparer des systèmes axiomatiques entre eux.

Certains auteurs (Gutiérrez, 1992) résument les idées de ce modèle à travers seulement trois niveaux : visuel (niveau 1), descriptif (niveau 2-3) et théorique (niveau 4-5), mais nous croyons que dans le cadre de ce travail, différents niveaux vont être exploités et qu'il est préférable d'avoir plus de précision. Effectivement, nous souhaitons obtenir un portrait plus précis de la situation.

Poursuivant dans l'idée de bâtir un cadre théorique nous permettant d'analyser les réponses des élèves nous devons éliminer certains niveaux du modèle de compréhension de la géométrie. En effet, nous considérons que plusieurs niveaux ne sont pas adaptés au travail que nous désirons effectuer puisqu'ils se réfèrent à des niveaux de compréhension inaccessible pour des élèves du primaire. Pour cette raison, nous ne considérerons que les trois premiers niveaux : perception visuelle, analyse des propriétés et déduction informelle.

Les travaux de van Hiele peuvent être résumés à l'intérieur d'un tableau comme l'a fait Braconne Michoux (2008) dans sa thèse où elle reprend les travaux de Hoffer (1981).

Tableau 2.1 Modèle de van Hiele selon Braconne Michoux (2008, p.37-38)

		Niveau 1 : Identification	Niveau 2 : Analyse	Niveau 3 : Déduction informelle (classement)
Compétences	Visuelles	Reconnaît les différentes figures à partir d'une image.	**Remarque les propriétés d'une figure.** **Identifie une figure comme une partie d'une figure plus grande (reconnait les sous figures).**	Reconnait les interrelations entre différents types de figures. **Reconnaît des propriétés communes à différents types de figures.**
	Verbales	Associe le nom correct à une figure donnée.	Décrit correctement les diverses propriétés d'une figure.	Définit les mots correctement et avec concision. **Formule des phrases indiquant les interrelations entre les figures.**
	Graphiques	Fait des schémas des figures, les éléments donnés étant correctement étiquetés.	**Traduit une information verbale en une image.** Utilise des propriétés données des figures pour dessiner ou construire les figures.	Certaines figures étant données, est capable de construire d'autres figures liées aux précédentes.
	Logiques	Conçoit qu'il	Comprend que les	Comprend les qualités

		existe des différences et des ressemblances dans différents types de figures. Comprend la conservation de la forme des figures dans diverses. positions	figures peuvent être classées en différents types. Conçoit que les propriétés peuvent être utilisées pour distinguer les figures.	d'une bonne définition. Utilise les propriétés des figures pour déterminer si une classe de figures est contenue dans une autre classe.
	Appliquées (techniques)	Reconnait les formes géométriques dans différents objets.	Reconnait les propriétés géométriques des objets physiques. Peut représenter un phénomène physique sur papier ou le modéliser.	Comprend le concept d'un modèle mathématique qui représente les relations entre les objets.

Les idées soulignées en gras sont des idées qui nous semblent importantes dans le cadre de nos travaux puisqu'il s'agit d'éléments clés nous permettant lors de l'analyse des productions d'élèves de classer les productions selon les niveaux de van Hiele. Nous en traiterons plus en profondeur dans la construction de la grille d'analyse.

2.3 Les paradigmes géométriques selon Houdement et Kuzniak

Les travaux de Houdement-Kuzniak ont démystifié la confusion régnant par rapport à ce que renvoie la géométrie en tant que concept. En effet, il existe diverses interprétations de ce qu'est la géométrie et chacune d'elles ayant ses propres caractéristiques, il n'est pas aisé de s'y retrouver. Cette pluralité des interprétations d'un même concept a des effets non négligeables quant à son enseignement et aux difficultés potentielles des élèves. Pour mieux expliquer cette diversité, Houdement et Kuzniak ont développé un cadre conceptuel dans lequel ils mettent en perspective trois paradigmes de la géométrie (*géométrie naturelle, géométrie axiomatique naturelle et géométrie axiomatique formaliste*). Les chercheurs ont basé leur réflexion sur deux hypothèses :

> HYP1 : La première est que des paradigmes différents et cohérents sont englobés sous le terme unique de géométrie. L'existence de ces différents paradigmes explique en partie la rupture que l'on rencontre dans l'enseignement, entre école et collège, puis entre collège et lycée[2].
> HYP2 : La seconde suppose qu'étudiants (des IUFM[3]), enseignants et élèves de l'école primaire se situent implicitement dans des paradigmes différents et que ce fait est une source de malentendu pédagogique. (Houdement, Kuzniak, 1999, p.285)

Ces hypothèses nous ramènent à cette difficulté causée par la rupture entre deux géométrie. D'un côté, on retrouve une géométrie *pratique* à l'école primaire et de une géométrie *théorique* à l'école secondaire. Afin de clarifier cette rupture et de l'expliquer à l'aide d'un modèle, les auteurs ont bâti un cadre conceptuel. Le cadre conceptuel développé a pour objectif de créer un espace à l'intérieur duquel les raisonnements peuvent prendre forme, et ce, qu'ils soient de nature physique ou de nature théorique (Houdement, 2007). Pour bien comprendre ces espaces et ces paradigmes, il est préférable de les analyser à travers trois modes de pensée jouant des rôles clés dans ces paradigmes.

---

[2] En France, le système éducatif débute par la maternelle de 3 à 6 ans, (petite, moyenne et grande section), ensuite il y a l'école élémentaire avec le CP (6-7 ans), le CE1(7-8 ans), le CE2 (8-9 ans), le CM1 (9-10 ans) et le CM2 (10-11 ans). Le Collège vient par la suite et les classes vont dans cet ordre 6^{e}, 5^{e}, 4^{e} et 3^{e}. Une fois le brevet atteint en 3^{e}, les étudiants peuvent poursuivre au lycée.

[3] IUFM : Instituts Universitaires de Formation des Maîtres

2.4 Les modes de pensée

2.4.1 L'intuition

Le premier mode sur lequel l'analyse de Houdement (2007) s'est penchée est l'*intuition*. On décrit l'intuition comme étant ce qui permet de dégager une première théorie relativement à une représentation, une explication ou une interprétation qui semblent évidentes à l'individu. L'intuition est directe et immédiate, mais elle peut aussi évoluer dans la mesure où l'intuition d'un individu peut être vue comme une superposition d'idées modelées par les expériences passées (Houdement et Kuzniak, 1998-1999). Ainsi, l'intuition est différente d'un individu à l'autre bien que certaines couches de la superposition soient communes à tous les individus. Il est possible de s'imaginer l'intuition comme un ensemble de strates se superposant, permettant une nouvelle intuition à chaque strate, ce qui laisse de côté les intuitions antécédentes.

2.4.2 L'expérience

Le deuxième mode de pensée est celui de l'*expérience*, dans ce cas-ci l'expérience est prise au sens large, afin d'y inclure l'expérience physique et l'expérience mentale. L'expérience physique, c'est entre autres lorsque l'on manipule des objets par pliage, découpage, traçage, etc. pour vérifier manuellement des hypothèses. Par exemple, il peut s'agir de vérifier qu'un triangle est équilatéral en mesurant ses côtés. Il est à noter que les expériences physiques classiques ne sont pas les seules expériences physiques puisque l'utilisation de logiciels de géométrie tels Cabri-géomètre permet aussi des expérimentations physiques. Dans ce cas, on peut parler de simulation géométrique afin de décrire l'action effectuée sur les objets par le sujet.

De plus, Houdement considère aussi les expériences mentales. Celles-ci réfèrent aux expériences qui ne sont pas concrètement réalisées sur les objets, mais qui ont été effectuées mentalement. Par exemple, il n'est pas nécessaire de véritablement déplacer une figure par translation, si l'individu imagine mentalement ce déplacement, il s'agit tout de même de l'expérience au sens de Houdement.

2.4.3 La déduction

Le dernier mode de pensée pris en compte est la déduction. Pour ce cadre conceptuel, la déduction est considérée de la façon suivante :

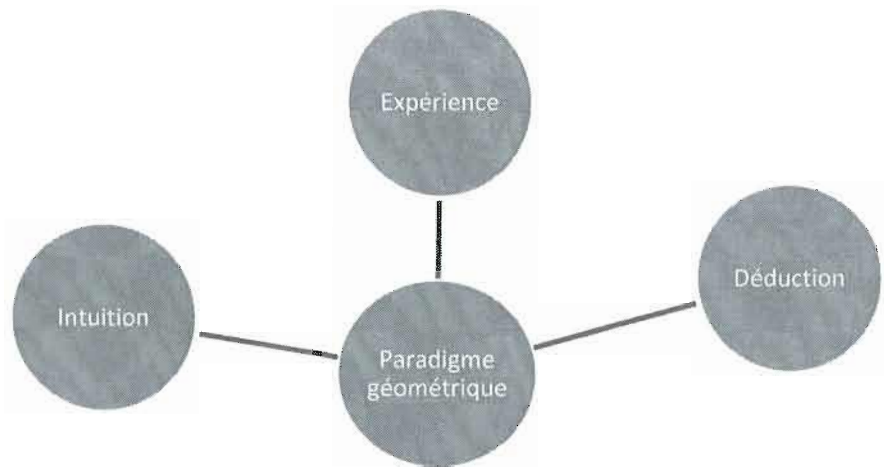
> [..] sous une forme plus universelle en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, le raisonnement déductif consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure. (Houdement et Kuzniak, 2006, p.180)

Selon cette définition, le raisonnement déductif n'est pas restreint à la démonstration. On peut dire qu'un élève fait preuve de déduction s'il arrive à un nouvel énoncé à la suite de ses observations en se basant sur ses constructions ou sur une expérience (Houdement et Kuzniak, 1998-1999). Ainsi, les figures obtenues par construction, par exemple, peuvent être des assises pour le raisonnement déductif de l'élève sans toutefois être la preuve en soi.

2.4.4 Conclusion sur les modes de pensée

La géométrie doit contenir les trois pôles : *intuition*, *expérience* et *déduction* afin d'offrir une vision unie. Chacun des paradigmes de la géométrie présente les trois pôles, mais le rôle et l'importance de chacun d'eux diffère selon le paradigme. Cependant, il est nécessaire que ces trois pôles coexistent dans l'activité géométrique.

Figue 2.1 Les modes de pensée de la géométrie selon Houdement et Kuzniak



2.5 Les paradigmes

Selon les travaux de Houdement et Kuzniak, il existe trois paradigmes de la géométrie à travers lesquels les modes de pensée se développent et interagissent de façon différente. Chaque pôle joue un rôle distinct en fonction du paradigme dans lequel l'activité géométrique se déroule. Il est à noter que les trois paradigmes ne sont pas hiérarchisés, dans le sens où ils permettent tous les trois de résoudre des problèmes de géométrie de façon convenable et efficace. L'un n'étant pas meilleur que l'autre, leur utilisation dépend du contexte de résolution dans lequel il s'inscrit.

2.5.1 Géométrie I (géométrie naturelle)

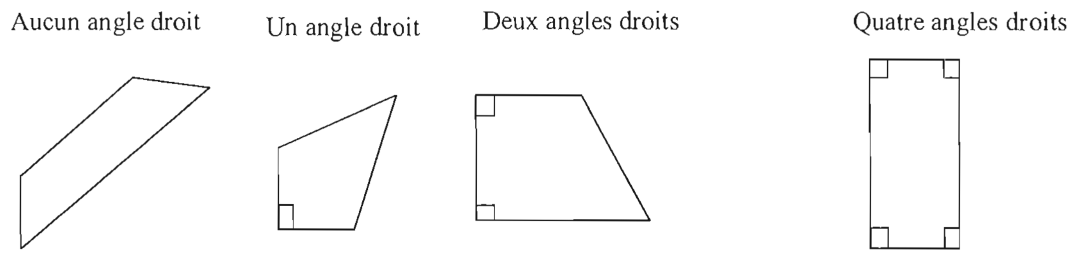
Le premier paradigme est celui de la *géométrie I* que l'on nomme aussi *géométrie naturelle*. Ce premier paradigme de la géométrie est qualifié de *naturel*, car son lien avec la réalité est très fort. En effet, sa source de validation se trouve dans la réalité, il est très lié au monde sensible. La pensée est effectuée sur des objets matériels, par exemple des dessins, des maquettes, des objets de l'environnement ou plus récemment des traces virtuelles obtenues à partir de logiciel de géométrie. Cependant, il y a tout de même un premier pas de franchi vers l'abstraction dans la mesure où les objets étudiés sont schématisés et que le travail effectué se fait sur certaines caractéristiques de l'objet à l'étude. Par exemple, on ne tiendra pas compte des irrégularités du trait dans le tracé d'une ligne droite ou d'un cercle. « Dans ce paradigme, le dessin est objet d'étude et de validation, les traitements moins théoriques (liés à la perception, au contrôle par les instruments) retrouvent un statut géométrique. Ils ne sont ni péjorés ni rejetés. » (Houdement, 2006).

Les trois modes de pensée soient l'*intuition*, l'*expérience* et le *raisonnement déductif* s'effectuent à partir de perceptions ou d'expériences réelles faites sur les objets à l'étude. La reconnaissance à partir des perceptions est très présente et l'accès au problème se fait à partir de l'intuition suite à la reconnaissance perceptive des dessins. L'*expérience* y est présente sous forme d'expériences reliées aux instruments de la géométrie. En fait, dans ce paradigme l'expérience usuelle est celle du dessin instrumenté, ce qui fait des instruments tels que la règle graduée ou non, l'équerre, le compas et le rapporteur d'angles des outils de prédilection dans ce paradigme. Par contre, tous les problèmes de *Géométrie I* ne se résument pas à des problèmes de traçage avec la mesure, il existe aussi une série d'exercices sans mesure par exemple les activités classiques sur la somme des angles intérieurs d'un triangle par pliage. Il est à noter que la déduction est aussi présente dans ce paradigme et s'exerce principalement à partir de la perception ou de la manipulation des objets géométriques en jeu. La validation se fait à partir de connaissances empiriques issues de l'expérience et de l'intuition, mais desquelles on déduit de nouvelles connaissances.

Exemple : Observe cette suite de quadrilatères.

a) À l'aide d'un rapporteur, mesure tous les angles des quadrilatères ci-dessous.

b) Quelle régularité observes-tu?

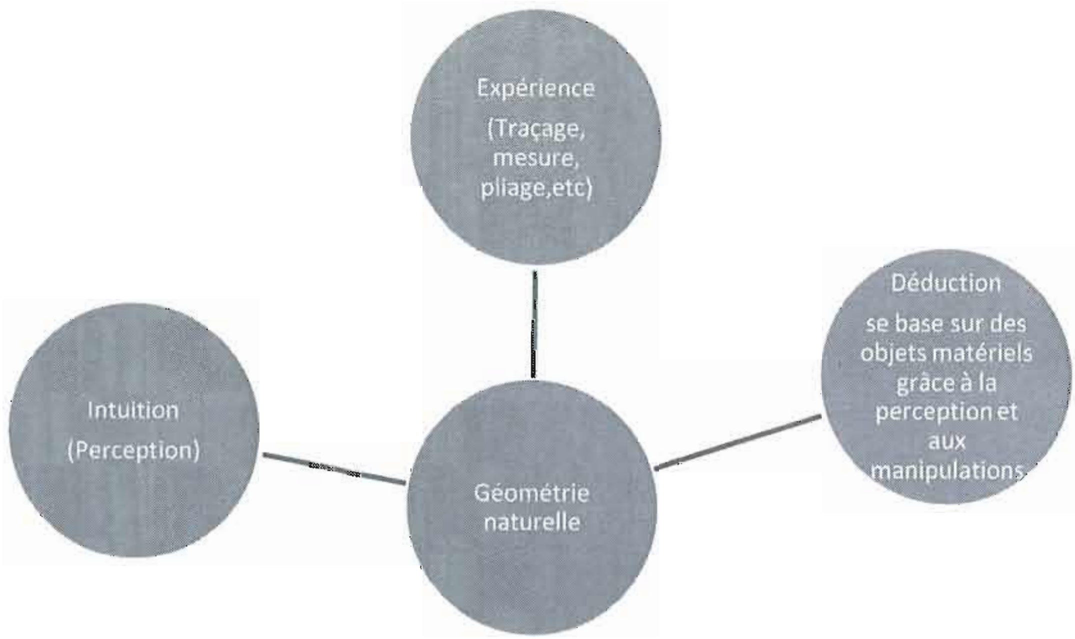


(Guay, Hamel et Lemay, 2003, p.99)

Cet exemple illustre bien la géométrie naturelle. En effet, la déduction de l'élève va se faire à partir de ce qu'il va obtenir à l'aide de son rapporteur d'angles. Son intuition, pour sa part, lui a permis d'appréhender les figures avec la vue et d'en faire un premier classement mentalement. Tandis que l'expérience s'est faite avec la mesure prise à l'aide du rapporteur d'angles.

Les trois pôles de la géométrie naturelle peuvent être représentés dans le schéma ci-dessous dans lequel on observe un équilibre, c'est-à-dire la présence à force égale de chacun des pôles.

Figure 2.2 Les trois pôles de la géométrie I



2.5.2 Géométrie II (géométrie axiomatique naturelle)

Le deuxième paradigme est celui de la *géométrie II* ou *géométrie axiomatique naturelle*. Ce paradigme se distingue du premier, car son lien avec la réalité est amoindri. Effectivement, il y a déjà un effort d'axiomatisation de la réalité, un certain détachement. Le système axiomatique doit être le plus précis possible, mais ce dernier est tout de même organisé pour refléter la réalité et l'espace spatial. Les problèmes rencontrés font toujours référence à la réalité, mais ils sont travaillés à partir d'axiomes. Cette géométrie n'est pas une géométrie de la réalité, elle est plutôt une schématisation de cette réalité. Contrairement à la *géométrie naturelle*, la source de validation n'est pas le sensible, mais l'hypothéticodéductif. Le dessin n'est utilisé que comme une interprétation particulière de l'objet à l'étude. Toutes les conclusions tirées à partir du dessin doivent être contrôlées grâce aux définitions et aux théorèmes ainsi que par le raisonnement hypothéticodéductif. La démonstration est le mode de validation et de production associée à cette géométrie. Les objets de ce paradigme sont des théorèmes, des définitions; c'est pourquoi les problèmes de cette géométrie sont des problèmes formulés sous forme de texte. Les schémas y servent à représenter le texte, mais ne constituent pas l'objet d'étude.

Les instruments de ce paradigme y sont plutôt intellectuels. Plus précisément, l'instrument principal est le raisonnement hypothéticodéductif. Évidemment, on peut y retrouver le compas et la règle non graduée, mais ils ne s'y trouvent pas en tant qu'instrument de validation.

L'intuition et l'expérience jouent encore un rôle, mais leur place y est moins importante que celle du raisonnement déductif. En effet, l'intuition laisse sa place à la déduction. Les objets d'étude de cette géométrie sont des objets idéels, c'est-à-dire, qui proviennent des idées; ce sont les définitions et les théorèmes. « Mais ces objets textuels sont conventionnellement, par commodité [...] représentés par des schémas, à la "texture" identique aux dessins de la Géométrie I, mais sur lesquels le "regard" (la théorie, le paradigme) doit changer [...] » (Houdement, 2007, p.73). Dans ce paradigme géométrique,

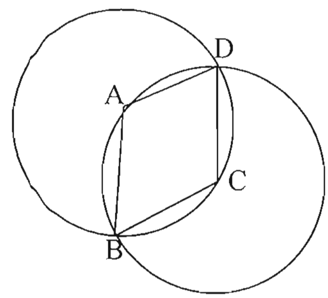
> Les objets ne sont déjà plus aussi uniques que leurs traces matérielles : ils sont déjà le fruit d'une première classification, par le choix des mots [...] Ce sont déjà pour certains en partie des *objets mentaux* : un trait droit sur le papier, s'il est nommé droite, doit être pensé comme un rectiligne droit illimité, infini... » (Houdement, 2007, p.73).

Cependant, comme le souligne Parzysz : « La perception est encore présente, mais elle est censée servir uniquement à construire une théorie de l'espace perçu, et non plus – tout au moins en principe — à appuyer une argumentation (même si les *on voit que* contredisent de facto cette remarque). » (Parzysz, 2001, p.101)

Exemple : Dans la figure ci-contre, le point A et le point C sont les centres de deux cercles de même *rayon*.

Selon toi, le quadrilatère **ABCD** est-il un losange?

Trouve de bons arguments pour convaincre un ou une camarade que tu as raison.



(Guay, Hamel, et Lemay, 2003, p.99)

On place cet exemple, dans le paradigme de la géométrie II si la résolution souhaitée (utilisant l'argument que les côtés du quadrilatère sont tous des rayons du cercle) est obtenue. Le pôle de l'intuition est développé puisque suite à la lecture de la question, une première idée est faite. Par exemple : *Je crois que le quadrilatère est un losange.* Ensuite, le pôle de l'expérience joue aussi un rôle : *qu'est-ce qui se passerait si je traçais cette figure, comment je bougerais mon compas, etc.* L'élève peut faire référence à ses expériences passées, ou encore tracer la figure, etc. Du côté du pôle de la déduction, l'élève utilise les propriétés du cercle et du losange pour obtenir la solution.

2.5.3 Géométrie III (géométrie axiomatique formaliste)

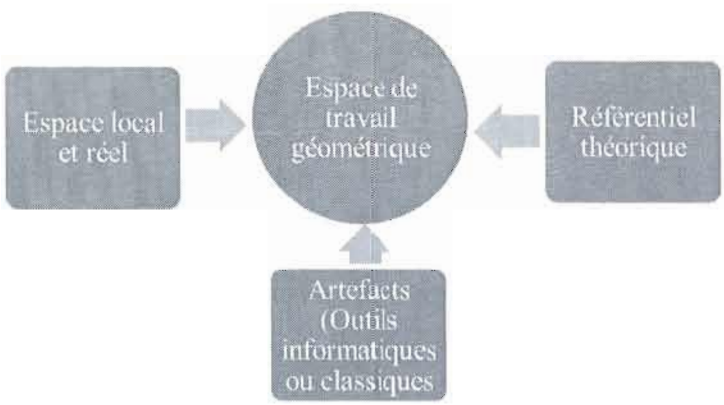
Le paradigme de la *géométrie III* ou appelé *géométrie axiomatique formaliste* est très différent des deux précédents, car il n'entretient pas de lien apparent avec le réel. Par exemple, la géométrie III peut s'appliquer aux géométries non euclidiennes. La source de validation est basée sur le raisonnement logique et aucune place n'est laissée pour les validations basées sur le sensible et les perceptions. Dans le cadre de ce paradigme, le dessin ne représente qu'une relation entre des objets conceptuels.

2.6 Espace de travail géométrique

Grâce à ces différents paradigmes, il est possible d'expliquer certaines difficultés rencontrées lors de l'enseignement de la géométrie. Par exemple, il est fréquent qu'un élève résolve un problème en utilisant ses instruments de mesure, et ce, malgré que la réponse attendue par l'enseignement soit basée sur le raisonnement hypothéticodéductif. Cette situation s'explique aisément à l'aide du cadre de Houdement. L'élève se situe dans un paradigme de *géométrie naturelle* tandis que l'enseignant souhaite une réponse se situant plutôt dans le paradigme de la *géométrie axiomatique naturelle.* Afin d'expliquer plus en profondeur ces divergences entre élève et enseignant, un autre outil est mis à notre disposition par les travaux de Houdement : l'*espace de travail géométrique.* Ce cadre définit des espaces dans lesquels chacun des raisonnements peut exister, qu'il soit de nature pratique ou théorique. On peut interpréter le vocable *Espace de travail géométrique* dans le sens d'espace de pensée lors d'activités géométriques. Cet *espace de travail géométrique* a trois composantes distinctes et est modulé par leurs interactions.

Nous reprenons le schéma des travaux de Houdement (2007) afin d'illustrer les trois composantes :

Figure 2.3 Espace de travail géométrique selon Houdement (2007, p.79)



L'*espace local et réel* est constitué des objets à l'étude dans la géométrie et c'est sur ce dernier que l'acteur agit. Par exemple, il peut s'agir d'objets réels tels qu'une figure ou d'objets idéels tels des ensembles de points pour définir une droite.

Les *artéfacts* sont les outils ou les instruments pouvant être utilisés dans la géométrie. Ils constituent la partie la plus visible pour les élèves. On retrouve deux familles d'artéfacts en géométrie, dans un premier temps les instruments géométriques (règle graduée ou non, équerre, compas, rapporteur d'angles, calques, etc.) et dans un deuxième temps les règles théoriques de l'hypothéticodéductif (implication, équivalence, négation, etc.). Ces *artéfacts* vont être utilisés suivant le paradigme dans lequel on se situe. Cependant, un même *artéfact* peut avoir deux fonctions distinctes dans les deux géométries (Houdement, 2007). Par exemple, la règle peut servir lors de la validation en géométrie I, tandis qu'il est simplement un instrument de traçage en géométrie II et ne s'insère pas dans la validation.

Le *référentiel théorique* est un référentiel de connaissances et de savoirs organisé que l'on nomme aussi *horizon de rationalité.*
Les espaces de travail diffèrent selon le paradigme géométrique à l'intérieur duquel le problème est résolu. Voici des espaces de travail pour les géométries naturelle et axiomatique

naturelle. Ne considérant pas la géométrie axiomatique formelle dans notre travail, nous n'irons pas plus loin dans ce paradigme.

Figure 2.4 Espace de travail en géométrie I inspiré des travaux de Houdement (2007)

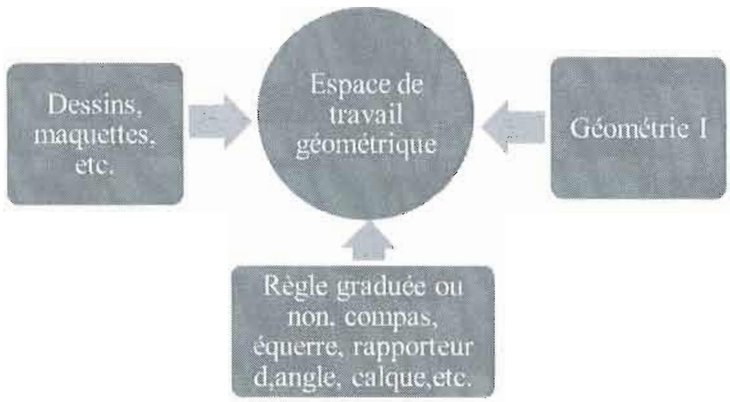
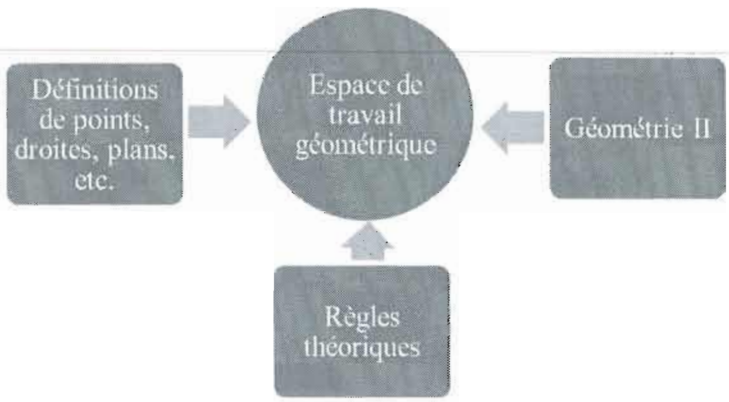


Figure 2.5 Espace de travail en géométrie II inspiré des travaux de Houdement (2007)



Chacune des composantes de l'espace de travail géométrique est utilisée et définie de façon différente selon le paradigme à l'intérieur duquel on est situé. Par exemple, dans le cas de la *géométrie naturelle*, les pôles *Artefacts* et *Espace local et réel* prédominent sur celui de *Référentiel théorique*. Effectivement, les deux premiers pôles constituent la partie empirique de l'espace de travail géométrique et dans cette géométrie le caractère empirique occupe une place importante. De son côté, le pôle *Référentiel théorique* est faiblement développé et il est constitué principalement de définitions basées sur le sensible. Les définitions de ce référentiel ne correspondent pas exactement aux définitions formelles de la géométrie. Par exemple, «deux droites sont parallèles si elles ne se touchent jamais» est une définition issue du sensible.

Pour ce qui est de la *géométrie II*, les deux pôles empiriques sont encore présents, cependant leur contenu se distingue de celui de la *géométrie I*. Dans le cas du premier paradigme, les artéfacts constituent les instruments géométriques usuels : règle graduée, rapporteur d'angles, compas, etc. La mesure joue un rôle important. Cependant, pour le deuxième paradigme la règle n'est pas graduée et la précision dans la construction des objets étudiés n'est plus tellement importante. Le travail pourrait très bien se faire à partir de dessin à main levée puisqu'on se concentre sur les propriétés et non sur l'objet. De plus, lorsqu'une construction est de mise, celle-ci est souvent faite à la règle non graduée et au compas en s'appuyant sur les propriétés et les définitions.

2.7 Les conséquences

Une des difficultés en géométrie à l'école élémentaire est que l'activité de résolution ne se situe pas toujours à l'intérieur d'un paradigme homogène et que la formulation du problème induit sur le paradigme dans lequel le lecteur se plonge (Houdement et Kuzniak, 1999). Parfois, le problème est posé en géométrie I, mais la solution attendue est plutôt en géométrie II ce qui crée une confusion et une incohérence pour l'acteur. En voici un exemple tiré des travaux de Houdement (2007).

> **Exemple :** Tracez à la règle et au compas un triangle T dont les longueurs des côtés mesurent en cm : 3, 5 et 7. Est-ce un triangle rectangle? Justifiez.

Cet exemple montre très bien l'ambigüité entre les deux géométries. Dans un premier temps, l'élève doit tracer le triangle comme demandé. Ceci implique qu'il se place en Géométrie I, en faisant appel aux outils de géométrie et le travail s'effectue concrètement sur l'objet, soit le tracé du triangle. Cependant, lors de la justification la demande n'est pas explicite. La justification doit-elle se faire à partir du dessin ; en validation empirique? Ou plutôt en faisant appel à des propriétés donc en se situant en géométrie II? Dans les deux cas, les réponses obtenues sont valides en fonction de la réponse attendue. Le dessin est-il censé être une aide à la justification ou le mode de production de cette justification? Dans ce cas-ci, l'expert ne sait pas quelle réponse est attendue, et il en sera de même pour l'élève débutant.

Selon Houdement (2007), les *espaces de travail géométriques* des élèves n'intègrent pas suffisamment la géométrie II. Les élèves sont en géométrie I et le passage à la géométrie II ne se fait pas aisément puisqu'ils n'ont pas saisi le sens donné au dessin dans ce paradigme, c'est-à-dire que son recours lors de la validation est prescrit. Il y a donc un travail à faire quant à la coexistence de différents *espaces de travail géométrique*.

Certaines productions d'élèves représentent des erreurs de cohérence parce qu'elles sont ce que l'on peut considérer comme des solutions mixtes (Houdement et Kuzniak, 1999). Plus précisément, on fait référence aux solutions où une certaine partie est résolue directement sur la figure, par exemple en se basant sur des perceptions ou l'utilisation d'instruments géométriques tandis que d'autres parties sont résolues à partir de la déduction et des propriétés de la géométrie. Selon les auteurs, ces solutions mixtes seraient le reflet du malaise des élèves à se situer dans un paradigme géométrique.

Afin de résumer les théories de Houdement et Kuzniak, voici un tableau reprenant les grandes lignes reprises de la présentation à EMF 2009 et de leurs travaux de 1998-1999 que nous avons ajusté aux besoins de la présente recherche.

Tableau 2.2 Les paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak

	Géométrie naturelle	Géométrie axiomatique naturelle
Objet d'étude	Matériel	Conceptuel
Techniques	Dessin instrumenté	Inférence de conjecture validation par déduction logique
Modes de validation	Références au réel	Références logiques
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Liée à un schéma de la réalité
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Outil pour chercher, conjecturer, support du raisonnement
Aspect privilégié	Évidence et construction	Propriétés et démonstration
Mesurage	Accepté et producteur de connaissances	Non accepté pour la production de connaissance, accepté pour l'heuristique
Preuve	Évidence, contrôle par des instruments ou construction efficace avec raisonnement	Axiomatisation partielle, propriétés, théorèmes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physio-géométrique

2.8 Les paradigmes géométriques revus selon Parzysz

Nous avons choisi de prendre en considération les idées avancées par Parzysz concernant les travaux de van Hiele et de l'équipe Houdement-Kuzniak. En effet, ce dernier a repris les travaux de ces deux duos pour ensuite en faire une synthèse afin d'obtenir un cadre plus précis de la géométrie élémentaire. Pour ce faire, il a débuté en s'appuyant sur les travaux de Henry (1999). Il retient de cet auteur les trois types de rapports à l'espace dans l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie.

i) la situation concrète;

ii) une première modélisation, consistant en « l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants. [...] la description qui en découle est alors une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié. » (Henry, p.28)

iii) une mathématisation, qui s'opère à partir du modèle précédent.

La différence que l'on observe entre le modèle Houdement-Kuzniak et ce nouveau modèle tient du fait que dans le modèle d'Henry, la première modélisation ne vient pas nécessairement avec l'axiomatisation. Cette dernière n'est pas essentielle et il est possible de modéliser sans avoir une pensée axiomatique bien que la pensée soit dirigée par un regard théorique. C'est pourquoi le vocable *axiomatique* est délaissé dans cette nouvelle théorie. Il s'agirait donc d'un nouveau niveau que l'on pourrait dire *intermédiaire* se situant entre la géométrie 1 et la géométrie 2. Pour Parzysz, cette première modélisation correspond en fait au niveau 3 de l'échelle de van Hiele (*déduction informelle*). La première modélisation de Henry semble en adéquation avec la géométrie 1 au sens où l'élève se situe dans une géométrie concrète dont les objets sont des objets physiques et manipulables. Il est possible que l'élève porte son attention sur des propriétés, mais le travail se fait tout de même dans l'espace réel et la validation aussi.

Afin d'illustrer ses idées, nous reprenons son tableau présenté dans les Actes du XXVIIIe colloque de la COPIRELEM en 2001.

Tableau 2.3 Les paradigmes géométriques selon Parzysz (2001, p. 101)

	Géométries non axiomatiques		Géométries axiomatiques	
Type de géométrie	**Géométrie concrète (G0)**	**Géométrie spatiographique (G1)**	**Géométrie protoaxiomatique (G2)**	**Géométrie axiomatique (G3)**
Objets	Physiques		Théoriques	
Validations	Perceptives (ou instrumentées)		Déductives	
Van Hiele	Niveau 0	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4

La théorie élaborée par Parzysz repose sur deux éléments principaux, soit la nature des objets physiques en jeu (physique ou théorique) et les modes de validation (perceptif ou logico-déductif). En se concentrant sur ces éléments, il a pu ordonner les idées des chercheurs pour obtenir le tableau précédent.

En reprenant les travaux sur les niveaux d'apprentissage de la géométrie, on peut entrevoir que les niveaux 0 et 1 de l'échelle de van Hiele correspondent à de la géométrie *pratique*, donc non axiomatique; tandis que les niveaux 3 et 4 sont pour leur part de la géométrie axiomatique. Il reste donc à situer le niveau 2. Pour Parzysz, le niveau 2

> [...] constitue en quelque sorte le niveau-charnière entre ces deux types de géométries, dans lequel la théorie est en train de se mettre en place chez l'élève – principalement sous l'effet de l'éducation —, en se construisant contre la perception, jusque-là acceptée (Parzysz, 2001, p.100).

De plus, un changement au niveau du nom donné aux géométries a été nécessaire pour respecter ses idées. En effet, on distingue tout d'abord la *géométrie concrète* (géométrie 0), ensuite il y a la *géométrie spatiographique* (géométrie 1) qui est une géométrie s'appuyant sur les situations concrètes, mais qui ont été idéalisées. Plus précisément la *géométrie spatiographique* épurent les situations concrètes pour n'en garder que certaines caractéristiques nécessaires à la réalisation d'une tâche donnée. Les deux autres géométries sont dites axiomatiques. Cependant dans le cas de la *géométrie protoaxiomatique* (géométrie 2) l'axiomatisation n'est pas explicitée comme elle l'est dans le cas de la *géométrie axiomatique* (géométrie 3). C'est pourquoi il a délaissé le terme géométrie axiomatique naturelle.

Un autre aspect de la théorie de Parzysz est que celle-ci permet de mettre en lumière les difficultés pour les élèves à différencier ce qui se situe en géométrie 1 et ce qui se situe en géométrie 2. En géométrie 1, les objets en jeu sont matériels (maquettes, cartons, pailles, dessins, etc.) et les propriétés sont observées sur ces objets et elles peuvent être vérifiées à l'aide de différentes techniques telles que, la comparaison, la mesure, la translation, etc. La précision dans la construction des figures est essentielle pour que l'élève accepte les propriétés. On se situe donc dans le niveau 1 de van Hiele (*Identification*).

En géométrie 2, on observe un détachement par rapport à l'objet concret. Les objets en jeu sont des concepts qui peuvent être représentés à l'aide d'objets, mais sur lesquels on travaille plutôt à l'aide des propriétés. L'objet réel est plutôt une représentation de l'objet en jeu. Pour bien distinguer les deux niveaux, Parzyzs précise :

> On pourrait ici parler, comme pour l'interprétation d'un texte, parler de *premier degré* : un dessin peut être considéré au premier degré (G1) ou au second degré (G2) c'est-à-dire comme ne représentant que lui-même (en tant qu'objet physique localisé dans l'espace et alors *un carré posé sur sa pointe* n'est pas un carré, mais un losange là on est exactement au niveau d'identification) ou comme représentant un objet géométrique (abstrait), comme l'objet *triangle équilatéral* (Parzysz, 2001, p. 103).

Ainsi, on comprend que le rapport au dessin est différent en géométrie spatiographique et en géométrie protoaxiomatique, tout comme dans les travaux de Houdement et Kuzniak. La confusion pour les élèves de se positionner dans un seul paradigme provient aussi du fait, que lorsqu'il tente de résoudre un problème de géométrie 2 sur des triangles par exemple, l'élève est parfois appelé à faire appel à la géométrie 1 et à effectuer des allers-retours entre les deux selon la tâche demandée. L'expert est en mesure de faire ces transitions tout en sachant dans quel registre se trouve l'objet de son travail, mais l'élève confond les objets et passe de la géométrie 2 à la géométrie 1 sans en prendre pleinement conscience. Il en va de même aussi lorsqu'il perçoit une propriété par perception en géométrie 1 et la transfère en géométrie 2. Il s'agit là de ce que Parzysz appelle *la contamination du su par le perçu.*

2.9 Le rôle de la figure et du dessin selon Coppé et coll.

Puisque la figure et le dessin jouent un rôle important en géométrie, nous nous sommes penchés sur ces derniers. Comme le mentionnent Coppé, Dorier et Moreau (2005), il est connu que le passage de la géométrie *pratique* à la géométrie *théorique* nécessite un changement de regard sur les dessins, plus particulièrement l'articulation entre dessin et figure.

En effet, la géométrie de l'école primaire est une géométrie très axée sur les figures et les représentations visuelles y jouent un rôle important. Les élèves travaillent fréquemment directement sur celles-ci. Cependant, le rôle de la figure est-il le même pour l'enseignant et l'élève? Les études en didactique des mathématiques indiquent que les représentations visuelles sont utilisées de façon différente en vue d'objectif distinct de la part des enseignants et des élèves. Pour tenter de répondre à cette question, nous reprenons les travaux de Coppé, Dorier et Moreau (2005) sur les différents dessins en géométrie à l'école primaire. Ces auteurs se sont penchés sur les types de dessins que les élèves rencontrent dans les manuels scolaires lors des activités de géométrie en classe de 5e en France.

2.9.1 Les différents dessins

Avant de définir les différents rôles des dessins dans l'activité géométrique, nous souhaitons spécifier les types de dessin que l'on est susceptible de rencontrer dans les manuels du primaire et ce que l'on désigne par ce vocable. Selon Coppé et coll., le *dessin* est une trace matérielle sur papier, peu importe ce qui est représenté.

Dans le cadre de leurs travaux, les auteurs ont établi une typologie des dessins d'entrée, c'est-à-dire ceux que rencontre l'élève dans les manuels scolaires en géométrie. Ils ont voulu différencier les dessins représentant des situations particulières de ceux représentant des figures caractérisées par des propriétés. Selon les auteurs, il s'agit d'un élément essentiel du contrat didactique, plus précisément la distinction entre le cas particulier et le cas générique. Voici les différents types de dessins répertoriés dans leur étude :

1. Dessin fait à la règle selon les vraies grandeurs.
2. Dessin fait à la règle représentant un objet précis. La description des mesures peut être faite sur le dessin ou sous forme de texte, mais le dessin ne respecte pas ces mesures même si les autres propriétés sont respectées.
3. Dessin fait à la règle respectant toutes les mesures et les propriétés sans toutefois qu'il y ait codage, c'est-à-dire sans que les mesures soient indiquées. Ce dessin représente tout un ensemble d'objets et non pas un objet précis.
4. Dessin à main levée dont les traits ne sont pas droits et précis, il est fait sans instruments de géométrie. Cependant, les sommets et les mesures sont indiqués.
5. Dessin explicitement désigné comme faux. Le dessin est fait à l'aide d'instruments de géométrie, mais ne respecte pas soit les mesures, soit les propriétés ou les deux. Les mesures peuvent être indiquées ou non sur le dessin.

2.9.2 Les rôles du dessin

Les auteurs sont d'avis qu'il y a bel et bien deux géométries différentes et que le saut de l'une à l'autre n'est pas aisé, ni pour les élèves, ni pour les enseignants. En effet,

> [...] la difficulté d'enseignement est également importante puisqu'il s'agit d'amener les élèves à changer de rapport institutionnel aux objets géométriques par de nouvelles exigences, en ce qui concerne les types et les niveaux de justifications et de preuve, et en ce qui concerne le rôle et le statut des dessins rencontrés ou produits » (Coppé, Dorier et Moreau, 2005, p.9).

