UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

L'UTILISATION DES REPRÉSENTATIONS PAR DEUX ENSEIGNANTES DU COLLÉGIAL POUR L'INTRODUCTION DE LA DÉRIVÉE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PAR

SARAH DUFOUR

AVRIL 2011

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur M. Fernando Hitt qui m'a apporté un support incroyable par sa disponibilité et ses précieux conseils. L'intérêt qu'il a porté à ce projet m'a donné une motivation supplémentaire.

Évidemment, ce projet n'aurait pu être possible sans la grande générosité des deux enseignantes qui m'ont ouvert la porte de leur classe. Je suis consciente du courage et de l'humilité dont elles ont fait preuve et je leur en suis reconnaissante.

Bien sûr, je ne peux passer sous silence l'aide de mes collègues et professeurs. Leur passion et leur rigueur ont été une grande inspiration pour moi. Particulièrement, je tiens à souligner la disponibilité et l'écoute de Claudia et Doris qui ont été des guides indispensables.

Un merci spécial à la Fondation de l'UQAM et au Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sports pour leur appui financier.

Finalement, merci à ma famille et mes amis qui m'ont encouragée et qui m'ont toujours aidée à garder l'équilibre.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES EXTRAITS

RÉSUMÉ

Dans cette recherche, nous avons pour but d'étudier l'utilisation des représentations par des enseignants pour l'introduction du concept de dérivée. Pour ce faire, nous avons observé deux enseignantes du cours de calcul différentiel au cégep pendant les séances d'introduction de la dérivée. Nous avons ensuite effectué une analyse du point de vue de la théorie des représentations de Duval et des représentations fonctionnelles de diSessa *et al.*, et Hitt.

Nous voulons, non seulement, connaître quels types de représentations les deux enseignantes utilisent, mais également de quelles façons elles les gèrent.

Nous remarquons une prédominance des registres verbal et algébrique et une présence sporadique du registre graphique. De plus, nous observons un grand nombre d'actions implicites sur les représentations.

Mots clés : Didactique des mathématiques, calcul différentiel, pratique d'enseignement, représentations.

CHAPITRE 1 : PROBLÉMATIQUE

1.1 Introduction

Nous savons que l'étude des mathématiques donne du fil à retordre à plusieurs élèves. Des études en didactique des mathématiques mettent de l'avant des difficultés, de conceptions des élèves par rapport à cette matière. Beaucoup de facteurs entrent en jeu lorsque vient le temps de cibler des raisons possibles de toutes ces difficultés. L'élève, la matière, l'enseignant, le milieu, plusieurs éléments doivent être pris en compte. Au niveau d'étude qui nous intéresse, le collégial, il ne faut pas non plus négliger l'effet de la transition. À leur arrivée au Cégep, bon nombre d'élèves subissent une fois de plus un décalage, une espèce de rupture par rapport à la nouvelle matière. Les enseignants du Cégep, qui ont une formation complètement différente des enseignants du secondaire[1], abordent la matière d'une toute autre façon. Par exemple, on a observé que le niveau de formalisme augmente à l'ordre collégial (Corriveau et Tanguay, 2007).

Prenons par exemple le cours de calcul différentiel qui est souvent offert lors de la première session au Cégep pour les élèves en sciences de la nature entre autres. Nous ne croyons pas nous tromper en disant que ce cours vient avec son lot de difficultés et les obstacles sont difficiles à identifier. Plusieurs auteurs ont des points de vue différents sur la nature et la cause de ces difficultés en calcul. Un de ces auteurs, Tall (1993), dans son article « Students' Difficulties in Calculus » passe en revue les difficultés relevées par différents chercheurs.

[1] Au Québec, l'école secondaire cumule cinq années après six ans d'école primaire. Le collégial (Cégep) dure deux ans avant des études universitaires. La formation des enseignants au secondaire exige quatre années d'université qui joignent des cours de mathématiques, de didactique et des cours en éducation plus généraux. La formation des enseignants au collégial est purement en mathématiques.

Entre autres, il cite les problèmes reliés aux concepts de limite et d'infini, à l'image mentale restreinte des fonctions dans l'esprit des élèves, à la mathématisation des problèmes, aux manipulations algébriques, à la sélection et l'utilisation de différentes représentations, aux préférences des élèves (et de plusieurs enseignants) pour une approche axée sur les méthodes et procédures. De ces difficultés, on peut en ressortir des catégories. Certaines sont liées aux concepts mathématiques en jeu, d'autres à la séparation de la compréhension procédurale et de la compréhension conceptuelle et finalement certaines sont liées à la visualisation et l'utilisation de différentes représentations.

1.2 Le concept

Dans ce projet, nous nous intéressons particulièrement à un concept précis enseigné dans tous les cours d'introduction au calcul; la dérivée. À première vue, la dérivée peut sembler simple, mais elle est en fait très complexe. En effet, la dérivée demande de mettre en lien différents concepts mathématiques abstraits pour les élèves. Par exemple, les concepts de fonctions, de limite liée aux processus d'infini, de continuité et de tangente ne peuvent être séparés de la définition de la dérivée. Nous n'avons qu'à nous référer à l'histoire de chacun de ces concepts pour nous rendre compte qu'ils sont très denses. Par exemple, la définition moderne de fonction a pris tout près de 4000 ans à apparaître. De plus, il s'est écoulé beaucoup de temps avant que les mathématiciens de l'époque considèrent les fonctions discontinues, ce qui est encore difficile et contre-intuitif aujourd'hui. En effet, Hitt (1994) montre qu'un groupe d'enseignants de mathématiques en pré-universitaire ou en première année universitaire du Mexique ont encore de la difficulté avec cette notion. Hitt (ibid.) conclut que ces enseignants voient, le plus souvent, la fonction comme une fonction continue définie par une seule expression algébrique. Il affirme que plusieurs ont une tendance à penser seulement en termes de fonction continue et qu'ils ont beaucoup de difficulté à les construire. Si même les enseignants ont cette conception, on peut s'imaginer que les élèves aussi auront une pensée limitée aux fonctions continues.

On peut penser que le concept de fonction à lui seul cause beaucoup de difficultés aux élèves de même que celui de la continuité. Les concepts de limite et d'infini, eux, sont très abstraits et non intuitifs pour les étudiants. C'est que les intuitions attachées à ces concepts sont très ancrées chez les élèves, ce qui les empêche d'aller plus loin, ce qui devrait pourtant être nécessaire pour avoir une compréhension profonde de la limite (Williams, 1991). Selon Sierpinska (1985), on peut classer en cinq catégories les obstacles liés à la notion de limite : l' « Horror Infiniti », les obstacles liés à la notion de fonction, les obstacles géométriques, les obstacles logiques et l'obstacle symbolique. De son côté, Hitt (2003) relève les principales difficultés reliées au concept d'infini. L'obstacle le plus important est le passage de l'infini potentiel, plus proche de l'idée intuitive de l'infini, à la reconnaissance de l'infini actuel, qui est le plus souvent utilisé dans les définitions mathématiques. Il s'agit aussi de la façon implicite à laquelle les enseignants ont recours pour le passage entre ces deux infinis. De plus, lors de l'étude de la dérivée, les concepts de limite et d'infini sont totalement nouveaux pour les élèves. Il est clair que les obstacles liés à ces concepts seront certainement toujours présents lors de l'étude de la dérivée. Pour comprendre la dérivée, les élèves doivent appliquer une limite. Pour pouvoir le faire de façon efficace, il est primordial que celle-ci soit bien comprise, mais selon les différentes recherches menées sur le sujet, la maîtrise de cette idée nécessiterait plus que quelques cours.

Un autre obstacle reconnu dans l'étude de la dérivée est le concept de tangente. Même si, à la base, le concept de dérivée représente la pente d'une droite tangente à une courbe, il semble que la notion de tangente ne soit pas vue explicitement dans les cours de calcul. En effet, les élèves arrivent en classe avec leurs propres conceptions sur la tangente, liée à leur étude de la tangente à un cercle à l'école secondaire. Par contre, le passage de ce point de vue plutôt global de la tangente à un point de vue beaucoup plus local lorsqu'il s'agit de dérivée est très difficile (Biza, 2010). De plus, cette évolution est souvent laissée à la charge de l'élève. Effectivement, Castela (1995) dit :

> « *La tangente apparaît comme un objet mineur d'enseignement, peu de temps lui est donc consacré au sein du cours proprement dit. Ce manque d'attention s'explique également par le sentiment, fréquent chez les enseignants, de la facilité de cette notion envisagée comme une généralisation supposée évidente du cas du cercle. Celle-ci va d'ailleurs tellement de soi qu'elle va sans dire : l'usage du mot « tangente » est présenté souvent explicitement comme naturel (cf. Terracher 1^er S p.275, édition 87) mais aucune référence explicite au cercle n'apparaît. La spécificité de certaines propriétés de la tangente au cercle, non généralisables, n'est pas mise en évidence. Par contre, l'analogie est suggérée.*[2] » *(p.14)*

Dans l'apprentissage de la dérivée, ceci devient donc un obstacle important qui doit être pris en compte.

Enfin, il est évident que le concept de dérivée, qui englobe toutes ces notions, limite, infini, fonction, continuité, tangente, se présente avec son lot de difficultés et d'obstacles. Seulement deux exemples ont été relevés ici, mais d'autres obstacles sont liés à la dérivée.

1.3 Les différents types de compréhension

Il est aussi très important de faire la distinction entre la définition d'un concept et le concept dans son ensemble (définition, applications, utilisations, etc.). Évidemment, nous voulons que les étudiants comprennent le concept dans son ensemble, ce qui va bien au-delà de sa définition (Passaro, 2006). Ceci est d'ailleurs un des problèmes relevés par Eisenberg et Dreyfus (1991) dans leur article « On the reluctance to visualize in mathematics» : « He [Monk, 1988] claims that although students do not have trouble with understanding graphically represented data in a « pointwise » manner, serious difficulties do arise in developing an « across-time » understanding which is exactly the kind necessary in calculus.» (p. 28) On demande en fait à l'élève de faire des liens entre les connaissances qu'il a acquises dans le cours. Par contre, ceux-ci ne semblent pas évidents à faire pour eux. Nous

---

[2] Les extraits soulignés sont dans le texte original.

pouvons facilement faire un parallèle avec le type de compréhension. La définition ponctuelle serait associée à une compréhension procédurale de ce concept. C'est-à-dire que l'élève serait capable de l'utiliser ou de l'appliquer, mais cela dans un contexte précis où il sait ce qu'il a à faire. La compréhension globale quant à elle, serait associée à une compréhension conceptuelle. Ce type de compréhension est attaché à la capacité de l'étudiant à reconnaître l'utilité d'un concept dans un problème donné et à le combiner à différents concepts pour dégager de nouvelles stratégies de résolution. Nous pouvons cependant nous demander si les enseignants proposent aux élèves des problèmes susceptibles de promouvoir un tel type de compréhension. Évidemment, plusieurs approches existent quant à la nature d'une compréhension conceptuelle. Nous définirons clairement ce que nous entendons par ce concept dans le prochain chapitre.

Dans l'article mentionné précédemment, Tall (1993) appuie l'idée que la compréhension que l'on retrouve chez les élèves du cours de calcul est beaucoup plus de type procédural que de type conceptuel. Par contre, il ajoute que les élèves, et même les enseignants, auraient une préférence pour une compréhension plus algorithmique des notions en calcul. Williams (1991) renforce cette idée en mentionnant que les deux types de compréhension sont séparés chez les élèves. Or, la combinaison de ces deux types de compréhension ne serait-elle pas une formule plus appréciable pour les élèves? Ainsi, ils possèderaient tous les outils nécessaires pour pouvoir savoir, quand et comment appliquer un concept.

Du côté des élèves, beaucoup « voient les mathématiques comme statiques et composées en grande mesure de procédures standardisées pour travailler avec des problèmes routiniers » (Selden, Mason et Selden, 1989, p. 50, notre traduction). Certains élèves prennent les mathématiques un peu comme un jeu de mémoire et d'association, dans lequel il s'agit d'utiliser la bonne formule au bon moment. Ce type d'élève a beaucoup de difficulté lorsqu'on lui demande de faire des problèmes qui sortent des exercices auxquels il est habitué. Il ne sait plus quelle formule utiliser, il doit raisonner et cette tâche dépasse sa capacité de mémoriser.

Du côté des enseignants, Sierpinska (1985) dit :

> *« Une des caractéristiques de l'enseignement classique de la limite est une introduction rapide de théorèmes relativement puissants qui permettent de calculer des limites à l'aide de manipulations algébriques. Cela procure, en général, une certaine satisfaction à l'enseignant, sans que soit assuré qu'il y ait compréhension du fonctionnement de la notion. » (p.13)*

C'est donc dire que l'enseignement classique ne favoriserait pas nécessairement chez les élèves une compréhension conceptuelle. Nous pouvons par contre nous demander si ceci est une pratique consciente de la part des enseignants. Font-ils vraiment le choix de promouvoir une compréhension plus procédurale en laissant de côté la compréhension conceptuelle? Ce qu'Odierna (2004) constate lorsqu'elle observe l'enseignement de deux professeurs du cours de calcul intégral dans des Cégeps montréalais peut nous éclairer. Elle dit : « Puisque les preuves et l'analyse [liée à l'idée de conceptualisation] s'instituent souvent en obstacles et font augmenter les taux d'échec, aucun des deux professeurs n'a jugé opportun de confronter les étudiants à ces difficultés lors des examens. » (p.164) De ce fait, elle conclut donc que « les lacunes conceptuelles ne semblent pas être un obstacle dans la production d'examen. » (ibid, p.166). Cela dit, il faut noter que la compréhension conceptuelle n'est pas explicitement vérifiée aux examens, mais il ne faut pas nécessairement en déduire qu'elle en est totalement absente. D'ailleurs, cette place donnée aux compétences plus procédurales dans les examens peut aussi être liée aux programmes. En effet, en analysant les programmes Odierna (2004) a observé que « la place accordée à l'analyse ou à la preuve [y] est très limitée [...] » (p.73).

Enfin, on peut penser que la dichotomie entre la compréhension procédurale et la compréhension conceptuelle est grande et ce, autant chez les élèves que chez les enseignants. De notre point de vue, cette situation représente un réel problème dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul.

1.4 La visualisation et l'utilisation de différentes représentations

L'article d'Eisenberg et Dreyfus (1991) nous donne des exemples des difficultés rencontrées lors de l'étude du calcul. Cet article aborde le sujet en deux étapes. D'abord, les auteurs veulent établir l'existence d'une résistance envers la visualisation. Dans leur texte, ils rapportent plusieurs études qui démontrent un réel problème dans l'apprentissage du calcul. Une des études rapportées est celle de Selden, Mason et Selden (1989). Ils ont proposé à un groupe d'étudiants de force moyenne en calcul différentiel, c'est-à-dire des étudiants qui ont réussi leur cours de calcul avec un C, une série de problèmes non routiniers. Ces problèmes non routiniers sont selon nous un bon exemple des problèmes pour évaluer les connaissances conceptuelles et procédurales des étudiants en calcul. Les résultats sont étonnants : « Aucun étudiant n'est parvenu à résoudre totalement un problème correctement. La majorité ne put rien faire. » (p. 5, notre traduction) Les auteurs ont analysé les résultats selon les 85 essais de solutions possibles. De ces 85 essais, 79 essais ne présentent « aucun progrès raisonnable vers une solution correcte ». Cela ne laisse que 6 solutions qui auraient pu mener vers quelque chose de bien, mais qui restent incomplètes.

Finalement, cette étude montre bien que ces étudiants, qui ont, rappelons-le, réussi leur cours de calcul différentiel, éprouvent des difficultés avec des problèmes rattachés à cette matière. Il est toutefois justifié de se demander si les étudiants avaient au préalable été en contact avec un tel type de problème; si l'enseignement avait été fait de façon à privilégier une compréhension conceptuelle. À partir d'une de ces études, Eisenberg et Dreyfus (1991) exposent leur hypothèse qu'une des causes importantes de ces difficultés soit la non-exploitation des représentations visuelles (en liaison avec un apprentissage conceptuel plutôt que procédural). Ils attribuent la difficulté des étudiants à répondre au test de Selden, Mason et Selden à leur manque de compréhension de l'utilisation de la visualisation.

Nous avons aussi refait cette expérience avec un groupe de vingt étudiants en enseignement des mathématiques au secondaire (Dufour, 2009). Notre analyse était basée sur la théorie des représentations de Duval (1993) (nous y reviendrons plus en détail dans le prochain chapitre) afin de bien cibler l'hypothèse d'Eisenberg et Dreyfus. Nos conclusions sont en accord avec les allégations des chercheurs. En effet, les étudiants avaient beaucoup de difficultés à utiliser différentes formes de représentations et surtout à effectuer des articulations satisfaisantes entre celles-ci. Par contre, il s'agit de savoir d'où provient cette résistance. Est-ce vraiment les étudiants qui n'envisagent pas la visualisation dans la résolution de problème ou est-ce que ce sont les enseignants qui n'encouragent pas assez cette façon de faire en ne l'utilisant que très peu?

1.5 Vers un questionnement

Après avoir vu plusieurs études qui nous démontrent qu'il y a un réel problème au niveau du concept de dérivée dans les cours d'introduction au calcul, il est légitime de vouloir agir. Pour diminuer les difficultés rencontrées, il est primordial de bien connaître la situation. Nous savons que lors d'un engagement dans une activité d'apprentissage, en fait, plusieurs partis sont impliquées : l'élève, la matière, l'enseignant, le milieu, etc. Il est clair que, pour que l'activité « d'apprendre » soit efficace, tous les partis doivent être pleinement engagés. Lorsque les étudiants éprouvent des difficultés, on peut se demander d'où elles proviennent, lesquels des partis ne fonctionnent pas. Peut-être représentent-ils tous un obstacle?

Dans cette recherche nous nous sommes intéressées à l'enseignement. Évidemment, il y a un lien direct entre la façon dont les concepts sont présentés aux élèves, comment ils sont travaillés en classe et la capacité des élèves à faire des liens, utiliser et appliquer ces concepts. En effet, selon Tall (1993), il semble que l'enseignement procédural est plus présent chez les enseignants que l'approche conceptuelle. Sierpinska (1985) affirme la même chose. Aussi, nous avons relevé précédemment qu'Eisenberg et Dreyfus (1991) pensent qu'une cause des difficultés en calcul est la résistance à la visualisation. Selden, Mason et Selden (1989), eux, évoquent le fait que les élèves ne peuvent pas résoudre des problèmes non routiniers. Passaro (2006) ose également exprimer cette idée : « Ainsi, nous avons la confirmation que la plupart des difficultés qu'éprouvent les étudiants, en ce qui a trait aux transferts de registres de représentation, sont certainement une conséquence de l'enseignement reçu » (p.13). Pourtant, depuis maintenant dix ans, nous voyons la promotion de l'articulation entre les différents registres apparaître dans les programmes du secondaire. On parle d'effectuer des passages d'une représentation à une autre. Cependant, le ministère n'est pas aussi précis en ce qui a trait aux programmes du collégial. En effet, nous ne retrouvons qu'une brève description de quelques éléments de compétence à atteindre, par exemple dans le programme de sciences de la nature. Pour le cours de calcul différentiel, la compétence énoncée reste très large : « Appliquer les méthodes du calcul différentiel à l'étude de fonctions et à la résolution de problèmes. » (Ministère de l'Éducation des Loisirs et du Sports [MELS], n.d.) Bien sûr, le programme donne quelques précisions, mais la seule qui pourrait évoquer l'idée d'utiliser différentes représentations est : « Reconnaître et décrire les caractéristiques d'une fonction représentée sous forme d'expression symbolique ou sous forme graphique. » (MELS, n.d.) C'est que le ministère laisse la liberté aux Cégeps de développer plus en détails les programmes des cours. Ainsi, les établissements doivent déterminer eux-mêmes les compétences ou objectifs des cours. Nous pouvons imaginer que les enseignants ont une grande part de responsabilité dans l'élaboration de ces critères. Cependant, en raison de leur formation spécifique en mathématiques n'incluant pas de didactique, nous nous demandons si les enseignants sont suffisamment avertis sur l'utilisation de différentes représentations pour pouvoir les intégrer de façon consciente dans les compétences ou objectifs qu'ils ont à détailler. Par exemple, nous pouvons tout de même apercevoir dans le plan du cours de calcul différentiel d'un Cégep d'une région du Québec, les critères suivants :

- Illustrer le concept de limite dans des situations courantes;
- Traduire en mots une expression symbolique où apparaît le symbole de limite;
- Traduire en langage symbolique une situation décrite en langage courant, en faisant appel aux différentes notations associées aux limites;

Même si ces objectifs n'utilisent pas les mêmes termes que ceux utilisés au secondaire, nous pouvons faire un lien avec l'articulation des différentes représentations du concept. Il est clair, que les enseignants en font probablement une utilisation intuitive dans leur pratique mathématique personnelle, mais ce qui nous intéresse, c'est comment cette pratique se traduit dans leur enseignement.

Un autre élément important à retenir est que plusieurs des recherches qui tirent des conclusions au sujet de l'enseignement au collégial n'avaient pas nécessairement cet objectif au départ. En effet, certaines sont plutôt centrées sur l'élève, d'autres sur des obstacles épistémologiques, par exemple. De plus, si certaines études rapportent des difficultés des élèves avec l'utilisation des représentations, aucune ne s'est concentrée sur l'utilisation que les enseignants en font. Nous pouvons donc considérer nécessaire une recherche centrée sur l'enseignant au niveau collégial.

Le questionnement qui nous vient à l'esprit est : est-ce que les étudiants sont vraiment en contact avec de telles manières de faire en classe? C'est-à-dire, de quelle façon les enseignants ont-ils recours aux différentes formes de représentations ou à différents types de problèmes pendant leur enseignement en classe? Nous croyons qu'il est intéressant d'émettre un certain constat sur la place que donnent les enseignants à ces outils dans leur pratique.

CHAPITRE 2 : CADRE THÉORIQUE

2.1 Les représentations

Nous avons mentionné dans le chapitre précédent que les étudiants avaient beaucoup de difficulté à résoudre des problèmes demandant une compréhension conceptuelle. Certains chercheurs ont attribué ces difficultés à une incapacité à visualiser ou à travailler avec différentes représentations. Nous parlerons d'abord de la visualisation comme le processus de production ou d'utilisation, à la main ou à l'aide de la technologie, de représentations géométriques ou graphiques de concepts, principes ou problèmes mathématiques (Zimmermann et Cunningham, 1991, p.1)[3]. En fait, il s'agit de voir la capacité de l'élève à utiliser cette visualisation pour atteindre un certain niveau de compréhension ou comme aide dans la résolution de problèmes (ibid). La visualisation n'est pas une finalité, mais une étape vers la compréhension. Le fait de passer d'une représentation verbale, la question, à une représentation visuelle par la visualisation, démontre déjà une capacité à faire l'articulation entre différents types de représentations. Par contre, il ne faut pas négliger le fait qu'il ne suffit pas à l'étudiant de visualiser le problème pour le résoudre ou le comprendre. La tâche ne s'arrête pas là. En effet, les représentations obtenues avec la visualisation ne doivent pas être isolées du reste des mathématiques. Zimmermann et Cunningham (ibid) parlent du passage entre trois modes de représentations : symbolique, numérique et graphique. Leur approche est du type TRM (Triple Representation Model) des années 90 liée aux représentations algébriques, numériques et graphiques. Une évolution des théories sur les représentations (Janvier, 1987; Duval 1993) a fait remarquer l'importance de promouvoir l'articulation entre les représentations, mais non restreinte à trois types de représentations. En

[3] « [...] the process of producing or using geometrical or graphical representations of mathematical concepts, principles or problems, whether hand drawn or computer generated. » (Zimmermann et Cunningham, 1991, p.1)

fait, la représentation verbale et son articulation avec le reste des représentations sont aussi devenus des sujets importants d'étude.

L'approche théorique de Duval (1988, 1993, 1995), présente le rapport entre la pensée cognitive et le rôle des représentations sémiotiques externes d'un concept pour la construction du concept en jeu. C'est-à-dire que, comme Janvier (1987), Duval a fait un virage dans la recherche sur les représentations. Dans le passé, l'emphase a été mise sur les représentations mentales, dans le cas de Janvier et Duval, leur emphase a été sur le rôle des représentations sémiotiques sur papier, écran, etc, dans le développement de la pensée mathématique. Pour eux, l'utilisation judicieuse de ces représentations est fondamentale pour la compréhension conceptuelle des objets mathématiques. Robert et Boschet (1984) affirment également que « the students who were the most successful were invariably those who could flexibly use a variety of approaches: symbolic, numeric, visual.» (dans Tall, 1993, p.6)

Pour élaborer notre méthodologie et pour appuyer l'analyse de nos observations, nous nous servirons donc, d'une part, de l'approche théorique de Duval, en ce qui concerne l'utilisation des représentations dites institutionnelles et d'autre part, d'une considération des représentations non institutionnelles. Nous clarifierons la distinction que nous faisons entre représentations institutionnelle et non-institutionnelle plus loin dans ce chapitre.

2.1.1 Théorie des représentations

Dans sa théorie des représentations, Duval distingue un objet mathématique de ses représentations. En effet, comme les objets mathématiques sont abstraits (ils prennent forme dans la pensée des individus), il affirme que « la possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend directement du système de représentation sémiotique utilisé » (Duval, 1993, p. 38) Il entend par représentation sémiotique « une production constituée par l'emploi de signes appartenant à un système [registre] de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (ibid, p.39). Un système de représentation sémiotique est dit registre sémiotique s'il satisfait ces « trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiosis [la production de représentations] » (ibid, p.41) : *la formation d'une représentation identifiable, le traitement d'une représentation dans le registre où elle a été formée et la conversion d'une représentation vers un autre registre*. En revanche, il ne s'agit pas seulement de pouvoir effectuer ces activités pour atteindre la « noésis », soit l'appréhension conceptuelle d'un objet. En effet, la « noésis » est associée à la coordination des représentations appartenant à différents registres. Le schéma suivant (ibid, p. 51) est une bonne synthèse de toutes ces activités :

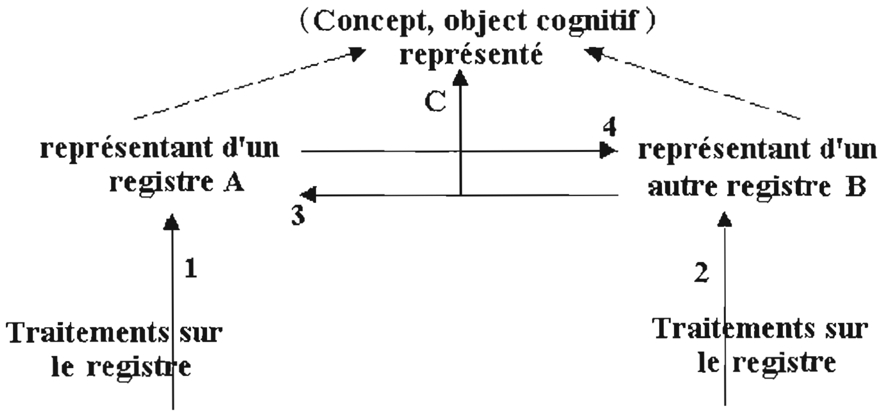


Figure 2.1:Modèle de la représentation centrée sur la fonction d'objectivation.

Les flèches 1 et 2 correspondent aux transformations internes d'un registre. Les flèches 3 et 4 correspondent aux transformations externes, c'est-à-dire à des conversions de représentation par changement de registre. La flèche C correspond à ce que nous appellerons la compréhension intégrative d'une représentation : elle suppose une coordination des deux registres. Les flèches en pointillé correspondent à la distinction classique entre représentant et représenté. Naturellement, ce schéma envisage le cas le plus simple de coordination entre deux registres. (Duval, 1993, p. 51)

Autrement dit, pour Duval (1993; 2006), la compréhension conceptuelle d'un objet mathématique repose sur la capacité de faire la coordination entre ses représentations dans différents registres sémiotiques. Il (Duval, 2006) s'explique en ajoutant que la compréhension conceptuelle est le fait d'être capable de voir dans des figures (de différents registres) les éléments nécessaires à résoudre un problème. C'est ce qu'il veut dire par la coordination des registres que nous décrirons plus bas. Cela dit, nous pouvons déduire que dans la construction d'un concept mathématique il est absolument nécessaire de construire une articulation entre représentations, ce qui implique que, dans l'enseignement, l'utilisation des différentes représentations, sans prioriser une au l'autre, est importante pour la construction du concept mathématique. En d'autres mots, la préférence que nous pouvons donner à l'une ou l'autre des représentations doit être faite une fois que le concept a été construit; et non l'inverse.

De ce point de vue, nous pouvons expliquer les erreurs et difficultés des élèves en regardant leurs performances dans des activités de reconnaissance des éléments dans un registre de représentation, de traitement des représentations à l'intérieur d'un registre et dans les processus de conversion entre représentations de différents registres et nous voulons connaître la façon dont les enseignants les considèrent dans leur pratique.

2.1.2 Les activités liées aux registres de représentations

Nous aimerions revenir sur les différentes activités effectuées sur les représentations d'un registre sémiotique afin de clarifier comment différencier le rôle de chacune d'elles. En premier lieu, la formation d'une représentation est tout simplement l'étape de production d'une représentation d'un concept. Ensuite, il y a le traitement de cette représentation à l'intérieur du même registre sémiotique. Par exemple, factoriser une expression algébrique demande un traitement d'une représentation dans le même registre au départ et à l'arrivée.

La conversion demande une plus grande activité cognitive. Il s'agit d'une transformation où le registre de départ n'est pas le même que le registre d'arrivée. Plusieurs éléments sont à surveiller pour qu'une activité de conversion en soit vraiment une. D'abord, il faut s'assurer qu'il s'agit bien d'une conversion d'un registre à un autre et non-pas de deux formations ou traitements considérés parallèlement. En effet, on peut énoncer algébriquement une fonction et faire le graphique de cette fonction sans pour autant avoir construit une articulation (mentale ou non) entre ces deux représentations. Dans l'activité de conversion (dans la coordination également), une reconnaissance des unités significatives dans les registres en jeu est effectuée (Duval, 1988). C'est-à-dire que l'élève doit reconnaître les informations particulières à un registre pour pouvoir les transformer en unités significatives du registre d'arrivée. Par exemple, lors de la conversion de la représentation algébrique d'une fonction polynomiale vers la représentation graphique, nous pouvons tenir compte des unités significatives suivantes : signe du taux de variation, le degré du polynôme, l'ordonnée à l'origine, etc.

Duval (1993) mentionne deux autres concepts à ne pas confondre avec la conversion : le codage et l'interprétation. On effectuerait un codage et non une conversion si, pour transposer une représentation dans un système sémiotique différent, on utilise des règles prescrites de correspondance entre les deux registres. La conversion deviendrait donc une procédure, ce qui relèverait beaucoup plus d'une compréhension procédurale que d'une véritable conceptualisation. Un exemple de codage donné par Duval (1993) est la transposition graphique d'une fonction continue exprimée algébriquement point par point, sans que ceux-ci ne soit finalement reliés. L'interprétation, quant à elle, ne demanderait pas un changement de registre, mais plutôt un changement de contexte ou de cadre de référence. Par exemple, faire une analogie relèverait de l'interprétation.

Finalement, discutons de la coordination entre différents registres sémiotiques qui représente pour Duval un indice indispensable de la compréhension conceptuelle d'un étudiant. Ce qui différencie la conversion et la coordination, est la capacité dans la coordination à repérer et utiliser les éléments utiles de chaque représentation pour résoudre un problème (Duval, 2006). En effet, on coordonnera des registres lorsqu'on pourra faire le passage de l'un à l'autre dans le but d'en retirer les éléments ou stratégies de solution à un problème. Pour ce faire, il est évident que l'on doit comprendre ce qu'implique chaque représentation et aussi comment les assembler pour produire le résultat escompté. De plus, il est clair que pour arriver à coordonner des registres sémiotiques, il faut d'abord pouvoir effectuer des productions, des transformations et des conversions.

Compte tenu de ce qui précède, la définition des registres sémiotiques est propre au domaine observé. Dans notre cas, nous devons définir les registres sémiotiques par rapport à l'objet étudié soit l'enseignement de la dérivée dans le cours de calcul différentiel. Nous avons dégagé six registres sémiotiques : le schéma, le registre numérique, le registre verbal, le registre graphique, le registre algébrique et le registre tabulaire. Les cinq derniers registres respectent les conditions établies par Duval et réunissent les différentes représentations que peuvent prendre les concepts en jeu (fonctions, limites, continuité, infini). Nous avons ajouté le schéma comme le fait Janvier (1987), même si celui-ci ne respecte pas toutes les conditions de Duval lié au registre. Il y a des dessins (schémas) que l'on utilise pour la résolution des situations problèmes et problèmes qui ne sont pas directement liés à un registre de représentation. Or, de ce point de vue, nous faisons une distinction entre schéma et représentation figurale (Duval intègre cette dernière dans un registre).

2.1.3 Représentations institutionnelles vs représentations fonctionnelles et méta-représentations

Bien que l'idée de Duval sur les représentations soit intéressante, on remarque qu'elle réunit, implicitement, les représentations dites « institutionnelles ». Celles-ci sont rattachées aux représentations plus formelles que nous retrouvons dans les programmes, les manuels et aussi celles utilisées par les enseignants (Hitt et Morasse, 2009). Une représentation doit donc être reconnue par la communauté (professeurs de mathématiques, auteurs de manuels, mathématiciens, etc) afin d'être qualifiée d'institutionnelle.

Néanmoins, diSessa et al. (1991), Hitt (2003; 2006; 2007) et Hitt et Morasse (2009) dans leurs recherches sur la construction des concepts de graphique, de limite, et de co-variation entre deux variables, mettent au centre de leurs travaux les méta-représentations et les représentations fonctionnelles.

D'abord, précisons l'idée de diSessa et al. (1991) sur les méta-représentations. Ils définissent le concept de « meta-representational competence, by which we mean the faculty to generate, critique, and refine representational forms. » (p.118) Il est très important pour eux de soulever le fait que cette compétence ne requiert aucune habileté particulière en ce qui concerne les représentations. En fait, en ajoutant le terme « méta », ils veulent amener l'idée intuitive de la production d'une représentation qui peut aider à expliquer une situation, un phénomène. On parle donc d'un type de représentation qui ne colle pas nécessairement aux représentations établies par l'institution (il n'existe pas nécessairement un registre, si l'on veut). On amène plutôt l'idée de pouvoir créer et modifier une représentation viable et intuitive d'un concept mathématique.

De son côté, Hitt (2003;2006;2007) s'intéresse aux représentations fonctionnelles. Ces types de représentations réfèrent aux premières images que l'élève se fait en rapport avec un concept donné. Il associe, en termes généraux, celles-ci aux représentations spontanées des élèves. Dans Hitt et Morasse (2009), on ajoute que ces représentations sont particulièrement présentes lors de la construction d'un concept à travers des interactions sociales. En effet, le travail collaboratif permettrait aux élèves d'ajuster leurs représentations fonctionnelles pour se rapprocher de plus en plus des représentations institutionnelles telles que définies précédemment. Une définition plus précise (Hitt, 2009) est :

> « *In our previous investigations about the sub concept of covariation, we analysed the institutional representations (representations that teachers use, those found in textbooks or on computer screens when using a mathematical software,...) and the other non-formal representations, that emerge in a non routine mathematical task; those external representations are the product of the cognitive structure we call functional representations, as : The cognitive structure a student produce when trying to understand and solve a non-routine task. This kind of internal structure is an operational knowledge before action (it controls and guides actions), and the product (external representation) allows the student to understand the mathematical task and act in a structured way to approach the solution.* »

Cet élément théorique amène un aspect important qu'il ne faut absolument pas négliger lorsque l'on traite de la théorie des représentations sémiotiques de Duval. L'élève n'aura probablement pas toujours d'emblée les représentations institutionnelles en tête. Comme l'a signalé Karsenty (2002) dans son étude, les adultes ayant reçu un enseignement traditionnel observés à travers le temps, vont oublier les mathématiques apprises à l'école. En conséquence, Hitt et Morasse (2009) suggèrent qu'il vaut mieux planifier les tâches d'enseignement, pour faire émerger les représentations fonctionnelles des élèves, et promouvoir leur développement pour arriver aux représentations institutionnelles.

Évidemment, les représentations fonctionnelles sont, le plus souvent, liées à l'élève. Les représentations utilisées par les enseignants, en général, font partie des représentations institutionnelles. Cependant, quelques enseignants utilisent des métaphores ou des analogies (p.e. « l'infini est comme l'univers, sans limites... ») dans leur enseignement qui sortent du cadre théorique de Duval. Alors, nous voulons dans ce projet observer comment sont utilisées les différentes représentations (institutionnelles ou non) par l'enseignant. Notre objectif est donc double, d'un côté, il est lié à la façon dont les enseignants, dans leur pratique, utilisent les différentes représentations sémiotiques liées, principalement, à la théorie de Duval, dites institutionnelles; et, de l'autre, il consiste en l'analyse des représentations non institutionnelles que les enseignants utilisent dans leur pratique.

2.1.4 Les représentations dans la pratique

Puisque la compréhension conceptuelle des étudiants repose sur leur capacité à effectuer les différentes activités décrites précédemment, il nous apparaît logique que l'enseignement qui leur est dispensé fasse appel à différents registres sémiotiques et aux activités qui y sont liées. Ceci peut se manifester à travers différentes étapes de l'enseignement, soit pendant l'introduction des concepts mathématiques en tant que tels, soit dans les exemples proposés, les tâches suggérées par le manuel ou autre chose.

Il est évident que l'enseignement requiert au moins deux registres dès le départ, le registre verbal et un autre registre souvent algébrique pour traduire au tableau ce que l'enseignant explique verbalement. Même si les enseignants semblent conscients de la difficulté des élèves avec les manipulations algébriques (Corriveau et Tanguay, 2007), le registre algébrique reste probablement le plus utilisé chez les enseignants (Hitt, 2000, voir plus bas) et donc, en conséquence, chez les étudiants. En fait, pour l'apprentissage, du point de vue théorique de Duval, aucune représentation ne devrait être préférée aux autres. C'est seulement une fois le concept construit, qu'une priorité peut être donnée soit à un type de représentation ou un autre. Néanmoins, il faut toujours considérer que dans la résolution de problèmes non-routiniers ou dans la résolution de situations problèmes, la coordination entre les représentations est fondamentale. Ainsi, l'idée n'est pas seulement de présenter les différentes représentations en parallèle, mais aussi d'effectuer les activités de transformation, de conversion et de coordination avec les élèves.

Une étude de Hitt (1998) montre que les enseignants n'articulent pas les différents registres ou éprouvent de la difficulté à le faire. Il dit : « Dans l'enseignement des mathématiques la grande majorité des professeurs continuent à privilégier le système de représentation algébrique sans considérer que les recherches sur l'enseignement signalent l'équilibre qu'on doit octroyer à l'usage de différentes représentations dans la construction de concepts et la résolution de problèmes. » (Hitt, 2000, p. 268) L'étude émet l'hypothèse que cette difficulté proviendrait de la nature des tâches proposées en classe (Hitt, 1998, dans Passaro 2006). L'enseignement offert dans les Cégeps est souvent magistral et truffé d'exemples. La nature des exemples donnés et la stratégie utilisée pour les résoudre sont très importantes. Encore une fois, en plus de connaître les différentes représentations d'un concept, il faut démontrer que ces représentations peuvent être articulées de diverses façons pour résoudre un problème. On peut alors se demander si tous les exemples et tâches proposés par l'enseignant sont de nature algorithmique, est-ce qu'il sera possible pour l'étudiant de coordonner les différents registres.

Nécessairement, les tâches proposées, que ce soit à travers les exemples donnés en classe, les problèmes du manuel ou les devoirs, doivent encourager les étudiants à utiliser différentes représentations. À ce sujet, Eisenberg et Dreyfus (1991) suggèrent que les problèmes non routiniers seraient un moyen efficace d'amener les étudiants vers ces représentations. On voit d'ailleurs un bon exemple de cela dans la thèse de Hardy (2009). Sa recherche porte sur l'influence des tâches routinières et des règles de l'institution sur la perception des étudiants à propos du *savoir à connaître* sur le concept de limite. En effet, elle expose que les étudiants sont plus enclins à argumenter, à justifier et à valider leur réponse lorsqu'ils sont face à une tâche qui ne leur semble pas familière.

2.2 Éléments qui peuvent mener à l'utilisation de différentes représentations

2.2.1 Les différents types de tâches

Certains types de tâches peuvent favoriser l'utilisation de différentes représentations plus que d'autres. En effet, les tâches dites non-routinières pourraient jouer ce rôle (Selden, Mason et Selden, 1989). On peut distinguer la tâche routinière de la tâche non routinière en parlant d'exercice et de problème. En effet, l'exercice est la tâche routinière proprement dite, faisant appel à une notion mathématique et une stratégie de résolution vue en classe. Bien que la communauté didacticienne semble s'entendre sur la définition d'un exercice, il n'en est pas de même pour le problème. Nous avons choisi de le définir au sens de Hitt (2004) qui colle à notre choix théorique des représentations sémiotiques. Cette définition est ce que nous entendrons par une tâche non routinière :

> « *Un problème sera plus complexe qu'un exercice du point de vue cognitif. C'est-à-dire que si un énoncé ne fait pas appel à une procédure déterminée, qu'il nous oblige à la construction d'une représentation particulière interne qui fera la liaison entre différentes représentations de ce qui est en jeu, qui va promouvoir l'articulation entre ces différentes représentations et qui va aussi nous permettre de produire des représentations sémiotiques particulières liées à l'énoncé en question, alors cet énoncé là, sera pour nous un problème.* » (Hitt, 2004, p.352)

À l'instar d'Hardy, ce type de problème inciterait également certains étudiants « à combiner différentes techniques et concepts, à remettre en question leurs propres idées et leur confiance envers la calculatrice, et à être attentifs à leurs mauvaises conceptions » (Hardy, 2009, p. 199)[4].

De son côté, Robert (1998), avec le souci de développer des outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université (ce qui peut représenter le Cégep et l'université ici), partage en trois catégories les différents types de tâches. Elle les décrit comme étant des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances des élèves. Le niveau technique est associé à une mise en fonctionnement qui est indiquée et isolée dans laquelle l'élève devra effectuer l'application directe de théorèmes, propriétés, définitions ou formules. Nous associons ce niveau à l'exercice que nous avons décrit précédemment. Le niveau des connaissances mobilisables serait à mi-chemin entre l'exercice et le problème non routinier défini plus tôt. En effet, ce niveau demanderait une application des théorèmes et autres plus approfondie. Même si ces mises en fonctionnement sont encore indiquées; c'est-à-dire que ce qui est en jeu est explicite, ce niveau demande un début d'organisation des savoirs. Nous y associons donc des activités de productions ou de transformations dans différents registres de représentations. Finalement, le niveau des connaissances disponibles impose à l'élève de faire le choix de sa stratégie de résolution. Il doit ainsi « [...] savoir résoudre ce qui est proposé sans indication, [...] aller chercher lui-même dans ses connaissances ce qui peut intervenir. » (Robert, 1998, p.166). Nous avons associé les problèmes non routiniers à ce niveau de mise en fonctionnement. Ainsi, c'est dans ce type de problème que nous retrouverons des activités de conversion ou de coordination.

[4] « When dealing with these types of problems, students eventually – before or after my intervention – positioned themselves as Learners, bringing together different techniques and concepts, challenging their own beliefs, their confidence in the calculator, and being suddenly aware of their misconceptions. »

2.2.2 La technologie

La technologie peut être un autre élément qui inciterait l'étudiant à se tourner vers d'autres types de représentations. Entre autres le recours aux registres tabulaire et graphique peut être facilité et construit plus rapidement en utilisant un outil technologique tel qu'une calculatrice graphique ou un système de calcul symbolique comme Maple par exemple. En dépit de leur enthousiasme pour l'utilisation des technologies, Hitt et Kieran (2009) nous mettent en garde par rapport aux problèmes que pourraient déclencher une utilisation non appropriée de la technologie. Effectivement, son utilisation requiert une réflexion sur la tâche demandée dans le contexte technologique. Il ne s'agit pas simplement d'ajouter un outil technologique à une tâche pour que celle-ci soit efficace et constructive.

De son côté, Lagrange (2000) rappelle des aspects très positifs que peut avoir l'utilisation de la technologie tout en émettant quelques réserves. En effet, s'il met en avant la potentialité de la technologie pour promouvoir la compréhension conceptuelle, il présente deux caractéristiques de l'utilisation de la technologie en classe : l'immédiateté des gestes et la double référence. La dernière peut représenter pour lui une contrainte de l'utilisation de la technologie avec laquelle les enseignants doivent tenir compte. Il s'agit en fait de la référence à la fois à un objet mathématique et à un objet plus de type informatique. Afin de bien utiliser la technologie, l'élève doit effectuer une certaine conversion d'un registre usuel dans un environnement papier-crayon à un autre registre dans un environnement informatique. Or, nous avons vu précédemment qu'une telle conversion n'est pas nécessairement facile. Ainsi, l'utilisation de la technologie peut mener à des erreurs ou des conceptions nouvelles dont les enseignants doivent être conscients, afin d'utiliser l'outil technologique le plus judicieusement possible. Pour que l'utilisation de la technologie soit bénéfique, Lagrange (2000) ajoute, entre autres, une condition : « [...] que les élèves aient une connaissance suffisante du concept en jeu, ainsi que de la façon dont la machine le traite. » (p.7)

2.3 Obstacles épistémologiques

Pendant nos observations, nous risquons fortement de voir apparaître des obstacles épistémologiques liés au concept de dérivée et aux autres concepts en jeu. Il nous apparaît important de définir ce que nous entendons par obstacle épistémologique, concept controversé dans le milieu. Ce concept est né avec Bachelard (1938) dans le contexte des sciences. C'est plus tard que Brousseau (1976/1983) l'a repris dans le contexte de la didactique des mathématiques, en lien avec l'étude des phénomènes d'apprentissage des mathématiques. L'épistémologie a pour but d'étudier l'origine logique, la valeur et la portée d'une science. Ainsi, les obstacles dits épistémologiques vont se lier à l'origine logique, la valeur et la portée des concepts mathématiques étudiés. Cependant, l'idée de Brousseau va beaucoup plus loin, sa définition est formelle et complexe. En somme, il associe l'obstacle épistémologique à une connaissance qui « donne [...] des avantages appréciables dans un certain domaine, mais qui se révèle fausse ou tout à fait inadaptée dans un domaine nouveau ou plus vaste » (Brousseau, 1997, p. 18). Autrement dit, ce sont des connaissances anciennes qui offrent une résistance à l'acquisition d'une nouvelle connaissance. De plus, l'hypothèse générale de Brousseau est que « certaines des difficultés des élèves peuvent se rassembler autour d'obstacles attestés par l'histoire. » (Brousseau, 1998, p.138) Il s'agirait en fait d'observer les connaissances qui ont posé problèmes dans l'histoire, pour se préparer aux difficultés des étudiants. Les travaux de Sierpinska (1985) et ceux d'Artigue (1990) dégagent que « ce qui fonde en quelque sorte les obstacles épistémologiques, c'est leur apparition et leur résistance dans l'histoire des concepts considérés, ainsi que l'observation de conceptions analogues chez les élèves. » (p.254) Artigue (ibid) ajoute également qu'on remarque que les obstacles épistémologiques vont souvent de pair avec d'autres types d'obstacles, didactiques par exemple, qui sont liés à l'enseignement.

Ainsi, les notions du cours de calcul différentiel n'échappent pas à ce concept d'obstacles épistémologiques. D'ailleurs, Sierpinska (1985) a déjà relevé certains obstacles épistémologiques liés au concept de limite que nous pourrons rencontrer lors de notre étude sur le concept de dérivée.

2.4 Les concepts

2.4.1 La dérivée

Il est intéressant de se tourner vers l'histoire pour mieux comprendre les difficultés ou enjeux liés à ce concept. De plus, en observant de plus près comment la dérivée a été « inventée », on peut voir que les représentations et les activités cognitives qui y sont attachées ont joué un rôle important. Soulignons qu'afin de faire cette revue historique du concept, nous nous sommes beaucoup basée sur les travaux de Grabiner (1983) et de Boyer (1949).

La première étape dans l'élaboration du concept de la dérivée est son utilisation. En effet, selon Grabiner (1983): « The derivative was first used; it was then discovered; it was then explored and developed; and it was finally defined. » (p. 195). Même si les grecs avaient déjà développé des méthodes pour trouver la tangente à différentes courbes, celles-ci étaient assez « locales ». C'est-à-dire, qu'il existait une méthode pour une certaine courbe et une autre méthode pour une autre courbe. Quand René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (1601-1655) ont amené ce que l'on appelle la géométrie analytique en 1630, les méthodes liées à la géométrie synthétique des grecs sont devenues insuffisantes. En effet, la géométrie analytique affirme que toute courbe peut être représentée par une équation et donc, inversement, que toute équation détermine une courbe. C'est la coordination entre différentes représentations d'une fonction (équation et graphique) qui a amené le domaine à s'étendre. En effet, la géométrie analytique a créé le besoin de méthodes généralisables, ce qui était impossible les méthodes des grecs.