Leurs études se déroulant en France, ils identifient un saut d'une géométrie à l'autre lors de la transition entre les classes de 6e (10-11 ans) et de 4e (12-13 ans) du collège. Cependant, nous faisons l'hypothèse que ces résultats peuvent s'appliquer à l'école québécoise lors de la transition primaire-secondaire. Plus précisément, la géométrie au troisième cycle de l'école primaire est une géométrie *pratique* qui se caractérise par l'utilisation de l'expérience et de l'intuition comme le décrivent Houdement et Kuzniak (2000). Les activités usuellement sont la description, la reproduction ou la construction de figures. L'utilisation des instruments de dessin et de mesure y est largement répandue. Selon les auteurs, les dessins utilisés pour l'activité géométrique dans ces classes ont un statut d'objet matériel. En se penchant plus sur le rôle des dessins dans les tâches soumises aux élèves de l'école primaire, ils ont observé que le dessin est un objet matériel unique et qu'à lui seul il valide un résultat puisqu'à partir de ce dernier on peut faire des observations. Le résultat obtenu par l'élève est alors valable pour ce dessin seulement.

Cependant, rendu en classe de 5e (11-12 ans) , l'argumentation de l'élève est basée sur le dessin, mais celui-ci est perçu comme une figure caractérisée par des propriétés. Il y a une forme de généralisation comparativement au travail que l'élève faisait en classe de 6e (10-11 ans). Finalement, en classe de 4e (12-13 ans), la démonstration se fait à l'aide des propriétés et souvent par l'utilisation de la forme *si... alors*. Dans ce dernier cas, le travail sur la figure se restreint à la découverte et non à la justification.

Il est à noter que ces trois niveaux de réponses peuvent être obtenus pour un même problème tout dépendant du niveau de l'élève. Ce qui nous ramène aux différents paradigmes de la géométrie de Houdement et Kuzniak et aux difficultés des élèves à s'y retrouver.

> [...] l'évolution au cours de la scolarité du contrat didactique sur un même objet, qui modifie de façon importante le rapport de l'élève aux objets de la géométrie. Or ces modifications qui portent avant tout sur les exigences d'argumentation posent souvent problème à certains élèves, et ce, même si des éléments du contrat sont explicités. (Coppé, Dorier et Moreau, 2005, p.11)

2.9.3 Les difficultés causées par les dessins

Le dessin semble jouer un double rôle en géométrie chez les élèves. D'une part, il peut être un renforcement à l'argumentation. Par exemple, il permet d'illustrer une propriété et de représenter la figure qui nous intéresse. D'autre part, il peut être une cause de blocage du raisonnement de l'élève due à l'évidence du résultat par l'observation du dessin. C'est pourquoi nous croyons que le dessin doit être utilisé avec prudence lors des activités avec les élèves, et plus fortement encore lorsqu'il s'agit d'initiation à l'activité de preuve. L'une des possibilités pour faire face à cette difficulté serait d'éliminer le dessin des activités d'initiation à la preuve. Cependant, Arsac (1999) a montré que cette voie n'était pas efficace. Dans ce cas, comment faire comprendre aux élèves qu'ils doivent raisonner à partir du dessin et non, observer ce dernier?

Une autre voie envisageable afin que les élèves délaissent l'observation est la formulation des consignes (quelle règle te permet d'affirmer que...?, etc.) ou encore l'utilisation de dessins à main levée et de dessins faux. Cette approche demande explicitement à l'élève d'utiliser le raisonnement déductif pour répondre à la question. Ce type d'approche doit, à notre avis, être complémenté par une prise de conscience de l'élève du rôle des figures et du raisonnement déductif dans l'activité de preuves en géométrie.

Les auteurs sont d'avis que « [...] les dessins à main levée sont des objets qui font partie de la pratique mathématique ordinaire alors que les *dessins faux* ne semblent être que le produit de contraintes typographiques.» (Coppé, Dorier et Moreau, 2005, p. 16). Nous partageons cette vision et ceci nous indique qu'il faut être prudent si l'on souhaite utiliser les *dessins faux* avec les élèves. En effet, il s'agit d'introduire un artifice à la pratique mathématique et ceci pourrait être source de difficulté supplémentaire pour les élèves.

De plus, les dessins à main levée et les dessins faux semblent avoir des fonctions didactiques différentes. Dans le cadre de ce travail, nous avons rejeté les dessins faux puisqu'ils ne font pas partie des pratiques mathématiques usuelles. Nous les considérons plutôt comme un artifice didactique n'ayant pas fait ses preuves à notre avis, contrairement au dessin à main levée que l'on retrouve traditionnellement dans les pratiques. De plus, l'étude de Coppé et coll. montre que l'utilisation du dessin faux dans certains exercices a empêché les élèves de donner des réponses basées sur l'observation du dessin, mais ça ne les a pas non plus amenés à déployer un raisonnement déductif. Le problème était en fait que les élèves étaient bloqués dans leur raisonnement, car ils se sentaient trompés par le dessin. L'utilisation de dessins faux est critiquée par Coppé et coll., car elle amène de la confusion chez l'élève. En effet, ce dernier doit revoir le rôle que joue le dessin dans son argumentation. L'élève peut se sentir déstabilisé puisque le dessin lui fournit des données erronées, il ne sait plus à quoi se rattacher pour obtenir de l'information juste. Certains élèves contournent aussi le problème en reproduisant le dessin selon ses vraies mesures, ainsi ils peuvent travailler à même la figure sans se préoccuper du dessin fourni dans la consigne. Selon les auteurs, le rapport entre l'argumentation et le dessin n'évolue pas réellement par l'utilisation de dessins faux, puis que ceux-ci sont contournés par les élèves ou sont réfutés par les élèves.

Pour ce qui est du dessin à main levée, celui-ci se retrouve fréquemment dans les pratiques mathématiques. En effet, pour le mathématicien, les dessins à main levée sont d'une très grande utilité, ils servent à forger la réflexion et leur utilisation est personnelle et fait partie du processus de recherche et non de l'argumentation (Coppé et coll., 2005). Cette dernière remarque est très importante, car elle met de l'avant que le dessin à main levée ne fait pas partie de la preuve, mais du processus de recherche. Suite à son utilisation, si utilisation il y a, le mathématicien rédige sa démonstration.

2.9.4 Classification des énoncés et des tâches

Coppé et coll. (2005) classifient des problèmes de géométrie de six manuels de 5^{e} (11-12 ans) selon différents critères :

1. la présence ou non d'un dessin dans l'énoncé
2. le rôle joué par le dessin (hypothétique ou réel)
3. la tâche demandée à l'élève par rapport au dessin et à l'argumentation.

S'il y a présence d'un dessin, on observe trois cas distincts :

- Le dessin remplace une description ou complète le texte.
- Le dessin permet de traiter plusieurs cas. (Par exemple : trois triangles différents).
- Le dessin illustre l'énoncé.

Les tâches de l'élève :

- Reproduire le dessin.
- Reproduire en respectant la description de la figure.
- Produire un programme de construction.
- Calculer des mesures manquantes.
- Conjecturer puis justifier, expliquer, prouver, démontrer.

S'il n'y a pas présence de dessin et que ce dernier est demandé à l'élève, les tâches de l'élève sont :

- Faire le dessin pour exécuter un programme de construction.
- Compléter un dessin pour respecter une description.
- Faire le dessin qui correspondant au texte pour faciliter la conjecture ou l'argumentation.

Si le dessin n'est pas présent dans les consignes, les tâches de l'élève sont: Preuve, démonstration (même si le dessin peut être un support, il ne fait pas partie de la réponse attendue.) Par exemple, dans certains cas les élèves vont tracer un dessin pour illustrer l'énoncé bien que ce dernier ne soit pas demandé de façon explicite dans les consignes.

Le processus d'entrée et de sortie de dessins est représenté dans le tableau suivant inspiré de Laborde et Capponi (1994), Pluvinage (1989), utilisé par Coppé, Moreau et Dorier (2005).

Tableau 2.4 Processus d'entrée et de sortie des dessins

Entrée	Tâches	Sortie
Dessin	Reproduction à l'identique ou avec variations Compléter le dessin Déterminer des éléments manquants	Dessin
Dessin	Description, programmes de tracé, justification, reconnaissance	Texte
Texte	Tracé, construction	Dessin
Texte	Justification, démonstration (avec construction intermédiaire éventuelle)	Texte

2.9.5 L'expérimentation

L'étude de Coppé, Dorier et Moreau s'est concentrée sur trois classes (total d'une soixantaine d'élèves) de 5^e (11-12 ans) en France. Les élèves ont travaillé en binôme et certaines équipes étaient filmées. De cette expérimentation, nous retenons les critères d'analyse des productions d'élèves utilisés :

- Les réponses obtenues (réponse vraie ou fausse)

- L'utilisation faite du dessin :
    - Codage du dessin
    - Reproduction du dessin
    - Lecture sur le dessin

- Les types d'arguments utilisés :
    - Déduction
    - Confusion hypothèse/conclusion

- Propriétés non appropriées

-Les types de contrôle effectués (Rolet, 1996)

- Contrôle perceptif simple
- Contrôle perceptif instrumenté
- Contrôle théorique

2.10 Les activités géométriques selon Pallascio et coll.

Les travaux de Pallascio, Allaire et Mongeau (1993) relèvent les activités géométriques que les élèves rencontrent lors de l'enseignement primaire. En effet, ces derniers se sont intéressés à la géométrie au début de son enseignement. Nous retiendrons de ces travaux les différentes compétences spatiales ainsi que les cinq opérations intellectuelles correspondant à ces compétences spatiales. Bien que ces travaux se soient principalement intéressés à la géométrie en trois dimensions, nous croyons que ces opérations intellectuelles sont aussi présentes dans la géométrie en deux dimensions. Pallascio et coll. distinguent deux catégories de compétences spatiales, les compétences relatives aux relations spatiales et celles relatives aux visualisations spatiales. La compétence spatiale relative aux relations est une compétence analytique ; celle-ci demande à l'élève une reconnaissance des formes et des propriétés. De son côté, la compétence spatiale relative à la visualisation est une compétence se situant au niveau synthétique, c'est-à-dire qu'elle fait appel à une vue d'ensemble. De plus, cette compétence implique la transformation des formes géométriques. Selon ces chercheurs, l'alternance entre des activités analytiques et synthétiques dans un cadre d'enseignement constructiviste serait une approche très efficace pour favoriser le développement des compétences spatiales mentionnées précédemment.

L'instrument bâti par les travaux de Pallascio et coll. offre en plus des compétences spatiales une liste des opérations mentales correspondant aux deux compétences spatiales. Définissons en premier lieu chacune de ces opérations mentales avant de les relier aux compétences spatiales qui leur sont associées.

- *Classifier* : Grouper des structures spatiales selon différentes propriétés géométriques communes.
- *Décrire* : Identifier les propriétés géométriques, discuter de la structure spatiale en utilisant le vocabulaire associé à la géométrie.
- *Transposer* : Passer d'une représentation géométrique à une autre ou à l'objet concret. Établir des relations entre différentes représentations (physique, linguistique, algébrique et géométrique).
- *Déterminer* : Identifier les propriétés qui définissent les structures étudiées.
- *Générer* : Produire ou modifier une structure spatiale afin de remplir certains critères géométriques.

Tel que nous l'avons mentionné précédemment, chacune de ces opérations mentales est associée à une des compétences spatiales, soit la compétence relative aux relations spatiales, soit la compétence relative aux visualisations spatiales. Afin de mieux illustrer les associations entre les compétences spatiales et les opérations mentales nous avons construit le tableau suivant inspiré des travaux de Pallascio et coll. (1993)

Tableau 2.5 : Les compétences spatiales et les opérations mentales

Compétence Spatiale	Relations Spatiales (Analytique)			Visualisations Spatiales (Synthétique)	
Opérations mentales	Classifier	Décrire	Transposer	Déterminer	Générer

Tel que l'illustre le schéma ci-dessus, les opérations mentales *classifier* et *décrire* se retrouvent dans la compétence analytique tandis que les opérations *déterminer* et *générer* se retrouvent dans la compétence synthétique. Quant à l'opération mentale *transposer*, elle occupe un statut particulier puisqu'elle se retrouve à la fois dans la compétence relative aux relations spatiales et à la fois dans celle relative aux visualisations spatiales. En effet, il s'agit de passer de l'analytique vers le synthétique ou l'inverse.

La théorie des opérations de Pallascio et coll. (1993) est utile à notre recherche puisqu'elle nous a permis d'analyser les manuels de mathématiques *Clicmath* (voir chapitre 1). Cette analyse a mis en lumière des lacunes en ce qui a trait aux problèmes sollicitant le raisonnement déductif chez les élèves du primaire.

2.11 La zone proximale de développement selon Vygotski.

Les travaux de Vygotski (1978) sont d'un fort intérêt dans le cadre de ce mémoire, puisqu'ils fournissent une assise théorique à nos hypothèses. Plus précisément, nous nous intéressons au concept de zone proximale de développement de l'élève élaboré par Vygotski. Il est à noter que dans la littérature, on retrouve d'autres appellations pour ce concept tel que : zone de développement le plus imminent, zone la plus proche du développement à venir... Nous retenons, la forme la plus souvent rencontrée, c'est-à-dire la zone proximale de développement et c'est sur ce concept que nous nous attardons et non sur l'œuvre entière de Vygotski.

La zone proximale de développement consiste en la différence entre ce que l'enfant en apprentissage peut réaliser seul et ce qu'il peut réaliser avec l'aide d'un adulte ou encore avec l'aide de camarades plus avancés que lui. Il s'agit donc, du potentiel de ce que l'élève peut apprendre si on lui fourni l'aide nécessaire.

> [...]the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance, or in collaboration with more capable peers (Vygotsky, 1978, p. 86).

Cette zone proximale de développement peut s'exprimer en unité de temps. Par exemple, deux enfants réussissent à passer les tests d'échelle psychométrique correspondant à l'âge de huit ans, mais, avec de l'aide, le premier arrive au niveau neuf ans tandis que l'autre atteint celui de douze ans. La zone de développement proximale du premier est de un an et celle de l'autre est de quatre ans.» (Ivic, 1994). On peut donc identifier chez des élèves de mêmes âges des zones proximales de développements distinctes.

Lors du développement de cette théorie, Vygotski souhaitait évaluer ce que l'enfant pouvait effectuer avec de l'aide et ce qu'il pouvait effectuer seul dans l'objectif de mesurer l'intelligence de l'enfant. Ceci s'opposait à l'idée de mesurer les acquis de l'enfant pour mesurer l'intelligence. L'idée derrière était que l'enfant ne peut être considéré de façon isolée, car son environnement socioculturel influe aussi son développement.

Dans la théorie de la zone proximale de développement, nous approuvons les propos de Ivic (1994) qui mentionne que l'un des faits intéressants de cette théorie est qu'elle permet d'affirmer que le développement est plus efficient si l'enfant est exposé à des apprentissages nouveaux se situant dans sa zone de développement proximale. Plus précisément, nous pensons que ces apprentissages peuvent être accélérés avec de l'aide afin de développer plus rapidement le potentiel de l'élève et sa capacité à résoudre ces mêmes problèmes de façon individuelle. Dans le cadre de notre recherche, nous émettons l'hypothèse que les élèves avec lesquels nous travaillons se situent dans leur zone proximale de développement. En effet, les savoirs de la géométrie avec lesquels l'enfant travaille en 6^{e} année du primaire sont issus des mêmes concepts que ceux rencontré lors de la 5^{e} année du primaire. La différence consiste plutôt dans le fait que ces concepts sont explorés à l'aide d'instruments de géométrie en 5^{e} année et réintroduits avec les propriétés lors de la 6^{e} année. Les élèves ont donc tout en leur possession pour passer au niveau d'abstraction suivant et délaisser les instruments. Cependant, ce passage ne se fait pas aisément, c'est pourquoi des activités en équipe sont prévues avec le support de l'enseignant. Nous pensons qu'en accord avec les idées de Vygotski, si l'élève est en mesure de produire des raisonnements déductifs en équipe et suivant les activités qui lui sont proposées dans notre démarche expérimentale, il pourra par la suite utiliser ces raisonnements de façon autonome et individuelle.

CHAPITRE III : MÉTHODOLOGIE

3.1 Rappel de la problématique

Notre problématique se développe dans le cadre général de l'enseignement de l'initiation à la preuve. Nous nous sommes centrés sur l'initiation à la preuve à l'école primaire et y avons joint la question de l'apprentissage de la géométrie et du développement du raisonnement déductif. De plus, nous nous sommes questionnée sur les moyens actuels et les recommandations du programme québécois quant à l'enseignement de la géométrie en fin d'études primaires et au début du secondaire. Ceci, dans l'optique de poser un regard neuf sur les différences et les ressemblances entre ces deux niveaux. Par ce travail, nous avons mis en lumière une rupture du contrat didactique entre l'école primaire et secondaire quant aux pratiques en classe de géométrie. Nous avons fait l'hypothèse, soutenue par nos lectures (Balacheff, 1987 ; Coppé, Dorier et Moreau, 2005 ; Stylianides et Stylianides, 2006), que cette rupture est une source de difficultés pour les élèves. Afin de faciliter le passage de la géométrie *pratique* au primaire vers la géométrie *théorique* à l'école secondaire, nous optons pour une meilleure continuité à l'instar de Stylianides (2007a). Pour ce faire, nous souhaitons développer des activités géométriques favorisant ce passage.

Le présent chapitre se propose de spécifier les objectifs de la recherche entreprise en précisant par quelle approche méthodologique ces objectifs seront atteints. Une fois notre approche méthodologique fixée, nous nous emploierons à expliciter et à décrire le déroulement et la mise en place de notre méthodologie de recherche. Plus précisément, nous décrirons l'échantillon étudié, ainsi que l'organisation des expérimentations en classe. Nous préciserons la construction des activités et les principes didactiques s'y rattachant. Tout ceci, en spécifiant les buts visés par chacune des expérimentations dans l'atteinte de nos objectifs de recherche. Finalement, nous présenterons les moyens mis en place pour l'analyse des données recueillies lors des expérimentations.

3.2 Les objectifs de la recherche

En premier lieu, rappelons nos questions de recherche :

1- Le passage d'une géométrie pratique à une géométrie théorique est-il possible chez des élèves de 3^{e} cycle du primaire?

2- Dans quelle mesure est-il possible de favoriser le développement du raisonnement déductif chez les élèves de troisième cycle de l'enseignement primaire?

3- Quelles sont les activités permettant aux élèves de délaisser la mesure au profit de l'utilisation de la déduction dans l'activité géométrique?

En gardant ces questions en tête, nous avons dégagé un cadre théorique autour de l'initiation à la preuve et au raisonnement déductif ainsi qu'autour de l'activité géométrique. Ce cadre nous a éclairée quant aux différents paradigmes géométriques et au mode de validation utilisés par les élèves lors de l'activité géométrique. À la lumière de ce cadre théorique, nous avons fixé des objectifs afin de nous aider à répondre à nos questions de recherche.

Objectifs généraux :

(I) Identifier les paradigmes géométriques dans lesquels les élèves se situent.

(II) Favoriser le passage de la géométrie spatiographique à la géométrie protoaxiomatique.

(III) Cerner à travers quelles activités les changements de paradigmes géométriques apparaissent.

Objectifs spécifiques :

(i) Remettre en cause la lecture directe sur le dessin comme mode de validation.

(ii) Remettre en cause la mesure comme mode de validation.

(iii) Favoriser l'utilisation des propriétés théoriques comme mode de validation.

Il est à noter que les trois objectifs spécifiques sont interreliés et que l'atteinte de l'objectif iii ne peut se faire sans l'atteinte des objectifs i et ii.

3.3 Discussion autour d'une méthodologie permettant d'atteindre nos objectifs

3.3.1 Objectif I : Identifier les paradigmes géométriques dans lesquels les élèves se situent

L'un de nos objectifs principaux de recherche est d'identifier les paradigmes géométriques à l'intérieur desquels se situent les élèves lors de la résolution de problèmes. Pour ce faire, nous souhaitons placer l'élève dans une situation qui lui demande de faire appel à ses connaissances géométriques afin de pouvoir distinguer quels sont les moyens et les processus qu'il utilise pour résoudre un problème. Nous pensons que la démarche de l'élève lors de la résolution d'un tel problème de géométrie nous fournira suffisamment de données pour pouvoir identifier le paradigme géométrique dans lequel il se situe. La lecture de la démarche de l'élève et l'observation n'étant pas suffisantes pour nous permettre de remplir notre premier objectif, nous utilisons un autre outil méthodologique : la grille d'analyse. En effet, notre cadre théorique nous donne plusieurs lignes directrices quant aux habitudes des élèves selon le paradigme géométrique dominant dans une tâche donnée. Celles-ci se retrouvent dans la grille ci-dessous (tableau 3.1). Cette grille a été construite à partir de notre cadre théorique afin de pouvoir situer les démarches des élèves par rapport aux différents paradigmes géométriques ainsi qu'aux niveaux de van Hiele. Il est à noter à la lecture de la grille que les niveaux 0 et 4 de la typologie de van Hiele ne sont pas décrits. Puisque nous travaillons avec des enfants de 6[e] année, ces niveaux ne devraient pas être observés au cours de notre expérimentation et nous n'avons pas cherché à les décrire pour compléter la grille.

Tableau 3.1 Grille d'analyse des démarches d'élèves construire à partir des travaux de Braconne Michoux (2008)

		Géométries non axiomatiques			Géométries axiomatiques	
	Type de géométrie	**Géométrie concrète (G0)**	**Géométrie spatiographique (G1)**		**Géométrie protoaxiomatique (G2)**	**Géométrie axiomatique (G3)**
	Objets	Physiques (matériel)			Théoriques	
	Van Hiele	Niveau 0	Niveau 1 Identification	Niveau 2 Analyse	Niveau 3 Déduction informelle	Niveau 4
Compétences	Visuelle		Reconnaît les différentes figures à partir d'une image.	**Remarque les propriétés d'une figure Identifie une figure comme une partie d'une figure plus grande (reconnaît les sous figures).**	Reconnaît les interrelations entre différents types de figures. **Reconnaît des propriétés communes à différents types de figures.**	
	Verbales		Associe le nom correct à une figure donnée.	Décrit correctement les diverses propriétés d'une figure.	Définit les mots correctement et avec concision. **Formule des**	

					phrases indiquant les interrelations entre les figures.	
	Graphiques		Fait des schémas des figures, les éléments donnés étant correctement étiquetés.	**Traduit une information verbale en une image** Utilise des propriétés données des figures pour dessiner ou construire les figures.	Certaines figures étant données, l'élève est capable de construire d'autres figures liées aux précédentes.	
	Logiques		Conçoit qu'il existe des différences et des ressemblances dans différents types de figures. Comprend la conservation de la forme des figures dans diverses positions.	Comprend que les figures peuvent être classées en différents types. Conçoit que les propriétés peuvent être utilisées pour distinguer les figures.	Comprend les qualités d'une bonne définition. Utilise les propriétés des figures pour déterminer si une classe de figures est contenue dans une autre classe.	

	Appliquées (techniques)		Reconnaît les formes géométriques dans différents objets.	Reconnaît les propriétés géométriques des objets physiques Peut représenter un phénomène physique sur papier ou le modéliser.	Comprend le concept d'un modèle mathématique qui représente les relations entre les objets.	

L'objectif de la grille d'analyse est de nous permettre d'établir les paradigmes dans lesquels se situent les élèves lors de leur participation à chacune des activités géométriques que nous leur proposons. En effet, nous utiliserons cette grille pour pouvoir classer les différentes démarches et ainsi être en mesure de relever le paradigme géométrique dominant chez l'élève dans la tâche effectuée. Cette grille est issue des travaux de Parzysz et une telle grille a aussi été utilisée par Braconne Michoux (2008) pour analyser des réponses d'élèves de CM2 et de 6e dans le cadre d'activités géométriques. Nous reprenons en quelque sorte son outil d'analyse pour répondre à nos objectifs de recherche. Nous reviendrons sur ces éléments lors de l'analyse des résultats.

Évidemment, d'autres approches méthodologiques auraient aussi pu être retenues pour remplir notre premier objectif principal. On aurait pu, par exemple préférer l'entrevue à l'expérimentation d'activités en classe. Par-contre, nous n'avons pas fait ce choix puisque l'entrevue ne nous permet pas d'analyser plusieurs élèves comme nous le permet l'utilisation de la grille et l'expérimentation d'activités en classe. De plus, nous avons choisi cette approche, car elle nous permet d'observer les élèves dans différentes situations. Effectivement, nous avons fait l'hypothèse que l'activité proposée à l'élève peut influencer le paradigme géométrique à l'intérieur duquel l'élève construit sa solution. Cette hypothèse nous semble naturelle puisque comme le mentionne Braconne Michoux (2008), les deux paradigmes (spatiographique et protoaxiomatique) sont complémentaires et non antagonistes et il est possible que ces paradigmes s'expriment à divers moments chez un même élève selon la situation dans laquelle il évolue. De plus, l'expérimentation en classe était plus profitable pour l'atteinte de nos autres objectifs de recherche.

3.3.2 Objectif II : Favoriser le passage de la géométrie spatiographique à la géométrie protoaxiomatique.

Un de nos objectifs est d'amener les élèves du paradigme de la géométrie spatiographique vers celui de la géométrie protoaxiomatique. Pour ce faire, on doit tenir compte de leur espace de travail au sens de Houdement et Kuzniak (1998-1999, 1999). En analysant les espaces de travail de ces paradigmes géométriques, on remarque que pour effectuer le passage, il est essentiel que les élèves délaissent les artéfacts : règle et rapporteur d'angles.

Afin de les amener à délaisser leurs instruments de géométrie, nous avons planifié les expérimentations selon une progression bien définie se déroulant d'octobre à juin. Cependant, nous souhaitons d'abord préciser que chacune des activités proposées est réalisée en dyade afin que les élèves puissent discuter de leurs idées ouvertement entre eux avant de fixer leur démarche. «La coopération active entre élèves, la nécessité d'expliquer ses choix et de les argumenter sont favorables à un développement du contrôle de l'élève sur son activité.» (Arsac et al., 1992, p.178). De plus, comme le soulignent Vygotsky (1978) et Arsac (1997), ce que l'élève peut accomplir en équipe ou avec de l'aide l'amènera plus tard à être apte à le réaliser seul. Regardons la progression prévue. Il est aussi à noter que les dyades sont formées par les élèves et que par conséquent celles-ci sont variables dans le temps.

a) *Utilisation du trait gras*

Nous pensons que le trait gras amène les élèves à réfléchir à de nouvelles procédures pour résoudre un problème de géométrie simple. En effet, nous espérons que la difficulté de l'élève à obtenir une mesure précise l'amènera à réévaluer sa réponse.

b) Comparaison de résultats

Nous voulons que la comparaison de résultats soit source de conflits cognitifs pour faire progresser l'élève. Comme le mentionne Arsac :

> « [...] l'interaction entre deux individus affrontés à un problème n'est source de progrès que si elle comporte un conflit entre les individus, portant sur des réponses reconnues comme incompatibles du point de vue des deux partenaires et effectivement logiquement incompatibles.»
> (Arsac et coll., 1992, p. 177).

Ceci étant dit, toutes les comparaisons des résultats ne sont pas porteuses de conflits cognitifs.

c) Exigence de plusieurs solutions

Lors de plusieurs activités, nous demandons à la dyade de résoudre le problème de la façon de son choix, puis nous lui demandons si elle est en mesure de trouver une autre façon pour résoudre le même problème. L'idée derrière cette demande est de forcer l'équipe à revoir son travail. Par exemple, si l'équipe a mesuré, peut-elle faire autrement? Si oui, cette méthode est-elle aussi efficace? Etc. Nous espérons ainsi forcer les élèves à réfléchir quant aux moyens à privilégier lors de la résolution de problèmes de géométrie.

d) Utilisation des dessins à main levée

Cette approche a été choisie, car elle nous permet de donner une représentation visuelle de la situation, sans pour autant illustrer l'évidence d'une proposition ou permettre à l'élève de mesurer sur une figure exacte. De plus, par cet artifice nous évitons de donner un texte trop lourd à l'élève et de le placer dans une position où les difficultés de lecture de problème mathématique entrent en jeu. L'utilisation des dessins à main levée nous permet également de rendre impossible le contrôle perceptif ou instrumenté de l'élève. Le recours aux instruments et aux perceptions étant impossible, nous espérons que l'élève se tourne vers ses connaissances géométriques ainsi que vers le raisonnement déductif.

Les travaux de Coppé, Dorier et Moreau (2005) nous ont aidés à choisir des dessins à main levée. Effectivement, leur recherche avait pour but d'analyser les réactions des élèves face aux dessins à main levée afin de déterminer le rôle de ces dessins dans l'évolution des rapports qu'entretiennent les élèves avec l'argumentation en géométrie. De plus, leur recherche permet de relever certaines difficultés engendrées par l'utilisation des dessins à main levée. Dans leur recherche, ils ont relevé plusieurs difficultés chez les élèves dues à l'utilisation de dessins à main levée et ils ont remarqué que leur utilisation ne permettait pas le passage à la déduction. Cependant, nous nous proposons d'utiliser une autre forme de dessin à main levée afin de favoriser le passage. Dans notre cas, les dessins à main levée utilisés ne sont pas faux et ils sont indiqués comme étant des dessins à main levée. Pour accentuer ce fait, nous avons eu recours à des tracés à la main au lieu de dessins faux faits par ordinateur dont les lignes sont droites, mais ne respectent l'énoncé du problème. Nous pensons que ces modifications sont significatives, puisque l'élève ne devrait pas se sentir trompé par le dessin, puisque celui-ci représente la situation en maintenant les éléments visuels de base, mais pas les mesures exactes. Suivant donc les recommandations de leur recherche, nous avons tenté une nouvelle approche avec les dessins à main levée. De plus, nous faisons l'hypothèse que l'utilisation des dessins à main levée faisant suite aux dessins à traits gras ne causerait pas de difficulté chez les élèves quant à leur confiance envers les représentations visuelles en géométrie puisqu'ils ont déjà commencé à utiliser ces représentations non pas pour mesurer, mais pour illustrer une situation.

e) *Retour sur les activités pour comparaison de démarche.*

Nous avons choisi d'utiliser une séance d'expérimentation en classe afin de faire un retour sur les activités déjà réalisées par les élèves. Comme il n'y a pas de séances de correction à la fin de chacune des activités, nous voulons, une fois rendus à mi-chemin, faire un retour pour nous assurer que tous les élèves ont vécu des expériences semblables, en ce qui a trait au rapport à la mesure et aux dessins à main levée. Ce retour s'est fait, par la reprise d'activités antérieures en modifiant légèrement les formulations. Ainsi, cela permet à l'élève de constater que sa façon de résoudre certains problèmes a évolué au cours des séances.

L'amorce du passage de la géométrie spatiographique à la géométrie protoaxiomatique faisant partie de nos objectifs de recherche, nous cherchons à construire des activités géométriques en ce sens. Cependant, avant d'entreprendre cette démarche nous avons voulu vérifier quelles étaient les activités géométriques proposées aux élèves par l'entremise des manuels scolaires actuellement utilisés au Québec tel que nous l'avons mentionné dans notre problématique. Les résultats de cette analyse ont été présentés dans la chapitre I (voir section 1.7).

3.3.3 Objectif III : Cerner à travers quelles activités les changements de paradigmes géométriques apparaissent

L'objectif III vise à cerner à quel moment et à travers quelles activités géométriques, l'élève change de paradigme géométrique. Pour ce faire, nous avons besoin de critères nous permettant d'identifier, à travers les réponses des élèves aux questions que nous leur posons, dans quel paradigme géométrique ils se situent. À cet effet, nous allons utiliser la grille présentée dans le tableau 3.1. L'utilisation de cette grille se fait à deux niveaux. Dans un premier temps, nous l'utilisons dans notre analyse a priori afin de préclasser chacune des démarches envisagées dans les niveaux de van Hiele tout comme dans la typologie de Parzysz en ce qui concerne les paradigmes géométriques spatiographiques et protoaxiomatiques, et ce, pour chacune des activités. Puis, nous l'utilisons dans un second temps pour classer les démarches réelles obtenues suite aux expérimentations en classe.

Il est bon de préciser que nous ne regardons pas l'évolution des élèves de façon individuelle, mais bien dans sa globalité. Pour vérifier si changement il y a, nous utilisons des tableaux avec les effectifs relatifs du nombre d'élèves pour chacun des paradigmes au cours de la progression des activités proposées. Ainsi nous pouvons observer si nous sommes en présence d'un changement de paradigmes généralisé chez les élèves ou non. Notre classification des réponses d'élèves à travers les paradigmes se fait à partir de notre grille, en vérifiant l'utilisation ou non d'instruments de mesure, l'utilisation des propriétés géométriques, le travail effectué sur la figure et la nature des arguments fournis.

3.4 Le déroulement

3.4.1 L'échantillon étudié

Dans le cadre de cette recherche, nous avons travaillé avec deux classes de 6^e année primaire de l'école *Le Plateau* de Montréal. Ce choix est justifié, entre autres choses par le fait qu'il s'agit d'une école primaire orientée en musique où la forte majorité des élèves ont de la facilité à l'école, ainsi que de la facilité à exprimer leurs idées. En effet, pour obtenir un maximum de données pour nos expérimentations, il nous semblait préférable de travailler avec des élèves pouvant s'exprimer aisément malgré leurs jeunes âges. Tel que nous l'avons mentionné, les élèves qui ont participé à notre recherche sont des élèves ayant une certaine facilité à l'école. Le cours de mathématique dispensé à l'école *Le Plateau* est un cours traditionnel de l'enseignement primaire québécois. Les enseignantes avec qui nous avons travaillé pour ce projet utilisent toutes les deux les manuels de mathématiques *Clicmaths*. Ayant analysé ces manuels (voir Chapitre 1), nous pouvons supposer que les élèves n'ont pas été initiés au raisonnement déductif et à la preuve théorique de façon poussée. Au niveau des connaissances mathématiques en géométrie, les élèves possèdent un recueil nommé *Boîte à outils*. Ce dernier contient les énoncés et les propriétés géométriques usuels de l'école primaire conformément au programme québécois. Cependant, nous tenons à préciser que les élèves ne connaissent pas nécessairement chacune des propriétés, mais qu'ils sont en mesure de les chercher dans leur *Boîte à outils*.

Comme nous l'avons dit, nous avons eu accès à l'ensemble des productions des élèves des deux classes pour un total de 53 élèves à chacune des expérimentations. Cependant, le nombre de copies analysées a varié selon la présence des élèves et leur participation. Nous tenons aussi à mentionner que pour chacun des élèves ayant participé à notre recherche, nous avions une lettre de consentement des parents ainsi que de la direction de l'école.

Nous avons choisi de travailler avec deux enseignantes afin de nous offrir un plus large éventail d'élèves et aussi afin d'effectuer l'expérimentation avec des élèves travaillant de différentes manières. Les enseignantes nous ont donné une très grande latitude par rapport aux choix des activités. Effectivement, elles nous ont laissé le champ libre quant à la façon dont serait présentée les savoirs géométriques, ce qui nous a permis d'aller de l'avant avec la progression envisagée pour amoindrir la rupture du contrat didactique entre le primaire et le secondaire. Ceci étant dit, nous nous en sommes tout de même tenus aux savoirs présents dans le programme. De plus, les enseignantes laissaient beaucoup de place à l'élève dans son apprentissage. De ce fait, les élèves étaient très autonomes et ceci avait l'avantage de ne pas les perturber lorsque nous venions en classe pour les expérimentations. En plus, l'espace de la classe était aménagé de façon à ce que les élèves travaillent en équipe. Ceci fut un avantage pour nos activités, puisque celles-ci se déroulent en dyade.

3.4.2 L'organisation des expérimentations

Toutes les expérimentations se sont déroulées de façon semblable et duraient une période, soit 60 minutes. Les activités sont rassemblées dans un feuillet que nous remettons aux élèves au début de la séance. Ainsi, les élèves participent à l'activité en écrivant directement leur démarche dans le feuillet. Cette façon de faire a été privilégiée, car nous souhaitons que les productions écrites des élèves soient présentées de façon très semblable pour en faciliter l'analyse. De plus, cette approche a aussi l'avantage que les activités peuvent se dérouler sous le regard du chercheur avec un minimum d'intervention de sa part. En effet, nous avons choisi de construire les activités les plus autonomes possible afin de faciliter le travail lors des expérimentations, mais aussi afin que les activités puissent être le plus facilement réutilisables par des enseignants par la suite.

Nous avons aussi filmé des groupes d'élèves afin de pouvoir bien observer les interactions entre ces derniers et avoir accès à une plus grande part de leurs réflexions, puisqu'il nous semblait invraisemblable que les élèves écrivent dans leur feuillet tous les raisonnements et les chemins empruntés dans l'accomplissement de la tâche. Cependant, nous n'avons pas retenu les enregistrements vidéo pour nos analyses puisqu'il s'agissait d'un ensemble de données beaucoup trop vaste et complexe pour notre recherche et que les données recueillies à l'écrit nous ont semblé suffisantes pour tirer des conclusions intéressantes.

La majorité des expérimentations comportent trois activités différentes orientées vers un même objectif didactique. Les élèves doivent travailler en équipes de deux afin de favoriser la discussion et les débats. Selon Arsac (1992), le rôle du travail d'équipe est prometteur chez les élèves en initiation à la preuve, car il facilite l'apparition de conflits concernant les résultats obtenus par les monômes ainsi que par rapport aux savoirs mathématiques en jeu dans la situation. Suivant cette idée, nous avons choisi le travail en binôme, car nous croyons que cela peut leur être bénéfique au niveau de l'acquisition de compétences et de connaissances.

Le rôle du chercheur lors du déroulement des expérimentations est principalement un rôle d'appui. En effet, ce dernier doit présenter les activités à la classe de façon très brève afin de ne pas influencer les réponses des élèves. Durant la participation des élèves à l'activité, le chercheur se promène en classe afin de s'assurer du bon déroulement de l'activité, ainsi que de répondre aux interrogations des élèves si nécessaire. Les interventions du chercheur ne sont pas orientées vers la réponse, mais fournissent plutôt des pistes de réflexion aux élèves pour les aider à accomplir la tâche selon leurs approches initiales. À quelques occasions, le chercheur intervient en classe afin de s'assurer que tous les élèves connaissent les définitions et les propriétés avant le début d'une nouvelle expérimentation. Ceci, principalement lors des expérimentations où l'on invite l'élève à revenir sur d'anciennes activités.

Tout comme pour le chercheur, le rôle de l'enseignante lors des activités est un rôle de soutien. Par exemple, elle s'assure que les élèves se placent en équipe de deux et que tous les élèves participent aux activités proposées. À l'occasion l'enseignante peut aussi répondre aux questions des élèves dans le respect de la recherche en cours.

Le déroulement des expérimentations s'est fait de la façon suivante :

1- Pré-test
    a. Activité 1(Périmètre de triangles)
    b. Activité 2 (Motif de carreaux)
    c. Activité 3(Angles manquants 3 triangles)
2- Expérimentation 2
    a. Activité1 (Somme des angles d'un triangle)
    b. Activité 2 (Somme des angles et angle plat)
3- Expérimentation 3
    a. Activité 1(Losange)
4- Expérimentation 4
    a. Activité1 (retour Somme des angles d'un triangle)
    b. Activité 2 (retour Somme des angles et angle plat)
    c. Activité 3 (retour Losange)
5- Expérimentation 5
    a. Activité 1 (Le cercle à main levée)
    b. Activité 2 (Les triangles à main levée)
6- Expérimentation 6
    a. Activité 1 (Carré et triangle à main levée)
    b. Activité 2 (Les droites parallèles)
7- Expérimentation 7
    a. Activité 1 (Somme des angles dans un polygone)
8- Expérience 8
    a. Activité 1 (Comparaison d'aire)
9- Expérience 9
    a. Activité 1(Périmètre de triangles)
    b. Activité 2 (Motif de carreaux)
    c. Activité 3(Angles manquants 3 triangles)

Nous tenons aussi à préciser qu'entre chacune des activités, il n'y a eu aucun enseignement de géométrie de la part des enseignantes. En effet, les activités de géométrie se sont exclusivement déroulées en notre présence afin de ne pas fausser les résultats obtenus. Ce mode de fonctionnement a été possible puisque que les concepts mathématiques en jeu dans les activités présentées aux élèves ont déjà été abordés par ceux-ci au courant de l'année scolaire précédente.

3.5 Construction des activités

Les activités que nous souhaitons construire doivent être en accord avec les grands principes de notre cadre théorique. Ainsi, nous tenons compte des travaux de van Hiele et des paradigmes géométriques pour placer l'élève dans un environnement propice à la mise en place du raisonnement déductif. De plus, nous gardons en tête les idées de Coppé et coll. concernant les types de dessin à intégrer pour ne pas placer l'élève dans une position précaire ou le piéger par des figures truquées. Nous souhaitons, comme le précise Vygotsky, mettre sur pied des activités plaçant l'élève dans la zone proximale de développement afin de rendre les apprentissages plus efficients en ce qui a trait au raisonnement déductif. Bien que certaines activités aient été inspirées par les travaux d'Arsac et coll. (1992), les autres activités ont été monté de toutes pièces afin de servir nos objectifs. Nous expliquerons les étapes de la construction plus en profondeur dans les prochaines sections.

3.5.1 Le design research

La construction des activités géométriques ne s'est pas faite en un seul jet, mais bien par étapes suites à chacune des expériementations. Pour nous aider, nous avons choisi de suivre une démarche de *Design research* (Edelson, 2002 ; Sandoval et Bell, 2004) pour cette partie de nos travaux, car elle permet au design d'être partie intégrante de la démarche de recherche.

Ce paradigme est récent dans le milieu de la recherche en éducation en voici les caractéristiques principales:

1. Les objectifs de conception et du développement de nouvelles théories sont étroitement liées.
2. Le développement et la recherche font partie de cycles continus.
3. La recherche a pour but de mener à des théories pouvant être partagées avec des praticiens et des chercheurs.
4. La recherche doit fournir de l'information sur le processus de design.
5. La recherche doit s'appuyer sur des méthodes qui peuvent documenter et relier l'application aux résultats, c'est-à-dire faire le pont entre la recherche théorique et les pratiques.

Ces caractéristiques s'inscrivent harmonieusement dans le projet de recherche à l'intérieur duquel s'insère ce mémoire. Plus précisément, la recherche présentée dans ce mémoire n'est qu'une des phases d'une recherche beaucoup plus ambitieuse mise de l'avant par M. Stéphane Cyr. Cette recherche s'articule autour de deux objectifs :

1. Développer le raisonnement déductif des élèves du primaire lors de situations mathématiques.
2. Favoriser, à partir de leur capacité à raisonner déductivement, le passage d'une géométrie *pratique* vers une géométrie *théorique*: amener graduellement les élèves à percevoir les limites d'une validation reposant sur la mesure.

Ces objectifs seront atteints par la mise en place d'une méthodologie basée sur le *Design Research*. Effectivement, ses avantages cadrent bien avec la vision de cette recherche. Par exemple, la collaboration avec les enseignants est un des paramètres importants de cette recherche, car celle-ci permet aux enseignants de développer des compétences dans le design d'activités géométriques favorisant le raisonnement déductif chez leurs élèves. La participation des enseignants nous semble primordiale, si on souhaite un partenariat à long terme et une vraie application en classe des retombées de la recherche. De plus, l'un des

points majeurs du *Design Research* est l'importance accordée au processus de design. Celui-ci se résume en trois étapes. Dans la première, on tente d'élaborer un plan du processus de design, on se penche sur la question : comment va-t-on le faire ? Dans la deuxième étape, on s'intéresse aux besoins et aux opportunités. L'intuition est présente, mais on y ajoute des processus analytiques d'évaluation et de modélisation. Finalement la troisième étape consiste à s'interroger sur la forme que le résultat du design doit prendre. Ces trois étapes ne sont pas toujours explicites, mais elles sont fondamentales à tout design.
La recherche de M. Cyr est constituée de différents cycles, chacun comprenant les cinq phases suivantes :

1. Design de la séquence d'enseignement
2. Expérimentation en classe de la séquence d'enseignement
3. Analyse rétrospective des données expérimentales
4. Révision à la lumière de l'analyse des hypothèses théoriques, des choix didactiques et des trajets d'apprentissage anticipés.
5. Ajustement du design de la séquence découlant de la révision, et à partir duquel un nouveau cycle peut être amorcé.

Notre recherche représente la première boucle du cycle de 5 étapes du projet de recherche plus imposant.

Suivant le *Design Research* nous avons choisi de faire un premier plan basé sur nos intuitions et notre analyse des manuels (voir appendice A) pour bâtir une première activité à expérimenter en classe. Suite à cette expérimentation et suivant chacune des expérimentations, nous avons fait une analyse préliminaire des productions des élèves, en plus de consulter les enseignantes concernées afin que l'expérimentation vécue puisse nous aider dans la poursuite de nos objectifs et dans la construction des activités suivantes. Ainsi, chacune de nos expérimentations nous donnait des informations sur les élèves et les paradigmes géométriques dans lesquels ils se trouvaient. Nous pouvions donc utiliser ces informations pour influencer la conception des nouvelles activités. Nous avons choisi cette approche au lieu d'une approche que l'on pourrait dire plus traditionnelle, consistant en l'élaboration de l'ensemble des activités et ensuite en la mise en œuvre de l'expérimentation. Effectivement, le *design research* nous permet d'exploiter en même temps ces deux étapes, soit le design et la recherche, ce qui nous offre plus de flexibilité pour modifier et raffiner notre travail au fur et à mesure que de l'avancement de la recherche. Par exemple, si les premières activités voulant amener l'élève vers un rejet de la mesure comme mode de validation n'atteignent pas leurs objectifs, il nous est possible de poursuivre jusqu'à l'obtention de l'objectif en révisant le tir selon les résultats obtenus, ce qui semble tout à fait approprié étant donné que nous souhaitons faire l'expérimentation sur une assez longue période afin d'obtenir des résultats satisfaisants quant aux changements de paradigmes géométriques des élèves.

3.5.2 Les conditions sur les énoncés

Les travaux d'Arsac (1988) et Arsac et coll. (1992) nous ont influencés dans la construction de nos activités. De ces travaux nous avons retenu plusieurs aspects.

Dans le cadre de ses recherches, l'idée principale du déroulement est de placer les élèves dans des situations de débat mathématique suivant certaines règles prédéfinies devant être comprises et acceptées par les participants :

- *Un énoncé mathématique est soit vrai soit faux. (Principe du tiers exclu)*
- *Un contrexemple suffit pour invalider un énoncé.*
- *En mathématiques pour débattre on s'appuie sur un certain nombre de propriétés ou définitions clairement énoncées sur lesquelles on s'est mis d'accord.*
- *En mathématiques, on ne peut pas décider de la validité d'un énoncé en s'appuyant sur le fait que la majorité des personnes présentes sont persuadées que cet énoncé est vrai.*
- *En mathématiques, des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai.*

- *En mathématiques, une constatation sur un dessin ne suffit pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai.* (Arsac et coll., 1997, p. 1).

Les chercheurs fournissent ces énoncés aux élèves avant de mettre en branle ce qu'ils appellent un débat mathématique. Cependant, dans le cadre de notre recherche nous avons choisi de ne pas imposer de règles aux élèves. En effet, nous croyons que le passage vers la démonstration doit venir des élèves. Étant donné qu'un des rôles de la preuve est de convaincre (Hanna, 1990), il nous semble nécessaire que les règles utilisées donnent un sentiment de certitude quant à leur valeur mathématique et ne soient pas simplement le reflet d'une règle imposée par l'enseignant. C'est pourquoi nous avons choisi de bâtir des activités libres de consignes à ce niveau. Plus encore, les élèves sont libres d'utiliser les démarches de leur choix pour accomplir les tâches.

Évidemment, nous voulons que chacune des consignes données à l'élève soit la plus claire possible. Plus encore, nous voulons rendre les activités autonomes, dans la mesure où, les élèves peuvent réaliser l'activité sans que l'intervention du chercheur et de l'enseignant soit nécessaire. L'objectif est donc de bâtir des activités ne nécessitant pas l'apport du chercheur et ne requérant pas de séances d'enseignement proprement dites. Cette approche a été privilégiée puisque nous souhaitons que le matériel expérimenté puisse être repris par des enseignants sans trop de difficultés.

Il est à noter que nous avons choisi de ne pas introduire de contexte de vie réelle dans nos activités pour que celui-ci n'interfère pas avec l'aspect géométrique et le travail de justification de l'élève. De plus, les activités reliées à la preuve se prêtent moins naturellement au contexte de la vie courante puisque le raisonnement déductif n'y est pas employé de la même façon (Duval, 2005). Par exemple, dans un contexte de vie réelle, il est très souvent utile d'utiliser la mesure pour vérifier qu'un triangle soit droit, mais ce type de justification n'est pas adéquat dans une activité de preuve mathématique. C'est pourquoi nous avons laissé de côté les activités avec contexte dans le cadre de nos activités d'initiation à la preuve.

3.6 Les objectifs de chacune des expérimentations

3.6.1 Expérimentation 1

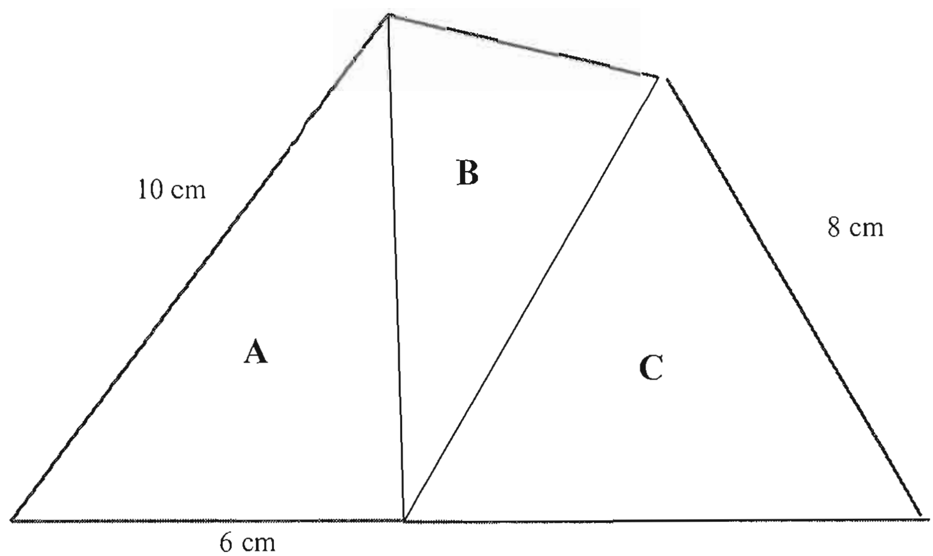
Activité 1 : Périmètre de triangles

Ce pré-test a pour but de connaître les intuitions et les habitudes des élèves lors de la résolution de problèmes de géométrie. De façon plus précise, nous voulons, par cette activité, connaître la manière avec laquelle les élèves travaillent les triangles et leurs attributs. De plus, le problème posé laisse la possibilité aux élèves de travailler avec leurs instruments de mesure selon leur désir. Ainsi, il nous est possible de vérifier si les élèves utilisent les outils intellectuels tels que la déduction ou s'ils leur préfèrent les instruments de mesure pour résoudre des problèmes de géométrie simple.

--

Activité 1[4]

La figure suivante est composée d'un triangle équilatéral (C), d'un triangle isocèle (B) et d'un triangle scalène (A). Le périmètre en rouge de la figure mesure 36,2 cm. On veut trouver le périmètre de chacun des trois triangles. Toutefois, certaines mesures sont manquantes. Trouvez ces mesures et calculez le périmètre de chacun des trois triangles.



Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

Activité 2 : Motif de carreaux

Il s'agit d'une activité d'exploration dans la mesure où nous voulons observer le comportement des élèves. Dans le cas présent, les grandeurs sur la figure fournie aux élèves sont truquées afin de nous permettre de mieux identifier les élèves qui travaillent avec la règle et ceux qui résolvent le problème de façon déductive. En effet, les carreaux ne sont pas des carrés, mais bien des rectangles pour la plupart. De plus, ce problème nous permet aussi d'explorer l'aire et de vérifier les connaissances des élèves à ce sujet. Le contexte est permis dans cette activité puisqu'il s'agit du pré-test et donc d'une phase d'exploration des connaissances des élèves.

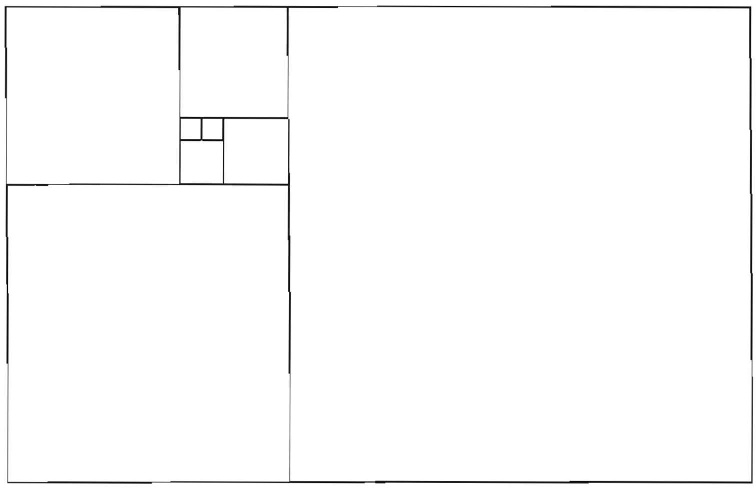
[4] Il est à noter que les mesures étaient exactes dans le formulaire remis aux élèves.

Activité 2[5]

On veut recouvrir le dessus d'une petite table avec des carreaux de céramique qui ont la forme suivante. Le motif est créé à partir de carreaux de forme carrée. Les deux plus petits carreaux mesurent 0,5 cm de côté. Tous les autres carreaux ont des dimensions différentes et ils sont toujours plus grands.

a) Quelle est l'aire totale de ce motif?

b) Si pour recouvrir la table on doit utiliser 10 pièces identiques au motif ci-dessous, quelle est l'aire de la table?



Décrivez en détail toutes les étapes de votre démarche.

Activité 3 : Angles manquants 3 triangles

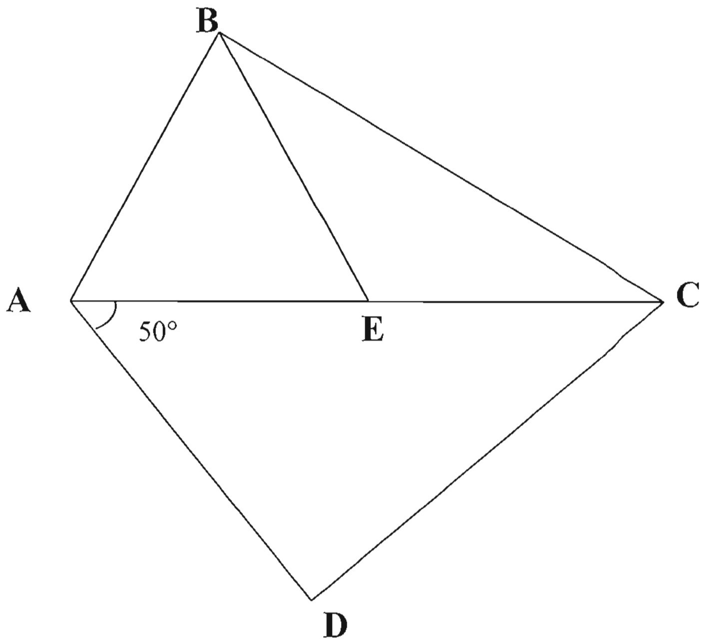
Encore une fois, l'objectif de cette activité est de cerner où en sont les élèves en ce qui a trait à la géométrie et au raisonnement déductif. Comme pour l'activité 1, le savoir associé concerne les triangles. Cependant, dans cette activité, ce ne sont plus les mesures de côtés qui sont en jeu, mais les mesures des angles. Ainsi, nous vérifions de quelle manière les élèves résolvent des problèmes simples de géométrie du triangle : si l'utilisation du rapporteur d'angles est courante ou si la déduction est favorisée. Pour faciliter le travail lors de l'analyse des productions, les triangles ne sont pas tout à fait conformes à l'énoncé, par exemple les

[5] Le problème est inspiré d'un problème de la collection Clicmath, manuel B, volume 2.

angles ne sont pas tous de 60 degrés dans le cas du triangle équilatéral. De cette façon, il est plus facile de vérifier quelle méthode est réellement utilisée par les élèves.

Activité 3

La figure suivante est composée d'un triangle équilatéral, d'un triangle rectangle et d'un triangle isocèle. Trouvez tous les angles manquants à l'intérieur de cette figure.



Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

3.5.2 Expérimentation 2

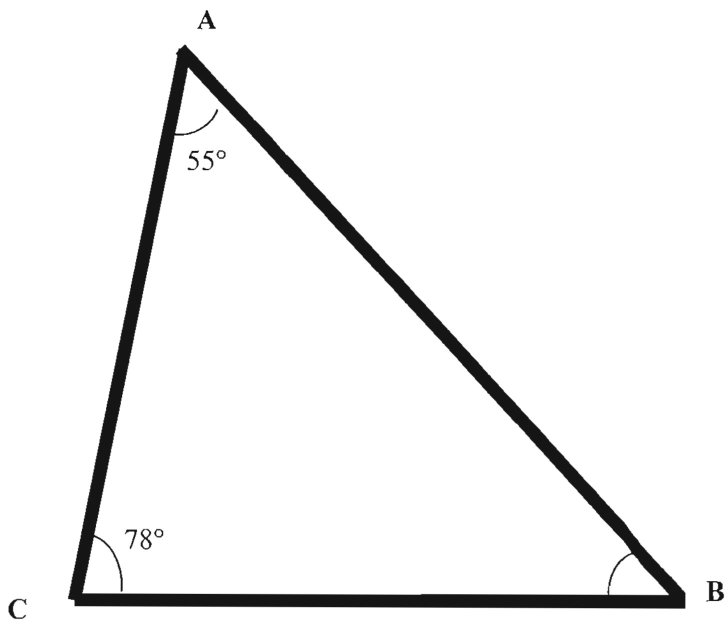
Activité 1 : Somme des angles d'un triangle

Cette activité consiste à soumettre un triangle aux élèves sur lequel la mesure de deux des trois angles est identifiée et les élèves doivent trouver la mesure manquante. Il est à noter que le triangle est tracé avec un trait très gras. Ainsi, il est difficile pour les élèves de mesurer de façon précise. L'utilisation du trait gras a deux objectifs principaux. D'un point de vue pratique, il permet d'identifier plus facilement les élèves ayant recours au mesurage puisqu'il est plus difficile d'obtenir la mesure de l'angle juste. D'un point de vue didactique, nous voulons amener les élèves à se distancer de l'utilisation du rapporteur d'angles. En effet, l'un des objectifs de l'activité est de placer les élèves dans une situation où le rapporteur d'angles n'est pas approprié pour résoudre un problème. Ainsi, nous souhaitons qu'ils choisissent une autre démarche, soit la déduction. C'est aussi pour cette raison que nous avons exigé deux démarches de leur part ainsi qu'un retour sur les démarches choisies. Le retour est souhaitable, car il permet à l'élève de revoir ses démarches pour en dégager la plus appropriée.

Activité 1

Mesure de l'angle A = 55degrés

Mesure de l'angle C = 78 degrés



1.a) Trouvez la mesure de l'angle B.

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

b) Trouvez la mesure manquante d'une autre façon.

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

c) Est-ce qu'il y a une différence avec la réponse trouvée en 1a) ? Si oui, expliquez pourquoi.

Activité 2 (Somme des angles et angle plat)

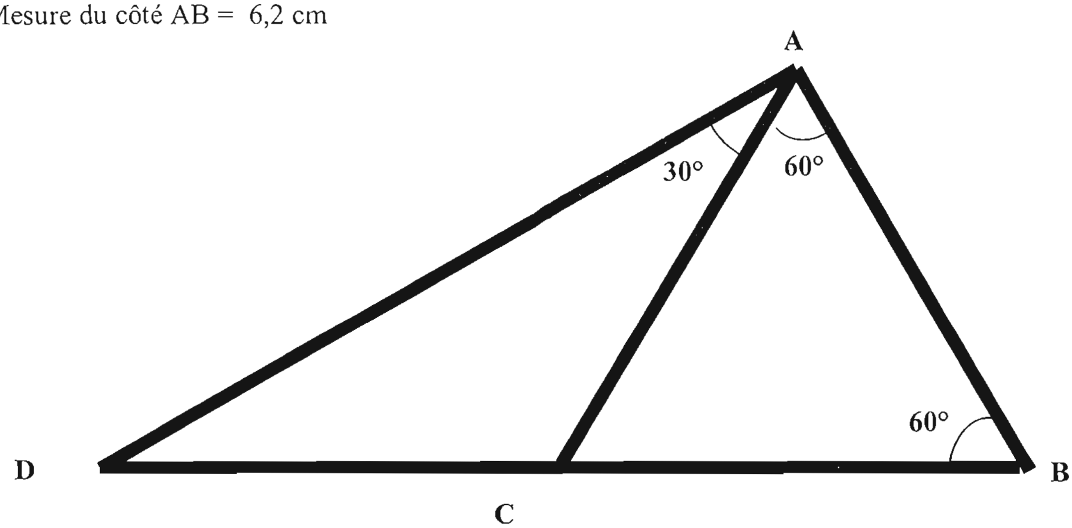
Les visées de l'activité 2 sont les mêmes que celles de l'activité 1 de cette même expérimentation, c'est-à-dire remettre en question la fiabilité du mesurage, et ce, par l'utilisation du trait gras.

La première partie du problème soumis aux élèves concerne les angles et peut se résoudre de deux façons différentes en utilisant la déduction, soit en utilisant directement la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle (triangle ABD) ou en complétant d'abord le triangle ABC, puis en trouvant l'angle complémentaire ACD pour ensuite utiliser la propriété sur la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle (triangle ACD). Pour ce qui est de la sous-question sur les mesures des côtés, elle nécessite plus d'un pas de déduction. En fait, pour la résoudre les élèves doivent mettre de l'avant ce que nous avons qualifié de *transitivité*, c'est-à-dire utiliser la transitivité de l'égalité pour obtenir l'information voulue. Cette sous-question est donc plus difficile pour les élèves.

De plus, il est nécessaire de mentionner que nous voulons aussi travailler sur des mesures de côtés et pas seulement sur la mesure des angles. Nous faisons l'hypothèse que les élèves doivent se détacher et du rapporteur d'angles et de la règle pour donner du sens à l'utilisation de la déduction en géométrie.

Activité 2

Mesure du côté AB = 6,2 cm



1.a) Trouvez la mesure de l'angle D et la mesure du côté CD.

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

b) Trouvez les mesures manquantes d'une autre façon?

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

c) Est-ce qu'il y a une différence avec les réponses trouvées en 1a) ? Si oui, expliquez pourquoi.

3.5.3 Expérimentation 3

Activité 1 : Losange

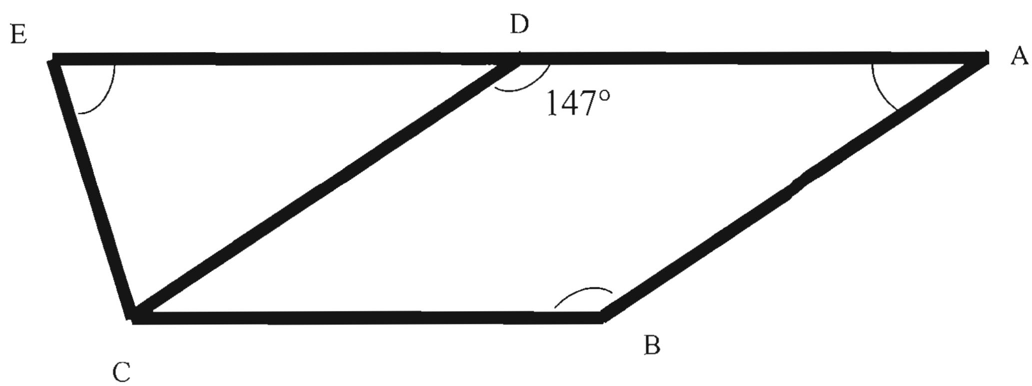
Pour cette activité, nous poursuivons avec l'utilisation des traits gras, mais cette fois nous avons choisi de travailler sur une nouvelle figure géométrique : le losange. Les élèves connaissent cette figure, mais elle ne leur ait pas aussi familière que le triangle. L'utilisation de cette figure nous oblige donc à indiquer dans la question une propriété que les élèves ne connaissent pas afin de leur permettre d'entrer dans l'activité. Nous avons indiqué la propriété dans un langage familier l'élève pour en faciliter la compréhension.

La question 2 de cette activité a pour objectif de faire prendre conscience aux élèves de toutes les propriétés qu'ils connaissent se rattachant au problème qui leur est posé. Nous pensons que le fait d'avoir énoncé les propriétés va aider les élèves à résoudre le problème à partir de celles-ci. C'est pourquoi en 2.b), nous leur demandons de résoudre le problème à partir des propriétés identifiées précédemment.

Activité 1

Soit ABCD, un losange. D est le point milieu du côté AE.

<u>**On sait que la somme des 4 angles du losange est de 360 degrés.**</u>



1. a) Trouvez la mesure des angles A, B et E.

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

2. Trouvez les mesures manquantes d'une autre façon

a) Pour vous aider, énumérez les propriétés du losange contenues dans votre boîte à outils. <u>Énumérez seulement les propriétés qui peuvent être utiles pour ce problème.</u>

b) À l'aide des propriétés énumérées, trouvez les mesures des angles A, B et E. Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

c) Est-ce qu'il y a une différence avec les réponses trouvées en 1a) et celles trouvées en 2 b) ? Si oui, expliquez pourquoi.

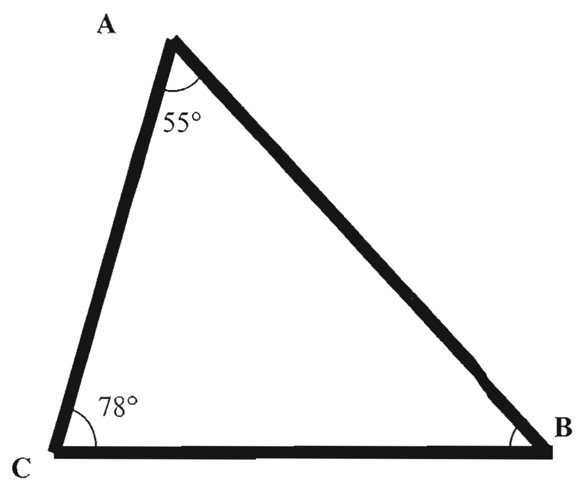
d) Est-ce qu'il y a une méthode qui assure un résultat plus précis? Expliquez pourquoi.

3.5.4 Expérimentation 4

Activité1 (retour Somme des angles d'un triangle)

L'objectif de cette expérimentation est de vérifier quelle utilisation de la mesure font les élèves dans des activités de géométrie. Pour ce faire, nous avons choisi de revenir sur des activités qu'ils avaient déjà réalisées en modifiant les questions. Nous souhaitons obtenir les réflexions des élèves quant aux différents outils disponibles pour résoudre le problème posé.

Activité 1 (retour sur l'expérience 2)



Voici la solution de deux élèves qui veulent trouver la mesure de l'angle B. :

Élève 1 : Avec son rapporteur d'angles, il mesure l'angle B et trouve 48 degrés.

Élève 2 : À partir de la propriété de la somme des angles d'un triangle, il fait le calcul suivant : 180 -55-78 = 47. Il affirme donc que l'angle B mesure 47 degrés.

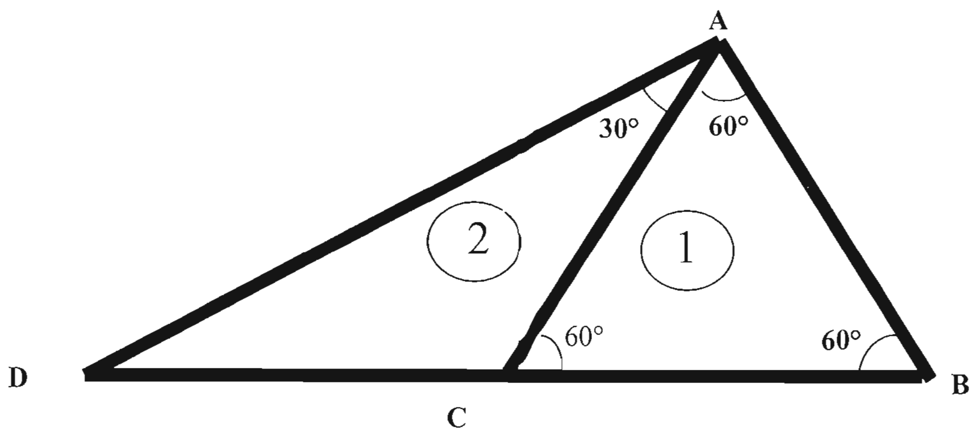
À ton avis, qui a raison? Explique ta réponse.

Activité 2 (retour Somme des angles et angle plat)

Encore une fois, nous voulons revenir sur des activités que les élèves ont déjà rencontrées, mais dont les analyses avaient mis en relief les difficultés éprouvées à mettre la déduction au premier plan. Pour cette activité, nous avons modifié la question afin de pousser les élèves à délaisser la mesure pour résoudre le problème. En effet, il ne s'agit pas de voir s'ils vont utiliser leur règle, mais plutôt d'essayer de voir si les élèves sont en mesure de résoudre le problème sans utiliser les instruments de mesure.

Activité 2 (retour sur l'expérience 2)

Mesure du côté AB = 6,2 cm



1.a) Sans rapporteur d'angles, est-il possible de trouver les mesures des angles C et D du triangle 2? Si oui, comment ?

1. b) Un élève qui n'a pas de règle affirme que le côté CD mesure 6,2 cm. Est-ce qu'il a raison? Explique ta réponse.

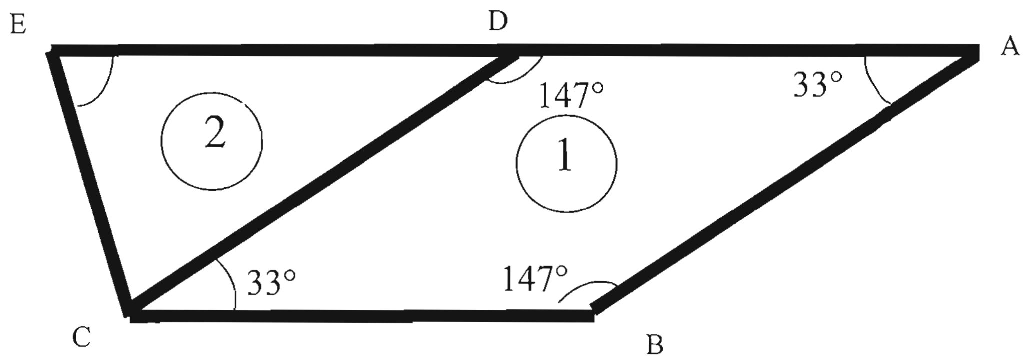
Activité 3 : Retour Losange

Nous avons modifié quelque peu la question que nous avions donnée aux élèves lors de l'expérience 3. Nous tenons à préciser que la question ne permet pas d'évaluer le jugement de l'élève sur le choix de l'artéfact ou de la déduction puisque la question incite à la déduction.

Nous voulons plutôt déterminer dans quelle mesure les élèves sont capables de résoudre le problème si nous leur demandons de le faire sans instruments de mesure.

Activité 3 (retour expérience 3)

Soit ABCD, un losange. D est le point milieu du côté AE.



1. a) Sans instrument de mesure, est-il possible de prouver que le triangle 2 est isocèle ? Explique ta réponse.

Rappel : D est le point milieu du côté AE.

1.b) Est-il possible de trouver les angles du triangle 2 sans rapporteur d'angles? Explique ta réponse.

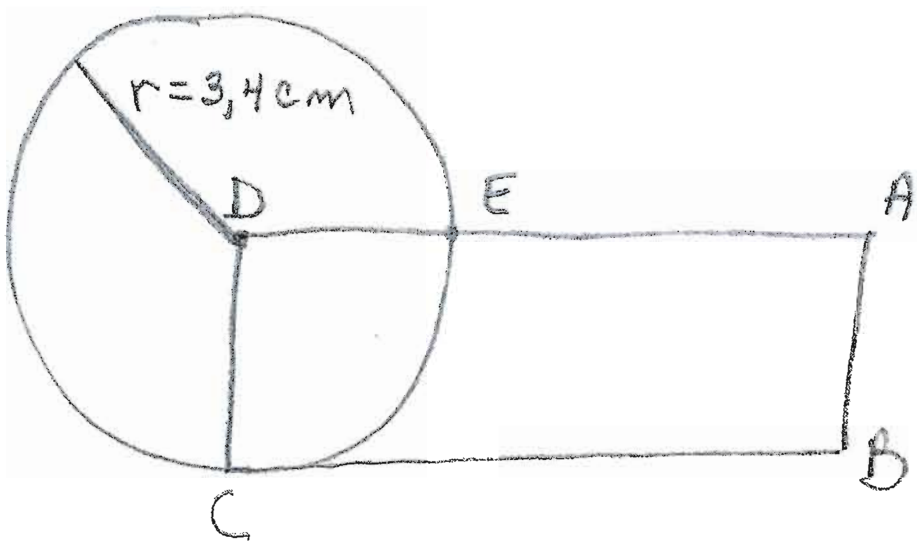
3.5.5 Expérimentation 5

Activité 1 : Le cercle à main levée

L'idée de cette expérimentation est de proposer aux élèves des figures à main levée. Cette décision a été prise pour faire suite au travail effectué avec des figures à trait gras. Dans les activités précédentes, les figures étaient tracées avec un trait gras afin de provoquer une réaction chez les élèves quant à la justesse de la mesure à la règle ou au rapporteur d'angles. Poursuivant sur cette lancée, nous voulons nous assurer que les instruments de mesure ne soient pas utilisés par les élèves afin de forcer le développement de leur capacité à raisonner déductivement en géométrie. De plus, les savoirs en jeu dans l'activité se distinguent des autres activités, puisque l'activité se concentre sur le cercle. Cependant, il est à noter que le cercle est une figure géométrique familière pour les élèves de 6^e année.

Activité 1

Un élève effectue le dessin suivant à main levée. Sur cette figure, ABCD est un rectangle dont le côté BC mesure 8 cm. L'élève a également tracé un cercle de centre D.



a) Trouvez le périmètre du rectangle ABCD. Expliquez votre démarche.

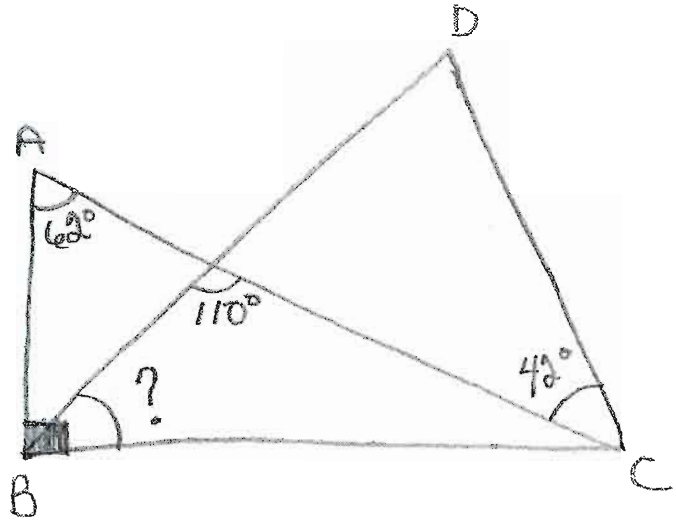
b) Trouvez la mesure du segment AE. Expliquez votre démarche.

Activité 2 : Les triangles à main levée

Dans la continuité de l'activité précédente, l'activité 2 a pour objectif de forcer les élèves à résoudre un problème de géométrie sans avoir recours au rapporteur d'angles. En effet, la figure qui est à leur disposition est un dessin à main levée et elle leur est présentée comme telle. Pour se distancer de l'activité 1, les savoirs mis en jeu sont relatifs aux triangles et à leurs attributs. Pour résoudre le problème, les élèves doivent passer par plus d'une étape et travailler sur au moins deux triangles distincts, c'est-à-dire que la solution n'apparait pas après l'application d'une simple propriété, il doit y avoir un enchaînement. Il s'agit d'une activité assez difficile pour un élève de 6^e année.

Activité 2

Un élève effectue le dessin suivant à main levée.



a) Trouvez la mesure de l'angle recherché. Expliquez votre démarche.

3.5.6 Expérimentation 6

Activité 1 : Carré et triangle à main levée

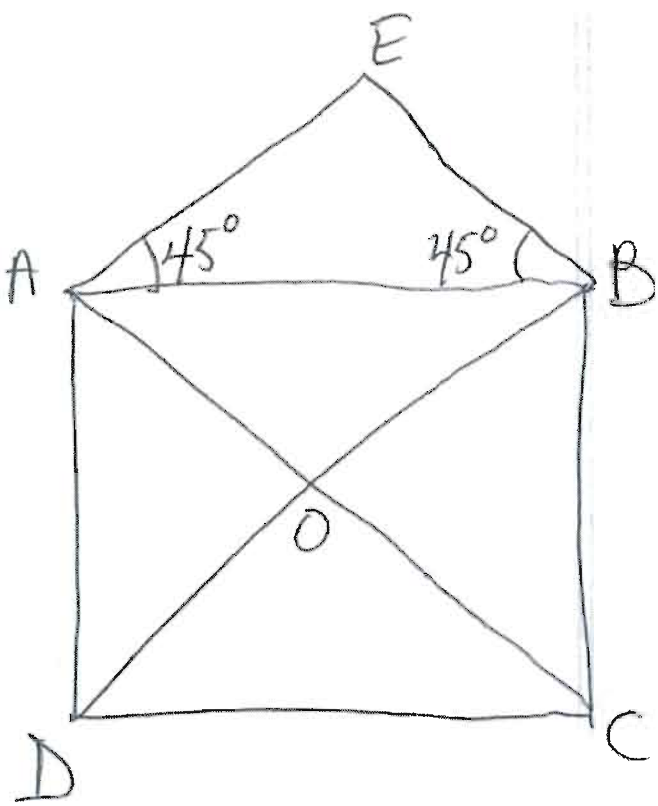
L'activité proposée souhaite renforcer le détachement des élèves par rapport aux instruments de mesure. Les savoirs en jeu correspondent à des figures fréquemment utilisées dans les activités mathématiques de l'école primaire, c'est-à-dire le carré et le triangle. Cependant, une difficulté est présente quant au travail à effectuer sur le carré. En effet, afin de résoudre de façon complète le problème, il faut connaitre les conditions nécessaires et suffisantes pour affirmer qu'une figure géométrique est un carré. Ce type de travail n'est pas familier aux élèves et fait partie du niveau 3 de van Hiele, soit le niveau de déduction informelle qui est un niveau élevé dans la théorie de ce dernier.

Activité 1

Un élève effectue le dessin suivant à main levée. Sur cette figure, ABCD est un carré avec les diagonales AC et BD qui se croisent au point O. Ensuite, l'élève dessine un triangle ABE sur le dessus du carré.

Ce dernier affirme finalement que le quadrilatère AEBO est un carré.

Note : Dans un carré, les diagonales se coupent au milieu perpendiculairement.



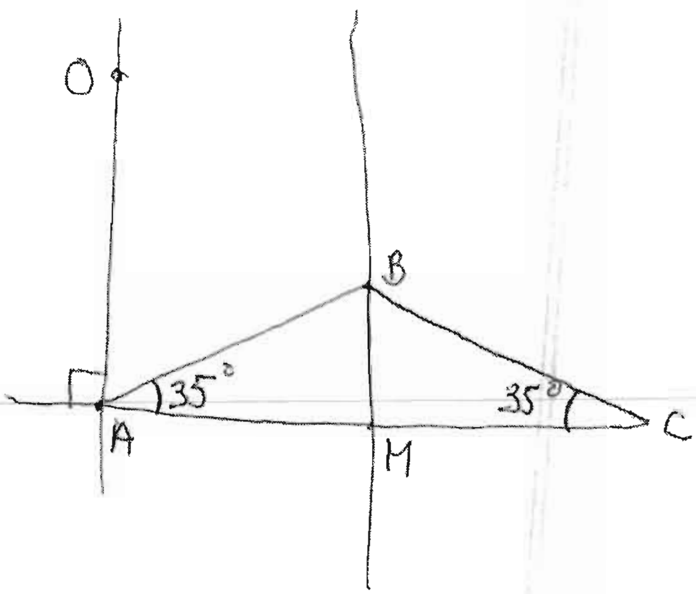
Est-ce qu'il a raison? Expliquez votre réponse.

Activité 2 : Les droites parallèles

Cette deuxième activité souhaite aussi éloigner les élèves des démarches instrumentées dans la résolution de problèmes de validation. Les droites n'étant pas tracées correctement à la règle, il est impossible pour les élèves de vérifier le parallélisme de deux droites à l'aide de leur équerre ou de tout autre instrument de mesure. Les savoirs en jeu font référence au triangle, mais cette fois nous y avons ajouté la notion de droites parallèles qui est sensée être connue des élèves de 6e année. Cependant, leur définition n'étant pas opérationnelle pour ce problème, nous leur avons donné l'indice suivant : 2 droites coupant une même droite avec le même angle sont parallèles.

Activité 2

Un élève effectue le dessin suivant à main levée. Sur cette figure, les triangles AMB et BCM sont congrus. Montrer que les droites AO et BM sont parallèles.



Expliquez votre réponse.

3.5.7 Expérimentation 7

Activité 1 : Somme des angles dans un polygone

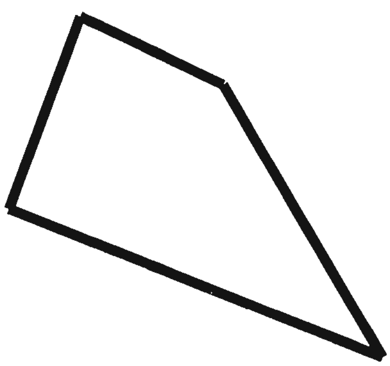
Cette expérimentation est principalement une activité de découverte pour les élèves. En effet, les élèves ont tout en main pour découvrir à leur rythme les propriétés concernant la somme des mesures des angles intérieurs des polygones. En même temps, il nous est possible, par l'entremise de cette activité de vérifier dans quelle mesure les élèves sont aptes à induire des propriétés suite à quelques observations de leur part. Finalement, il s'agit aussi de la première activité où les élèves doivent générer de la nouvelle théorie.

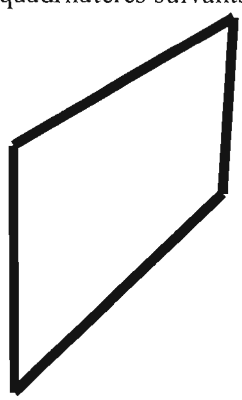
Activité 1

1 a) Quelle est la somme des angles du quadrilatère suivant ?

Explique ta réponse.

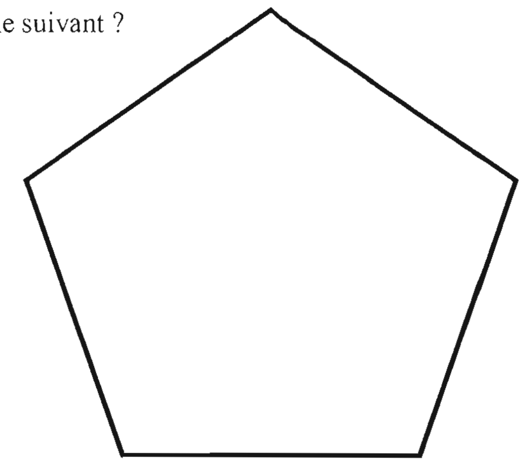
1 b) Est-ce que tu obtiens le même résultat avec les deux quadrilatères suivants ?