C'est Pierre de Fermat en 1630 qui a semé l'idée de la dérivée que l'on connaît aujourd'hui. Voulant résoudre des problèmes d'optimisation avancés, Fermat invente une méthode pour trouver les extrema impliquant une quantité de plus en plus petite. On comprend qu'il s'agissait d'une représentation fonctionnelle basée sur une idée intuitive qu'il avait. Cependant, ceci était lié au concept de limite et d'infini, des concepts clés dans l'élaboration de la dérivée. Remarquons, qu'on ne parle pas encore de problème de tangente à une courbe.

En effet, le lien entre la méthode de Fermat et les tangentes n'avait pas été fait au départ. À son tour, Johann Hudde (1628-1704) porte sa contribution en formulant, de façon générale, la méthode de Pierre de Fermat en 1659. C'est un moment de l'histoire où on assiste à une conversion et une évolution d'une représentation intuitive et fonctionnelle vers une représentation plus formelle et générale. Avec ces travaux, la vision de la tangente change. De la définition des grecs qui la décrivaient comme une ligne qui touche une courbe sans la couper et habituellement, qui n'a qu'un point en commun avec cette courbe (Grabiner, 1983), la définition devient moins statique. Effectivement, on parle maintenant d'une droite sécante dont les deux points d'intersection avec la courbe se rapprochent de plus en plus jusqu'à se confondre (ibid). Évidemment, cette définition permet de faire la coordination entre la méthode pour trouver les extrema et celle pour trouver une tangente, en 1660. Le concept se développe et se précise lentement, en résolvant différents types de problèmes « géométriques » et en impliquant des concepts comme la limite, l'infini, la continuité et bien sûr les fonctions.

On peut dire que la « branche » des mathématiques que l'on désigne maintenant comme étant le calcul a vu le jour avec Isaac Newton (1642-1727) et G. W. Leibniz (1646-1716). Ces deux mathématiciens avec des approches somme toute assez différentes, ont pu faire avancer les mathématiques en posant trois gestes principaux. C'est ici que les concepts d'intégrale, de dérivée, d'aires, de taux de variation arrivent. En effet, la première chose que ces mathématiciens ont faite est de concentrer les méthodes déjà existantes pour trouver des extremums, des aires ou des tangentes en deux concepts plus généraux : la dérivée et l'intégrale (Grabiner, 1983). De plus, ils ont tous deux créé une notation pour rendre le travail sur ces concepts plus facile et universel. Ce sont ces nouvelles représentations des concepts qui deviendront par la suite les représentations institutionnelles par excellence. La notation de Newton, liée à la physique est toujours présente aujourd'hui dans ce domaine : $\dot{x}$. Celle de Leibniz a aussi su traverser le temps, car c'est une des notations les plus utilisées encore aujourd'hui : $\frac{df}{dx}$ *ou* $\frac{df(x)}{dx}$. Finalement, ils ont aussi travaillé à prouver le théorème fondamental du calcul qui veut que la dérivée et l'intégrale soit mutuellement des inverses.

Bref, Leibniz et Newton ont introduit beaucoup de représentations différentes pour les concepts d'intégrale et de dérivée.

Leur vision respective de la dérivée n'était pas tout à fait la même. Newton avait une vision très liée à la physique. Il décrivait la dérivée comme une fluxion, un taux de flux ou de changement, mais ce qu'il entendait par fluxion n'était pas très clair. Aux questions souvent posées par rapport à ce concept, Newton répondait intuitivement qu'il s'agissait d'une vitesse. Pour Leibniz, la « dérivée » désignait plutôt un ratio de différences d'infiniment petits, un quotient différentiel. Le problème est qu'il est admis par la communauté des mathématiciens de l'époque que l'infiniment petit n'obéit pas aux axiomes d'Archimède (287-212 A.J-C.) et que ces axiomes sont à la base du traitement des ratios pour les grecs. Leibniz a donc énoncé plusieurs règles de dérivation. Il voulait en fait, « créer une véritable arithmétique de l'infiniment petit » (Hamel et Amyotte, 2007, p. 81).

Plusieurs questions demeurent sur cet infiniment petit. Quelle est cette quantité que l'on traite parfois comme zéro et parfois non? Newton répond en 1687 que c'est « the limit of the ratio of vanishing increments » (Grabiner, 1983, p. 200). Notons que Newton a une vision de l'infini très liée à l'infini « actuel » ce qui influence sa vision de limite. Il la voit comme un ultime ratio qu'une variable ne peut dépasser. On associe sa vision de la limite à une borne. Rappelons qu'Archimède avait déjà introduit implicitement ce concept en inscrivant des polygones réguliers dans un cercle de rayon 1. Il avait en effet émis le raisonnement que plus le nombre de côtés augmente plus le périmètre du polygone se rapproche de la circonférence du cercle, la limite de son périmètre étant égale ici à la circonférence de ce cercle.

Dans les années suivantes, le concept de dérivée a été exploré et a évolué. Les plus grands développements ont certainement été faits par Brook Taylor (1686-1731) et Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Taylor a apporté sa contribution en développant, en 1715, un outil pour aider à la résolution d'équations différentielles (problèmes déjà étudiés par d'Alembert, Bernouilli et Euler...). Cet outil est encore bien connu aujourd'hui sous le nom des séries de

Taylor. Elles ont aussi été retravaillées par la suite par Colin MacLaurin (1698-1746), Léonhard Paul Euler (1701-1783) (séries de puissance) et Lagrange (1736-1813). Ces deux derniers travaillent les séries infinies de façon algébrique (on parle de l'algèbre des séries infinies). Lagrange propose finalement une définition de la « dérivée » en 1797. Il dit, et pense aussi l'avoir prouvé, que pour toute fonction, il existe un développement en série de puissance tel que $f(x+h) = f(x) + p(x)h + q(x)h^2 + \ldots$ où il nomme $p(x)$ la fonction dérivée de f et la note plus tard $f'(x)$. Le plus important dans l'idée de Lagrange, en plus du nom et de la notation, est certainement le fait que la dérivée n'est plus un ratio, mais bien une fonction. Cette définition contribue grandement à l'émancipation du concept de dérivée.

Finalement, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), en 1823, propose une nouvelle définition de la dérivée, en mots, très algébrique et plus rigoureuse que les précédentes. Il la défini comme étant $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Avec cette définition, il combine évidemment une vision différente de la limite. Il n'aborde pas le fait qu'une variable puisse atteindre ou non sa limite, mais il laisse tomber l'idée de borne (instauré par Newton) en admettant l'idée que la variable puisse dépasser sa limite. Sa vision très algébrique de ces concepts l'amène à utiliser souvent les inégalités pour prouver par exemple, le théorème des valeurs intermédiaires. En 1840, on précise la distinction entre convergence et convergence uniforme, ce qui rend la définition de Cauchy encore plus rigoureuse. Peu de temps après, en 1850, Karl Weierstrass (1815-1897) donne plus de rigueur aux découvertes de Cauchy en faisant la conversion des définitions en mots de Cauchy dans un langage plus symbolique incluant, bien sûr, des inégalités. Comme Weierstrass enseigne ces nouvelles représentations, plutôt que de les publier, ce sont ses étudiants qui les diffuseront. On peut donc associer des contributions de Schwartz, Heine, Pincherle, Cantor... à des avancées dont Weierstrass a été l'initiateur.

2.4.2 L'infini

Nous n'avons pas beaucoup abordé le concept d'infini dans le précédent survol de l'histoire de la dérivée. L'infini représente pourtant un concept important en mathématiques et plus particulièrement en calcul différentiel et intégral. Tous s'entendent pour dire que l'infini est un concept très complexe des mathématiques.

L'idée intuitive de l'infini est née il y a très longtemps. Déjà au VIe siècle A. J-C, il y avait deux visions distinctes de l'infini, l'une dite continuiste où l'on considère le nombre, l'espace, le temps et la matière comme divisibles à l'infini; et l'autre dite atomiste où l'on croit en l'existence d'éléments premiers indivisibles et homogènes. L'idée d'infini a poursuivi son chemin pendant de nombreuses années avant que Bernard Bolzano (1781-1848) apporte une clarification importante au XIXe siècle. En effet, dans son livre paru après sa mort « Paradoxes sur l'infini » (1851), Bolzano réfute un axiome d'Euclide qui affirme que « le tout est toujours plus grand qu'une partie » en donnant des exemples explicites de bijections entre deux segments (voir Hitt, 2003). Galileo Galilée (1564-1642) avait d'ailleurs mis certains de ces axiomes en doute plus d'une centaine d'années auparavant.

Plus tard, le travail fait pour l'avancée du calcul différentiel et intégral a mené à l'évolution du concept d'infini. En effet, les mathématiciens de cette époque ont beaucoup travaillé sur l'idée d'infiniment petit, ce qui les amène à traiter la notion d'infini. C'est avec Georg Cantor (1845-1913) que nous obtenons un autre pas important dans la compréhension du concept d'infini mathématique. En effet, Cantor compare deux ensembles infinis en associant les éléments de chacun des ensembles. Il essaie ainsi de mettre en place une véritable arithmétique de l'infini.

C'est à la suite de tous ces travaux que nous pouvons enfin avoir une idée plus précise de ce que sont l'infini actuel et l'infini potentiel. L'infini traité comme un tout, dans sa totalité, est en fait ce qu'on entend par l'infini actuel, l'infini potentiel étant plutôt rattaché à une idée intuitive d'un processus sans fin. D'ailleurs, Emmanuel Kant (1724-1804) avance que l'infini potentiel peut se concevoir à travers une expérience, alors que l'infini actuel ne peut se construire qu'à travers une réflexion (dans Hitt, 2003). Ceci explique peut-être un peu pourquoi les élèves ont autant de difficulté à faire le passage entre ces deux visions.

2.4.3 L'enseignement des concepts de limite, de continuité et d'infini

Nous aimerions amener une réflexion sur l'enseignement des concepts complexes que sont la limite, la continuité et l'infini. En effet, des concepts ayant causé autant d'ambiguïtés dans l'histoire ne sont certainement pas simples à enseigner. D'abord, considérons le concept de limite et par le fait même celui d'infini. Il est clair qu'il n'est pas facile d'avoir un discours qui tienne compte de deux visions de l'infini présentées précédemment. L'idée intuitive pour verbaliser l'expression $\lim_{x \to a} f(x) = L$ est de se baser sur la vision de l'infini actuel. En effet, lorsque l'on parle de la limite, il va de soi de parler d'un processus qui fait qu'étant donné un voisinage autour de $\boldsymbol{L}$, on peut trouver un voisinage autour de $\boldsymbol{a}$, tel que toutes les images des valeurs à l'intérieur de ce dernier voisinage, en excluant la valeur $\boldsymbol{a}$, vont « tomber » dans le voisinage choisi de départ. Ce type de représentation est littéralement associé à la vision de l'infini actuel, mais nous convenons qu'on ne peut pas se détacher de ce type d'infini pour verbaliser le concept de limite et ce n'est pas ce que nous souhaitons. Soyons clair, les deux visions sont importantes pour la construction du concept. En fait, nous retrouvons aussi la vision de l'infini potentiel dans l'étude de la limite. Étonnamment, on ne peut pas échapper à l'idée de l'infini potentiel même dans les représentations algébriques comme nous le verrons plus tard. Il se crée de cette façon une rupture entre les représentations qui sont basées sur l'infini actuel et d'autres représentations qui, elles, sont basées sur l'infini potentiel. Cette dichotomie peut créer des difficultés chez les élèves.

Un autre élément doit être considéré. Il faut se rappeler que l'idée d'une limite atteignable ou pas a été un problème chez les mathématiciens du 19^{e} siècle (Schneider, 1992). En effet, la vision de l'infini actuel liée à la limite peut amener à voir la limite comme inatteignable. En fait, c'est l'idée qu'on peut avoir par rapport au discours d'un enseignant qui utiliserait des représentations verbales liées à l'infini actuel : il pourrait évoquer à la fois la conception que la limite est inatteignable. Nous savons que cet obstacle est de type épistémologique, et c'est la raison pour laquelle on devrait en tenir compte dans l'enseignement des concepts de limite et dérivée.

2.4.4 La tangente

Un autre concept dont nous devons tenir compte dans l'enseignement de la dérivée est la tangente. En effet, les élèves arrivent au Cégep avec des conceptions sur la tangente construites par l'étude de la tangente au cercle. À ce sujet, Vivier (sous-presse), inspirée des travaux de Castela (1995) entre autres, reconnaît une « rupture » entre ces conceptions et celles qui sont nécessaires à l'étude de la notion de dérivation. En effet, il relève que l'enseignement de la dérivée s'appuie sur des conceptions différentes de la tangente qui sont probablement très loin des conceptions intuitives des élèves. Vivier (ibid) parle alors de deux catégories distinctes de conceptions : les conceptions géométriques (celles des élèves en lien avec la tangente au cercle) et les conceptions analytiques[5] (celles nécessaires pour étudier le calcul). Par contre, on peut se demander si dans l'enseignement de la dérivée, il existe une dialectique entre ces deux catégories pour que les élèves puissent passer de l'une à l'autre.

Biza (2010), Castela (1995), Fischbein (1987), pratiquement tous inspirés de Vinner (1982), avaient déjà soulevé la présence de ce conflit entre différentes conceptions. En effet, chacun a pu réaliser des études sur les conceptions des élèves sur la tangente et ainsi, voir comment celles-ci les influencent dans leur étude de la dérivée. Un exemple intéressant de questionnaire est celui de Vinner (1982), que l'on retrouve dans Fischbein (1987), dans

[5] Par exemple, « la conception que la tangente est la limite des sécantes en un point de la courbe ». Notons que cette conception est à la fois le support et le résultat du concept de dérivée.

donnée (voir figure 2.2), de déterminer s'il est possible d'en tracer plus d'une et finalement de définir le concept de tangente. La figure 2.3 donne les résultats que Vinner avait obtenus.

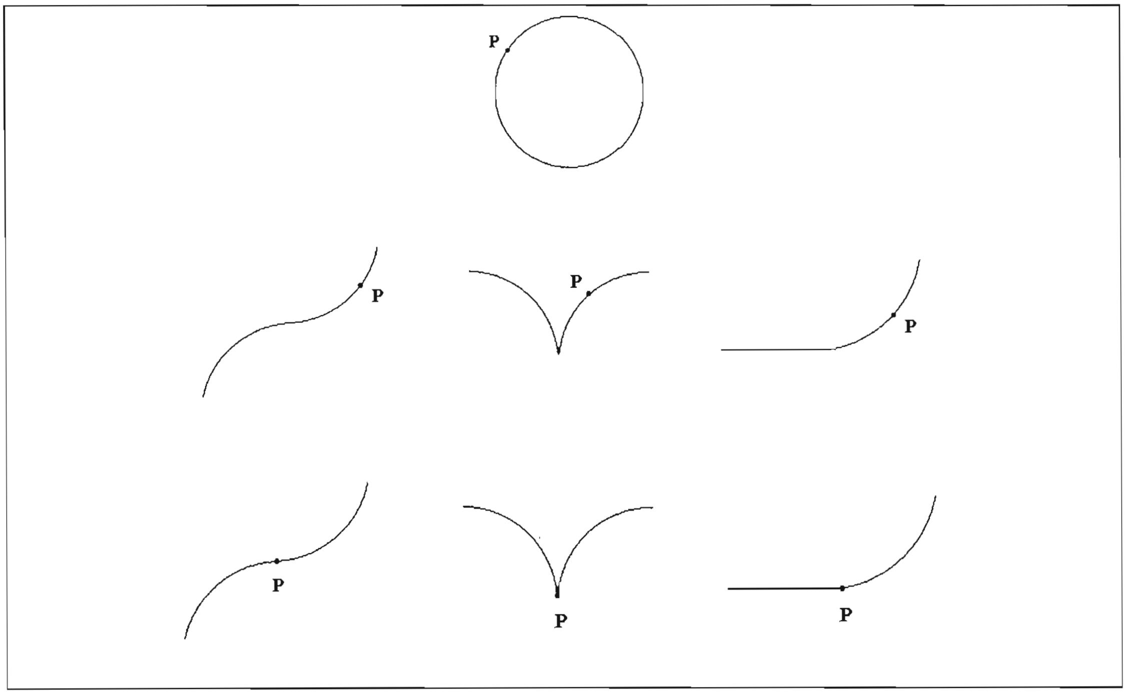
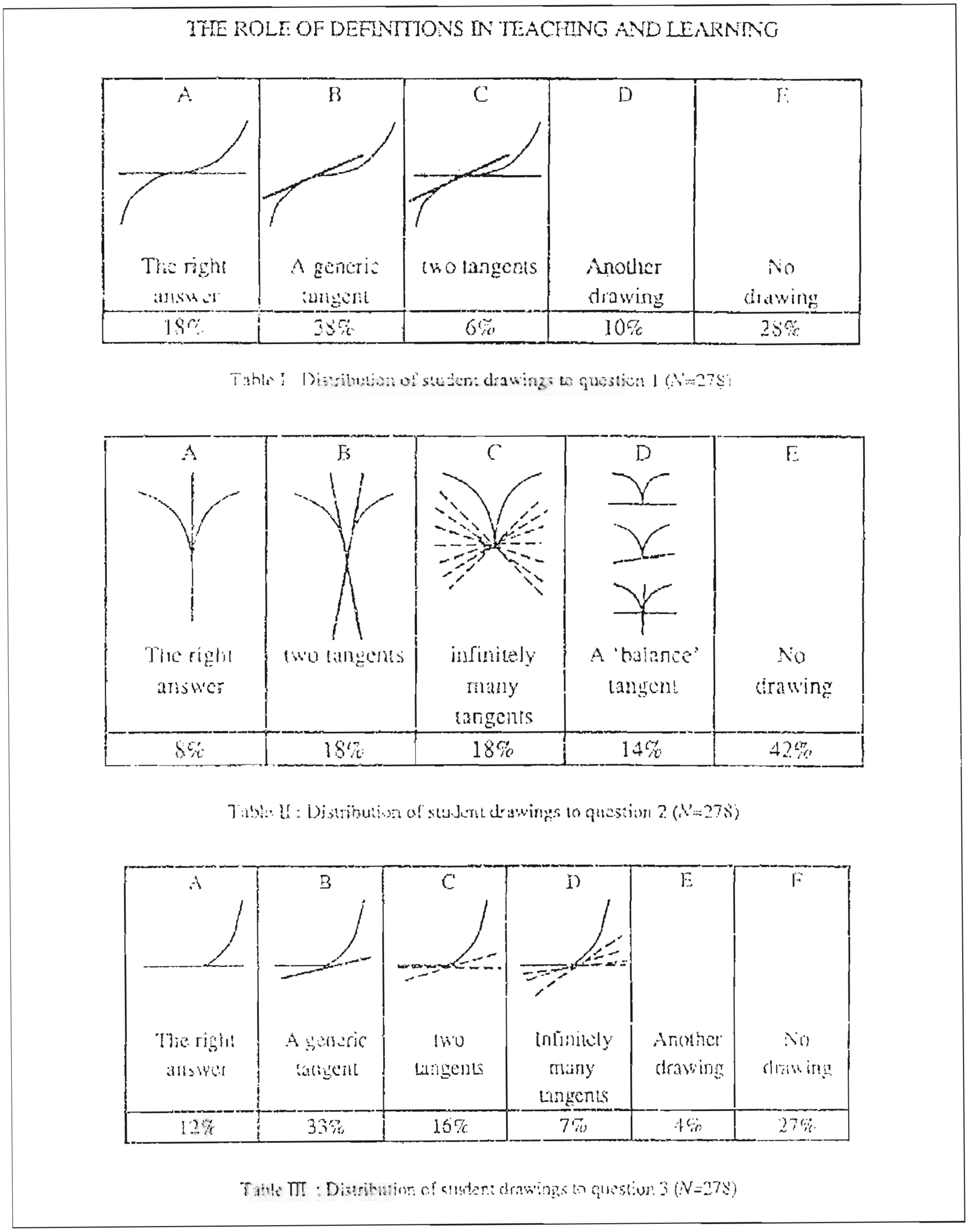


Figure 2.2: Courbes données aux élèves (Vinner, 1982)



THE ROLE OF DEFINITIONS IN TEACHING AND LEARNING

A	B	C	D	E
The right answer	A generic tangent	two tangents	Another drawing	No drawing
18%	38%	6%	10%	28%

Table I : Distribution of student drawings to question 1 (N=278)

A	B	C	D	E
The right answer	two tangents	infinitely many tangents	A 'balance' tangent	No drawing
8%	18%	18%	14%	42%

Table II : Distribution of student drawings to question 2 (N=278)

A	B	C	D	E	F
The right answer	A generic tangent	two tangents	infinitely many tangents	Another drawing	No drawing
12%	33%	16%	7%	4%	27%

Table III : Distribution of student drawings to question 3 (N=278)

Figure 2.3: Résultats obtenus par Vinner (1982) (dans Fischbein, 1987)

Ces résultats nous font comprendre que l'idée intuitive des élèves par rapport à la tangente reste très présente lors de l'étude de la dérivée. De plus, on note que ces idées, probablement influencées par l'étude de la tangente au cercle, vont à l'encontre des conceptions nécessaires à l'étude de la dérivée.

2.5 Objectif et questions de recherche

Le principal objectif de notre recherche, rappelons-le, est de faire une analyse des représentations (institutionnelles ou non) que les enseignants utilisent dans leur enseignement quand ils/elles introduisent le thème de la dérivée. Comme il a été mentionné que les étudiants éprouvent des difficultés à faire évoluer leurs représentations fonctionnelles et à effectuer la coordination de différents registres lors de la résolution de certains problèmes, il nous apparait important de voir comment les enseignants utilisent les représentations. Pour ce faire, nous voulons pouvoir capter les différentes utilisations des représentations dans la pratique d'enseignants choisis. Probablement que le but de l'enseignant est d'arriver à l'institutionnalisation des connaissances; mais, il y a, *a fortiori,* dans tout processus d'enseignement des mathématiques, une utilisation des représentations non institutionnelles, qui sont plus attachées à l'intuition ou à la compréhension et à l'action (représentations fonctionnelles). Alors, notre analyse portera sur tous les types de représentation (institutionnelles ou non) autour du concept de dérivée utilisés par les enseignants choisis.

Ces deux premiers chapitres nous mènent directement à des questions de recherche claires. En effet, basées sur l'objectif principal de savoir si les enseignants intègrent eux-mêmes à leur pratique et ce de façon explicite différents types de représentations, nous avons dégagé les questions suivantes :

- Quels types de représentations, institutionnelles ou non, retrouve-t-on dans la pratique d'un enseignant lors de l'introduction du concept de dérivée?

- Comment utilise-t-il ces différentes représentations dans la communication avec les élèves?

Afin de répondre à ces questions, une approche qualitative qui vise l'observation des pratiques d'enseignants en action sera de mise. En effet, ces questions réfèrent directement aux pratiques naturelles d'enseignants. Nous justifierons ce choix de méthodologie et les détails du déroulement dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 3 : MÉTHODOLOGIE

3.2 Conditions de l'expérimentation

3.2.1 Choix des participantes

Nous avons choisi deux enseignantes pour participer à cette recherche. Nous tenons d'abord à les remercier de nous avoir si généreusement ouvert les portes de leur classe. En effet, il n'est pas facile de trouver des enseignants prêts à se soumettre à un tel exercice, mais il est primordial pour la recherche de pouvoir accéder à ces moments clés. Nous tenons également à mentionner que notre but n'est pas de critiquer ces deux enseignantes, mais d'éclairer les façons dont celles-ci utilisent les représentations. En aucun cas, nous ne voulons remettre en question les compétences des personnes.

Au départ, nous avions contacté une seule enseignante qui s'est rapidement montrée intéressée. De plus, en parlant de ce projet dans son milieu, sa collègue, qui donnait aussi le cours de calcul différentiel, a voulu aussi y participer. Ainsi, sans avoir une intention particulière de comparer les pratiques des deux enseignantes, nous trouvions intéressant pour le projet d'avoir deux enseignantes participantes. En effet, le projet n'allait qu'être plus riche de cette façon.

Nous désignerons la première sous le nom fictif de Louise. Louise est une enseignante d'expérience qui a une formation universitaire de premier cycle en mathématiques. Après trente-trois ans de service pour le même collège, elle s'est spécialisée dans l'enseignement du cours méthode quantitative, mais au fil des années, elle a aussi été responsable du cours de calcul différentiel (NYA). La deuxième, que nous appellerons Josée, a une formation universitaire de deuxième cycle en mathématiques. Par la suite, elle a fait un retour aux études pour obtenir son diplôme en enseignement des mathématiques au secondaire. Après avoir enseigné deux ans au secondaire, surtout à la première année du deuxième cycle, elle a rejoint l'équipe de Louise. Elle a donné le cours de calcul intégral l'année précédente et elle donne pour la première fois cette année celui de calcul différentiel dans ce collège.

Les deux participantes présentent des caractéristiques intéressantes. D'abord, leur expérience et leur formation sont tout à fait différentes. En effet, l'une est expérimentée et n'est formée qu'en mathématiques, et l'autre est au début de sa carrière et possède une formation en enseignement. De plus, nous avons aimé l'idée qu'elles travaillent dans le même collège, et ce, avec une grande collaboration. Effectivement, pour la session d'automne 2009, elles étaient toutes les deux responsables du cours de calcul différentiel. Elles ont fait preuve d'un bon travail d'équipe en développant ensemble le plan de cours, les devoirs et les examens ensemble.

3.2.2 Le milieu

Le collège où nous sommes allée observer Louise et Josée se situe dans une région éloignée du Québec. Il s'agit d'un collège comptant un peu plus de mille étudiants provenant de diverses écoles secondaires de la région. Chaque année, le collège reçoit deux à trois groupes en sciences de la nature. Évidemment, ce nombre restreint d'étudiants peut contraindre certains choix de cours dans le programme. Néanmoins, le cours de calcul différentiel, soit le cours qui nous intéresse, est suivi par tous les étudiants en sciences pendant leur première session.

3.2.3 Les connaissances préalables des élèves

Nous sommes allée observer deux groupes de première année en sciences de la nature. Ces élèves ont donc rempli les exigences préalables pour accéder à ce programme, c'est-à-dire les cours de physique et mathématiques « avancés » au secondaire. Le Programme de Formation de l'École Québécoise n'étant pas encore en vigueur au secondaire au moment où ces étudiants ont fait leurs études à ce niveau, on peut parler en terme de mathématiques et physique 436 et de mathématiques, physique et chimie 536.

De plus, nous n'avons pas commencé l'observation au tout début de la session d'automne. Avant notre arrivée, ils ont vu la limite et la continuité. Selon le plan de cours, les enseignantes devaient couvrir : l'historique du concept de limite, l'approche contextualisée, graphique, numérique et analytique du concept de limite, l'existence d'une limite d'une fonction en un point, les types de limite, les stratégies d'évaluation d'une limite, la continuité (en un point, sur un intervalle) et les types de discontinuité (voir annexe A pour un extrait du plan de cours).

Nous sommes arrivée au début de l'étude du concept de dérivée, c'est-à-dire avec les notions de taux de variation moyen, taux de variation instantané et dérivée en un point. Il était primordial pour nous de voir comment le concept était présenté aux élèves. Nous voulions savoir comment les enseignantes abordaient l'étude de ce concept.

De plus, nous devons mentionner qu'un aspect important de tous les cours de mathématiques au Cégep observé est l'étude et l'utilisation du logiciel Maple. Comme le programme en sciences de la nature veut initier les élèves à la programmation et aux algorithmes informatiques, le collège a pris la décision de le faire par le biais de ce logiciel dans tous les cours de mathématiques. Ainsi, dans le plan du cours de calcul différentiel, on retrouve des séances en laboratoire informatique pour l'initiation au logiciel Maple, ils apprennent donc à utiliser le logiciel tout en faisant du calcul différentiel. Quant à l'initiation à la programmation, elle sera faite dans les autres cours de calcul.

3.3 Collecte de données

3.3.1 Entrevues préalables

En premier lieu, nous allons mener une entrevue préalable semi-structurée, afin d'en savoir un peu plus sur les enseignantes; expériences, philosophie d'enseignement, leur perception de leurs cours, entre autres. Nous espérons que cette entrevue pourra apporter des précisions à des questionnements qui pourraient surgir lors de la deuxième étape de la collecte de données. Nous voulions avoir le plus d'information possible pour ainsi être en mesure de mieux comprendre l'origine de certaines décisions prises par les enseignantes.

3.3.2 Séances en classe

Afin d'obtenir les informations que nous désirons, nous avons opté pour l'observation directe. Ce choix méthodologique a été fait pour acquérir le plus d'information possible sur la pratique des enseignantes. De plus, il était important pour nous que les enseignantes ne changent pas leur pratique en raison de notre présence, c'est pourquoi notre présence en classe était passive et les enseignantes ne savaient pas que notre attention était principalement portée sur les représentations. Aussi, compte tenu de notre cadre théorique, il n'est pas évident de cibler les moments où l'enseignante allait utiliser les différents registres de quelques façons que ce soient. Il était donc important d'être là pendant toutes les séances, pour pouvoir justement essayer de reconnaître les moments privilégiés par les enseignantes pour introduire d'autres registres.

Nous avons ainsi capté sur vidéo plusieurs séances en classe choisies. Nous avons ciblé les premières séances d'introduction du concept de dérivée. Nous avons suivi les enseignantes dans un de leurs groupes. Le groupe de Josée est formé de vingt-quatre étudiants et celui de Louise comporte vingt étudiants.

3.3.3 Les tâches

Nous allons étudier certaines tâches soumises aux élèves au cours de séances, que ces tâches proviennent du manuel ou qu'elles aient été construites par les enseignantes. Comme certaines tâches favorisent l'utilisation de différents registres, cette analyse des tâches pourra nous donner un indice à propos des divers types de registre sémiotique privilégiés par les enseignantes. À notre demande, les enseignantes nous ont remis : une liste de tâches provenant du manuel officiel du cours (« Calcul différentiel », Hamel et Amyotte, 2007), les devoirs, cumulatifs pour la note du cours, et les examens soumis aux étudiants. Ainsi, nous pourrons, au besoin, nous référer aux énoncés originaux des tâches évoquées en classe. Il est à noter qu'une analyse détaillée du manuel aurait dépassé largement l'objectif de notre recherche. Ainsi, sans laisser de côté la variable « manuel scolaire », nous ne prendrons en compte que les parties du manuel effectivement utilisées par les enseignantes.

3.4 Plan d'analyse

Afin d'analyser les séances en classe que nous avons filmées, nous allons dans un premier temps nous concentrer sur les registres sémiotiques de représentation que les enseignantes utilisent aux différents moments de la séance et aux représentations non institutionnelles. Nous allons déterminer les registres sémiotiques sollicités par les enseignantes tout au long des séances en classe.

Les registres sémiotiques possibles relevés pour le moment sont : verbal, graphique, schéma, algébrique et numérique. Nous coderons le registre verbal RV quand l'enseignante donnera des explications en langage naturel. Nous distinguerons également RVO pour des explications données seulement oralement et RVÉ pour des explications écrites en langage naturel au tableau. Comme l'enseignement est un métier qui exige l'utilisation de ce registre, nous essaierons de cibler des représentations particulières. En effet, nous coderons les synonymes utilisés pour un même concept, par exemple, dérivée, taux de variation instantané, vitesse instantanée. Nous ciblerons également des verbalisations spécifiques à un concept, par exemple, comment l'enseignante verbalisera le concept de limite. Nous coderons le registre graphique RG quand l'enseignante se réfèrera de façon explicite à un graphique que ce soit en le dessinant au tableau ou en utilisant un autre support comme un logiciel informatique ou un graphique du manuel. Nous coderons les schémas RS quand l'enseignante fera appel à un dessin (non graphique) pour représenter une situation quelconque. Rappelons que nous utilisons le schéma au sens de Janvier (1987). Nous coderons le registre algébrique RA quand l'enseignante utilisera toute forme d'expression algébrique. Finalement, nous coderons le registre numérique RN quand l'enseignante aura recours à un exemple numérique. Finalement, nous coderons le registre tabulaire RT quand l'enseignante aura recours à une table de valeurs. Et de façon explicite, nous allons faire référence aux représentations non institutionnelles que les enseignantes évoquent pendant leur pratique.

Dans un deuxième temps, nous repèrerons les endroits où il y a changement de registre ou une utilisation de plusieurs registres en même temps. Il s'agira alors de définir les activités reliées au changement de registre suggéré par Duval soit la reconnaissance, la production, la transformation, la conversion ou la coordination (voir section 2.1.2). Pour ce faire, nous utiliserons des symboles déjà utilisés par Hitt, Guzmán et Páez (2001). Afin de procéder à l'analyse de leurs données avec la théorie des représentations, ils ont codifié chacune des activités reliées à la théorie des représentations ainsi :

R_V, R_A, R_G, $R_N \rightarrow$ Reconnaissance des éléments d'un registre sémiotique

$T_V\uparrow$, $T_A\uparrow$, $T_G\uparrow$, $T_N\uparrow \rightarrow$ Transformations internes à l'intérieur d'un même registre sémiotique

$C_{G\rightarrow A}$, $C_{A\rightarrow G}$, $C_{V\rightarrow A}\ldots \rightarrow$ Conversions (transformations externes) de représentations entre deux registres sémiotiques différents

$C_{V\leftrightarrow A}$, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{V\leftrightarrow G}\ldots\rightarrow$ Coordination de représentations entre différents registres sémiotiques

PS_V, PS_A, PSG, PS_N → Production de représentations dans la résolution d'un problème

De plus, il sera important de reconnaître les activités qui peuvent sembler être une conversion ou une coordination, mais qui n'en sont pas. Comme nous l'avons mentionné dans le cadre théorique, un codage ou une interprétation ne représente pas pour Duval une conversion ou une coordination.

Évidemment, ce processus de codification sera fait en boucle jusqu'à saturation. C'est-à-dire jusqu'à ce qu'aucune nouvelle utilisation ou activité liée à des représentations de types fonctionnelles ou institutionnelles ne soit répertoriée.

CHAPITRE 4 : ANALYSE

4.1 Introduction

En guise d'introduction à ce chapitre d'analyse, nous voudrions commenter brièvement les entrevues préalables qui ont été menées de façon semi-dirigée avant le début des observations en classe. Pendant ces entrevues, nous avons abordé plusieurs points avec les enseignantes : leur formation, leur vision de leur enseignement, le plan de cours, leur vision de la technologie, entre autres.

Commençons par l'entrevue de Louise, l'enseignante expérimentée. Dans son enseignement, elle cherche à garder l'élève actif, à diminuer les moments de cours magistral et à privilégier une approche variée. Selon Louise, il est important de poser beaucoup de questions aux élèves et de leur laisser du temps pour qu'ils puissent s'exercer par eux-mêmes. Elle accorde également une importance particulière à la réalisation de résumés. Elle dit trouver important que l'élève puisse construire par lui-même des schémas qui démontrent les différents liens entre les concepts étudiés. Pour ce qui est de la technologie, Louise affirme qu'il est inutile de vouloir se battre contre son utilisation. En effet, les élèves y ont recours depuis leur plus jeune âge, il serait un peu utopique de penser leur enlever maintenant et croire qu'ils sauront se débrouiller sans. Elle ajoute : « [...] parce que mon but, ce n'est pas qu'ils soient capables de calculer le zéro, c'est qu'ils sachent qu'ils ont besoin du zéro pour chercher leur maximum, leur minimum, leur point d'inflexion, ces choses-là! » Par ces propos, on sent que Louise a le désir d'aller au-delà des méthodes, elle aimerait que les élèves sachent quand utiliser un concept. Elle parle aussi de sa préférence pour que les élèves comprennent plutôt qu'ils n'apprennent par cœur. Elle insiste également sur le côté appliqué du cours. Elle précise qu'avant, le cours était très théorique, maintenant, il a pris une tendance plus appliqué. C'est d'ailleurs la principale raison pour laquelle c'est le manuel de Hamel et

Amyotte (2007) qu'elle a choisi. On retrouve dans ce manuel, selon elle, différentes sphères d'application du calcul différentiel.

De son côté, Josée nous a aussi éclairée sur sa façon d'enseigner et sur sa perception du cours et des élèves. Elle dit privilégier une alternance entre des périodes plus magistrales et des moments où les élèves travaillent et posent des questions. Elle accorde beaucoup d'importance aux questions des élèves, elle commence d'ailleurs chacun de ses cours en y répondant en grand groupe. Elle perçoit les concepts en jeu dans le cours de calcul comme étant assez simples. En fait, elle précise que ce cours consiste beaucoup plus en des techniques que les élèves doivent pratiquer. Aussi, même si la preuve n'est pas très présente dans le plan de cours, Josée a le souci de travailler le sens de la déduction et de la logique des élèves. Elle mentionne également l'idée de se faire une idée intuitive des concepts. De plus, Josée est aussi très intéressée par le côté plus appliqué du cours. Elle a d'ailleurs affirmé aimer les problèmes donnés dans le manuel qui couvrent différents champs d'application. Pour ce qui est de l'utilisation de la technologie, Josée veut habituer les élèves à être plus autonomes envers la calculatrice. Elle comprend que cet outil peut les aider, mais elle a quand même le désir d'en diminuer l'utilisation. De plus, comme l'enseignante s'intéresse particulièrement aux démarches utilisées par les élèves, elle ne voit pas l'intérêt de toujours avoir recours à la calculatrice.

Enfin, ajoutons que les deux enseignantes parlent de l'idée que la matière en calcul n'est pas si difficile et que ce qui cause le plus de difficulté selon elles, ce sont les manipulations algébriques. De plus, les deux ont fait un test diagnostique pour que les élèves puissent cibler leur difficulté et ainsi, se faire aider au centre d'aide en mathématiques ou en séance d'aide individuelle avec leur enseignante. Elles utilisent également le même manuel qui définit un peu l'ordre d'introduction des différents concepts, en plus de partager tous les autres documents, travaux et examens.

4.2 Analyse des séances en classe de Louise

4.2.1 La première séance : taux de variation moyen et taux de variation instantané

Au tout début de la leçon, Louise essaie de faire fonctionner l'ordinateur, mais puisqu'elle n'y arrive pas, elle fait un retour sur les concepts étudiés depuis le début de l'année. Pendant ce résumé, elle n'écrit pas au tableau (elle essaie toujours l'ordinateur), elle ne fait que verbaliser les principaux aspects du cours jusqu'à maintenant. Elle se situe donc dans le registre verbal oral tout en évoquant d'autres registres tels les registres graphique et algébrique. Il est question, dans ce résumé, de la raison pourquoi ils ont étudié les différents types de fonctions, des notions de continuité et de limite. Le résumé fait appel à des représentations plutôt institutionnelles. En effet, lorsque Louise amène le concept de continuité, les élèves font immédiatement le lien avec les trois conditions pour qu'une fonction soit continue en un point. Le groupe commence à énumérer ces conditions, mais il s'arrête avant d'avoir donné les trois conditions parce que la conversation dévie vers des cas d'indétermination. Finalement, Louise abandonne l'idée d'utiliser l'ordinateur. Tout semble indiquer que Louise n'utilise pas très souvent l'ordinateur, et l'opportunité de donner aux élèves une idée dynamique visuelle de la dérivée n'a pas pu avoir lieu. Elle mentionne alors, qu'ils continueront le cours comme d'habitude, avec craie et tableau.

4.2.1.1 Le taux de variation moyen

Tout d'abord, on retrouve un premier exemple de conversion entre une représentation verbale orale et une représentation algébrique. En effet, Louise aborde le concept de vitesse moyenne (elle a l'intention d'utiliser un exemple du manuel en utilisant cette notion pour introduire la dérivée en un point). Une élève donne sa vision de la vitesse moyenne comme étant la distance totale sur le temps total, ce que Louise interprète comme étant la variation de la distance sur la variation du temps. Elle fait une conversion lorsqu'elle passe à une représentation verbale, mais écrite au tableau (voir figure 4.1).

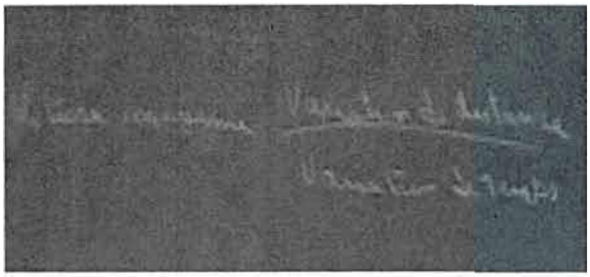


Figure 4.1: Représentation verbale écrite de la vitesse moyenne (5 :28)

Cette représentation écrite contient quelques références à une formule mathématique avec le signe d'égalité et la barre représentant une division. La dernière étape de cet épisode consiste à obtenir une représentation algébrique de ce concept. Louise demande aux élèves de lui dire le symbole qui représente une variation et celui qui représente une distance. Les élèves savent rapidement répondre que ce sont respectivement delta (Δ) et « ***s*** ». Même s'il serait aussi possible d'associer la distance au symbole ***d***, il n'est pas rare de voir, dans les manuels, ***s*** pour exprimer une position ou une distance. Elle arrive finalement à écrire la formule de la vitesse moyenne ainsi : $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

D'autre part, en plus d'effectuer une conversion entre deux ou même trois représentations, nous pouvons également remarquer une évolution du formalisme de la représentation. En effet, si la représentation en mots, qu'elle soit dite ou écrite reste une représentation informelle, la dernière représentation du concept est très institutionnalisée. On remarque également dans ce bref épisode l'absence de la représentation numérique, de la représentation tabulaire et de la représentation graphique de la vitesse moyenne. On peut imaginer que l'enseignante sait très bien ce qui s'en vient et la représentation graphique par exemple sera justement sa porte d'entrée pour débuter son exemple.

4.2.1.2 La vitesse moyenne : un exemple[6]

L'exemple introduit par Louise dans cette leçon est tiré du manuel (voir figure 4.2).

EXEMPLE 2.4

On lance une balle vers le haut à partir d'une hauteur de 1 m avec une vitesse initiale de 9,8 m/s La position de la balle (sa hauteur mesurée en mètres) t s après son lancement est donnée par la fonction $s(t) = -4,9t^2 + 9,8t + 1$ Déterminons le taux de variation moyen de la position de la balle sur l'intervalle de temps $[1;1,5]$.

On a que

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(1,5) - s(1)}{1,5 - 1} = \frac{4,675 - 5,9}{0,5} = -2,45 \text{ m/s}$$

On constate que le taux de variation moyen s'exprime ici en mètres par seconde, puisque ce taux est le quotient de Δs (la variation de la position) exprimée en mètres et de Δt (la variation du temps) exprimée en secondes. La position de la balle diminue donc, en moyenne, de 2,45 m/s sur l'intervalle $[1;1,5]$. Le taux de variation moyen de la position d'un mobile est appelé **vitesse moyenne**. On pourrait donc dire que la vitesse moyenne de la balle sur l'intervalle $[1;1,5]$ est -2,45 m/s Le négatif indique que la position (la hauteur) de la balle a diminué sur l'intervalle considéré.

Figure 4.2 : Exemple pour l'introduction du taux de variation moyen (Hamel et Amyotte, 2007, p. 69)

Nous analyserons plus en détail cet exemple plus loin dans le chapitre (voir section 4.4). Mentionnons également qu'elle ne donne pas la page de référence aux élèves. Elle veut utiliser le problème, mais ne veut pas que les élèves sachent ce qui s'en vient. D'ailleurs, elle ne fait pas exactement la même chose que dans l'exemple donné dans le manuel. En fait, le manuel calcule le taux de variation moyen sur l'intervalle [1 ; 1,5] ce qui leur donne un TVM de -2,45 m/s. L'enseignante, elle, a fait le taux de variation moyen sur l'intervalle [0,5 ; 1,5].

[6] À la suggestion d'un évaluateur, un extrait de verbatim accompagne cet épisode de la première séance de Louise (voir Annexe B).

Ce qui lui donnera finalement un TVM de 0 m/s. On peut imaginer que Louise a peut-être fait une erreur lorsqu'elle a transcrit le problème. En effet, lorsque le groupe trouve un TVM de 0 m/s, elle semble surprise. Il y a également une autre différence entre les deux traitements de cet exemple. Le manuel ne se réfère pas au graphique de la situation tandis que ce sera la porte d'entrée de Louise. Le manuel ayant traité cet exemple au préalable dans le chapitre avait bien représenté la situation graphiquement. Par contre, il n'y fait pas référence dans la poursuite de l'exemple. Finalement, l'ordre de présentation des représentations est très différent dans les deux exemples. En effet, le manuel introduit d'abord algébriquement et graphiquement, de façon générale, le concept de taux de variation moyen et il passe ensuite à l'exemple. Du côté de Louise, elle introduit algébriquement le concept de vitesse moyenne et commence avec l'exemple en variant les représentations. Elle introduit à la fin, une fois que les élèves ont pu le voir en contexte dans l'exemple, les représentations institutionnelles et générales des concepts.

Il faut également noter un élément important. Louise avait l'intention de faire l'exemple avec les élèves à l'aide de la technologie. En effet, elle avait préparé un programme Maple qui montrait la représentation graphique de la situation avec les deux points en jeu de couleurs différentes et le tout était animé. Comme nous l'avons mentionné plus tôt, cette initiative n'a pas fonctionné. Nous voulions tout de même souligner l'ouverture de l'enseignante pour l'utilisation de la technologie.

Afin de bien faire ressortir l'utilisation des différentes représentations que fait l'enseignante, voyons plus en détail la façon dont elle aborde cet exemple. Après avoir lu le problème et écrit la formule au tableau, elle entame une réflexion sur la formule. D'abord, mentionnons que la situation peut être ambigüe. En effet, le problème dit « on lance une balle vers le haut », deux visualisations sont donc possibles. On peut ici parler d'une balle lancée à la verticale ou d'une balle lancée vers le haut, mais qui suit une trajectoire courbe. La situation n'a pas été discutée et on ne sait pas vraiment l'idée que les élèves se font sur le contexte. En fait, ils sont passés directement à la représentation graphique de la fonction qui donne la hauteur de la balle à un temps donné.

Comme nous l'avons dit, nous allons analyser l'exemple donné dans le manuel. Seulement, nous voulons signaler qu'au début du manuel, les auteurs utilisent la définition de vitesse moyenne liée à la situation d'un mobile en mouvement, et quand ils reprennent le même exemple dans la section de la dérivée, ils utilisent la définition liée au vecteur vitesse moyenne qui fait appel à la notion de déplacement (voir figure 4.3). La différence n'a pas été discutée avec les élèves.


DÉFINITION

VITESSE MOYENNE

La vitesse moyenne d'un mobile est le quotient de la distance parcourue par le mobile par rapport au temps de parcours.

DÉFINITION

VITESSE MOYENNE

La vitesse moyenne d'un mobile est le taux de variation moyen de la position du mobile.

Figure 4.3: Définition de la vitesse moyenne dans le manuel Hamel et Amyotte (2007, pp. 6, 69)

Louise veut ensuite que les élèves interprètent la formule et décident si elle a du sens. Verbalement, elle les invite à observer la hauteur initiale de la balle, c'est-à-dire au temps initial de zéro. Elle ne remplace pas dans la formule tous les t par zéro (manipulation algébrique) pour obtenir finalement la bonne réponse, une hauteur de 1 mètre. Elle pense peut-être que les élèves sont capables de faire cet exercice mentalement. Ceci requiert un effort cognitif certain. Il s'agit d'effectuer une conversion de la représentation algébrique pour obtenir une représentation numérique, une transformation sur la représentation numérique pour obtenir le résultat et finalement, une coordination entre la représentation numérique et l'énoncé du problème (verbal écrit) et tout ça mentalement seulement. C'est dire qu'au moins trois registres sont impliqués en plus du contexte. Elle leur donne un indice en associant la variable t à x. Ces deux variables sont des représentations institutionnelles. Évidemment, le t qui représente le temps est admis par la communauté mathématique et la variable x représente la variable indépendante, c'est justement à cette caractéristique que Louise semble vouloir faire allusion en faisant cette comparaison.

Par la suite, elle tentera d'effectuer une conversion des représentations algébrique et verbale de la situation vers une représentation graphique. Certains élèves identifient bien la parabole. Elle leur demande alors, si elle a « besoin de la tracer du côté négatif » (voir extrait 4.1).

L : Si on regardait le graphique de cette courbe-là. Avez-vous une idée de l'allure du graphique? [Elle trace et identifie les axes.]
É3 : Une parabole.
L : Une parabole... [elle part pour aller la tracer] <u>Est-ce qu'on a besoin de la tracer du côté négatif?</u>
És : Non.
É3 : Non, à moins que tu ailles dans le sous-sol!
L : Dans le sous-sol...ben là, ton négatif des t c'est ici là [en montrant le deuxième quadrant]. Mais si elle descend dans le sous-sol, là, ce serait ça [en montrant l'axe des y dans le quatrième quadrant]. Donc, on est sûr qu'au départ, on part de 1 mètre [elle place l'ordonnée à l'origine] et elle va avoir [elle trace la parabole] cette allure-là. Et ça, si vous auriez vu, c'était très beau avec Maple. Vraiment magnifique, mais... Il faut s'organiser avec la main. Ici, on va avoir notre deux [elle écrit l'échelle du graphique], ici on va avoir trois, ici on va avoir un.