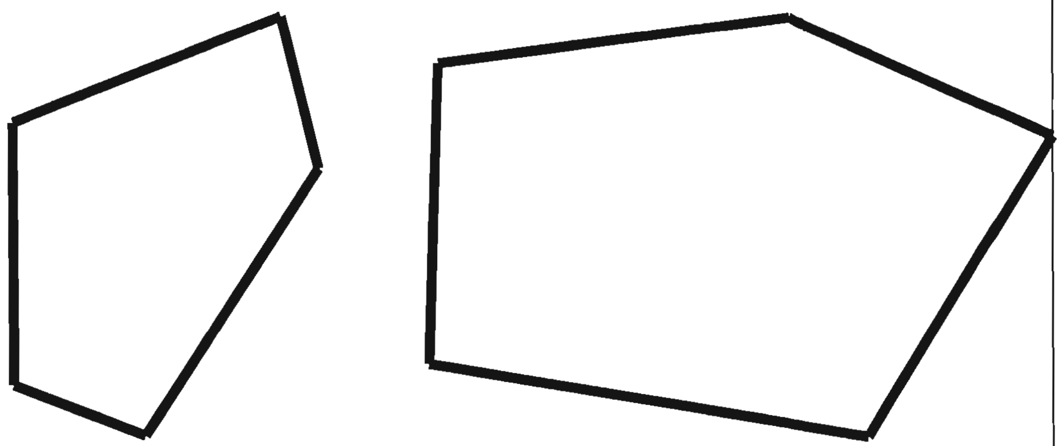
Explique ta réponse.

2 a) Quelle est la somme des angles du pentagone suivant ?



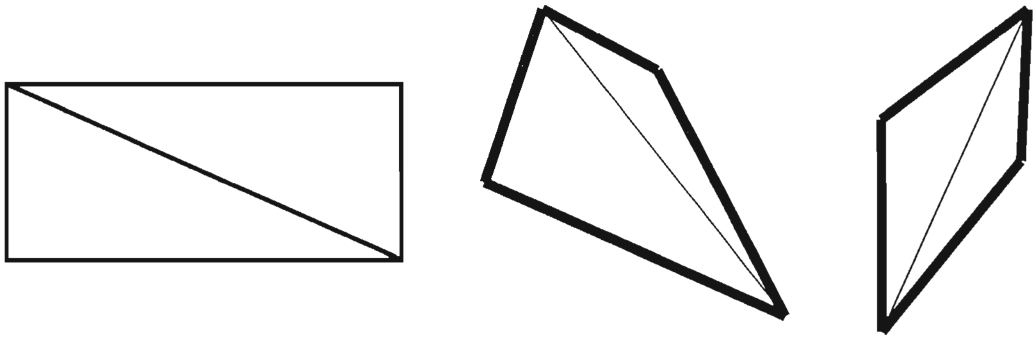
Explique ta réponse.

2 b) Est-ce que tu obtiens le même résultat avec les deux pentagones suivants :



Explique ta réponse.

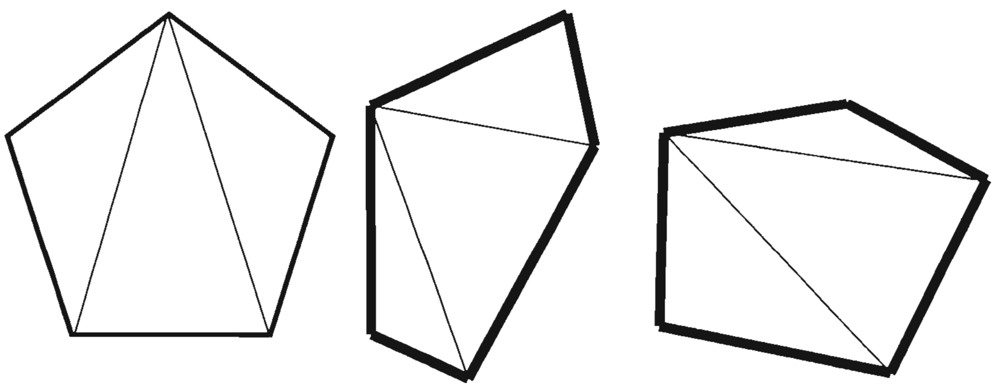
3 Dans les quadrilatères précédents, nous avons tracé des triangles comme suit.



3 a) Qu'est-ce qu'on peut dire sur la somme des angles de ces quadrilatères ? Explique ta réponse.

3 b) Est-ce que ta réponse est vraie pour tous les quadrilatères ? Explique ta réponse.

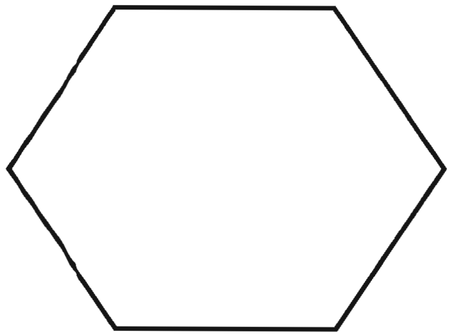
4. Dans les pentagones précédents, nous avons tracé des triangles comme suit.



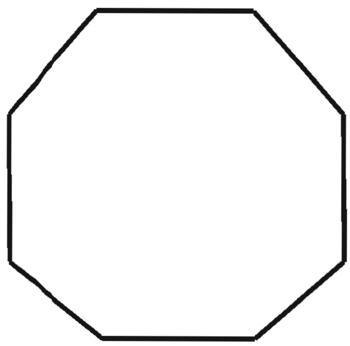
4. a) Que peut-on dire sur la somme des angles de ces pentagones ? Explique ta réponse.

4. b) Est-ce que ta réponse est vraie pour tous les quadrilatères ? Explique ta réponse.

5 Sans utiliser ton rapporteur d'angle, est-ce que tu peux trouver la somme des angles des figures suivantes ?



5. a) Explique ta réponse.



5. b) Explique ta réponse

6. Complète le tableau ci-dessous pour trouver une formule qui permet de calculer combien on peut former de triangles dans un polygone, connaissant le nombre de côtés.

Nom du polygone	Nombre de côtés	Nombre de triangles	Somme des angles
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		

a) Utiliser le résultat précédent pour trouver une formule qui permet de calculer la somme des angles d'un polygone, étant donné le nombre de ses côtés.

b) Quelle serait la somme des angles d'un polygone à 12 côtés ?

3.5.8 Expérimentation 8

Activité 1 : Comparaison d'aire

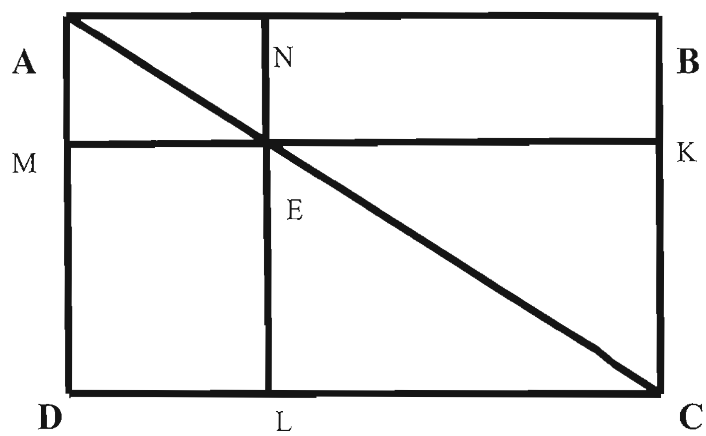
Cette activité est une activité d'exploration. L'élève se trouve dans une situation où il n'y a aucune valeur numérique dans le problème, mais où on lui demande de comparer des aires. Mentionnons qu'il s'agit d'un problème semblable à celui présenté par Arsac et coll. (1992). Ce problème est difficile à résoudre pour les élèves puisqu'ils ne peuvent appuyer leur raisonnement sur la mesure celle-ci menant à des calculs avec des nombres irrationnels. Nous voulons connaître leurs réactions face à ce genre de problème, vont-ils avoir recours directement à une démarche instrumentée ou non.

Activité 1

ABCD représente un rectangle tel que AB = 8 cm et BC = 5 cm. Le point E est l'intersection des trois segments. LN est parallèle à AD et MK est parallèle à DC.

AE = 3cm

Est-ce que les rectangles BKEN et DMEL ont <u>exactement</u> la même aire ?



1 a) Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

1b) Comparez vos résultats avec une équipe voisine et vérifiez si vous avez la même réponse.

1c) Si vos résultats sont différents, expliquez pourquoi.

1d) Est-ce possible de répondre à la question sans utiliser la règle ? Expliquez votre réponse.

3.5.9 Expérimentation 9

Activité 1 : Post-test

Cette expérimentation est un retour sur la première expérimentation. En effet, nous avons repris presque intégralement les expérimentations de la première séance afin de pouvoir observer concrètement la réaction des élèves. Le temps écoulé entre la première et la dernière expérimentation étant assez long, cela nous permet d'affirmer que les élèves ne répondent pas sur la base de ce qu'ils ont répondu précédemment.

3.6 Modes d'analyse des résultats

3.6.1 Le premier niveau d'analyse

Nous avons fait une première analyse des productions des élèves. Cette première analyse s'est faite de façon personnalisée pour chacune des activités. Plus précisément, nous avons regardé l'ensemble des productions des élèves pour une activité et avons tenté de les regrouper selon leurs ressemblances. Ainsi, nous obtenons une première classification. Celle-ci, bien que personnalisée offre l'avantage d'avoir une structure semblable pour l'ensemble des expérimentations, ce qui facilitera l'analyse de l'ensemble des séquences. Une fois cette première analyse complétée, nous avons compilé l'ensemble des données obtenues à l'intérieur d'un tableau. Pour ce travail, nous avons mis tous les élèves dans un même groupe, et ce, peu importe la classe dans laquelle ils évoluent à l'école.

3.6.2 Le deuxième niveau d'analyse

Le deuxième niveau d'analyse a pour but de relier le premier niveau d'analyse avec les paradigmes géométriques pour en dégager les changements de paradigmes et pouvoir situer les élèves à l'intérieur d'un paradigme dans une activité donnée. Pour ce faire, nous reprenons chacune des activités des élèves et regroupons les démarches semblables. Par la suite, on classe ces démarches dans un paradigme géométrique. Nous pensons que ce classement nous donnera l'heure juste sur les paradigmes géométriques en jeu pour chacune équipe pour chaque activité. Ce regroupement par paradigme géométrique s'est fait à partir du tableau 3.1 et de l'analyse a priori des démarches envisagées pour chacune des activités. Par exemple, nous regardons si l'élève utilise un instrument de mesure, s'il utilise la définition de l'objet géométrique, s'il utilise sa perception de la figure ou encore s'il utilise des propriétés et le raisonnement déductif dans sa démarche. Une fois, cette première observation effectuée, on associe l'élève à un paradigme ou encore à une démarche mixte, s'il utilise des éléments appartenant à plusieurs paradigmes dans un même problème.

Une fois toutes les démarches des élèves classées, nous nous proposons de faire un graphique exprimant l'évolution des paradigmes géométriques à travers les différentes activités proposées. Cette analyse se fait pour l'ensemble des élèves et non pas pour chacun des élèves de façon individuelle. Nous espérons ainsi, obtenir une image globale de la situation afin de pouvoir déterminer quelles sont les activités qui favorisent un changement quant aux paradigmes géométriques dominants chez les élèves.

CHAPITRE IV : ANALYSE

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les analyses et les résultats obtenus aux activités que nous proposons aux élèves de 6^e année (voir section 3.5.1). Ce chapitre présente les expérimentations selon l'ordre dans lequel elles ont été vécues par les élèves. Pour chacune des activités nous faisons une analyse a priori, un classement des démarches envisagées selon l'échelle de van Hiele et nous y ajoutons une analyse eu égard aux paradigmes géométriques de ces mêmes solutions potentielles. De plus, une analyse des résultats obtenus est aussi présentée pour chacune des activités. Finalement, nous terminons le chapitre par une discussion autour d'un graphique temporel représentant l'évolution de la fréquence de présence des différents paradigmes dans les démarches des élèves.

Tout d'abord, spécifions chacune des sections afin d'en expliquer les objectifs. L'analyse a priori nous permet de définir les démarches possibles et celles auxquelles nous nous attendons de la part des élèves. Ceci nous fournit les outils nécessaires à la préparation de l'expérimentation en nous indiquant les éléments de difficulté et les erreurs potentielles en plus d'orienter l'analyse des réponses des élèves. En ce qui a trait à l'analyse des démarches selon l'échelle de van Hiele, celle-ci est intimement reliée à l'analyse des paradigmes géométriques. En effet, comme l'illustre la grille (voir tableau 3.1), il est possible de relier les niveaux de van Hiele aux paradigmes de Parzysz (2002). Par exemple, on sait que le niveau 1 est associé au paradigme spatiographique tandis que le niveau 3 est associé au paradigme protoaxiomatique. Ainsi, nous pouvons grâce au niveau de van Hiele situer quelques démarches d'élèves à l'intérieur d'un paradigme. Cependant, en ce qui a trait aux solutions classées dans le niveau 2 de van Hiele, celles-ci doivent faire l'objet d'une analyse selon les éléments qui définissent les paradigmes puisqu'elles se situent à cheval entre la géométrie spatiographique et la géométrie protoaxiomatique. Ainsi il sera possible de trancher et de choisir le paradigme associé. De cette façon, nous obtenons deux outils complémentaires nous permettant de classer les réponses obtenues en termes de paradigmes géométriques. Finalement, nous présentons un graphique récapitulatif illustrant les démarches utilisées par les élèves pour chacune des activités. Ce graphique nous permet de voir l'évolution des élèves en fonction des paradigmes utilisés à travers nos expérimentations.

4.2 Analyse des résultats

4.2.1 L'expérimentation 1

Rappelons que nous avons utilisé cette première rencontre avec les élèves pour leur soumettre un pré-test afin de connaitre quelles sont leurs intuitions et leurs habitudes lors de la résolution de problèmes de géométrie.

Activité 1

<u>Analyse a priori</u>

Il est envisageable que les élèves utilisent leurs instruments de mesure pour accomplir la tâche. Toutefois, nous nous attendons à ce que certains élèves utilisent le raisonnement déductif ainsi que le codage à même la figure. Nous faisons aussi l'hypothèse qu'une fois la figure codée, les élèves seront à même d'effectuer les calculs nécessaires et de trouver 4,2 cm comme mesure manquante.

Niveaux de van Hiele

Un élève qui a utilisé au moins une des propriétés des triangles est considéré au niveau Analyse (niveau 2). Si la mesure seule est présente, on ne peut le considérer à ce niveau, on doit le considérer au niveau Identification (niveau 1). Finalement, un élève qui code tous les triangles est considéré au niveau de Déduction Informelle (niveau 3). Les trois niveaux sont possibles pour cette tâche.

Paradigmes géométriques

Les productions qui ont été réalisées uniquement de façon instrumentée sont classées dans le paradigme de spatiographique, tandis que celles où les propriétés ont été exclusivement utilisées sont plutôt associées au paradigme protoaxiomatique. Il est possible que les élèves utilisent la mesure et les propriétés. Dans ce cas, nous les classons dans une démarche mixte.

Analyse

Après une première évaluation, nous avons classé les démarches des élèves en deux catégories distinctes : mesure et mixte. Cependant, nous y avons ajouté la catégorie déduction, puisque c'est vers cette catégorie que nous désirons amener les élèves et que cette démarche fait partie de notre analyse a priori. On observe une forte majorité de démarches basées sur la mesure, dans ce cas-ci, plus de 56% des élèves ont utilisé strictement la mesure. Or, la catégorie mixte inclut tous les élèves qui ont utilisé la déduction et le mesurage de façon complémentaire. En effet, beaucoup d'élèves ont commencé par la déduction pour le triangle équilatéral et ont ensuite changé de paradigme pour utiliser la mesure. Par conséquent, on ne peut pas affirmer que la déduction est absente des démarches d'élèves.

Tableau 4.1 Résultats Expérience 1, Activité 1

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Déduction	0	Protoaxiomatique
Mixte	23	Mixte
Mesure	30	Spatiographique

Activité 2

Analyse a priori

Il est possible que certains élèves n'utilisent d'aucune façon les informations fournies à l'écrit dans l'énoncé du problème, c'est-à-dire que les deux plus petits carreaux mesurent 0,5 cm de côté et que les carreaux sont en fait des carrés. Ces élèves seront amenés à mesurer directement sur la figure pour obtenir son aire totale.

Une autre approche sera vraisemblablement celle de l'expert. Dans ce cas, on utilise l'énoncé du problème pour déduire que le carré suivant mesure 1 cm de côté et ainsi de suite. Cette démarche est uniquement construite autour de déductions simples.

Niveaux de van Hiele

Un élève qui a laissé des traces de mesure sur la figure doit pour sa part être considéré au niveau Identification (niveau 1) s'il a accepté que certaines figures mesurées ne respectent pas les propriétés des carrés. Effectivement, le dessin fourni à l'élève ne respecte pas les proportions du carré. Cependant, si l'élève a essayé de raffiner sa technique pour obtenir les mesures les plus précises possible, on peut le placer dans le niveau supérieur, soit le niveau Analyse (niveau 2).

Tous les élèves qui n'ont pas fait appel aux instruments de géométrie pour résoudre le problème, se situent, quant à eux au niveau Déduction informelle (niveau 3) puisqu'ils sont en mesure de mettre en relation des propriétés.

Paradigmes géométriques

La formulation de la question ne plaçait pas directement l'élève dans un des paradigmes géométriques. On peut considérer qu'un élève ayant eu recours à la mesure est en géométrie spatiographique. Le passage à la géométrie protoaxiomatique est fait seulement par les élèves qui utilisent la figure comme appui à leur raisonnement et non pas comme objet de raisonnement. C'est pourquoi, seuls les élèves n'ayant eu aucun recours à une démarche instrumentée peuvent être considérés en géométrie protoaxiomatique.

Analyse

Il n'est pas surprenant de constater que près de 90% des élèves ont utilisé des démarches utilisant les modes de validation de la géométrique pratique, soit la perception ou la déduction. Ces élèves se situent par conséquent dans le paradigme géométrique spatiographique. Cependant, nous tenons à préciser que 2 élèves se sont distingués par l'utilisation à la fois de la perception et de la déduction. Ils ont émis une prémisse fausse issue de leur perception, mais ont par la suite, construit un raisonnement déductif. Bref, cette question a suscité beaucoup de difficulté aux élèves.

Tableau 4.2 Résultats Expérience 1, Activité 2

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Déduction	0	Protoaxiomatique
Perception/Déduction	2	Mixte
Perception	3	Spatiographique
Mesure	48	

Activité 3

Analyse a priori

Dans cette activité, l'élève n'a d'autre choix que d'utiliser sa perception visuelle dans un premier temps. En effet, on indique dans la consigne la présence d'un triangle équilatéral, d'un triangle rectangle et d'un triangle isocèle sans préciser lequel est lequel. L'élève doit donc le déduire sur la base de son intuition. Cependant, nous nous devons de spécifier qu'il s'agit d'une erreur de notre part. En effet, la formulation de la question ne devrait pas induire un paradigme géométrique. Il est donc possible que cette erreur ait induit chez l'élève une certaine confusion quant au paradigme géométrique dans lequel il se trouvait et par conséquent, quant à la méthode de validation à employer pour solutionner le problème. Une attention particulière a été apportée à la formulation des questions lors des expériences ultérieures afin de remédier à la situation et de nous assurer que les consignes n'induisaient pas un paradigme particulier.

Dans un premier temps, l'élève doit identifier que le triangle ABE est équilatéral, le triangle BCE isocèle et le triangle ACD rectangle en D. À partir de cette hypothèse, il peut conclure que les angles A, B et E mesurent 60° dans le triangle ABE. Par conséquent en utilisant les angles supplémentaires, il obtient que l'angle E du triangle BCE est de 120°. En utilisant la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle, il peut déduire que les angles B et C sont tous les deux de 30°. Finalement, de la même façon, il obtient que les angles du triangle ACD sont respectivement de 50°, 40° et 90°. Cette démarche, que l'on peut qualifier d'experte n'est pas celle qui est attendue de tous les élèves.

Effectivement, nous pensons que certains élèves vont plutôt opter pour une démarche instrumentée en utilisant un rapporteur d'angles. Dans ce cas-ci, cette démarche pourrait être uniquement instrumentée ou encore mixte, c'est-à-dire que les élèves utilisent la mesure et la déduction selon la circonstance. Plus précisément, nous pensons qu'il est probable que plusieurs élèves utilisent la déduction pour trouver les mesures des angles du triangle équilatéral puisqu'il s'agit d'une propriété définissant la nature du triangle. Ensuite, ils poursuivront le problème à l'aide de leurs instruments de géométrie.

Niveaux de van Hiele

Un élève qui n'a utilisé aucun instrument et a répondu à la question uniquement en se basant sur sa perception des figures en donnant des angles caractéristiques des différents triangles se situe au niveau Identification (niveau 1) de l'échelle de van Hiele.

Cependant, les élèves ayant eu recours à la mesure et ayant utilisé un rapporteur d'angles se trouvent au niveau Analyse (niveau 2), car ils n'arrivent pas à indiquer les interactions entre les figures.

D'un autre côté, les démarches mixtes sont plus difficilement classables. Dans un premier temps, les élèves qui ont utilisé les propriétés pour le triangle équilatéral ABE ont une connaissance théorique de ce dernier, mais cette connaissance ne les amène pas à faire des liens et à pouvoir déduire les mesures des autres triangles par la suite. Ainsi, ces élèves se trouvent aussi au niveau Analyse des propriétés (niveau 2). Cependant, les élèves qui ont fait preuve de déduction dans le passage des informations sur un triangle à un autre triangle en utilisant l'angle supplémentaire sont plutôt au niveau Déduction informelle (niveau 3). Il en est de même pour les élèves qui ont utilisé la somme des angles intérieurs d'un triangle pour le triangle isocèle. En effet, il fallait dans ce cas utiliser cette propriété conjointement avec la propriété des angles du triangle isocèle.

Paradigmes géométriques

La formulation de la consigne situe l'élève initialement en géométrie spatiographique, puisque les triangles sont décrits comme équilatéral, isocèle et rectangle sans être nommés. Il est donc attendu que beaucoup d'élèves poursuivront dans ce même paradigme pour la suite du problème. Cependant, un élève qui utiliserait les propriétés des angles supplémentaires ainsi que la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle se situerait pour sa part en géométrie protoaxiomatique, et ce, malgré qu'il y ait utilisé sa perception puisque celle-ci était induite par le problème.

Analyse

De manière semblable aux activités 1 et 2, la mesure occupe une place de premier choix dans la résolution du problème. Elle est utilisée par une très forte majorité des élèves, soit 98%, et ce, même si les élèves connaissent les propriétés des triangles leur permettant de résoudre le problème par l'usage de la déduction. Cependant, en considérant que la perception était induite par la formulation de la consigne, il est normal que les élèves se soient situés principalement dans le paradigme spatiographique. En effet, il était mention de trois types de triangle dans la question, mais sans préciser quel triangle était de quelle nature. Il fallait utiliser la perception pour les identifier. Nous notons aussi que 15 élèves ont utilisé des éléments de validation de la géométrie théorique.

Tableau 4.3 Résultats Expérience 1, Activité 3

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Déduction	1	Protoaxiomatique
Mixte	12	Mixte
Mesure	40	Spatiographique

Bref, nous retenons du pré-test que les élèves se situent principalement dans le paradigme géométrique spatiographique puisqu'ils utilisent leur perception et la mesure comme mode de validation. Cependant, nous retenons aussi que certains utilisent la déduction, mais à l'intérieur d'une démarche mixte combinant mesure et déduction.

5.2.2 Expérience 2

Activité 1

Analyse a priori

Étant donné la formulation du problème et la figure utilisée, l'élève a entre les mains toutes les informations pour résoudre le problème en utilisant le raisonnement déductif. C'est pourquoi nous nous attendons à ce qu'une part des élèves fasse appel uniquement au raisonnement déductif en utilisant la propriété sur la somme des angles intérieurs d'un triangle pour obtenir la mesure de l'angle B, soit 47°, tandis que les autres élèves utiliseront vraisemblablement la mesure.

Niveaux de van Hiele

Selon notre analyse à priori, nous rencontrerons deux façons de résoudre ce problème. Dans le cas d'une démarche utilisant le raisonnement déductif, nous considérons que les élèves se situent dans la catégorie Analyse des propriétés (niveau 2), car il y a reconnaissance des propriétés communes à tous les triangles. Dans le cas d'une démarche utilisant la mesure nous classons cette résolution dans la catégorie Identification (niveau 1).

Paradigmes géométriques

Les paradigmes géométriques auxquels on s'attend sont dans un premier temps celui de la géométrie spatiographique, dans le cas des élèves travaillant avec le matériel qui leur est fourni, soit le rapporteur d'angles et la figure. Dans un deuxième temps, celui de la géométrie protoaxiomatique dans le cas des élèves utilisant les propriétés et la déduction de façon exclusive.

Analyse

Nous avons regroupé les démarches sous quatre différentes bannières pour la question 1.a), ce qui est différent des réponses prévues dans notre analyse a priori. En effet, beaucoup d'élèves ont jumelé plusieurs démarches. Voici les réponses observées :

1. Déduction à partir de la somme des angles (protoaxiomatique).

2. Utilisation du rapporteur d'angles et de la déduction (mixte) : Les élèves ont utilisé leur rapporteur d'angles, mais ils ont validé leurs résultats avec la propriété sur la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle.

3. Utilisation du rapporteur d'angles avec erreur (spatiographique) : La valeur obtenue ne respectait pas la propriété sur les angles intérieurs d'un triangle.

4. Utilisation du rapporteur d'angles sans erreur (spatiographique) : Les élèves ont mesuré correctement la mesure de l'angle manquant malgré le trait gras ou encore ils ont modifié la mesure obtenue afin de respecter la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle. Cependant, nous ne connaissons pas la raison sous-jacente à la modification de leur réponse. Il peut s'agir du désir d'avoir des mesures entières ou encore de respecter les propriétés. Ces élèves n'ayant pas explicité leur réflexion, ils n'ont pu être classés dans une démarche mixte.

Tableau 4.4 Résultats Expérience 2, Activité 1.a)

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
1.	7	Protoaxiomatique
2.	2	Mixte
3.	19	Spatiographique
4.	22	

Nous avons regroupé les démarches sous 4 catégories de réponse pour la question 1.b).

1. Utilisation du rapporteur d'angles en a) et de la déduction en b).

2. Utilisation de la déduction en a) et du rapporteur d'angles en b).

3.. Utilisation du rapporteur d'angles en a) et validation visuelle par estimation de la mesure en b).

4. Réponse inadéquate.

Tableau 4.5 Résultats Expérience 2, Activité 1.b)

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
1.	37	Mixte
2.	7	
3.	4	Spatiographique
4.	2	Indéfini

Dans cette activité, la majorité des élèves (44 élèves) a fourni des réponses mixtes et seulement 4 élèves sont restés à l'intérieur d'un seul paradigme, soit le paradigme spatiographique. Ceci nous suggère que les élèves qui se placent de prime à bord en géométrie pratique sont aptes à faire le pas vers la géométrie théorique avec un peu d'aide. C'est en fait, ce qui s'est passé pour 37 des élèves (sur 41) qui avaient choisi une démarche utilisant un instrument de mesure en 1.a).

Nous avons regroupé les démarches en 5 groupes pour la question 1.c).

1. Oui, ne sait pas la cause de la différence.

2. Oui, la mesure est plus fiable que l'estimation.

3. Oui, la mesure est imprécise et la déduction est plus fiable.

4. Oui, la mesure est imprécise à cause du trait gras.

5. Non, ne sait pas.

6. Oui, imprécision de l'instrument utilisé.

Tableau 4.6 Résultats Expérience 2, Activité 1.c)

Réponses	Nombre d'élèves
1.	4
2.	4
3.	10
4.	12
5.	18
6.	2

On compte 18 élèves n'ayant pas obtenu de différence entre leurs réponses malgré qu'ils aient utilisé des démarches différentes. Il est à préciser que pour ces élèves, il est difficile de tirer des conclusions. Parmi les 32 autres élèves, 24 (soit 75%) ont spécifié que la mesure ou l'utilisation d'instruments de mesure ne fournissait pas une réponse précise à la question posée. Ceci nous laisse supposer qu'un premier pas vers le rejet de la mesure comme mode de validation en géométrie est franchi chez ces élèves.

Activité 2

<u>Analyse a priori</u>

Cette activité comprend deux sous-questions. La première consiste à trouver la mesure de l'angle D. Pour ce faire, l'élève peut soit prendre son rapporteur d'angles ou utiliser sa connaissance des propriétés des angles et des triangles. En effet, dans ce cas il utilise la propriété que tous les angles d'un triangle équilatéral sont de 60° pour obtenir la mesure de l'angle BCA. Puis, dans un deuxième temps il trouve la mesure de l'angle ACD de 120° en utilisant les angles supplémentaires. Il termine par l'utilisation de la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle pour obtenir la mesure demandée de 30°.

La deuxième partie de l'activité se concentre sur la mesure du côté DC. Pour y répondre, l'élève peut utiliser sa règle graduée ou encore ses connaissances des triangles équilatéraux pour trouver la mesure du côté AC, ensuite les propriétés des triangles isocèles pour trouver la mesure du côté cherché. Nous considérons que cette démarche sera plus difficile pour les élèves, car elle leur demande de trouver des résultats intermédiaires.

Niveaux de van Hiele

Nous séparons les niveaux de van Hiele pour les deux sous-questions, soient la question sur la mesure de l'angle et celle sur la mesure du côté.

Un élève qui a utilisé son rapporteur d'angles pour trouver la mesure manquante se situe au niveau Identification (niveau 1). Cependant, un élève qui a utilisé exclusivement le raisonnement déductif se situe plutôt au niveau Déduction informelle (niveau 3), puisqu'il est en mesure de prendre en considération l'ensemble de la figure et d'en isoler des parties pour obtenir la donnée voulue.

Un élève qui a utilisé la règle pour trouver la mesure du côté DC est au niveau Identification (niveau 1), puisqu'il ne fait aucune mention des propriétés et des figures en jeu dans la situation qui lui est proposée. Tandis qu'un élève qui utilise le raisonnement déductif tout au long, sans utiliser la règle, est pour sa part au niveau Déduction formelle (niveau 3). Nous considérons que les élèves qui ont codé correctement le triangle ABC, sans être capables d'obtenir la mesure manquante se situent au niveau Analyse (niveau 2). Effectivement, ils sont en mesure de mettre de l'avant les propriétés d'une figure, sans pour autant être capable d'interrelation.

Paradigmes géométriques

Deux paradigmes géométriques peuvent être rencontrés dans cette activité et leur classification se fait de la même façon qu'on s'intéresse à la mesure de l'angle ou à la mesure du côté.

Si l'obtention de la mesure se fait par l'utilisation du rapporteur d'angles ou de la règle graduée, on peut situer l'élève dans le paradigme géométrie spatiographique. Tandis que dans le cas d'une pure utilisation des propriétés c'est dans le paradigme géométrie protoaxiomatique, puisque l'élève fait un effort d'abstraction pour travailler sur les propriétés des objets géométriques et non sur la figure qui lui est fournie.

Analyse

Considérant que cette question exige plusieurs étapes de résolution, nous avons classé les démarches d'élèves selon les méthodes utilisées à chaque étape.

Il est à noter que plusieurs équipes ont été laissées de côté pour l'analyse de cette expérience puisqu'elles n'ont pas répondu de façon adéquate à la question. De plus, plusieurs élèves n'ont fourni aucune réponse à la question 1.b).

Tableau 4.7 Résultats Expérience 2, Activité 2

Étape et méthode	Nombre d'élèves 1.a)	Nombre d'élèves 1.b)	Paradigme
Mesure de l'angle ACB			
Rapporteur d'angles	16	0	Spatiographique
Déduction	8	9	Protoaxiomatique
Non-identifié	14	6	Non-identifié
Mesure de l'angle ACD			
Perception	0	4	Spatiographique
Rapporteur d'angles	20	2	
Déduction	6	4	Protoaxiomatique
Non-identifié	12	7	Non-identifié
Mesure de l'angle D			
Perception	4	8	Spatiographique
Rapporteur d'angles	28	2	
Déduction	4	7	Protoaxiomatique
Non-identifié	2	3	Non-identifié

En regardant équipe par équipe, on remarque un total de 17 élèves utilisant les éléments du paradigme géométrique spatiographique tout au long de leur démarche. Nous avons considéré que des élèves s'y trouvaient si chacune des étapes de résolution qu'ils ont faite s'y trouvait, et ce, même s'ils ont omis de trouver certaines mesures. 10 équipes ont pour leur part passé d'une approche à l'autre durant la résolution et aucune équipe n'a utilisé exclusivement le paradigme protoaxiomatique. Nous pensons que ceci a été causé par la difficulté du problème et par le fait que la déduction est encore une nouvelle façon de faire pour les élèves. Cependant, nous croyons que les démarches mixtes sont un signe que les élèves tendent vers l'utilisation de la déduction.

La comparaison des réponses n'a pas provoqué de changements chez les élèves puisque la très forte majorité obtenait les mêmes résultats. De plus, nous pensons que le manque de temps a peut-être été en cause dans l'absence de réponse dans cette partie.

Nous retenons de cette expérience que malgré que les élèves se placent initialement en géométrie spatiographique, ils sont aptes à passer en géométrie protoaxiomatique avec un peu d'aide. De plus, les élèves semblent rejeter la mesure comme mode de validation s'ils ont la possibilité de ne pas l'utiliser. Finalement, le nombre d'étapes de résolution semble être un facteur de régression dans l'utilisation de la déduction chez les élèves.

4.2.3 Expérience 3

Activité 1

Analyse a priori

La résolution du problème soumis aux élèves se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, ils doivent utiliser une propriété des losanges leur permettant de conclure que l'angle B est de 147 degrés puisque les angles opposés sont isométriques. Ensuite, ils doivent utiliser la propriété sur la somme des mesures des angles intérieurs dans un quadrilatère ainsi que celle sur les angles opposés pour en déduire les mesures des angles A et C (33°). Finalement, la partie la plus complexe est d'identifier la mesure de l'angle E. Pour ce faire, les élèves doivent utiliser le fait que le point D est le point milieu du côté AE, par conséquent que le côté ED est isométrique au côté DA. De plus, comme il s'agit d'un losange, on sait que le côté DA est congru au côté DC, donc en utilisant la transitivité on obtient que le côté ED est congru au côté DC. Ainsi, on a que le triangle EDC est isocèle. L'élève doit aussi trouver la mesure de l'angle supplémentaire en D (33°) et ensuite avec la propriété sur la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle et le fait que le triangle est isocèle, il peut déduire la mesure de l'angle E (73,5°). Cette dernière partie étant plus complexe du fait de l'utilisation de la transitivité, nous ne nous attendons pas à beaucoup de solutions de ce type de la part des élèves. De plus, aucune mesure de côté n'est fournie à l'élève; il doit travailler sur le caractère isométrique des mesures sans pouvoir les expliciter. Cette absence de valeurs numériques rend la tâche plus difficile.

Nous nous attendons à rencontrer des démarches mixtes étant donné que la tâche s'effectue en plusieurs étapes. Certains élèves commenceront peut-être sans rapporteur d'angles, mais se voyant bloqués ils y auront recours. D'autres équipes utiliseront la mesure tout au long de l'activité.

Niveaux de van Hiele

Si on regarde l'activité dans son ensemble, un élève qui a réussi à répondre adéquatement et à trouver les mesures manquantes de A, B et E en utilisant le raisonnement déductif comme décrit dans l'analyse à priori est un élève au niveau Déduction informelle (niveau 3). En effet, ce dernier a pu formuler sa pensée de telle sorte qu'il a établi des liens entre les figures et leurs propriétés. Cependant, un élève qui a utilisé uniquement son rapporteur d'angles se situe pour sa part au niveau Identification. Nous devons aussi considérer les démarches mixtes. Dans ce cas-ci, les élèves qui utilisent les propriétés pour trouver les mesures des angles A et B, mais qui utilisent la mesure pour l'angle E se verront plutôt dans la catégorie Analyse (niveau 2), puisqu'ils font usage des propriétés, mais ne sont pas en mesure de faire des interrelations entre les figures et doivent par conséquent avoir recours à la perception et à la mesure.

Paradigmes géométriques

Les élèves qui utilisent uniquement le raisonnement déductif pour accomplir la tâche se situent dans le paradigme de la géométrie protoaxiomatique, puisqu'ils reconnaissent les interrelations et sont en mesure de travailler avec une figure sans avoir à manipuler concrètement celle-ci.

D'un autre côté se trouvent les élèves qui ont utilisé le rapporteur d'angles tout au long de l'activité. Ces derniers se placent dans le paradigme de la géométrie spatiographique, car ils ont besoin du concret de la figure pour réaliser la tâche.

Les démarches mixtes sont quant à elles à mi-chemin, car elles pourraient être placées dans le paradigme de la géométrie protoaxiomatique si elles font appel à une interrelation entre le triangle et le losange même si celle-ci est erronée et être placées dans le paradigme spatiographique si aucun lien n'est fait entre le triangle et le losange.

Analyse

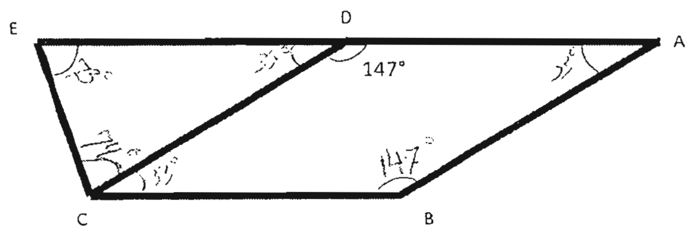
La question posée aux élèves concerne l'identification de la valeur de plusieurs angles sur une même figure. La démarche complète se fait en plusieurs étapes. Comme pour l'expérience 2, nous avons séparé chacune des étapes pour faciliter l'interprétation des résultats : mesure de l'angle ABC, mesure de l'angle DAB, mesure de l'angle DEC. Afin de clarifier les différentes étapes que nous avons isolées dans cette activité, examinons la solution proposée par l'une des équipes.

Figure 4.1 Expérience 3, Activité 1

Activité 1

Soit ABCD, un losange. D est le point milieu du côté AE.

<u>On sait que la somme des 4 angles du losange est de 360 degrés.</u>



1. a) Trouvez la mesure des angles A, B et E.

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

Vu que l'angle D est égal à l'angle B,
c'était logique que la mesure de l'angle
B était de 147°. Ensuite pour l'angle A,
nous avons additionné l'angle D et B et
cela nous a 294°. Ensuite, nous avons
soustrait 294° de 360° puis cela nous
a donné 66° et comme l'angle A était
pareil que l'angle C, nous avons
diviser par 2 66° puis cela nous a
donner 33°. Pour l'angle E nous l'avons
tout simplement mesuré. Donc, A = 33°, B = 147° et E = 73°

On remarque que la première étape empruntée par l'équipe est de trouver la valeur de l'angle ABC. Pour ce faire, ils ont utilisé la propriété des losanges et par conséquent le raisonnement déductif. La formulation de la propriété n'y est pas, mais nous pouvons affirmer que c'est bel et bien cette propriété qui a été utilisée puisqu'elle a été apprise en classe et qu'elle était énoncée dans leur *Boîte à outils*. La deuxième étape de la démarche s'articule autour de l'angle DAB. Cette fois-ci, l'équipe a utilisé la propriété sur la somme des angles dans un losange, énoncé dans le problème en la jumelant avec la propriété sur les angles opposés d'un losange. La troisième étape de la solution est d'identifier la mesure de l'angle DEC. Pour ce faire, l'équipe a utilisé son rapporteur d'angles tel qu'elle le précise. Ce travail de codage des solutions s'est fait de façon semblable pour toutes les équipes. Nous en avons extrait le tableau suivant.

Tableau 4.8 Résultats Expérience 3, Activité 1, 1.a)

Étape et méthode	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Mesure de l'angle ABC		
Rapporteur d'angles	25	Spatiographique
Angle opposé dans un losange	23	Protoaxiomatique
Non-identifié	0	Non-identifié
Mesure de l'angle DAB		
Somme des angles	13	Protoaxiomatique
Rapporteur d'angles	35	Spatiographique
Non-identifié	0	Non-identifié
Mesure de l'angle DEC		
Perception triangle isocèle	8	Spatiographique
Rapporteur d'angles	36	Spatiographique
Déduction triangle isocèle	2	Protoaxiomatique
Non-identifié	0	Non-identifié

On constate que l'angle à identifier a une forte influence sur la méthode employée par les élèves pour trouver sa mesure. En effet, près de 46 % des élèves ont utilisé une propriété des losanges pour trouver l'angle ABC. Cependant, cette proportion s'amenuise par la suite pour l'angle DAB. Il n'y a que 24 % des élèves qui utilisent la propriété des triangles. Il est fort probable que l'identification de l'angle DAB ait causé plus de difficulté aux élèves du fait que deux propriétés doivent être jumelées. De plus, le calcul à effectuer est plus compliqué que ce que rencontrent les élèves normalement. Ils devaient effectuer le calcul suivant (360-2x147)/2. Évidemment, les élèves ont séparé ce calcul en plusieurs étapes, mais il restait une source de difficulté dans l'activité. Finalement, la dernière mesure, celle de l'angle DEC a été la plus difficile pour les élèves, car elle impliquait l'utilisation du point milieu et du triangle isocèle. Il s'agissait d'utiliser la transitivité pour montrer que le triangle était isocèle avant de trouver la mesure de ses angles. La transitivité semble être une très grande difficulté et les élèves ont plutôt utilisé leur perception d'un triangle isocèle afin de poursuivre la résolution du problème ou encore ils se sont servis de leur rapporteur d'angles pour trouver la mesure. Il faut aussi prendre en compte un autre facteur de difficulté pour les élèves. Au cours du déroulement de l'activité, nous avons remarqué par les questions et commentaires des élèves que l'absence de valeur pour les mesures de côté les empêchait de travailler sur ces derniers. Il semble que la même activité à laquelle on ajouterait une mesure de côté sera plus facilement réussie à l'aide de la déduction par les élèves.

Si on s'intéresse à la démarche complète des équipes à travers chacune des étapes, on remarque qu'une seule équipe est restée dans le paradigme protoaxiomatique tout au long de la résolution. Cependant, si on regarde uniquement les deux premiers angles, soient ABC et DAB, on a que 13 élèves ont utilisé la déduction pour les deux premiers angles et 18 élèves ont utilisé une démarche mixte tandis que 17 élèves ont utilisé une démarche qui s'inscrit dans le paradigme spatiographique. La déduction est donc présente dans cette activité, mais au moment où les élèves ne maitrisent plus les outils nécessaires à son utilisation, ils régressent vers les outils du paradigme spatiographique.

En ce qui concerne la question 2.a) demandant aux élèves d'énumérer toutes les propriétés utiles à la tâche qui se trouvent dans la *Boîte à outils*, plusieurs différentes réponses ont été fournies. Nous les avons regroupés en 3 catégories.

Tableau 4.9 Résultats Expérience 3, Activité 1, 2.a)

Réponses	Nombre d'élèves
Réponse hors propos ou aucune réponse	26
Toutes les propriétés	8
Propriétés pertinentes	16

Ces résultats nous indiquent que les élèves se situent au niveau Analyse de l'échelle de van Hiele, car ils ont tendance à appliquer toute une panoplie de propriétés au lieu de déterminer celles qui sont essentielles pour le problème. Ainsi, le niveau Déduction Informelle n'est pas atteint.

Nous avions espoir que de demander aux élèves d'énoncer les propriétés reliées au problème en jeu les aiderait à résoudre le problème à l'aide de ces propriétés et de la déduction. Cependant, cette hypothèse est difficile à vérifier puisque la majorité des élèves n'ont pas été en mesure d'identifier les propriétés qui pouvaient leur être utiles dans le cadre de cette activité géométrique. Il semble qu'aucune tâche semblable ne leur soit demandée dans leurs activités mathématiques quotidiennes.

Nous avons codé les solutions des élèves à la question 2.b) de la même façon qu'en 1.a) et avons produit un tableau pour comparer les résultats.

Tableau 4.10 Résultats Expérience 3, Activité 1, 1.a)-b)

Étape et méthode	Nombre d'élèves (Question 1.a)	Nombre d'élèves (Question 2.b)	Paradigme géométrique
Mesure de l'angle ABC			
Rapporteur d'angles	25	0	Spatiographique
Angle opposé dans un losange	23	27	Protoaxiomatique
Non-identifié	0	3	Non-identifié
Mesure de l'angle DAB			
Somme des angles	13	27	Protoaxiomatique
Rapporteur d'angles	35		Spatiographique
Non-identifié	0	3	Non-identifié
Mesure de l'angle DEC			
Perception triangle isocèle	8	14	Spatiographique
Rapporteur d'angles	36	2	Spatiographique
Déduction triangle isocèle	2	6	Protoaxiomatique
Non-identifié	0	8	Non-identifié

Si on compare les démarches utilisées par les élèves avant et après avoir énoncé les propriétés en lien avec le problème, on constate qu'il y a eu une modification quant aux paradigmes géométriques. Avant l'énoncé des propriétés près de 50 % des élèves ont utilisé le rapporteur d'angles tandis qu'après l'énoncé des propriétés, aucune équipe n'a utilisé la mesure. En ce qui concerne l'angle DAB, une situation semblable s'est produite puisqu'aucun élève n'a utilisé d'instrument de mesure. Ils ont plutôt opté pour l'utilisation de la propriété sur la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle. Pour l'angle DEC, la situation a été quelque peu différente. Précédemment, les élèves avaient majoritairement utilisé le rapporteur d'angles et suite à l'écriture des propriétés, ils ont modifié leur démarche. Cependant, les élèves ne se sont pas tous tournés vers la déduction. Une grande partie des élèves a plutôt opté pour la perception. Il semble que les élèves soient sous l'impression que le triangle DEC est isocèle, mais ne trouvant pas de raison pour l'expliquer, ils ont travaillé avec leur perception. Il est nécessaire de mentionner que malgré qu'ils aient travaillé avec leur perception, ils ont utilisé la déduction aussi. Effectivement, ils ont tenu pour acquis que le triangle était isocèle et ont utilisé les propriétés des triangles de cette nature pour déduire la mesure de l'angle recherché. Ceci nous amène à penser que les élèves cherchent à utiliser la déduction, mais n'en ont pas tout à fait les compétences. Ces résultats en 2.b) sont difficiles à associer avec l'énoncé des propriétés puisque cette étape n'a pas été réalisée de façon appropriée par beaucoup d'élèves.

Nous avons choisi de ne pas analyser les réponses des élèves à la question 2.d) puisque la formulation de la question n'a pas permis d'obtenir les informations voulues. Effectivement, beaucoup d'élèves ont simplement répondu oui, ce qui ne nous laisse pas suffisamment d'information pour tirer des conclusions sur leur approche.

En conclusion, le nombre d'étapes de raisonnement à utiliser pour trouver la mesure d'un angle a une forte influence quant à la méthode employée par l'élève pour identifier cette mesure. Un facteur de régression semble émerger, soit l'utilisation de la transitivité. En effet, les élèves reviennent à la mesure et à la perception lorsqu'ils doivent utiliser la transitivité. Finalement, le manque de valeur numérique dans un problème semble aussi être un facteur de difficulté et par conséquent de régression.

4.2.4 Expérience 4

Activité 1 (retour sur l'expérience 2)

Analyse a priori

Puisque cette activité fait un retour sur l'activité 1 de l'expérience 2 et que celle-ci offre deux solutions aux élèves, nous faisons l'hypothèse que la majorité des élèves vont choisir la solution de l'élève 2, soit la bonne solution. Nous pensons que les traits gras ont mis en évidence au cours des dernières expériences que la mesure est imprécise. Cependant, l'explication du choix de l'élève pourra différer d'un élève à l'autre. Plusieurs élèves ne justifieront vraisemblablement pas leur choix et d'autres se baseront sur la possibilité des erreurs de mesurage de l'élève 1.

Niveaux de van Hiele

Nous considérons deux réponses possibles pour cette activité et nous ne nous attardons pas aux élèves qui n'ont pas justifié leur réponse étant donné que leur choix peut être aléatoire.

Les élèves qui choisissent la solution de l'élève 1, se situent au niveau Identification (niveau 1) de l'échelle van Hiele, puisque ce dernier ne travaille pas à partir de ses perceptions visuelles, mais bien avec des instruments.

Les élèves qui choisissent la solution de l'élève 2, se situent pour leur part au niveau Déduction informelle (niveau 3), puisque ce dernier utilise les propriétés des triangles pour y déduire des informations.

Paradigmes géométriques

Nous classons dans le paradigme géométrique spatiographique les élèves qui préfèrent les solutions de l'élève 1 relevant de la mesure. Effectivement, ce paradigme correspond à cette solution puisque la pensée s'effectue sur des objets matériels. Dans le cas des élèves préférant la solution de l'élève 2, ils se situent plutôt dans le paradigme géométrique protoaxiomatique, puisqu'il s'agit plutôt d'une géométrie axiomatique faisant appel aux propriétés des figures et se détache de sa représentation visuelle.

Analyse

L'activité proposée aux élèves s'est révélée très simple pour la plupart d'entre eux. En effet, l'ensemble des élèves a indiqué que la réponse la plus appropriée était la réponse de l'élève 2 utilisant la déduction. Cependant, ce ne sont pas tous les élèves qui ont justifié adéquatement leur réponse, en fait 18 élèves n'ont fourni aucune justification. Tandis que les autres ont mentionné la faiblesse de la mesure. Parmi ceux-ci 11 l'ont fait en parlant du trait gras de la figure et 22 l'ont fait par l'intermédiaire de l'imprécision de la mesure en général. Nous pensons que les activités précédentes utilisant le trait gras ont influencé les élèves lors de la justification de leur réponse.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, il n'est pas possible de comparer ces résultats directement avec ceux de l'expérience 2 puisque la question a été modifiée.

Tableau 4.11 Résultats Expérience 4 activité 1

Réponses	Nombre d'élèves
Préfère propriétés sans justification	18
Préfère propriétés et accuse les traits gras	11
Préfère propriétés et accuse imprécision des instruments	22

Activité 2 (retour expérience 2)

Analyse à priori

Cette activité est une modification de l'activité 2 de l'expérience 2, dans laquelle nous avons ajouté plus d'informations pour faciliter la tâche des élèves. Ces informations diminuent le nombre de pas de déduction nécessaires à la réalisation de la tâche. C'est pourquoi nous croyons que la majorité des élèves seront d'accord pour affirmer qu'il est possible de trouver les mesures des angles C et D du triangle 2 en utilisant la déduction. Pour ce qui est de la mesure du côté CD, c'est une tâche plus difficile, mais étant donné qu'elle a déjà été rencontrée lors des activités précédentes nous nous attendons à ce que beaucoup d'élèves y parviennent en fournissant des explications claires.

Niveaux de van Hiele

Les élèves qui affirment qu'il est impossible de trouver la mesure de l'angle sont des élèves qui situent au niveau Identification (niveau 1). Cependant, les élèves qui affirment que c'est possible sans expliquer comment sont inclassables, car leur affirmation peut être due à un facteur externe. Les élèves qui expliquent comment trouver la mesure de l'angle en utilisant les propriétés sont plutôt au niveau Déduction informelle (niveau 3). Il en est de même en ce qui a trait à la mesure du côté CD.

Paradigmes géométriques

Les élèves qui ont affirmé que c'est impossible sont dans un paradigme géométrique spatiographique puisqu'ils doivent travailler concrètement avec la figure pour pouvoir répondre à la question. Tandis que ceux qui le résolvent sans utiliser la mesure se trouvent plutôt dans le paradigme protoaxiomatique où le travail sur l'abstrait est possible.

Analyse

Pour la question 1.a), tous les élèves ont affirmé qu'il était possible de trouver les mesures des angles ACD et CDA sans avoir recours au rapporteur d'angles. Nous avons observé 3 types de réponses différentes.

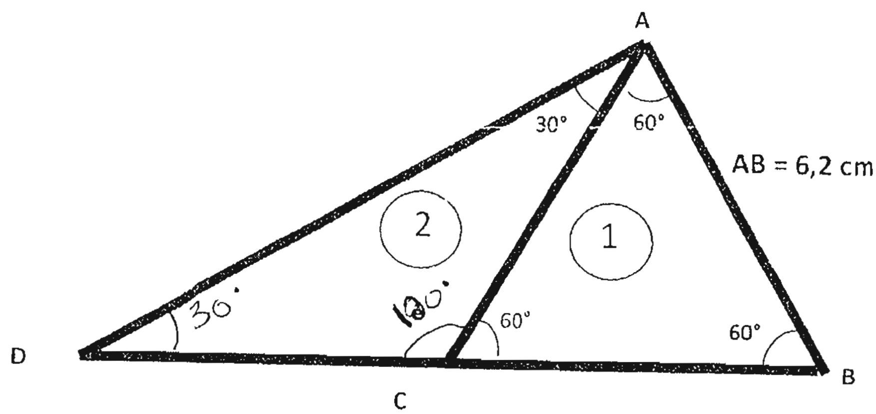
> *Angle plat et déduction* : Utilisation de l'angle plat pour trouver la valeur de l'angle ACD en effectuant le calcul 180° – 60° = 120°. Ensuite, utilisation de la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle pour trouver la mesure de l'angle CDA.
>
> *Perception d'un triangle isocèle* : Perception d'un triangle isocèle ACD pour trouver les mesures des angles ACD et CDA.

Règle : Utilisation de la règle pour vérifier que le triangle ACD est isocèle puis calcul à partir de la somme des angles intérieurs et des propriétés des triangles isocèles.

Voici un exemple d'une équipe qui a fourni une solution que nous avons classée dans la catégorie *Règle.*

Figure 4.2 Expérience 4, Activité 2, 1.a)

Activité 2



1.a) Sans rapporteur d'angle, est-il possible de trouver les mesures des angles C et D du triangle 2 ? Si oui, comment ?

oui. Si, avec la règle, nous mesuront que les deux plus petit côté son égal, cela veux dire que l'autre angle aigus serai de 30°. Nous pavont ensuite faire l'opération suivante à la calculatrice: 180-120-30=30°

Nos résultats nous indiquent que plus de la majorité des élèves se situent dans un paradigme géométrique protoaxiomatique. Dans le cas des 19 élèves ayant utilisé leur perception, il nous semble que ces derniers se trouvent dans une démarche mixte puisqu'ils utilisent leur perception pour identifier la nature du triangle, mais se tournent ensuite vers la déduction pour poursuivre le problème. Ceci nous laisse penser qu'ils auraient utilisé la déduction s'ils avaient su comment montrer que le triangle est isocèle. La perception semble être une porte de sortie en cas de difficulté. De plus, nous pensons que l'utilisation de la perception est une porte de sortie pour l'élève lui permettant d'éviter d'avoir recours à la mesure.

Tableau 4.12 Résultats Expérience 4, Activité 2, 1.a)

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Angle plat et déduction	24	Protoaxiomatique
Perception triangle isocèle	19	Mixte
Règle	2	Spatiographique
Non-défini	4	

Ces résultats sont d'autant plus intéressants si on les compare à ceux obtenus à l'expérience 2 pour une question assez semblable. Comme les deux questions ne sont pas identiques, nous ne pouvons pas les comparer directement, mais prenons tout de même le temps de rappeler ce que nous avions comme résultat. Effectivement, dans l'activité 2 de l'expérience 2, aucune équipe ne se trouvait dans le paradigme protoaxiomatique tandis que lors de l'expérience 4, 24 élèves se situent dans ce paradigme. Ceci nous laisse penser que les élèves délaissent tranquillement la mesure au profit de l'utilisation des propriétés théoriques. Cependant, ce passage se fait dans des contextes relativement simples. Dès que le niveau de difficulté augmente, il y a régression ou du moins, un retour à la perception.

L'unanimité n'a pas été obtenue pour la question 1.b). Ceci n'est pas surprenant puisque comme nous l'avions précisé, l'utilisation de la transitivité est une source de difficulté chez les élèves. Cependant, nous pouvons tout de même dire que celle-ci a pu être utilisée par 27 élèves. On peut aussi supposer que puisque les élèves rencontraient une situation de transitivité pour la 2$^{\text{ième}}$ fois, celle-ci a pu leur paraitre plus familière. De plus, il est à noter que nous avons placé les élèves qui ont mentionné que le côté ne mesurait pas 6,2 cm et donc que la solution est fausse dans le paradigme géométrique spatiographique puisqu'ils se sont basés sur des perceptions pour conclure.

Tableau 4.13 Résultats Expérience 4, Activité 2, 1.b)

Réponses	Nombres d'élèves	Paradigme géométrique
Faux.	4	Spatiographique
Vrai, utilisation transitivité	27	Protoaxiomatique
Vrai, perception	8	Spatiographique
Incomplète/Aucune réponse	10	Inconnu

Voici un exemple d'une équipe, soit la même équipe que pour la question 1.a), qui a fourni une solution utilisant la déduction et la transitivité. Les élèves affirment que le triangle 2 est isocèle puisqu'ils ont trouvé la mesure de ses angles à la question 1.a). À partir de celles-ci, l'équipe poursuit son raisonnement en utilisant la transitivité des mesures de côté.

Figure 4.4 Expérience 4, Activité 2, 1.b)

1. b) Un élève qui n'a pas de règle affirme que le côté CD mesure 6,2 cm. Est-ce qu'il a raison ? Explique ta réponse ?

oui parce que le triangle 2 est un triangle isocèle et le le 1 est équilatéral le AB est 6,2cm donc AC aussi et vu que le 2 est isocèle CD aussi est 6,2cm.

Activité 3 (retour expérience 3)

<u>Analyse à priori</u>

Il s'agit d'un retour sur l'activité 1 de l'expérience 3 déjà vécue par les élèves. Cependant, nous avons ajouté des informations en vue de faciliter le travail des élèves et d'éviter les blocages. La question a) se résout en utilisant l'indice fourni, c'est-à-dire en utilisant la propriété des losanges qui affirme que tous les côtés sont congrus et que le côté ED est le milieu du côté EA. Ainsi, on peut déduire que ED et DC sont isométriques. Puisque le triangle EDC a deux côtés isométriques, on a que ce triangle est isocèle par définition. Nous pensons que cette solution sera obtenue par plusieurs élèves, mais dans une formulation probablement différente et un travail direct sur la figure. Tandis que certains élèves obtiendront probablement une réponse basée sur la perception et la mesure.

Pour la question b), sa résolution nécessite de penser aux angles supplémentaires pour obtenir la valeur de l'angle EDC, puis il faut utiliser le résultat obtenu en a) afin de pouvoir déduire que les deux angles restants sont de même mesure. Nous pensons que certains élèves trouveront que les angles restants mesurent au total 147° et diviseront cette valeur par deux, sans justifier cette division par le fait que le triangle est isocèle.

<u>Niveaux de van Hiele</u>

Dans un premier temps, nous pensons que certains élèves diront que c'est impossible de trouver la réponse. Dans ce cas, il nous est impossible de classer les élèves dans un niveau de van Hiele, car nous n'avons pas assez d'information sur leurs réflexions. Le deuxième cas, ce sont les élèves qui affirment que c'est possible de prouver que le triangle 2 est isocèle, mais dont l'explication est basée sur la perception visuelle de la figure. Dans ce cas, il est aisé de dire que les élèves se trouvent au niveau Identification (niveau 1). Dans un dernier temps, on retrouve les élèves qui font une résolution qui ressemble à celle de l'expert. Ces élèves se trouvent vraisemblablement au niveau Déduction informelle (niveau 3), car ils sont en mesure de faire des liens entre différentes figures et travailler à la fois sur le losange et sur le triangle. Ces classements sont les mêmes que ce soit pour la question a) ou la question b).

<u>Paradigmes géométriques</u>

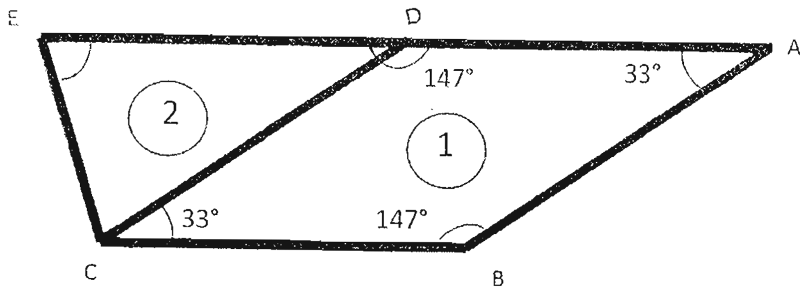
Considérons le cas des élèves qui affirment que c'est impossible que ce soit pour la question a) ou pour la question b). Dans leur cas, on pense qu'ils se situent dans une géométrie concrète ou spatiographique. Dans le cas des élèves qui ont une solution semblable à celle de l'expert, nous pensons qu'ils se placent dans un paradigme géométrique protoaxiomatique. Cependant, il faut être prudent et s'assurer de la complétude de la solution proposée puisque la formulation de la question place davantage l'élève dans ce paradigme de prime abord.

Analyse

Pour l'activité 1.a), nous avons mis dans la catégoric perception/déduction les élèves qui utilisaient la déduction pour résoudre le problème, mais à partir d'une prémisse basée sur leur perception. En effet, les élèves supposaient que le triangle 2 est isocèle bien quc ce soit ce que nous leur demandions de prouver. Il y a eu confusion entre l'hypothèse et la conclusion. Ces résultats ne sont pas surprenants si on se fie aux recherches antérieures : «Si l'on veut que les élèves comprennent le processus de démonstration, il faut donc qu'ils comprennent ce qu'est une hypothèse et ce qu'est une conclusion. Or cela est loin d'être acquis pour eux en début de classe de Quatrième.» (Coutat Gousseau-, 2005, p.14) Ces élèves semblent vouloir utiliser la déduction, mais n'en maitrisent pas toutes les composantes. Encore une fois, il semble que la source de difficulté provienne de la transitivité. Celle-ci étant difficilement applicable pour les élèves, ils ont émis une hypothèse pour pouvoir poursuivre le problème sans utiliser la mesure. Voici un exemple du désir d'utiliser la déduction, mais sans en maitriser les règles.

Figure 4.3 Expérience 4, Activité 3, 1.a)

Soit ABCD, un losange. D est le point milieu du côté AE



1. a) Sans instrument de mesure, est-il possible de prouver que le triangle 2 est isocèle ?
Explique ta réponse.

Rappel : D est le point milieu du côté AE.

Oui. Disons que c'est un triangle isocèle. Nous avons pris l'angle de "C" et nous avons faite l'opération suivante à la calculatrice : 180 - 33 = 147 ÷ 2 = 73.5 ...
Nous avons ensuite fait : 73.5 + 73.5 + 33 = 180
Nous avons fait : 180 - 147 = 33

Tableau 4.14 Résultats Expérience 4, Activité 3, 1.a)

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme
Perception/déduction	7	Mixte
Déduction transitivité	33	Protoaxiomatique
Incomplète/Aucune réponse	8	Inconnu

1.b) Pour cette question, les élèves devaient expliquer s'il était possible de trouver les angles du triangle 2 sans rapporteur d'angles. La forte majorité des élèves ont utilisé la déduction à partir de l'énoncé a). Plus précisément, ils ont accepté l'hypothèse que le triangle 2 est isocèle et ensuite ont pu en trouver les mesures des angles à partir de la propriété de ces triangles.

Tableau 4.15 Résultats Expérience 4, Activité 3, 1.b)

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme
Triangle isocèle (déduction)	38	Protoaxiomatique
Réponse incomplète	12	Inconnu

En bref, nous retenons que les élèves préfèrent une validation à l'aide de la déduction qu'à l'aide de la mesure lorsqu'ils ont la possibilité de choisir. Cependant, la déduction est encore difficile pour eux, car ils n'en maitrisent pas tous les éléments. Particulièrement, il y a confusion entre hypothèse et conclusion.

4.2.5 Expérience 5

Activité 1

Analyse a priori

Nous faisons l'hypothèse que bien qu'il s'agisse de la première activité faisant intervenir le cercle, certains élèves seront en mesure de résoudre le problème selon la méthode de l'expert. Dans un tel cas, les élèves doivent utiliser la propriété des rectangles concernant l'isométrie de leurs côtés opposés. Ainsi, on obtient que le côté BC et le côté DA mesurent 8 cm. Pour identifier la mesure des deux autres côtés, il suffit de remarquer que le côté DC est aussi un rayon du cercle, ceci implique que sa mesure est de 3,4 cm. Il reste à trouver le périmètre pour obtenir 22,8 cm, puis trouver la valeur demandée en a). Par la suite, il faut utiliser les informations trouvées et effectuer l'opération suivante : 8 cm – 3,4 cm = 4,6 cm pour obtenir la mesure de EA.

L'autre solution envisagée est celle du mesurage, mais nous croyons que celle-ci sera difficile pour les élèves étant donné qu'il s'agit d'une figure tracée à main levée. Nous espérons que le trait imprécis suffira à décourager les élèves d'utiliser cette méthode.

Niveaux de van Hiele

La solution de l'expert nous semble se situer au niveau Analyse (niveau 2) ou Déduction informelle (niveau 3). Le niveau Déduction informelle (niveau 3) est atteint lorsque la formulation de la réponse indique des interrelations entre les figures comme dans l'exemple (voir figure 4.4). Tandis qu'un simple calcul nous indique plutôt le niveau Analyse (niveau 2), car bien que l'utilisation des propriétés soit présente, leur formulation n'est pas nécessairement une étape atteinte.

La solution par le mesurage est au niveau d'Identification, car les figures sont bien identifiées, mais elles sont utilisées de façon concrète et non pas pour leurs propriétés.

Paradigmes géométriques

Les élèves utilisant la démarche de l'expert sont dans un paradigme de géométrie protoaxiomatique, car la source de validation utilisée est l'hypothéticodéductif et non le sensible puisque le contrôle se fait sur les propriétés et non sur la figure. Tandis qu'un élève qui a utilisé la mesure ou qui ne s'est pas appuyé sur les propriétés est dans une géométrie spatiographique.

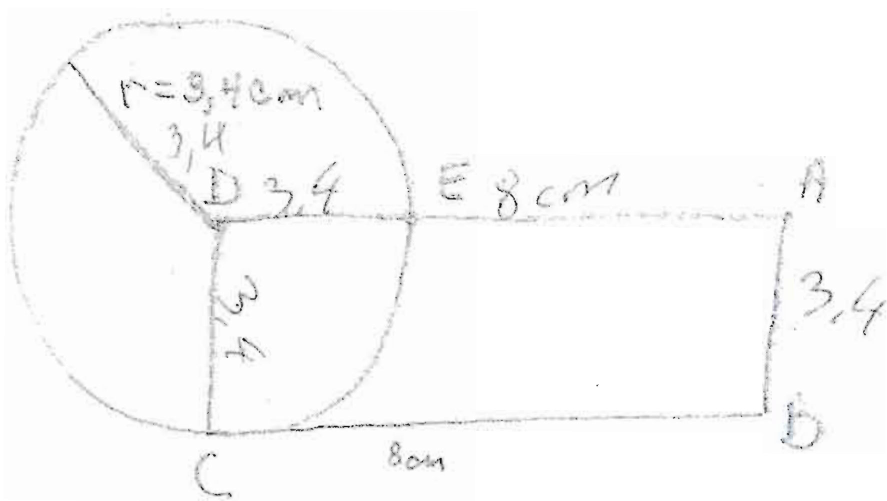
Analyse

La question 1.a) semble avoir été très facile à résoudre pour les élèves. En effet, ils ont répondu rapidement à la question et la déduction a été utilisée par presque la totalité des élèves. Il s'agissait de la première fois où nous expérimentions avec le cercle ainsi qu'avec la figure à main levée. Le fait que le rayon du cercle est constant nous a paru être maitrisé par les élèves, car cette propriété a été utilisée dans une proportion de plus de 95%. En voici un exemple concret.

Figure 4.4 Expérience 5, Activité 1, 1.a)

Activité 1

Un élève effectue le dessin suivant à main levée. Sur cette figure, ABCD est un rectangle dont le côté BC mesure 8 cm. L'élève a également tracé un cercle de centre D.



a) Trouvez le périmètre du rectangle ABCD. Expliquez votre démarche.

22,8cm. Vue que la mesure BC mesure 8 cm, la mesure DA mesure la même chose. Ont sait que les rayons du cercle mesure tous 3,4cm donc le côté DC mesure 3,4 cm. Vque s'est un rectangle, les côté parallèles sont égaux et donc le côté AB mesure 3,4 cm.

Tableau 4.16 Résultats Expérience 5, Activité 1, 1.a)

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Déduction	44	Protoaxiomatique
Mesure	2	Spatiographique

Il est intéressant de rappeler qu'un élève apte à travailler avec des figures à main levée se situe minimalement au niveau Analyse de l'échelle de van Hiele. Nous pouvons vraisemblablement conclure que c'est le cas pour la majorité des élèves.

Les résultats obtenus sont les mêmes pour la partie b) de cette activité.

Tableau 4.17 Résultats Expérience 5, Activité 1, 1.b)

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Déduction	44	Protoaxiomatique
Mesure	2	Spatiographique

Activité 2

Analyse a priori

La démarche de l'expert se fait en quelques étapes. Tout d'abord, on identifie le triangle ABC et on trouve la mesure manquante en se basant sur la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle. On obtient 180° - (90° + 62°) = 28°. Puis on travaille avec le triangle BOC et on effectue 180°- (110°-28°) = 42° pour obtenir la réponse cherchée.

Nous nous attendons à ce que des élèves prennent d'autres chemins et trouvent presque la totalité des angles avant d'arriver à la réponse. Certains d'entre eux tenteront probablement d'utiliser la mesure même si celle-ci conduit à une réponse erronée puisque la figure est à main levée.

Niveaux de van Hiele

Le niveau de van Hiele de l'élève qui utilise la mesure est Identification (niveau 1) puisqu'il travaille sur ses perceptions visuelles, et ce, malgré que la figure soit à main levée. Tandis que la démarche de l'expert est celle d'un élève se situant au niveau de la Déduction Informelle (niveau 3) ou de l'Analyse (niveau 2), car il est capable de travailler sur des propriétés et sur plusieurs figures à la fois.

Paradigmes géométriques

La démarche de l'expert exprime un paradigme de géométrie protoaxiomatique, puisqu'elle reconnait les interrelations entre les figures et demande une pensée axiomatique pour enchainer les différentes étapes afin d'atteindre la solution recherchée. La démarche basée sur la mesure est plutôt dans un paradigme de géométrie spatiographique puisque les élèves ayant utilisé cette démarche se sont centrés sur le concret de la figure. De plus, ces élèves n'ont pas utilisé la validation centrée sur la déduction et les propriétés bien que la formulation de la question l'impose.

Analyse

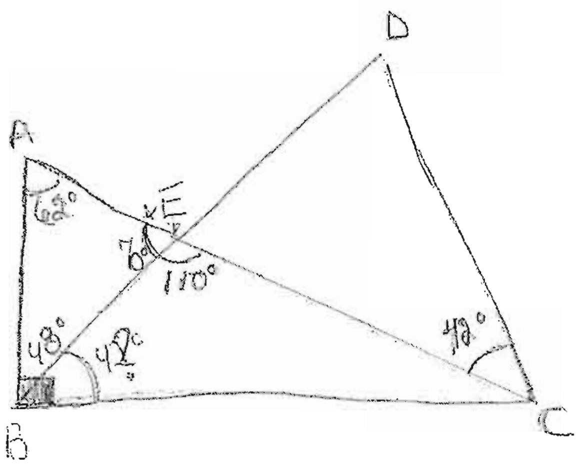
Tous les élèves qui ont fourni une réponse ont utilisé les propriétés qu'ils connaissent sur la somme des angles intérieurs des triangles et les propriétés des angles plats. Cependant, une dizaine d'élèves n'a pas justifié ses calculs. Ils ont effectué les calculs, mais parfois sans expliquer pourquoi ils les faisaient et sans aucun ordre particulier. De plus, dans certains cas ces calculs n'étaient pas toujours appropriés. Par exemple, des élèves ont supposé que le triangle formé des angles B, C et 110° était isocèle d'après leurs calculs. Ces derniers sont considérés comme ayant utilisé une démarche mixte puisqu'ils se sont fiés à leur perception et à la déduction dans leur démarche de résolution des triangles.

Voici un exemple de solution d'élèves *Déduction avec triangle*.

Figure 4.5 Expérience 5, Activité 2

Activité 2

Un élève effectue le dessin suivant à main levée.



a) Trouvez la mesure de l'angle recherché. Expliquez votre démarche

Nous avons ajouté la lettre E pour expliqué plus facilement notre démarche.
Les angles E sont des angles supplémentaires alors on fait 180° − 110° = 70°. Vu ~~qu'il~~ que les angles d'un triangle mesure 180° alors on fait 180° − 70° − 62° = 48° alors un des angle B mesure 48°. Les angles B sont des angles complémentaires alors on fait 90° − 48° = 42° alors l'autre angle B mesure 42°.

Réponse L'angle B = 42°

Tableau 4.18 Résultats Expérience 5, Activité 2

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Déduction avec triangle	32	Protoaxiomatique
Calcul sans justification	10	Mixte

Nous retenons de cette expérience que les élèves sont capables de travailler avec des figures à main levée et qu'ils ne ressentent pas de malaise par rapport à cette figure. Nous pensons qu'il s'agit d'un signe indicateur de changement de position par rapport à la figure. En effet, les élèves semblent ne plus considérer la figure dans son statut d'objet physique, mais bien comme représentant d'une catégorie d'objets plus théoriques.

4.2.6 Expérience 6

Activité 1

Analyse a priori

Considérons d'abord la démarche de l'expert. Celle-ci comporte quelques étapes. Dans un premier temps, il faut utiliser les propriétés sur les diagonales du carré afin d'affirmer que les segments AO et OB sont congrus et se coupent à 90°. Ceci étant, il est possible de conclure que le triangle ABO est isocèle. Par conséquent, les angles OAB et OBA sont congrus et mesurent 45°. Nous avons donc que trois des quatre angles du quadrilatère sont de 90°. Étant donné que la somme des mesures des angles intérieurs d'un quadrilatère est de 360°, on obtient que l'angle AEB est de 90°. Il ne reste que les mesures de côté afin de spécifier si AEBO est un rectangle ou un carré. Puisque les côtés opposés AO et OB sont de mêmes mesures et adjacents, on déduit qu'il s'agit d'un carré. Évidemment, cette démarche n'est pas celle attendue de la part des élèves puisque la notion de conditions nécessaires et suffisantes ne leur est pas connue.

Nous pensons que certains élèves vont se concentrer sur les mesures de côté uniquement et conclure qu'il s'agit d'un carré. D'autres vont se concentrer sur la mesure des angles uniquement. De plus, nous pensons voir apparaitre quelques démarches jumelant la déduction et la perception étant donné le niveau de difficulté de l'activité.

Niveaux de van Hiele

Étant donné qu'il s'agit de figure à main levée, nous pouvons affirmer que les élèves qui résolvent le problème en utilisant la déduction se trouvent minimalement au niveau Analyse (niveau 2) de l'échelle de van Hiele. Un indicateur du niveau Déduction Informelle consiste à vérifier si l'élève travaille sur plusieurs figures à la fois, ce qui est le cas pour un élève parvenant à résoudre le problème de façon convenable. Cependant, les élèves qui font usage de la mesure et de la perception se trouvent de trouvent plutôt au niveau d'Identification (niveau 1).

Paradigmes géométriques

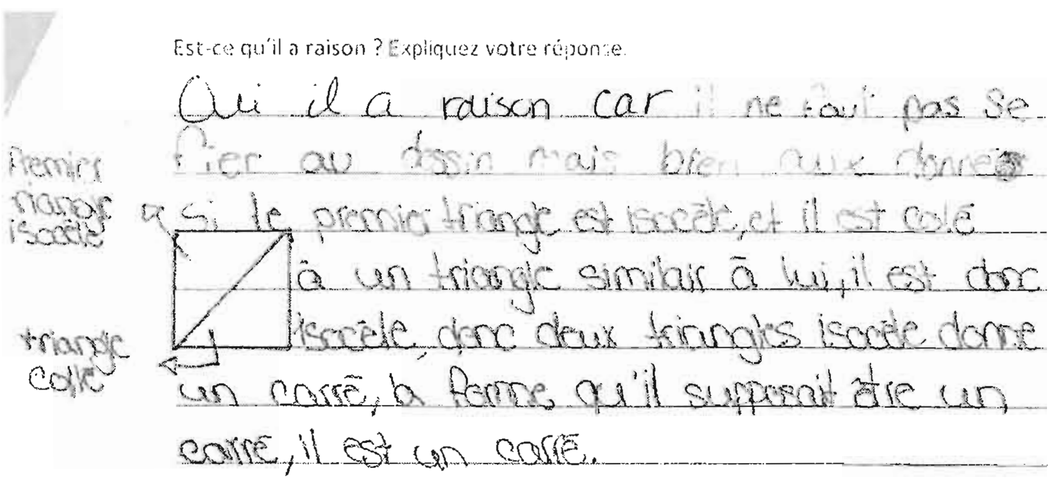
Encore une fois, un élève qui fournit une démarche près de celle de l'expert se situe dans le paradigme géométrique protoaxiomatique puisqu'elle fait appel à la déduction, aux propriétés et travaillent sur plusieurs figures à la fois ainsi que sur les relations qu'elles entretiennent. De plus, un élève qui a utilisé cette démarche accepte que le carré est un rectangle ayant des propriétés particulières. La démarche basée sur la mesure est quant à elle, celle d'un élève se situant dans le paradigme géométrique spatiographique puisqu'elle utilise les modes de validation de celui-ci, malgré qu'il s'agisse d'une figure à main levée. Les démarches utilisant des éléments à la fois issue de la déduction et de la perception sont plutôt à cheval entre les deux paradigmes.

Analyse

Beaucoup de différences entre les réponses ont été observées pour cette activité. Nous avons fait une classification détaillée de celle-ci afin d'éclairer la situation. Pour ce faire, nous avons divisé la démarche en plusieurs étapes selon les informations à trouver afin de pouvoir affirmer que la figure AEBO est un carré. Tout d'abord, nous avons isolé l'angle AEB. Pour cet angle, deux méthodes sont envisageables soient l'utilisation de la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle et la perception d'un triangle droit. Pour l'angle AOB, l'élève peut soit utiliser les propriétés des diagonales d'un carré ou soit utiliser sa perception et affirmer que le triangle ABO est identique au triangle AEB. Nous avons considéré les angles OAB et ABO comme une paire d'angles que l'on résout de façon identique. Pour ce faire, les élèves pouvaient ou bien utiliser les propriétés des diagonales d'un carré ou encore leur perception d'un triangle identique au triangle AEB. Finalement, la dernière partie du problème s'attarde au carré. Pour affirmer que la figure AEBO est un carré, les élèves ont utilisé différentes approches. Plusieurs ont déduit à partir des informations trouvées sur les angles, certains sur les mesures de côtés (aucune équipe n'a fait les deux à la fois), d'autres ont utilisé leur perception d'un carré ou l'hypothèse que la juxtaposition de deux triangles isocèles forme un carré. Dans ce dernier cas, la géométrie des transformations a été utilisée de façon implicite.

Voici un exemple de solution d'élève ayant utilisé la juxtaposition de triangle et la perception pour résoudre le problème.

Figure 4.6 Expérience 6, Activité 1


Est-ce qu'il a raison ? Expliquez votre réponse.

Oui il a raison car il ne faut pas se fier au dessin mais bien aux données si le premier triangle est isocèle, et il est colé à un triangle similair à lui, il est donc isocèle, donc deux triangles isocèle donne un carré, la forme qu'il supposait être un carré, il est un carré.

Premier triangle isocèle

triangle colé

Tableau 4.19 Résultats Expérience 6, Activité 1

Étape et méthode	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Mesure de l'angle AEB		
Somme des angles	21	Protoaxiomatique
Perception triangle identique	2	Spatiographique
Mesure de l'angle AOB		
Diagonales	13	Protoaxiomatique
Perception	4	Spatiographique
Mesure des angles OAB, ABO		
Diagonales	5	Protoaxiomatique
Perception triangle isocèle	16	Spatiographique
Carré		
Déduction angles	4	Protoaxiomatique
Perception carré	19	Spatiographique
Somme de triangles	9	Spatiographique
Côté congrus	6	Protoaxiomatique

Nous avons dû rejeter plusieurs résultats d'élèves, car ceux-ci n'avaient pas identifié de façon suffisamment explicite les angles ou les figures utilisées, ce qui a causé l'absence des informations nécessaires pour leur analyse. De plus, deux équipes se sont avérées inclassables dans ce tableau. En effet, celles-ci ont inversé l'hypothèse et la conclusion ce qui les amenées à ne pas répondre à la question posée. Ils ont mis de l'avant la déduction, mais de façon inappropriée puisqu'à partir de la conclusion.

La majorité des équipes a adopté une démarche mixte. En effet, une seule équipe est restée dans un même paradigme géométrique, soit celui du paradigme spatiographique. Toutes les autres équipes ont fait une partie de déduction et une partie de perception, ce qui semble démontrer un certain malaise chez les élèves quant aux paradigmes géométriques. Nous pensons que l'usage de la perception par un si grand nombre d'élèves s'explique par la difficulté du problème. Comme nous l'avons mentionné précédemment, les problèmes comportant plusieurs étapes de résolution causent obstacles aux élèves, car ils leur demandent d'avoir une vision d'ensemble du problème et de faire du raisonnement hypothético-déductif et non de la déduction simple. Ce problème s'inscrit dans l'hypothético-déductif, car il faut penser à travailler sur deux triangles avant de pouvoir enfin se rendre au travail sur le quadrilatère pour montrer que celui-ci est un carré. Cependant, nous pensons qu'il ne s'agit pas d'une régression dans la mesure où plusieurs élèves ont utilisé la perception, mais beaucoup ont aussi fait de la déduction un outil de résolution, soit plus de 90% des élèves pour l'angle AEB, plus de 76% pour l'angle AOB et près de 25% pour les angles OAB et ABO ainsi que pour le carré. On observe une grande différence de proportion selon la réponse cherchée. Ceci va dans le sens de notre hypothèse qu'il y a corrélation entre l'utilisation de la perception et la difficulté du problème. Effectivement, la présence de déduction était plus élevée dans les problèmes relatifs à la somme des angles intérieurs d'un triangle et celui de la perpendicularité des diagonales d'un carré. Cependant, la proportion diminue lorsqu'il s'agit de l'isométrie entre des diagonales et les caractéristiques nécessaires et suffisantes d'un carré. Ce qui n'est pas surprenant puisque ces éléments ont été moins travaillés par les élèves durant les diverses activités.

De plus, il est aussi à noter que la mesure n'a été utilisée par aucun élève dans la résolution du problème. Ceci nous laisse croire que les élèves ont bien compris le rôle du dessin à main levée par rapport à la mesure. Cependant, l'utilisation de ce type de dessin n'a pas empêché les élèves d'avoir recours à la perception. Nous croyons qu'il y a une amélioration chez les élèves, car le statut matériel de la figure semble évoluer. Cependant, un peu comme Coppé et coll. (2005) l'ont observé dans leurs travaux, les élèves contournent le problème. En effet, dans leur recherche les élèves retraçaient la figure, dans notre cas, ils se servent de leur perception.

Activité 2

Analyse a priori

Une des façons de montrer que les deux droites sont parallèles est la méthode de l'expert. Puisque le triangle ABC a deux mesures d'angle congru, on peut conclure qu'il est isocèle. Ainsi, les mesures de côté AB et BC sont elles aussi congrues. De plus, de la propriété des mesures des angles intérieurs d'un triangle, on sait que l'angle ABC est de 110°. Par la suite, il faut considérer la congruence des triangles ABM et BCM, ce qui nous donne que la mesure des angles ABM et CBM est la même. Par conséquent, elle est de 55°. Puis, une nouvelle utilisation de la propriété sur les triangles nous montre que l'angle AMB est de 90°. Finalement, on sait que deux droites coupant une même droite avec un même angle sont parallèles. Évidemment, cette démarche comprend plusieurs étapes et il n'est pas attendu que l'élève la formule de cette façon. Cependant, nous considérons que les premières étapes de la démarche peuvent être effectuées par l'élève.

Niveaux de van Hiele

En ce qui a trait au niveau de van Hiele, nous pensons qu'une démarche semblable à celle de l'expert se situe au niveau de la Déduction Informelle (niveau 3) puisqu'elle utilise plusieurs étapes et plusieurs figures pour résoudre le problème. Finalement, un élève qui mesure est pour sa part au niveau Identification (niveau 1) puisqu'il n'est pas en mesure de travailler avec une figure à main levée.

Paradigmes géométriques

Pour ce qui a trait aux démarches se rapprochant de celle de l'expert, nous les situons dans le paradigme géométrique protoaxiomatique puisqu'elles utilisent la déduction comme mode de validation et rejettent les perceptions visuelles. Or, nous pensons que nous rencontrerons davantage de démarches mixtes pour ce problème faisait référence aux deux paradigmes à fois puisqu'utilisant la déduction et la perception. Finalement, les démarches se basant sur les observations de la figure sont, pour leur part, issues du paradigme spatiographique.