Extrait 4.1: Conversion vers la représentation graphique de l'exemple (7 :03)

Cette question peut amener une confusion du côté des élèves. Qu'est-ce qu'elle veut savoir ici? La courbe est tournée vers le bas (côté négatif) ou la courbe a des coordonnées négatives (les quadrants du plan cartésien en jeu dans la situation)? Une intervention d'un élève nous fait comprendre qu'il a en tête pour sa part la position de la courbe dans le plan cartésien. Pour lui répondre, Louise effectue déjà une coordination entre la représentation graphique et l'énoncé de la situation. Elle interprète, suite à l'intervention de l'élève qui parle de la position de la personne qui lance la balle (« à moins que tu ailles dans le sous-sol »), ce que représente graphiquement « être dans le sous-sol ». En amenant l'idée du « sous-sol », on peut penser que l'élève parle de la position de la personne qui lance la balle plutôt que de la position de la balle. Il dit : « Non, à moins que TU AILLES dans le sous-sol! » Pourtant, la situation est indépendante de la position du lanceur, une personne lance une balle vers le haut à partir d'un mètre, peu importe où cette personne est placée. Dans son explication, l'enseignante a probablement supposé que l'élève parle encore de la position de la balle et interprète donc les paroles de ce dernier comme l'idée de placer l'origine au rez-de-chaussée et que la balle en tombant peut continuer jusque dans le sous-sol. Ce sont deux situations différentes.

Finalement, elle trace le graphique assez rapidement mettant l'accent sur l'ordonnée à l'origine qui est à **1** (voir figure 4.4). Ensuite, elle écrit l'échelle de l'axe horizontal en prenant soin de placer le zéro de la fonction entre deux et trois et le sommet est à vis-à-vis x=1. Une fois que les élèves ont reconnu au départ la formule d'une parabole, Louise trace l'allure du graphique en tenant compte des informations données par la formule et l'énoncé de la situation. Par contre, il faut mentionner que ces informations sont prises en compte de façon plutôt implicite, c'est-à-dire que Louise n'explique pas comment elle fait pour tracer la courbe. La conversion qu'elle effectue comporte alors des sous-entendus.

Figure 4.4: Représentation graphique de l'exemple (7 :54)

Certes, la représentation graphique est propre à la situation et a été faite selon les règles de l'art dictées par l'institution, mais on peut se demander si cela est clair pour les élèves. On peut penser qu'ils ont déjà travaillé les types de fonctions au début de la session et que Louise suppose qu'ils sont à l'aise avec ce genre de conversion, mais rien ne nous l'assure.

Ensuite, elle commence une série de conversions entre toutes les représentations de l'exemple pour trouver une vitesse moyenne et par le fait même, pousser le concept plus loin. Elle arrive donc à trouver un taux de variation moyen en demeurant dans l'exemple (elle généralisera le concept tout de suite après, mais nous analyserons cette partie plus loin). La question qu'elle pose est claire : on cherche la vitesse moyenne (concept déjà introduit au préalable) pour un intervalle de temps donné soit [0,5 ; 1,5]. Elle fait tout de même une première conversion (représentation verbale orale à écrite) en transcrivant sa question au tableau et en ayant recours à un certain symbolisme mathématique, celui de l'intervalle. Elle utilise ensuite une représentation graphique (voir extrait 4.2). Elle délaisse assez rapidement la représentation graphique pour retourner vers la représentation algébrique.

L : Si je vous demandais <u>graphiquement</u>, à quelle hauteur était la balle, lorsqu'il y avait point cinq [0,5] seconde d'écoulé?

É1 : On remplace les t par point cinq [0,5].

L : Graphiquement? On va venir ici, à point cinq [0,5], la hauteur de la balle serait [elle trace le point (0,5, s(0,5)) dans le graphique], ça ici. D'accord avec moi?

És : Oui.

L : À un point cinq [1,5], on va être ici [elle trace le point (1,5, s(1,5))]. Vous imaginez que c'est très bien tracé! Ce point-là [(0,5, s(0,5))], il était rouge et ce point-là [(1,5, s(1,5))], il était bleu. C'était cute! Quand je vais calculer la vitesse moyenne, <u>qu'est-ce que je vais faire pour calculer la vitesse moyenne?</u>

É3 : <u>On relie les deux points.</u>

L : <u>Eh, au niveau algébrique.</u>

Extrait 4.2: Début de la recherche d'une vitesse moyenne (8 :12)

D'ailleurs, on peut voir que certains élèves ont de la difficulté à la suivre. En effet, elle demande de penser au niveau graphique et pose la question « [...] qu'est-ce que je vais faire pour calculer la vitesse moyenne ?». Une élève répond par rapport au graphique. Elle parle de relier les points, ce qui est une idée intéressante puisqu'on fait le lien entre la vitesse moyenne et la droite qui relie les deux bornes de l'intervalle. Par contre, Louise la ramène au niveau algébrique. On peut penser que pour Louise, le mot « calculer », qu'elle a utilisé dans sa question, réfère au registre algébrique de façon implicite évidemment. D'ailleurs, nous verrons plus tard que lorsqu'elle demande aux élèves de calculer une dérivée, la plupart se réfère à une représentation algébrique.

Elle trouve finalement chez les élèves la réponse qu'elle attendait, la formule : variation de distance sur variation de temps. Notons que cette fois, les élèves parlent bel et bien de variation. On peut penser qu'ils ont adopté la représentation institutionnelle de la formule pour la vitesse moyenne du mouvement d'un mobile (mouvement d'une automobile, par exemple) et l'utilise pour la nouvelle situation du mouvement vertical. Puis, elle retourne sur le graphique pour mettre en évidence les variations (voir figure 4.5) au moyen de marches d'accroissements propres à l'étude du taux de variation d'une fonction. Ces va-et-vient entre les différentes représentations peuvent être nommés coordination des représentations de la part de l'enseignante. On se demande si cette coordination peut être suivie par les élèves. Sont-ils capables de faire ces allers-retours aussi rapidement que Louise?

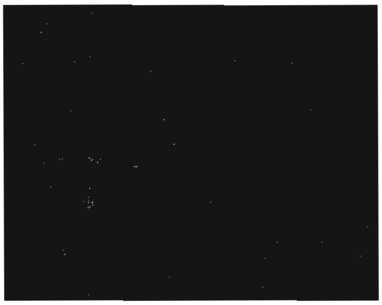


Figure 4.5: Manipulation sur la représentation graphique (9 :22)

Par la suite, elle va faire la conversion à partir de deux représentations (graphique et algébrique) vers une représentation numérique afin d'obtenir le résultat pour la vitesse moyenne dans l'intervalle donné. Avant de passer aux calculs, elle introduit le concept plus général de la vitesse moyenne, soit le taux de variation moyen ou le TVM. On ne peut pas vraiment parler d'une conversion ici puisque Louise ne fait que sortir du contexte pour avoir un terme plus général. Au sens de Duval, on appellerait cet exercice une interprétation. Il est toujours intéressant cependant de remarquer que Louise a un souci de généralisation. Elle passe d'une représentation plus informelle (dans le contexte de la vitesse[7]) vers une représentation institutionnelle.

Après que les élèves aient calculé la vitesse moyenne, on voit un exemple de coordination entre la représentation graphique et la représentation numérique. Dès qu'elle obtient le TVM qui est de 0 m/s, elle va directement ajuster son graphique en conséquence. Elle le fait à haute voix (représentation verbale orale), même si elle n'explicite pas vraiment le processus. On peut en déduire qu'il est important pour elle que le graphique représente la situation de façon juste. Après, elle replace le point à nouveau en disant « qu'il n'a pas d'allure là » (voir extrait 4.3). Cependant, Louise ne revient pas à une interprétation dans le contexte du problème ; que fait un TVM=0 pour les points choisis? Le sous-entendu dans cette coordination est que le taux de variation moyen nul représente une pente nulle (liée à la sécante qui est la droite horizontale) entre les deux bornes de l'intervalle. Cependant, les élèves ne connaissent pas encore cette représentation du TVM et Louise a pour objectif de leur faire découvrir. Il est donc primordial, pour ce qui s'en vient, que la pente sur le graphique soit en accord avec le résultat obtenu pour le TVM, mais dans le présent, cela fait une manipulation difficile à suivre pour les élèves.

L : Ça veut dire ici que mon point, probablement que mon un point cinq là [1,5], il serait comme ça ici [elle ajuste son graphique]. La droite, elle serait horizontale. [pause] Ce qui nous fait une vitesse moyenne de zéro. Quelles sont les unités? La distance, elle est en... mètre et le temps, il est en seconde. Zéro mètre seconde. Est-ce que ça l'a du sens? Je vais replacer mon point ici, parce que là, <u>on voit bien que mon point, il n'a pas d'allure là.</u> Le point, il va être comme ça [elle réajuste encore son graphique]. Bel exemple! Qu'est-ce que ça veut dire ça? Si je vous demande, le zéro, qu'est-ce qu'il représente?

Extrait 4.3: Coordination des représentations numérique et graphique (12 :08)

Il s'agissait ensuite de pouvoir comprendre ce que représente ce 0 m/s. Une élève répond : « Quand la vitesse est constante. » Nous pensons que cette réponse vient du fait que

[7] Cette représentation reste tout même près d'une représentation institutionnelle puisque ce contexte est très utilisé dans les manuels et que le taux de variation moyen est souvent comparé à la vitesse moyenne.

l'élève a essayé de faire une liaison entre les différentes représentations graphique, numérique et verbale dans le contexte. Il est vrai qu'un taux de variation nul ou une pente horizontale sont souvent associés, dans ce contexte, à une vitesse constante. Probablement que l'enseignante cherche « la pente » comme réponse (représentation institutionnelle) et comme la réponse de l'élève est plus intuitive, moins formelle, l'enseignante continue de chercher. Le problème est qu'ils font une interprétation de la vitesse moyenne dans le contexte d'un mobile en mouvement qui ne suivrait pas nécessairement une trajectoire verticale. Tout semble indiquer que Louise et les élèves ne font pas attention au contexte.

Comme la réponse qù'elle semble attendre ne vient pas, elle décide de faire intervenir une nouvelle représentation graphique. Elle trace une nouvelle droite sécante avec une pente qui pourrait se rapprocher de deux. En bref, le concept de « pente » est plus évident à voir sur cette dernière représentation. Les élèves font finalement le lien très peu de temps après que la seconde droite ait été tracée. Bien sûr, en plus de la pente plus accentuée sur la deuxième droite, la comparaison des deux fournissait aussi un indice. La caractéristique qui a changé entre les deux droites, c'est l'inclinaison ou la pente. Nous pouvons peut-être croire que les élèves ont davantage coordonné deux représentations du même registre (comparaison des droites) que fait une réelle coordination entre le registre numérique et graphique. Tout de même, l'idée d'association entre le zéro et la droite horizontale et entre le deux et la droite inclinée est bien présente. S'ils ne l'ont pas fait sur le champ, l'idée pourra leur rester en tête.

En espérant rappeler le concept de droite sécante rapidement, Louise utilise une représentation verbale. En effet, elle leur demande comment on nomme une droite qui passe par deux points. Il y a évidemment plusieurs réponses possibles à cette question. Lorsqu'elle se rend compte du silence des élèves, elle raffine sa représentation (transformation dans le même registre) et parle plutôt « d'une droite qui coupe une courbe en deux points ». Les élèves reconnaissent immédiatement le concept et donnent à Louise la représentation institutionnelle qu'elle cherchait : la droite sécante. On remarque que ce changement subtil de la représentation verbale donne un tout nouveau sens à cette dernière.

Le moment est venu pour Louise de faire un petit résumé de la leçon. Nous avons remarqué qu'elle a souvent recours à ce genre de court sommaire. Nous croyons que c'est une façon pour elle d'assurer une certaine structure à la leçon qui lui sert à elle, mais aussi aux élèves. Dans ce résumé, elle revient sur les principales représentations utilisées jusqu'à maintenant pour parler de taux de variation moyen (voir extrait 4.4). Bien sûr, le registre verbal oral demeure dominant dans ce résumé.

L : [...] Donc, le taux de variation moyen [elle souligne TVM au tableau et montre la formule], qui représente en physique la notion de vitesse moyenne, représente graphiquement la pente de cette sécante-là [en pointant la droite sécante sur le graphique]. Est-ce que ça va pour ce concept-là?

É3 : Oui.

L : C'est clair pour tout le monde? Ça fait que si je vous demande de me calculer un TVM, si je vous demande de calculer la vitesse moyenne, si je vous demande de calculer la pente de la sécante... c'est la même chose.

Extrait 4.4: Premier résumé de l'exemple (13 :44)

En effet, Louise utilise tous les synonymes possibles pour représenter le taux de variation moyen. Par contre, nous pensons que pour elle certains mots (oral ou écrit) font références à différents registres. Par exemple, on peut penser que la pente est un terme fortement associé au registre graphique. En parlant de la pente, nous croyons qu'elle veut amener l'image mentale de la représentation graphique du TVM (elle dit en fait : « [ça] représente graphiquement la pente de cette sécante-là »). Aussi, comme nous l'avons dit précédemment, on peut croire que le mot « calculer » est lié au registre algébrique, aux formules et équations d'un concept. Ainsi, lorsqu'elle ajoute ce verbe dans ses questions, elle évoquerait la représentation algébrique du concept. Évidemment, tout ceci est implicite et fait partie des sous-entendus du discours de l'enseignante.

4.2.1.3 Généralisation : le taux de variation moyen

Après avoir fait ce résumé, Louise passe à l'étape de généralisation du concept de taux de variation moyen. Dans cet épisode, les représentations institutionnelles sont à l'honneur. En effet, elle cherchera à rendre la représentation, d'abord algébrique, la plus formelle possible. C'est pourquoi elle passe de la fonction $s(t)$ à la fonction $f(x)$, de l'intervalle [0,5 ; 1,5] à l'intervalle [a; b]. Elle introduit également la notation avec l'intervalle en indice : « $TVM_{[a;b]} =$ ». Dans ce cas, on peut parler de transformation à l'intérieur du même registre, mais pas de conversion puisqu'on ne fait finalement qu'un changement de contexte. Avec l'aide des élèves, elle obtient finalement sa représentation algébrique formelle et générale. Elle passe ensuite à la représentation graphique (générale). En fait, elle y fait référence en utilisant la représentation verbale orale « ça représente la pente de la sécante ». Ici, encore une fois, elle rend clair le lien qu'elle fait entre cette représentation verbale et le registre graphique en posant la question : « Et si je vous demande, géométriquement ou graphiquement, qu'est-ce que ça représente? » Et elle y répond par : « Ça représente la « pente de sécante» ». Elle ne refait pas une représentation graphique en lien avec la nouvelle représentation algébrique qu'elle a obtenue, mais elle précise tout de même que celle qui est au tableau est une représentation particulière, pour un contexte donné.

Avant de passer au concept de vitesse instantanée, Louise dit quelque chose d'intéressant. Pour s'assurer de la compréhension des élèves sur ce qu'ils viennent de voir elle dit : « Ça va le parallèle entre les deux? » Cette phrase est très riche pour nous. Elle peut évoquer deux éléments. Le premier fait référence au travail fait en contexte versus le concept plus général. Elle veut peut-être s'assurer que le parallèle entre ce qu'ils ont vu dans un contexte particulier et le concept en général a bien été fait. D'un autre côté, il est peut-être également question, implicitement, du parallèle entre les représentations. Elle cherche peut-être à savoir si les élèves ont bien fait le parallèle entre les synonymes (représentations verbales), la représentation graphique et les représentations algébriques qu'elle a utilisées. Les deux hypothèses peuvent paraître semblables, mais nous croyons qu'il existe une différence entre évoquer un parallèle entre un cas particulier et une généralisation et évoquer un parallèle entre les différentes représentations d'un concept. Nous ne pouvons cependant pas être certains de ce que Louise évoquait vraiment en disant cette phrase.

4.2.1.4 La vitesse instantanée : un exemple

Dans les prochaines minutes de sa leçon, Louise utilisera le même exemple qu'auparavant, mais cette fois pour introduire le concept de taux de variation instantané. Elle commence en évoquant une représentation verbale plus intuitive du concept (elle ne donne pas tout de suite le nom formel). Elle parle de calculer la vitesse précise en un point. Même si un élève parle de la tangente, Louise ignore sa réponse et se tourne vers la représentation graphique. C'est à ce moment que commence un autre épisode où représentations graphique, verbale, algébrique et gestuelle se côtoient.

Elle va d'abord tenter de rapprocher le point qui était à (1,5, s(1,5)) plus près de (0,5, s(0,5)). Elle déplace donc le point directement sur la courbe du graphique. Ensuite, Louise va commencer à utiliser le vocabulaire lié au concept de limite. Elle explique qu'elle veut se rapprocher de plus en plus près de ce point ((0,5, s(0,5)). Plus tard, elle déplace le point une fois de plus, mais cette fois, elle le fait varier directement sur l'axe horizontal plutôt que sur la courbe. Elle veut peut-être expliciter la variation du temps. Ceci consiste en une coordination des registres verbal et graphique appuyée par des gestes. Elle demande alors aux élèves, comment elle pourrait nommer le point qu'elle a placé tout près du point fixe (0,5, s(0,5)) (voir extrait 4.5).

L : Si maintenant, je voulais vraiment évaluer le point presque rendu dessus [le point (0,5, s(0,5))]...Qu'est-ce qui se passe au niveau du delta t si je me rapproche de plus en plus près?

É3 : Il va être petit.

L : Il va être petit. Le delta t va être petit donc il va tendre vers...

É1 : Zéro point cinq un petit peu plus!

L : Le delta t lui...

É2 : Il va tendre vers zéro.
L : Il va tendre vers zéro. Ça fait que si je voulais avoir la « vitesse instantanée » donc au point, point cinq, qu'est-ce que je vais utiliser comme concept vous pensez?

Extrait 4.5: Infini potentiel versus infini actuel (17 :49)

L'enseignante, au moment de verbaliser la situation, utilise l'infini potentiel : « Qu'est-ce qui se passe au niveau du delta t si je me rapproche de plus en plus près? »; et à la fin de cet extrait, elle mentionne la vitesse instantanée liée à l'infini actuel. Il est clair que dans la communication orale on ne peut pas échapper à l'utilisation de l'infini potentiel. Nous pouvons alors nous demander si les élèves peuvent se rendre compte de cette subtile différence de point de vue.

Elle cherche à effectuer une conversion à partir des représentations graphique et verbale vers une représentation algébrique. Un élève évoque le concept de limite, mais elle ne veut pas tout de suite aller vers cette représentation. Elle cherche les coordonnées du point. Elle commence même à faire la représentation en disant « 0,5 plus… ». Un élève ajoute que ça dépend. Elle utilise immédiatement cette réponse pour rejoindre l'idée de variation. Une élève semble aller un peu plus loin en donnant une représentation fonctionnelle de ce que l'enseignante cherche : « 0,5 et un petit peu plus. » Voilà un indice qui nous permet de penser que cette élève conçoit la limite comme inatteignable. Une conception assez répandue d'ailleurs chez les élèves (Hitt, 2003; Hitt, 2006; Sierpinska, 1985; Odierna, 2004). Par ailleurs, on voit que l'élève a une confusion entre 0,5+Δt et Δt. On pourrait aussi lier son raisonnement au concept d'infini potentiel : un processus qui se poursuit à l'infini sans jamais atteindre la limite. Louise va donc transformer le « petit peu plus» de l'élève en représentation formelle, $0{,}5+\Delta t$. Nous venons de voir une conversion du registre verbal (appuyée par le registre graphique) vers une représentation algébrique, et ce, à travers plusieurs transformations à l'intérieur du registre verbal (de fonctionnelle à formelle) avant d'arriver à un début d'une représentation algébrique.

La classe en est donc à la notation de l'intervalle [0,5 ; 0,5+ Δt], quand Louise ajoute l'idée de calculer le TVM sur cet intervalle. C'est sans trop de difficulté qu'ils arrivent à la formule nécessaire (voir figure 4.6).

Figure 4.6: Vers une représentation algébrique de la vitesse instantanée (17 :51)

Mais ce n'est pas tout, ce TVM n'est pas vraiment ce qu'ils cherchent. Rappelons que Louise veut trouver la vitesse précise en un point. C'est avec cette idée qu'elle pose la question : « Si maintenant, je voulais vraiment évaluer le point presque rendu dessus [le point fixe (0,5, s(0,5))]...Qu'est-ce qui se passe au niveau du delta t si je me rapproche de plus en plus près? » Encore une fois, on reconnaît bien le vocabulaire lié au concept de limite : « presque rendu dessus », « rapproche de plus en plus près ». On peut également penser qu'elle essaie de rendre clair le fait que ce sera la limite de Δt puisqu'elle dit explicitement « ce qui se passe au niveau du delta t ». Quand une élève parle du point qui se rapproche, Louise remet l'accent sur le delta t. Finalement, un élève répond avec le vocabulaire probablement attendu par Louise « tend vers zéro ». C'est à ce moment que Louise introduit une nouvelle représentation verbale, la vitesse instantanée pour amener les élèves vers la représentation formelle du concept sous-entendu, la limite. Il s'en suit une gymnastique algébrique pour arriver à la représentation algébrique en contexte de la vitesse instantanée et finalement obtenir la représentation générale verbale, le taux de variation instantané ou TVI (voir figure 4.7).

Figure 4.7: Représentation en contexte du taux de variation instantané (19 :33)

4.2.1.5 Le calcul d'une vitesse instantanée : une limite

Le prochain épisode de la séance est consacré à la résolution de ce taux de variation instantanée au point (0,5, (s(0,5)). D'abord, l'enseignante demande aux élèves de résoudre le problème par eux-mêmes pendant qu'elle circule dans la classe. Par contre, on remarque que pendant ce temps accordé au travail personnel et en équipe, Louise fait plusieurs interventions. À peine une minute après le début de l'épisode, elle rappelle au groupe qu'ils ont déjà travaillé ce genre de limite et la première chose qu'ils avaient à faire était « d'aller chercher les valeurs pour chacune des fonctions dans ces points-là».

Un moment intéressant de cet épisode est quand elle voit que certains élèves sont bloqués à l'évaluation de s(0,5+Δt). Elle prend alors la parole (intervention #2) pour leur rappeler « la notion de boîte». Elle propose aux élèves d'évaluer d'abord **s** de boîte (s(□)). On voit l'utilisation de cette méthode le plus souvent au début du secondaire pour aider les élèves à apprendre à manipuler des expressions algébriques. Nous devons avouer que nous étions quand même surprise que l'enseignante ait recours à cette façon de faire pour des élèves du Cégep. Nous avons un bon indice que les élèves ont beaucoup de difficultés non seulement à faire des manipulations algébriques, mais nous dirions même avec leur compréhension conceptuelle de ce que représente la variable **t** dans une fonction **s(t)**. Effectivement, la difficulté ne relève pas seulement d'une manipulation, mais également de remplacer le **t** par le **0,5**+Δ**t**. Ceci demande une conversion à l'intérieur du même registre (au-delà du traitement) que les élèves ont de la difficulté à mener. Finalement, elle obtient la fonction **s**(□) avec les boîtes remplies par le (0,5 +Δt) (voir figure 4.8) et elle les laisse travailler avec cette expression.

Figure 4.8: Traitement de s(0,5+Δt) (22 :32)

Dans cet extrait, nous pouvons pratiquement parler d'un retour en arrière en ce qui a trait aux représentations. En effet, elle commence avec une représentation très formelle et elle crée une nouvelle représentation (celle avec la boîte) qui est plus fonctionnelle. L'enseignante semblait cependant préparée à rencontrer ce type de difficulté chez les élèves.

Plus tard, il y a un autre moment intéressant, initié par un élève. Celui-ci demande à Louise si la réponse pourra être la même que celle obtenue précédemment lors du calcul du TVM soit 0 m/s (voir extrait 4.6).

É3 : Madame? Ça veut-tu dire que ça va donner la même réponse que tantôt?
L : Mmm!
É10 : Mais tout est dans la pente!
L : Mmm, non! Ça me surprendrait. Est-ce que ça pourrait donner zéro comme réponse parce que tantôt ici [le calcul précédent], ça nous a donné zéro là. Est-ce que vous pensez que ça pourrait donner zéro comme réponse?
É3 : Ben non!
L : Parce que qu'est-ce que ça va représenter vous pensez?
É3 : Ben où tu l'as lancé!
L : Non, la balle elle est rendue ici [à (0,5, s(0,5))]. Qu'est-ce que ça va représenter?
É9 : Ben, la balle est lancée…
L : [Elle trace la tangente au point (0,5, s(0,5))]. Là, vous imaginez que c'est comme ça, je ne touche pas là mais… Qu'est-ce que ça représente cette droite-là?
É1 : Une tangente.
L : Une tangente. Donc, quand je vais faire ce calcul-là [elle pointe la formule du TVI au tableau], ça va me donner la PENTE de cette tangente-là [elle pointe la droite tangente au tableau.] Est-ce que c'est zéro la pente de cette tangente-là?
És : Non.
L : Donc, je suis sûr que ce ne me donnera pas zéro. Je suis certaine que cette réponse-là [en pointant la limite (TVI)] ce ne sera pas zéro.

Extrait 4.6: Anticipation de la réponse (23 :20)

Un élève répond rapidement et un peu naïvement, à notre avis, que « tout est dans la pente! ». L'enseignante pose alors la question au reste de la classe. Même si les élèves répondent que non, elle continue son investigation, pour pouvoir donner la raison pourquoi ce ne sera pas zéro. Elle les amène sur la réflexion de ce que va « représenter» la réponse. La représentation mentale de celui qui a posé la question se clarifie un peu lorsqu'il répond que ça donnera l'endroit où nous avons lancé la balle. Il y a plusieurs éléments que nous pourrions interpréter avec cette réponse. L'élève associe le taux de variation instantané à l'endroit où nous lançons la balle et il pense que cet endroit pourrait être zéro. Ses représentations semblent confuses. Dans cet extrait, nous pouvons constater que les élèves font un effort pour donner une réponse en contexte. Louise reste dans la représentation graphique pour donner une interprétation visuelle de la dérivée comme la pente de la tangente sans vraiment revenir au contexte.

Enfin, Louise répond à l'élève que la balle a déjà été lancée et elle pointe aussi l'endroit où elle est rendue sur le graphique et continue de chercher une réponse à sa question : pourquoi ce ne sera pas zéro? Elle se tourne vers la représentation graphique et directement, elle trace la droite tangente au point (0,5, s(0,5)). D'abord, les élèves semblent reconnaître que cette droite représente bien la droite tangente. Après, Louise effectue la coordination de façon explicite en reliant la réponse aux calculs qu'ils sont en train de mener à la pente de la tangente qu'elle vient de tracer et ce toujours hors-contexte. On peut alors se demander : Qu'est-ce que zéro représenterait dans ce contexte? Une vitesse en un point qui serait zéro, ça voudrait dire quoi? De plus, dans cet épisode, Louise soulève implicitement la validation à l'aide du graphique en montrant que la pente ne sera pas zéro.

Après leur avoir laissé un peu plus de temps pour évaluer la limite, elle le fait avec eux. Elle commence par faire quelques traitements sur la représentation algébrique. En effet, elle remplace le $s(0,5+\Delta t)$ et $s(0,5)$ par leur évaluation respective dans la fonction s. Ce qui la mène vers une nouvelle représentation algébrique (de transition) (voir figure 4.9).

Figure 4.9:Vers l'évaluation de la limite (26 :36)

Notons également que lors de la production de la nouvelle représentation, Louise n'a pas mis le symbole de limite au départ. C'est une fois que le rapport a été écrit qu'elle a ajouté la limite. Une fois arrivée à cette représentation, une élève demande à Louise de faire avec eux l'évaluation de $s(0,5+\Delta t)$. Alors, Louise retourne vers l'expression avec la boîte dont nous avons parlé plus tôt (voir figure 4.8) et fait plusieurs manipulations algébriques. Une chose intéressante est qu'elle a recours à la multiplication verticale (nouvelle représentation algébrique) pour calculer $\mathbf{(0,5+\Delta t)^2}$.

Ils reviennent par la suite à leur expression de la limite (voir figure 4.9) pour poursuivre avec son évaluation. Cet épisode (voir extrait 4.7) est particulièrement intéressant au niveau des représentations du concept de limite et d'infini par l'enseignante. En effet, Louise fait un processus mental d'évaluation de la limite. Ce processus est une prédiction de la limite (en remplaçant le $\mathbf{\Delta t}$ par zéro) qui servira à savoir comment l'évaluer par la suite. Cette anticipation est bien sûr, une représentation informelle puisqu'on ne peut pas formellement remplacer le $\mathbf{\Delta t}$ par zéro. Par contre, le caractère « informel » de cette manipulation n'est pas vraiment explicité aux élèves. On peut donc voir l'utilisation de représentation algébrique erronée :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{-4{,}9(\Delta t)^2 + 4{,}9\Delta t + 4{,}675 - 4{,}675}{\Delta t} = \frac{0}{0}$$

Par contre, même si nous voulions expliciter ce phénomène aux élèves de façon formelle, ceux-ci n'ont pas les outils nécessaires pour pouvoir comprendre les représentations formelles (impliquant ε et δ). En revanche, Louise utilise un processus de prédiction de la limite sans rendre compte de son caractère informelle.

L : Qu'est-ce qu'on peut faire avec notre équation ici [$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{-4{,}9(\Delta t)^2 + 4{,}9\Delta t + 4{,}675 - 4{,}675}{\Delta t}$]? [pause] Si je remplace mon delta t par zéro, qu'est-ce que ça va me faire?

É3 : Ben, quelque chose qui ne se peut pas.

L : Quelque chose qui ne se peut pas...

É3 : Une indétermination.

L : Zéro sur zéro [elle écrit : ...=$\frac{0}{0}$ et C.I.] qui est un cas d'indétermination. Qu'est-ce qu'il faut faire avec ce cas d'indétermination là?

É4 : [inaudible]

L : Donc, mettre le delta t...en évidence. Si on met delta t en évidence...[elle efface une partie du tableau, mais elle garde le graphique et les formules de TVM et de TVI.] Ça va me donner la limite lorsque delta t tend vers zéro [$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta t$ ...]...si on met le delta t en évidence, qu'est-ce que ça donne? Moins quatre point neuf delta t plus quatre point neuf sur delta t [$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta t \frac{-4{,}9\Delta t + 4{,}9}{\Delta t}$]. Qu'est-ce qu'on peut faire avec ça?

É5 : Annuler les deltas t.

L : Simplifier les deltas t. [Elle trace un trait sur les deltas t dans l'équation.] Et quand on passe à la limite...Qu'est-ce que ça va me donner comme réponse?

É1 : Quatre point neuf [4,9].

L : Quatre point neuf! [Elle écrit ...=4,9 au bout de l'équation.]

Extrait 4.7: Évaluation de la limite (28 :00)

En effet, elle dit qu'elle remplace le Δ**t** par zéro, elle égalise même l'expression de la limite à l'indétermination $\frac{0}{0}$ sans mentionner que cette notation permet l'anticipation d'un résultat qui ne représente pas un nombre et qu'il faut utiliser une certaine méthode (certaines manipulations algébriques) pour arriver à un résultat. Par contre, elle écrit l'inscription C.I.[8] à côté du $\frac{0}{0}$. Peut-être est-ce pour elle un signe que le travail n'est pas terminé ou une façon d'expliciter le fait que cette expression est « spéciale ». On peut penser que l'élève s'autorisera donc à traiter **Δt** comme étant égal à zéro. Ainsi, lorsqu'elle évalue la limite pour la deuxième fois (une fois que des **Δt** ont été simplifiés), elle arrive à **4,9**, mais pourquoi? Si on suit les représentations données par l'enseignante, la réponse est **4,9** parce que **Δt** est égal à zéro et non parce que $\lim_{\Delta t \to 0} 4{,}9\Delta t = 0$. Précisons une fois de plus que les élèves ne pourraient pas, à ce niveau, travailler avec la représentation formelle. Ce que nous avançons ici, c'est qu'ils sont obligés de travailler avec ce type de représentations informelles, mais qu'ils pourraient être conscients du caractère informelle de ces dernières pour semer l'idée que le processus de calcul de la limite ne relève pas que d'une substitution.

Par la suite, Louise se questionne sur la validité de la réponse. Ici, sa façon de revenir au contexte est de préciser les unités de mesure de la réponse (mètre/seconde). Elle demande ce que cette réponse représente. Au fond elle cherche (et obtient) la représentation verbale formelle, la vitesse instantanée et une référence à la représentation graphique formelle, la pente de la droite tangente. Louise essaie aussi de valider la réponse à l'aide de la représentation graphique en comparant le signe de la pente (sur le graphique) et le signe de la réponse obtenue. Elle suggère également aux élèves de se donner « des références pour vérifier si ça fonctionne». Nous interprétons cette invitation donnée aux élèves comme la promotion de la coordination entre différentes représentations. Il est vrai que pour Louise, une telle coordination semble surtout utile pour une validation, quand, en fait, ce pourrait être fait avant, pendant et après la résolution d'un problème.

[8] Pour Cas d'Indétermination.

4.2.1.6 Généralisation du concept de vitesse instantanée : le taux de variation instantané

Après que les élèves aient trouvé la vitesse instantanée dans l'exemple donné, Louise procède à une généralisation du concept. Ici, l'exercice relève beaucoup plus de l'interprétation que d'une réelle conversion. Il s'agit de remplacer la fonction $s(t)$ par la fonction $f(x)$ et les points donnés par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Certes la représentation algébrique devient de cette façon plus institutionnelle, mais il s'agit plus d'une révision de ce qu'ils viennent de voir. D'autant plus que l'utilisation de l'exemple demeurait déjà un peu éloignée de son contexte.

Louise poursuit avec un résumé des représentations du taux de variation instantané. Elle commence par des représentations verbales en utilisant toujours des synonymes du concept pour en parler : Taux de variation instantané, TVI. Elle compare aussi les représentations, verbalement, de deux concepts différents, le TVM, qui est sur un intervalle et le TVI qui est en un point précis. Louise évoque également la représentation algébrique du TVI verbalement. Elle dit la formule en mots et elle ajoute la limite de Δx tend vers zéro seulement à la fin. Ensuite, Louise rappelle la représentation graphique du TVI. Elle doit d'ailleurs reprendre un élève qui voit la dérivée comme la tangente, l'enseignante précise qu'il s'agit de la pente de la tangente. Encore une fois, la représentation graphique n'apparaît pas dans le résumé, elle ne fait qu'appel à la représentation mentale de celui-ci. Elle ajoute cependant au tableau que la formule algébrique implique (voir figure 4.10) la pente de la tangente.

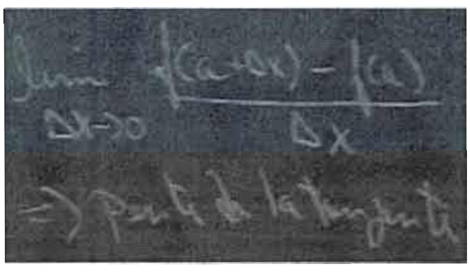


Figure 4.10: Résumé du concept de taux de variation instantané (32:05)

Il est difficile d'expliquer pourquoi Louise décide d'utiliser le symbole d'implication à ce moment. Nous ne savons pas si elle l'utilise comme une flèche sans vraiment considérer le sens mathématique de ce signe ou si elle l'utilise justement pour le sens mathématique qu'il représente. Elle semble utiliser ce symbole, qu'elle reprend d'ailleurs à quelques reprises dans cet épisode, afin de marquer l'équivalence entre les différentes représentations. Dans ce cas, si elle cherche à utiliser un symbole mathématique pour la représentation verbale écrite, elle devrait opter pour l'égalité ou la double implication qui serait mathématiquement en cohérence avec ce qu'elle veut dire. C'est également à ce moment qu'elle introduit une nouvelle représentation verbale du concept en question, la dérivée (qu'elle écrit au tableau avec le symbole d'implication). Elle en profite pour rappeler certains synonymes du concept : « Donc, quand on vous demande de calculer une dérivée en un point, c'est qu'on vous demande de calculer le taux de variation instantané, c'est qu'on vous demande de calculer la pente de la tangente. C'est ça une dérivée. » Louise donne aussi la notation de la dérivée « f prime de a » ($f'(a)$), une nouvelle représentation algébrique, tout en précisant qu'il y aura d'autres notations qu'ils verront plus tard. Finalement, pour la troisième fois dans ce court épisode (environ 2 minutes), elle répète les différentes représentations verbales et évoque la représentation graphique (dérivée, TVI, taux de variation instantané, pente de tangente). Remarquons que le contexte (vitesse) n'est pas mentionné par Louise. Tout semble indiquer que ce qui est important, c'est d'arriver à la formule $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ et à une interprétation visuelle comme par exemple, le calcul de la pente de la tangente à la courbe en x.

Afin d'obtenir une autre représentation institutionnalisée, elle remplace le Δ**x** dans la représentation algébrique par **h**. En fait, elle commence en disant que l'écriture avec Δ**x** n'est pas toujours évidente, donc pour faciliter la manipulation, on le remplace par **h**. Et elle écrit au tableau « $\Delta \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{h}$ ». On remarque l'utilisation du symbole d'implication. En fait, elle veut probablement dire que Δx est équivalent à h et non que Δx implique h. En effet, Δx représente une incrémentation à partir de x et h n'est pas lié explicitement à x.

Elle produit tout de suite une nouvelle représentation algébrique pour la dérivée, c'est-à-dire $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Elle fait aussi encore une fois référence au registre graphique en parlant de la pente de la tangente au point x égal à a (ce qui devrait être en fait le point (a, f(a))).

4.2.1.7 Un premier essai

Le dernier épisode de cette séance consiste en un exercice que Louise donne pour que les élèves essaient de calculer une dérivée. Elle leur donne l'exercice suivant, en leur annonçant que c'est un exercice facile: si on a la fonction $f(x)=x^2-1$, calculer $f'(3)$. En énonçant l'exercice, Louise en profite pour rappeler les différentes représentations verbales du concept en jeu (ce qu'elle fait souvent) tout en donnant une représentation écrite (voir extrait 4.8) :

> L : [...] Et je vous demande de me calculer f prime de trois [$f'(3)$]. J'aurais pu vous demander, calculez-moi le taux de variation instantané lorsque x égal à trois. J'aurais pu aussi vous demander; donnez-moi la pente de la tangente qui passe par le point trois f de trois. Toutes ces questions-là, c'est la même chose que le concept de dérivée. [...]

Extrait 4.8: Louise donne l'exercice à faire (34:50)

À peine le travail commencé, un élève demande ce que **h** représente. Louise répond, assez fort pour que tout le monde entende, en verbalisant l'équivalence entre Δ**x** et **h**. Après, elle prend la parole devant tout le groupe et leur suggère de commencer par écrire la formule, $f'(3)$ égale la formule générale. Ici, l'enseignante fait appel à une représentation verbale qu'elle n'a pas utilisée très souvent, « la formule générale ». On remarque d'ailleurs que certains élèves ne peuvent faire la coordination entre les représentations qu'ils connaissent et la formule générale, ils ne peuvent faire l'association parmi toutes les formes qu'ils ont vues : « C'est laquelle la formule générale? » (36 :14) Louise est obligée de faire une association explicite entre la représentation algébrique $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ qui est écrite au tableau et la représentation verbale « formule générale». Peu de temps après, une autre élève éprouve des difficultés à gérer le ***h***, elle confond en fait ***h*** et ***x***. Louise donne par la suite un autre indice aux élèves en leur disant que le ***a*** dans la formule est égal à **3**. En fait, les élèves doivent faire une transformation à l'intérieur d'un même registre (algébrique). Il y avait deux difficultés possibles pour arriver à faire cette première transformation. La première était de repérer la bonne représentation à transformer, ce que Louise a éclairci lors de sa deuxième intervention au groupe. La deuxième était de comprendre que le **3** de la question représente en fait le **a** de la formule, ce que Louise vient de clarifier par sa troisième intervention au groupe.

Ensuite, la deuxième étape à réaliser est une autre transformation sur une représentation algébrique. Il s'agit en fait d'évaluer la limite. D'abord, il faut évaluer $f(3+h)$ et $f(3)$ pour obtenir une nouvelle représentation algébrique. Au départ (pour évaluer $f(3+h)$), la plus grande difficulté à surpasser est la signification du ***h***. Comme on a déjà vu, deux élèves ont demandé de l'information au sujet du ***h*** et d'autres plus tard se poseront des questions à ce sujet. Par exemple, une autre élève pense que le ***h*** représente en fait la fonction $f(x)$. Les élèves semblent avoir beaucoup de difficultés à effectuer la liaison entre deux représentations algébriques que Louise leur a demandée, c'est-à-dire la représentation avec le **Δx** et celle avec le ***h***. D'ailleurs, ils ont déjà éprouvé des difficultés à manipuler le **Δx**, alors le changement de représentation est encore plus demandant cognitivement pour eux.

En voyant que les élèves ont pu réaliser la première transformation et obtenir la bonne représentation ($f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$) et en ayant plusieurs questions au sujet du ***h***, Louise décide de faire une quatrième intervention pour éclaircir ce point. Comme les élèves ont de la difficulté à évaluer $f(3+h)$, elle leur propose d'utiliser la boîte pour faciliter la manipulation algébrique. Elle écrit donc la fonction avec la boîte qu'elle remplit par la suite avec le (3+h). Elle ne fait pas toutes les manipulations, elle laisse le soin aux élèves de calculer le $(3+h)^2$. Elle leur dit également qu'ils devront trouver le $f(3)$ et ajoute que la suite sera plus facile. Nous pensons aussi que l'évaluation de la limite une fois qu'ils auront remplacé $f(3+h)$ et $f(3)$ par leur expression respective sera plus facile. En effet, à cette étape, nous pouvons parler d'une activité de codage au sens de Duval. Il leur suffira d'utiliser les procédures apprises dans les cours précédents pour l'évaluation d'une limite[9].

Finalement, Louise revient sur la réponse obtenue par plusieurs élèves ($f'(3)=6$). Elle demande alors aux élèves ce que représente cette réponse. À la suggestion d'un élève, ce **6** est la pente d'une tangente et Louise précise en rappelant que c'est la pente de la tangente au point $(3, f(3))$. Notons finalement que l'exercice a été résolu entièrement dans le registre algébrique. Elle profite de ce moment pour faire un dernier petit résumé des différentes représentations qu'ils ont vues. Louise commence en posant des questions aux élèves pour faire des associations entres les représentations (voir extrait 4.9). Elle passe de pente de tangente (une représentation verbale liée à une représentation graphique mentale pour Louise) à TVI et à la description en mots de la représentation algébrique.

L : Donc, si je vous demande dérivée, qu'est-ce que ça veut dire une dérivée? Il faut que dans votre tête ça fasse clic…
És : Pente de tangente.
L : …et ça représente une pente de tangente. Et pour l'évaluer, qu'est-ce qu'il faut utiliser nécessairement?
É1 : Limite.
L : Avant!
É9 : TVI.
L : Le TVI oui et le TVI comment on fait pour le calculer?
É9 : La limite.
L : La limite lorsque h tend vers zéro de f de x plus h moins f de x sur h.

Extrait 4.9: Dernier résumé de Louise (42:25)

[9] Évidemment, nous faisons abstraction ici de la façon dont ils ont appris ces procédures qui viennent avec leur lot de conceptions erronées et d'obstacles épistémologiques. Nous avons d'ailleurs mentionné une part de ces difficultés un peu plus haut dans le texte.

4.2.1.8 Résumé de l'analyse de la séance 1

Analyse centrée sur l'enseignante

Dans ce qui suit, nous allons résumer quelques résultats de l'analyse globale de la première séance par rapport à l'enseignante :

a) Au début l'enseignante a voulu utiliser la technologie avec un programme qu'elle a fait avec le logiciel Maple. Comme l'ordinateur ne fonctionnait pas, elle n'a pas pu l'utiliser. Elle a probablement voulu présenter en forme dynamique le processus des sécantes pour arriver à la tangente.

b) Louise fait souvent des résumés qui reviennent sur les différentes représentations. L'extrait 4.7 est un bon exemple. Dans ces résumés, elle se situe le plus souvent dans le registre verbal, mais elle évoque parfois d'autres registres de façon implicite et plus rarement explicitement.

c) Elle évoque verbalement des représentations d'autres registres (graphique, algébrique), cela peut faire appel à des représentations mentales.

d) Elle utilise très souvent les représentations institutionnelles. Même si l'introduction à la dérivée est faite dans « un contexte réel », elle fait peu de référence au contexte.

e) Le registre verbal oral est très présent dans son discours, appuyé par le ton et les gestes pour marquer des mots importants.

f) Les représentations graphiques sont, le plus souvent, utilisées comme validation.

g) Il n'y a pas un enseignement lié à l'utilisation des représentations comme moyen de contrôle (dans le sens de Saboya, 2010) dans la résolution des exercices et des problèmes. Par exemple, la représentation graphique pourrait jouer comme élément d'anticipation du résultat.

h) Dans le discours de Louise, on peut trouver fréquemment des changements de représentations pour essayer de donner aux élèves plus de représentations autour du concept en jeu. On peut noter que ces processus de traitement et de conversion entre les représentations manquent en général d'explication, c'est-à-dire qu'il n'y a pas une analyse des unités significatives que l'on peut ressortir dans une représentation, et son association avec celles de l'autre représentation. Par exemple, l'enseignante a du penser que l'équivalence entre $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ et $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est évidente pour les élèves. Aussi, on remarque la même chose dans le processus de conversion entre la dernière représentation et la représentation graphique correspondante.

i) On peut remarquer que les schémas sont absents de la séance.

j) Elle utilise le signe $\Rightarrow$ au lieu de parler d'équivalence des expressions Δx et ***h***.

k) Il y a un *abus de langage* par exemple avec « l'idée de substitution » (elle utilise $\Delta x \to 0$ comme $\Delta x = 0$) dans le calcul de limites.

l) Le contexte physique est lié au calcul du vecteur vitesse instantanée et l'enseignante en réalité est centrée sur le TVI, ainsi elle laisse de côté toute interprétation physique en se penchant directement sur le contenu mathématique. On ne voit pas, ni chez l'enseignante ni dans le manuel une explication de la vitesse moyenne (vers un vecteur vitesse moyenne) pourtant essentiel pour pouvoir comprendre le phénomène physique auquel l'exemple fait référence.

m) En tenant compte des travaux de Janvier (1987), Duval (1988 et 1993) et ceux de Hitt (1994, 1998, 2003, 2006) nous pouvons nous apercevoir que l'enseignante donne une priorité à la représentation algébrique. Prenons un exemple lié à l'idée (métaphore) de la boîte pour les calculs de $f(x+h)$ pour approfondir cette dernière affirmation. En fait, l'enseignante fait seulement allusion au processus de substitution algébrique.

Analyse centrée sur les réponses des élèves

Bien que l'élève ne soit pas au cœur de notre objectif de recherche et de notre analyse, étant donné que l'enseignante a utilisée un enseignement semi-magistral, nous avons pu repérer quelques éléments intéressant concernant les élèves. Ainsi, nous avons pris la décision de les rapporter à des fins informatives seulement. Ces éléments nous semblaient apportés une plus grande profondeur à notre travail.

A) Évaluation de $f(a+h)$ (transformation dans le registre algébrique). Les élèves ont eu de la difficulté à faire un calcul de ce type. L'utilisation des représentations numériques ou graphiques ne semble pas être une option chez-eux pour mieux comprendre la tâche. L'enseignante a mis en jeu ce qu'elle appelle « la boîte vide $\square$ ». Cette astuce semble fonctionner chez les élèves d'un point de vu procédural.

B) Les élèves ont de la difficulté avec le changement de variable. En effet, le passage de $\mathbf{\Delta x}$ à **h** semble amener une confusion.

Comme nous avons vu dans le cadre théorique, la construction du concept d'infini mathématique a été difficile pour les mathématiciens. Selon Brousseau (1976/83 et 1997), en faisant une interprétation de l'œuvre de Bachelard (1938) dans le contexte de la didactique, on peut repérer les obstacles de type épistémologique dans l'histoire des mathématiques. De ce point de vue, nous pouvons détecter quelques obstacles épistémologiques dans certaines interventions des élèves.

A) Certains élèves montrent qu'ils ont la conception que la limite est inatteignable. Par exemple, ils vont souvent parler de s'approcher de plus en plus près, ou d'une « valeur un petit peu plus » (voir extrait 4.5).

B) Nous avons vu (voir extrait 4.5) comment l'enseignante ne peut pas échapper à la verbalisation de l'infini potentiel : « Qu'est-ce qui se passe au niveau du delta t si je me rapproche de plus en plus près? ». Ce problème dans la langue naturelle du passage d'un infini à l'autre, va promouvoir un obstacle chez les élèves. Au niveau opérationnel, il semble que cet obstacle ne soit pas un problème. Certains élèves vont même réussir les examens avec une idée centrée sur l'infini potentiel. Ils pourront avoir leur diplôme, mais s'ils continuent leurs études universitaires, l'obstacle pourrait émerger à nouveau. Nous n'avons pas trouvé ce résultat dans la littérature. Une analyse plus fine nous montre que dans la communication mathématique liée à l'infini, la notion d'infini potentiel est présente même dans la notation. Qu'est-ce que ça veut dire que delta t tende vers 0 ($\Delta t \to 0$)? C'est l'idée que la variable change, qu'elle se déplace. C'est l'idée qu'il y a un certain mouvement. Quand la définition formelle de convergence ne fait allusion à aucun mouvement, c'est une notion statique, rien ne bouge.