<u>Analyse</u>

Nous avons choisi de rejeter l'activité 2 de cette expérimentation. Ce choix a été motivé par la réaction des élèves face à la question posée. Ces derniers ne maitrisaient pas suffisamment la notion de droites parallèles pour résoudre le problème. Pour eux, le parallélisme se résumait à deux droites qui ne se croisent jamais. Cette définition bien que fonctionnelle dans plusieurs contextes était insuffisante pour l'activité proposée.

4.2.7 Expérience 7

Activité 1

Nous tenons à préciser que cette expérience a été réalisée dans une seule classe. En fait, une seule des deux classes était disponible la journée de notre expérimentation. Et, étant donné que cette activité est très différente des autres en plus de ne pas nous amener vers un de nos objectifs de recherche, nous n'avons pas jugé nécessaire de la reprendre. En effet, celle-ci est principalement une activité de découverte à partir de la déduction et non une activité de validation en géométrie et nous l'avons rejetée de nos analyses.

4.2.8 Expérience 8

Activité 1

<u>Analyse a priori</u>

Cette activité est une activité issue des travaux d'Arsac (1988). Nous avons donc à notre portée quelques informations pour nous aider à identifier les réponses attendues des élèves.

Dans un premier temps, on retrouve la démarche de l'expert qui utilise les propriétés de la diagonale du rectangle. En effet, celle-ci sépare le rectangle en deux parties ayant la même aire, soient les triangles ADC et ACB. Chacun de ces triangles est formé par 3 figures, d'un côté les triangles AME et ELC et le rectangle MELD et de l'autre les triangles ANE et EKC et le rectangle NBKE. Il suffit ensuite d'utiliser la congruence des paires de triangles pour conclure que les rectangles sont de la même aire. Cette démarche n'est pas attendue de la part de beaucoup d'élèves puisqu'elle fait appel à plusieurs figures et concepts à la fois. Nous pensons que certains élèves vont utiliser une démarche semblable ou encore utiliser des dessins sur la figure pour justifier leur réponse. De plus, nous pensons que bon nombre d'élèves vont utiliser la mesure, mais s'y voir bloquer par la présence de nombres irrationnels. Les travaux d'Arsac et coll. (1992) nous indiquent qu'il est probable que les élèves utilisent la mesure pour solutionner le problème en tentant plusieurs façons de mesurer pour obtenir une meilleure précision.

Niveaux de van Hiele

En ce qui a trait à la démarche de l'expert, celle-ci fait appel aux propriétés de différentes figures et exige de l'acteur une maitrise de l'interrelation entre les figures. Ainsi, nous classons ce type de démarche au niveau Déduction Informelle (niveau 3). D'un autre côté, on retrouve les démarches issues du dessin et de la symétrie entre les deux triangles formés par la diagonale AC. Celles-ci se classent plutôt dans le niveau Analyse (niveau 2) de van Hiele puisqu'elles font appel à des propriétés des figures sans être capables de les définir complètement en mots. Et finalement, on retrouve les démarches de mesurage qui se classent également au niveau Identification (niveau 1).

Paradigmes géométriques

La démarche de l'expert s'inscrit dans le paradigme protoaxiomatique puisqu'elle reconnait les interrelations entre les figures. Pour ce qui est des démarches issues du dessin et de la symétrie, elles sont issues du paradigme spatiographique. En effet, nous considérons que bien qu'il s'agit de déduction l'élève travaille sur la figure en tant qu'objet concret. Finalement, les démarches basées sur la mesure se situent pour leur part dans le paradigme de la géométrie spatiographique.

Analyse

Nous rappelons que l'activité de l'expérience 8 est plus complexe que les expériences précédentes, car elle fait appel à un concept plus avancé et moins acquis par les élèves : l'aire. De plus, le problème offre aux élèves des données numériques pour les mesures de côtés, mais celles-ci ne lui sont au final d'aucune utilité dans la résolution du problème. Nous croyons d'ailleurs que ceci a induit les élèves en erreur, car ils ont cru devoir utiliser toutes les données du problème, alors que ce n'était pas nécessaire.

L'activité se divise en deux parties. Dans un premier temps, les élèves doivent indiquer si les rectangles BKEN et DMEL ont la même aire. Dans un deuxième temps, ils comparent leur réponse avec celle d'une autre équipe puis indiquent s'il est possible de répondre à la question sans utiliser la règle. À des fins d'analyse, nous avons séparé les résultats selon ces deux étapes.

Pour la première étape, nous avons obtenu trois catégories de réponses différentes de la part des élèves. Certaines équipes ont mesuré à la règle les côtés des rectangles afin de faire la comparaison. Cependant, comme décrit dans l'analyse a priori, cette démarche n'est pas appropriée puisqu'on parle de rectangles ayant exactement la même aire et que les figures ont été choisies de façon à faire intervenir les nombres irrationnels qui sont bien connus pour ne pas se mesurer de façon précise. Une autre réponse obtenue a été la fausse déduction. En effet, certaines équipes ont choisi de ne pas utiliser la règle pour vérifier si les aires sont identiques. Or, ils ont utilisé la déduction de façon erronée, par exemple en affirmant que le rectangle ANME est la moitié du rectangle EKLC et que par conséquent les aires sont égales. Cette réponse nous semble avoir été provoquée par le désir de l'élève de ne pas avoir recours à la mesure et par sa perception du problème. Finalement, la déduction a aussi été observée de façon appropriée chez les élèves comme dans le cas de l'équipe suivante (voir figure 4.7). Il est à noter que cette équipe a probablement utilisé la mesure pour se convaincre du résultat avant de formuler une solution sans y faire appel.

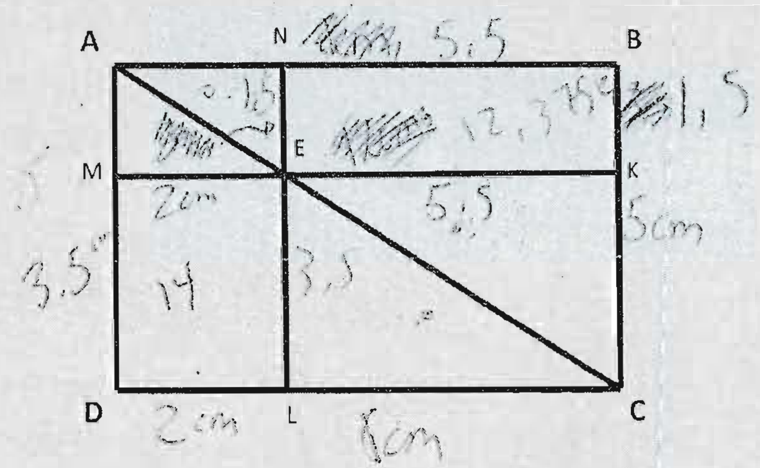
Figure 4.7 Expérience 8, Activité 1, 1.a)

Activité 1

ABCD représente un rectangle tel que AB = 8 cm et BC = 5 cm. Le point E est l'intersection des trois segments. LN est parallèle à AD et MK est parallèle à BC.

AE = 3cm

Est-ce que les rectangles BKEN et DMEL ont exactement la même aire ?



1 a) Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

Oui ils ont la même aire parce que le grand rectangle est séparé en deux (2 triangle sont obligatoirement de la même aire parce que le gros rectangle qui est séparé en deux triangle est égal et le petit aussi alors les deux rectangle qui nous reste sont de la même air obligatoirement

Tableau 4.20 Résultats Expérience 8 Activité 1, 1.a)

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Mesure	8	Spatiographique
Erreur	5	Mixte
Déduction	12	Protoaxiomatique

Pour la deuxième partie de l'activité, les élèves doivent revenir sur leur réponse après avoir comparé leur solution à celle d'une autre équipe. Leurs réponses ont été modifiées par cette comparaison. En effet, on observe une diminution du nombre d'élèves ayant recours à la mesure, ce qui soutient notre hypothèse selon laquelle les élèves font appel à la mesure lorsqu'ils se sentent incapables de répondre à la question à l'aide de la déduction.

Tableau 4.21 Résultats Expérience 8, Activité 1, 1d)

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Déduction	14	Protoaxiomatique
Erreur	2	Mixte
Mesure	4	Spatiographique
Aucune réponse	7	Aucun

De plus, il est à noter que les élèves qui avaient utilisé la déduction dans la première partie ont poursuivi avec cette solution. Aucune équipe n'est passée de la déduction à la mesure. Quatre des élèves n'ayant pas fourni de réponse avaient utilisé la déduction dans un premier temps. Nous supposons que ces derniers n'ont pas revu leurs réponses après la comparaison puisqu'ils étaient satisfaits de leur réponse.

En bref, il semble que les élèves choisissent l'utilisation des outils de la géométrie théorique, soit la déduction pour résoudre un problème de géométrie. Cependant, ceci n'est vrai que lorsqu'ils sont en mesure d'y faire appel. Sinon, ils se tournent vers la mesure et la géométrie pratique. Nous croyons que leur échec est causé par différents facteurs. Tout d'abord, l'aire est un concept mathématique assez nouveau pour les élèves et il n'est peut-être pas entièrement maitrisé. De plus, il s'agit de la première activité que nous leur proposons sur ce concept. Ensuite, nous pensons qu'une autre difficulté a surgi puisqu'il s'agissait pour les élèves de réfléchir sur des mesures sans que les valeurs numériques ne soient présentes. Effectivement, nous avons déjà identifié l'absence de mesure comme une source de difficulté pour les élèves quand vient le temps de raisonner déductivement. Finalement, la question comporte aussi une autre difficulté, soit l'utilisation d'une double transitivité. Celle-ci jumelée à l'absence de mesures et à un concept mathématique avancé avec lequel les élèves sont peu familiers, a rendu cette question très difficile pour les élèves et a empêché certains élèves d'atteindre le paradigme protoaxiomatique.

4.2.9 Expérience 9

Suite à l'expérimentation proprement dite, nous avons procédé à un post-test avec l'ensemble des élèves. Ce post-test étant un retour sur les activités du pré-test, nous n'en faisons pas une nouvelle analyse a priori.

Activité 1

Activité 1

Nous avons observé une certaine uniformité dans les réponses des élèves pour cette question. En effet, seulement trois démarches peuvent être distinguées, soient la déduction complète, la déduction incomplète et la mesure. Dans ce cas-ci, la déduction incomplète consiste à l'identification de chacune des mesures des côtés des triangles, mais à l'omission du calcul du périmètre de chacun de ceux-ci. Cependant, il est à spécifier que pour les besoins de notre recherche, les deux démarches peuvent être considérées de façon semblable. Effectivement, le raisonnement déductif est effectué même si les élèves n'ont pas calculé le périmètre par la suite. De plus, nous tenons à préciser que dans les deux catégories certains élèves n'ont pas explicité complètement leur raisonnement. Cependant, nous savons qu'ils n'ont pas pu utiliser leur règle puisque les valeurs obtenues auraient différé.

Tableau 4.22 Résultats Expérimentation 9, Activité 1

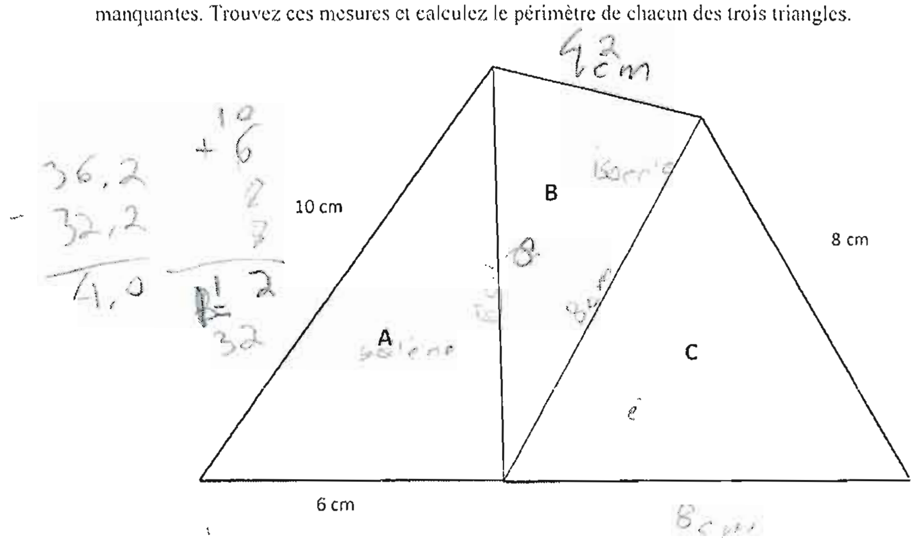
<table>
<tr><th>Réponses</th><th>Nombre d'élèves</th><th>Paradigme géométrique</th></tr>
<tr><td>Déduction</td><td>26</td><td rowspan="2">Protoaxiomatique</td></tr>
<tr><td>Déduction incomplète</td><td>16</td></tr>
<tr><td>Mesure</td><td>6</td><td>Spatiographique</td></tr>
<tr><td>Aucune réponse</td><td>1</td><td>Aucun</td></tr>
</table>

L'observation du tableau montre clairement que la forte majorité des élèves a résolu le problème en se situant dans le paradigme protoaxiomatique. Nous pensons que ceci s'explique par le fait que la déduction est la première option des élèves et qu'ils y souscrivent lorsqu'ils sont en mesure de résoudre un problème à partir de leurs connaissances. Ces résultats sont très différents de ceux obtenus en début d'expérimentation (voir section 4.2.1).

Voici un exemple de *Déduction incomplète*.

Figure 4.8 Expérience 9, Activité 1

La figure suivante est composée d'un triangle équilatéral (C), d'un triangle isocèle (B) et d'un triangle scalène (A). Le périmètre en rouge de la figure mesure 36.2 cm. On veut trouver le périmètre de chacun des trois triangles. Toutefois, certaines mesures sont manquantes. Trouvez ces mesures et calculez le périmètre de chacun des trois triangles.



Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

vue que le triangle c est équilatéral l'antre ligne du même triangle est égale. Pour trouver la mesures de la lignes du trangle B on a fait 36,2-(10+6+8+8)=4,2 cm

Activité 2

Les réponses obtenues lors de l'expérimentation 9 sont très intéressantes puisque très différentes de celles obtenues lorsque les élèves ont été soumis à cette tâche à la première expérimentation. Nous tenons à spécifier que nous avons séparé en deux catégories la déduction. En effet, nous l'avons observée de deux manières différentes : complète avec justification et incomplète. La déduction incomplète se repérait facilement puisque les élèves arrivent à la réponse voulue et ont écrit les mesures directement sur le dessin. Seulement, ils n'ont pas été en mesure de justifier l'obtention des résultats. Nous pensons que ces déductions incomplètes sont valables dans le cadre de notre recherche, puisque la verbalisation est parfois source de difficulté chez des élèves aussi jeunes. Nous avons aussi vu apparaitre des démarches basées à la fois sur la déduction et la perception puisque les élèves se sont basés sur les informations sur le petit carré avant de les appliquer aux autres carrés, mais en se basant sur une fausse prémisse.

Tableau 4.23 Résultats Expérience 9, Activité 2

Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Déduction (sans justification)	27	Protoaxiomatique
Déduction (avec justification)	8	
Perception et déduction	7	Mixte
Mesure	2	Spatiographique

Activité 3

Cette activité est différente de l'activité 1 proposée dans le pré-test, nous ne pourrons pas les comparer directement. L'activité 3 était une activité sensiblement difficile pour les élèves en début de projet puisqu'elle faisait appel à la transitivité des mesures de côtés. Il est alors très intéressant de remarquer que cette difficulté a disparu chez la plupart des élèves. Effectivement, beaucoup d'entre eux ont réussi le problème en entier. Nous observons que certains élèves ont utilisé la déduction, mais n'ont pas accompli la tâche puisqu'ils se sont arrêtés aux angles des triangles et n'ont pas identifié la mesure du côté CD. Encore, une fois malgré que la tâche ne soit pas accomplie entièrement, les élèves se sont quand même situés dans un paradigme protoaxiomatique.

Tableau 4.24 Résultats Expérience 9, Activité 3

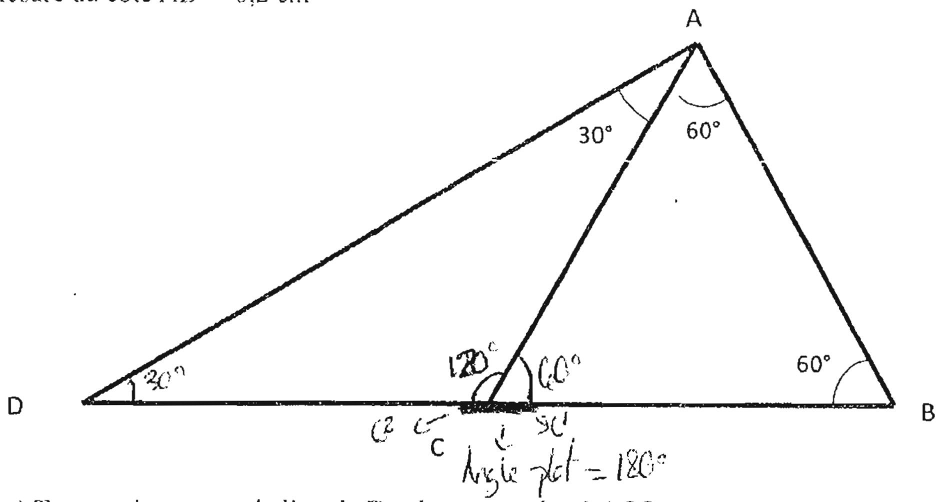
Réponses	Nombre d'élèves	Paradigme géométrique
Déduction complète	34	Protoaxiomatique
Déduction angles seulement	10	
Aucune réponse	4	Aucune

Voici un exemple de résolution par déduction complète afin d'illustrer de quelle manière articulée certains élèves réussissent à résoudre de tel problème.

Figure 4.8 Expérience 9, Activité 3

Activité 3

Mesure du côté AB = 6,2 cm



1.a) Trouvez la mesure de l'angle D et la mesure du côté CD.

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

Angle D: le triangle ABC est équilatéral donc 60° pour le C', après un angle plat de 180° donc 180-60=120 pour le côté C², ~~un triangle~~ la somme des angles d'un triangle est de 180° donc 180-120-30=30.

Mesure du côté CD: AB est 6,2 c'est un triangle équilatéral donc 6,2 partout et comme le triangle ACD est isocèle le côté CD mesure 6,2.

Nous retenons de cette expérience une forte présence du paradigme protoaxiomatique dans des activités de géométrie connues chez les élèves et une amélioration quant à l'usage de la transitivité lors de résolution de problème de géométrie.

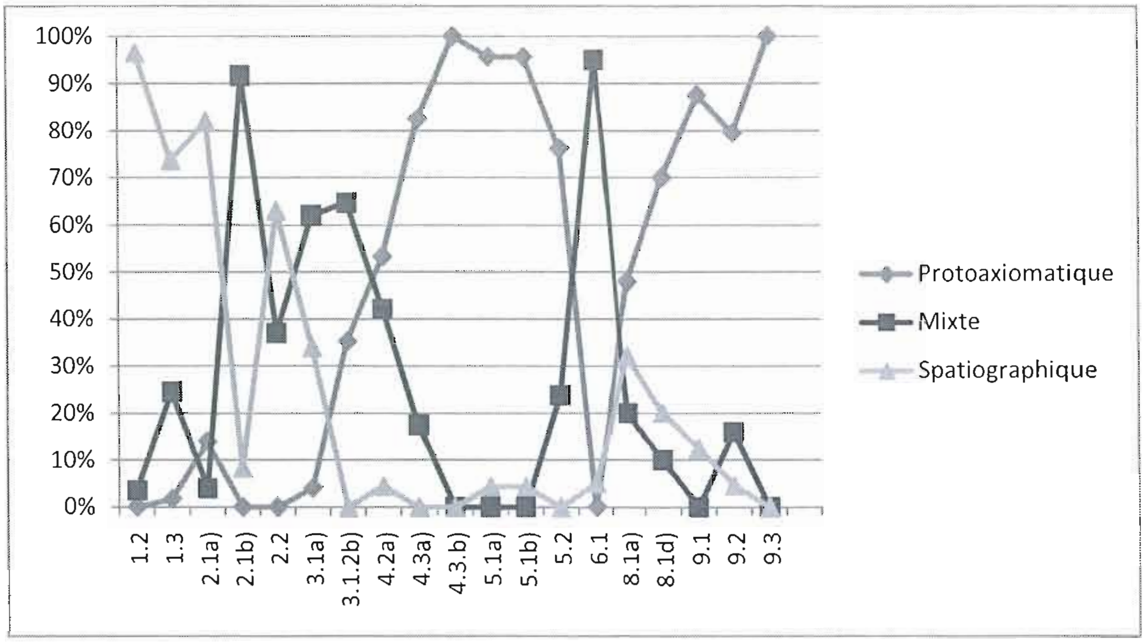
4.3 Conclusion sur les analyses

Dans cette section nous souhaitons revenir sur les résultats issus des 8 expériences en ayant comme préoccupation principale les paradigmes géométriques dans lesquels les élèves se situent. Ainsi, nous serons en mesure de tirer des conclusions quant à leur évolution à ce niveau.

À des fins d'analyse, nous avons construit un graphique temporel dans lequel on peut observer les proportions d'élèves se situant dans les paradigmes géométriques protoaxiomatique ou spatiographique au cours de chacune des expérimentations. Afin de mieux représenter les démarches obtenues, nous avons ajouté à ces deux paradigmes, une troisième composante soit la démarche mixte. Celle-ci représente les élèves qui ont utilisé les deux paradigmes géométriques lors d'un même problème. Nous considérons cette composante comme étant à mi-chemin entre les deux paradigmes puisque se servant des modes validation de ceux-ci de façon confondue.

Pour construire notre graphique, nous avons placé en abscisse les expériences de notre recherche. Par exemple, la valeur d'abscisse 8.1d) représente l'expérience 8, l'activité 1 et la question d). Nous avons appliqué ce même principe pour chacune des valeurs d'abscisse, c'est pourquoi il n'y a pas de 7 étant donné que nous avons rejeté l'analyse de cette expérience. En ce qui a trait à l'ordonnée, elle représente les proportions d'élèves par rapport à l'ensemble des élèves ayant participé à l'activité. De plus, afin de pouvoir illustrer l'évolution des paradigmes, nous avons tracé 3 courbes. Les courbes représentent les catégories de réponse des élèves, soient une démarche mixte, une démarche issue du paradigme spatiographique ou une démarche issue du paradigme protoaxiomatique.

Figure 4.9 Graphique temporel des paradigmes utilisés



Examinons l'allure générale du graphique pour en ressortir les éléments importants. Lors des trois premières activités (1.1 ; 1.2 ; 1.3) la courbe du paradigme spatiographique domine le graphique, puis progressivement, on voit l'apparition en premier plan de la démarche mixte pour les activités de l'expérience 2 et 3. Suite à ces deux expériences, c'est finalement la courbe du paradigme protoaxiomatique qui domine. Celle-ci subit une chute lors de l'activité 6, mais nous y reviendrons ultérieurement. Nous pouvons tout de même ressortir du graphique qu'il semble démontrer une diminution du paradigme spatiographique au profit du paradigme protoaxiomatique, mais pour en arriver là, il y a eu une transition par la démarche mixte.

Regardons plus attentivement le graphique. On remarque qu'au départ aucun élève n'a utilisé une démarche protoaxiomatique. En effet, on observe une majorité d'élèves, soit près de 60% qui se situe dans le paradigme spatiographique pour l'activité 1 de la première expérience (1.1) tandis que le reste des élèves (près de 40%) se situent pour leur part entre deux paradigmes puisqu'ils utilisent la démarche mixte. Des résultats semblables sont observables pour les trois activités de l'expérience 1. Ceci nous indique qu'au début de nos expérimentations le paradigme dominant chez les élèves est le paradigme spatiographique avec ses artéfacts, c'est-à-dire avec l'utilisation des instruments de mesure.

Suite à la première expérimentation, que nous avons aussi appelée pré-test, nous avons utilisé les traits gras afin de confronter l'élève quant à sa confiance par rapport à la mesure. Encore une fois, on observe une tendance chez les élèves à se situer dans le paradigme géométrique spatiographique ou à utiliser les deux paradigmes à la fois dans une démarche mixte. Il est à noter que quelques élèves ont utilisé exclusivement le raisonnement déductif et par conséquent se situent dans le paradigme protoaxiomatique dans la première activité. Nous croyons que la simplicité de l'activité 1 de l'expérimentation 2 a favorisé l'émergence de ce paradigme. En effet, les élèves devaient faire un seul pas de déduction en utilisant la propriété sur la somme des angles intérieurs des triangles pour répondre à la question. Certains élèves ont donc rapidement utilisé cette propriété sans avoir recours à leurs instruments de géométrie. Ceci est un indice que la validation à partir de propriétés géométriques est une démarche qui peut apparaitre spontanément chez les élèves qui connaissent la propriété en jeu dans un contexte de géométrie simple. Pour la question b), les élèves ont davantage utilisé une démarche mixte. Ce résultat est intéressant puisque la question posée à l'élève était la suivante : *Trouvez la mesure manquante d'une autre façon.* L'élève devait donc revoir sa démarche afin de la modifier pour résoudre de façon différente le problème posé. Il semble que de prime abord les élèves choisissent la mesure, mais que s'ils doivent utiliser une autre démarche, ils sont aptes à le faire ou du moins à utiliser le raisonnement déductif en partie. Nous émettons donc l'hypothèse que les élèves sont aptes à utiliser le raisonnement déductif, mais que le besoin n'est pas présent. L'activité 2 a donné beaucoup de place à l'expression du paradigme spatiographique. Nous pensons que les nombreuses étapes ont bloqué la validation théorique dans le raisonnement des élèves ce qui expliquerait la différence entre les résultats de l'activité 1 et de l'activité 2.

La première activité de l'expérience 3 fait appel aux connaissances des élèves quant aux losanges et utilise une fois de plus les traits gras afin de diminuer la précision de la mesure. Dans un premier temps, les élèves devaient trouver les mesures des angles manquants. Pour beaucoup d'élèves (60%), cette première étape fut résolue dans les deux paradigmes à la fois en utilisant une démarche mixte. Il est à noter que comme le mentionnent Houdement et Kuzniak (2006), les démarches mixtes sont le reflet d'un probable inconfort chez les élèves quant à leur position dans un paradigme géométrique précis. Nous pensons que la forte présence de démarche mixte marque l'indécision des élèves quant au paradigme géométrique à utiliser. Nous pensons d'ailleurs qu'il s'agit d'un premier indice indiquant une évolution des élèves vers une géométrie plus théorique. Une faible proportion des élèves a utilisé la déduction de façon exclusive, soit moins de 10 % (3.1a)). De la même façon qu'à l'expérimentation précédente, nous avons demandé aux élèves de résoudre le problème en utilisant une démarche différente. Encore une fois, on observe une forte augmentation de l'utilisation de la déduction puisque l'ensemble des élèves fait l'utilisation soit d'une démarche mixte, soit d'une démarche se situant complètement dans le paradigme géométrique protoaxiomatique. Ces résultats nous indiquent que les élèves sont en mesure d'utiliser le raisonnement déductif, mais qu'ils en font usage que lorsqu'on leur demande. En effet, pour cette question, nous leur avions demandé d'utiliser les propriétés du losange contenues dans leur *Boîte à outils*.

Tel que nous l'avons mentionné précédemment (voir section 4.1.4), l'expérimentation 4 était un retour sur les activités proposées aux élèves à l'aide du trait gras. Nous croyons que puisque les élèves ont eu des difficultés à obtenir des réponses précises à l'aide de la mesure lors des premières expérimentations et qu'ils ont pris conscience d'une autre façon de résoudre les problèmes, ils en sont venus à percevoir l'utilité du raisonnement déductif dans les activités de géométrie. Rappelons que les questions posées demandent explicitement à l'élève s'il est possible de résoudre le problème sans instruments de mesure. Nous sommes d'avis que les résultats obtenus nous indiquent que les élèves sont aptes à utiliser le raisonnement déductif, mais que le passage vers celui-ci doit être influencé par des éléments extérieurs tels que la formulation de la consigne, l'utilisation du trait gras et l'exigence de plusieurs démarches. Suite à ces interventions, les élèves sont passés d'une utilisation du paradigme protoaxiomatique presque nulle à une utilisation majoritaire. Il est aisé de remarquer cette augmentation à l'aide du graphique. Effectivement, pour les premières expériences, la courbe protoaxiomatique était presque confondue avec l'axe des abscisses, tandis que pour les activités de l'expérience 4 (4.2a) ; 4.23) ; 4.3.b)), celle-ci domine pour atteindre un pourcentage de près de 100% à l'expérience 4.3.a) et une faible diminution en b). Cette diminution s'explique par la nécessité d'utiliser la transitivité pour résoudre le problème, ce qui, rappelons-le, est une source de difficulté pour les élèves.

L'expérience 5 se distingue des expériences précédentes, car nous y avons introduit le dessin à main levée. Pour ces activités, les élèves étaient libres d'utiliser la démarche de leur choix. Cependant, il est à noter que la question posée induisait le paradigme protoaxiomatique puisque la mesure n'est pas possible sur une figure à main levée. De plus, l'utilisation de dessin à main levée indique aux élèves qu'il faut raisonner à partir d'un dessin, mais que celui-ci n'est qu'un outil (Coppé et coll., 2005). Les élèves se sont situés dans le paradigme protoaxiomatique dans une forte majorité pour les deux activités, soit près de 80%. Mentionnons que selon van Hiele (1959), les élèves qui sont en mesure de travailler de façon adéquate avec les figures à main levée se situent minimalement au niveau Analyse. Mentionnons également que nos résultats se distinguent de ceux obtenus par Coppé et coll. (2005) avec les dessins à main levée. Effectivement, dans leur étude les élèves éprouvent d'importantes difficultés à avancer dans le raisonnement, car le dessin les trompe. Dans le cadre de notre expérimentation, les élèves semblent quant à eux avoir bien compris le rôle du dessin à main levée. Nous expliquons la différence de nos résultats par les activités préparatoires qu'ils ont vécues au cours de notre séquence d'enseignement. Ces activités ont préparé l'élève par l'utilisation du trait gras et la demande de plusieurs démarches en mettant dans un premier temps l'accent sur le rejet de la mesure comme mode de validation et dans un deuxième temps sur la déduction comme source de validation. Ces aspects sont, à notre avis, l'une des causes du succès des élèves quant à l'utilisation de la figure à main levée.

La figure à main levée a aussi été utilisée pour l'expérimentation 6. Dans ce cas-ci, on observe une chute importante du nombre d'élèves se situant dans le paradigme protoaxiomatique. Effectivement, les élèves ont opté pour une démarche mixte, à l'exception d'une équipe. Cependant, nous ne considérons pas qu'il s'agisse d'une régression de leur part. Plutôt, nous optons pour l'hypothèse suivante : les élèves ne trouvant pas les outils nécessaires à la résolution du problème dans le paradigme protoaxiomatique, se sont tournés vers le paradigme spatiographique en utilisant leur perception de la situation pour résoudre le problème. En effet, le problème posé était d'un niveau de difficulté supérieur à ce qu'ils avaient rencontré précédemment puisqu'il faisait appel à des propriétés des diagonales non familières aux élèves de ce niveau. De plus, mentionnons que dans un problème similaire Coppé et coll. ont observé une importante lacune chez les élèves, soit que pour eux, l'égalité des mesures de côtés dans un quadrilatère implique qu'il s'agisse d'un carré. Nous sommes d'avis que les élèves se situent au niveau 3 de van Hiele, c'est-à-dire le niveau Déduction informelle, et comme le mentionne Parzysz (2002), ces élèves sont à un niveau charnière entre les deux géométries. Ils sont en train de mettre en place une géométrie théorique. Ainsi, s'expliquent les reculs que l'on observe chez les élèves dans certaines activités. Étant à cheval entre deux paradigmes, les avancés et les reculs sont susceptibles de se produire. De plus, ces résultats mettent en lumière l'importance de la maitrise par les élèves des propriétés et concepts avant d'entreprendre une activité de validation. Effectivement, l'absence de maitrise des connaissances en jeu amène l'élève à régresser dans ses modes de validation en effectuant un retour par la perception.

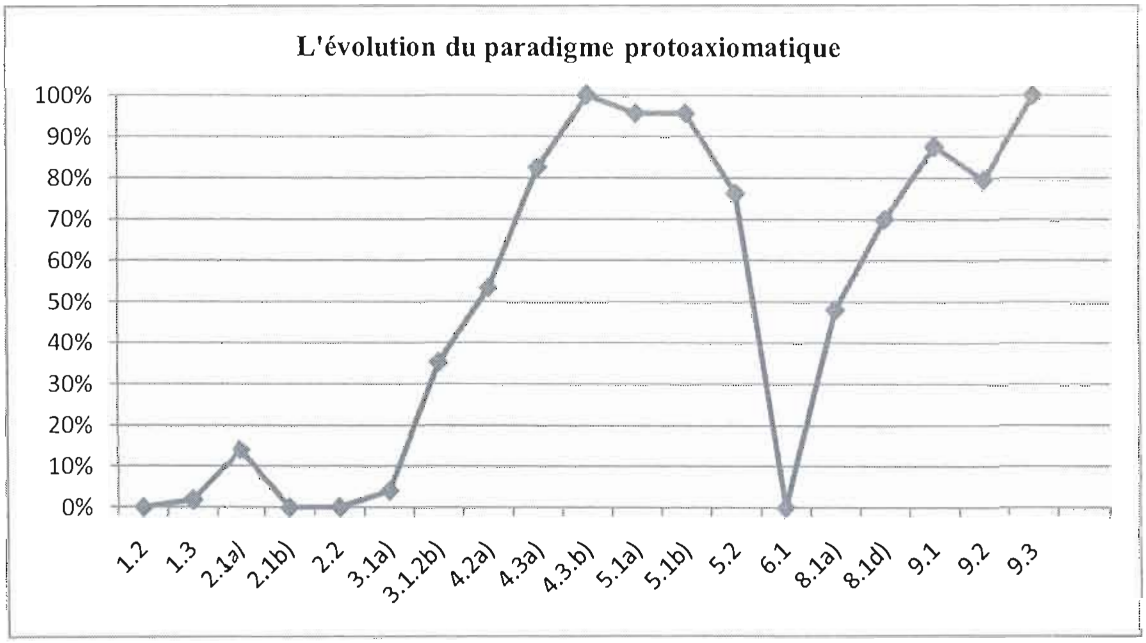
Une situation semblable s'est produite avec l'activité 8 étant donné que le niveau de difficulté du problème est élevé pour un élève de 6^{e} année. Les élèves devaient comparer des aires en n'ayant pas les valeurs numériques nécessaires à leur disposition en plus d'être en présence d'une double transitivité. De plus, il est normal que les élèves aient éprouvé des difficultés puisque cette question s'adressait à des élèves d'un niveau scolaire plus avancé. En effet, cette activité est inspirée des travaux d'Arsac (1988) qui dans le cadre de sa recherche avait donné un problème semblable à des élèves du collège français, soit des élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire au Québec. En ce qui a trait à la première partie de l'activité, les élèves l'ont résolu en se situant dans les paradigmes spatiographiques et protoaxiomatiques ou encore en utilisant une démarche mixte. Ces trois possibilités ont été observées, mais le paradigme protoaxiomatique a été dominant. En second lieu, les élèves devaient comparer leurs résultats et résoudre une fois de plus le problème sans utiliser la règle. Cette contrainte a mené une forte majorité d'élèves, soit près de 80 %, à se situer dans le paradigme protoaxiomatique tandis que les autres sont restés dans un mode de validation issu du sensible bien que la consigne demandait de ne pas utiliser d'instrument de mesure.

La dernière expérimentation consiste en une reprise des expérimentations du pré-test. Ceci nous permet de voir aisément le cheminement des élèves quant aux paradigmes géométriques. On observe que la très forte majorité des élèves, soit plus de 80 % pour chacune des activités, se situe dans le paradigme protoaxiomatique. Par conséquent, nous pensons que la vision des élèves quant à la géométrie a évolué pour passer d'une géométric *pratique* utilisant les instruments de mesure et la perception à une géométrie *théorique* donnant un rôle dominant au raisonnement déductif. Il nous semble qu'un changement de contrat didactique s'opère chez la plupart des élèves. En effet, nous faisons l'hypothèse que ces derniers comprennent que la solution attendue n'est plus celle utilisant la mesure, mais bien celle utilisant le raisonnement déductif et l'usage des propriétés des figures.

4.3.1 Les facteurs de régression et d'avancement

Notre recherche nous a permis de faire ressortir plusieurs facteurs de régression chez les élèves lors de leur initiation à l'activité de preuve en géométrie. Afin de nous aider, nous présentons le graphique précédent, mais en ne gardant que la courbe du paradigme protoaxiomatique.

Figure 4.10 Graphique temporel du paradigme protoaxiomatique



Regardons les moments importants qui suscitent une modification quant au paradigme protoaxiomatique. Dans un premier temps, on remarque un début d'utilisation des modes de validation de ce paradigme dès la 2e expérience. Comme nous l'avons mentionné précédemment, ceci est un indicateur que la pensée déductive peut émerger de façon spontanée chez les élèves lorsqu'ils participent à une activité géométrique simple et qu'ils connaissent les propriétés en jeu. Dans le cas présent, il s'agissait de la propriété sur la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle. Ensuite, on observe une nouvelle émergence de ce paradigme lors de l'expérience 3. Celle-ci est à notre avis motivée par l'exigence d'une deuxième démarche lors de l'énoncé de la consigne. Cette exigence force l'élève à imaginer une autre démarche et dans plusieurs cas, ceci l'amène à utiliser la déduction. De plus, cette activité a mis en évidence que l'angle à identifier influençait l'approche retenue par les élèves. Aux activités de l'expérience 4, le paradigme protoaxiomatique prend une importance notable. À notre avis, cet avancement est suscité par la prise de conscience des élèves, au cours des activités avec le trait gras, que la mesure n'est pas un mode de validation précis. Les élèves semblent faire les premiers pas vers le rejet de la validation par le sensible et l'empirique. Un autre facteur d'avancement identifié par nos travaux est celui de l'utilisation de la figure à main levée. Basée sur les hypothèses de Coppé et coll. (2005) concernant les possibilités d'utilisation de la figure à main levée nous avons bâti des activités avec ce type de dessin. Celles-ci semblent mettre en évidence la possibilité pour les élèves de les utiliser en comprenant leur rôle d'outil de réflexion et non d'objet matériel sur lequel on s'interroge. Il est probable que les élèves aient pu comprendre le fonctionnement des dessins à main levée du fait que la première activité à laquelle ils ont participé s'articulait autour de concepts simples tels que le cercle et le rectangle et suivant la séquence que nous avions prévue, soit l'utilisation du trait gras et l'exigence de plusieurs démarches. Cette hypothèse est aussi renforcée par l'expérience 6. En effet, bien que les élèves aient compris le rôle de la figure à main levée, ils ont régressé lors de cette expérience et ont utilisé les modes de validation issus du sensible. Nous pensons que ceci est principalement causé par la difficulté du problème. En effet, le nombre d'étapes et les connaissances en jeu ont nui à la compréhension du problème par les élèves.

Finalement, nos expériences ont aussi mis en évidence plusieurs difficultés des élèves dans la résolution de problème de géométrie, ce qui interférait avec la mise sur pied de leur raisonnement déductif. Nous avons identifié la transitivité comme étant particulièrement difficile en début de séquence, cependant les élèves ont semblé s'y adapter au cours des activités. De plus, nous avons aussi mis en évidence que l'absence de valeurs numériques bloquait la réflexion des élèves au moment de comparer des longueurs. Nous discuterons plus en profondeur ces différents aspects lorsque nous répondrons à nos questions de recherche (voir section 5.2).

CHAPITRE V : CONCLUSION

5.1 Résumé de la démarche

Notre recherche nous a menée à nous intéresser à l'enseignement de la preuve et nos lectures sur ce concept ont mis en lumière plusieurs difficultés observées chez les élèves en cours d'apprentissage. En effet, il a été mention de la rupture du contrat didactique (Balacheff, 1987; Stylianides, Stylianides, 2006; Gousseau et Coutat, 2005), de la confusion entre les exigences des géométriques pratique et théorique, du rapport au dessin et de la structure complexe du raisonnement déductif. Nous avons choisi de centrer nos recherches sur l'initiation à la preuve à l'école primaire, car nous étions en accord avec certains auteurs qui affirment que l'une des causes de difficulté liée à la preuve est son introduction abrupte à l'école secondaire (Balacheff, 1987; Stylianides, Stylianides, 2006). Afin de nous pencher sur les activités d'initiation à la géométrie déductive en classe de 6^{e}, nous avons fait l'analyse d'une collection de manuels utilisés au Québec. Celle-ci a mis en lumière les types de problèmes soumis aux élèves en termes d'activités géométriques au sens de Pallascio et coll. (1993), ainsi qu'au niveau d'une typologie des types de problèmes de géométrie issue des travaux de Tanguay (2000) et de van Hiele (Gutiérrez,1992) (voir section 1.10). Finalement, cette analyse a permis d'identifier un manque important en ce qui a trait aux problèmes demandant de l'empirico-déductif puisque la majorité des activités proposées aux élèves constituent des constructions à la règle graduée ou encore des activités de mesurage faisant peu appel à la déduction. Nous nous intéressons donc à des activités qui pourraient combler cette lacune afin de favoriser une introduction plus graduelle à la géométrie théorique. Afin de préciser nos préférences, nous avons formulé les questions de recherche suivantes :

1-Le passage d'une géométrie pratique à une géométrie théorique est-il possible chez des élèves de 3e cycle du primaire?

2-Dans quelle mesure est-il possible de favoriser le développement du raisonnement déductif chez les élèves de troisième cycle de l'enseignement primaire?

3- Quelles sont les activités permettant aux élèves de délaisser la mesure au profit de l'utilisation de la déduction dans l'activité géométrique?

Pour répondre à nos questions, nous avons mis sur pied une méthodologie de recherche. Plus précisément, nous avons choisi de construire des activités géométriques d'initiation à la preuve pour le troisième cycle du primaire. La construction de ces activités s'est faite à partir de notre cadre théorique (voir chapitre II). Principalement, nous avons retenu les travaux de van Hiele sur l'évolution de l'apprentissage de la géométrie. Ceci nous a permis d'identifier les niveaux de développement des élèves selon la démarche qu'ils poursuivent lors de leur résolution de problèmes. De plus, nous avons joint à ces travaux ceux de Houdement et Kuzniak (2006) concernant les paradigmes de la géométrie et les espaces de travail. Ainsi, nous avons pu bâtir une grille conjointe avec les travaux de van Hiele qui nous permet de situer les élèves dans un paradigme géométrique précis. Cette grille a été inspirée par les travaux de Parzysz (2002). Les travaux de Houdement et Kuzniak (2006) sont d'autant plus importants dans le cadre de notre travail, qu'ils nous ont éclairés quant aux trois modes de pensée de la géométrie et aux espaces de travail. En effet, la réflexion quant à l'espace de travail de l'élève lors de la construction des activités fut une considération nécessaire à nos ambitions de recherche. Pour la construction des activités, nous avons aussi pris en compte les travaux de Coppé et coll. (2005) concernant les différentes figures et dessins utilisés en géométrie. Ceux-ci nous ont amené à utiliser les traits gras et à repousser les dessins faux qui trompent l'élève et ne provoquent pas nécessairement de changement quant au mode de validation qu'il utilise en géométrie. Conjointement à l'utilisation des traits gras, nous avons exigé plusieurs démarches pour un problème. Suite à ces approches, nous avons aussi utilisé les dessins à main levée afin d'empêcher les élèves de raisonner sur la figure comme objet concret.

Suite à nos lectures, nous nous sommes donné les objectifs de recherche suivant :

Objectifs généraux :

(IV) Identifier les paradigmes géométriques dans lesquels les élèves se situent.

(V) Favoriser le passage de la géométrie spatiographique à la géométrie protoaxiomatique.

(VI) Cerner à travers quelles activités les changements de paradigmes géométriques apparaissent.

Objectifs spécifiques :

(iv) Remettre en cause la lecture directe sur le dessin comme mode de validation.

(v) Remettre en cause la mesure comme mode de validation.

(vi) Favoriser l'utilisation des propriétés théoriques comme mode de validation.

Les éléments de notre cadre théorique et nos objectifs de recherche nous ont permis de construire des activités géométriques d'initiation à la preuve (voir chapitre III). Ces activités ont été expérimentées dans deux classes de 6^{e} année du primaire, soit auprès d'une soixantaine d'élèves d'une même école et les activités ont été réalisées en dyade. La construction de ces activités s'est ajustée au cours de l'expérimentation en classe. Par exemple, nous avons ajouté des activités sur les figures à main levée dès que nous avons senti que les élèves avaient tiré profit de tout ce que pouvait offrir les activités avec les traits gras En fait, nous avons utilisé le *design research*, ce qui nous laissait beaucoup de latitude et nous permettait de revoir nos activités selon les résultats obtenus en cours de route.

À des fins d'analyse, nous avons regroupé les démarches des élèves en diverses catégories pour chacune des activités selon qu'ils utilisent la déduction, la mesure ou une démarche mixte. Rappelons que la démarche mixte est une démarche réunissant des modes de validation issus d'une utilisation concrète de la figure en tant qu'objet et des modes de validation issus d'une réflexion sur les caractéristiques de la figure en tant que représentant d'une catégorie d'objets. Par la suite, chacune de ces catégories a été associée à un paradigme géométrique selon notre grille d'analyse (voir Chapitre III). Ainsi, chacune des démarches des équipes a été reliée à un paradigme géométrique, ce qui nous a permis de voir l'évolution des élèves à ce niveau, en plus de voir quels sont les éléments déclencheurs qui les amènent à passer d'un paradigme à l'autre. Afin d'être en mesure d'identifier ces éléments déclencheurs et d'observer une évolution, nous avons choisi d'analyser huit expérimentations en classe, chacune comportant une ou plusieurs activités.

5.2 Réponses aux questions de recherche

Trois questions de recherche soutiennent ce travail (voir Chapitre I). Nous répondons à chacune de ces questions en appuyant nos réponses sur les résultats obtenus et ceux auxquels nous pouvions nous attendre suite à nos lectures et en vertu de notre cadre théorique.

5.2.1 Le passage d'une géométrie pratique à une géométrie théorique est-il possible chez des élèves de 3e cycle du primaire?

Cette question s'intéresse au passage d'une géométrie pratique vers une géométrie théorique puisque ce passage a été identifié par plusieurs auteurs comme étant une source de difficulté pour les élèves (Balacheff, 1987; Stylianides, Stylianides, 2006 ; Coppé et coll., 2005) tout en étant un passage obligé pour faire face aux exigences des activités géométriques de l'école secondaire. Cependant, nous devons nous interroger sur la faisabilité d'un tel passage chez des élèves du 3e cycle du primaire.

Rappelons que selon Parzysz (2001) on peut associer le paradigme spatiographique à la géométrie de l'école élémentaire alors que le paradigme protoaxiomatique correspond à la géométrie de l'enseignement secondaire. En d'autres mots, nous pouvons penser qu'un élève qui se situe dans le paradigme spatiographique fait appel aux outils de la géométrie pratique tandis qu'un élève qui se situe dans le paradigme protoaxiomatique est plutôt tourné vers la la démarche mixte qui se situe entre les deux et par conséquent, entre les deux géométries. De plus, tout comme Braconne-Michoux (2008) nous pensons que les paradigmes géométriques peuvent varier chez un même élève selon la tâche qui lui est demandée. C'est pour cette raison que nous avons analysé les paradigmes associés aux démarches des élèves lors de plusieurs activités distinctes.

Une fois de plus, nous nous servons de notre séquence d'enseignement pour répondre à notre question de recherche. Les analyses effectuées quant au paradigme géométrique associé à chacune des démarches des élèves nous permettent de préciser dans quelle mesure les élèves utilisent les différents paradigmes.

Pour répondre à cette question, nous devons regarder le cheminement de l'ensemble des élèves. En comparant les résultats des élèves lors du pré-test à ceux obtenus lors du post-test, il ne fait aucun doute que la géométrie théorique a pris le dessus. Lors du pré-test, tous les élèves utilisaient une démarche mixte ou une démarche empirique, ce qui les plaçait dans le paradigme spatiographique. Cependant, lors de la dernière expérimentation, on remarque que pour ces mêmes activités, les élèves choisissent de les résoudre en se situant plutôt dans le paradigme protoaxiomatique. Selon cet indicateur, on peut conclure que maintenant les élèves utilisent préférentiellement les outils de la géométrie théorique. Par contre, ces résultats n'indiquent pas que les élèves utilisent uniquement la géométrie théorique, plutôtqu'ils sont à même de l'utiliser dans certaines occasions.

Le graphique produit (voir figure 4.9) nous fournit un outil d'analyse nous permettant également d'affirmer que les élèves de 3^{e} cycle de l'école primaire sont en mesure de faire un passage vers la géométrie théorique. En effet, lorsque qu'on regarde les tendances de chacune des courbes, il y a une diminution de l'utilisation du paradigme spatiographique au profit du paradigme protoaxiomatique. Cependant, ce transfert d'approche ne s'effectue pas d'un seul coup. Il semble y avoir un moment de transition où la démarche mixte est très présente dans les démarches des élèves. Ceci s'explique d'ailleurs grâce aux travaux de Houdement et Kuzniak (2002) qui affirment que les démarches mixtes sont le reflet d'un malaise chez les élèves quant au paradigme géométrique à utiliser. Nous sommes d'avis que ce malaise est justifié par la transition d'un paradigme à l'autre. Avant de maîtriser totalement les artéfacts de la géométrie protoaxiomatique, les élèves font des allers-retours entre les deux afin de pouvoir compléter leur solution. Ceci nous amène à discuter des facteurs qui peuvent faire régresser l'élève.

Effectivement, le graphique nous montre une progression du paradigme protoaxiomatique, mais celle-ci est entrecoupée par plusieurs régressions. En effet, nous avons pu mettre en évidence que la difficulté du problème pouvait être un facteur de régression chez les élèves. Plus précisément, nous avons identifié que la transitivité était une source importante de difficulté. Ceci étant dit, celle-ci a pu être surmontée par les élèves suite à plusieurs activités utilisant cette relation. Lors de l'activité 2 de l'expérience 2, les élèves faisaient face à la transitivité pour une première fois. Celle-ci a bloqué leur réflexion et les a menés à utiliser une démarche instrumentée pour trouver la mesure du côté, bien que leur solution avait débuté dans le paradigme protoaxiomatique. Cependant, lorsqu'une question semblable a été posée lors de l'activité 2 de l'expérience 2, les élèves ont eu plus de facilité à l'utiliser, son utilisation passant de 0 à plus de 50%. Ces résultats sont d'autant plus surprenants qu'aucun enseignement autre que les activités proposées n'a été donné aux élèves. Par-contre, la transitivité s'est démarquée à nouveau comme facteur de régression à l'expérimentation 8 où il y avait présence de double transitivité.

Un auteur facteur de régression associé à la difficulté du problème posé concerne le nombre de pas de déduction à effectuer. En effet, si l'on compare les résultats obtenus lors de l'activité 2 de l'expérience 2 à ceux d'une question semblable, mais avec moins de pas de déduction, on observe une nette amélioration de l'usage de la déduction, soit une augmentation de 0% à plus de 50%. Cependant, nous tenons à préciser qu'il nous est impossible d'affirmer que le nombre de pas de déduction est l'unique facteur en jeu puisque l'élève a aussi évolué étant donné qu'il s'est vu proposé plusieurs activités l'amenant à se détacher de la mesure. Nous considérons que d'autres études doivent se pencher sur cette hypothèse. Tout de même, mentionnons que cette difficulté issue du nombre de pas de déduction a été soulevée par Duval (2001) qui explique celle-ci par l'incompréhension des élèves quant à la structure globale du raisonnement déductif.

déduction a été soulevée par Duval (2001) qui explique celle-ci par l'incompréhension des élèves quant à la structure globale du raisonnement déductif.

Nous identifions aussi comme facteur de régression, l'absence de données numériques. En effet, lorsque les élèves doivent travailler sur la congruence entre les mesures de côtés, il semble que celle-ci soit plus facilement identifiable s'ils peuvent y indiquer des mesures. Tandis que lorsque celles-ci sont absentes du problème, comme pour l'activité 3 de l'expérience 2, les élèves se tournent vers leur perception ou la mesure car ils n'arrivent pas à identifier que le triangle QDC est congru en utilisant les mesures de côté.

Finalement, nous avons identifié plusieurs facteurs favorisant le passage de la géométrie pratique vers la géométrie théorique suite à notre séquence d'activité. Ceux-ci ayant déjà été explicités (voir section 5.2.2.) nous n'y reviendrons pas en profondeur, mais en voici un bref résumé : l'utilisation de traits gras, l'exigence de plusieurs démarches, l'utilisation de figure à main levée, la familiarité des concepts et propriétés en jeu et finalement des activités sollicitant peu de pas de déduction.

5.2.2 Dans quelle mesure est-il possible de favoriser le développement de la déduction chez les élèves de 3e cycle du primaire ?

Cette deuxième question concerne la possibilité de favoriser le développement de la déduction chez les élèves du 3e cycle du primaire. Ayant mentionné nos intérêts pour l'initiation à la géométrie théorique dès le 3e cycle du primaire, nous sommes d'avis que celle-ci ne peut se faire sans l'utilisation de la déduction comme mode de validation.

Rappelons d'abord la position de plusieurs chercheurs quant au développement de la déduction chez les préadolescents. Nous trouvons dans la littérature à ce sujet des avis partagés. Entre autre, on retrouve Inhelder et Piaget (1958) qui affirment que les élèves de moins de 11-12 ans sont inaptes à mettre de l'avant la pensé hypothético-déductive nécessaire à la déduction. D'autre part, des études plus récentes (Ennis, 1975 ; English, 1997) ont démontré l'inverse, c'est-à-dire qu'il est possible de développer le raisonnement déductif chez les préadolescents. Pour notre part, nous avons émis l'hypothèse que les élèves en classe de 6^e année sont aptes à raisonner déductivement, mais que le raisonnement déductif doit être favorisé par les activités proposées. Il est à noter que cette hypothèse est soutenue par le programme de formation de l'école québécoise qui demande de développer ce type de raisonnement dès le 3^e cycle du primaire.

Pour vérifier notre hypothèse et spécifier dans quelle mesure ce développement est possible, nous avons construit une séquence d'activités d'initiation à la géométrie déductive pour les élèves de 6^e année. Cette séquence a été testée dans deux classes de sixième année sur une période de 4 mois. Les résultats que nous avons obtenus nous incitent à dire que non seulement le développement de la déduction est possible, mais qu'en plus il peut être spontané chez les élèves si on utilise des activités appropriées.

Regardons les résultats obtenus lors de l'expérience 2. Dans le cadre de la première activité de cette expérience, sept élèves ont utilisé de prime abord la déduction simple pour résoudre le problème posé. Ce problème était de nature très simple puisqu'il exigeait un seul pas de déduction de la part de l'élève en utilisant la propriété sur la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle, une propriété connue des élèves. Néanmoins, l'utilisation de la déduction dans ce contexte est un indicateur de la possibilité d'utilisation de la déduction chez les élèves du 3^e cycle du primaire. Mentionnons que l'utilisation des propriétés théoriques à des fins de justification n'a jamais été exigée des élèves, par conséquent, ils n'ont pas eu recours à la déduction par le passé. Par ailleurs, nous croyons que c'est la simplicité de la question due au concept en jeu, soit les angles d'un triangle et au nombre de pas de déduction, qui a favorisé l'émergence de la déduction. Nous sommes d'avis qu'il s'agit bien là d'un indice que la déduction est un mode de validation qui peut apparaître spontanément chez les élèves lorsque la situation est simple et les savoirs en jeu acquis. Cet indicateur est de plus renforcé par les résultats d'English (1997) qui stipule que : «[...] even without intervention, children display a foundation of elementary deductive reasoning processes. » (, p.350). Cependant, il est vrai que l'utilisation de la déduction par 7 élèves sur 50 n'est pas un argument suffisamment convaincant de la possibilité de développer le raisonnement déductif chez les élèves de 6^{e} année. C'est pourquoi, nous souhaitons discuter davantage des autres résultats obtenus lors de l'analyse de notre séquence d'activités.

Un autre indicateur nous est donné par cette même expérience, soit l'expérience 2. Pour la 1re activité de cette expérimentation, les élèves devaient identifier la mesure d'angle manquante dans un triangle dont on connait les mesures des autres angles. Dans un premier temps, les élèves ont majoritairement utilisé la mesure. Cependant, dès que nous leur avons demandé de nous fournir une deuxième démarche, ceux-ci se sont avérés en mesure d'utiliser la déduction dans une proportion de 90%. Nous déduisons de ces résultats que les élèves sont aptes à mettre de l'avant la déduction dans des cas simples, mais que celle-ci doit être motivée par l'enseignant ou par la formulation de la question.

Un autre indicateur de la mesure du développement de la déduction chez les élèves ayant participé à notre séquence d'activités est facilement identifiable si l'on s'intéresse à l'augmentation du nombre de démarches utilisant la déduction. Par exemple, lors de la première activité de l'expérience 1 seulement 23 élèves (43%) ont utilisé la déduction pour résoudre un problème de géométrie simple. Spécifions qu'en plus aucun d'entre eux n'a utilisé la déduction de manière exclusive. Cependant, lorsque 4 mois plus tard nous leur avons soumis à nouveau cette même activité, nous avons obtenu une utilisation de la déduction par 42 des 49 élèves ayant participé à cette activité, ainsi 86% des élèves ont utilisé la déduction. De plus, ces élèves n'ont pas complété leur démarche par l'utilisation de la mesure Nous croyons que ces résultats sont indicateurs du développement de la déduction chez les élèves de ce niveau scolaire. Effectivement, nous parlons d'une nette augmentation puisque le nombre d'élèves utilisant la déduction a pratiquement doublé.

Cependant, nous nous devons de mentionner que ces résultats sont positifs quant à l'utilisation de la déduction et au détachement de la mesure chez les élèves de 6^{e} année, mais qu'ils en illustrent aussi les limites. Par exemple, nous avons identifié que la déduction peut être favorisée chez les élèves de ce niveau, mais que pour ce faire, celle-ci doit être sollicitée via des problèmes de géométrie simples. Plus précisément, ces problèmes doivent faire appel à des propriétés connues et familières des élèves en plus de comporter peu de pas de déduction.

5.2.3 Quelles sont les activités permettant aux élèves de délaisser la mesure au profit de l'utilisation de la déduction dans l'activité géométrique ?

La dernière question concerne les activités qui permettent aux élèves de délaisser la mesure. Nous avions fait l'hypothèse, suite à nos lectures, qu'il était possible d'amener les élèves à se détacher de la mesure en les confrontant à l'imprécision de celle-ci par l'utilisation de différentes formes de dessin. Selon Coppé et coll. (1995), une des difficultés pour les élèves est le changement de statut du dessin lors de l'activité géométrique. Pour forcer le passage du dessin comme objet matériel à celui d'une figure caractérisée par des propriétés, nous avons fait appel à des dessins difficilement manipulables par les élèves. Plus précisément, les traits gras, les tracés à main levée et les mesures irrationnelles ont constitué nos outils pour amener les élèves à délaisser la mesure. Nous y avons aussi joint l'exigence de deux démarches. Nous avons retenu ces outils suite aux recommandations de Coppé et coll. (1995) et aux expérimentations menées par Arsac et coll. (1992). Les premiers supposent que les figures à main levée peuvent être un outil favorisant le passage de la géométrie pratique vers la géométrie théorique si son utilisation est adéquate. Pour les seconds, l'usage de nombres irrationnels dans les problèmes a forcé les élèves à revoir le statut de la mesure. Notre hypothèse est donc qu'une séquence d'enseignement jumelant l'utilisation de traits gras à l'exigence de plusieurs démarches, suivie par l'utilisation de dessins à main levée ainsi que la présence de nombres irrationnels favorisent le passage de l'élève de la géométrie pratique à la géométrie théorique. Nous avons donc bâti une séquence d'activités d'initiation à la preuve en géométrie utilisant ces éléments dans un ordre prédéfini afin de vérifier notre hypothèse.

Afin d'examiner si les élèves se détachent de la figure, nous avons dans un premier temps analysé chacune de leur réponse pour vérifier quels outils ils utilisent pour résoudre les problèmes posés. Étant donné que nous avons classé toutes les démarches d'élèves utilisant la mesure dans une démarche mixte ou dans le paradigme spatiographique, il nous est possible de préciser à quelle fréquence la mesure a été utilisée au cours de chacune des contexte précis. Pour ce faire, ils devaient choisir entre une démarche utilisant la mesure et une démarche utilisant la déduction.

Pour l'ensemble des activités proposées aux élèves on observe une nette diminution de l'utilisation de la mesure au profit de l'utilisation de la déduction et par conséquent du paradigme protoaxiomatique (voir figure 4.9) suite aux activités proposées. Nous avons indiqué précédemment que plusieurs facteurs étaient en cause, et ceux-ci sont identifiables sur le graphique, car ils correspondent à des changements de comportement de la part des élèves quant à la démarche utilisée. Par exemple, l'utilisation de trait gras jumelée à l'exigence de deux démarches pour les expériences 2 et 3 ont fait chuter l'utilisation de la mesure chez les élèves lors de l'expérience 4. On obtient une diminution de l'ordre de 60%. Ces résultats démontrent une réduction de l'utilisation de la mesure et nous identifions les activités proposées comme principales responsables de cette chute de la mesure au profit de la déduction. En effet, les chercheurs et les enseignantes ne donnaient pas d'indications supplémentaires aux élèves, par conséquent les résultats obtenus sont principalement le fruit de la séquence des activités proposées.

Suite à ces premières expériences nous avons poursuivi notre séquence d'activités en faisant intervenir un nouveau paramètre, soit le dessin à main levée. L'utilisation de celui-ci lors des expériences 5 et 6 avait pour objectif de renforcer l'utilisation de la déduction chez les élèves. Lors de ces expériences, les élèves n'ont pas fait appel à la mesure, mais nous ne pouvons pas affirmer qu'il s'agit d'un détachement par rapport à la mesure, puisque celle-ci est impossible à effectuer sur un dessin à main levée. D'ailleurs à ce sujet, Braconne-Michoux (2008) mentionne que les élèves ont souvent recours à la déduction lorsque les éléments du problème ne leur permettent pas d'obtenir une réponse fiable via la mesure. Nous pensons que l'utilisation de dessin à main levée a renforcé l'usage de la déduction chez les élèves puisque suite à ces activités, les élèves ont utilisé dans une proportion de plus de 80% la déduction de façon adéquate pour résoudre les problèmes de l'expérience 9 étant donné qu'ils n'avaient pas accès à la mesure vu les types de dessin en jeu. En bref, nous sommes d'avis que les dessins à main levée ont renforcé l'usage de la déduction chez les élèves, sans pour autant les amener à délaisser la mesure puisque dans ce cas, l'utilisation de la déduction était la seule solution valable. À notre avis, il est possible que les élèves soient encore attachés à la mesure comme mode de validation dans des activités complexes de géométrie.

De son côté, l'utilisation de nombres irrationnels dans un problème a semblé forcer les élèves à exclure la mesure de leur validation. Effectivement, pour ce problème (voir section 4.1.8) les élèves ont très peu utilisé la mesure. Cependant, cette activité n'a pas été concluante quant à l'utilisation de la déduction. Il semble que les élèves se soient plutôt tournés vers la perception. Par contre, nous ne concluons pas que les nombres irrationnels ne sont pas prometteurs pour amener les élèves de la mesure à la déduction. Nous croyons que la difficulté du problème a mené les élèves vers la perception. En effet, le problème soumis se distinguait des problèmes précédents par le concept mis en jeu, soit la comparaison d'aires. De plus, à l'instar de Pierraut-Le-Bonniec (1980) nous sommes d'avis que ce recul vers la perception peut être le fruit du désir de l'élève à solutionner le problème. Les élèves, ne voulant pas laisser un problème sans solution, ont utilisé les outils qui leur étaient disponibles. Ces résultats viennent appuyer notre hypothèse à savoir que la déduction émerge chez les élèves lorsque les situations proposées font intervenir des concepts simples dans lesquels les propriétés en jeu leurs sont familières.

Finalement, mentionnons aussi les résultats obtenus lors de l'expérience 4 où nous avons demandé aux élèves de préciser quelle démarche était la plus appropriée pour trouver la mesure d'angle manquante dans un triangle. Les élèves ont choisi à l'unanimité la démarche issue de la propriété de la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle. Nous sommes d'avis qu'il s'agit d'un moment important de notre recherche, puisqu'il pointe un détachement des élèves par rapport à la mesure au profit de la déduction.

En résumé, nous pensons que la séquence d'activités proposée favorise le détachement de la mesure au profit de la déduction. Nous avons retenu les éléments suivants comme étant des éléments clés dans la réussite de cet objectif :

- Utilisation de traits gras pour confronter les élèves à l'imprécision de la mesure ;
- Exigence de plus d'une solution pour forcer l'utilisation de la déduction ;
- Utilisation de figures à main levée pour renforcer l'utilisation de la déduction ;

- Utilisation de contextes et concepts familiers ;
- Progression dans les activités ;

Nous gardons en tête l'utilisation des nombres irrationnels comme outils, mais ne pouvons conclure à ce sujet. Évidemment, beaucoup de travail reste à effectuer quant à leur utilisation et aux résultats qui peuvent en découler. Finalement, nous souhaitons aussi préciser que nous avons soulevé plusieurs hypothèses quant aux différentes activités que l'on propose aux élèves. Par exemple, nous avons mentionné qu'à notre avis le niveau de difficulté du problème dû au nombre de pas de déduction ainsi qu'aux concepts en jeu peut freiner l'émergence de la déduction chez l'élève. Cependant, d'autres investigations doivent être faites afin de confirmer cette hypothèse.

5.3 Retombées pédagogiques

Dans le cadre de cette recherche, nous avons concentré nos efforts sur l'analyse d'activités de géométrie dans l'objectif de favoriser le passage de la géométrie pratique à la géométrie théorique sachant que ce passage est difficile pour les élèves. Les résultats obtenus à la suite des analyses nous permettent de nous avancer quant aux activités à privilégier dans l'optique de développer le raisonnement déductif chez les élèves en classe de 6^{e} année.

Les résultats illustrent que pour favoriser le détachement des élèves par rapport à la mesure, l'utilisation de figures tracées au trait gras est une des options à envisager. En effet, celles-ci permettent de mettre en lumière les limites de la démarche instrumentée utilisant la règle graduée et le compas. Les résultats de notre recherche ont montré que si on applique une approche par laquelle les élèves sont à même de voir les limites de la mesure, celle-ci peut favoriser le recours à la déduction. Cependant, mentionnons que cet outil a été jumelé à l'exigence de plusieurs démarches lors des expérimentations et que les activités proposées étaient construites pour que l'élève s'engage dans celles-ci avec un pair. En effet, bien que nous n'ayons pas étudié l'impact du travail en dyade par rapport au travail individuel, il nous semble profitable que l'élève travaille en équipe lors de son initiation à la déduction en géométrie afin de pouvoir débattre et échanger ses idées. Cette hypothèse est soutenue par les travaux d'Arsac et coll. (1992) qui mentionnent que les conflits cognitifs causés par les discussions entre les élèves permettent à certains arguments de disparaitre au profit d'arguments retenus par les deux élèves. Ainsi, nous pensons que le travail d'équipe a favorisé l'échange et a permis à l'élève de s'engager dans la recherche de plusieurs démarches de façon efficace. Cependant, nous devons y aller prudemment quant à l'impact que peut avoir l'utilisation de figures à trait gras ou l'exigence de deux démarches si elles sont faites séparément. Il est possible que ce soit l'utilisation de ces deux approches en parallèle qui ait permis aux élèves de délaisser la mesure au profit de la déduction, favorisant ainsi le passage vers la géométrie théorique.

L'analyse des démarches a aussi permis de montrer que beaucoup d'élèves font appel à une démarche mixte lors de la résolution de problèmes de géométrie. Comme mentionné par

Houdement et Kuzniak (2002), ce type de démarche est un indice d'un certain malaise chez les élèves quant au paradigme géométrique en jeu dans une situation. Pour notre part, nous pensons qu'il peut aussi s'agir d'un indice que les élèves sont en processus de transition d'un paradigme à l'autre. Plus précisément, nous émettons l'hypothèse que dans certaines situations l'utilisation de la démarche mixte indique que les élèves commencent à se détacher de la mesure au profit de la déduction. En effet, lors des expérimentations effectuées, les élèves utilisaient la démarche mixte dans les situations où ils ne possédaient pas tous les outils nécessaires pour continuer leur raisonnement de manière déductive.

Ceci nous amène à discuter du niveau de difficulté des problèmes proposés aux élèves lors de leur initiation à la géométrie déductive. Les résultats obtenus ont montré qu'il était possible de favoriser le développement du raisonnement déductif chez les élèves de troisième cycle de l'école primaire, mais que ce développement pouvait être freiné par le choix des problèmes soumis. Il semble que les savoirs en jeu et le nombre de pas de déduction sont des facteurs clés à considérer. Par ailleurs, ceci nous laisse penser que la progression en termes de difficulté de problèmes doit être un souci majeur dans la construction d'activités d'initiation à la géométrie déductive. Souci nécessaire, car une mauvaise progression entraine une régression importante chez les élèves tels que nous avons pu l'observer dans notre étude. En effet, il importe d'amener les élèves à rejeter par eux-mêmes la mesure comme mode de validation en utilisant les traits gras et ensuite les dessins à main levée. De plus, nos résultats ont mis en évidence la nécessité de favoriser le développement du raisonnement déductif à travers des activités où les élèves sont à l'aise avec la manipulation des concepts en jeu.

Finalement, les résultats de notre étude éclairent la possibilité de développer le raisonnement déductif chez les élèves de troisième cycle de l'école primaire. Cette hypothèse était déjà soutenue par les travaux de Douaire (1999) et Lester (1975). Notre étude vient donc confirmer que ce développement est possible. Dans nos travaux, ce développement s'est produit grâce à des activités de géométrie, mais il est fort probable que d'autres formes d'activités puissent elles aussi amener l'élève à la déduction.

5.4 Limites et prolongement

Bien que notre méthodologie ait été choisie afin de répondre à nos questions de recherche, certaines interrogations demeurent. En effet, afin d'analyser les démarches d'élèves nous avons dû les regrouper sous des paradigmes géométriques ou sous l'étiquette démarche mixte. Cependant, bien que cette théorie issue des travaux de Parzysz (2002) soit très intéressante et riche en possibilités, nous avons eu de la difficulté à y indiquer toutes les démarches observées, et ce, particulièrement en ce qui concerne les démarches mixtes puisque celles-ci se situent à cheval entre deux paradigmes. De plus, le raisonnement des élèves est parfois difficile à identifier puisque les démarches sont souvent très peu explicitées étant donné l'âge et le niveau scolaire des élèves. Ces difficultés restreignent les conclusions qui peuvent être tirées de nos analyses.

Un autre facteur qui nous amène à nous questionner sur notre démarche de recherche est la formulation des questions. Selon Houdement et Kuzniak (2005), la formulation des questions peut être une source d'influence quant au paradigme géométrique en jeu dans une question. Par exemple, l'activité 2 de l'expérience 1 se situe dans le réel et place l'élève dans le paradigme spatiographique dès le départ. Ceci remet en cause le choix de nos questions. Cependant, nous pensons que ce problème a été isolé à cette seule activité et que nos résultats sont tout de même indicateurs d'une évolution chez l'élève.

Dans le même ordre d'idées, nous souhaitions que nos activités soient autonomes, c'est-à-dire que celles-ci ne sollicitent pas l'aide du chercheur ou de l'enseignant afin que celles-ci soient plus facilement transférables pour les enseignants. Cependant, nous avons constaté que le niveau de difficulté de certaines activités rendait la tâche très difficile pour les élèves et que le support du chercheur ou de l'enseignante était nécessaire. Il nous semble donc que cet aspect devrait être amélioré pour une prochaine expérimentation. Ainsi, lors d'une future expérimentation il sera nécessaire de préciser le rôle de l'enseignant et celui du chercheur pour favoriser l'évolution d'une géométrie à l'autre chez les élèves De plus, nous avons rencontré des obstacles dans la réalisation des tâches dus à un manque de motivation de la part des élèves. Ceci nous amène à réfléchir quant à la possibilité de rendre les activités de notre séquence moins austères pour les élèves. En effet, les activités proposées étaient très théoriques et décontextualisées, ce qui peut engendrer un désintérêt de la part de l'élève.

Nous pensons qu'une réflexion doit être entamée afin d'augmenter la motivation des élèves par l'utilisation de contextes intégrant la vie courante des élèves. Par contre, nous devons rester prudents à ce sujet, car l'utilisation de la mesure dans la vie courante est souvent d'à propos et il sera peut être difficile de faire percevoir les limites de la démarche instrumentée dans de tels contextes.

Nos analyses des démarches d'élèves nous ont apporté plusieurs résultats intéressants quant au développement du raisonnement déductif chez les élèves ainsi que sur les activités qui les amènent à délaisser la mesure et à s'approprier les éléments de la géométrie théorique. Tout de même, nous ne pensons pas que toutes les difficultés reliées à l'apprentissage de la preuve soient résolues par notre approche d'initiation à la preuve par des activités géométriques. Nous considérons plutôt que ces activités sont un bon point de départ dans la diminution du saut dans l'enseignement de la géométrie entre l'école primaire et l'école secondaire. De plus, il nous semble que notre recherche s'accorde bien avec les résultats Douaire (1999) et Lester (1975) quant à la possibilité pour des élèves de l'école primaire de mettre de l'avant la pensée déductive. Nous croyons que d'autres recherches doivent être mises de l'avant pour favoriser le développement du raisonnement déductif chez les élèves dans une optique d'initiation à la preuve. Plus précisément, nous pensons que des recherches doivent se pencher sur le rôle des figures à main levée dans les activités d'initiation à la géométrie déductive, celles-ci nous semblant très prometteuses pour le développement de l'élève.

APPENDICE A : ANALYSE DE MANUELS

Nous avons choisi d'effectuer une analyse de manuels scolaires de mathématiques du troisième cycle du primaire. L'analyse a pour motif d'évaluer la place du raisonnement déductif dans les problèmes proposés aux élèves. Pour ce faire, nous avons jumelé plusieurs cadres afin de bâtir une typologie des preuves propices à l'évaluation de la place du raisonnement déductif dans les manuels scolaires québécois. Nous avons revisité les travaux se concentrant sur les problèmes et non sur les productions, car l'analyse des manuels se fait à partir des productions attendues et non des productions effectives des élèves.

En premier lieu, reprenons les travaux de Tanguay (2000) afin d'en dégager les idées principales desquelles nous pouvons créer une première forme de typologie. Ce dernier s'est intéressé à l'élaboration d'une typologie de la preuve lui permettant d'analyser les problèmes de géométrie rencontrés dans les manuels de mathématiques de l'école secondaire. Nous retenons de ces travaux les classes suivantes :

- Jugement d'une seule venue
- Induction empirique
- Expérience mentale
- Empirico-déductif

Sensible

↕

Argumentation raisonnée articulée sur le sensible

Ces quatre classes de preuves n'étant pas appropriées l'analyse de manuels de primaire nous leur avons ajouté les idées retenues de van Hiele (1984). En effet, ces derniers se sont intéressés à l'étude de la géométrie. Ils ont créé un modèle de compréhension de la géométrie comprenant plusieurs niveaux tel que nous l'avons mentionné dans notre cadre théorique. Nous avons retenu quelques niveaux provenant de ce modèle. Voici les niveaux s'appliquant à la géométrie rencontrée par les élèves à l'école primaire québécoise.

- Perception visuelle

Perception globale des figures géométriques

↕

Compréhension des preuves informelles de géométrie

- Analyse des propriétés (descriptif)
- Déduction informelle (relationnel)

Pour bâtir une typologie adéquate à l'analyse des problèmes de géométrie à l'école primaire, nous avons combiné les cadres de ces deux chercheurs. Nous croyons qu'il est possible de regrouper ces idées puisque les deux approches partent des mêmes perceptions des élèves et vont dans la même direction, c'est-à-dire qu'elles vont vers un plus haut niveau d'abstraction. Plus précisément, la bipolarité de Tanguay part des validations des élèves sur le sensible, ce que nous pouvons rapprocher des perceptions globales dont parle van Hiele (1984) puisque les deux sont centrées sur le concret. Le point d'arrivée de la bipolarité de Tanguay est quant à elle, une argumentation raisonnée articulée sur le sensible; il est donc possible de la rattacher à l'idée de compréhension de preuves informelles de van Hiele puisque dans les deux cas, les élèves doivent faire un pas vers une plus grande abstraction de l'objet mathématique. Cependant, ces deux typologies se distinguent, car l'une se centre sur la validation demandée à l'élève et l'autre sur l'apprentissage de la géométrie, c'est pourquoi nous considérons que la combinaison de ces deux typologies nous permet d'avoir une bonne vision des problèmes de géométrie par rapport au raisonnement déductif. Pour bien cerner les niveaux de van Hiele et valider sommairement notre approche, nous avons effectué une première analyse grossière de quelques problèmes trouvés dans les manuels afin d'observer les corrélations entre la classification de van Hiele et celle de Tanguay. De cette première analyse, nous avons remarqué que certains niveaux du modèle de van Hiele se raccordaient bien avec certains des niveaux de preuves de Tanguay (2000). Une première version de la typologie fut tirée à la lumière du cadre théorique. En voici les grandes lignes :

1. Jugement d'une seule venue sur une perception visuelle
2. Jugement d'une seule venue sur une perception des propriétés
3. Induction empirique sur une perception visuelle
4. Induction empirique sur une perception des propriétés
5. Induction empirique sur des relations
6. Expérience mentale
7. Empirico-déductif

Source de validation : Sensible

1. Jugement d'une seule venue sur une perception visuelle :

Exemple : Chacune de ces frises comprend un motif de base qui peut être reproduit à l'infini, en changeant parfois de couleur.[6]

a) Encadre le motif de base en traçant le plus petit rectangle possible.

(Guay, et coll.,2003, p.54)

Ce problème est un *Jugement d'une seule venue sur une perception visuelle* puisque l'élève travaille uniquement à partir de sa perception visuelle des motifs de la frise et non sur des propriétés associées aux figures géométriques.

2. Jugement d'une seule venue sur une perception des propriétés :

Exemple : Remplis le tableau qu'on te remet en écrivant dans la case appropriée les lettres associées aux triangles ci-dessous.[7]

	Trois angles aigus	Deux angles aigus et un angle obtus	Deux angles aigus et un angle droit
Triangle scalène			
Triangle isocèle			
Triangle équilatéral			

(Guay, S., Hamel, J-C., Lemay, S., (2003). *Clicmaths mathématiques au primaire.* Éditions HRW, vol 1, B, Laval, p.38)

Ce problème est un *Jugement d'une seule venue sur une perception des propriétés* puisque l'élève n'est pas encore familier avec le vocabulaire, la question est posée en début de chapitre. L'élève doit porter son attention à la mesure des angles des triangles, bref sur les propriétés.

3. Induction empirique sur une perception visuelle :

---

[6] Dans ce problème, plusieurs exemples de frises sont donnés à l'élève.

[7] Plusieurs triangles différents sont tracés et nommés.

Figure 1 :Induction empirique sur une perception visuelle

Bord à bord

a) Une pièce de 25 ¢ est posée à plat sur une table. Quel est le plus grand nombre de pièces de 25 ¢ que l'on peut poser à plat sur la table de façon qu'elles touchent la première pièce?

(Guay, S., Hamel, J-C., Lemay, S., (2003). *Clicmaths mathématiques au primaire.* Éditions HRW, vol 1, A, Laval, p.53)

Ce problème fait appel à une induction empirique à partir de la perception visuelle de l'élève quant à la pièce de monnaie. En effet, il doit s'imaginer ce qui se passe à chaque fois qu'il ajoute une pièce afin de répondre à la question.

4. Induction empirique sur une perception des propriétés :

Exemple : Observe cette suite de quadrilatères.[8]

a) À l'aide d'un rapporteur, mesure tous les angles des quadrilatères ci-dessous. Quelle régularité observes-tu?

(Guay, S., Hamel, J-C., Lemay, S., (2003). *Clicmaths mathématiques au primaire.* Éditions HRW, vol 1, A, Laval, p.99)

Le travail s'effectue sur les propriétés des mesures des angles à partir desquelles le travail d'induction empirique a lieu.

---

[8] Les quadrilatères dessinés sont les suivants : sans angle droit, un angle droit, deux angles droits, et avec quatre angles droits.

5. *Induction empirique sur des relations* :

Exemple : Observe les différents polyèdres ci-dessous.[9]

a) Détermine le nombre de faces, de sommets et d'arêtes de chacun des polyèdres ci-dessus et remplis le tableau qu'on te remet.

b) En a), on peut compter un à un les divers éléments, c'est-à-dire les faces, les sommets et les arêtes. As-tu trouvé une stratégie plus efficace pour dénombrer ces éléments? Explique ta réponse.

c) Trouve une relation entre le nombre de faces, le nombre de sommets et le nombre d'arêtes des polyèdres ci-dessus. Exprime cette relation dans tes mots.

(Guayet coll. 2003, p.83)

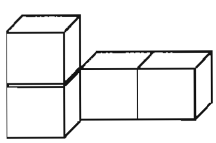
Ce problème est une induction empirique sur les relations puisqu'on s'intéresse aux relations des polyèdres et non plus à leurs propriétés. Le travail de réflexion et d'induction empirique se situe donc au niveau des relations, dans ce cas-ci sur la relation entre le nombre de faces, le nombre de sommets et le nombre d'arrêtes.

Source de validation double : argumentation raisonnée articulée sur le sensible

6. *Expérience mentale* :

Exemple *:* Avant d'ériger les châteaux de centicubes ci-dessous, dessine ce que tu devrais voir de face, du dessus et du côté droit. Fais aussi tes prédictions sur leur volume et leur périmètre. Puis, effectue ces mesures.

a)



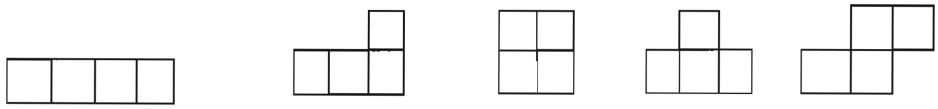
(Lyons et Lyons, 2004, p.149)

Ce problème exige pour sa résolution que l'élève réalise l'expérience mentalement, c'est-à-dire qu'il s'imagine regarder le château de différents points de vue.

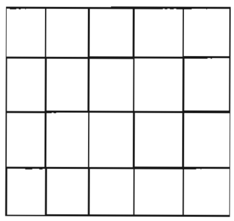
[9] Les polyèdres illustrés sont : pyramide à base carrée, prisme à base pentagonale, pyramide à base hexagonale, prisme à base triangulaire, cube, prisme à base hexagonale, octaèdre et un autre polyèdre.

7. *Empirico-déductif* :

Exemple : Un tétromino est un arrangement de quatre carrés isométriques joints l'un à l'autre par au moins un de leurs côtés. Voici les cinq tétrominos possibles.



Peux-tu recouvrir le carrelage ci-contre avec ces cinq tétrominos en utilisant chacun une seule fois ? Si oui, donne un exemple. Sinon, explique pourquoi c'est impossible.



(Guay et coll, 2003, p.43)

Ce problème pousse l'élève à se placer dans une situation de réflexion nécessitant l'empirico déductif. En effet, pour résoudre le problème, il doit s'imaginer toutes les possibilités dans lesquelles il peut disposer les tétrominos. Cependant, pour ce faire il devra établir ses propres règles et en vérifier les résultats mentalement. Il peut par exemple commencer par placer une pièce et vérifier si c'est possible, poursuivre avec la suivante, etc. Au fur et à mesure, il recueille suffisamment de petites évidences partielles pour répondre au problème posé.

8. *Application directe :*

Exemple : Observe les polyèdres ci-dessous et précise dans quel cas la relation d'Euler ne s'applique pas.[10]

(Guay, S., Hamel, J-C., Lemay, S. (2003). *Clicmaths mathématiques au primaire*. Éditions HRW, vol 2, B, Laval, p.86)

[10] 3 solides sont illustrés en pointillés dont 1 qui ne respecte pas la relation d'Euler.