D) Le paragraphe précédent nous amène à réfléchir sur l'interprétation possible des élèves d'une expression comme $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Une étude comme celle de Hardy (2009) pourrait nous donner quelques indices de l'interprétation des élèves du Cégep de ce que signifie le processus de calcul d'une limite, c'est-à-dire, essayer de comprendre ce que signifie pour l'élève l'expression algébrique en mots:

$$\underset{\left[\begin{array}{l}\text{À quelle valeur}\\ \text{la limite doit être}\\ \text{calculée}\end{array}\right]}{\lim}\left[\begin{array}{c}\text{Expression algébrique}\\ \text{(taux de variation)}\end{array}\right] \quad [\text{Interpretation du processus}] \quad [\text{Valeur de la limite}]$$

4.2.2 La deuxième séance : la fonction dérivée

Malheureusement, nous avons éprouvé des problèmes techniques lors de l'enregistrement de cette séance. Nous avons sur vidéo les vingt-six premières minutes d'une séance qui durait en réalité cent vingt minutes. Cependant, il faut mentionner qu'une grande partie de la leçon était consacrée au travail personnel. Ainsi, nous pouvons quand même voir un résumé des notions vues au cours précédent, un exemple du calcul de l'équation d'une tangente, l'introduction de la droite normale et du concept de fonction dérivée.

4.2.2.1 Un résumé du cours précédent

Louise amorce son cours avec un rappel de la notion de taux de variation moyen. Elle essaie de retrouver les différentes représentations qu'ils avaient obtenues pour ce concept. L'enseignante fait appel à la visualisation pour obtenir les représentations des élèves : « Est-ce que... quand on parle du taux de variation moyen, qu'est-ce que vous voyez dans votre tête? » Il n'est pas clair, à quel type de représentation Louise fait référence. Ce pourrait tout aussi bien être une formule qu'un graphique, ou qu'une description en mots. La première qui ressort est la formule algébrique $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ que Louise n'écrit pas pour l'instant. Elle demande ensuite aux élèves s'ils peuvent voir une fonction dans leur tête et dire ce que serait le TVM (une autre représentation utilisée au cours précédent) sur cette fonction. Nous pensons qu'à ce moment-là, Louise fait clairement allusion à une image graphique. Selon nous, elle cherche à retrouver la représentation qu'elle avait fortement associée au registre graphique : la pente de la droite sécante. Un élève suggère justement que ce pourrait être une droite sécante. Elle décide de produire une représentation graphique (voir figure 4.11), en proposant aux élèves de toujours se faire une image dans leur tête.

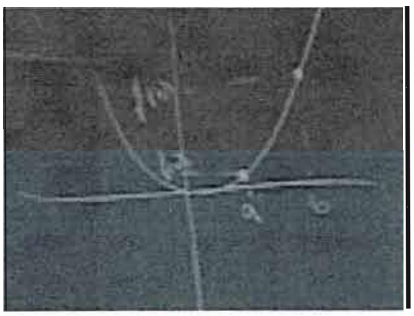


Figure 4.11: À la recherche de la représentation graphique du TVM (0:54)

On constate que la représentation graphique aide les élèves à faire les associations demandées par l'enseignante. En effet, on retrouve rapidement les représentations « taux de variation moyen entre **a** et **b** » et « pente de la sécante ». Dans la première, on parle de **a** et **b** comme des points et aussi de (a, f(a)) et de (b, f(b)) sans faire une distinction entre les points dans le domaine de définition de *f* et les points dans le plan cartésien. Ceci semble implicite pour l'enseignante et on ne sait pas si c'est clair pour les élèves. Finalement, elle trace la droite sécante sur le graphique et en profite pour rappeler une fois de plus toutes les représentations du taux de variation moyen : la pente de la sécante, le TVM, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dans son approche, l'enseignante choisit ***a*** et ***b*** de façon arbitraire et ne mentionne que ***a*** est fixe et que ***b*** varie, quand elle va introduire le TVI par exemple (voir plus bas).

Après, elle passe au concept de taux de variation instantané. La première représentation qu'elle utilise est TVI et les élèves l'associent rapidement au taux de variation instantané et à la pente de la tangente. Elle trace donc la tangente au point (a, f(a)) (elle a fixé de façon implicite le point ***a***) sur le graphique. Pour trouver la représentation algébrique du TVI, elle demande aux élèves comment elle pourrait faire pour le calculer. Ceci est un indice de plus qui porte à croire qu'elle associe le terme « calculer » au registre algébrique, à une formule. Dès que la question est posée, la notion de limite est évoquée. Louise retient cette réponse en disant qu'on peut être certain que ce sera une limite, mais elle ne dit pas pourquoi. Pourquoi savons-nous que ce sera une limite? Selon nous, la raison pour laquelle nous devons faire une limite n'est pas claire dans le discours de Louise. Nous pensons que cette « certitude » relèverait plus d'une procédure que d'une réelle compréhension de la situation par les élèves. Ils arrivent tout de même à écrire la représentation algébrique désirée : $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$. Cependant, une élève a parlé de la limite quand ***x*** tend vers **0**. L'enseignante l'a reprise en précisant qu'il s'agissait de la limite quand la variation des ***x*** (Δx) tend vers **0**. On peut remarquer que cette notation est loin du ***b*** choisi. Dans le discours de l'enseignante, il est sous-entendu que $a+\Delta x=b \Rightarrow \Delta x=b-a$ et nous pouvons douter de la clarté de cette implication pour les élèves.

Ensuite, Louise fait le parallèle entre le TVI en général et le TVI dans un contexte en physique. Évidemment, elle parle de la vitesse instantanée puisqu'ils ont fait un exemple avec ce contexte au dernier cours. Elle en parle très rapidement en disant qu'il s'agit d'un exemple « entre autres » en physique.

Enfin, elle rappelle deux autres représentations pour le TVI : la dérivée et $f'(a)$. Avec ces deux dernières représentations, on peut dire qu'elle a revu les différentes représentations pour le concept de taux de variation instantanée. Elle en rappelle tout de même quelques-unes avant de passer à un exemple.

4.2.2.2 Un exemple : l'équation de la tangente en un point

L'exercice donné par Louise consiste à trouver l'équation de la tangente au point $(1, f(1))$ quand $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Avant de laisser travailler les élèves individuellement ou en équipe, elle tient d'abord à développer une stratégie de résolution. La première étape qu'elle leur propose est d'évaluer $f(1)$. Assez simplement, les élèves savent faire la conversion de la représentation algébrique vers la représentation numérique.

Après, elle aborde la question plus directement : « Je veux l'équation de la tangente. Si je vous demandais, c'est quoi une tangente? » De prime abord, nous pensions que Louise voulait s'attarder un moment sur la définition de la tangente. Elle voulait en fait, faire l'association du concept de tangente à une droite et donc à l'équation d'une droite. En effet, même si certains élèves parlent de couper une courbe, la réponse qu'elle retient est que la tangente est une ligne droite sans faire ressortir d'autres propriétés de la tangente. En groupe, ils arrivent à établir le lien entre une droite et son équation $y = mx + b$. En fait, cette représentation est celle de Louise. Les élèves, eux proposent $y = ax + b$, mais Louise leur suggère de remplacer le **a** par le **m** pour ne pas confondre le **a** de la pente, et l'abscisse du point $(a, f(a))$. Remarquons que le rôle de ***b*** est différent aussi, par contre aucune distinction pour le ***b*** de l'équation (ordonnée à l'origine) et l'abscisse ***b***.

Par la suite, Louise morcelle un peu la question. Elle pointe les deux paramètres de l'équation, ***m*** et ***b***, en disant qu'il ne reste plus qu'à les trouver. En prenant pour acquis que les élèves comprennent pourquoi, elle affirme que s'ils trouvent ***m***, ils pourront ensuite trouver ***b*** (valeur de ***b*** liée à l'ordonnée à l'origine). La question devient alors, comment trouver ***m***? Il s'agit de faire le lien entre ce taux de variation, la pente de la droite et la notion de dérivée (voir figure 4.12). Même si les élèves savent associer le ***m*** à la pente ou au taux de variation, c'est Louise qui fait la transformation (à l'intérieur du registre algébrique) jusqu'à la dérivée au point $(1, f(1))$. Elle met en évidence que $m = f'(1)$ et laisse du temps aux élèves pour le calculer. Ainsi, la tâche de l'élève dans cet exercice est procédurale.

Figure 4.12: Une première étape dans la résolution de l'exercice (6:53)

Après avoir aidé quelques élèves à faire la transformation de la représentation algébrique de $f'(a)$ à celle de $f'(1)$, elle revient au tableau pour faire cette étape en groupe. Ils obtiennent la formule (voir figure 4.13) :

Figure 4.13: Représentation algébrique de la dérivée (13:08)

Comme au dernier cours, Louise suggère aux élèves de calculer à part $f(1+\Delta x)$ et $f(1)$ avant de commencer à évaluer la limite. Elle s'intéresse plus particulièrement à $f(1+\Delta x)$ (voir figure 4.14) puisqu'ils ont déjà trouvé $f(1)$. Une fois de plus, pour s'assurer que les élèves savent bien faire les transformations de la représentation algébrique, elle a recours au truc de la boîte. Notons également que le département de mathématiques du Cégep a organisé des sessions d'aide pour les élèves qui ont des difficultés avec ce genre de manipulations. Nous pouvons en conclure que les enseignants de mathématiques de ce Cégep sont conscients de ces problèmes. Il faut aussi préciser que les séances d'aide sont données par un autre enseignant. On peut imaginer que cet enseignant aura sa propre approche. Utilisera-t-il aussi la « boîte »? Est-ce que les élèves pourront se retrouver dans les différentes représentations utilisées?

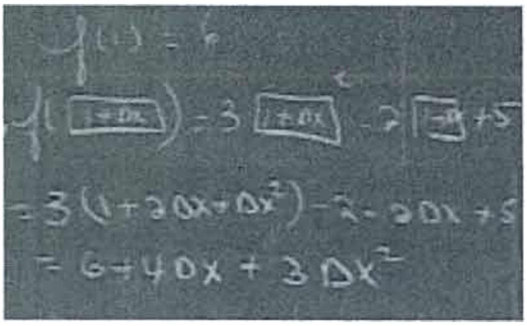


Figure 4.14: Évaluation de $f(1+\Delta x)$ (14:40)

Pendant que Louise effectue ces manipulations, une élève l'interroge sur l'équivalence de **h** et Δ**x**. L'élève en question a préféré utiliser le **h** pour faire l'exercice, mais elle conserve un doute sur l'équivalence de ces deux représentations. Louise lui assure que c'est la même chose et continue. Plus tard, la même élève revient avec sa question : « Est-ce que c'est obligatoirement Δ**x** qu'il faut écrire? » Par cette insistance, nous interprétons que l'élève ne peut pas bien coordonner ces deux représentations. Même si l'enseignante lui assure qu'elles sont équivalentes en mentionnant ce qu'elles représentent (voir extrait 4.10), nous pouvons nous demander si l'élève comprend bien pourquoi.

L : Vous auriez pu...on a vu la semaine passée que ça [Δx], on avait remplacé ça par h. Que vous utilisiez delta x ou que vous utilisiez h, c'est la même chose. Le delta x, on l'utilise au début pour nous faire comprendre que c'est la variation des x. Alors que si on met h, ben là, on ne sait plus trop, mais le h, c'est la variation des x. [...]

Extrait 4.10: Explication circulaire de l'équivalence entre Δx et h (15:41)

Louise revient au problème en intégrant la nouvelle représentation de $f(1+\Delta x)$ dans l'expression de la limite. Délibérément, elle n'ajoute pas à l'expression le **6** qui représente en fait le $f(1)$. Comme c'est une erreur fréquente qu'elle a remarquée chez les élèves, elle veut la mettre en évidence pour qu'ils y portent une attention particulière par la suite.

Après avoir obtenu l'expression complète du taux de variation instantané, l'enseignante commence à évaluer la limite avec la même procédure qu'au cours précédent (voir figure 4.15). Rappelons que la première étape consiste en la prédiction de la limite telle qu'elle est exprimée. En fait, elle ne parle pas d'évaluer la limite, elle parle directement de remplacer le $\mathbf{\Delta x}$ par zéro et utilise le signe d'égalité pour montrer l'indétermination $\frac{0}{0}$. Plus tard, une élève lui demande si elle doit absolument écrire ce $\frac{0}{0}$ ou si elle peut simplement continuer ses manipulations. Louise lui répond que peu importe finalement, cette étape sert seulement à savoir comment poursuivre les calculs.

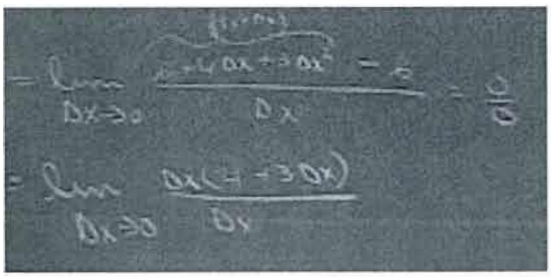


Figure 4.15: Évaluation de la limite (17:16)

Elle enchaîne immédiatement, à la suggestion des élèves, avec la deuxième étape qui est de mettre le Δx en évidence pour pouvoir le simplifier avec le dénominateur. En fait, pour parler de cette étape, elle utilise le terme « éliminer » les Δx. C'est un élève qui l'utilise en premier, mais Louise reprend elle aussi cette représentation verbale pour parler de la simplification.

Maintenant qu'ils savent que $f'(1) = 4$, Louise revient avec la question de départ qui est de trouver l'équation de la droite tangente au point $(1, f(1))$ quand $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. En effet, l'exercice n'est pas fini. Ils ont trouvé $m = f'(1) = 4$, ils doivent maintenant trouver l'ordonnée à l'origine de la droite. Pour ce faire, une élève propose « d'introduire le point ». On comprend qu'elle parle du point (1, 6). Ainsi, Louise fait la conversion du point (1, 6) à l'équation $6 = 4(1) + b$ et « déduit » que **b** est égal à **2**. Cette fois, elle n'effectue pas les manipulations algébriques de façon explicite. Elle semble croire que les élèves sont à l'aise avec ce type de manipulations (mettre un point dans l'équation d'une droite et isoler le paramètre inconnu). Ils répondent (voir figure 4.16) ainsi à la question de départ.

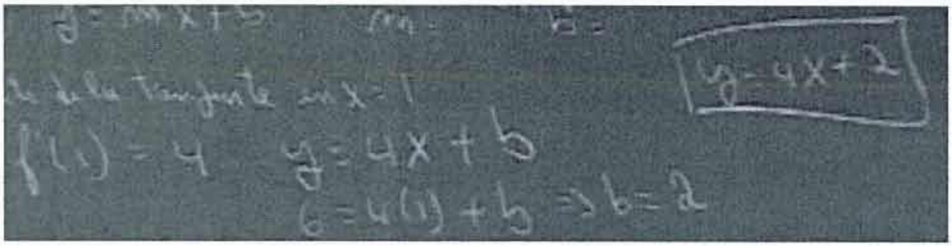


Figure 4.16: Rassembler tous les éléments pour répondre à la question (19:24)

À la fin de l'exemple, une élève amène un élément intéressant. Elle demande à Louise : « Dans le fond le point là, qu'on peut trouver c'est mettons, si c'est $f(2)$, ça aurait été $(2, f(2))$? » Nous interprétons cette question comme une intuition qu'a l'élève de généraliser le processus. Louise en profite pour faire un petit résumé des étapes à suivre pour résoudre un tel type de problème. En effet, elle remplace, en pointant les différentes étapes au tableau, le **1** et $f(1)$ par **2** et $f(2)$ respectivement. Au passage, Louise parle de l'importance de la rigueur mathématique dans l'écriture. En effet, en plus des difficultés avec les manipulations algébriques, elle remarque aussi que les élèves ne sont pas toujours rigoureux dans l'écriture de leur solution. Elle leur fait remarquer quelques éléments auxquels il faut faire attention par exemple ne pas oublier d'écrire le « prime » lorsque $f'(a)$ est en jeu.

4.2.2.3 Introduction de la droite normale

Louise introduit le prochain sujet de sa leçon : « Dans les exercices, on va aussi vous parler de l'équation de la normale. » Elle ne s'attardera pas très longtemps à ce concept. Elle en fait d'abord une représentation graphique très simple et intuitive. En effet, elle trace une droite au tableau en disant que c'est une tangente même si cette droite n'est ni tangente à quoi que ce soit. Elle ajoute ensuite une droite perpendiculaire à la « tangente » en nommant l'endroit où elles se coupent, le point ***a*** (voir figure 4.17). Dans ce cas, il est légitime de nommer le point d'intersection ***a***, puisque le schéma n'est pas installé dans un plan cartésien. Cependant, on peut penser que Louise a une image mentale plus formelle et est capable de visualiser mentalement les implicites de la représentation (un plan, un point $(a, f(a))$, une courbe qui passe par ce point et dont la première droite est tangente en ce point et la deuxième normale en ce point). Par contre, on peut facilement douter que les élèves aient pu s'imaginer la même représentation que Louise.

Figure 4.17: Représentation d'une droite tangente et d'une droite normale à cette tangente (21:13)

Après avoir fait la représentation graphique, Louise demande aux élèves : « Quelle est la particularité de deux droites qui sont perpendiculaires au niveau de leur pente? » Certains élèves se souvenaient de cette caractéristique et savent la formuler : « C'est l'opposé de l'inverse ». Louise utilise cette réponse pour donner une représentation algébrique des deux taux de variation dans la situation qui les intéresse c'est-à-dire celui de la droite tangente et de la droite normale (voir figure 4.18). Ensuite, elle décrit en mots les étapes pour trouver l'équation qui revient en fait à faire le même processus que pour trouver l'équation de la droite tangente, en ajoutant cette transformation algébrique sur le taux de variation de la droite tangente pour obtenir celui de la droite normale.

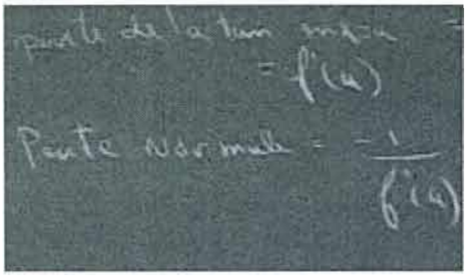


Figure 4.18: Taux de variation de la droite tangente et celui de la droite normale (21:48)

4.2.2.4 La fonction dérivée

Dans ce dernier épisode, Louise annonce dès le début son objectif: généraliser. Elle commence en essayant de montrer aux élèves que le processus pour trouver la dérivée en un point sera toujours le même. Ainsi, elle conscientise, implicitement, les élèves à l'utilité d'obtenir une formule plus générale. Elle reprend en fait la fonction qu'elle avait donnée précédemment ($f(x) = 3x^2 - 2x + 5$) et demande aux élèves quelle serait leur stratégie pour trouver $f'(2)$. Ils arrivent à donner la représentation algébrique nécessaire pour démarrer la résolution. Elle ne leur demande pas de tout calculer, elle leur demande plutôt ce qu'il ferait pour calculer $f'(3)$. Sans écrire la représentation algébrique, le groupe s'entend pour dire qu'il ferait la même chose, mais avec **3**. C'est à ce moment qu'elle dit explicitement qu'il faudrait toujours recommencer le processus et qu'elle introduit le terme de fonction dérivée.

Après, l'objectif de Louise est de retrouver la représentation algébrique formelle de la fonction dérivée. Elle met les élèves sur la piste en disant et écrivant : « De façon générale, $f'(x) = \ldots$ ». Il est intéressant de voir que ce sont les élèves qui effectuent les transformations algébriques nécessaires pour passer de la formule de $f'(a)$ vers celle de $f'(x)$. Une fois la représentation obtenue (voir figure 4.19), Louise rappelle et introduit différents termes et notations de la fonction dérivée. Elle parle alors de dérivée au point $(x, f(x))$, de pente de tangente, de $f'(x)$, de dérivée de f par rapport à x, $\frac{df}{dx}$, et de dérivée de y par rapport à x, $\frac{dy}{dx}$ (voir figure 4.19). Finalement, elle demande aux élèves de calculer $f'(x)$ pour la fonction qu'ils ont déjà travaillées, $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

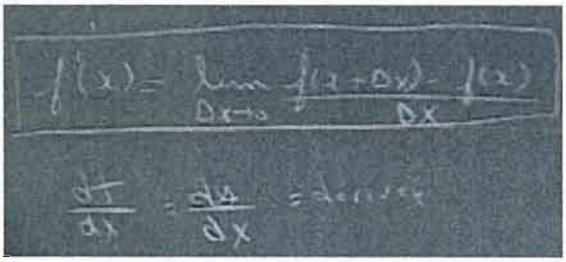


Figure 4.19: Différentes représentations pour la fonction dérivée (25:00)

4.2.2.5 Résumé de l'analyse de la séance #2

Analyse centrée sur l'enseignante :

a) L'enseignante conserve son habitude de faire des petits résumés. Dès le début, elle résume le cours précédent et tout au long de la séance, elle rappelle souvent les différentes représentations.

b) Elle prend parfois des « raccourcis » dans ses représentations verbales qui peuvent réduire la rigueur de celle-ci. Par exemple, elle parle souvent du point ***a*** quand en fait, elle fait référence au point $(a, f(a))$.

c) Les rôles de ***a***, de ***b*** et de ***Δx*** ne sont pas explicités. En fait, avec la formule $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$, il n'y a aucune référence à l'égalité ***a+Δx = b***.

d) Dans le calcul de l'équation $y = mx + b$, il n'y a aucune référence au changement du rôle de b.

e) L'utilisation de représentations graphiques est pratiquement mise de côté. En fait, dans toute la leçon, on ne peut en voir qu'une seule dans le résumé du début. Elle fait aussi référence à ce qui pourrait rappeler une représentation graphique lors de l'introduction de la droite normale, mais elle est incomplète. Nous la qualifierons donc de schéma.

f) Les registres algébrique et verbal dominent entièrement cette séance. En effet, dans l'exemple, qui prend la majeure partie du cours, Louise n'a recours qu'à ces derniers.

g) Les représentations qu'elle utilise sont le plus souvent très formelles. Nous pouvons exclure l'égalité de la limite à $\frac{0}{0}$ et sa représentation graphique de la droite normale. Sinon, Louise a recours à des représentations institutionnelles.

h) Elle considère le processus de limite comme une substitution de Δx par 0.

i) En utilisant une représentation graphique « quelconque », l'enseignante prend une fonction quadratique et les points a et b dans les premiers quadrants. Il y a une tendance aussi au calcul d'une pente positive.

Analyse centrée sur les élèves :

A) Les élèves sont de plus en plus à l'aise à manipuler eux-mêmes certaines représentations algébriques. Par exemple, ce sont eux qui ont proposé à Louise la généralisation de la représentation algébrique de $f'(a)$ vers celle de $f'(x)$.

B) La confusion est encore présente chez plusieurs élèves par rapport à l'équivalence de Δ**x** et **h**. Nous doutons qu'ils comprennent réellement ce que ces symboles représentent.

4.2.3 La troisième séance : dérivée et continuité

Dans cette séance, Louise fait comme à l'habitude et fait un petit résumé des derniers concepts vus en classe. Ensuite, elle introduit quelques notions importantes concernant la dérivée et la continuité. Elle fait d'ailleurs la démonstration formelle d'un théorème. Par la suite, elle revient sur la notion de limite, résumé qui sera utile aux élèves pour l'examen. Finalement, elle répond à des questions individuelles des élèves.

4.2.3.1 Résumé des derniers concepts vus

Le cours débute cette fois-ci par le commentaire d'une élève. Elle s'exprime sur le fait qu'elle est très à l'aise à trouver des TVM ou TVI lorsque ceux-ci sont demandés de façon explicite et pour une fonction donnée, mais qu'elle se perd lorsqu'il s'agit de faire la même chose dans un contexte où les tâches ne sont pas explicites. Ce commentaire vient confirmer un problème que nous avons soulevé au premier chapitre. En effet, les élèves ont plus de difficultés avec des problèmes contextualisés ou des problèmes de type non-routiniers. Ils sont plus à l'aise à résoudre des exercices dans lesquelles la démarche à suivre est claire.

Louise associe ces difficultés à la recherche de mots-clés. Pour surpasser cette difficulté, elle fait un résumé des différentes représentations des concepts de TVM et TVI. À travers cet épisode, elle rappelle les synonymes utilisés pour le taux de variation moyen, TVM, pente de la sécante et la représentation algébrique de celui-ci, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Ensuite, elle fait la même chose pour le taux de variation instantané. Elle parle du TVI, de la dérivée, de la pente de la tangente, de $f'(x)$ et de $\frac{df}{dx}$. Au passage, elle précise un peu cette dernière notation. Pour mettre en évidence que le « f » est pour le « nom » de la fonction à dériver et que le « x » est la variable par rapport à laquelle on dérive, elle fait un exemple avec la fonction *g(k)* qui devient $\frac{dg}{dk}$. Au fond, elle utilise différentes représentations dans un même registre pour rendre la notion plus claire. Elle se tourne ensuite vers la représentation algébrique de la dérivée que les élèves retrouvent assez rapidement : $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Elle fait aussi allusion à la dérivée de f en un point particulier, mais elle conseille tout de même aux élèves de toujours commencer par $f'(x)$.

Jusque-là, on peut remarquer que Louise n'a eu recours à aucune représentation graphique. Cependant, elle pose une question qui la mènera à en produire une (voir extrait 4.11). Par cette question, Louise essaie de reprendre le concept en profondeur, au-delà des simples procédures.

L : [...] Est-ce qu'il y a quelqu'un qui peut m'expliquer pourquoi il y a une limite qui apparaît dans la dérivée? Pourquoi la dérivée, c'est une limite?
É3 : Parce que la tangente, elle effleure le...
É16 : C'est le seul point qu'elle coupe.
É14 : C'est un petit peu plus à côté!
L : Ben, ce n'est pas si mal. Si vous vous souvenez, c'est qu'on était parti de la sécante. On s'était pris deux points [elle fait la représentation graphique]...Eh ben, ce n'est pas si mal aujourd'hui! On était parti de notre sécante. Donc ici, on avait un premier point, ici, on avait un deuxième point. Entre les deux, on avait une variation de x. J'avais pris mon point et je l'avais rapproché le plus près possible [elle prend le deuxième point sur la courbe et le déplace sur la courbe]. Si je le rapproche le plus près possible, qu'est-ce qui se passe avec delta x?
É16 : Il tend vers zéro.
L : Il tend vers zéro. Et on avait vu que la notion tendre vers zéro, comment on traduit ça? On traduit ça avec la notion de limite. C'est sûr que quand on l'a travaillé nous autres, on l'a toujours fait approcher de ce bord là [limite à gauche], mais il approcherait aussi de ce côté-là [limite à droite]. Donc, à gauche et à droite. La notion de limite à gauche, limite à droite est toujours présente. Parce que ça [$f'(x)$] à la condition que sa limite à gauche donne la même valeur que sa limite à droite.

Extrait 4.11: Discussion sur la dérivée et la limite (4:15)

Nous nous arrêtons d'abord aux représentations spontanées des élèves. Il est intéressant de voir qu'un élève parle de couper la courbe tandis que deux autres insistent sur le fait que la droite ne fait qu'effleurer la courbe, ou s'en approcher. Cette dernière vision pourrait être liée à l'infini potentiel. Par contre, les élèves ne mentionnent jamais le processus du passage de la droite sécante à la droite tangente. Nous pouvons ainsi se demander s'ils ont vraiment une idée intuitive d'un processus infini ou s'ils ne considèrent la droite tangente que comme un objet fixe. Ce qu'ils décrivent est plus le concept de tangente en soi que l'idée de limite.

De son côté, Louise semble reconnaître que leur intuition est incomplète et rappelle immédiatement leur point de départ, la droite sécante. Elle refait également le processus de façon visuelle en ayant recours à une représentation graphique. Dans son explication, elle se situe clairement dans la vision de l'infini potentiel : « le rapproche le plus près possible », « tend vers zéro ». Elle associe finalement ces représentations verbales au concept de limite. Elle précise également le fait que la variation des x va « se rapprocher » de chaque côté du point souhaité. Ce qu'elle n'avait jamais fait jusqu'à maintenant en parlant de la dérivée (elle ne mentionnait qu'un côté), implicitement elle avait induit la croyance que $\Delta x > 0$. Elle évoque ainsi l'idée de limite à gauche et de limite à droite qui lui servira dans la suite de cette séance.

4.2.3.2 Un théorème sur la dérivée et la continuité

Dans cette partie de la leçon, Louise va faire une démonstration formelle du théorème suivant : si $f(x)$ est une fonction dérivable en $x = a$, alors $f(x)$ est continue en $x = a$. Avant de commencer la preuve, Louise fait appel à l'intuition des élèves. En réponse à la question « si une fonction est dérivable en un point, est-ce qu'elle sera continue en ce point », les élèves évoquent l'idée de limite à gauche et limite à droite. Maintenant que la réflexion est installée chez les élèves, Louise commence la preuve. Elle produit d'abord la formulation formelle de ce théorème qu'elle écrit au tableau (voir figure 4.20).

Figure 4.20: Représentation formelle du théorème à démontrer (9:25)

Tout au long de la démonstration, Louise s'efforce de rendre le processus le plus clair possible. Pour elle, le théorème est important, mais le processus de démonstration semble l'être tout autant. Pour commencer la preuve, Louise dit : « On va partir avec *f(x) est dérivable en* $x=1$ et on va démontrer que ça va vouloir dire, ça va impliquer *[⟹] que la fonction f(x) est continue en x=a.* Ok, là, vous remarquez que j'ai juste un bord. Dérivée, continuité...on va prouver ça. » Ces propos ici servent à préciser le rôle du signe d'implication. En effet, elle met l'accent sur l'idée qu'on connaît quelque chose et qu'à partir de ça, on va en prouver une autre. Elle cherche aussi à préciser que l'implication est simple (juste un bord). Cependant, cette représentation verbale conserve quelques sous-entendus. Pour elle, il est clair maintenant que l'inverse de cette implication n'est pas compris dans la démonstration. Ceci n'est peut-être pas si clair pour les élèves qui ne sont pas très habitués au concept d'implication. Ils n'auront probablement pas le réflexe de se demander si l'implication est simple ou double, et d'évaluer toutes les conséquences que cela pourrait inclure.

Louise pose l'information connue : si la dérivée de *f(x)* existe en *x=a,* donc $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$. Elle a effectué une conversion entre la représentation verbale et une représentation algébrique qui comporte cependant un sous-entendu : comme la dérivée existe, cette limite existe aussi. Comme elle veut montrer que *f(x)* est continue, elle veut déterminer les trois conditions pour qu'une fonction soit continue en un point. Nous nous rappelons que ces conditions sont devenues assez procédurales pour les élèves. Ils relient, le plus souvent, le terme « continuité » à ces trois conditions. Par contre, nous ne pouvons pas conclure sur leur compréhension de ces conditions. Louise les écrit au tableau (voir figure 4.21) et conclut que pour montrer que *f(x)* est continue en $x = a$, il suffit de démontrer la dernière condition.

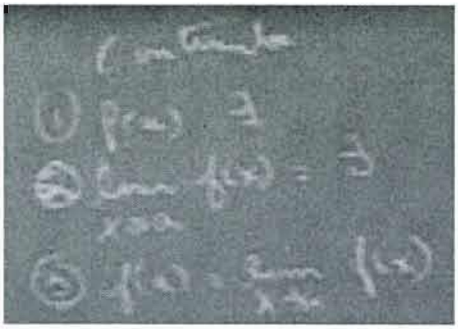


Figure 4.21: Les trois conditions pour qu'une fonction soit continue en un point (10:47)

Cependant, la raison pour laquelle la démonstration de la troisième condition confirme aussi les deux autres conditions n'est pas explicite. D'ailleurs, lorsqu'elle demande aux élèves s'ils sont d'accord, leur « oui » est très timide et peu convaincu. Elle continue en pointant ce qu'ils connaissent (la définition de la dérivée) et met l'accent sur le premier terme du numérateur *f(a+Δx)*. Louise commence alors une série de manipulations algébriques pour faire la démonstration que la troisième condition est bien remplie. Elle suppose en premier que $x = a + \Delta x$, ce qui la mène à l'égalité suivante : $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x)$. Quand elle fait cette manipulation, son but est clair pour elle, mais il n'est peut-être pas tout à fait explicite pour les élèves. Elle n'a pas encore précisé qu'elle cherche à transformer la représentation algébrique $\lim_{x \to a} f(x)$ vers la représentation algébrique $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$. Elle a fait quelques sous-entendus en pointant souvent ce qu'elle connaît (la dérivée) par exemple, mais elle n'a pas formulé son objectif précisément. Dans cette conversion, elle a explicité qu'elle donne une valeur à x qui est $a+\Delta x$ et que donc, $x \to a$ devient $a + \Delta x \to a$ et que celui-ci à son tour devient $\Delta x \to 0$. Ceci reste un processus de transformation algébrique assez difficile pour les élèves. De plus, l'abus de langage est présent à nouveau. Quand on calcule $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, il est sous-entendu que Δx est un infiniment petit lié à x et que $x + \Delta x$ tends vers x quand Δx tend vers zéro. L'enseignante a pris $a+\Delta x$ quand Δx tend vers zéro, alors $a + \Delta x \to a$.

Par la suite, elle précise qu'elle désire obtenir la définition de la dérivée de *f(a)* à partir de $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x)$. L'objectif devient probablement plus clair pour les élèves, mais les raisons de ce processus ne le sont peut-être pas. Elle poursuit donc les transformations algébriques. Louise fait deux étapes de façon assez semblable. D'abord, elle soustrait et ajoute le *f(a)* et utilise une propriété des limites pour obtenir la représentation suivante : $\lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x) - f(a) + \lim_{\Delta x \to 0} f(a)$. Ensuite, elle divise et multiplie Δx et fait appel à une autre propriété des limites pour avoir la représentation suivante: $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \bullet \lim_{\Delta x \to o} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} f(a)$. Pendant ces transformations, Louise insiste sur le fait que les expressions doivent toujours rester équivalentes. Elle traite les propriétés des limites en assumant que les élèves les connaissent bien et en ne vérifiant pas les conditions qui y sont attachées. En effet, elle ne fait qu'évoquer les propriétés des limites en général et ne spécifie pas à laquelle elle fait référence. De plus, pour pouvoir « séparer les limites » comme elle dit, les limites doivent exister, elle ne le vérifie cependant pas. La transformation devient confuse pour les élèves. Une élève se demande d'ailleurs comment l'enseignante arrive à ces représentations.

Finalement, Louise évalue les limites dans la dernière représentation qu'elle a obtenue. Elle obtient assez rapidement, puisque c'était l'objectif de toute façon, que $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$. Ensuite, elle évalue $\lim_{\Delta x \to o} \Delta x$. Elle arrive aussi rapidement à zéro ne donnant pas vraiment d'explication. Finalement, elle évalue $\lim_{\Delta x \to 0} f(a)$. Louise s'attarde un peu plus longtemps sur cette limite et fait même appel à un exemple. Elle prend la $\lim_{x \to 5} 3$ pour expliciter le fait que la limite d'une constante donne la constante. Elle se retrouve alors avec la représentation algébrique $f'(a) \cdot 0 +$ *f(a)* qui lui donne évidemment *f(a)*. Elle conclut en rappelant qu'elle est partie de $\lim_{x \to a} f(x)$ et qu'elle est arrivée à l'égaler à *f(a)*.

Avec toutes ces manipulations, les élèves ont pu perdre de vue l'objectif qui était de montrer que *f(x)* respectait la troisième condition pour la continuité d'une fonction en un point, ce qui impliquait les deux autres conditions et ce qui impliquait que le théorème était vrai. Nous pensons que la conclusion est un peu rapide. En effet, Louise a fait quelques conversions mentales pour y arriver. Par exemple, dans son discours, elle dit que la fonction est continue grâce aux manipulations qu'ils ont fait et au fait que la dérivée existait. Par contre, on ne sait pas en quoi c'est important que la dérivée existe et ce, parce qu'elle n'a pas rendu les conditions de l'utilisation des propriétés des limites explicites. En effet, dans le processus que Louise a fait, on pourrait ne pas se soucier que la fonction est dérivable ou non. Elle reconnaît que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \bullet \lim\limits_{\Delta x \to o} \Delta x$ est égale à $f'(a) \bullet 0$, mais ne précise pas que $f'(a)$ doit absolument exister pour que l'on puisse poursuivre les manipulations. Probablement que cela est évident pour elle. Elle ne pense donc pas à le préciser aux élèves. Il faut remarquer qu'il y a très peu de démonstrations dans ce cours. En accord avec le programme de sciences de la nature du Cégep observé, le premier cours veut seulement initier les élèves à la démonstration en en faisant au tableau avec eux. Plus tard dans leur programme, ils devront pouvoir réaliser eux-mêmes des démonstrations.

Enfin, elle dit aux élèves qu'ils doivent retenir seulement le théorème, mais elle revient sur le processus qu'elle a utilisé pour le démontrer (voir extrait 4.12). Pour ce faire, elle reste dans le registre verbal et énumère les étapes sans nécessairement les justifier.

> L : [...] Vous voyez comment je suis partie. On connaît ça [la dérivée] pour montrer la continuité, pour prouver la continuité j'ai à démontrer ça... [...] Posons nos affaires et tout simplement après ça, on ajoute, on enlève, on multiplie, on divise. Il faut toujours s'assurer de garder les mêmes choses...

Extrait 4.12: Résumé du processus de démonstration (18:09)

4.2.3.3 Application d'une implication logique sur un théorème

Dans cet épisode, Louise effectue en fait une implication logique qui veut que si $A \Rightarrow B$, donc « non B » $\Rightarrow$ « non A ». Nous avons donc le théorème « si *f(x)* est une fonction dérivable en $x=a$, alors elle est continue en $x=a$ » et on obtient que « si *f(x)* n'est pas continue en $x=a \Rightarrow f(x)$ n'est pas dérivable en $x=a$ ». Cette implication n'est probablement pas évidente pour les élèves qui connaissent peu de notions de logique. Pour aborder cette façon de voir le théorème, Louise l'amène sous forme de question : « Si une fonction n'est pas continue, est-ce qu'elle est dérivable? Si une fonction est discontinue en un point $x=a$, est-ce que la dérivée de *f(a)* va exister? » Intuitivement, plusieurs élèves répondent non, mais un élève répond oui. Pour pouvoir trouver la réponse, Louise évoque « les trois conditions de discontinuité ». En fait, il s'agit de trois cas où la fonction peut être discontinue. Il est important de comprendre qu'il n'est pas nécessaire que la fonction réponde aux trois « conditions » pour affirmer sa discontinuité, ce qui était le cas pour les trois conditions pour la continuité. Louise n'explique pas cette subtilité et les élèves ne la relèveront peut-être pas d'eux-mêmes. Elle commence par le cas où *f(a)* n'existe pas. On comprend que pour chaque cas où une fonction est discontinue, elle vérifiera si la dérivée existe.

Pour le premier cas, *f(a)* n'existe pas, Louise règle la question assez rapidement. En fait, elle pose la question aux élèves en prenant une représentation verbale assez suggestive: « Si *f(a)* n'existe pas, est-ce que je peux avoir une pente de tangente à un point qui n'existe pas? » La question comporte en fait déjà une certaine transformation de la représentation. En effet, elle commence en parlant de *f(a)* qui n'existe pas et après elle parle d'un point qui n'existe pas. Elle a interprété *f(a)* comme le point $(a, f(a))$ qui ne peut pas exister puisque *f(a)* n'existe pas. Elle part ensuite de cette idée pour préciser que ce genre de démonstration est intuitive et donc informelle (voir extrait 4.13).

L : Ça veut dire *qu'il n'y a pas de pente de tangente au point en* x égal à a *[x=a]*. Pis s'il n'y a pas de tangente, il n'y a pas de pente. Pis s'il n'y a pas de pente, *il n'y a pas de dérivée.* Ça c'est une démonstration intuitive. Ce n'est pas une démonstration formelle. C'est juste pour vous permettre de comprendre. [...]

Extrait 4.13: « Démonstration intuitive » (20:32)

Elle observe maintenant la deuxième raison pour laquelle une fonction serait discontinue en un point : si la $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ n'existe pas. Louise traduit cette représentation verbale par la représentation algébrique suivante : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. De là, l'enseignante effectue une autre conversion. Elle passe à la dérivée. Comme la dérivée est aussi une limite, quand on calculera la dérivée, la limite à gauche et la limite à droite ne seront pas pareilles et donc, la dérivée n'existera pas. Nous pensons que cette dernière conversion ne sera pas facile pour les élèves. En effet, ils sont habitués de calculer la dérivée sans passer par la limite à gauche et la limite à droite. De plus, quand ils ont vus la représentation graphique du concept, ils n'ont fait la limite que d'un côté. En début de cours, Louise a parlé du fait qu'au fond, la variation des x diminue de chaque côté du point observé, mais c'était la première fois qu'elle le disait explicitement. Nous doutons que tous les élèves aient pu comprendre cette idée. Pour renforcer son explication, elle demande aux élèves de lui donner un exemple « de limite à gauche différente de limite à droite ». Un élève évoque une fonction discontinue par saut. Louise ne conserve pas cette réponse et précise qu'elle cherche un exemple graphique. C'est finalement elle qui trace une fonction et les tangentes en un point de discontinuité qui n'ont évidemment pas la même pente (voir figure 4.22) ce qui permet de conclure que la dérivée n'existera pas en ce point.

Figure 4.22: Représentation graphique d'une fonction discontinue (22:53)

Enfin, même si la limite existe en un point de discontinuité, cela n'implique pas que la dérivée existe. Louise illustre également ce troisième cas à l'aide d'une représentation graphique (voir figure 4.23). Elle demande aux élèves s'il serait possible de tracer la tangente au point de discontinuité.

Figure 4.23: Une fonction discontinue en un point (23:30)

Dans ses explications verbales et avec ses gestes, elle insinue qu'il serait possible de tracer plusieurs tangentes (voir une infinité) et que cela n'a pas de sens. Elle en conclut que la fonction n'est pas dérivable en ce point. En fait, dans cette fonction, le problème n'est pas qu'il existe une infinité de tangente, c'est plutôt qu'il n'en existe aucune. Cependant, pour expliquer cette conclusion, nous avons besoin de la définition de la tangente[10], ce que l'enseignante n'a pas introduit dans son cours.

Finalement, elle peut conclure que si une fonction n'est pas continue en un point, elle n'est pas dérivable en ce point.

---

[10] Certaines définitions de tangente à la courbe évoquent l'idée que celle-ci doit former un angle nul avec la courbe au point de tangence et pour mesurer cet angle, on peut faire appel au concept de cercle osculateur.

4.2.3.4 L'implication inverse du théorème

Dans cet épisode, Louise observe l'implication inverse du théorème qu'ils ont prouvée en début de leçon. C'est-à-dire, qu'elle cherche à savoir « si une fonction est continue, est-ce qu'elle est dérivable? » Elle utilise encore une fois plusieurs façons de formuler sa question (est-ce que $f'(x)$ existe si la fonction est continue?). Les avis sont mitigés parmi les élèves, mais Louise leur donne la réponse assez rapidement en leur disant que pour prouver que ça ne fonctionne pas, il suffit de donner un contre-exemple. C'est aussi Louise qui propose d'observer la fonction $f(x) = |x|$. Elle a probablement recours à cet exemple parce qu'ils ont déjà démontré en classe que cette fonction était continue. Elle s'intéresse particulièrement au point $x=0$ et une élève lui demande pourquoi. En fait, on peut remarquer que Louise a dit qu'elle voulait un contre-exemple, mais peut-être que ce que représente un contre-exemple dans cette situation n'est pas clair pour les élèves. Qu'est-ce qu'on cherche en fait en observant cette fonction?

Il s'agit de déterminer si $f'(0)$ existe. Elle se tourne alors vers la représentation graphique (ou géométrique, elle utilise les deux termes) et la représentation algébrique de la fonction valeur absolue de x. Elle annonce qu'elle coordonnera les deux représentations. Un élève fait remarquer à Louise que $f(0)$ existe avec un ton qui indique que pour lui le problème s'arrête là. Il nous donne un indice qu'il n'a pas vraiment compris l'enjeu de la situation. Quand elle demande aux élèves de prédire ce que serait la dérivée à zéro, certains pensent que c'est zéro et d'autres pensent qu'elle n'existe pas. Elle fait alors la limite à gauche et la limite à droite. Pour bien exprimer ces deux concepts, elle utilise des gestes et trace les tangentes sur la représentation graphique et les représentations algébriques des deux limites sous une forme un peu inhabituelle ($f'(0^-) = -1$ et $f'(0^+) = 1$). Pour arriver à cette représentation algébrique, les élèves ont effectué une conversion à partir de la représentation graphique. Ils ont été capables de déterminer la valeur de la pente à partir du graphique. Ils peuvent en conclure que la limite à gauche est différente de la limite à droite.

Louise reformule ensuite sa question en ajoutant un élément important : « si la fonction est continue, alors est-ce que la dérivée existe toujours? » Cette représentation particulière amène une élève à affirmer que « ça pourrait exister ». Alors, Louise renforce son affirmation en disant que « ça ne veut pas dire que ce n'est jamais vrai. Mais ce n'est pas toujours vrai. » L'enseignante leur donne un autre contre-exemple à l'aide de la représentation graphique de la fonction $\sqrt{x}$. Cet exemple est spontané, en ce sens qu'elle n'avait probablement pas prévu le donner. Les représentations verbales qui l'accompagnent possèdent beaucoup de sous-entendus (voir extrait 4.14). En effet, elle ne mentionne pas le concept de limite, même si elle y fait référence. Parce qu'en fait, elle fait la limite à droite et la limite à gauche de la fonction et non la dérivée à droite et la dérivée à gauche pour $x = 0$. C'est intéressant de signaler que les représentations graphiques pour introduire le TVI utilisées par l'enseignante sont liées au calcul de la dérivée par la droite seulement.

L : [...] Parce qu'à zéro, on est sur un intervalle, la fonction est continue si c'est zéro un petit peu plus, mais quand je fais la dérivée d'un petit peu plus et d'un petit peu moins et là, le un petit peu moins n'existe pas donc la dérivée n'existerait pas là! [...]

Extrait 4.14: Étude de la dérivabilité de la fonction $\sqrt{x}$ en x=0 (28:42)

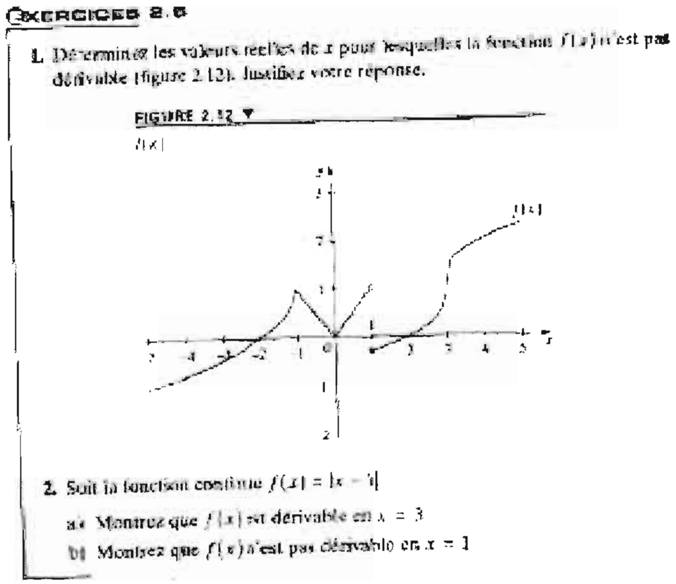
Pour finir cet épisode de la leçon, elle repose les questions qu'ils viennent d'observer soit : Est-ce qu'une fonction dérivable est continue? Est-ce qu'une fonction continue, sa dérivée existe toujours? Si une fonction est discontinue, est-elle dérivable au point de discontinuité? En fait, elle avertit les élèves que ce sont ces trois choses qu'ils doivent retenir. De plus, pour la première fois depuis le début des observations, Louise fait référence au manuel de façon explicite pour autre chose que des exemples ou des devoirs. En effet, elle indique aux élèves les pages du manuel à consulter sur le contenu de la leçon (Hamel et Amyotte, 2007, p.81-83).

4.2.3.5 Résumé de la notion de limite : des procédures

Pour terminer la partie théorique du cours, Louise décide de poser des questions sur quelques éléments de la notion de limite en vue de l'examen. Ce résumé, depuis le début, est très axé sur les procédures à utiliser dans différents cas d'indétermination. En fait, ça devient rapidement un jeu d'association entre un cas d'indétermination et la stratégie à adopter pour le « lever ». De plus, c'est presque toujours le même élève qui répond aux questions. Un moment intéressant est quand elle corrige l'élève en question qui dit l'infini négatif qu'elle associe à l'idée d'un peu moins que l'infini. Louise a cru important de préciser « qu'un peu moins que l'infini, ça n'a pas de sens ».

4.2.3.6 Trois explications d'un même exercice

Le reste de la leçon est dédié au travail individuel ou en équipe. Pendant ce temps, Louise est disponible à l'avant de la classe pour répondre aux questions. Il se trouve que dans cet épisode tous les élèves semblaient avoir des problèmes avec le même exercice (voir figure 4.24, #2). En effet, elle a expliqué l'exercice deux fois avant que deux autres élèves lui demandent la même explication et qu'elle décide de le faire en grand groupe. Dans les prochaines lignes, nous allons observer l'évolution de l'explication de Louise à travers son utilisation des représentations.