Il s'agit d'un problème d'application directe puisque l'élève n'a qu'à effectuer le calcul de la relation d'Euler sans réfléchir outre mesure à la situation mathématique.

Cette typologie nous permet de vérifier quels sont les niveaux de validation demandés aux élèves dans les manuels de mathématiques du troisième cycle du primaire. Cependant, nous considérons qu'il est nécessaire de vérifier à travers quelles activités intellectuelles ces différents types de validation sont exigés de la part de l'élève. Nous espérons que ceci nous fournira des informations précieuses pour la construction de nos activités d'initiation à la preuve. Pour les activités intellectuelles en géométrie, nous nous référons aux travaux de Pallascio, Allaire et Mongeau (1993). Pour ces derniers, il existe différents types d'activité intellectuelle[11] en géométrie. Nous faisons l'hypothèse que certaines des cinq activités intellectuelles : *classifier*, *décrire*, *transposer*, *déterminer* et *générer* contiennent des problèmes d'argumentation ou de validation plus élevés par rapport à la typologie développée jusqu'ici. Plus précisément, nous avons classé chacun des problèmes dans un type de preuve en plus de le classer parmi les cinq activités mentales en géométrie afin de faire des croisements entre les deux.

Le choix de la collection

Le choix de la collection de manuels scolaires à analyser s'est fait sur la présence de raisonnement déductif dans les problèmes de géométrie. De plus, suite à une discussion avec les enseignantes participant à notre expérimentation, nous avons choisi d'analyser la collection utilisée dans leur classe, soit la collection *Clicmaths*Il est à noter que la collection *Clicmaths* place les problèmes sur la mesure et le temps à l'intérieur des chapitres sur la géométrie. Dans le cadre de ce travail, nous rejetons ces problèmes puisqu'ils ne portent pas spécifiquement sur la géométrie et qu'ils ne desservent pas les objectifs fixés.

Dans le cadre de ce travail, nous n'avons pas analysé la totalité des problèmes de géométrie des manuels *Clicmaths* du troisième cycle du primaire. Nous nous sommes concentrée sur les chapitres traitant de la géométrie, qui nous l'espérons, représentent bien les différents niveaux de notre typologie, ainsi que les différents axes traités en géométrie à ce niveau scolaire.

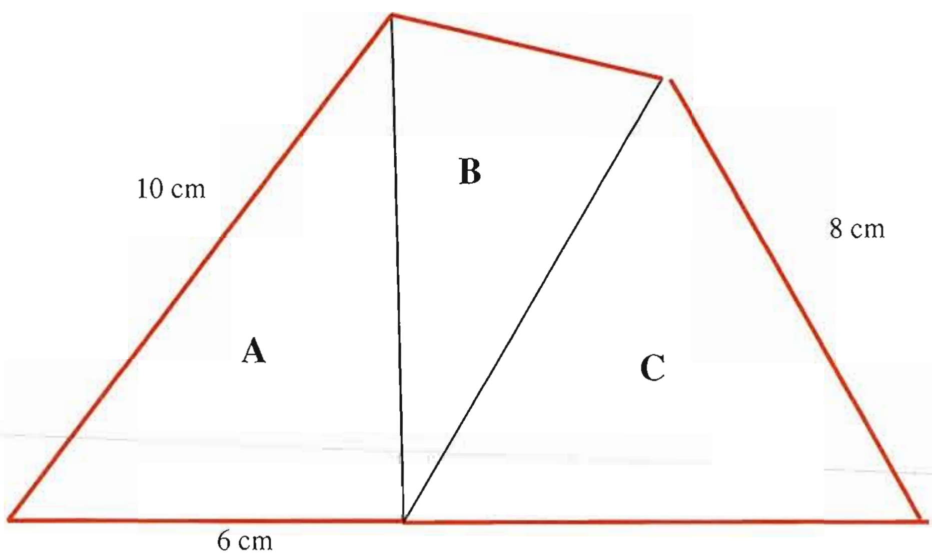
[11] Ces activités intellectuelles sont développées dans le cadre théorique.

APPENDICE B : LES ACTIVITÉS

Expérience 1

Activité 1

La figure suivante est composée d'un triangle équilatéral (C), d'un triangle isocèle (B) et d'un triangle scalène (A). Le périmètre en rouge de la figure mesure 36,2 cm. On veut trouver le périmètre de chacun des trois triangles. Toutefois, certaines mesures sont manquantes. Trouvez ces mesures et calculez le périmètre de chacun des trois triangles.



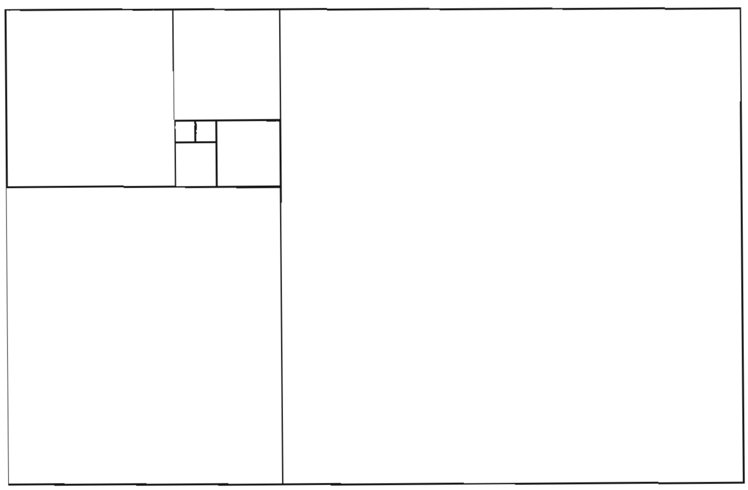
Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

Activité 2

On veut recouvrir le dessus d'une petite table avec des carreaux de céramique qui ont la forme suivante. Le motif est créé à partir de carreaux de forme carrée. Les deux plus petits carreaux mesurent 0,5 cm de côté. Tous les autres carreaux ont des dimensions différentes et ils sont toujours plus grands.

c) Quelle est l'aire totale de ce motif?

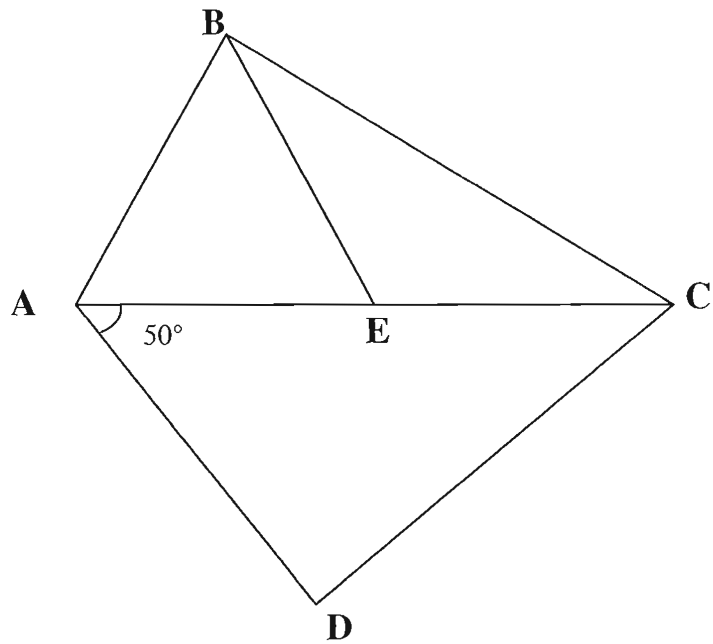
d) Si pour recouvrir la table on doit utiliser 10 pièces identiques au motif ci-dessous, quelle est l'aire de la table?



Décrivez en détail toutes les étapes de votre démarche.

Activité 3

La figure suivante est composée d'un triangle équilatéral, d'un triangle rectangle et d'un triangle isocèle. Trouvez tous les angles manquants à l'intérieur de cette figure.



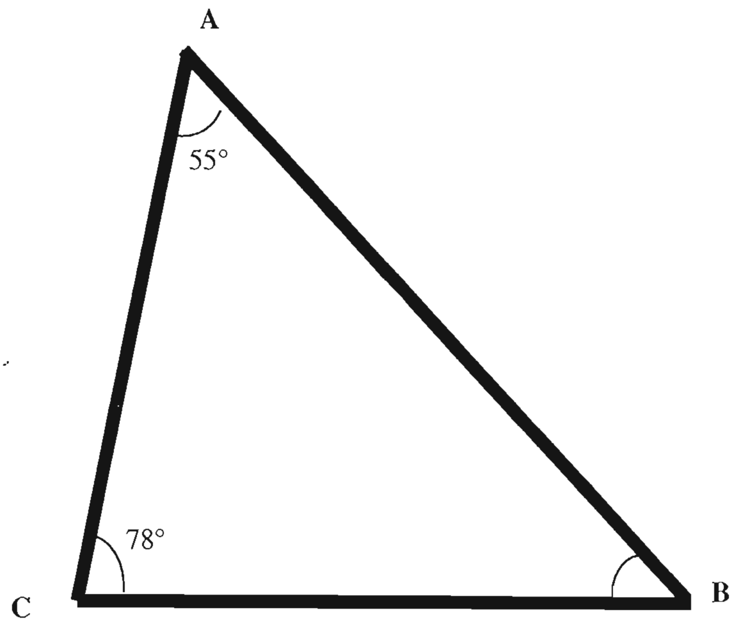
Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

Expérience 2

Activité 1

Mesure de l'angle A = 55degrés

Mesure de l'angle C = 78 degrés



1.a) Trouvez la mesure de l'angle B.

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

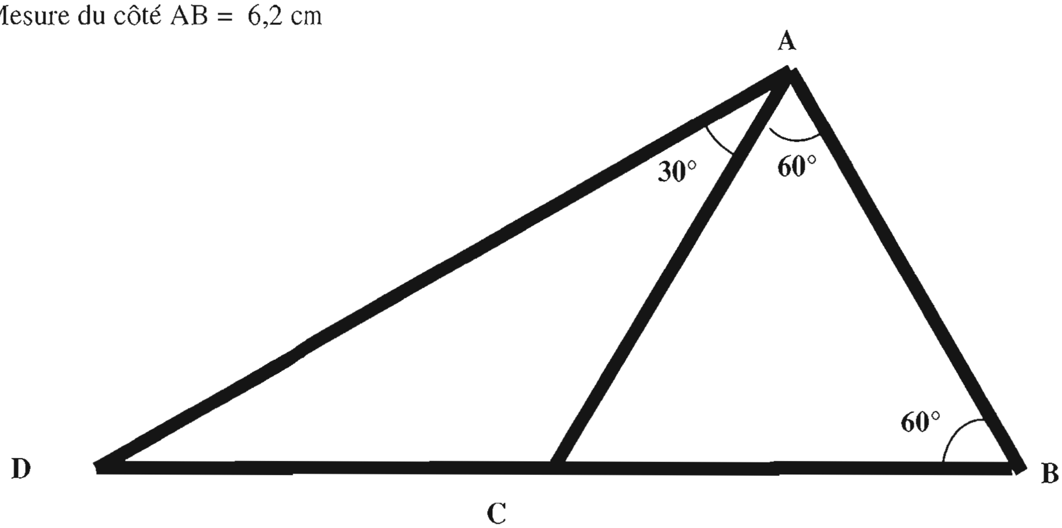
b) Trouvez la mesure manquante d'une autre façon.

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

c) Est-ce qu'il y a une différence avec la réponse trouvée en 1a) ? Si oui, expliquez pourquoi.

Activité 2

Mesure du côté AB = 6,2 cm



1.a) Trouvez la mesure de l'angle D et la mesure du côté CD.

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

b) Trouvez les mesures manquantes d'une autre façon?

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

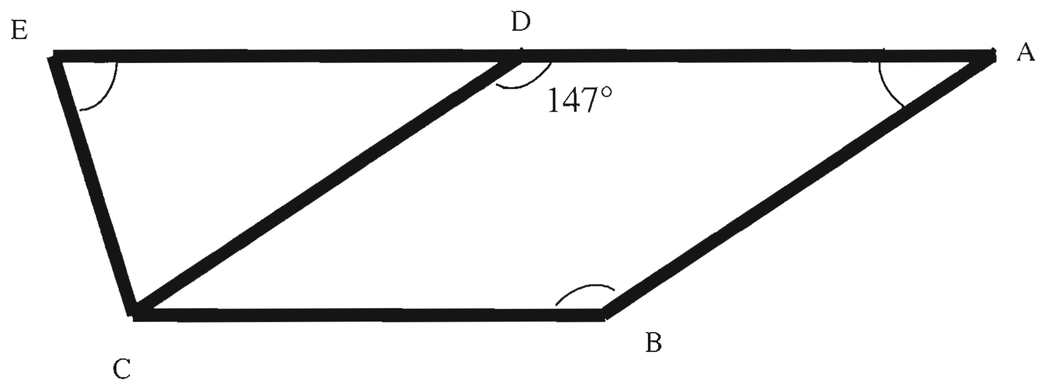
c) Est-ce qu'il y a une différence avec les réponses trouvées en 1a) ? Si oui, expliquez pourquoi.

Expérience 3

Activité 1

Soit ABCD, un losange. D est le point milieu du côté AE.

<u>On sait que la somme des 4 angles du losange est de 360 degrés.</u>



1. a) Trouvez la mesure des angles A, B et E.

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

2. Trouvez les mesures manquantes d'une autre façon

a) Pour vous aider, énumérez les propriétés du losange contenues dans votre boîte à outils. <u>Énumérez seulement les propriétés qui peuvent être utiles pour ce problème.</u>

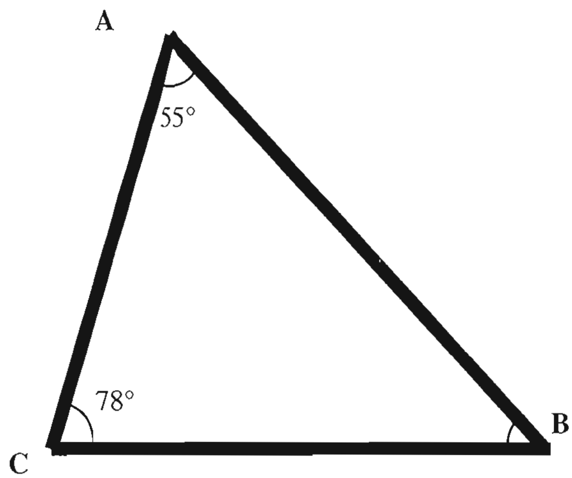
b) À l'aide des propriétés énumérées, trouvez les mesures des angles A, B et E.
Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

c) Est-ce qu'il y a une différence avec les réponses trouvées en 1a) et celles trouvées en 2 b) ? Si oui, expliquez pourquoi.

d) Est-ce qu'il y a une méthode qui assure un résultat plus précis? Expliquez pourquoi.

Expérience 4

Activité 1



Voici la solution de deux élèves qui veulent trouver la mesure de l'angle B. :

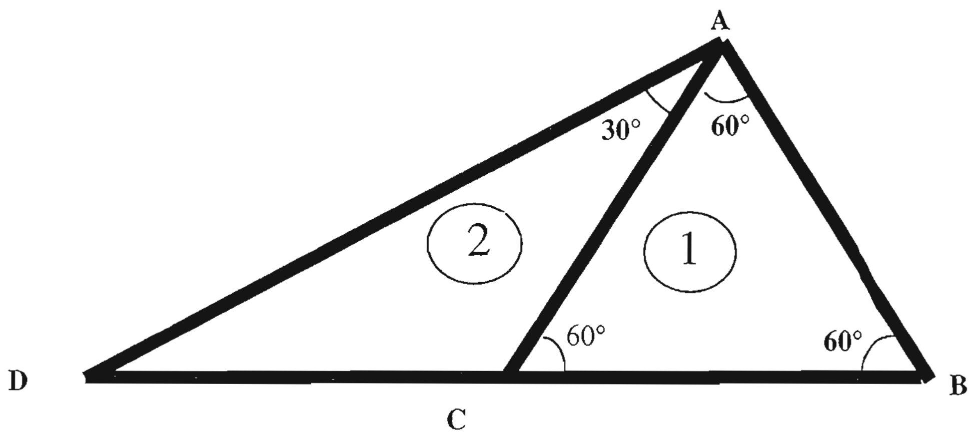
Élève 1 : Avec son rapporteur d'angles, il mesure l'angle B et trouve 48 degrés.

Élève 2 : À partir de la propriété de la somme des angles d'un triangle, il fait le calcul suivant : 180 -55-78 = 47. Il affirme donc que l'angle B mesure 47 degrés.

À ton avis, qui a raison? Explique ta réponse.

Activité 2

Mesure du côté AB = 6,2 cm

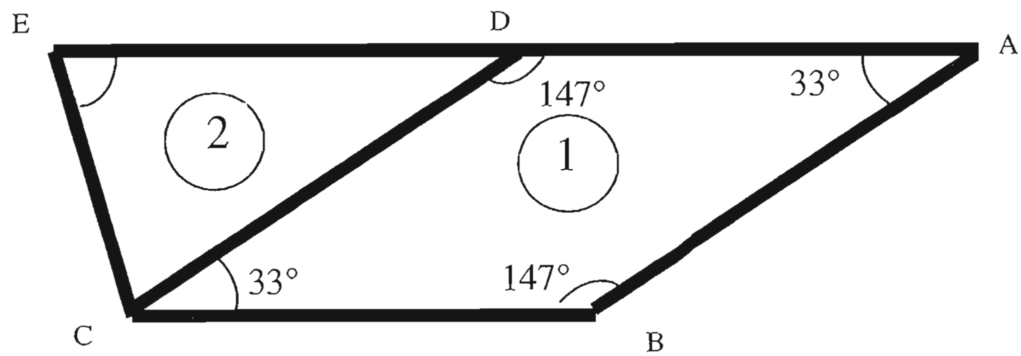


1.a) Sans rapporteur d'angles, est-il possible de trouver les mesures des angles C et D du triangle 2? Si oui, comment ?

1. b) Un élève qui n'a pas de règle affirme que le côté CD mesure 6,2 cm. Est-ce qu'il a raison? Explique ta réponse.

Activité 3

Soit ABCD, un losange. D est le point milieu du côté AE.



1. a) Sans instrument de mesure, est-il possible de prouver que le triangle 2 est isocèle ? Explique ta réponse.

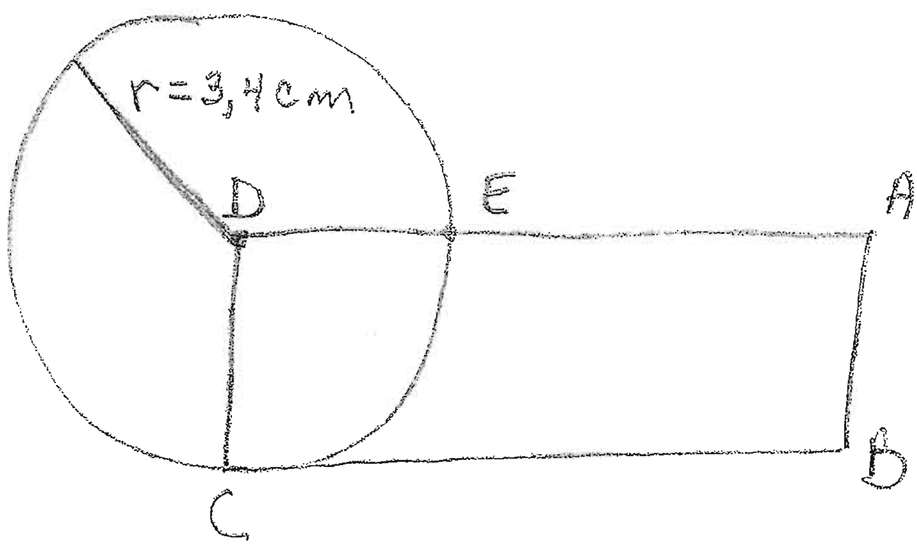
Rappel : D est le point milieu du côté AE.

1.b) Est-il possible de trouver les angles du triangle 2 sans rapporteur d'angles? Explique ta réponse.

Expérience 5

Activité 1

Un élève effectue le dessin suivant à main levée. Sur cette figure, ABCD est un rectangle dont le côté BC mesure 8 cm. L'élève a également tracé un cercle de centre D.

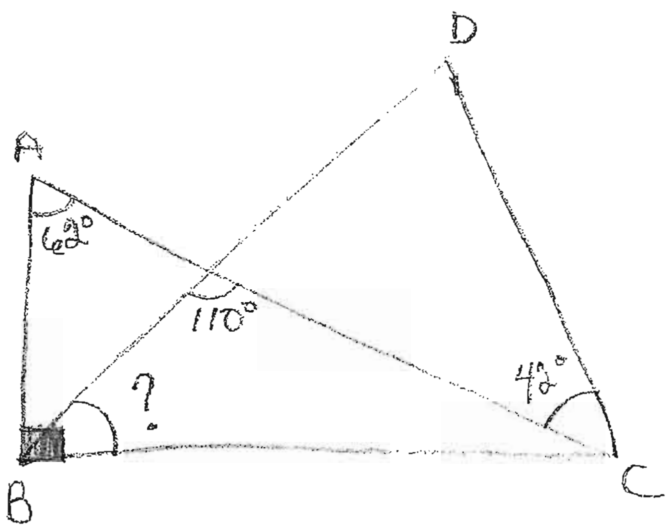


a) Trouvez le périmètre du rectangle ABCD. Expliquez votre démarche.

b) Trouvez la mesure du segment AE. Expliquez votre démarche.

Activité 2

Un élève effectue le dessin suivant à main levée.



b) Trouvez la mesure de l'angle recherché. Expliquez votre démarche.

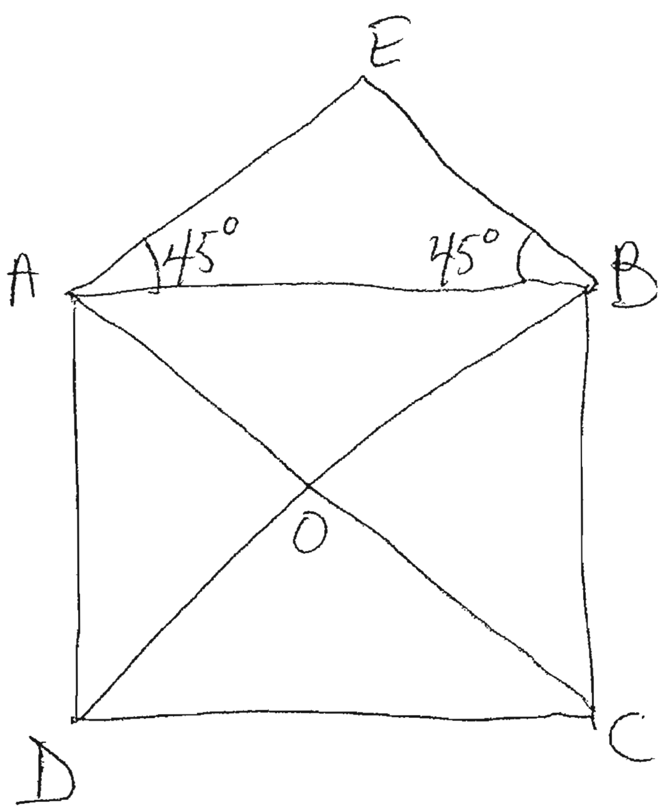
Expérience 6

Activité 1

Un élève effectue le dessin suivant à main levée. Sur cette figure, ABCD est un carré avec les diagonales AC et BD qui se croisent au point O. Ensuite, l'élève dessine un triangle ABE sur le dessus du carré.

Ce dernier affirme finalement que le quadrilatère AEBO est un carré.

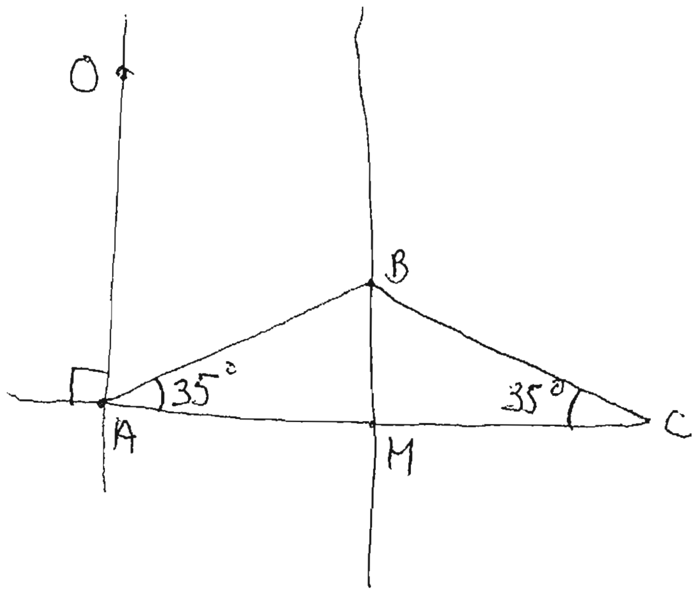
Note : Dans un carré, les diagonales se coupent au milieu perpendiculairement.



Est-ce qu'il a raison? Expliquez votre réponse.

Activité 2

Un élève effectue le dessin suivant à main levée. Sur cette figure, les triangles AMB et BCM sont congrus. Montrer que les droites AO et BM sont parallèles.

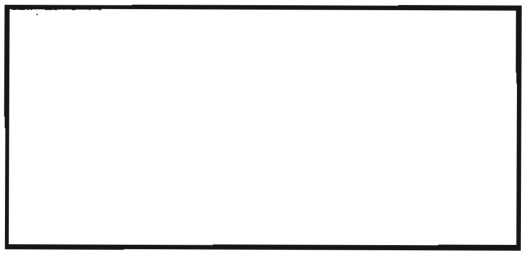


Expliquez votre réponse.

Expérience 7

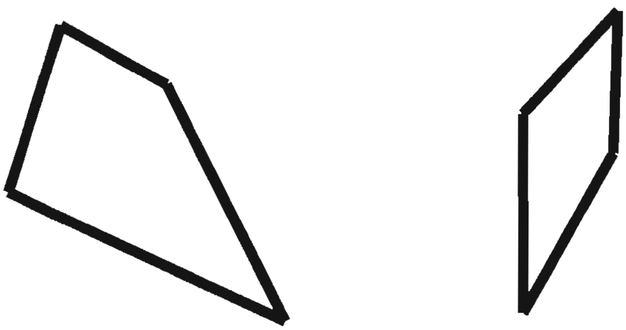
Activité 1

1 a) Quelle est la somme des angles du quadrilatère suivant ?



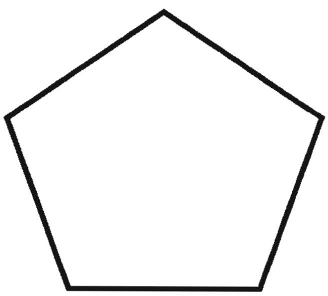
Explique ta réponse.

1 b) Est-ce que tu obtiens le même résultat avec les deux quadrilatères suivants ?



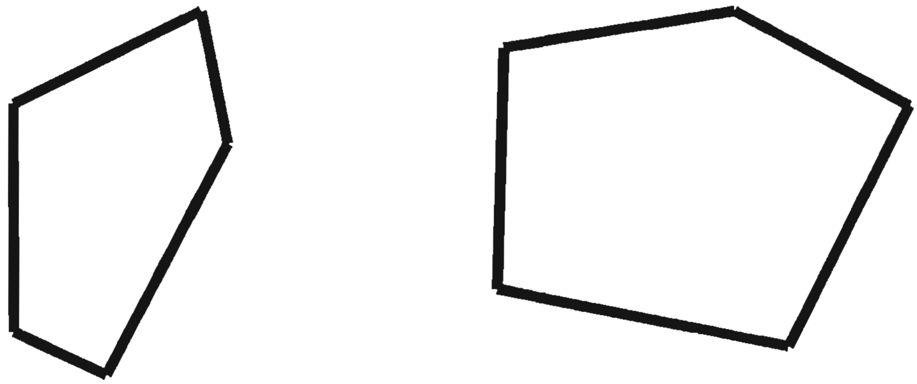
Explique ta réponse.

2 a) Quelle est la somme des angles du pentagone suivant ?



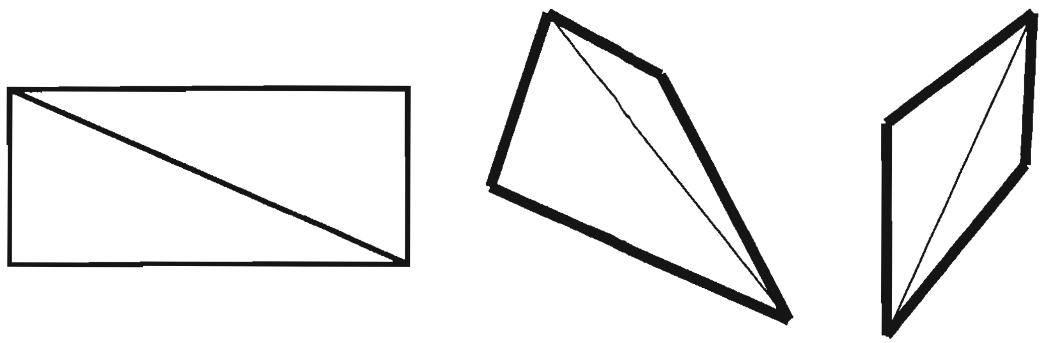
Explique ta réponse.

2 b) Est-ce que tu obtiens le même résultat avec les deux pentagones suivants :



Explique ta réponse.

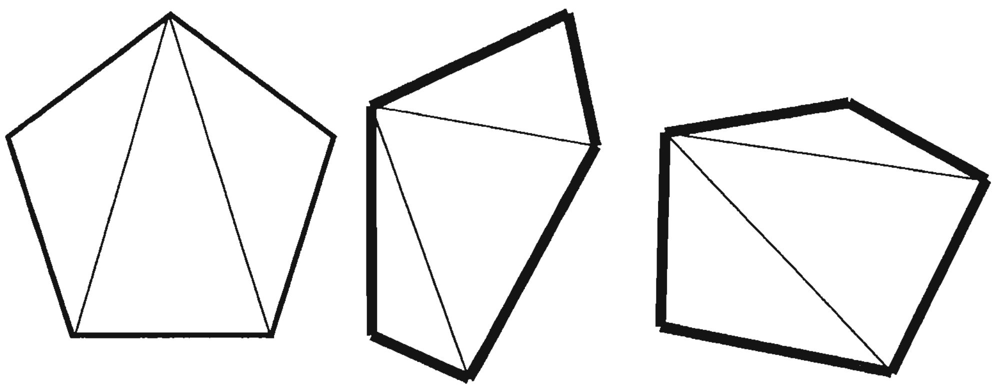
3 Dans les quadrilatères précédents, nous avons tracé des triangles comme suit.



3 a) Qu'est-ce qu'on peut dire sur la somme des angles de ces quadrilatères ? Explique ta réponse.

3 b) Est-ce que ta réponse est vraie pour tous les quadrilatères ? Explique ta réponse.

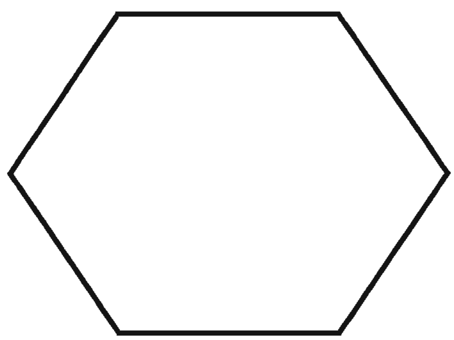
4. Dans les pentagones précédents, nous avons tracé des triangles comme suit.



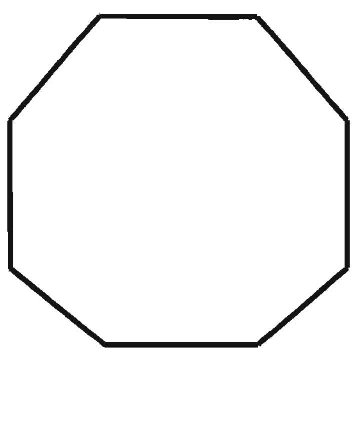
4. a) Que peut-on dire sur la somme des angles de ces pentagones ? Explique ta réponse.

4. b) Est-ce que ta réponse est vraie pour tous les quadrilatères ? Explique ta réponse.

5 Sans utiliser ton rapporteur d'angle, est-ce que tu peux trouver la somme des angles des figures suivantes ?



5. a) Explique ta réponse.



5. b) Explique ta réponse

6. Complète le tableau ci-dessous pour trouver une formule qui permet de calculer combien on peut former de triangles dans un polygone, connaissant le nombre de côtés.

Nom du polygone	Nombre de côtés	Nombre de triangles	Somme des angles
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		

a) Utiliser le résultat précédent pour trouver une formule qui permet de calculer la somme des angles d'un polygone, étant donné le nombre de ses côtés.

b) Quelle serait la somme des angles d'un polygone à 12 côtés ?

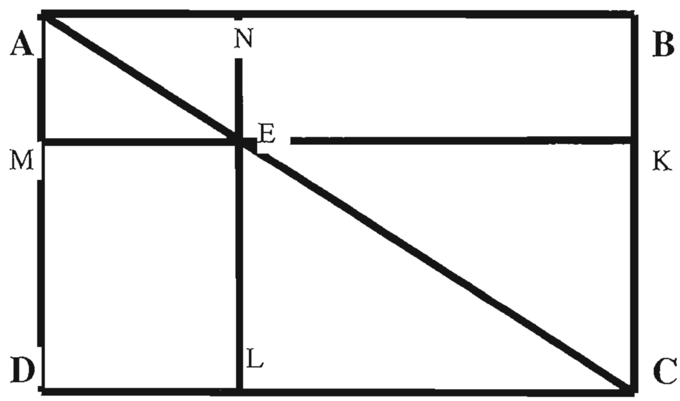
Expérience 8

Activité 1

ABCD représente un rectangle tel que AB = 8 cm et BC = 5 cm. Le point E est l'intersection des trois segments. LN est parallèle à AD et MK est parallèle à BC.

AE = 3cm

Est-ce que les rectangles BKEN et DMEL ont <u>exactement</u> la même aire ?



1 a) Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

1b) Comparez vos résultats avec une équipe voisine et vérifiez si vous avez la même réponse.

1c) Si vos résultats sont différents, expliquez pourquoi.

1d) Est-ce possible de répondre à la question sans utiliser la règle ? Expliquez votre réponse.

RÉFÉRENCES

Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 9(3), 247-280.

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. et Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Lyon : Presses Universitaires de Lyon.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

Barbin, E. (1988). La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques. *Bulletin APMEP*, 36, 591-620.

Braconne Michoux, A. (2008). *Évolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves : paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2-6^{e}*. Thèse de doctorat inédite, Université Paris.

Braine, M. et O'Brien, D. (1991). A theory of it: A lexical entry, reasoning program, and pragmatic principles. *Psychological Review*, 92(2), 182-203.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Paris : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Clements, D. H., Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning, National Council of Teachers of Mathematics, *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. 420-464.

Coppé, S., Dorier, J. L et Moreau, V. (2005). Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5^{ième}. *Petit x*, 68, 8-37.

Coutat Gousseau, S. (2005). Connaître et reconnaître les théorèmes de la géométrie, *Petit x*, 67, 12-32

Cyr, S. (2006). *Pourquoi et comment enseigner la preuve au secondaire, qu'en pensent nos futurs maîtres ?* Montréal : Éditions Bande Didactique.

Douaire, J. (1999). *Vrai? Faux?... On en débat! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*, Saint-Fons : Institut national de recherche pédagogique.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 233-261.

Duval, R. (2001). Écriture et compréhension : Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? Dans A. Barbin (Dir), R. Duval (Dir), I. Giorgiutti (Dir), J. Houdebine (Dir) et C. Laborde (Dir), *Produire et lire des textes de démonstration*, (p.183-205). Paris : Ellipses.

Duval, R. (2005). Compréhension des démonstrations, développement de la rationalité et formation de la conscience individuelle. *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques : Raisonnement mathématique et formation citoyenne,* Montréal, Québec.

Edelson, D. C. (2002). Design Research: What we learn when we engage in design. *The journal of the learning sciences,* 11(1), 105-121.

English, L. D. (1997). Intervention in children's deductive reasoning with indeterminate problems. *Contemporary educational psychology*, 22, 338-362.

English, L. D., Halford, G. S. (1995*) Mathematics education: Models and processes.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ennis, R.H. (1975). An alternative to Piaget's conceptualization of logical competence. *Child Development*, 47, 903-919.

Guay, S., Hamel, J-C. et Lemay, S. (2003). *Clicmaths mathématiques au primaire.* Laval :Éditions HRW, 1(A).

Guay, S, Hamel, J-C. et Lemay, S. 2003). *Clicmaths mathématiques au primaire.* Laval :Éditions HRW, 1(B).

Guay, S, Hamel, J-C. et Lemay, S. (2003). *Clicmaths mathématiques au primaire.* Laval :Éditions HRW, 2(A).

Guay, S, Hamel, J-C. et Lemay, S. (2003). *Clicmaths mathématiques au primaire.* Laval :Éditions HRW, 2(B).

Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-dimensional geometry, *Structural Topology,* 18, 31-48.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 2(1), 6-13.

Harel, G., et Martin, W. G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.

Herbst, P. G. (1998). *What works as a proof in the mathematics class,* Thèses de doctorat non-dité, University of Georgia, Athènes.

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, Really?* New-York: Oxford University Pres.

Henry, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *REPÈRES- IREM*, 36,15-34.

Hitt, F. (2005). L'argumentation, la preuve et la démonstration dans la construction des mathématiques: Des entités conflictuelles ? Une lettre de Godefroy-Guillaume Leibniz à Chrétien Wolf (1713), *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques : Raisonnement mathématique et formation citoyenne,* Montréal, Québec.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof ; *Mathematics Teacher*, 74, 11-18.

Houdebine, J. (1990). Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question. *REPÈRES-IREM*, 1, 5-27.

Houdement, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *REPÈRES-IREM*, 67, 69-84.

Houdement, C. (2006). Rationalité en géométrie, une affaire de paradigme? *Actes du colloque EMF : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*, Sherbrooke, Québec.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193

Houdement, C., Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 89-116.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*. 40, 283-312.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1998-1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*, 51, 5-21.

Inhelder, B., Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. Basic Books, New York.

Ivic, I. (1994). *Lev S. Vygotsky*. Perspective : revue trimestrielle d'éducation comparée. Paris, UNESCO : Bureau international d'éducation, XXIV(¾), 793-820.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conception of proof. *Journal for research in mathematics education*, 33(5), 379-458.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques : Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 167-187.

Lester, F. K. (1975). Developmental aspects of children's ability to understand mathematical proof. *Journal for Research in Mathematics Education,* 6, 14-25.

Lyons, M. et Lyons R., (2004) *Défi mathématique 6*, Éditions Chenelière McGraw-Hill, vol 2., Laval.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécois, Éducation préscolaire, Enseignement primaire*, Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, Gouvernement du Québec. (2003). *Programme de formation de l'école québécoise, Enseignement secondaire 1^er^ cycle, Domaine de la mathématique*, Québec.

Pallascio, R., (2005). L'argumentation pour un élève citoyen : un préalable au raisonnement mathématique! *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques : Raisonnement mathématique et formation citoyenne*, Montréal, Québec.

Pallascio, R., Allaire, R. et Mongeau, P. (1993). The development of Spatial Competencies through Alternating Analytic and Synthetic Activities. *For the learning of Mathematics*, 13(3), 8-15.

Parzysz, B. (2002). Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *Actes du 28^e^ Colloque des Formateurs de Professeurs des Écoles en Mathématiques,* (p.99-110), Université de Tours,

Pellerin, J. (2005). *Un type de catégorisation des preuves déductives en géométrie euclidienne pour la fin des études secondaires à partir d'un ensemble de manuels de mathématiques québécois.* Mémoire de maîtrise inédit., Université du Québec à Trois-Rivières, Québec.

Perrin-Glorian, M-J. (2003). Studying geometric figures at primary school from surfaces to points, *Actes de colloque de l'European Society for Research In Mathematics Education III*, (p.1-10), Bellaria, Italie.

Pierreaut-Le-Bonniec, G. (1980). *The development of modal reasoning: Genesis of necessity and possibility notions.* New York: Academic Press.

Reid, D. A. (2002). Describing young children's deductive reasoning, *Actes du 26e colloque du groupe de Psychology of Mathematics Education*, (p. 105-110), Norwich, Grande-Bretagne.

Reid, D. A. (1995). The Need to Prove. Thèse de doctorat, Edmonton, University of Alberta, 189 p.

Rolet, C. (1996). *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions des futurs enseignants dans le contexte CABRI-GEOMETRE.* Thèse de l'Université Claude Bernard. Lyon

Rouche, N. (1989). Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ? La démonstration mathématique dans l'histoire, *Colloque Inter-Irem Épistémologie et histoire des mathématiques*, (p.8-38), Besançon, France.

Sandoval, W. A. et Bell, P. (2004). Design-Based Research Methods for Studying Learning in Context : Introduction. *Educational psychologist*, 39(4), 199-201.

Stylianides, A. J. et Stylianides, G. J. (2006). Content knowledge for mathematics teahcing : the case of reasoning and proving. *Actes du 30e colloque du International Group for Psychology of Mathematics Education*, Prague, 5, 201-208.

Stylianides, A. J. (2007a). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 1-20.

Stylianides, A. J. (2007b). Introducing Young Children to the Role of Assumptions in Proving. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(4). 361-385.

Tanguay, D. (2000). *Analyse du développement de la notion de preuve dans une collection du secondaire.* Mémoire de maîtrise inédit, Université du Québec à Montréal.

Tanguay, D. (2006). Comprendre la structure déductive en démonstration. *Envol*, 134, 1-14.

Teppo, A. (1991). Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited, *Mathematics Teacher* , March, 210-221

Vadcard, L. (1999). La validation en géométrie au collège avec Cabri-Géomètre. Mesures exploratoires et mesures probatoires. *Petit x*, 50, 5-21.

Van Hiele, P. (1984). A child's thought and geometry, English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele. National Science Foundation, Washington, DC.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press