EXERCICES 2.5

1. Déterminez les valeurs réelles de x pour lesquelles la fonction $f(x)$ n'est pas dérivable (figure 2.12). Justifiez votre réponse.

FIGURE 2.12

2. Soit la fonction continue $f(x) = |x - 1|$

a) Montrez que $f(x)$ est dérivable en $x = 3$

b) Montrez que $f(x)$ n'est pas dérivable en $x = 1$

Figure 4.24: Exercice #2 (Hamel et Amyotte, 2007, p.84)

Les deux premières explications sont faites à deux élèves séparément. Malgré qu'il s'agisse du même exercice, les explications de Louise sont assez différentes dans l'ordre des représentations utilisées ou dans sa stratégie d'intervention générale. Pour la première élève, Louise entre immédiatement dans la question du manuel. En effet, elle traduit directement la question à l'aide d'une représentation algébrique, c'est-à-dire à l'aide de la définition de la dérivée: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$. D'ailleurs, l'enseignante mentionne à chacune des personnes aidées et même au reste de la classe, que cette étape doit devenir un automatisme. On peut parler d'un encouragement vers l'apprentissage d'une procédure à mettre en pratique lorsque certains mots-clés sont reconnus. Pour pouvoir suivre la procédure qu'elle a mise en place avec les élèves, soit évaluer $f(3+\Delta x)$ et $f(3)$ d'abord, elle effectue une transformation algébrique sur l'équation de $f(x)$. En fait, il s'agit de passer de la forme valeur absolue à la forme fonction par partie. Cependant, dans le cas de la première élève, elle fait cette transformation de façon assez implicite. Elle passe d'une forme à l'autre sans représentation algébrique intermédiaire et sans trop d'explications verbales non plus. Ces sous-entendus occasionnent d'ailleurs quelques confusions chez l'élève qui n'apparaîtront que plus tard.

L'évaluation de $f(3+\Delta x)$ ne se fait pas sans difficulté. En effet, l'élève a beaucoup de difficulté à comprendre la manipulation algébrique nécessaire. Louise a besoin d'avoir recours à son « truc » de la boîte. Même avec cette approche, elle doit aussi utiliser un autre exemple ($f(x)=2x+5$). Cet épisode est particulièrement intéressant (voir extrait 4.15).

L : [...] Regarde, si je te donne ça [$f(x)=2x+5$]. Juste ça. Si je te demande de me faire f de trois plus delta x [$f(3+\Delta x)$], qu'est-ce que tu me fais?
É16 : Je vais faire 2 fois trois plus delta x plus cinq.
L : [$2(3+\Delta x)+5$] Hmm. C'est exactement ça que tu me fais ici. Là, je te dis f de x vaut x moins un [$f(x)=x-1$] . Fais-moi f de trois plus delta x [$f(3+\Delta x)$].
É16 : Ben je fais f de trois plus delta x moins un.
L : Reprends, je n'ai pas bien compris, je pense!
É16 : Trois plus delta x...
L : [$f(3+\Delta x)=3+\Delta x-1$] Ouin c'est ça! C'est parce que tu m'as mis un f devant!
É16 : Ah ok!
L : C'est pour ça que je ne savais pas si tu voulais me rajouter un f. Donc, ça veut dire que ça va me donner deux plus delta x [$f(3+\Delta x)=3+\Delta x-1=2+\Delta x$].

Extrait 4.15: Pour évaluer $f(3+\Delta x)$

En fait, Louise prend l'exemple pour mettre en évidence qu'elle remplace x par $3+\Delta x$. Elle demande à l'élève comment elle ferait pour évaluer $f(3+\Delta x)$ quand $f(x)=2x+5$. Cependant, c'est l'enseignante qui écrit. Alors, quand l'élève lui répond qu'elle aurait « 2 fois trois plus delta x plus cinq », nous pouvons nous demander si l'élève a vraiment appliqué le 2 à ($3+\Delta x$) ou seulement au 3. C'est Louise qui met les parenthèses ($2(3+\Delta x)+5$), mais on ne sait pas si l'élève aurait fait de même. Finalement, Louise continue d'avancer et obtient la nouvelle représentation de $f(3+\Delta x)$, soit $2+\Delta x$. Ensuite, elle a aussi besoin d'évaluer $f(3)$. Pour ce faire, elle n'a recours qu'à une représentation verbale. En effet, elle fait le processus de transformation de façon mentale, même si l'élève doit prendre un temps de réflexion, elle semble être d'accord avec la nouvelle représentation de $f(3)$, soit 2. Elle arrive assez bien par la suite à obtenir les nouvelles représentations algébriques pour la dérivée et conclue que la dérivée existe pour $x = 3$.

Après, Louise propose de calculer $f'(1)$ comme le manuel l'indique. Pour démarrer l'exercice Louise effectue d'abord à l'aide de l'équation de $f(x)$ qui est par partie une prédiction ou une anticipation de la réponse ce qui lui permet d'élaborer une stratégie de résolution. Cette étape est très pertinente, mais elle semble rester implicite pour l'élève. En effet, Louise fait cette étape de façon verbale en utilisant des représentations qui contiennent des sous-entendus. Par exemple, elle dit : « Sauf qu'à gauche et à droite, ma limite n'est pas la même chose. Je ne serai pas dans la même partie de fonction. » Considérant le fait que l'élève a eu de la difficulté à comprendre la représentation de $f(x)$ par partie et à évaluer $f(3+\Delta x)$, on peut penser que cette explication de Louise est incomplète pour l'élève. En fait, Louise évalue mentalement $f(1+\Delta x)$ quand Δx tend vers 0^+ et vers 0^-. Effectivement, plus tard, l'élève est perdue. Elle ne sait plus comment évaluer $f(1+\Delta x)$ et c'est pourquoi Louise produit un schéma pour l'aider à visualiser la fonction par partie (voir figure 4.25).

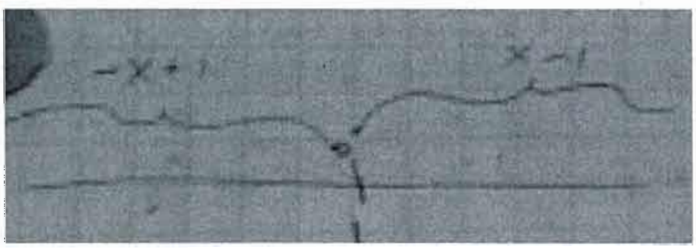


Figure 4.25: Schéma pour visualiser la fonction par partie (44:48)

Mentionnons qu'en faisant le schéma, Louise parle de ce qui se passe « avant » et « après » $x = 1$, mais elle ne discute pas de ce qui se passe à $x = 1$. Elle parle aussi du côté

« positif » et du côté « négatif ». Cette représentation verbale peut être difficile à comprendre pour l'élève qui distingue habituellement ces deux « côtés » à partir de zéro, alors que dans ce cas, la valeur critique est 1.

Le schéma semble être utile pour l'élève et elles obtiennent finalement que $f(1+\Delta x) = -(1+\Delta x)+1 = -1-\Delta x+1 = -\Delta x$. On remarque que Louise a rendu les représentations algébriques « intermédiaires » plus explicites cette fois-ci. Par contre, lorsqu'il s'agit d'évaluer la limite, elle n'explique plus ce qu'elle fait. En fait, elle passe directement de la représentation $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ à la représentation $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$ et ce, autant pour la limite à gauche que la limite à droite. On observe également que Louise ne parle pas de $f(1)$, elle ne mentionne que c'est égal à zéro. Cette étape est complètement mentale.

Finalement, c'est en faisant plusieurs transformations et conversions de façon sous-entendues que Louise obtient $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = -1$ et $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = 1$. L'élève est capable de faire la dernière étape soit de comparer les deux limites et conclure que la dérivée n'existe pas au point $x = 1$. Par contre, elle continue à poser des questions, lorsque Louise essaie de généraliser la dérivabilité de la fonction valeur absolue. En effet, l'élève se demande pourquoi **1** est la valeur critique dans ce cas. Cette interrogation nous donne un indice comme quoi certaines représentations utilisées précédemment par l'enseignante ne sont pas bien comprises. En premier lieu, la représentation de l'équation de la fonction comme une fonction par partie aurait pu faire comprendre à l'élève pourquoi 1 est une valeur critique. De plus, le schéma aurait aussi pu lui fournir cette information. Par contre, on peut penser que comme certaines conversions et transformations appliquées sur ces représentations soient restées sous-entendues, l'élève n'a peut-être pas pu conceptualiser les notions mises en évidence par ces représentations et ainsi, ces dernières ne jouent pas un aussi grand rôle qu'elles auraient pu. Enfin, Louise discute tout de même sur la valeur critique de la fonction valeur absolue. Elle fait apparaître ce qui pourrait s'apparenter à une représentation graphique, mais très spontanée. C'est-à-dire, qu'elle utilise ses mains pour former le V du graphique de la fonction valeur absolue. Par contre, même si l'élève est capable de voir que la valeur critique est à la pointe de ce V, nous doutons qu'elle puisse faire l'association entre la représentation algébrique ($f(x)=|x-1|$) et le graphique. Comme cette représentation n'est pas installée dans un plan cartésien, il peut être difficile pour l'élève de conceptualiser que ce ***-1*** dans l'équation fait subir une translation au « V », ce qui change la valeur critique. Encore une fois, cette coordination comporte des sous-entendus.

Dans sa deuxième explication, Louise décide de discuter de la fonction valeur absolue au tout début. Elle pose alors des questions à l'élève sur le processus de la fonction pour qu'elle rende toujours une valeur positive. Elle fait aussi des représentations algébriques et verbales intermédiaires pour rendre la transformation de l'équation de $f(x)=|x-1|$ à $f(x)=\begin{cases}-x+1 & si \quad x<1 \\ x-1 & si \quad x\geq 1\end{cases}$ plus claire. Ainsi, par la suite, lorsque Louise produit le même schéma que pour l'élève précédente, cet élève semble mieux comprendre et participe même à sa production. C'est lui qui questionne Louise sur la valeur critique $x=1$. Il remarque que le schéma a un point fermé et un ouvert à $x = 1$ (voir figure 4.25). On peut penser que l'élève comprend mieux la situation. Il est conscient qu'il y a une valeur critique et aussi du processus de la fonction. Par contre, nous ne pouvons confirmer que cela est dû au fait que Louise a rendu ces actions plus explicites. Cependant, nous pouvons quand même remarquer que les conversions entre différentes représentations sont plus claires.

Ce n'est qu'après avoir fait ces observations que Louise commence l'exercice. Pour la première partie de l'exercice, l'enseignante rend plus explicite ses manipulations. Par exemple, après avoir évaluée à part $f(3+\Delta x)$ et $f(3)$, elle continue le calcul $f'(3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2+\Delta x-2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$. Il faut mentionner également que l'évaluation de $f(3+\Delta x)$ et $f(3)$ n'a pas causé de difficulté à cet élève. Pour ce faire, Louise a utilisé le schéma et comme il semblait bien le comprendre les manipulations ont été bien faites. Aussi, avant de simplifier $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, l'élève a eu le réflexe d'évaluer la limite. Évidemment, il arrivait à une indétermination, mais il s'est vite rendu compte qu'il pouvait simplifier l'expression et obtenir 1.

Dès que Louise a écrit la deuxième partie de l'exercice, $f'(1)$, l'élève a reconnu que $x = 1$ est une valeur critique. En fait, il dit : « C'est là que ça change ». Nous pensons que le processus explicite de transformation et de conversion (équation, schéma) a contribué à cette remarque de l'élève. L'objectif est déjà plus clair pour lui. À l'aide, du schéma, il a pu prédire que le processus de résolution ne serait pas le même. D'ailleurs, cette fois, pour élaborer sa stratégie de résolution, Louise fait une prédiction du problème plus explicite. L'élève est facilement capable de repérer l'objectif, calculer la limite à gauche et la limite à droite et les comparer. Pour évaluer ces deux limites, l'enseignante est aussi plus explicite. En effet, comme pour $f'(3)$, elle utilise des représentations algébriques écrites pour exprimer toutes les étapes de la transformation. Elle prend aussi soin de discuter de $f(1)$ à haute voix et d'écrire le zéro dans une représentation, ce qu'elle n'avait pas fait dans l'explication précédente. Pour la limite à droite, elle va un peu plus vite, mais elle s'assure tout de même que l'élève comprend. En effet, elle remplace directement le $f(1+\Delta x)$ et le $f(1)$ dans la représentation de la limite. C'est-à-dire qu'elle les évalue mentalement et effectue la transformation de la limite en même temps. Comme elle avait rendu le processus explicite dans l'exemple précédent (avec la limite à gauche), nous pensons que l'idée de le faire mentalement cette fois est intéressante. En effet, nous pouvons penser que l'élève avait bien compris le processus pour la limite à gauche. Alors, il est intéressant de pousser le degré de conceptualisation un peu plus loin en faisant appel à des représentations mentales (comme on s'est d'abord assuré que le processus était clair). L'élève semble pouvoir suivre en faisant aussi un certain processus mental et arrive à conclure que la fonction n'est pas dérivable en $x = 1$. On peut mentionner que cette fois Louise n'a pas recours à une représentation graphique. Même si la précédente était spontanée (le V avec les mains), elle ne s'y réfère pas pour cet élève.

Comme deux autres élèves viennent poser la même question, Louise décide, en accord avec le groupe, de faire l'exercice au tableau. Nous ne parlerons que de certains épisodes de cette explication puisqu'elle ressemble beaucoup à celle faite au deuxième élève, dans l'ordre des interventions et dans les représentations utilisées. En effet, elle commence par étudier la fonction valeur absolue en effectuant explicitement les transformations algébriques sur l'équation de $f(x)$ et en produisant le même schéma que précédemment. Dans son étude de la fonction algébriquement, elle ajoute des exemples dans le registre numérique (elle calcule $|5|$ et $|-3|$) pour rendre explicite le processus de la fonction. Un élève parle de ce qui se passe à $x = 1$ et Louise précise que le 1 pourrait être associé à l'une ou l'autre des parties de la fonction, mais que par convention, elle le met avec la partie associée aux valeurs plus grandes que 1.

Une autre discussion qui a eu lieu lors de la résolution de l'exercice en groupe concerne la continuité. En effet, un élève avait la conception que comme c'est une fonction par partie, elle était discontinue (conception intuitive que l'on trouve chez les étudiants et certains enseignants, voir Hitt, 1994). Louise a dû rectifier cette idée en précisant que la fonction était bel et bien continue. Elle a aussi ajouté qu'elle était continue, mais non dérivable. Les conditions de la continuité d'une fonction n'ont pas été évoquées.

Plus tard, après qu'elle ait déterminé la stratégie à adopter (limite à gauche et limite à droite) et qu'elle ait évalué la limite à gauche, elle se rend compte que les élèves ne sont pas concentrés. En effet, comme elle continuait de leur poser des questions régulièrement, elle a bien observé qu'elle avait de moins en moins de réponse. Alors, elle a pris une courte pause et a repris ses explications à partir du calcul de $f'(1)$ et a pu terminer l'exemple.

Enfin, nous voulons ajouter que Louise dans son vocabulaire fait souvent référence à l'infini potentiel. Elle parle souvent de s'approcher vers la gauche ou la droite. Cette vision est aussi ressentie dans le traitement de son schéma. Elle parle de sa « position » par rapport à un « avant » ou « après » et elle ne mentionne que rarement ce qui arrive quand $x = 1$. D'ailleurs, on peut aussi se poser la question pourquoi elle utilise ce schéma. Il est vrai qu'il est utile et amène des éléments importants pour la compréhension des élèves, mais la question est : pourquoi pas un graphique? Depuis le début de nos observations, Louise est attachée à des représentations qui sont plus formelles, il est étonnant de voir comment cette fois, elle utilise une représentation fonctionnelle. Qui plus est, les élèves qui sont venus la voir individuellement semblaient connaître l'allure du graphique de la fonction valeur absolue.

4.2.3.7 Résumé de l'analyse de la séance #3

Analyse centrée sur l'enseignante :

a) Louise a rarement recours, de façon intuitive à une représentation graphique. D'ailleurs, elle n'en utilise aucune (une seule référence en faisant le graphique avec ses mains) lors de ses explications individuelles aux élèves.

b) Louise pose encore beaucoup de questions aux élèves et fait parfois appel à leur représentation spontanée ou intuitive. Par exemple, elle leur demande leur idée sur le théorème qu'elle énonce avant de le prouver. Elle amène souvent les théorèmes sous forme de questions.

c) Elle utilise le signe d'implication et quelques règles de l'implication (logique), mais elle ne rend pas ce processus explicite aux élèves. Par exemple, elle mentionne que la flèche (l'implication) est seulement d'un côté, sans préciser ce que cela comporte comme conséquence.

d) On retrouve beaucoup de sous-entendus dans les explications de Louise. Par contre, on voit qu'elle ajuste son utilisation des représentations et rend les processus plus explicites pour les élèves. En effet, lors de sa deuxième explication, elle utilise plus de représentation et les actions posées sur celles-ci sont plus claires.

e) Elle répète souvent que l'association entre la dérivée (et les différents synonymes en mots) et sa représentation algébrique (la limite) doit devenir un automatisme. Nous associons ces répétitions à la promotion d'un apprentissage plus axé sur les procédures que sur une approche conceptuelle.

f) Le discours de l'enseignante est souvent lié à une vision de l'infini potentiel.

Analyse centrée sur les élèves :

A) Les élèves éprouvent plus de difficultés avec les problèmes contextualisés ou de type non-routinier. En effet, une élève en a fait mention explicitement.

B) Leur vision de l'infini est liée à l'infini potentiel. Ceci est peu étonnant étant donné que l'enseignante utilise des représentations très liées à cette vision.

C) Il est difficile de dire si les élèves comprennent bien le processus de limite liée à la dérivée. En effet, on peut imaginer qu'ils ont une image plus associée à la droite tangente en tant qu'objet statique qu'au processus qui transforme une droite sécante en droite tangente.

4.3 Analyse des séances en classe de Josée

4.3.1 La première séance : Vers la dérivée

La première chose que Josée fait à chaque cours est d'écrire un ordre du jour au tableau. Pour aujourd'hui, le menu est un retour sur le mini-test fait la veille, la vitesse moyenne et la vitesse instantanée, la droite tangente. Bien que les élèves ne sachent pas encore nécessairement à quoi servent ces termes, ils ne manqueront pas de le consulter pour répondre aux questions de l'enseignante tout au long de la leçon.

Donc, telle qu'elle l'a annoncé, Josée fait une brève allusion au mini-test qu'ils ont fait pendant le cours précédent. Elle précise qu'elle est très contente des résultats et que le seul élément qu'elle a remarqué était au niveau de la rigueur mathématique. En effet, l'enseignante annonce aux élèves qu'ils ont eu de la difficulté avec l'écriture. Cette remarque nous prévient que Josée est très attachée à la rigueur mathématique. Cependant, comme elle fait allusion à l'écriture, nous pouvons penser que pour Josée la rigueur mathématique est associée au registre algébrique. Nous essaierons d'éclaircir ce point dans l'analyse de cette séance.

Lors du retour sur le mini-test, elle fait aussi allusion à un rapport qui leur a causé de la difficulté : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Elle l'écrit tout de suite au tableau et annonce qu'il sera l'objet de la leçon d'aujourd'hui. Il est à noter qu'elle conservera cette représentation verbale « rapport » pendant un long moment dans la leçon.

4.3.1.1 Taux de variation et vitesse moyenne

Pour débuter réellement la leçon, elle écrit une autre expression, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, au tableau qu'elle désigne également par le mot « rapport ». Elle s'intéresse ensuite aux représentations spontanées des élèves par rapport à cette expression : « Est-ce que ça vous dit de quoi? » Une élève répond que c'est une vitesse moyenne. Cette représentation fonctionnelle est intéressante. L'élève associe le taux de variation directement à un contexte précis. Nous pouvons penser que cette réaction de l'élève vient de l'institution. En effet, le taux de variation moyen est souvent introduit, dans les manuels ou les cours, avec le contexte de vitesse. Il est possible de penser que l'interprétation des représentations, en contexte vers général, a peut-être mal été institutionnalisée. Ainsi, l'élève conserve la représentation en contexte de cette expression. Cela dit, Josée est bien contente d'obtenir cette réponse, elle l'écrit d'ailleurs au tableau (représentation verbale écrite). Elle en cherche d'autres, mais comme les élèves n'ajoutent rien, elle poursuit avec deux représentations (algébrique et verbale) et elle y ajoute un graphique (voir figure 4.26).

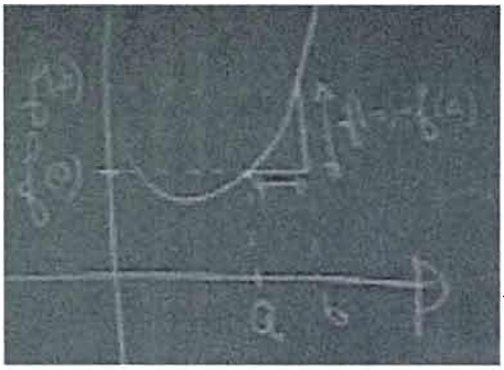


Figure 4.26: Représentation graphique d'un taux de variation (3:12)

Ce graphique est une représentation institutionnelle que l'on peut voir assez souvent dans les manuels, entre autres: une parabole ouverte vers le haut, visible dans le premier quadrant seulement, les mesures sont reportées sur les axes pour trouver les coordonnées, l'utilisation de (a, f(a)) et (b, f(b)) comme points. De plus, elle utilise aussi un langage formel pour désigner les points en traçant le graphique : « c'est l'image de a, c'est f de a [$f(a)$] ». Elle porte ensuite l'attention des élèves sur la variation entre $f(a)$ et $f(b)$ en traçant les marches d'accroissement sur le graphique, sans tracer la droite sécante. Elle interroge les élèves sur la notation de cet « écart ». Josée fait ainsi une conversion de la représentation graphique vers une représentation algébrique ou vice versa puisque la représentation algébrique a déjà été donnée (l'idée, c'est de la retrouver). Elle fait notamment le même processus pour la variation entre ***a*** et ***b***. Elle retourne voir les représentations des élèves. Josée leur demande à nouveau, mais maintenant avec l'appui du graphique, si ce rapport (celui des deux écarts) leur rappelle quelque chose. Elle trouve presque immédiatement la réponse qu'elle semblait attendre: la pente. Donc, si la représentation algébrique était associée à une représentation verbale en contexte, la représentation graphique est liée à l'idée de pente. On peut se demander pourquoi la représentation verbale « taux de variation » n'est pas sortie encore. Ceci peut être un autre indice qu'au niveau de l'institution, le concept de pente est fortement associé à une représentation graphique.

Après avoir fait sortir l'idée de pente, elle cherche à savoir c'est la pente de quoi. Les élèves répondent que c'est la pente de la tangente. Josée fait immédiatement l'hypothèse que les élèves ont pris cette réponse dans l'ordre du jour qui est écrit au tableau. Elle ne retient pas cette réponse et parle de la droite qui relie ces deux points. Cette représentation reste vague, fonctionnelle. Cette droite est en fait une droite sécante, mais Josée n'a pas introduit cette représentation institutionnelle. Elle coordonne finalement toutes ces représentations en disant que la façon de calculer cette pente, qu'elle pointe au tableau, c'est ce rapport, également écrit au tableau (coordination algébrique et graphique).

Par la suite, nous pensons que Josée a eu le souci d'institutionnaliser ces propos. En effet, elle commence par la production d'une nouvelle représentation verbale, détachée de tout contexte ou de représentation graphique, le taux de variation. Pour accompagner son discours (représentations verbales), elle écrit au tableau : pente de la droite $\boldsymbol{AB}$, taux de variation. Elle ajoute également sur son graphique un $\boldsymbol{A}$ et un $\boldsymbol{B}$ sur les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Elle se préoccupe de bien coordonner le graphique avec sa représentation écrite. Nous nous demandons si de parler de la droite $\boldsymbol{AB}$ pourrait faire référence à une droite finie, ce qui n'est pas le cas ici.

Elle cherche ensuite à avoir des exemples des élèves pour un taux de variation. Comme personne n'en donne, elle se lance dans une énumération de différents contextes ayant un taux de variation. Elle mentionne la vitesse de propagation d'un virus, la croissance d'une population, la vitesse de déplacement et finalement un exemple un peu confus, le dosage d'un médicament qui finit en fait par être le taux d'hormone dans le sang selon la concentration de ce médicament. Il est intéressant de noter que trois des quatre contextes nommés par l'enseignante sont aussi des exemples donnés par le manuel, ceci est un indice que le manuel a probablement une place importante dans la préparation de l'enseignante.

4.3.1.2 Un premier exemple : la masse d'un bébé

Maintenant qu'elle a introduit les représentations verbales « vitesse moyenne », « pente et taux de variation », qu'elle en a donné une représentation algébrique, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, et une représentation graphique (voir figure 4.26), Josée commence à traiter un premier exemple en contexte. Elle commence par tracer un nouveau graphique très semblable. Elle identifie l'axe horizontal comme étant le temps *en mois* et l'axe vertical comme étant *la masse d'un bébé*. En fait, nous croyons qu'elle cherche à faire une coordination entre la situation en mots et le graphique. Par contre, elle n'a pas vraiment énoncé la situation, on la déduit à travers la construction du graphique, comme si elle produisait deux représentations en même temps : elle étudie l'évolution de la masse d'un bébé par rapport au temps en mois.

La courbe que Josée a tracée ne représente pas vraiment la situation dont elle parle. D'ailleurs, elle précise aux élèves : « Je vous donne une forme, mais vraiment une forme... comme ça, au hasard. » On peut en conclure que la représentation graphique est une représentation spontanée de l'enseignante et qu'elle n'est pas en lien avec un contexte précis. Elle ne s'assure pas que la coordination entre le graphique et la situation peut être faite de façon efficace. En effet, si l'on essaie d'interpréter le graphique (voir figure 4.27) par rapport à la situation, certains éléments ne se coordonnent pas. Par exemple, la courbe se poursuit dans le deuxième quadrant. Ce pourrait être interprété comme étant la masse du bébé pendant qu'il est encore dans le ventre de la mère, mais dans ce cas, la courbe ne devrait certainement pas être décroissante. Ainsi, l'utilisation de cette représentation graphique est floue. En effet, tout en faisant la promotion d'une telle utilisation, l'enseignante montre en même temps que le type de représentation graphique utilisé a peu d'importance pour elle. Cependant, rappelons que Josée au tout début de la leçon a parlé de rigueur mathématique. On peut penser que pour Josée, la rigueur mathématique soit davantage associée au registre algébrique qu'au registre graphique.

Voyons tout de même comment elle traite cet exemple. Elle place les points $(2, m(2))$ et $(4, m(4))$ sur le graphique (voir figure 4.27) et demande aux élèves comment trouver le taux de variation entre ces deux points. Les élèves savent bien coordonner la question, le graphique et la représentation algébrique vus précédemment. Le groupe obtient alors la formule $\frac{m(4)-m(2)}{4-2}$.

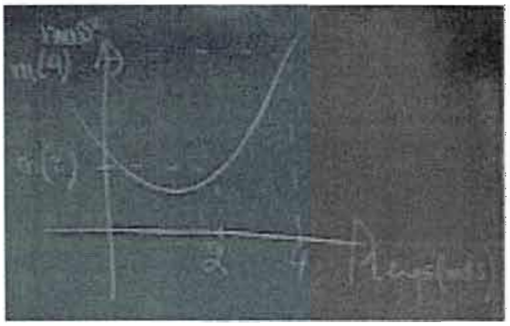


Figure 4.27: Représentation graphique de l'exemple 1 (6:50)

Il est intéressant de voir que même si elle utilise un contexte, Josée conserve des représentations algébriques formelles. En effet, elle n'effectue pas la conversion vers une représentation numérique, par exemple. En contexte, il aurait été possible de donner des valeurs à m(4) et m(2) pour pouvoir calculer réellement le taux de variation. Il est envisageable que Josée trouve inutile d'effectuer cette précision puisque ce concept a déjà été étudié par les élèves. Elle pense probablement qu'ils pourront aisément interpréter ce rapport sans nécessairement avoir besoin d'une valeur exacte.

Justement, elle cherche à savoir comment les élèves interprèteraient ce rapport en contexte. Une élève revient avec le concept de moyenne, la même élève d'ailleurs qui avait suggéré l'idée de vitesse moyenne au début de la leçon. Josée précise en disant : « C'est EN MOYENNE... [pause] Je saurai de combien sa masse a augmenté. En moyenne... c'est ça? De combien sa masse a augmenté par mois. » Le concept de moyenne est un peu nouveau dans la leçon jusqu'ici. Même s'ils ont parlé de vitesse moyenne au début, le sens de ce terme n'a pas vraiment été défini encore. Ils ont parlé de taux de variation, mais pas de taux de variation moyen. Ce qui nous amène à nous questionner sur le sens de ce dernier terme. Il est vrai que le taux de variation moyen est un taux de variation. Par contre, nous pensons que le terme « moyen » sert à préciser le type de droite que nous observons. En effet, c'est ce terme, « moyen », qui fait la distinction entre le traitement d'une droite en général et le traitement d'une droite sécante à une courbe. Tout est dans l'objet d'étude. Ici, c'est la courbe qui nous intéresse. On calcule le taux de variation moyen sur des intervalles pour mieux comprendre cette courbe. Dans un cas général du taux de variation, l'objet de l'étude est la droite. On peut aussi souligner que le concept de taux en soi indique l'idée d'une moyenne. On se demande alors si ce n'est pas un pléonasme, ou un abus de langage que d'utiliser ces deux termes dans la même représentation. Ce n'est pas une erreur que de parler de taux de variation quand on parle du taux de variation moyen, mais nous pensons que la précision aide l'élève à se repérer.

4.3.1.3 Un deuxième exemple : un trajet en voiture

Ensuite, Josée passe à un autre exemple dans un contexte plus connu. D'abord, observons le début de la mise en situation. En fait, dès le début, elle utilise simultanément deux registres pour expliquer le contexte : le registre graphique et le registre verbal oral. Par contre, on observe un décalage entre ces deux représentations. La représentation graphique ne représente pas exactement la modélisation du problème. On peut penser qu'en voulant coordonner ces deux types de représentations, Josée a omis certains détails et ce, pour la deuxième fois dans cette leçon.

Essayons d'abord de décrire la situation que l'enseignante a probablement voulu construire. Précisons que par souci d'anonymat, comme l'enseignante utilise les noms de villes réels de la région, nous avons préféré les remplacer. Alors, une personne fait un parcours en voiture de Ville 1 à Ville 2. On s'intéresse au temps écoulé comme variable indépendante et à la distance parcourue comme variable dépendante. On observe, en premier lieu, la vitesse moyenne entre les deux villes et aussi la vitesse moyenne entre d'autres villes pendant le trajet. Plus tard, nous voudrons calculer la vitesse instantanée pour un moment donné. Pour ce faire, il faut mathématiser la situation et considérer les villes comme des points, avec une distance et un temps qui y sont associés. Ainsi, nous allons parler de la vitesse instantanée à la Ville 3 (cette partie sera décrite plus loin), la Ville 3 étant considérée comme un point.

Voyons maintenant la représentation graphique que Josée a faite de la situation (voir figure 4.28). Une fois de plus, elle dit aux élèves qu'elle prend la même forme que pour l'autre situation et que ça ne veut pas dire que ça représente la situation. On peut se demander, pourquoi elle utilise une représentation graphique dans le cas où elle ne représente pas vraiment la situation. Nous pouvons faire l'hypothèse que l'institution est à l'origine de cette utilisation, c'est-à-dire qu'elle fait comme dans le manuel et c'est tout. De plus, la formation de Josée, qui est double, peut aussi être à l'origine de ce choix. En effet, on remarque que Josée est probablement plus à l'aise avec le registre algébrique en accord avec sa formation en mathématiques. D'autre part, sa formation en didactique peut l'amener à considérer l'utilisation de graphiques et de contextes dans son enseignement. Cependant, elle n'est peut-être pas en mesure de contrôler cette utilisation.

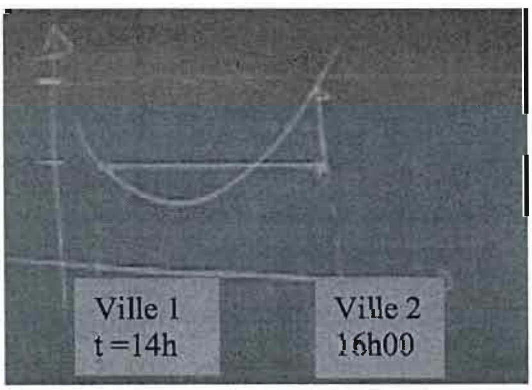


Figure 4.28: Représentation graphique de l'exemple 2 (9:19)

Notamment, la courbe utilisée pour modéliser la situation n'est pas cohérente avec les explications données verbalement. Pour cette situation, on devrait avoir fait une désignation des axes en premier (le temps comme variable indépendante représentée dans l'axe horizontal, et la distance parcourue comme variable dépendante, représentée dans l'axe vertical). Or, l'enseignante écrit à une position sur l'axe horizontal deux noms, le nom d'une ville (qu'elle désigne oralement comme sa position) et un moment de la journée et n'identifie pas du tout pour l'instant l'axe vertical (elle ajoutera plus tard l'abréviation « dist » pour désigner deux endroits sur l'axe vertical). Ceci peut être à l'origine de difficultés de coordination chez les élèves. L'interprétation que l'on peut faire malgré le mélange des notations est que l'axe horizontal représente les heures pendant une journée (14h00 et 16h00). On peut supposer que l'origine, pour elle, est probablement 0h00, même si dans ce cas, la graduation de l'axe serait imprécise. Alors, étant donné la situation et la courbe du graphique, on peut penser que pour aller de Ville 1 à Ville 2, on fait d'abord un déplacement négatif jusqu'à une certaine ville ou un certain moment, ce qui veut dire que la distance parcourue diminue. Ceci est difficile à interpréter dans ce contexte. En plus, Josée ne fait pas cet exercice d'interprétation du graphique (conversion du graphique vers une représentation verbale). Donc, elle ne voit pas que les deux représentations sont incohérentes et ne peut donc pas montrer aux élèves comment faire une telle conversion.

Elle essaie quand même de clarifier un peu la représentation graphique plus loin (voir extrait 4.16). Verbalement, elle désigne l'axe vertical comme étant une distance en pointant des points en tant que position à une certaine ville.

> J : [...] Là [position sur l'axe des y], c'est ma position à Ville 1. Je m'en vais à Ville 2. Je suis rendue à Ville 2 après tant d'heures. Disons ici [heure de départ], c'est à 14h00. Ça prend combien de temps?
>
> É1 : 1h30.
>
> J : Disons que je respecte trop mes limites de temps [elle écrit 16h00 sous Ville 2 pour l'heure d'arrivée]. Je suis rendue à Ville 2. Je connais ma position à Ville 1 et je connais ma position à Ville 2 [elle l'indique sur l'axe des y]. Donc, je calcule... ce n'est pas évident de l'avoir ici. Comment je calcule le taux de variation? Ça me donnerait quoi? [Voir figure 4.28] Entre les deux points? Je ne sais pas si vous voyez. Non, ce n'est pas clair?

Extrait 4.16: Tentative de clarification du graphique (8:27)

Alors, lorsqu'elle demande aux élèves d'interpréter le taux de variation après avoir tracé les marches d'accroissement entre Ville 1 et Ville 2, un élève répond que c'est le temps que ça prend. Ce dont il parle, c'est la variation du temps (variable indépendante) plutôt que le taux de variation. Josée revient sur le graphique et revoit chacune des variations. Elle demande aux élèves ce que représente l'écart entre les deux distances qu'elle pointe sur l'axe vertical. Les élèves répondent qu'il s'agit de la distance. Elle commence par accepter cette réponse, mais précise ensuite que c'est une distance parcourue entre la Ville 1 et la Ville 2, que c'est un écart. Les représentations verbales qu'elle utilise à ce moment sont claires. Par contre, on peut encore une fois remarquer que le graphique n'est pas cohérent avec ces représentations puisque l'écart sur le graphique ne représente pas la distance parcourue entre les deux villes. Ensuite, elle ramène l'idée du temps écoulé et du rapport entre ces deux écarts qui représente le taux de variation. Elle fait référence à une représentation algébrique et une représentation verbale institutionnelle. Elle mentionne à nouveau le rapport, mais cette fois elle dit « le rapport de la distance sur le temps », alors qu'il s'agit en fait du rapport de la variation de la distance sur la variation du temps. Elle utilise une représentation verbale que l'on peut retrouver parfois dans le vocabulaire des élèves.

Josée passe ensuite à l'interprétation de ce taux de variation que les élèves identifient comme la vitesse. Elle précise en disant vitesse moyenne et en donnant un exemple (voir extrait 4.17). Elle interprète la vitesse moyenne comme étant une « vitesse à peu près ». Elle a raison lorsqu'elle propose aux élèves différentes vitesses réelles possibles en un point de l'intervalle si on connaît la vitesse moyenne sur cet intervalle. Par contre, elle ne peut pas dire que c'est à peu près 90. En effet, la vitesse peut être 50 km/h, ce qui est loin d'être 90 km/h. Cette représentation verbale (« à peu près ») est le reflet d'une fausse conception de la moyenne (Johnson, 1985 dans Gattuso et Mary, 2005).

J : Vitesse? Vitesse moyenne! Vous voyez? Si je trouve que cette vitesse, elle est par exemple, 90. Qu'est-ce que ça veut dire? En mots.

És : On va à à peu près 90.

És : En moyenne.

J : À peu près, entre Ville 1 et Ville 2, je roulais à 90. Rendu à Ville 3, à combien je roulais?
É1 : À 50. [Note : La limite de vitesse dans Ville 3 est de 50 km/h.]
J : À 50, bon très bien. Ça peut être 50, ça peut être 60, ça peut être 70. Je ne peux pas donner comme ça la valeur exacte. Par contre, j'ai une idée que...en moyenne, entre les deux, c'est 90. Cependant, ma vitesse elle, à chaque point, que ce soit à Ville 2 ou à Ville 4 ou peu importe, elle peut varier. Elle peut être 100, elle peut être 110, 50, 30.

Extrait 4.17: Interprétation du taux de variation moyen dans la situation donnée (10:06)

Un autre élément est intéressant dans cet extrait. Lorsque l'enseignante demande la vitesse rendue à la Ville 3, un élève répond 50 km/h. On peut interpréter un possible décalage entre la vision de Josée et celle de l'élève. En effet, elle voit la Ville 3 comme un point (comme nous l'avons supposé dans l'énoncé du problème), mais nous pensons que l'élève voit plutôt Ville 3 comme un intervalle. En effet, il est bien connu dans la région que la vitesse limite sur la rue principale de ce village est de 50 km/h. Nous pensons que la réponse de l'élève est beaucoup plus liée à ce fait qu'à une compréhension de ce que l'enseignante voulait transmettre.

Dans l'étape suivante de son exemple, Josée désire obtenir une représentation algébrique de sa situation, c'est-à-dire du taux de variation moyen entre la Ville 1 et la Ville 2. Cependant, lorsqu'elle arrive pour écrire le rapport désiré, elle a besoin d'un moment pour réfléchir. Elle décide alors de nommer la courbe f et de nommer les points (avec une troisième représentation) $(a, f(a))$ pour la Ville 1 et $(b, f(b))$ pour la Ville 2. Ainsi, elle obtient une représentation algébrique en contexte qui est exactement la même que celle introduite auparavant hors contexte ($\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$). Josée s'est complètement détachée de son contexte. On ne peut pas dire qu'elle a effectué une réelle conversion vers la représentation algébrique, puisqu'elle a « arrangé » la représentation graphique pour pouvoir avoir une représentation algébrique connue.

Dans les minutes suivantes, l'enseignante introduira le concept de taux de variation instantané. Elle parle d'abord en utilisant une représentation fonctionnelle, une idée intuitive du taux de variation instantané. Elle cherche la vitesse à une Ville en particulier (Ville 5) et lorsqu'elle demande comment faire, Mathieu, un élève, répond qu'il faut trouver la tangente. Cette fois-ci nous pensons que l'élève ne fait pas que copier ce qui est écrit à l'ordre du jour. Il a probablement réellement l'intuition que si on veut trouver la vitesse en un point, il faut trouver une droite qui passe seulement par ce point, mais ce n'est qu'une hypothèse. Même si Josée essaie pendant un court moment de comprendre ce qu'il veut dire et surtout pourquoi il a eu cette idée, elle préfère délaisser cette réponse pour l'instant. Nous pensons qu'elle veut vraiment passer par une approche intuitive vers le concept de taux de variation instantanée qui implique une limite. À cette fin, elle retourne vers le taux de variation moyen. Elle fait référence à des taux de variations moyens entre Ville 5 et des villes de plus en plus proches de Ville 5. Même si elle ne fait que référence à différents taux de variation moyens sans mentionner explicitement que les villes qu'elle considère sont de plus en plus proches de Ville 5, Mathieu reconnaît le concept de limite. Josée lui demande quelques précisions, mais comme les réponses de Mathieu ne sont pas très claires et surtout parce qu'il va probablement un peu trop vite, elle esquive le commentaire de l'élève pour retourner à son explication.

Cette fois-ci, elle utilisera la représentation graphique pour pouvoir effectuer la conversion vers la représentation algébrique. Pour que cette conversion se fasse de façon efficace, elle fait intervenir des représentations verbales orales qui sont propres au concept de limite, ce vers quoi elle veut aller (voir extrait 4.18). Pour bien analyser ce passage, il faut aussi considérer les gestes que Josée fait en verbalisant son idée. En effet, elle fait le geste de deux points qui se rapprochent sur une droite horizontale imaginaire en utilisant les noms de Villes qui se rapprochent de la Ville 5. Rappelons qu'elle avait associé les noms de ville à des points. Cependant, plus loin, elle parle de raccourcir la distance sur laquelle elle va calculer la vitesse moyenne. La distance étant associée à l'axe vertical, la représentation peut être confuse pour les élèves. Par ces gestes nous comprenons bien qu'elle continue de parler de la variable indépendante, mais il demeure que les représentations verbales sont remplies de sous-entendus et créent potentiellement des difficultés aux élèves dans ce cas.

J : Regardez. Plus j'avance ou plus je m'approche de Ville 5 [elle fait rapprocher ces deux mains sur une ligne horizontale imaginaire] ou plus je calcule ma vitesse moyenne entre une ville qui est plus proche de Ville 5...qu'est-ce qui arrive? Si je calcule ma vitesse entre Ville 5 et Ville 1, ça me donne une vitesse moyenne à laquelle j'ai roulé, mais ça reste tout de même que ça ne me donne pas une idée très précise sur ma vitesse à Ville 5. Si je calcule maintenant, par exemple, ma vitesse entre Ville 7 et Ville 5, ça va me donner toujours, ma vitesse moyenne entre Ville 7 et Ville 5. Vous me suivez? Si par contre, je m'approche, je suis rendue à Ville 8. Qu'est-ce que ça va me donner?

É6 : Ben...

J : Vous êtes perdus?

É8 : Ben non, dans le fond, plus qu'on va s'approcher plus qu'on va arriver proche de la vitesse.

É4 : Dans le fond... il faut calculer la limite dans le fond.

J : Plus je raccourci la distance sur laquelle je vais calculer la vitesse moyenne, qu'est-ce qui va arriver?

É6 : On va s'approcher de la valeur.

J : Plus je m'approche de la vitesse réelle à ce moment-là.

É6 : Il faut calculer la limite dans le fond.

Extrait 4.18: Conversion vers la représentation algébrique du taux de variation instantané (13:13)

À la fin de l'extrait 4.18, les élèves identifient le concept de limite. Alors, Josée introduit le terme « vitesse instantanée » en précisant qu'il correspond à la vitesse exacte à la Ville 5. Pour la trouver cette vitesse, elle dit qu'elle prend ses vitesses moyennes et elle les « approche davantage du moment où je serai à Ville 5 ». Notons que c'est la première fois qu'elle parle de s'approcher d'un « moment » dans toute sa verbalisation pour la limite. Ici, on peut dire que la situation est chaotique. En effet, Ville 5 a été placée sur l'axe de la variable indépendante, le temps, et elle parle de s'approcher de la Ville 5. Quelle variable est en jeu? Elle s'approche d'un point de vue physique, alors on parle de réduction de la distance, mais elle fait référence à l'axe horizontal, qui est lié au temps.

Elle continue la conversion en faisant intervenir cette fois le registre verbal écrit. Elle a recours à un mélange entre la représentation verbale écrite et la représentation algébrique. Notamment, la notation qu'elle utilise fait référence au registre algébrique en y faisant intervenir des symboles qui sont associées à ce registre comme le signe d'égalité ou l'écriture en indice (voir figure 4.29). Elle verbalise finalement la vitesse instantanée comme étant la limite des vitesses moyennes, sans spécifier la limite par rapport à quoi.

Figure 4.29: Représentation verbale écrite de la vitesse instantanée (15 :02)

Elle termine la conversion en retournant vers la représentation algébrique de la vitesse moyenne (voir figure 4.30). Elle essaie de faire un parallèle avec le contexte en associant ***b*** d'abord à la Ville 5 puis ensuite à la Ville 1 et ***a*** à la Ville 5. Donc, elle parle toujours de se rapprocher davantage de Ville 5 (voir extrait 4.19). On peut déduire que ***a*** est fixe et que ***b*** devra s'en approcher. Un élève fait d'ailleurs un nouveau parallèle avec le contexte en précisant que c'est le temps qu'on fait varier. C'est intéressant que l'élève ait pu faire la coordination des représentations (graphique, verbale et algébrique). Or, Josée revient avec la représentation que c'est ***b*** qui varie et non le temps. Elle formule finalement une représentation verbale institutionnelle « il faut que mon ***b*** tende vers ***a*** » et complète la représentation algébrique de la vitesse instantanée (voir figure 4.31).

Figure 4.30: Représentation algébrique de la vitesse moyenne (15:36)

J: Quand je m'approche davantage de Ville 5, ma vitesse moyenne, elle va aller vers la valeur de ma vitesse instantanée. C'est-à-dire, c'est une limite de ***f*** de ***b*** moins ***f*** de ***a*** [$\lim \frac{f(b)-f(a)}{\quad}$], disons que mon ***a*** c'est Ville 5. Mon ***b***, qu'est-ce que je ferais varier?

É3: Le temps!

J: b. C'est que ***b***, je m'approche davantage de Ville 5, c'est-à-dire qu'il faut que mon ***b*** tende vers ***a***.

Extrait 4.19: Vers la représentation algébrique de la vitesse instantanée (16:00)

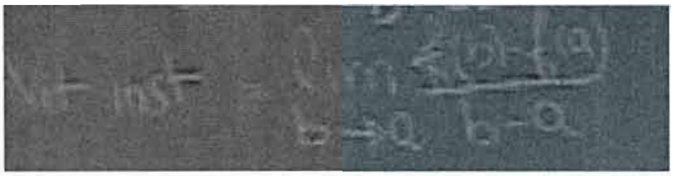


Figure 4.31: Représentation algébrique de la vitesse instantanée (16:41)

Même si elle a fait référence au contexte à quelques reprises pendant la production de la représentation algébrique, cette dernière demeure dénuée de contexte. Mis à part le fait qu'elle nomme cette représentation la vitesse instantanée plutôt que le taux de variation instantané, rien ne nous dit que cette formule est liée à un contexte.

Finalement, elle fait un retour vers le registre graphique (voir figure 4.32) pour expliquer le phénomène de la limite. Encore une fois, Josée a recours à une gestuelle pour appuyer sa verbalisation. En fait, elle trace un nouveau graphique, très semblable aux deux autres, pour montrer l'évolution de droites sécantes vers une droite tangente.

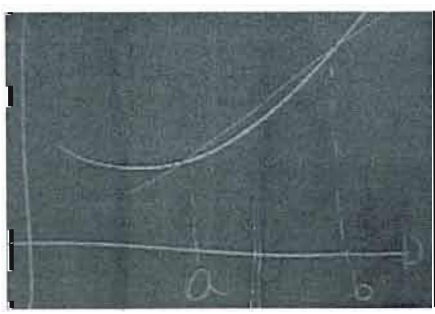


Figure 4.32: Vers une visualisation du concept de limite (17:27)

Avant de tracer une deuxième droite sécante, elle fait référence au contexte de l'exemple en disant qu'elle se rapproche de la Ville 5 et fait une marque sur l'axe horizontal. Pourtant, la représentation graphique nous laisse penser qu'elle veut faire une représentation plus générale, pas nécessairement reliée au contexte. D'ailleurs, elle ne fait référence que verbalement à la Ville 5. Elle prend soin de nommer les droites sécantes sur le graphique : vit 1 et vit 2. Pourtant, la droite ne représente pas vraiment la vitesse, c'est plutôt la pente de cette droite qui donne la vitesse. Avec cette deuxième droite, elle fait la coordination entre la représentation verbale « vitesse moyenne » et la pente de cette droite. Elle se rapproche une troisième fois de Ville 5, verbalement, mais de ***a*** sur le graphique et elle fait la coordination entre la vitesse moyenne. Mentionnons que Josée dans toutes ces explications, parle de droite qui relie deux points, de droite entre deux points, mais jamais elle ne parle de droite sécante.

Les élèves remarquent que la droite s'incline de plus en plus. Josée, elle, dit plutôt qu'elle bascule et qu'à un certain moment, elle va devenir... et Mathieu reconnaît le concept de tangente. Josée est surprise de trouver si rapidement le terme qu'elle cherchait. Elle s'informe aux élèves s'ils connaissaient déjà le concept de tangente. Plusieurs répondent que oui, donc Josée tient cette réponse pour acquise et trace la tangente sur le graphique (voir figure 4.33). C'est un indice qu'elle ne reviendra probablement pas sur ce concept.

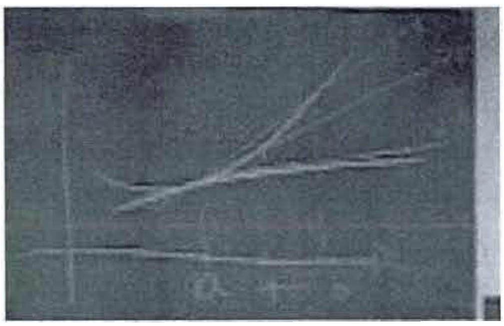


Figure 4.33: Représentation graphique du taux de variation instantanée (19:08)

Il est bien de remarquer que la représentation graphique que Josée vient de faire est pratiquement la même que celle que l'on retrouve dans le manuel (Hamel et Amyotte, 2007, p. 71). On l'associe alors à une représentation institutionnelle.

Enfin, elle fait une coordination des différentes représentations qui sont au tableau ou qu'elle a verbalisées. Elle pointe la représentation algébrique de la vitesse moyenne en disant que ça donne la pente qui relie deux points (sans mentionner le concept de droite sécante). Après, elle pointe la représentation algébrique de la vitesse instantanée en disant que ça donne en fait la pente de la tangente au point $(a, f(a))$, qu'elle écrit également en mot au tableau.

On remarque que tout au long de cet épisode, même si Josée semble vouloir généraliser les concepts, elle ne parle que très rarement de taux de variation. En effet, elle parle de vitesse moyenne et de vitesse instantanée qui sont des représentations liées à un contexte. Pourtant, elle ne reste pas vraiment dans le contexte quand il s'agit de la représentation graphique ou algébrique.

4.3.1.4 Retour vers le deuxième exemple

Comme elle a introduit le concept de taux de variation instantané (vitesse instantanée), elle retourne vers son exemple de la masse d'un bébé dans le temps. Elle efface le graphique qui est au tableau, en laissant les formules, et refait le graphique du premier exemple (voir figure 4.27) en identifiant bien les axes. Elle produit aussi dans ce court épisode plusieurs représentations verbales différentes pour exprimer le concept de taux de variation instantané dans le contexte (voir tableau 4.1).

Tableau 4.1: Représentations verbales pour le taux de variation instantanée dans le contexte de la masse

#	Représentation verbale	Moment
#1	« Et je veux évaluer comment la masse a changé <u>en</u> deux mois [elle entoure le point (2, m(2)) sur la courbe dans le graphique]. »	20 :40
#2	« De combien elle a augmenté la masse de ce bébé? »	20 :50
#3	« À deux mois exactement, je veux savoir la vitesse à laquelle le poids a augmenté. »	21 :10

#4	« Ce n'est pas une vitesse en fait, c'est la variation du poids après deux mois, plus exactement. »	21 :17
#5	« Ici, on ne peut pas aller en deux mois et donner la valeur à laquelle, il a changé. »	21 :23
	Elle ajoute au tableau le point (4, m(4))	
#6	« De combien a changé ma masse <u>à</u> deux mois? »	21 :44
#7	« Tout ce que je sais... je sais que ma masse à deux mois, elle valait une valeur, mais je ne sais pas de combien elle a changé. »	21 :53
#8	« Je sais combien elle vaut la masse, mais je ne sais pas de combien elle a augmenté. »	22 :04

Observons d'abord la première représentation dans le tableau 4.1. On peut penser que cette formulation peut amener une confusion chez les élèves. En effet, « **en** » réfère à une variation de temps tandis que « comment » réfère plus à un taux de variation. De plus, le fait qu'elle entoure le **2** sur le graphique nous donne l'indice qu'elle cherche probablement le taux de variation instantané pour $t = 2$. Elle transforme par la suite la représentation verbale (#2, voir tableau 4.1). Dans l'optique où elle cherche à trouver le taux de variation instantané, les deux représentations ne reflètent pas l'objectif de l'enseignante. On cherche un accroissement pour un instant précis. Nous pensons que de parler de comment (comme dans la première question) représente mieux le contexte plutôt que « combien » qui réfère à une différence.

Ensuite, elle leur demande ce que la réponse à ces questions serait en termes de vitesse. C'est intéressant de voir comment elle utilise les deux contextes. En effet, comme elle n'a pas vraiment introduit le terme de taux de variation instantané (représentation plus générale), elle doit parler en termes de vitesse instantanée. Cependant, on constate que dans cet exemple, ce terme est plus difficile à comprendre et à interpréter. Finalement, les élèves reconnaissent le concept de vitesse instantanée à travers les questions de Josée. Elle interprète la vitesse instantanée dans le contexte de la masse avec la représentation verbale #3 et #4 dans le tableau 4.1. Ici, elle essaie de passer du contexte de la vitesse au contexte du poids. Elle change le mot vitesse par le mot variation. Elle précise également l'idée qu'on parle d'un changement. On ne parle pas d'une valeur exacte à deux mois, on parle d'un taux de variation, d'un rythme auquel la masse du bébé change à deux mois. Elle renforce ce propos avec la représentation #5 dans le tableau 4.1.

Après, elle ajoute sur le graphique le point $(4, m(4))$ et pose une autre question (#6, tableau 4.1). Cependant, avec l'ajout du deuxième point, une élève n'est plus certaine qu'on parle d'un taux de variation instantané. En effet, elle répond à la question en mentionnant la différence des masses. Cette réponse était prévisible, avec la formulation de la question qui commence par « de combien », qui réfère à une différence et l'ajout de l'autre point. L'enseignante précise son idée de taux de variation instantané lié à la façon qu'a la masse de changer (#7 et #8, voir tableau 4.1). En effet, elle explique qu'elle ne peut pas savoir simplement en observant le graphique. Ce que le graphique lui donne directement c'est la masse à ce moment-là. Cependant, elle veut savoir comment elle change la masse, comment elle varie.

Par la suite, elle veut expliciter le concept de limite. Elle commence par prendre le taux de variation moyen pour l'intervalle $[2,4]$. Elle ne fait que donner la formule algébrique, elle ne le calcule pas dans le registre numérique. Après, elle veut prendre un moment plus près de deux mois. Elle donne la représentation algébrique du taux de variation moyen pour l'intervalle [2,3]. Elle résume le processus qu'elle est en train de faire en disant qu'elle regarde les variations de la masse jusqu'à ce qu'elle soit rendue à deux mois, avec des temps de plus en plus proches de deux mois. Elle continue le processus toujours en parlant de « combien » la masse a changé. Finalement, elle prend une pause pour réfléchir à la situation. Elle n'est pas confortable avec la situation et s'arrête.

À la fin de cet épisode, l'enseignante dit explicitement qu'elle est stressée. Nous croyons que notre présence en classe, malgré que nous soyons déjà allée sans la caméra, lui cause du stress. Elle nous en a d'ailleurs fait part après la séance. Elle décide de ne pas finir cet exemple et d'en prendre un nouveau dans lequel elle sera plus confortable.

4.3.1.5 Un troisième exemple : hors contexte

Nous observerons maintenant un épisode dans lequel l'enseignante traite un autre exemple, mais cette fois hors contexte. Pratiquement tout cet épisode, d'une durée approximative de dix minutes, se déroule dans le même registre. Évidemment, toujours appuyé par le registre verbal (oral et écrit), le registre algébrique domine cette partie de la leçon. Son exemple consiste à calculer la dérivée, mais elle utilise « vitesse instantanée » de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ au point $(2, f(2))$ ou (2,2) (voir extrait 4.20).

J : [...] Je prends une fonction. F de x égal x carré moins 2. [$f(x) = x^2 - 2$]. Ça, ça va mieux. Et je veux calculer la vitesse instantanée en deux. [Elle écrit ET dit.] Vitesse instantanée en 2... Au point 2 [(2;...)]. C'est quoi l'image de 2 dans ce cas-là? [Silence] É2 : f de deux [pas très fort]. J: Ça donnerait deux. [(2;2)]. Comment on calcule cette vitesse instantanée?

Extrait 4.20: Énoncé de la question pour le dernier exemple (25:10)

On note que lorsqu'elle demande l'image de 2, un élève répond $f(2)$, alors que l'enseignante demandait, de façon sous-entendue, d'évaluer $f(x)$ pour $x = 2$. Il s'agit en effet, du type de représentation que Josée a utilisé pour désigner l'image d'une fonction pour un x donné jusqu'à maintenant (par exemple $m(2)$ ou $m(4)$ dans l'exemple sur la masse). Le passage du registre algébrique au registre numérique (algébrico numérique) était donc sous-entendu.

On voit rapidement que l'enseignante est plus à l'aise de travailler avec ce registre (algébrique). Dès le début, elle signale son confort en disant « Ah! Ça, ça va mieux! » en parlant de l'exemple qu'elle a pris ($f(x) = x^2 - 2$). De plus, on peut aussi le déduire par sa façon de présenter son exemple. Elle dit faire appel à un exemple « plus concret ». Par contre, cet exemple, dépourvu de toute mise en situation, est plutôt abstrait que concret. Si pour elle, ce genre d'exercice est plus concret, c'est qu'elle sera certainement plus à l'aise à gérer ce type d'exemple. On peut supposer que ce comportement est lié au type d'études qu'elle a fait. C'est bien connu que le registre dominant dans les études supérieures en mathématiques est le registre algébrique.

Donc, elle demande aux élèves de trouver la vitesse instantanée recherchée, qu'elle nomme ***m***, une représentation institutionnelle très ancrée pour une pente. On observe un petit décalage entre Josée et les élèves quand un élève lui donne la formule pour évaluer l'image de 2, quand en fait, elle était passée à autre chose déjà. Un autre élève évoque le concept de limite, mais d'un ton très doux. Josée prend tout de suite cette réponse, pointe la formule de la dérivée et effectue la transformation nécessaire pour obtenir la représentation algébrique pour l'exercice ($\lim\limits_{b \to 2} \frac{f(b) - f(2)}{b - 2}$). Elle s'intéresse ensuite à d'autres représentations que les élèves lui suggèrent. Un élève conseille d'écrire $x^2 - 1$. Nous croyons que l'élève veut tout simplement débuter le processus d'évaluation d'une limite qu'il a appris précédemment dans le cours. Cependant, l'enseignante parlait plutôt de transformer la représentation sans pour autant avancer dans le processus d'évaluation de la limite. Elle cherche à obtenir des notations différentes de la même représentation algébrique.

Par la suite, elle va effectuer, à deux reprises, des transformations dans le même registre pour obtenir différentes notations algébriques équivalentes d'un point de vue mathématique (voir figure 4.34) de la dérivée.

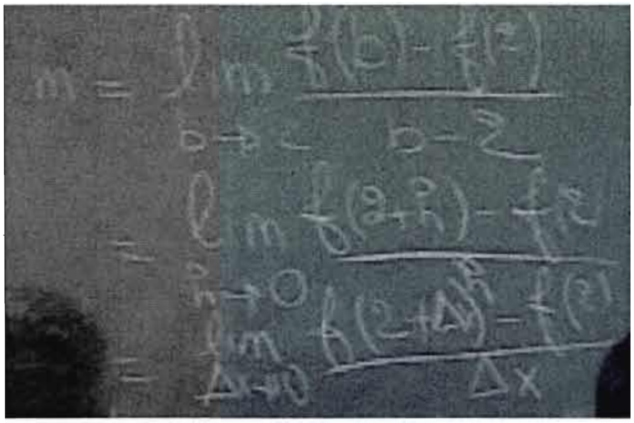


Figure 4.34: Les différentes notations algébriques de la dérivée (28:43)

Les trois notations obtenues appartiennent au groupe des représentations institutionnelles de ce concept. D'abord, l'utilisation du ***a*** et du ***b*** pour exprimer le fait que l'on regarde entre deux points. Ensuite, l'introduction du ***h*** pour mettre en évidence que l'on se rapproche d'un des deux points. Enfin, l'utilisation de Δx pour exprimer la variation d'une certaine valeur de x. Tous ces symboles sont des conventions admises par l'institution. Une fois de plus, on voit que pour elle, ces manipulations sont simples à effectuer. Il est clair qu'elle comprend très bien l'équivalence entre les trois notations. Par contre, on peut se demander si ce travail de manipulation est explicite pour les élèves. Même si l'équivalence est correcte d'un point de vue mathématique, il faut savoir si on a une équivalence cognitive de la part de l'élève.

Il est également intéressant de voir que Josée a introduit la notation avec le ***h*** avant celle avec le Δx. La notation Δx est un peu plus explicite selon nous, une variation sur l'axe horizontal. Comme les élèves connaissent déjà le symbole de variation, on aurait pu penser que ce dernier aurait été plus clair pour eux, mais ce n'est qu'une hypothèse.

Aussi, elle écrit la première représentation sans trop donner d'explications. C'est à la demande des élèves qu'elle précise sa pensée (voir extrait 4.21) en parlant entre autres de la notion d'entourage.

J: Ah! C'est la même écriture, c'est juste que mon ***b***... mon ***b*** est situé près de deux hein. Quand je fais tendre mon ***b*** vers deux, c'est-à-dire que je me situe dans un entourage de deux [elle fait des parenthèses en geste]. Ben deux plus ***h***...
É1: C'est quand ***h*** tend vers zéro.
J: À quel moment il est autour de deux, ça va être quand mon ***h*** tend vers zéro. C'est des notations qui sont différentes, mais qui signifient la même chose. Est-ce qu'il y a une autre façon de l'écrire aussi?

Extrait 4.21: Verbalisation de l'équivalence des trois représentations algébriques (27:40)

Elle commence ses explications en disant que c'est la même écriture ce qui est intéressant puisque justement ce qui différencie ces représentations c'est leur écriture. En fait, elle veut probablement dire que ça représente la même chose. Elle le formule d'ailleurs à la fin de l'explication : « C'est des notations qui sont différentes, mais qui signifient la même chose. » Avec cette verbalisation les élèves pourront peut-être interpréter le ***h*** comme délimitant un entourage autour de **2**. Ainsi, plus ***h*** tend vers zéro plus l'entourage est petit. Cette interprétation reste tout de même sous-entendue, il n'est pas certain que les élèves le perçoivent de cette façon.

Ensuite, elle ajoute la représentation avec le Δx. Elle précise encore une fois que ce n'est qu'une question de notation. Elle dit aussi que Δx doit tendre vers zéro pour qu'il reste proche de 2. Cette façon de le formuler est liée à l'infini potentiel. Finalement, Josée a introduit trois représentations algébriques équivalentes pour le taux de variation instantané (même si elle parle toujours de vitesse instantanée).

Elle décide d'utiliser la représentation avec le ***h*** pour poursuivre son exemple. Elle la réécrit dans la haut du tableau avec le ***m***= qui la précède. Elle interroge les élèves pour savoir quoi faire. Un élève suggère de remplacer et il précise : « tu remplaces ***h*** ». On peut penser que l'élève voulait déjà faire le processus de prédiction de la limite. Il voulait probablement « remplacer **h** [par zéro] ». Son projet est défait lorsque Mathieu suggère lui d'écrire « deux plus h à la deux [$(2 + h)^2$] ». Josée reprend sa réponse et lentement elle écrit l'expression au complet (voir figure 4.35).

Figure 4.35: Vers l'évaluation de la limite (29:50)

On remarque qu'elle a remplacé le $f(2)$ directement par 2 puisqu'il l'avait déjà calculé. Par contre, il fallait suivre le discours de l'enseignante pour le savoir, certains élèves ont pu penser qu'elle remplaçait le $f(2)$ par 2 tout simplement parce qu'elle enlève le f et non parce qu'elle l'évalue dans la fonction.

Ensuite, explicitement, Josée fait appel à la procédure qu'ils ont apprise récemment : « Premier réflexe pour évaluer une fonction, c'est quoi? ». Elle parle même d'un réflexe, comme quoi elle s'attend à ce que les élèves connaissent très bien cette façon de faire. Un élève répond avec une représentation fonctionnelle, intuitive : « On regarde si ça marche! » Cette phrase réfère au processus de prédiction d'une limite (nous en avons parlé dans l'analyse de la première séance de Louise, voir section 4.2.1). On veut savoir si on trouvera un cas d'indétermination.

Josée commence à évaluer la limite. En fait, elle remplace le h par zéro dans sa formule. Il faut noter qu'elle ne le dit pas explicitement. Elle fait les calculs (dans le registre numérique) comme si h était zéro. De plus, à la fin, lorsqu'elle obtient $\frac{0}{0}$, elle l'écrit au bout de l'expression entre parenthèses, elle n'utilise pas de signe d'égalité (voir figure 4.36). Ainsi, de façon implicite, elle sous-entend aux élèves que ce $\frac{0}{0}$ est « temporaire », qu'il n'existe pas vraiment. On doit reconnaître qu'elle envoie des signes comme quoi ce processus est mental et que le résultat est « intermédiaire ».

Figure 4.36: Cas d'indétermination (30:10)

Josée se tourne vers les élèves pour connaître la prochaine étape de résolution. Un élève répond : « Tu distribues ton carré. » La façon dont l'élève l'a dit réfère à une erreur commune chez les élèves où $(h+2)^2 = (h^2+2^2)$. Nous ne pouvons pas dire avec certitude que c'est ce que l'élève aurait fait, mais sa représentation verbale nous le laisse croire. Josée le corrige en disant plutôt qu'il faut faire le développement nécessaire et elle attend que les élèves lui donnent la réponse. Comme un élève lui donne une mauvaise réponse, elle leur rappelle l'algorithme pour mettre un binôme au carré de façon verbale et en pointant les termes en jeu : « Ça au carré [elle pointe le premier terme (2)], plus ça au carré [elle pointe le deuxième terme (h)] plus... le double de leur produit. » Elle obtient une nouvelle représentation algébrique (voir figure 4.37) dont elle vérifie l'équivalence avec les autres. En effet, elle rappelle que toutes ces expressions doivent être équivalentes.

Figure 4.37: Troisième représentation algébrique pour évaluer la limite (30:55)

Une élève a besoin de revenir en arrière, car elle ne comprend pas les manipulations qui ont été faites entre la première (voir figure 4.36) et la deuxième (voir figure 4.37) représentation. Il s'agit en fait du moment où Josée a évalué $f(2+h)$ et $f(2)$. Pour lui expliquer, Josée écrit l'équation de $f(x)$, mais remplace les x par des boîtes (□). Rappelons que Louise a aussi utilisé cette technique et elle parlait de boîte à remplir. Josée, voyant que cette représentation ne semble pas éclairer l'élève, écrit l'équation de $f(x)$ en remplaçant le x par y. Elle se retrouve avec $f(y) = y^2 - 2$ et remplace le y par $(2 + h)$. On peut se demander pourquoi Josée n'a pas poursuivi avec l'idée de la boîte. En effet, le choix du y est discutable puisque cette variable est très utilisée dans l'étude des fonctions et est le plus souvent associée à la variable dépendante. Ici, y représente la variable indépendante, ce qui peut amener la confusion de l'élève.

Une fois de plus, elle se tourne vers les élèves pour connaître la prochaine étape de la marche à suivre. Un élève parle de « les rassembler ». On comprend qu'il veut rassembler les termes semblables. C'est ce que Josée fait en disant qu'elle peut « simplifier » certains chiffres. Elle se retrouve avec la quatrième représentation et non la dernière de son parcours vers l'évaluation de la limite (voir figure 4.38).

Figure 4.38: Quatrième représentation de l'évaluation de la limite (32:20)

Les élèves lui suggèrent ensuite de mettre en évidence le $\boldsymbol{h}$. Cette fois-ci, Josée s'intéresse à la raison de cette étape. Elle explique que c'est le $\boldsymbol{h}$ qui cause « le trouble » ici, que la forme $\frac{0}{0}$, elle vient de ce $\boldsymbol{h}$, en sous-entendant que l'on remplace $\boldsymbol{h}$ par 0 dans l'expression pour évaluer la limite. C'est en le mettant en évidence qu'on peut le simplifier et ainsi obtenir la limite qui est 4 (voir figure 4.39).

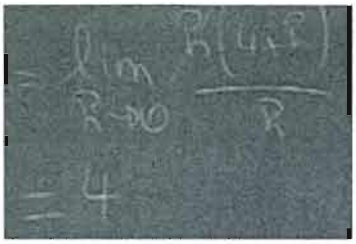


Figure 4.39: Dernière représentation de l'évaluation de la limite (33:10)

Elle associe cette réponse à la vitesse instantanée au point (2,2). Et pour la première fois dans cet exemple, elle fait référence à une représentation graphique sans toutefois la produire. En effet, elle dit (voir extrait 4.22 et figure 4.40):

> J: C'est la vitesse instantanée. Graphiquement, c'est quoi?
>
> É3: La tangente.
>
> J: Tangente. [Elle écrit ET dit.] Vitesse instantanée en deux point deux [(2,2)], est égale à deux [m=2]. Sauf que graphiquement, qu'est-ce qu'on avait dit? Ça, ça correspond à la pente de...
>
> É1: Ce n'est pas deux, c'est quatre.
>
> J: Oui, merci, ce n'est pas deux, c'est quatre. La pente de la tangente en deux point deux [m(2,2)=4].

Extrait 4.22: Référence au registre graphique (3:24)

Figure 4.40: Représentation verbale écrite de la vitesse instantanée (34:36)

Lorsqu'un élève répond que graphiquement la vitesse instantanée représente la tangente, Josée ne le reprend pas tout de suite. Comme elle est en train d'effacer le tableau, elle ne fait que répéter que c'est une tangente. Cependant, après, elle précise que ça représente la pente de la tangente. Il est intéressant de voir comment le concept de pente, encore une fois, fait fortement référence au graphique. Nous pouvons penser que Josée peut visualiser le graphique et la pente de la tangente, mais est-ce que les élèves peuvent le faire aussi? On se demande aussi pourquoi la représentation verbale « pente » est reliée au registre graphique plus que le taux de variation par exemple.

Par la suite, Josée veut connaître l'équation de la droite tangente au point (2, 2). Un élève lui suggère de remplacer le y par 2. Nous croyons que sa méthode consiste en fait à mettre dans l'équation $y = 4x + b$, le point (2, 2). Ce qui lui donnerait :

$$2 = 4(2) + b$$
$$2 = 8 + b$$
$$-6 = b$$

Cette façon de faire est plutôt institutionnelle. En effet, il s'agit d'une méthode utilisée au secondaire. Cependant, Josée préfère leur montrer sa technique qui, selon elle, « marche tout le temps ». Par cette façon d'introduire la méthode, elle explicite l'idée d'algorithme, de procédure.

Elle fonctionne ainsi :

$$\frac{y-2}{x-2} = 4$$
$$y - 2 = 4(x-2)$$
$$y = 4x - 8 + 2$$
$$y = 4x - 6$$

Cette méthode est très semblable à la méthode évoquée par l'élève. La seule différence est qu'on commence par l'équation du taux de variation plutôt que l'équation de la droite. Selon nous, elle demande quelques transformations algébriques de plus et donc un plus grand effort cognitif. En plus, dans cette méthode, on doit manipuler un rapport avec des binômes ce qui peut causer des difficultés chez les élèves. D'ailleurs, un élève se demande comment on est arrivé à la troisième ligne de la démarche. Josée aura besoin d'ajouter des explications par rapport à cette manipulation. Il est difficile de dire pourquoi Josée est si attachée à cette façon de faire. Elle dit que cette méthode évite de se souvenir de l'équation de la droite et de faire intervenir un ***a*** et un ***b*** (en référence à la représentation institutionnelle $y = ax + b$). En fait, probablement que pour elle, la formule du taux de variation est plus claire et surtout plus en lien avec le contexte en jeu (recherche du taux de variation d'abord et de l'équation de la droite ensuite).

Après avoir trouvé l'équation de la droite tangente au point (2, 2), Josée introduit finalement la représentation verbale plus générale de la vitesse instantanée : le taux de variation instantané. De plus, elle fait un rappel de ce qu'ils ont vu avant et elle dit une chose intéressante : « La vitesse moyenne, on a vu graphiquement, ça correspond au taux de variation. Ben là, la vitesse instantanée, c'est le taux de variation instantané. Ça s'appelle instantané pour parler de vitesse instantanée. » Elle fait donc une distinction entre un taux de variation et un taux de variation instantanée. De plus, elle fait référence à la représentation vitesse instantanée, mais le « instantané » n'est pas là pour être en lien avec la vitesse, mais plutôt pour observer le taux de variation en un point précis.

4.3.1.6 Un résumé

Après avoir fait cet exemple, Josée se lance dans un court résumé des concepts qu'ils ont vus depuis le début du cours. Nous pouvons facilement associer cet épisode à l'institutionnalisation. D'abord, elle écrit deux représentations verbales qu'elle associe à la représentation algébrique institutionnelle qu'elle a le plus souvent utilisée, c'est-à-dire celle avec le ***h***. Elle réécrit également la représentation écrite ***m*** qu'elle a aussi utilisée à plusieurs reprises lors des exemples (voir figure 4.41).

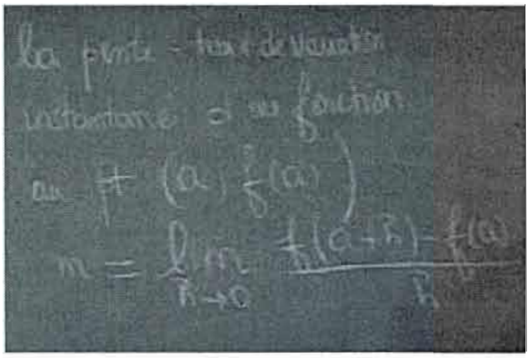


Figure 4.41: Résumé des représentations verbales et algébriques du taux de variation instantané (39:00)

Par la suite, elle veut ajouter une référence au registre graphique. Elle écrit presque la même représentation verbale que celle qu'elle vient d'écrire pour introduire le graphique. Elle fait une représentation semblable à toutes celles qu'elle a utilisées tout au long du cours et associe la pente à m (voir figure 4.42). Elle le répète même plusieurs fois. Finalement, elle revient avec la vitesse instantanée qu'elle associe aussi à m. Nous pouvons observer qu'elle ne précise pas si une représentation est plus générale qu'une autre ou si elle appartient à un contexte en particulier. On peut penser qu'elle traite toutes les représentations au même niveau et qu'elle peut utiliser chacune d'entre elles dans n'importe quelle situation. Pourtant, on connaît son attachement pour les représentations algébriques.

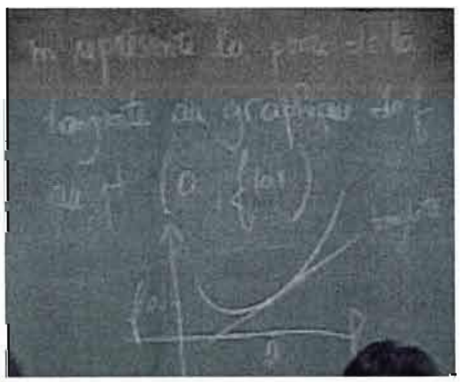


Figure 4.42: Deuxième partie du résumé représentations verbales et graphique du taux de variation instantané (40:13)

4.3.1.7 Introduction de la droite normale

Le dernier épisode de la leçon consiste à introduire la droite normale. Elle commence par la propriété de deux droites perpendiculaires. Quelques élèves pensent que les droites auront le même taux de variation, d'autres pensent qu'il sera inversé. Josée insiste sur le « inversé » sans définir ce qu'elle entend par ce terme. Elle évoque aussi une autre propriété que « le produit de leur taux de variation sera… », mais elle ne finit pas sa phrase même si un élève a la fausse idée que ce sera zéro.. À vrai dire, le produit du taux de variation de deux droites perpendiculaires est -1. Elle va plutôt faire une coordination entre une représentation verbale et graphique. En effet, elle se réfère à la tangente au graphique et trace la droite perpendiculaire à cette droite et qui passe aussi par le $(a, f(a))$. Elle formule ainsi la définition de la droite normale : la droite normale est la perpendiculaire à la tangente à la courbe au point $(a, f(a))$.

Après l'avoir définie, elle s'intéresse à l'équation de cette droite normale. Une élève suggère de trouver le taux de variation de la tangente et après de l'inverser. Josée semble satisfaite de cette réponse qui manque pourtant, à notre avis, de précision. En effet, en plus d'inverser le taux de variation de la droite tangente, il faut aussi trouver son opposé. Peu de temps après, Josée précise qu'elle l'inverse (la pente) et ajoute le signe moins. Elle utilise ensuite l'exemple précédent. Elle avait un taux de variation de 4, alors elle obtient le taux de variation de -1/4 et fait la même méthode algébrique pour trouver l'équation qu'auparavant, sans vraiment expliciter toutes les étapes de manipulations. Elle fait les transformations algébriques de façon mentale et nous doutons que les élèves aient pu le faire aussi rapidement que l'enseignante.

4.3.1.8 Résumé de l'analyse de la séance #1

Analyse centrée sur l'enseignante :

a) Josée privilégie le registre algébrique. Elle semble plus confortable avec ce registre. Par exemple, elle dit explicitement que l'exemple (qui se situe dans le registre algébrique) est beaucoup mieux et plus concret pour elle.

b) La représentation verbale « pente » est rapidement associée à la représentation graphique. Par exemple, quand elle demande ce que représente le taux de variation moyen graphiquement, les élèves répondent d'emblée « la pente ».

c) Elle introduit le concept de taux de variation moyen, d'abord de façon générale, hors contexte.

d) Elle utilise toujours la même représentation graphique (voir figure 4.26 par exemple). C'est-à-dire une courbe parabolique ouverte vers le haut et représentée dans le premier quadrant.

e) Elle ne fait pas de verbalisation des situations en contexte avant de commencer la coordination vers d'autres registres (les exemples de la masse du bébé ou du voyage en voiture). Cette façon de faire rend ses coordinations confuses.

f) Les représentations graphiques des situations présentées ne modélisent pas nécessairement le contexte. En effet, on retrouve la masse d'un bébé qui sera diminuée pendant les derniers mois de grossesse par exemple (voir figure 4.27).

g) Josée sort souvent du contexte dans ses représentations algébriques. En effet, par exemple le taux de variation moyen entre deux villes dans le contexte du voyage est $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qui ne fait pas référence à la situation.

h) Elle ne mentionne pas le concept de droite sécante.

j) L'enseignante a une préférence pour la représentation verbale « vitesse moyenne » ou « vitesse instantanée ». En effet, elle a tendance à utiliser ces termes même lorsqu'elle n'est pas dans le contexte de vitesse.

k) Lorsque Josée introduit les différentes représentations algébriques du taux de variation instantané, elle commence par la représentation $\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, poursuit avec $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ et finalement termine avec $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$. Ce choix est surprenant, puisqu'en général, on utilise $\boldsymbol{h}$ pour remplacer le $\Delta \boldsymbol{x}$ qui est plus difficile à manipuler. De plus, le $\Delta \boldsymbol{x}$ reste quand même plus explicite sur le processus. Il est clair que pour elle, les trois sont équivalentes et peut-être pas seulement mathématiquement équivalente, mais également dans leur facilité à être interprétées ou comprises.

4.3.2 La deuxième séance : Révision et exemple

Dans cette séance, Josée reprend l'essentiel des concepts vus au cours précédent. C'est en répondant aux questions des élèves, et même avant, qu'elle s'est rendue compte qu'elle n'avait pas introduit la matière aussi clairement qu'elle l'aurait voulu. Donc, la leçon commence par quelques éléments par rapport à la rigueur mathématique. Ensuite, elle revient sur les concepts de taux de variation moyen et de taux de variation instantané. Elle introduit également le terme de dérivée et fait plusieurs exemples en plus de laisser du temps de travail individuel ou en équipe pendant lequel elle répond aux questions des élèves.

4.3.2.1 La rigueur mathématique

C'est dans le mini-test qu'elle a donné au cours précédent le début de nos observations que Josée a remarqué certaines erreurs d'écriture de la part des élèves. Elle traduit ces erreurs par le manque de rigueur mathématique. Elle en avait déjà parlé au cours précédent, mais cette fois, elle est plus explicite sur le type d'erreurs qu'elle a vu. Pour les faire voir aux élèves, elle reprend l'exercice qu'ils ont fait dans le mini-test soit : calculer $\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h}$ pour $f(x) = 3x^2$. Elle ne fait pas toutes les manipulations, mais elle écrit certaines représentations algébriques en faisant délibérément des erreurs typiques que les élèves ont faites dans le test.

Elle relève quatre erreurs. D'abord, elle écrit une nouvelle représentation algébrique sans conserver le symbole de la limite devant (voir figure 4.43). Les élèves le remarquent très vite. C'est à ce moment qu'elle souligne pour la première fois (dans ce cours) l'importance de conserver l'équivalence entre les lignes : « C'est que pour passer d'une ligne à une autre, il faut s'assurer que ce soit exactement équivalent. Exactement équivalent, ça veut dire que si je ne reprends pas la chose telle quelle, bien, il faut que je m'assure que j'ai au moins son équivalent. » Elle insistera beaucoup sur cet élément tout au long de la leçon. Même lorsqu'elle fait des exemples, après avoir écrit une nouvelle représentation algébrique, elle mentionne l'équivalence. En fait, on pourrait parler de coordination d'une représentation verbale et de représentations algébriques. Ce qui est certain, c'est qu'elle rend ce processus explicite pour les élèves.

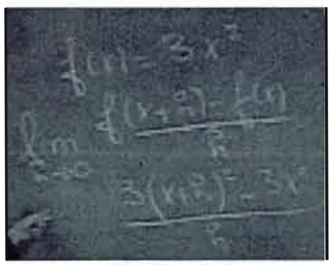


Figure 4.43: La conservation du symbole de limite (4:48)

Une autre erreur qu'elle met en évidence est l'inverse de la précédente. C'est-à-dire l'abus du symbole de limite, quand les élèves le conservent même une fois que la limite a été évaluée. Elle donne comme exemple $\lim_{h \to 0}(6x + 3 \cdot 0)$. Elle verbalise cette erreur comme un signe de limite qui est superflu. En fait, lorsque vient le temps de vérifier l'équivalence des deux représentations terme à terme (comme elle le fait souvent, en mettant des crochets pour distinguer les différents éléments équivalents), elle dit qu'une seule expression $(6x + 3 \cdot 0)$ est en fait équivalente à la fois au symbole de limite et au rapport dont on prend la limite.

Elle insiste également sur l'écriture du signe d'égalité si tel est le cas entre deux expressions. C'est la troisième erreur qu'elle relève. Elle indique que c'est important de montrer le lien qui existe entre deux expressions. Finalement, la dernière erreur qu'elle voit est ce type d'écriture $\lim_{h \to 0} = 6x$. Pour rendre l'erreur plus explicite, elle utilise une autre représentation avec le sin $(\sin = 1/2)$. Les élèves remarquent assez rapidement qu'on doit faire sin de quelque chose. Ainsi, il est facile pour Josée de faire le parallèle avec la limite; on doit faire la limite de quelque chose.

4.3.2.2 Révision du taux de variation moyen

Comme au cours précédent, elle commence avec l'expression $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Elle produit également, presque en même temps, une représentation graphique (voir figure 4.44). Nous remarquons que le graphique est semblable à ceux produits lors du cours précédent (toujours la forme d'une fonction quadratique, dans le 1er quadrant, sans définir les axes). Nous sommes peu surprise de le voir réapparaître. En effet, Josée semble très attachée à cette forme.

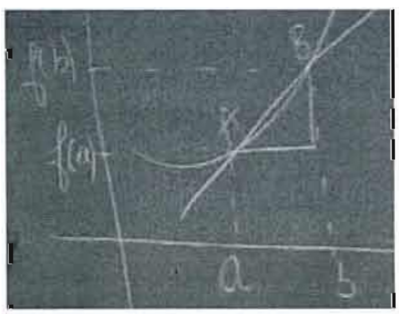


Figure 4.44: Représentation graphique du taux de variation moyen (8 :41)

Lorsque Josée interroge les élèves sur la représentation graphique de l'expression algébrique donnée, plusieurs répondent d'emblée qu'il s'agit de la pente. Par contre, il n'est jamais précisé ni par l'enseignante ni par les élèves qu'on parle d'une droite sécante. On le voit bien sur la représentation graphique, mais la coordination entre la représentation graphique et la représentation verbale ne se rend pas jusque-là.

Par la suite, elle veut ressortir les « caractéristiques » liées à cette expression. Nous doutons cependant du terme choisi. En effet, elle ressort différents synonymes verbaux de cette expression algébrique (conversion), mais est-ce que ceux-ci sont vraiment des caractéristiques? Il est vrai que les différentes représentations d'un même concept donnent des informations (caractéristiques) différentes sur ce concept. Par contre, elle ne fait qu'évoquer la représentation graphique et ne ressort pas la caractéristique que celle-ci pourrait nous donner (la droite sécante). Attardons-nous plutôt sur les trois synonymes que Josée met de l'avant (voir figure 4.45).

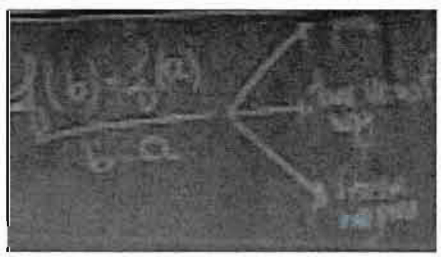


Figure 4.45: Différentes représentations verbales du taux de variation moyen (10:35)

Comme elle vient de faire le graphique, elle commence par le mot « pente ». Pour elle, cette représentation est liée au graphique, elle parle du point de vue géométrique.

Ensuite, elle cherche à connaître la représentation « mathématique » du concept. Un élève répond avec la vitesse moyenne. Rappelons que cette représentation était la plus utilisée par Josée lors du dernier cours. Elle l'utilisait même si elle n'était pas dans un contexte de distance et de temps. Josée reprend cette réponse l'associe à un contexte. Il n'est pas clair dans sa verbalisation si elle parle d'un contexte parmi d'autres ou si LE contexte associé à cette expression algébrique est celui de la vitesse. Cependant, avec son utilisation fréquente de cette représentation, nous sommes plus portée à concevoir la deuxième hypothèse. Du moins, nous pouvons penser que c'est ce que les élèves vont retenir. Pour renforcer l'idée du contexte, elle rappelle l'exemple qu'elle a fait au cours précédent concernant un voyage d'une ville à une autre. Elle fait une interprétation de la vitesse moyenne (voir extrait 4.23).

> J : [...] Donc, quand je calcule ce... cette pente [elle pointe le graphique], ben, ça me donne à peu près la vitesse moyenne à laquelle je roulais entre Ville1 et Ville2. En moyenne, je roulais à telle vitesse. Donc, en contexte, ça me donne une vitesse moyenne, à peu près, si on se fie à notre contexte de la dernière fois, celui de Ville1 et Ville2, je voyageais entre les deux.

Extrait 4.23: Interprétation de la vitesse moyenne (9:26)

L'association de la moyenne à quelque chose « de à peu près » est une fausse conception fréquente chez les élèves (Johnson, 1985 dans Gattuso et Mary, 2005). Même si on ne se trouve pas dans un contexte où la moyenne est l'objet d'étude, Josée, en utilisant ce type de représentation verbale, pourrait renforcer cette conception. De plus, pendant ces explications, elle se réfère au graphique qui est déjà au tableau (voir figure 4.45). Encore une fois, cette façon d'utiliser le graphique nous donne un indice sur l'importance que donne Josée à la cohérence entre la situation et le graphique.

Enfin, elle revient avec son idée de représentation mathématique de l'expression $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Un élève a l'idée d'une variation. Josée transforme immédiatement cette représentation en « taux de variation » et elle fait le lien avec la vitesse qui est « moyenne » pour préciser que ce taux de variation est aussi moyen (taux de variation moyen). Dans le discours de Josée on peut observer la primauté qu'elle donne à la représentation algébrique : « Tu l'as pris en notes. Ici c'est graphique, ici, c'est mathématique, ici en contexte... »; comme si les autres représentations n'étaient pas mathématiques. On peut d'ailleurs noter que si la pente est directement associée au graphique, le taux de variation moyen est souvent associé à la représentation $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Au dernier cours, nous avons vu que Josée avait une relation particulière avec le registre algébrique. En effet, c'est souvent ce registre qu'elle privilégie dans la résolution des exercices et il est clair qu'elle s'y sent plus à l'aise. De plus, les remarques à propos de la rigueur mathématique sont associées, la plupart du temps, à des représentations algébriques. D'un autre côté, elle n'applique pas cette rigueur mathématique au concept de la limite, elle va promouvoir l'idée que le processus du calcul des limites est un processus de substitution. Aussi, en considérant, probablement inconsciemment, que les représentations autres qu'algébrique ne sont pas mathématiques, sa rigueur ne s'applique pas. Nous pouvons imaginer que pour Josée, en accord aux résultats de recherche de Cunningham, Eisenberg, Dreyfus, Hitt et Zimmerman entre autres, les mathématiques ont une connotation très fortement liée au registre algébrique.

4.3.2.3 Révision du concept de taux de variation instantané

Josée continue d'utiliser la représentation graphique « générale » pour illustrer le taux de variation exact en un point dans son contexte de voyage. Elle trace la tangente et demande aux élèves de lui dire ce qu'ils feraient. Cependant, elle ne leur laisse pas le temps de répondre et effectue la coordination entre les représentations : « Je crois que vous faites le lien, la vitesse, elle serait la pente de cette tangente, c'est ça? » Elle cherche alors à produire la représentation algébrique de cette idée et par le fait même, elle donne une verbalisation intéressante du processus de limite (voir extrait 4.24).

J : On s'entend que si vous essayez de calculer la pente de cette droite de la même façon, c'est-à-dire que vous devez calculer la moyenne de la vitesse entre Ville2 et Ville2, c'est ça? Si je veux calculer la vitesse moyenne entre Ville1 et Ville2, ben, je mettrais la vitesse moyenne Ville1 et Ville2, mais si je veux la vitesse moyenne à Ville2, ben, je ferais la

moyenne entre Ville2 et Ville2, mais on s'entend que ça, ça ne donnerait rien. Ça me donnerait quoi? Ça me donnerait un zéro sur zéro [$\frac{0}{0}$]. Ça ne marcherait pas... d'aller le calculer comme ça directement, mais cependant, on s'entend que plus je prends une distance [elle rapproche ses mains de plus en plus] courte, plus j'ai une estimation plus fidèle à la vitesse à Ville2.

Extrait 4.24: Verbalisation du passage de taux de variation moyen à taux de variation instantané (11:16)

Comme elle a une tangente, donc qu'elle a un seul point commun entre la droite et la courbe, elle fait comme si elle calculait la vitesse moyenne, mais avec un seul point. Évidemment, ce calcul est impossible ($\frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1}$). Pour elle, dans ces conditions, le $\frac{0}{0}$ est inconcevable. Par contre, les élèves ont en tête le concept de limite et ils ont appris que $\frac{0}{0}$ est une indétermination qui peut être « contournée ». En effet, comme nous avons discuté surtout dans les analyses des séances de Louise, l'idée de contradiction d'écrire qu'une expression est égale à $\frac{0}{0}$ n'a pas été mise de l'avant par les enseignantes. Nous pensons que ce ne sera pas un automatisme pour les élèves que $\frac{0}{0}$ est une aberration mathématique (dans ce cas où il n'y a pas de limite). Est-ce vraiment clair pour eux que le $\frac{0}{0}$ « peut » apparaître que dans un contexte où il y a des limites, et encore? Finalement, dans cet extrait, on peut remarquer l'importance de faire attention au calcul des limites. Josée fait une promotion de l'idée de substitution dans le calcul des limites et on ne voit pas comment elle peut conclure en ayant cette contradiction (extrait 4.24). Dans son discours, nous percevons une espèce de contrainte : « pour éviter le résultat $\frac{0}{0}$, il faut faire des manipulations algébriques... », le problème survient quand on doit calculer des limites comme $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x^2}$, la limite n'existe pas!

Après qu'elle ait utilisé le vocabulaire relié au concept de limite (« une distance de plus en plus courte », « de plus en plus en s'approchant »), Josée produit une représentation algébrique du concept de taux de variation instantané. Pour ce faire, elle se situe à cheval entre un contexte et l'expression générale. En effet, elle produit la représentation formelle $\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, mais en la verbalisant dans son contexte de voyage entre Ville1 et Ville2. On peut probablement parler d'une coordination entre différentes représentations même si le lien est difficile à faire. En effet, elle associe ***b*** à un point dynamique qui se rapproche de Ville 2 et après ***b*** devient la ville qui change. L'explication est difficile à suivre et surtout, il y a un effort certain à faire pour associer les bons termes aux bonnes représentations.

Comme pour le taux de variation moyen, elle veut maintenant trouver les trois « caractéristiques » de cette expression $\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Elle commence par celle en contexte, puisqu'elle vient d'en parler, la vitesse instantanée. Elle trace alors un nouveau graphique pour illustrer le processus dynamique de la limite. Le nouveau graphique est pratiquement identique au premier (voir figure 4.46). Elle y trace deux droites sécantes et fait le geste avec sa main d'une droite sécante qui devient la droite tangente. Ainsi, elle coordonne sa verbalisation avec la représentation graphique. Ce qui la mène à une nouvelle représentation verbale, la pente de la tangente. Enfin, elle ajoute rapidement le terme taux de variation instantané.

Figure 4.46: Représentation graphique du processus de limite (14:15)

Dans sa révision, Josée ajoute différentes notations de l'expression algébrique du taux de variation instantané. À la suggestion d'une élève, elle commence par remplacer le b par $a + \Delta x$. L'élève sait même expliquer que Δx va tendre vers zéro. Pour bien faire les transformations algébriques, Josée utilise le graphique pour expliquer ce que ce Δx représente (on peut soulever que dans ce cas, on ne sait pas le rôle de x, on pourrait donc utiliser Δa par exemple). Elle dit : « [...] j'essaierais de calculer la vitesse moyenne tout autour, à côté de Ville 2. » Cette verbalisation peut faire la promotion de la conception que la limite est inatteignable et est liée à la vision de l'infini potentiel. En effet, en utilisant les mots « autour » et « à côté », nous avons vraiment l'impression que ce ne sera jamais a. Sans mentionner que Δx est une variation des x, elle fait la conversion de « autour de a » vers les représentations algébriques $a + \Delta x$ et $a + h$.

Après, l'enseignante entame une réflexion sur le fait qu'une limite se considère des deux côtés d'un point en simultané. Lorsqu'elle demande aux élèves de quel côté se trouve $a + \Delta x$ ou $a + h$, un élève répond qu'il est à droite. Alors, Josée explique qu'il peut être des deux côtés. Elle reprend ses termes pour dire que « être à côté », ça veut autant dire à gauche qu'à droite et elle ajoute : « Donc quand on dit à côté, ça [elle pointe sa représentation graphique], c'est juste un réflexe et je place mes points toujours à droite, mais ça ne veut pas dire que je vais prendre toujours une valeur plus grande. » Cette affirmation est révélatrice pour nous. Josée nous témoigne qu'elle est consciente qu'elle fait le processus toujours du même côté. Nous avons même la confirmation que cette façon de faire a fait croire aux élèves, au moins à un, que la limite allait être seulement à droite et par conséquent, que $\Delta x > 0$. On peut se demander, comme elle sait que sa représentation pourrait être plus claire, si elle le mentionne même aux élèves, pourquoi la fait-elle toujours de cette façon?

Finalement, elle obtient les deux autres représentations algébriques formelles du taux de variation instantané : $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ et $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Elle produit également un petit schéma, une ligne horizontale qui montre comment on peut s'approcher de chaque côté de ***a***. En expliquant ce schéma, elle conserve un vocabulaire lié à l'infini potentiel et à la conception que la limite est inatteignable.

4.3.2.4 Un exemple

Comme exemple, Josée demande aux élèves de trouver la vitesse instantanée en $y = 3$ pour la fonction $f(y) = 2y^2$. Les représentations utilisées dans la question peuvent créer de la confusion chez les élèves. D'abord, elle demande de trouver la « vitesse » instantanée quand au fond, elle ne se situe pas dans un contexte. Elle entre en contradiction avec son explication précédente. En effet, elle avait bien dit que cette représentation verbale était pour un contexte particulier. De plus, elle utilise dans sa représentation algébrique *y* comme variable indépendante. Or, les élèves qui ne sont déjà pas habitués à traiter une variable indépendante représentée par une autre lettre que ***x*** ont également une vision très ancrée de **y** comme étant la variable dépendante. C'est donc leur demander beaucoup de transformations impliquant des représentations institutionnelles fortes.

Après, ils arrivent à produire la représentation algébrique qui dictera la stratégie de résolution : $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$. Mentionnons que c'est Josée qui a décidé d'utiliser la représentation avec le ***h***. Avant d'entamer les manipulations algébriques, Josée pose une question peu commune aux élèves. Elle leur demande de formuler d'autres questions auxquelles la réponse serait cette même représentation algébrique. Les élèves qui ne sont pas habitués à réfléchir dans ce sens (réponse $\rightarrow$ question), ont du mal à comprendre ce que Josée veut dire et répondent intuitivement avec des possibilités de transformations de la représentation algébrique pour se rapprocher de la réponse. Ils se tournent en fait vers la procédure de résolution qu'ils connaissent. Josée finit par leur donner un fort indice en pointant les trois termes écrits au tableau pour représenter le taux de variation instantané. Les élèves parviennent alors à formuler des questions, mais on peut se demander s'ils ne font que dire les mots qu'ils voient au tableau ou s'ils comprennent vraiment le but de l'exercice.

Maintenant, ils peuvent commencer les manipulations algébriques. Josée utilise une représentation verbale nouvelle pour le résultat attendu. Elle parle de « quantité », même si ce mot est assez général, nous doutons que ce soit un terme approprié au résultat. Elle fait aussi quelque chose qu'elle fait assez souvent, elle nomme l'expression ***m***. Ainsi, elle peut réécrire des nouvelles représentations algébriques en les égalisant à ***m*** ce qui rend explicite que toutes les représentations sont équivalentes. Pendant les manipulations, elle coordonne bien les représentations algébriques et verbales. En effet, elle appuie beaucoup sur la conservation de l'équivalence et rend toujours explicite quel terme équivaut à quel terme dans les anciennes et nouvelles représentations. Elle utilise les gestes, les mots et aussi les crochets pour expliciter ses transformations. Par exemple, elle dit : « [...] On s'assure qu'on a une équivalence mon premier bloc, celui-là [$f(3+h)$], son équivalence, c'est $2(3+h)^2$, ça, c'est le premier bloc. Moins, le deuxième bloc, c'est quoi? » et elle continue de cette façon.

Aussi, pendant les manipulations, elle laisse des erreurs « de rigueur mathématique » qui semble intentionnelles. Par exemple, elle oublie de mettre $h \rightarrow 0$ sous le symbole de limite. À chaque fois, ce sont les élèves qui lui font corriger. Elle n'a pas besoin de mettre plus d'accent sur les erreurs, les élèves semblent les voir. De plus, elle rend la plupart des transformations explicites, mais il y a quand même quelques fois, où elle néglige certaines représentations « intermédiaires ». Par exemple, elle passe directement de $f(3)$ à 18 sans écrire $2(3)^2$. Elle le dit, mais ne l'écrit pas. Justement, plus tard, une élève s'interroge sur la provenance du 18. Voilà un indice de plus que les représentations écrites sont aussi importantes.

On retrouve également une verbalisation dont nous avons déjà discuté dans l'analyse de la première séance. Il s'agit de parler de « distribuer le deux » pour parler du développement d'un binôme au carré. Par contre, cette fois, l'enseignante utilise aussi ce terme. Plus tard, elle effectue vraiment une distribution et cette fois elle a recours à des flèches pour bien mettre en évidence la transformation algébrique.

Enfin, Josée éprouve des problèmes avec son choix de variable qu'elle a fait au début (y comme variable indépendante). Lorsqu'elle veut trouver l'équation de la droite tangente, elle a recours à sa technique habituelle soit $\frac{y-f(3)}{x-3}=12$. C'est en produisant cette représentation qu'elle se rend compte qu'il y a quelque chose qui cloche. En effet, dans cette équation, y représente la variable dépendante et un x apparaît pour représenter la variable indépendante ce qui n'est pas en cohérence avec les représentations algébriques précédentes. Elle demande alors aux élèves de trouver ce qui ne va pas dans sa représentation. Ils n'arrivent pas à repérer complètement le problème, mais une élève mentionne tout de même que l'utilisation du y la mêle dans cet exemple. Pour lever la confusion, Josée change le y dans l'équation de la fonction de départ ($f(y)=2y^2$ devient $f(x)=2x^2$). Cette manipulation a alors différentes conséquences selon nous. Par exemple, même si y n'apparaît pas vraiment dans le calcul de la limite, la cohérence entre ces deux représentations devient douteuse. Elle poursuit alors avec $\frac{y-f(3)}{x-3}=12$, en mentionnant que ce n'est pas le même y. Les représentations deviennent évidemment confuses. Enfin, un élève demande s'il peut utiliser sa propre technique pour trouver l'équation d'une droite. On en conclut que certains élèves restent quand même attachés à leur façon de faire soit introduire un point connu dans l'équation $y=ax+b$ (voir section 4.3.1).

Cet épisode se termine par une discussion sur l'utilité de la droite normale. Il est vrai que sortie de son contexte, il n'est pas évident de donner l'utilité de ce concept. Josée essaie de trouver un sens à tout ça et parle de la distance la plus courte entre deux droites.

4.3.2.5 Introduction d'une notation et un exemple

Josée introduit pour la première fois la notation $f'(a)$. Elle en parle en disant que c'est tout simplement une autre façon d'écrire le taux de variation instantané. Elle fait aussi le parallèle avec son utilisation de la lettre ***m***, qu'elle utilisait souvent pour ne pas réécrire toujours toute l'expression algébrique. Par contre, elle précise que $f'(a)$ est beaucoup plus clair. En effet, cette notation représente exclusivement le taux de variation instantané de la fonction f en $x = a$.

Par la suite, elle traite un autre exemple : Si $f(x) = 6x^2 - 1$, trouver $f'(1)$. Sa procédure et les représentations qu'elle utilise sont très semblables à l'exemple précédent. Elle met bien en évidence l'équivalence entre les représentations algébriques en verbalisant et en mettant des crochets. La différence cependant est qu'elle utilise la représentation algébrique avec Δx plutôt que celle avec h. On reconnait qu'elle essaie de varier les représentations. Vers la fin de l'exemple, elle fait quelques manipulations verbalement, qu'elle n'écrit pas, mais le fait de façon assez explicite, en s'assurant que les élèves suivent.

4.3.2.6 La fonction dérivée

Afin d'introduire la fonction dérivée, Josée passe par l'utilité de cette dernière. Maintenant qu'ils « savent » calculer la dérivée d'une fonction en un point particulier, elle leur demande si c'est réaliste de vouloir à chaque fois calculer pour un seul point : « imaginez qu'on doit en calculer plusieurs ». Dans cet épisode, elle accompagne son discours d'une représentation graphique. Il s'agit du graphique habituel que Josée choisit. Elle l'utilise pour illustrer l'infinité de points possibles dont on peut calculer leur dérivée. Donc, la verbalisation de Josée au début de cette partie propose un outil pour économiser nos énergies (pour faire de moins longs calculs). Elle renchérit en disant qu'il s'agira d'une « recette magique » (voir extrait 4.25). Nous observons dans la façon qu'a Josée d'introduire la fonction dérivée qu'elle insiste beaucoup sur le fait que c'est pratique, sur le côté procédural de ce concept. En effet, toutes les explications qu'elle donne sur le passage du cas particulier au cas général sont liées à une technique.

J : [...] À ce moment-là, on définit... Bon, enfin, on se donne une façon de faire. On va aller faire les choses de façon plus globale, et dès que... ben c'est comme si on se donne une recette magique, et dès qu'on se donne un point, hop, je prends le point, je le mets dans ma formule et je l'ai la dérivée. Qu'est-ce que ça veut dire, c'est que... C'est ce qu'on appelle *la dérivée d'une fonction*. La dérivée en général. Ce qu'on avait vu c'était la dérivée en un seul point, mais là en général, ce serait quoi? Et... C'est la même chose que ce qu'on a vu, sauf que ça va être avec un $\boldsymbol{x}$.

Extrait 4.25: Introduction de la fonction dérivée (1 :47 du deuxième DVD)

En fait, elle ne donne pas de définition conceptuelle de $f'(x)$. D'ailleurs, elle ne parle pas de la fonction dérivée, elle parle de la dérivée d'une fonction. Cette représentation est exacte, mais elle ne met pas en évidence qu'elle est bel et bien une fonction, que l'on peut interpréter dans son ensemble. Il est vrai qu'ils en sont au tout début de l'apprentissage, nous pouvons penser que cette façon de voir la dérivée viendra plus tard. Elle produit tout de même la représentation algébrique qui se trouve à être une transformation de celle de $f'(a)$: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Ensuite, elle donne un exemple : Évaluer la dérivée de la fonction $f(x) = 2x^2$. Avant d'entreprendre les manipulations algébriques nécessaires, elle demande aux élèves de faire une sorte d'anticipation du résultat. La question n'est pas facile. Pour pouvoir faire cette anticipation, les élèves doivent pouvoir effectuer d'abord la production d'une représentation algébrique, puis certaines manipulations sur celle-ci, et ce, mentalement. En fait, Josée veut les amener à remarquer que la variable x sera toujours présente dans la réponse. Nous doutons que les élèves puissent réellement faire cette activité mentale, mais le fait que Josée mette ce point de l'avant pourra leur permettre de porter une attention particulière au traitement de x dans l'exemple.

Ils commencent l'exemple en effectuant les transformations nécessaires à la représentation algébrique $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Encore une fois, toutes les manipulations sont effectuées assez clairement. En effet, Josée insiste sur l'équivalence entre les représentations ce qui l'oblige à rendre les transformations explicites. Elle écrit la plupart des représentations algébriques « intermédiaires » et sinon, elle s'efforce de les dire lentement et de les répéter. Le groupe arrive à produire la fonction dérivée de la fonction $f(x) = 2x^2$, $f'(x) = 4x$.

Enfin, pour montrer aux élèves que ce calcul équivaut à calculer la dérivée en un point, mais pour tous les points de la fonction, elle leur demande de calculer $f'(3)$, qu'ils ont déjà calculé dans un exemple précédent et aussi $f'(5)$. Elle rend les calculs de ces deux dérivées explicites et les élèves peuvent constater que les deux façons de faire leur donnent le même résultat.

4.3.2.7 Aide individuelle aux élèves

Les étapes théoriques analysées précédemment sont parfois entrecoupées de temps pour faire un peu de travail personnel ou en équipe. Pendant ces périodes, Josée circule dans la classe pour répondre aux questions des élèves. Il a été très difficile d'avoir des enregistrements de l'aide qu'elle donne aux élèves dû au bruit dans la classe et parfois à l'inaccessibilité avec la caméra de l'endroit où Josée se trouvait.

Nous avons tout de même pu remarquer que Josée a à répondre à des questions plutôt de base. En effet, nous voyons les élèves éprouver des difficultés avec les manipulations algébriques, l'évaluation des fonctions pour $x+h$, l'interprétation d'une fonction en contexte, etc. Par exemple, certains élèves démontrent de la difficulté avec le développement d'un binôme au carré ou au cube. Une autre fois, dans un contexte d'aire d'un disque par rapport au rayon, l'élève a beaucoup de difficulté à transformer la représentation algébrique générale pour l'exprimer avec $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{r}$, les variables en jeu dans la situation.

Un autre élément que nous relevons est la tendance de Josée à aller vers des procédures pour répondre aux élèves. Par exemple, lorsque les élèves ont de la difficulté à développer un binôme au carré ou au cube, elle fait référence à la formule générale. Elle cherche à se rappeler une formule apprise par cœur. En effet, Josée suggère à l'élève de prendre son aide-mémoire (fourni par le manuel) dans lequel on trouve la formule générale nécessaire, et ce, même si un autre élève avait proposé de le développer au long. Une autre fois, une élève a de la difficulté à comprendre ce qu'elle doit calculer. Elle finit par cibler, qu'elle doit trouver un taux de variation instantané, mais exprime clairement à Josée, qu'elle ne comprend pas pourquoi. Elle ne comprend pas le contexte. L'enseignante se tourne vers la représentation algébrique que l'élève devra manipuler pour obtenir la réponse. On voit Josée utiliser une approche qui est plutôt, selon nous, procédurale.

4.3.2.8 Résumé de l'analyse de la séance #2

Analyse centrée sur l'enseignante :

a) Nous remarquons que Josée, dans sa pratique, favorise le registre algébrique. Il est vrai qu'elle y accorde beaucoup d'importance. En effet, elle traite les exemples le plus souvent seulement dans ce registre et y accorde une attention particulière dans son discours. En effet, on sent que pour elle, les mathématiques sont fortement liées au registre algébrique. Par exemple, elle a associé la représentation algébrique du taux de variation (moyen ou instantané) à la représentation mathématique du concept. De plus, elle parle de la rigueur mathématique en faisant une association claire avec l'écriture ou encore une fois, le registre algébrique. D'ailleurs, on observe qu'elle n'a pas les mêmes règles de rigueur quant à l'utilisation de représentation graphique. Une fois de plus, nous signalons une perspective théorique sur les représentations, l'importance de promouvoir l'articulation entre représentions dans la construction de concepts mathématiques, étant donné qu'une représentation représente partiellement le concept mathématique en question.

b) Dans l'approche de Josée de donner dans son enseignement une primauté aux représentations algébriques, elle prend aussi une position implicite sur ce que sont les mathématiques. Quand elle fait référence aux représentations algébriques elle les nomme comme étant des représentations mathématiques et nomme les autres représentations comme il est habituel de les nommer, soit représentation graphique par exemple.

c) Les interprétations verbales du concept de moyenne de Josée peuvent induire une fausse conception. En effet, le fait de parler d'une moyenne comme étant «une quantité à peu près » reflète une fausse conception sur la moyenne.

d) À certains moments, il est clair que Josée est consciente des limites de certaines de ses représentations. Par exemple, quand elle affirme qu'elle montre toujours la limite s'approchant du côté droit du point. En fait, elle démontre qu'elle sait que la représentation est incomplète, elle le dit même explicitement aux élèves. On peut alors se demander pourquoi elle n'ajuste pas les représentations graphiques.

e) La communication orale autour de la limite oblige l'utilisation de l'infini potentiel qui fera la promotion de la conception que la limite est inatteignable : « je m'approche de plus en plus sans arriver à la limite », idée intuitive qui se développe de façon naturelle. Cette conception peut persister même après avoir suivi des cours de calcul plus formels.

Il faut noter que dans le manuel, on donne une définition de limite en forme verbale (écrite) où on ne peut pas échapper à la notion d'infini potentiel, mais les auteurs Hamel et Amyote (2007, p. 12) signalent implicitement que la substitution n'est pas valable. On dit que la limite de la fonction $f(x)$ quand ***x*** tend vers ***a*** vaut ***L***, si la fonction $f(x)$ prend des valeurs de plus en proches de ***L***, lorsque ***x*** prend des valeurs de plus en plus proches de ***a***, mais différentes de ***a***. On écrit alors $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Cette définition en mots, correspond à : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$. Ici le « mais différentes de ***a*** » est équivalent à $0 < |x - a|$.

f) Nous devons reconnaître que Josée essaie de varier les représentations algébriques. Par exemple, elle fait les calculs d'une dérivée le plus souvent avec ***h***, mais parfois elle utilise Δx. Elle utilise la fonction $f(y)$, où y est la variable indépendante. Elle a parfois recours à une représentation graphique, surtout lorsqu'il s'agit d'une partie « théorique », elle le fait peu pour les exemples.

g) Josée effectue les transformations dans le registre algébrique le plus souvent de façon claire et explicite. En effet, le fait d'insister beaucoup sur la notion d'équivalence entre les différentes représentations l'amène à rendre les manipulations explicites. Elle met de l'emphase avec des représentations verbales (en faisant référence à des blocs pour suivre les équivalences terme à terme), avec des gestes ou avec des symboles comme des crochets.

h) Parfois, Josée fait une anticipation de la réponse. Par exemple, pendant l'exemple du calcul de $f'(x)$ pour la fonction $f(x) = 2x^2$, elle anticipe verbalement qu'elle trouvera un ***x*** dans la réponse finale.

Analyse centré sur les élèves :

A) Nous remarquons que les élèves sont influencés par les représentations que Josée a utilisées pour introduire le taux de variation instantané. En effet, à quelques reprises certains élèves montrent qu'ils croient que lorsqu'on prend la limite du rapport en jeu, on se trouve du côté droit de $\boldsymbol{a}$.

B) Josée ressort des erreurs d'écriture faites par les élèves qui, selon nous, peuvent révéler des erreurs de compréhension : Oubli ou abus du symbole de limite, évaluation de la limite de « rien », oubli du signe d'égalité entre les représentations équivalentes.

4.3.3 La troisième séance : Continuité et dérivabilité

À l'ordre du jour, écrit au tableau, on peut lire ce qui constituera l'ensemble de cette leçon : répondre à des questions des élèves en groupe, faire le lien entre la dérivabilité et la continuité d'une fonction, étudier un point particulier et finalement répondre à des questions individuelles des élèves.

4.3.3.1 Quelques exemples en groupe

Au début de cette séance, Josée offre la possibilité aux élèves de poser des questions auxquelles elle répond devant tout le groupe. Trois questions en lien avec des exercices et problèmes proposés par le manuel sont posées pendant cet épisode. D'abord, un problème en contexte (voir figure 4.47) :

2. On veut clôturer un potager de forme carrée ayant une superficie de A m^2.
   a) Déterminez la fonction donnant la longueur L de la clôture du potager selon sa superficie. (Indice : Déterminez d'abord la longueur c du côté d'un carré de A m^2.)
   b) Déterminez la dérivée de la fonction $L(A)$. Indiquez bien les unités.
   c) En utilisant la réponse obtenue en b, déterminez $L'(100)$.
   d) Donnez une interprétation géométrique et contextuelle de $L'(100)$.
   e) En utilisant la réponse obtenue en b, déterminez $L'(156,25)$.
   f) Donnez une interprétation géométrique et contextuelle de $L'(156,25)$.

Figure 4.47: Exercice proposé par le manuel (Hamel et Amyotte, 2007, p. 80)

Il est intéressant de voir comment Josée cible les difficultés possibles de ce problème. Elle dit : « Ah ok, bon, là, ils donnent... de toute façon ici, je pense que la difficulté, c'est la modélisation hein? Ce n'est pas comprendre le problème. C'est passer du texte à l'écriture mathématique, c'est ça? » En fait, ici, Josée dissocie la modélisation, le passage du texte à l'écriture mathématique (conversion d'une représentation verbale vers une représentation algébrique (sous-entendu)) de la compréhension. Nous pouvons imaginer que pour elle la compréhension est de savoir faire les manipulations algébriques nécessaires une fois que l'expression algébrique a été mise en place. Cela nous donne un autre indice de l'importance que donne Josée à la manipulation algébrique.

Elle entame le problème en ressortant les mots-clés de l'énoncé (carré, superficie égale à A). La partie a) de la question demande de déterminer la fonction donnant la longueur L de la clôture selon sa superficie. Josée ressent le besoin de discuter de la définition de la longueur. En effet, dans ce problème, l'idée de longueur peut être contre-intuitive pour les élèves. Ils sont habitués lorsqu'ils ont à faire à une forme géométrique, telle un carré dans ce cas, que la longueur représente un côté de la forme (par exemple la longueur et la largeur d'un rectangle). Par contre, dans ce cas, la longueur représente le périmètre de la figure. C'est cependant un type d'exemple qu'ils ont sûrement traité antérieurement : clôturer un terrain, mettre des bandes à une patinoire sont des contextes que l'on peut retrouver dans les manuels du secondaire. Josée a recours à un schéma pour préciser ce qu'on entend par longueur dans ce problème. Elle fait aussi une analogie avec les murs de la classe. On parle de la longueur d'un mur (d'un côté d'un rectangle) et non de tout le tour de la classe. Elle cherche également à obtenir le terme plus formel pour la longueur de la clôture ou « le tour de toute la superficie », soit le périmètre. Elle se retrouve avec quatre représentations différentes de la longueur de la clôture : ***L***, longueur, périmètre et le schéma.

Pour résoudre le problème, elle va d'abord nommer un côté du carré ***c***. Une représentation commune du côté d'une figure géométrique. Les élèves reconnaissent rapidement que $L = 4c$. Maintenant, la tâche demande d'exprimer ***L*** en fonction de ***A***. Josée cherche donc à exprimer *c* en fonction de ***A***, mais la raison de ce processus reste implicite. Les élèves savent identifier le lien entre ces deux variables et appliquer les manipulations nécessaires pour obtenir que $c = \sqrt{A}$ et finalement que $L = 4\sqrt{A}$.

Le deuxième exercice demande de trouver la dérivée de fonctions de différents types. C'est la première fonction qui cause des problèmes aux élèves pour l'instant : $f(x) = 4$.

Josée reprend la question en poussant les élèves vers une conversion du registre verbal vers un autre registre inconnu: « quand ils disent de trouver la dérivée, c'est quoi? Qu'est-ce qu'il faut comprendre de ça? » Au départ, on ne sait pas très bien vers quel registre elle veut les diriger, mais rapidement, on se rend compte qu'elle veut voir la représentation algébrique apparaître. Quand un élève donne une notation différente de la dérivée ($f'(x)$), elle le redirige vers « les calculs ». Elle en profite tout de même pour rappeler les différents synonymes du concept y compris la vitesse instantanée, même si l'exercice n'est pas dans ce contexte. L'enseignante coordonne les différentes représentations pour résoudre l'exercice. En effet, elle trace la représentation graphique de la fonction, en plus de travailler aussi sur sa représentation algébrique. Elle produit aussi l'expression algébrique de la dérivée de cette fonction. Pour ce faire, elle utilise le terme vitesse instantanée pour le même exemple hors contexte. De plus, elle interprète la fonction $f(x) = 4$ (voir extrait 4.26). On voit la coordination des différentes représentations dans cet extrait.

J : [...] Peu importe le x que je prendrais, ça donnerait... toujours quatre [elle trace plusieurs points sur le graphique]. Peu importe le x, son image, ce sera toujours quatre. Donc... peu importe ce que j'ai ici à l'intérieur, ça me donnerait quatre. Le premier bloc, c'est quatre, le deuxième, c'est quatre, sur delta x [$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4-4}{\Delta x}$].

Extrait 4.26: Coordination des représentations de la fonction $f(x) = 4$

Elle arrive alors à l'expression $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$. Afin de poursuivre la résolution de cet exercice, elle sollicite l'avis des élèves. Comme Josée l'avait probablement prévu, certains tombent dans le piège et clame la présence d'indétermination ($\frac{0}{0}$). Même si Josée sait que ce n'est pas la bonne réponse, elle poursuit avec leur idée et leur demande d'expliquer plus en détail ce résultat. Voyons comment elle gère cet épisode (voir extrait 4.27) :

J : Ah, c'est une indétermination? [À la suggestion d'un élève] Ok! Ça ici là [$\frac{0}{\Delta x}$], ça ressemble à... c'est un zéro sur zéro [$\frac{0}{0}$]?

É5 : Oui.

J : Parce que mon delta x égale à zéro?

É3 : Non.

J : Mon delta x, il vaut quoi?

É3 : Plus...

J : <u>C'est un petit peu plus que zéro ou un petit peu moins que zéro, il n'est pas égale à zéro, mais une valeur proche de zéro!</u> Ça peut être comme par exemple, zéro virgule zéro zéro zéro... un [0,...01]. Mais si je prends zéro et que je le divise par ça [0, ...01]?

É3 : Moins l'infini!

É6 : Ben non, ça va donner zéro.

J : Zéro divisé par un nombre quelconque, ça donne... zéro. Donc, ici là [$\frac{0}{\Delta x}$]...

És : Ha ha ha! J : Ha ha ha! Non, mais c'est bien, les propriétés de... de division par zéro qui est retenue là! Donc, le rapport... la fraction que j'ai ici là, elle est égale à zéro. Ce n'est pas sa limite, mais elle, elle vaut zéro. Et limite de zéro c'est?

Extrait 4.27: Évaluation de la limite de la dérivée de f(x)=4

Dans cet extrait, on voit la vision de l'infini potentiel ressortir. Josée l'utilise pour justifier le fait que nous n'aurons pas d'indétermination. En fait, elle renforce l'explication en ajoutant que le rapport donnera zéro, que ce n'est pas la limite qui donne zéro, mais bien le rapport dont on prendra éventuellement la limite. Elle le précise à la fin de l'extrait.

On peut remarquer que quand l'enseignante sait que la limite est zéro, comme c'est le cas présent, elle n'utilise pas « la substitution directe de Δx ou h par 0 », on voit le cas contraire quand elle sait que le processus peut donner une indétermination (par exemple, voir section 4.3.1). C'est-à-dire que quand elle traite une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$, Josée va dire explicitement aux élèves de prendre $\Delta x = 0$. Dans le cas présent, l'enseignante parle d'une valeur petite près de zéro, par exemple, 0,000...1. Aussi, elle remarque que Δx peut prendre une valeur négative ou positive. Il faut signaler que dans les exemples qu'elle a donnés avant, elle prend, le plus souvent, le Δx positif (voir 4.3.2, par exemple).

L'enseignante effectue ensuite un retour sur la réponse qui est très intéressant. En effet, Josée cherche à faire comprendre aux élèves pourquoi ils ont obtenu cette réponse, pourquoi « c'était prévisible ». Une élève répond presque d'emblée que c'est parce qu'il n'y a aucune variation. Nous étions quand même surprise par cette réponse si rapide de l'élève. Nous ne pouvons malheureusement pas savoir sur quoi elle s'est basée pour arriver à ce raisonnement. Josée reprend la réponse de l'élève et ramène l'idée que la dérivée est en fait un taux de variation (voir extrait 4.28). Elle formule de deux façons différentes la façon dont la fonction change ou plutôt ne change pas. Pour clarifier son idée, elle a aussi recours à la fonction affine qui est représentée par une droite oblique, elle fait d'ailleurs le geste avec son bras. Un élève dit que la dérivée sera la pente, le taux de variation, le ***a*** de la fonction. Ici, une confusion peut s'installer dans la tête des élèves. En effet, il peut être difficile à ce moment, vu les représentations utilisées par l'enseignante, de distinguer le taux de variation de la fonction affine et le taux de variation que représente la dérivée. Josée explique alors le processus de la fonction affine (voir extrait 4.28). Ce qui consiste à expliquer l'effet du taux de variation sur l'image de x.

J : Quand je fais varier ma fonction d'un point à l'autre, d'un point à l'autre et d'un point à l'autre... Comment elle varie?
É8 : Constant.
J : De façon constante. Donc, là, ça serait normal si vous faites la dérivée d'une fonction affine, et c'est la deuxième [$f(x) = 1 - 3x$], vous allez trouver une constante.

Extrait 4.28: Explication du processus de la fonction affine

On voit à la fin de cet extrait qu'elle fait implicitement, de façon verbale, la distinction entre les deux taux de variation, celui de la fonction et celui de la dérivée. Cet épisode est aussi une bonne manière d'introduire les règles de dérivation qu'ils verront dans les prochaines séances. En effet, Josée sème déjà l'idée d'une certaine généralisation.

Le troisième exercice demande de déterminer l'équation de la droite sécante passant par les points $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ et $(1, f(1))$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$. Josée anticipe une difficulté chez les élèves à évaluer *f(x)* pour les x donnés. C'est pourquoi elle a immédiatement recours à l'approche avec la boîte qu'elle a utilisée dans les séances précédentes. Elle transforme l'équation de la fonction comme *f(□) = 1/□*. Elle évalue d'abord $f(1)$ sans problème et passe ensuite à l'évaluation de $f(\frac{1}{2})$. Elle commence par faire la manipulation mentalement et obtient évidemment que $f(\frac{1}{2}) = 2$. Elle essaie par la suite d'expliquer rapidement le processus utilisé. En fait, elle ne fait qu'évoquer oralement une procédure : « Si je rentre une demie ici [elle remplie la boîte avec le $\frac{1}{2}$], je vais le rentrer ici pareil hein [elle met $\frac{1}{2}$ dans l'autre boîte]. Donc, ça ferait un sur une demie. L'inverse de l'inverse, c'est multiplier par l'inverse. Ça me ferait deux. » On peut comprendre qu'elle a en tête l'algorithme suivant : Si on divise un nombre par une fraction, ça revient à multiplier ce nombre par l'inverse de cette fraction. On peut imaginer que dans la formulation de Josée, le premier « inverse » représente l'idée de division et le deuxième « inverse » représente la division par une fraction (qui est elle-même l'inverse de quelque chose). Enfin, on multiplie par l'inverse, on se perd! On multiplie quoi, par l'inverse de quoi? Plus tard, elle formulera la même règle beaucoup plus clairement : « Un sur une fraction, ça revient à l'inverse de la fraction ».

Une fois qu'elle a déterminé les points $(\frac{1}{2},2)$ et $(1,1)$ elle entreprend de trouver l'équation de la droite sécante. Elle cherche d'abord le taux de variation qu'elle nomme $\boldsymbol{m}$. Nous remarquons que Josée a souvent recours à une lettre pour identifier ce qu'elle cherche. Cela montre son attachement pour les représentations algébriques. Elle cherche ensuite l'ordonnée à l'origine en utilisant la formule $y=-2x+b$ et en remplaçant (x,y) par le point $(1,1)$. Notons que ce n'est pas la méthode qu'elle prend habituellement. Souvent, elle utilise l'équation $\frac{y-1}{x-1}=-2$ et isole le y pour obtenir l'équation de la droite. Il est intéressant de voir que Josée essaie de varier ses stratégies de résolution. Finalement, elle termine l'exercice en précisant qu'il s'agissait de trouver le taux de variation moyen et qu'il n'était pas question de « limite » dans cet exercice. Remarquons qu'elle utilise le mot limite pour parler de la dérivée (ou n'importe quel autre synonyme possible).

4.3.3.2 Continuité et dérivabilité

Afin de mieux faire le lien entre la continuité et la dérivabilité, Josée fait un rappel de leur définition. Pour la continuité, elle demande aux élèves de lui donner les trois conditions pour qu'une fonction soit continue en a. Les élèves semblent avoir privilégié la troisième condition : $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. C'est Josée qui doit rappeler l'idée d'existence des deux côtés de l'égalité avant de pouvoir penser les mettre en relation. Ensuite, elle évoque l'idée de le voir graphiquement, mais reporte ça à plus tard.

Elle enchaîne avec la dérivabilité. Josée amène d'emblée la notion d'existence encore une fois. Elle affirme que si une fonction est dérivable en a, c'est que $f'(a)$ existe. C'est à ce moment qu'elle demande la participation des élèves : « Mais là, que la dérivée existe, ça signifie quoi? » N'obtenant pas de réponse, elle transforme sa question : « Qu'est-ce qu'elle vaut cette dérivée? C'est quoi la définition d'une dérivée? » En disant « vaut cette dérivée », on peut croire qu'elle se réfère implicitement à un calcul et donc à la représentation algébrique. Cependant, les élèves ne semblent pas voir tous ces sous-entendus. Un élève se tourne vers une représentation de la dérivée qui, jusqu'à maintenant, a été liée à la représentation graphique, la pente. Cette représentation produit une idée chez un autre élève qui commence à donner l'équation de $f'(a)$ « $f(a+\Delta x)\ldots$ » en omettant la limite. Josée corrige immédiatement cette erreur et confirme que pour pouvoir dire que la dérivée existe, cette limite doit exister.

L'objectif de Josée devient de faire ressortir les cas où cette limite (la dérivée) n'existera pas. Cette partie passera uniquement dans le registre verbal en évoquant parfois le registre graphique, parfois algébrique, mais sans produire de représentation dans ceux-ci. Josée donne aux élèves le premier cas, c'est-à-dire quand la limite à gauche n'égale pas la limite à droite. Un élève suggère le cas où $f(a)$ n'existe pas. Il est intéressant de voir apparaître une réponse impliquant la notion d'existence chez un élève. Jusque-là, cette idée n'avait été mentionnée que par Josée. Finalement, l'enseignante donne un troisième cas, c'est-à-dire quand la limite donnerait l'infini.

L'enseignante va vers les représentations graphiques de ces deux concepts, telles qu'elle l'avait dit précédemment. Pour la continuité, l'idée est assez intuitive. En effet, les élèves, qui obtiennent une confirmation par Josée, mentionnent que c'est quand « ça ne s'arrête jamais ». Nous pouvons penser qu'ils pensent à l'idée de tracer la courbe d'un coup, sans s'arrêter. Ensuite, les élèves évoquent rapidement la pente de la tangente comme étant la représentation graphique de la dérivée.

4.3.3.3 Continuité et dérivabilité : graphiquement

Le prochain épisode de cette leçon est particulièrement intéressant par la primauté du registre graphique. En effet, Josée trace un graphique au tableau avec plusieurs particularités à observer (voir figure 4.48).

Figure 4.48: Graphique pour observer la continuité et la dérivabilité (21:28)

Elle travaillera avec cette représentation pendant un long moment afin de faire ressortir le lien entre la continuité et la dérivabilité. Elle commence par faire l'étude de la continuité en demandant aux élèves quels points sont des points de discontinuité. Les élèves repèrent immédiatement « là où il y a un saut ». Ensuite, Josée pointe quelques points particuliers sur le graphique comme le maximum en pointe ou un autre point anguleux pour tester les élèves sur la continuité.

Par la suite, elle étudie avec eux la dérivabilité de la fonction représentée. Elle procède en pointant des points sur le graphique et en demandant aux élèves s'il y a une tangente. Elle transforme un peu sa question pour faire référence à la représentation algébrique en demandant si le « rapport » existe. Cette représentation, assez spontanée probablement, comporte un implicite. En effet, il est certain que le rapport existe, la question qu'on doit se poser est plutôt si la limite de ce rapport existe. Finalement, Josée trace la tangente d'un premier point directement sur le graphique et passe à un premier point problématique.

Il s'agit en fait du point de discontinuité. Les élèves expriment leur idée intuitive qui voudrait que le point n'ait pas de tangente. Par contre, ils ont de la difficulté à expliquer pourquoi. Josée qui ressent cette incertitude les confronte en disant le contraire, qu'elle peut tracer une tangente, et elle trace une droite (voir figure 4.49). Plus tard, elle dira que la tangente n'existe pas. C'est étonnant qu'elle n'utilise pas le registre algébrique pour dire que ce qui existe est la dérivée par la gauche pour faire la distinction entre la dérivée et la tangente géométrique. À ce moment, nous voyons combien l'enseignante a une grande influence sur les élèves, car la plupart sont d'accord avec son idée.

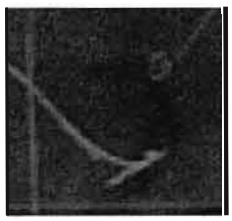


Figure 4.49: Confrontation de Josée avec l'idée intuitive des élèves (22:29)

Pour les convaincre, elle amène l'idée qu'elle se trouve du côté gauche du point. Elle trace une autre droite, mais cette fois-ci « à droite » du point, qui se trouve en fait à être le point ouvert de la fonction. Encore une fois elle utilise le registre graphique sans faire allusion à l'existence algébrique de la dérivée par la droite. Les élèves sont toujours d'accord qu'elle vient de tracer une tangente. On remarque que ce vocabulaire (à gauche et à droite) est le plus souvent utilisé quand elle fait la limite à gauche et à droite algébriquement. Elle essaie peut-être de faire référence à la limite (représentation algébrique) pour éclairer les élèves. Afin de les ébranler un peu, Josée leur demande s'ils ont remarqué quelque chose. Comme elle n'obtient pas de réponse, elle transforme sa question en la rendant beaucoup plus directive : « Je parle juste de la pente de la tangente. Est-ce que j'ai la même pente? » Elle veut en fait préciser que la dérivée par la gauche n'est pas égale à la dérivée par la droite. Tous les élèves reconnaissent que ce n'est pas la même pente, mais aucun ne développe. Josée leur demande ce que ça veut dire d'avoir deux pentes différentes. Cet exercice demande une activité de coordination mentale de la part des élèves. En effet, ils doivent partir de la représentation graphique, qu'ils ont pu interpréter verbalement « deux pentes différentes » pour passer par la représentation algébrique que deux pentes différentes reviennent à dire que la limite à gauche n'égale pas la limite à droite; et finalement conclure que la fonction n'est pas dérivable en ce point. Un élève sait faire la coordination vers la limite qui n'existera pas. Josée confirme cette affirmation, en conservant la conversion implicite, et répète que la pente à droite et la pente à gauche n'est pas la même, elles ne sont pas égales ce qui fait que la pente n'existe pas. On remarque qu'elle reste près du vocabulaire lié à la représentation graphique.

Un problème que l'enseignante n'a pas remarqué est la possibilité d'avoir un cas où la dérivée par la gauche et la dérivée par la droite seraient les mêmes et ce, même pour un point de discontinuité. Si l'on suit son raisonnement de dessiner les « deux tangentes » les pentes seront égales, même si la fonction est discontinue. Par exemple, en prenant n'importe quelle fonction dérivable et pour n'importe quel point « on coupe la courbe et on la déplace vers le haut ou vers le bas (voir Figure 4.50).

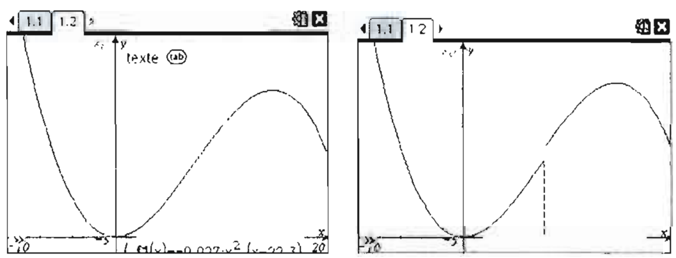


Figure 4.50: Cas où le calcul de la dérivée par la droite égale le calcul de la dérivée par la gauche en un point de discontinuité

Elle passe ensuite à un autre point particulier du graphique, le premier point anguleux (le maximum). Josée reste toujours complètement dans le registre graphique et demande aux élèves comment ils dessineraient la tangente à ce point. Elle leur suggère directement une droite horizontale, mais les élèves ne l'acceptent pas. Un élève propose qu'il n'y aurait pas de tangente, mais Josée poursuit dans son idée d'aller voir de chaque côté du point. Elle regarde d'abord à gauche et trace une droite qui se confond avec la fonction. Elle affirme alors : « Enfin la pente, c'est parce que c'est une droite, c'est la droite elle-même. La tangente, je veux dire la tangente, puisque c'est une droite, la tangente, ce serait elle-même. » Elle fait la même chose de l'autre côté (voir figure 4.51). Elle arrive finalement au même raisonnement que précédemment, la pente à droite est différente de la pente à gauche, donc la limite n'existe pas, donc la fonction n'est pas dérivable.

Figure 4.51: Deux droites passant par un point anguleux (24:42)

Josée étudie aussi le deuxième point anguleux. On remarque que malgré le point qu'ils viennent d'observer, les élèves pensent tout de même que ce point possède une tangente. Josée procède de la même façon pour convaincre les élèves du contraire. Elle trace une droite qui suit la fonction à gauche du point et une autre qui considère la fonction à droite du point (voir figure 4.52). Elle demande enfin aux élèves si d'autres points pourraient poser problème et ils concluent que non.

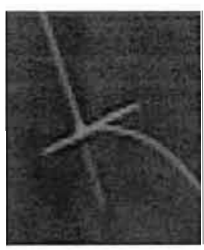


Figure 4.52: Droites passant par un point anguleux (25:34)

Après cette étude de la continuité et de la dérivabilité de cette représentation graphique, Josée veut rassembler les différentes observations qu'ils ont faites sur le graphique. Elle commence par leur faire remarquer ce que les points où la fonction n'est pas dérivable ont en commun. Un élève évoque le changement de direction, une représentation fonctionnelle. Josée persiste dans le registre graphique et leur demande à quoi ressemble ce changement de direction graphiquement. Elle utilise alors une représentation plutôt fonctionnelle : « Ça fait des... coins, des coins coins! [...] Là où j'ai un coin coin, il y a un problème de pente. » Un autre élève relève le point où il y a un saut. Josée parle plus formellement du point de discontinuité. C'est à ce moment qu'elle institutionnalise le lien entre la continuité et la dérivabilité. Elle formule en effet un théorème (voir figure 4.53). Remarquons seulement que l'enseignante coupe la représentation en omettant en $x = a$ pour dire uniquement en a.

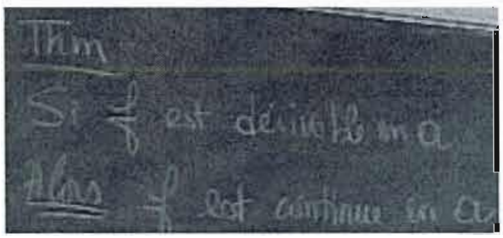


Figure 4.53: Théorème de continuité et dérivabilité (28:06)

Josée demande ensuite aux élèves d'essayer de transformer ce théorème afin d'en déduire différentes informations. Encore une fois, c'est une activité mentale de transformation dans le registre verbal lourde de sens, c'est-à-dire que cette représentation verbale est tout de même porteuse de beaucoup d'informations obtenues à l'aide des représentations algébriques et graphiques. Les élèves doivent être capables de les coordonner pour pouvoir déduire d'autres façons d'utiliser ce théorème. C'est un élève qui suggère quelque chose en premier (malheureusement, nous n'avons pas les mots exacts, mais Josée le félicite et reprend ce qu'il a dit dans ses mots). En effet, ils obtiennent la forme « si la fonction est discontinue $\Rightarrow$ elle n'est pas dérivable » que Josée qualifie comme la contre-opposée du théorème précédent. Nous voyons par cette utilisation d'un terme très formel et aussi par le symbole d'implication dans la rédaction de ce théorème au tableau l'arrivée de représentation plus formelle que précédemment dans cette leçon. D'ailleurs, Josée utilise ce symbolisme de façon claire, elle précise ce que cette flèche représente. Elle fait aussi la distinction, implicitement, entre l'implication simple et double. Elle précise que l'inverse n'est pas vrai : « Ça ne veut pas dire que si elle [la fonction] n'est pas dérivable, alors elle n'est pas continue. » Pour justifier cette affirmation, elle retourne vers la représentation graphique où elle fait remarquer que la fonction n'est pas dérivable au point de discontinuité.

Ensuite, l'enseignante enchaîne avec la conversion de la représentation graphique du point anguleux à sa représentation verbale et sa définition plus formelle. Comme depuis le tiers de la leçon jusqu'à maintenant Josée se situe dans le registre graphique (et verbal évidemment), nous sentons que les élèves se réfèrent plus aisément à ce registre. En effet, lorsqu'elle leur demande ce qui se passe quand on a un point anguleux, les élèves répondent avec une représentation qui évoque le graphique, « il y a deux pentes ». Afin de rendre plus formelle la définition du point anguleux liée à la dérivée de la fonction en ce point, Josée utilise le registre algébrique. En effet, elle produit la représentation algébrique de deux pentes qui ne seraient pas les mêmes de part et d'autre d'un point : « ***a*** est un point anguleux si $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ». Elle ne précise pas que la fonction doit être continue. Elle effectue donc une conversion du registre graphique vers le registre algébrique.

Cette échappée vers le registre algébrique ne dure pas. Elle retourne immédiatement vers le registre graphique. En effet, Josée demande aux élèves de lui donner en exemple, une fonction connue qui graphiquement aurait un point anguleux. Un élève évoque immédiatement la fonction valeur absolue dont Josée donne les représentations algébrique et graphique. Elle précise que cette fonction serait dérivable partout sauf au point anguleux.

4.3.3.4 Un exemple

Après avoir introduit la théorie qu'elle désirait, le lien entre la continuité et la dérivée et le point anguleux, Josée fait un exemple devant le groupe. Elle prend la fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ dont elle trace le graphique (exemple dans Hamel et

Amyotte, 2007, p. 83). Il était quand même rare jusqu'à cette leçon que Josée commence un exemple en traçant le graphique de la fonction en jeu. Elle commence par interroger les élèves au sujet de la continuité et ils reconnaissent bien que cette fonction est continue sur tout son domaine. Pour ce qui est de la dérivabilité, Josée cible directement le point $(1, f(1))$. Elle suggère aux élèves que la tangente en ce point pourrait être une verticale. Les élèves sont d'accord, alors elle la trace sur le graphique. Comme les élèves pensent que le taux de variation de cette droite sera nul, peut-être l'associent-ils au taux de variation d'une droite horizontale, Josée leur dit qu'en fait la dérivée n'existe pas. Elle dit : « Sa pente n'existe pas quand c'est une droite verticale ». On pourrait dire en fait que la pente d'une droite verticale serait l'infini, ce qui mène à une limite qui n'existe pas. Une élève avait évoqué l'idée que la pente serait l'infini, mais Josée n'a pas entendu sa réponse. Elle n'a donc pas pu se servir de cette réponse pour amener l'idée. De toute façon, Josée décide de « le prouver », de « le faire de façon mathématique ». Josée montre que, pour elle, les mathématiques, c'est algébrique. En effet, ici, le graphique suffit pour anticiper que la limite à gauche n'existe pas. Cependant, il est vrai que comme elle travaille sur un graphique depuis le début, le registre algébrique peut venir compléter l'explication.

Au début du calcul de $f'(1)$, les élèves ont de la difficulté à repérer la représentation algébrique dont ils ont besoin. Une fois que la représentation $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ est trouvée, le groupe n'a pas de mal à faire les manipulations nécessaires pour obtenir $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}$. On remarque que Josée a utilisé Δx. Elle varie les représentations à l'intérieur du même registre. Tout le long des manipulations, elle se soucie également de bien mettre en évidence l'équivalence de chacune des représentations. À un certain moment, Josée anticipe mentalement le résultat de la limite et dit aux élèves : « Je ne sais pas si vous le voyez déjà, mais bon... on va pousser. » Nous interprétons cette intervention comme un message aux élèves comme quoi quelque chose va se passer et qu'ils pourraient essayer de voir ce que c'est. Elle leur donne l'idée qu'ils pourraient anticiper la réponse. Cependant, aucun élève n'exprime verbalement son idée.

À ce stade, les avis sont partagés quant à l'étape suivante. Les élèves parlent tous en même temps, mais on dégage certaines idées reprises par Josée comme multiplier par le conjugué ou évaluer la limite. D'ailleurs, un élève le fait et constate bien que ça donnerait une indétermination. Josée, elle, les amène à observer la racine : « Est-ce que vous voyez que mon Δx qui est en dessous de la racine est à côté de 0? » Remarquons l'utilisation du « à côté » que nous avons vu dans plusieurs représentations dans les cours précédents. Un élève souligne que le Δx sera zéro un petit peu plus. Nous notons que l'élève a encore l'idée intuitive d'aller voir du côté droit, mais cela est peut-être dû au fait que la fonction n'est pas définie du côté gauche. Cependant, un autre élève le contredit et affirme qu'on ne sait pas de quel côté. Josée renchérit en disant : « Il faut distinguer à droite et à gauche. Mais, on est sûr sans aller faire de calcul, qu'est-ce qu'il va arriver? » Cette façon soudaine de délaisser les calculs est intéressante puisque l'aboutissement de ce calcul est justement la raison pour quoi elle l'a entamé. En effet, elle voulait prouver algébriquement que ça n'existerait pas, mais elle s'arrête avant que les élèves puissent voir concrètement le résultat dans le registre algébrique. Une élève sait anticiper. Elle affirme que ça ne sera pas égal, que ça ne marchera pas à gauche. Nous pouvons imaginer que l'élève s'est servie de la représentation graphique pour pouvoir faire cette allégation. Josée confirme que la limite à gauche n'existe pas. Un élève s'interroge alors, sur la provenance de cette « conclusion ». Il demande à Josée si c'est en raison du graphique qu'elle fait cette conclusion. La réponse de Josée est surprenante (voir extrait 4.29).

J : Est-ce que j'ai travaillé dans le graphique là? Ben, non, c'est à cause que mon Δx, en dessous de la racine et j'ai mon Δx aux alentours de zéro. Il peut être un petit peu plus grand et il peut être un petit peu plus petit c'est ça? Mais là, si j'ai ce... je ne sais pas le cas, si un moment donné, je le prends plus petit, ben, il va être négatif. Ça ne marcherait pas! Il n'y en aura pas. Ce n'est pas défini pour un Δx à gauche de zéro. Donc, déjà là, la limite de cette quantité lorsque delta x tend vers zéro moins de f de un plus h moins f de un sur h [$\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ n'existe pas] elle, elle n'existe pas. J'ai une partie de la pente de la tangente qui n'existe pas. Qu'est-ce que je peux dire de la tangente? Elle n'existe pas...

Extrait 4.29: Explications de Josée à un élève (36:56)

On aurait pu penser que la raison pour laquelle Josée avait arrêté ces calculs était justement qu'elle pouvait se baser sur la représentation graphique. Cependant, cette réponse nous confirme qu'elle est restée dans le registre algébrique, mais elle a fait les transformations mentalement. Ainsi, les élèves n'ont pas pu suivre sa démarche. De plus, elle évoque l'idée que c'est parce que ce sera un négatif sous la racine (lors de la limite à gauche), mais ne l'écrit pas. C'est pourtant l'enjeu de ce calcul. On peut donc dire que son passage vers le registre algébrique ne sert pas beaucoup les élèves puisqu'elle s'arrête avant la partie clé. Josée conclue finalement que comme la limite à gauche n'existe pas, la limite n'existe pas et f n'est pas dérivable en $x = 1$.

On observe que Josée confond l'existence de la dérivée et l'existence de la tangente géométrique. En effet, elle a choisi l'explication que la limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}\right)$ n'existe pas parce que Δx ne peut pas être plus petit que zéro. En plus, elle ajoute que « J'ai une partie de la pente de la tangente qui n'existe pas. Qu'est-ce que je peux dire de la tangente? Elle n'existe pas... ». Cette explication va à l'encontre de la représentation graphique (Hamel et Amyotte, 2007, p. 83) du manuel. C'est possible que la conception de Josée soit que si la dérivée n'existe pas, alors la « tangente géométrique » n'existe pas.

Pour illustrer cette idée, on peut penser à la fonction $f(x) = \sqrt{|\, x \,|}$, x ∈ R, par exemple. Cette fonction admet une tangente géométrique en $x = 0$, et elle n'est pas dérivable en zéro[11].

[11] Ce type de conception a été signalé par Fischbein (1987) « *Intuition in science et mathématiques* » en citant Vinner (1982), sur la possibilité de construire une tangente (géométrique) avec des fonctions non dérivables en un point.

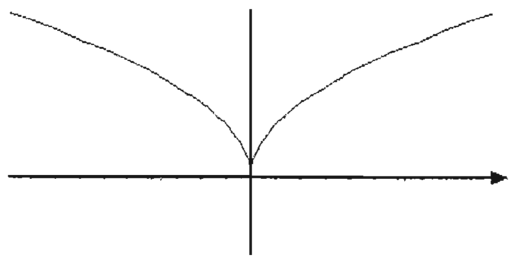


Figure 4.54: Représentation graphique de $f(x)=\sqrt{|x|}$

Enfin, Josée termine la partie théorique de la leçon en introduisant la notation $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$. Elle en profite pour rappeler différents synonymes qui peuvent y être associés : dérivée, taux de variation instantané, $f'(a)$.

4.3.3.5 Aide individuelle aux élèves

Lors de l'aide individuelle aux élèves, nous remarquons d'abord qu'un des exercices cause un problème particulier (#13, Hamel et Amyotte, 2007, p.126). C'est que le corrigé de cet exercice utilise la représentation $\lim\limits_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ pour calculer la dérivée d'une fonction en un point, une représentation peu travaillée par Josée. Plusieurs élèves ne font pas le lien entre la représentation qu'ils sont habitués d'utiliser ($\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$) et celle-ci. De plus, le manuel leur rend la coordination de ces représentations encore plus difficile en prenant ***b=x***. Ainsi, les élèves sont confus entre la représentation de la fonction dérivée d'une fonction $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et l'équation utilisée par le corrigé. Josée a du mal à leur faire voir l'équivalence de toutes ces représentations. Elle met l'accent sur le fait que le plus important est de faire la limite de la bonne variable et « vers » la bonne variable. Certains élèves les voient comme deux techniques complètement différentes ou ils cherchent à se créer une *recette*. En effet, un élève donne à la représentation $\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ le nom de « technique de la pente ». Pour lui, c'est comme si ce n'est que cette formule qui peut donner une pente. Après que Josée ait verbalisé l'équivalence entre les deux, l'élève conclut finalement qu'il peut utiliser l'une ou l'autre pour calculer la dérivée. Un autre élève s'invente un système qui lui permettra de savoir quelle formule utiliser au bon moment. Voilà un indice clair que certains élèves ne comprennent pas bien l'équivalence entre ces représentations. Nous avons l'impression qu'ils peuvent confondre les représentations (voir extrait 4.30).

É17 : Ok, ça fait que checker si c'est continu, on le fait avec ça... en un point? Ça, c'est pour en un point. Quand on le fait avec x plus h eh...
J : Moins f de x...
É17 :... sur h.
J : C'est pour un x quelconque.
É17 : Et ça, c'est pour eh...
J : Général! La règle générale.

Extrait 4.30: Association d'une représentation avec un type de problème (DVD2 6:35)

Une autre embûche est liée à la compréhension de la fonction valeur absolue. Les élèves pouvaient péniblement comprendre le processus de cette fonction. Certains avaient même la conception que pour enlever le symbole de la valeur absolue, il fallait ajouter le signe contraire des termes à l'intérieur de la valeur absolue. Josée, pour surmonter cette difficulté, le plus souvent donnait une explication qui était collée à l'exercice, mais voyant que ça ne les aidait pas beaucoup, elle a finalement pris du recul quant à l'exercice pour expliquer le processus de la fonction de façon plus générale. À un certain moment, elle a aussi eu recours à un schéma pour que l'élève visualise bien l'explication.

À quelques reprises lors de ces explications, Josée essaie de comprendre et conserver les représentations spontanées des élèves. Par exemple, une élève présente à Josée une solution avec la représentation $\lim_{h \to 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{h}$. L'enseignante, d'abord surprise de voir apparaître cette représentation qui n'est encore jamais apparue dans les séances en classe, explique à l'élève pourquoi elle est erronée. En effet, l'enseignante accentue le fait que l'élève peut utiliser $f(3-h)$, pourvu qu'elle ait un dénominateur cohérent, c'est-à-dire $3-h-3=-h$. Josée essaie de poursuivre les calculs avec la représentation de l'élève, mais change d'idée et revient à la représentation à laquelle ils sont habitués, plus institutionnelle. À une autre occasion, une élève obtient la bonne réponse pour le calcul d'une dérivée, même si elle avait fait des erreurs dans les manipulations. Josée cherche à approfondir d'où provient l'intuition de l'élève pour obtenir la bonne réponse, mais malheureusement l'élève dit ne pas se souvenir pourquoi elle a obtenu la réponse.

En général, dans les explications de Josée, nous entendons souvent le vocabulaire lié à la vision de l'infini potentiel : « à côté de... », « proche... », « autour de... », etc. Elle utilise aussi une nouvelle représentation « un peu positif ». On voit ce terme revenir à différents moments pendant la période de questions. Nous savons qu'elle veut probablement se référer à une « quantité près de zéro du côté positif », mais la représentation est discutable. En effet, un nombre est positif ou négatif, il ne peut pas être un peu positif ou négatif.

Même si dans ses explications Josée met l'accent sur un $\boldsymbol{h}$ ou un Δx qui n'est pas égal à zéro, nous observons que pour les élèves le remplacement de $\boldsymbol{h}$ ou Δx par zéro est devenu presque un automatisme. Assez qu'il est difficile pour eux de concevoir que $\lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$ donne un. Plusieurs ont le réflexe de remplacer le $\boldsymbol{h}$ par zéro. Ils obtiennent donc une indétermination. Suite à la simplification des $\boldsymbol{h}$ par 1 effectuée par Josée, une élève lui exprime même : « Je ne pensais pas que je pouvais faire ça ».

Un épisode important de cette partie survient lorsque Josée répond à trois élèves qui se posent des questions sur le #1 de l'exercice 2.5 du manuel à la page 84 (voir figure 4.24). Les élèves s'interrogent sur la dérivabilité en $x=3$. Sans prendre de règle ou d'outils quelconques, Josée insinue que l'image de $x=3$ est le point courbe un peu à droite de $x=3$ en réalité. En utilisant ses mains, elle mime les tangentes possibles en ce point qui auraient selon elle des pentes différentes si l'on s'approche vers la droite ou vers la gauche. Elle affirme qu'il s'agit d'un point anguleux. Selon nous, le point que Josée décrit serait bel et bien dérivable, ainsi, ce ne serait pas un point anguleux. L'enjeu du problème réside selon nous dans l'hypothèse que l'élève amène. Il suppose que l'image de x=3 arrive « en plein milieu » ce que nous interprétons comme étant le point d'inflexion. En effet, en ce point, la tangente géométrique existe, mais la limite n'est pas définie ce qui fait que la fonction n'est pas dérivable. Josée qui dans ces explications précédentes (voir section 4.3.3.4) ne distinguait pas ces deux points de vue ne relève pas la remarque de l'élève au début, mais finit par lui donner raison. Cependant, elle ne fait toujours pas la distinction entre les deux points de vue. De cette façon, les élèves ont de la difficulté à conceptualiser le problème puisqu'ils peuvent tracer la tangente géométriquement. Pour comprendre un tel problème, les différentes représentations sont nécessaires : graphique pour visualiser que la tangente existe et algébrique pour prouver que la pente est non définie. Dans le cas présent, les élèves ne peuvent pas coordonner les représentations pour construire ce concept.

Enfin, parmi toutes les questions qui sont apparues lors de la période d'aide individuelle, nous sommes amenés à nous demander si les élèves comprennent vraiment les représentations qu'ils utilisent. Nous avons eu l'impression qu'ils les utilisaient un peu comme un copier-coller. En effet, lorsqu'il était temps de les transformer (premier point relevé dans cet épisode) ou de les coordonner (paragraphe précédent), ils éprouvent beaucoup de difficultés. Une élève le dit même explicitement : « Non, je ne comprends pas pourquoi justement. Je le fais, mais je ne comprends pas... » Ceci confirme ce que nous avons vu dans la littérature et dont nous avons parlé dans le premier chapitre. Les élèves ont des difficultés avec la compréhension conceptuelle et l'utilisation des différentes représentations.

4.3.3.6 Résumé de l'analyse de la séance #3

Analyse centrée sur l'enseignante :

a) Nous remarquons au début de la séance que Josée semble avoir une conception de la compréhension qui privilégie la compréhension procédurale.

b) Comme dans les autres séances, Josée a une préférence pour le terme « vitesse instantanée » même quand elle ne se trouve pas en contexte de vitesse. Elle mentionne pourtant aux élèves que ce terme est réservé à un contexte.

c) Nous remarquons l'intention de Josée de varier sa stratégie de résolution. En effet, elle utilise une façon de faire suggérer par les élèves dans les cours précédents pour trouver l'équation d'une droite par exemple. De plus, elle varie aussi les représentations à l'intérieur d'un même registre. Par exemple, elle utilise différents synonymes ou notations pour désigner la dérivée. Aussi, elle utilise parfois h parfois Δx pour trouver une dérivée.

d) La plupart du temps dans cette leçon, lorsqu'elle suit un exercice suggéré dans le manuel, Josée se situe dans le registre graphique. Cependant, elle associe toujours les mathématiques à quelque chose faisant nécessairement partie du registre algébrique. Par exemple, même si elle passe plus du tiers de la leçon dans le registre graphique, lorsqu'elle fait l'exemple, elle ressent le besoin de le faire « mathématiquement » ce qui implique le registre algébrique. Étonnamment, elle ne démontre pas algébriquement le théorème de continuité et dérivabilité comme l'a fait Louise par exemple.

e) Josée semble pouvoir cibler quelques difficultés des élèves. Cependant, elle a de la difficulté à gérer les représentations qu'elle utilise pour que les élèves puissent s'en servir pour surmonter ces difficultés. Par exemple, elle fait une explication très rapide de l'évaluation de $f(\frac{1}{2})$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$, alors qu'elle se doute fortement d'une difficulté chez les élèves. Nous pouvons le voir aussi dans son explication « tronquée » du calcul de $f'(1)$ quand $f(x)=\sqrt{x-1}$.

f) L'enseignante utilise régulièrement une représentation graphique avec un Δx ou h positif. Dans une situation du calcul de la limite qui est lié à une indétermination, elle suggère explicitement aux élèves l'utilisation d'une procédure de substitution de Δx par zéro (voir section 4.3.1) pour arriver à une indétermination. Par contre, dans le cas présent, avec $\frac{0}{\Delta x}$, Josée va dire que le Δx est très petit mais différent de zéro.

g) Josée a pris un exemple du manuel (Hamel et Amyotte, 2007, p. 83) pour montrer que la fonction $f(x)=\sqrt{x-1}$ n'est pas dérivable en $x=1$. Il est intéressant de souligner que dans le manuel il y a une représentation graphique (p. 83) qui montre que la droite $x=1$ est tangente à la courbe. Il n'y a pas d'explication sur l'existence de la tangente (disons géométrique) et le processus algébrique pour montrer que $f(x)=\sqrt{x-1}$ n'est pas dérivable en $x=1$ dans le manuel. On se demande pourquoi les auteurs ont utilisé un exemple de ce type sans promouvoir une réflexion sur la possibilité de l'existence des tangentes géométriques et la non-dérivabilité. De ce point de vue, l'enseignante semble avoir une conception liée à « non dérivabilité implique que la tangente géométrique n'existe pas ».

Analyse centrée sur les réponses des élèves :

A) Les élèves ont beaucoup de difficulté à concevoir l'équivalence entre les différentes représentations algébriques. Il est aussi ardu pour eux de les transformer. Par exemple, certains élèves ne voient pas l'équivalence entre $\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

B) Les élèves semblent avoir de la difficulté à comprendre le processus de la fonction valeur absolue.

C) Ils ont une tendance à remplacer le $\boldsymbol{h}$ ou le Δx par zéro dans un contexte de limite. En effet, certains ne voient pas que $\lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$ égale 1 et non $\frac{0}{0}$.

4.4 Approche physico-mathématique

Comme nous l'avions annoncé dans la partie 4.2.1, nous allons maintenant revenir sur l'exemple utilisé par Louise pour introduire le concept de dérivée. Cet exemple, issu du manuel (voir figure 4.2), prône une approche physico-mathématique. Cependant, c'est en observant la situation plus en détail que nous avons découvert que plusieurs éléments physiques ne sont pas considérés dans ce problème. En effet, dans un contexte de vitesse, plusieurs traitements de la situation sont possibles. Nous vous présentons ici, une façon d'aborder la situation.

Nous pouvons d'abord nous mettre d'accord sur certaines conventions de modélisation de la situation. Nous pouvons, par exemple, considérer la position de la balle dans le temps en admettant une position par rapport au sol. De cette façon, nous pourrons obtenir une vitesse moyenne négative ou même nulle. Cette notation peut être visuellement proposée avec la représentation graphique de la courbe (voir figure 4.55).

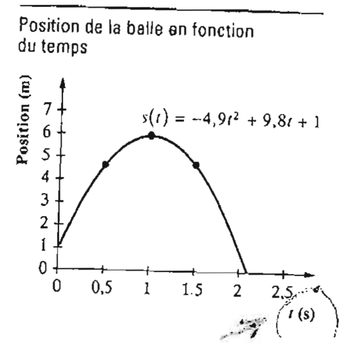
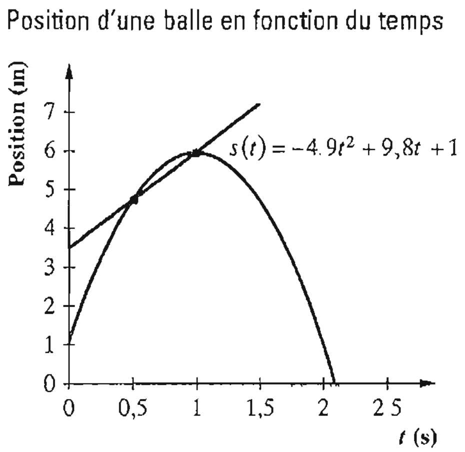


Figure 4.55: Représentation graphique de la distance parcourue par rapport au temps écoulé (Amyotte et Hamel, 2007, p.66)

C'est de cette façon que le manuel traite l'exemple et c'est également comme ça que Louise, implicitement, la traitera. Par contre, ni le manuel, ni Louise ne vont expliciter les choix qui établissent la modélisation du problème.

Dans cette situation, la vitesse moyenne est représentée graphiquement par la pente de la droite sécante entre deux points pour des moments donnés (voir figure 4.3.2). Quant à la vitesse instantanée, elle est représentée visuellement par la pente de la droite tangente au point pour un moment donné (voir figure 4.3.3).



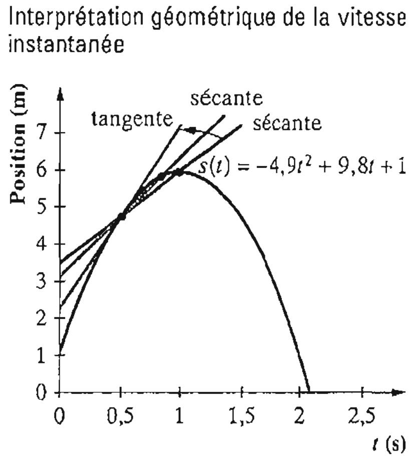


Figure 4.56: Vitesse moyenne **Figure 4.57: Vitesse instantanée**

(Amyotte et Hamel, 2007, p.7)

Algébriquement, la vitesse moyenne est en fait le taux de variation entre deux points appartenant à la fonction qui modélise la situation (Vitesse moyenne entre $(t_1, s(t_1))$ et $(t_2, s(t_2)) = \dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$) et la vitesse instantanée est décrite comme la limite des vitesses moyennes du mobile lorsque la longueur des intervalles de temps sur lesquels les vitesses moyennes sont calculées tend vers 0 (p.7) (Vitesse instantanée au point $(t, s(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$).

Une autre chose que l'on pourrait voir apparaître est la confusion entre la courbe représentée et la trajectoire de la balle. Si, comme nous en avons discuté dans la partie 4.2.1.2, certains élèves voient la balle lancée vers l'avant plutôt que vers le haut, ils peuvent poursuivre dans cette conception en imaginant que la courbe parabolique représente la trajectoire de la balle.

Finalement, autant chez Louise que dans le manuel, on remarque une évasion du contexte. En fait, le contexte devient accessoire dans cette situation dû au manque de considération de certains points primordiaux pour clarifier la situation. Nous pensons qu'il serait important de discuter avec les élèves sur les choix qui ont mené à ce genre de modélisation, car c'est là, un des principaux intérêts d'utiliser un contexte.

CHAPITRE 5 : DISCUSSION

5.1 Introduction

En plus des observations liées à l'utilisation des représentations que nous avons analysées dans les chapitres précédents, nous avons pu observer certaines difficultés des étudiants à saisir des notions de calcul différentiel qui ont été mentionnées dans la littérature. En effet, nous avons pu voir des confusions concernant les concepts de limite, d'infini, de tangente et des difficultés avec les manipulations algébriques.

En analysant les leçons des deux enseignantes, nous avons pu observer, de façon générale, les objets mathématiques représentés dans différents registres ou par un schéma qu'elles ont utilisés pour introduire la dérivée :

- Sécante et tangente liées à la pente (d'un point de vue de la langue naturelle, géométrique et algébrique)
- Différentes représentations algébriques, de la dérivée. Les expressions utilisées sont les suivantes :

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a),$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a),$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

- Nous n'avons pas repéré une distinction entre le calcul de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, et $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Une équivalence qui est vraie si f est continue. De plus, nous n'avons pas vu de distinction entre le processus de calcul de la limite qui ne doit pas être confondu avec la substitution de x = a.
- Les enseignantes n'ont pas fait la distinction entre $\Delta x \to 0$, ou $h \to 0$, et la non-équivalence avec $\Delta x = 0$ ou $h = 0$.
- Les enseignantes n'ont pas fait la distinction entre $x+\Delta x \to x$ et $b \to a$ avec $b=a+\Delta a \to a$ ou $b=a+h \to a$.
- L'enseignement d'une limite comme $\lim_{x \to a} f(x) = L$ avec une approche verbale qui a été centrée sur l'infini potentiel : $\underset{[quand\ x\ tend\ vers\ a\ ]}{limite} [de\ la\ fonction\ f(x)\ ] [est\ égale\ à] [L]$.
- Les gestes associés à l'enseignement de la limite dans un processus verbal étaient liés à un mouvement des mains indiquant un processus lié à l'infini potentiel (on s'approche pas à pas).

En fait, si nous utilisions une grille pour analyser les processus de conversion utilisés par les enseignantes, nous ne pouvons pas remplir toutes les cellules.

algébrique	Langue naturelle et les gestes	Schéma	Numérique	Graphique	Contexte
$\lim_{x \to a} f(x) = L$	$\underset{[quand\ x\ tend\ vers\ a\ ]}{limite} [de\ la\ fonction\ f(x)\ ] [est\ égale\ à] [L]$ les gestes liés aux mots « s'approcher de plus en plus »			Souvent du même type. Principalement dans l'introduction.	Physique lié à la vitesse (peu pris en compte)

Notre analyse du déroulement de la classe de mathématique de Louise et Josée a pris en compte ces aspects dans les chapitres précédents. Maintenant, nous voulons présenter une vision globale de leur approche d'enseignement, bien sûr particulièrement basée sur leur utilisation des représentations, et une corrélation avec la littérature correspondante.

5.2 Généralités chez les deux enseignantes

Lors des analyses des séances en classe, nous avons remarqué certaines caractéristiques de la pratique des enseignantes qui leur sont communes. En effet, même si elles ont une pratique plutôt différente, nous avons tout de même trouvé des ressemblances entre les deux. Une prédominance du registre algébrique, aussi du registre de la langue naturelle, et des représentations plutôt formelles, institutionnelles et évocatrices d'autres registres, de nombreux implicites et sous-entendus, une vision de la limite et de l'infini particulière et une approche, « tangentielle » on peut dire, par la physique.

5.2.1 Prédominance du registre algébrique

Même si nous pouvons voir l'utilisation de représentations graphiques ou schématiques, le registre algébrique reste le plus utilisé par les deux enseignantes observées, mis à part évidemment le registre verbal. Les deux enseignantes utilisent différentes représentations dans l'introduction du concept, pendant le premier cours, mais on les voit rapidement se détacher de certaines représentations pour se concentrer sur le registre algébrique.

D'abord, Louise démontre son aisance avec le registre algébrique en s'éloignant des contextes et en formalisant rapidement les représentations. En effet, elle se tourne vers des représentations algébriques pour faire la plupart de ses exemples. Nous pensons que son expérience pourrait l'amener à privilégier ce registre.

Du côté de Josée, au-delà d'une grande utilisation de représentations algébriques, nous sentons qu'elle accorde également une importance particulière à ce registre dans son discours. En effet, à plusieurs reprises, elle associe directement les mathématiques au registre algébrique. Par exemple, dans la troisième séance (voir section 4.3.3), elle voit un exemple à l'aide d'une représentation graphique. Dès qu'elle en a eu un aperçu du graphique, elle dit : « Maintenant, on va le faire mathématiquement ». Ici, Josée nous exprime clairement que pour elle, le travail sur le graphique n'est pas vraiment des mathématiques. Aussi, au début de la deuxième séance, elle parle aux étudiants de la rigueur mathématique. Pour elle, cette rigueur est associée à l'écriture mathématique et au registre algébrique. D'ailleurs, on remarque qu'elle n'a pas le même souci de rigueur quand il s'agit de gérer les représentations graphiques. Elle le démontre dans son exemple du voyage entre deux villes dans la première séance (voir section 4.3.1). De plus, nous observons qu'elle est beaucoup plus à l'aise dans le registre algébrique. En effet, à la suite de cet exemple en contexte, elle prend un exemple totalement algébrique et montre clairement qu'elle a plus de facilité à gérer ce type d'exemple. En adoptant une telle façon de faire, elle prend position sur ce que sont pour elle les mathématiques.

Les deux enseignantes se sentent plus à l'aise dans une approche liée au registre algébrique. Elles ont repéré les erreurs communes liées au traitement des fonctions et connaissent des stratégies que les élèves peuvent utiliser pour ne pas se tromper. Par exemple, quand les élèves sont face au calcul de $f(1+h)$ quand $f(x)=x^2$, les enseignantes leur proposent d'utiliser « la boite » ($f(\square)=\square^2$). Nous pouvons remarquer que pour surmonter cette difficulté, les enseignantes ne se tournent pas vers une explication à l'aide d'un graphique de cette manipulation. Alors, les élèves apprennent « un truc » pour résoudre ce type d'évaluation.

De son côté, la littérature des années 90 a mis de l'avant l'importance de la visualisation pour l'apprentissage de concepts mathématiques. De plus, Janvier (1987), Duval (1988 et 1993) et Hitt (1994, 1998, 2003, 2006) avancent que toutes les représentations doivent être considérées au même niveau pour la construction des concepts. Ainsi, une pratique qui privilégie le registre algébrique pourrait mener vers, entre autres, une évasion de l'utilisation des représentations chez les élèves comme Eisenberg et Dreyfus l'ont suggéré (1991).

5.2.2 Représentations formelles et institutionnelles

Dans les différents registres utilisés, on remarque que les enseignantes ont une tendance très forte à utiliser des représentations formelles et institutionnelles. En effet, la place donnée aux représentations spontanées ou fonctionnelles n'est pas très grande.

Louise a un souci de formaliser les représentations assez rapidement. On le remarque particulièrement par la distance qu'elle prend des contextes qu'elle évoque. En effet, dans le premier cours par exemple, elle s'éloigne rapidement du contexte pour utiliser des représentations plus générales et institutionnelles. Aussi, elle ignore parfois les réponses des élèves qui sont souvent plus fonctionnelles que la représentation qu'elle recherche. Nous émettons l'hypothèse que Louise croit que ce type de représentations permettra aux élèves d'être mieux préparés à aborder différents types de problèmes. Comme ces représentations sont plus générales, elle a probablement l'idée que les élèves seront plus aptes à choisir l'une d'elles et l'adapter pour résoudre n'importe quel problème. Cependant, encore faut-il que l'élève soit capable de les adapter.

On peut imaginer que, de son côté, Josée est rassurée par l'utilisation de représentations plus institutionnelles. Par exemple, nous avons déjà discuté de son inconfort à travailler avec le registre graphique. Nous remarquons aussi qu'elle utilise toujours (ou presque) la même courbe, c'est-à-dire une courbe de degré deux avec la convexité vers le haut représentée dans le premier quadrant, une représentation plutôt institutionnelle. De plus, son attachement au registre algébrique l'incite probablement à se tourner rapidement vers une rigueur dans l'écriture algébrique.

Dans leur perspective, diSessa *et al.* (1991) et Hitt (2003; 2006; 2007) ont mentionné l'importance de tenir compte des représentations spontanées ou fonctionnelles. Ces chercheurs affirment qu'il est avantageux pour la compréhension des élèves de se soucier des représentations fonctionnelles qu'ils adoptent pour les faire évoluer vers des représentations plus institutionnelles. On pourrait penser qu'insister trop rapidement sur des représentations institutionnelles pourrait nuire à cette évolution ou même l'empêcher dû au trop grand écart qui pourrait apparaître entre les représentations fonctionnelles des élèves et les représentations utilisées par l'enseignante.

5.2.3 Représentations verbales évocatrices

Évidemment en observant les pratiques enseignantes avec ce type de cadre théorique, on pouvait s'attendre à voir le registre verbal très présent. Il est vrai que ce registre a une grande importance autant pour exprimer certains concepts par des représentations propres à ce registre (par exemple, la verbalisation d'un processus) que pour évoquer d'autres registres. En effet, nous avons constaté que les enseignantes se servaient parfois de mots précis pour rappeler un registre sans vraiment produire de représentation dans ce dernier.

Par exemple, on relève rapidement que pour les deux enseignantes la représentation verbale institutionnalisée « pente de la tangente » était directement reliée au registre graphique. En effet, souvent elles demandent aux élèves ce qu'est la dérivée « graphiquement » et la représentation verbale « pente de la tangente » leur suffit. Nous pouvons penser que Louise et Josée sont aisément capables d'avoir une image mentale d'un graphique avec une tangente en un point. Par contre, il est permis de se demander si les élèves ont atteint un niveau de compréhension assez élevé pour pouvoir faire ce processus mental. L'expertise que possèdent les enseignantes leur permet de passer outre la production de la représentation évoquée. Elles ne considèrent toutefois peut-être pas toute l'habileté que demande un tel exercice de visualisation.

Un autre exemple est le vocabulaire lié au terme « calculer ». Il est devenu clair pour les enseignantes et pour les élèves que ce verbe était lié au registre algébrique. Cette association était peu surprenante et est probablement assez répandue dans le milieu. Aussi, on pourrait reparler de l'association que Josée fait entre « mathématique » et le registre algébrique. Les élèves interprètent bien le discours de Josée quand elle leur demande de le faire mathématiquement.

5.2.4 Les implicites et sous-entendus

Un des aspects importants que nous avons réalisés dans les analyses des séances en classe est le nombre impressionnant d'implicites et de sous-entendus liés à l'utilisation des représentations dans la pratique des enseignantes. Il est vrai qu'à certaines occasions, les enseignantes utilisent différentes représentations, mais elles les traitent de façon implicite. Au sens de Duval, nous pouvons affirmer que dans la plupart des cas, les enseignantes ont développé l'expertise nécessaire pour identifier les unités significatives d'une représentation qui leur permet d'effectuer mentalement la coordination entre les représentations. Cependant, elles n'explicitent que très rarement le processus mental d'articulation auquel elles ont recours. Nous soupçonnons que les élèves ne puissent pas suivre le travail que les enseignantes font avec les représentations et surtout les informations qu'elles peuvent obtenir de chacune d'elles. Ainsi, les représentations peuvent leur apparaître comme des outils utilisés parallèlement l'un à l'autre. Ces sous-entendus peuvent aussi contribuer à l'évitement par les élèves des représentations, puisqu'ils ne savent pas comment les gérer.

Le premier exemple traité par Louise, soit le lancée de la balle, produit le graphique à l'aide de l'équation de la fonction (voir 4.2.1), met en évidence ce type d'implicite. Dans cet épisode, il est clair que Louise se sert des unités significatives que la représentation algébrique lui fournit pour pouvoir construire le graphique de la fonction. Cependant, elle ne verbalise pas le processus qu'elle utilise, elle procède mentalement. De plus, elle n'a recours à aucun schéma pour représenter la situation physique. Le manuel non plus n'aide pas beaucoup de ce côté. En effet, les auteurs traitent eux aussi cet exemple sans avoir recours à un schéma et ils optent rapidement pour des représentations algébriques. Nous admettons que le passage de l'équation au graphique pour une fonction du deuxième degré devrait être maîtrisé par les élèves. Nous pouvons penser que Louise a pris pour acquis leur capacité à effectuer cette transformation mentalement.

De plus, les enseignantes peuvent souvent anticiper les manipulations nécessaires dans différents registres pour résoudre une tâche. Cela leur permet d'avoir une idée de la réponse ou de la stratégie à adopter pour résoudre le problème. Encore une fois, elles ne verbalisent pas ce processus d'anticipation ce qui fait que non seulement les élèves ne s'habituent pas à avoir une telle approche, mais ils peuvent avoir du mal à s'approprier la démarche. En effet, comme l'enseignante a anticipé, par exemple lorsqu'elle évalue la limite mentalement, elle peut élaborer une stratégie. Parce que cette réflexion n'est pas explicite, les élèves eux ne savent pas toujours d'où cette stratégie vient. On en voit un bon exemple à la fin de la troisième séance de Josée, quand elle fait l'exemple avec la fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ (voir 4.3.3). Dans cet épisode, l'enseignante arrête tout simplement les manipulations algébriques puisqu'elle anticipe la réponse, elle sait les faire mentalement. On voit alors une certaine confusion chez les élèves. Ils sont un peu surpris qu'elle s'arrête et cherche d'où provient la réponse finale.

Enfin, nous avons mieux compris qu'il n'était pas suffisant de savoir si les enseignantes avaient recours à des représentations différentes, mais aussi, qu'il fallait connaître si elles effectuent un travail explicite sur celles-ci. En effet, nous craignons que tous ces implicites et sous-entendus n'aideront pas l'élève à développer l'habileté à effectuer les différentes activités associées aux registres de représentations au sens de Duval.

5.2.5 La verbalisation du concept de limite et d'infini

Nous observons certaines difficultés avec les verbalisations du concept de limite et par le fait même avec celles du concept d'infini. Nous remarquons une difficulté à expliciter certaines étapes du processus d'évaluation d'une limite de la part des deux enseignantes. Il est vrai que la plupart des experts qui sont face à une limite vont faire un processus mental où ils vont remplacer le Δx par 0 dans l'équation. Cependant, il reste clair pour ces experts que ce processus n'est qu'une étape intermédiaire, mentale, informelle.

Nous admettons que dans l'enseignement de la limite, cette étape doit être rendue explicite aux élèves. Par contre, on pourrait aussi expliquer aux élèves que cette façon de faire représente une anticipation pour pouvoir élaborer une stratégie de résolution. À plusieurs reprises, les enseignantes ont fait un abus de langage en remplaçant tout simplement le $\boldsymbol{h}$ ou le Δx par 0. Nous avons même constaté que Louise égalise parfois directement la limite à $\frac{0}{0}$.

Ainsi, cette égalité devient possible pour les élèves. De plus, il n'est pas mis de l'avant que cela se « peut » seulement lorsque nous sommes en présence d'une limite. De cette façon, nous voyons les élèves évaluer un taux de variation moyen par la suite comme étant égal à $\frac{0}{0}$. Évidemment, ils sont confus lorsqu'on leur dit que c'est impossible.

Le problème réside aussi dans l'alternance, dans le discours des enseignantes, entre la substitution de $\boldsymbol{h}$ ou Δx par 0 et l'idée que $\boldsymbol{h}$ ou Δx ne sont pas égaux à zéro. Comme elles peuvent anticiper la réponse, elles utilisent le moyen d'anticipation qui convient. Ainsi, parfois $\boldsymbol{h}$ et Δx égalent 0, parfois ils sont une quantité « très très près de zéro ». Le vrai problème est que les élèves peuvent être confus puisque les deux enseignantes n'expliquent pas précisément pourquoi elles font ces choix. A priori, ces choix sont faits pour aider les élèves, pour qu'ils puissent bien voir ce qu'ils doivent faire pour évaluer la limite en jeu. En fait, les enseignantes essaient de leur rendre service en anticipant pour eux la stratégie de résolution. Que ce soit bien clair, nous ne doutons aucunement de l'intention des enseignantes d'aider les élèves à résoudre les problèmes.

Nous venons de mentionner d'autres conceptions importantes qui ressortent dans le discours des enseignantes. La conception que la limite est inatteignable (obstacle relevé par Schneider (1992)) et la vision de l'infini potentiel. Encore une fois, nous concédons que cette vision est inévitable dans le cadre observé.

On peut observer les enseignantes effectuer des mouvements de la main, lié aux représentations verbales, pour visualiser l'idée de « s'approcher de plus en plus ». Cette façon de faire peut promouvoir un obstacle chez les élèves par rapport à l'infini actuel. Cette vision de l'infini où on doit faire l'analyse de la situation autour d'un voisinage où rien ne bouge, la situation est statique. La définition de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, veut dire que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$

$\delta > 0$, tel que $0 < | x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$. La notion intuitive de s'approcher de plus en plus et les gestes associés n'ont pas leur place dans cette approche formelle.

L'infini mathématique est difficile à enseigner. L'histoire des mathématiques nous a montré que l'infini potentiel était déjà utilisé dès l'époque d'or des Grecs (siècle V a.C.) et que la conception de l'infini est passée par une évolution difficile, avec des contradictions qui ont été éliminées jusqu'à la naissance de la notion de l'infini actuel.

L'infini potentiel est lié à l'intuition et il est facile de construire l'idée de s'approcher de plus en plus, ou de dépasser un nombre quelconque en additionnant un chaque fois.

Le premier à trouver des difficultés pour mettre « en pratique » l'infini potentiel était Zénon d'Eléa. Avec ses paradoxes (p.e. Achilles qui ne parviendrait jamais en s'approchant pas à pas à attraper la tortue) Zénon a voulu montrer les limites d'une pensée liée seulement à l'infini potentiel. Les philosophes et mathématiciens du passé se sont refermés et ils n'ont pas démontré d'ouverture pour essayer de résoudre les paradoxes de Zénon. On peut confirmer avec le 8^{e} postulat d'Euclide : « Le tout est plus grand que la partie », qui est vrai seulement pour des ensembles finis.

L'infini actuel est complètement nécessaire pour dépasser les contradictions que l'infini potentiel pourrait générer. Alors, la question est de savoir, quoi faire dans une perspective d'enseignement.

Si nous voulons expliquer en mots la notation mathématique $\lim_{x \to a} f(x) = L$, nos explications verbales font référence nécessairement à l'infini potentiel. Alors, comment introduire l'autre face de l'infini mathématique; c'est-à-dire, comment introduire l'infini actuel à des élèves de Cégep ? Il faut signaler que pour les mathématiciens plus de 20 siècles se sont écoulés avant d'arriver à comprendre l'infini actuel. Nous voulons amener l'idée que l'apprentissage du concept d'infini actuel puisse être classé comme un obstacle du type épistémologique dans le sens de Bachelard (1938).

Alors, ce qui est certain, c'est que les étudiants vont faire face à des difficultés majeures pour apprendre le concept d'infini actuel. Notre tâche est de leur donner les outils nécessaires pour faire face à ces difficultés. Selon Brousseau (1987), il ne faut pas contourner un obstacle, il faut y faire face pour le surmonter et s'approprier le concept correspondant.

5.2.6 L'approche physico-mathématique

Il était très intéressant également de voir comment les deux enseignantes ont traité de façon très différente le même contexte de distance, temps et vitesse pour introduire le concept de dérivée. En effet, Louise a utilisé directement l'approche du manuel avec son exemple de la balle et Josée a voulu créer sa propre situation adaptée à sa classe, i.e. qu'elle a utilisé un contexte qui plaçait ses étudiants devant une situation connue, soit le voyage entre deux villes de leur région. Les deux enseignantes ont aussi ceci de commun qu'elles ont quitté le contexte pour résoudre le problème.

D'abord, nous avons relevé que Louise avait peu précisé la situation en jeu. En effet, nous avions parlé du manque de représentation schématique qui a pu créer une confusion de la part des élèves par rapport à la situation en tant que telle. En fait, la situation évoquait une balle lancée vers le haut, mais certains élèves ont pu la visualiser lancée vers l'avant. Ces deux façons d'interpréter la situation amènent un traitement du point de vue physique très différent. De plus, sa façon de s'éloigner du contexte dans cet exemple est liée à l'utilisation de représentations formelles et générales.

Pour sa part, c'est la coordination des différentes représentations liées à la situation en jeu qui donne de la difficulté à Josée. En fait, elle approche le contexte d'un point de vue plutôt intuitif ce qui amène des ajustements fréquents des représentations. D'ailleurs, la représentation visuelle qu'elle a produite est beaucoup plus associée à un schéma qu'à une véritable représentation graphique. Même si l'on retrouve des éléments qui satisfont les règles du registre graphique, plusieurs éléments intuitifs se côtoient et ne respectent pas ces règles. Par exemple, la définition des variables qui change parfois ne respecte pas les règles du registre graphique au sens de Duval. En effet, nous pouvons associer certains choix, comme le fait d'identifier au départ la variable indépendante à un nom de ville (position) et par la suite la définir comme un moment de la journée (temps), à des représentations spontanées de la part de l'enseignante. Ainsi, il est légitime de se demander si les élèves peuvent suivre ce raisonnement intuitif qu'elle construit au fur et à mesure qu'elle ajoute des éléments à sa représentation visuelle. Il faut comprendre que les élèves n'ont probablement pas les mêmes références que Josée. Elle semble avoir l'idée intuitive que la variable indépendante devrait être le temps, c'est peut-être la raison pour laquelle elle a appliqué ce changement. Cependant, les élèves n'ont probablement pas eu cette réflexion et avaient sûrement accepté la première définition de la variable.

Finalement, si dans un cas le contexte physique devient rapidement accessoire, dans l'autre, nous pouvons même imaginer qu'il a pu nuire à la compréhension des élèves et ce dû aux obstacles didactiques de l'épisode. Cependant, nous continuons de penser que ce contexte est pertinent pour l'introduction de la dérivée. De plus, comme les élèves le connaissent déjà un peu, il serait très intéressant de pouvoir utiliser les représentations spontanées des élèves pour les faire évoluer vers des représentations plus institutionnelles dans ce contexte.

5.3 Particularités de chaque enseignante

Malgré le fait qu'elles ont beaucoup d'éléments en commun, les deux enseignantes ont aussi quelques particularités propres à chacune d'elle.

5.3.1 Particulièrement chez Louise

Nous avons remarqué que Louise avait souvent recours à des courts résumés pendant ses leçons. Pendant ces épisodes, elle évoque les différentes représentations utilisées au cours des explications. Mentionnons qu'elle produit rarement les représentations dans d'autres registres que le registre verbal pendant ces résumés. En effet, elle utilisera plutôt la représentation verbale qui évoque d'autres registres et s'attendra à ce que les élèves puissent la visualiser mentalement. Comme nous en avons discuté plus haut, nous doutons de la capacité des élèves à suivre ces évocations.

Elle varie beaucoup le ton de sa voix et particulièrement lorsqu'elle fait les résumés. C'est comme une manière pour elle de mettre de l'emphase sur les différentes représentations du concept en jeu. Pendant ces périodes, nous comprenons que Louise a une approche axée sur la compréhension procédurale. En fait, les résumés deviennent souvent très algorithmiques. Par exemple, elle répète souvent les différentes représentations en utilisant le même jeu question/réponse, et ce, en utilisant un ton très rythmé et en faisant un geste semblable à un chef d'orchestre qui bat une mesure.

L'expérience de Louise se ressent beaucoup dans ses cours. La structure, sa façon de trier les réponses des élèves, son organisation, nous laissent voir qu'elle sait vers où elle veut aller. Même si on voit qu'elle a structuré assez précisément ses séances à l'avance, elle ne se laisse pas distraire par une erreur ou un imprévu. Le meilleur exemple est la façon dont elle a traité l'erreur de transcription qu'elle avait faite au début de la première séance. On se souvient que ne transcrivant pas le bon intervalle sur lequel calculer le taux de variation moyen, elle a obtenu un taux de variation moyen de 0 m/s. À cette occasion, elle a su adapter les représentations déjà données (voir extrait 4.8).

Nous avons également décelé une certaine ouverture de Louise pour l'utilisation des technologies. En effet, elle avait prévu utiliser un programme Maple animé pour faire l'exemple de la balle dans la première séance. Malheureusement, nous n'avons pas pu observer dans quel but elle utilisait la technologie. Était-ce pour utiliser différentes représentations? Aussi, elle utilisait parfois la calculatrice avec les élèves pendant la séance. Elle leur donnait quelques démarches plus rapides pour obtenir le calcul désiré. Nous pouvons associer cette utilisation au registre numérique seulement puisqu'elle ne l'a jamais utilisé à d'autres fins, au moment de notre observation, pour produire un graphique par exemple.

5.3.2 Particulièrement chez Josée

Il faut mentionner l'intention que nous avons repérée chez Josée de varier les représentations. D'abord, Josée essaie d'utiliser différentes représentations à l'intérieur d'un même registre. Par exemple, elle se tourne plus souvent vers la représentation algébrique de la dérivée avec un $\boldsymbol{h}$, mais elle utilise aussi parfois celle avec la Δx. Toujours dans le registre algébrique, elle a varié aussi sa stratégie (équation algébrique) pour trouver l'équation de la droite tangente. De plus, ces changements étaient provoqués par les élèves. En effet, au départ, elle prenait toujours sa façon de faire et elle a su intégrer la stratégie suggérée par les élèves. Cet épisode nous montre que Josée est attentive à ce que les élèves disent.

Elle est d'ailleurs souvent capable de cibler leurs difficultés. Par contre, elle n'arrive pas toujours à coordonner les représentations de façon à ce que les élèves puissent surmonter leurs difficultés. Par exemple, dans la troisième séance, elle a ciblé que les élèves buteraient sur l'évaluation de $f(\frac{1}{2})$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$ (voir 4.3.3). Elle a fait le choix d'utiliser l'approche avec la boîte, mais sans rendre explicites les manipulations qu'elle a faites. De cette manière, pour les élèves, la nouvelle représentation ne pouvait pas vraiment leur servir. Pourtant, l'enseignante effectue souvent les manipulations algébriques assez explicitement. En effet, en insistant beaucoup sur l'équivalence entre les représentations en cours de manipulations, elle explique ce qu'elle fait. On la voit souvent faire les manipulations terme à terme en utilisant des gestes ou des crochets pour mettre en lumière les changements.

Son intention va au-delà des transformations internes. Nous décelons en effet chez Josée une intention de produire des représentations graphiques. De ce côté toutefois, il y a un problème. En fait, alors que Josée est clairement à l'aise dans le registre algébrique, elle ne l'est pas autant dans le registre graphique. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà mentionné, elle n'accorde probablement pas autant d'attention à la production et la manipulation des graphiques qu'à celles des représentations algébriques. Tout porte à croire qu'elle considère l'utilisation des graphiques comme un complément à son explication « algébrique ». Pour elle d'ailleurs, il est clair que les « vraies » explications sont dans le registre algébrique. Ainsi, elle traite le registre graphique comme un outil complémentaire, en ce sens qu'il peut être intéressant d'y porter attention sans toutefois que cela soit essentiel.

5.4 Un cadre pour les pratiques

Nous avons déjà exposé dans les premiers chapitres la raison pour laquelle nous nous sommes intéressée à l'utilisation des représentations par les enseignants. En effet, malgré le fait que nous avons trouvé plusieurs travaux de recherche qui suggèrent fortement que les élèves ont beaucoup de difficultés à gérer ces différentes représentations, nous n'avons pas trouvé d'indice à savoir si les élèves ont vraiment accès aux outils pour savoirs comment les utiliser. Il nous a donc paru pertinent d'aller voir comment les enseignants avaient recours aux registres de représentations et d'autres types de représentations.

En faisant ces analyses, nous avons réalisé à quel point une recherche de ce genre à propos des pratiques enseignantes était importante. D'abord, l'observation de toutes les activités de conversion et de coordination qui restent implicites nous laisse croire que les élèves ne peuvent pas suivre toutes ces manipulations. De plus, nous avons également constaté une difficulté chez les enseignantes à utiliser les différents registres de façon complètement contrôlée. Ces constatations nous donnent un bon indice sur certaines raisons possibles de l'éloignement des élèves de l'utilisation de différentes représentations. Nous avons réalisé qu'en plus de ne pas voir beaucoup d'exemples où plusieurs représentations sont coordonnées, les élèves peuvent aussi voir leurs enseignants éprouver des difficultés à effectuer ces coordinations.

Enfin, nous pensons qu'une analyse basée sur la théorie des représentations pourrait nous aider à mieux comprendre d'où proviennent certaines difficultés des élèves si nous allions les analyser, à la suite d'une telle analyse des pratiques. Nous pouvons donc imaginer qu'une analyse de ce type en ciblant d'autres contenus, d'autres ordres d'enseignement pourrait nous éclairer sur les difficultés des élèves liées à l'utilisation des représentations et enfin, nous aider à les surmonter.

CHAPITRE 6 : CONCLUSION

Dans cette recherche, nous avons centré notre attention sur la pratique de deux enseignantes. Plus particulièrement, nous avons observé leur utilisation des différentes représentations pour introduire le concept de dérivée dans un cours de calcul différentiel au Cégep. Dans l'optique où plusieurs études démontrent la difficulté des élèves à gérer ces représentations, il nous semblait important de porter une attention particulière à la façon dont les enseignants les utilisent. Ainsi, nous cherchions à répondre à deux questions plus précisément :

- Quels types de représentations, institutionnelles ou non, retrouve-t-on dans la pratique d'un enseignant lors de l'introduction du concept de dérivée?
- Comment utilise-t-il ces différentes représentations dans la communication avec les élèves?

6.1 Les types de représentations en jeu

Une revue de la littérature nous avait préparée à observer une dominance du registre algébrique. Nous avons effectivement observé chez les deux enseignantes une tendance à favoriser le registre algébrique. Bien sûr, le registre verbal est aussi très présent, l'activité d'enseignement nécessitant une certaine explicitation verbale. En ce qui concerne le registre graphique, nous avons pu voir les enseignantes y avoir recours à quelques reprises, surtout au début de l'introduction du concept. En effet, moins la matière semblait « nouvelle », plus les enseignantes se concentraient sur les représentations algébriques des concepts. Enfin, les schémas et exemples numériques ont été très peu utilisés. En fait, on a pu voir la production de schéma plutôt dans les moments d'aide individuelle aux élèves et très rarement pendant les explications en grand groupe. Pour ce qui est des exemples numériques, ils sont presque absents des séances que nous avons observées.

Nous avons également étudié le type de représentation utilisé du point de vue des représentations institutionnelles ou fonctionnelles. Comme nous l'avons vu, plusieurs chercheurs insistent sur l'importance de considérer les représentations fonctionnelles liées aux représentations spontanées des élèves pour les faire évoluer vers des représentations plus institutionnelles. Au cours de nos observations, nous avons remarqué que les enseignantes utilisaient des représentations le plus souvent institutionnelles. Autant au niveau algébrique que graphique, les représentations utilisées étaient assez formelles. On pouvait d'ailleurs souvent retrouver les mêmes représentations dans le manuel. Pour ce qui est des représentations des élèves considérées par les enseignantes, nous avons pu remarquer deux façons de faire. En effet, une des enseignantes esquivait souvent les représentations spontanées amenées par les élèves pour ne conserver que celles qui se rapprochaient le plus des représentations qu'elle avait en tête, soit institutionnelles. Chez l'autre enseignante, nous avons perçu un désir de réinvestissement des réponses des élèves. Malgré que l'évolution entre les représentations spontanées vers des représentations institutionnelles n'était pas faite de la façon dont diSessa *et al.* et Hitt le suggèrent, nous voulons quand même souligner l'effort de réinvestissement de certaines réponses des élèves dont cette enseignante a fait preuve. Étant donné que les enseignantes utilisent une méthodologie d'enseignement semi-magistrale, il est difficile, dans ce contexte, de promouvoir une évolution des représentations (voir méthodologie ACODESA en Hitt et Morasse 2009).

6.2 Leur façon de les utiliser

Au-delà de l'identification des types de représentation que les enseignantes utilisent, il nous est apparu tout aussi important de comprendre comment elles les gèrent. C'est-à-dire que nous voulions voir les types d'activité, au sens de Duval, que les enseignantes effectuaient sur les représentations : production, identification des représentations, traitement, conversion et coordination. Suite à nos analyses, nous avons constaté que les activités qui revenaient le plus souvent sont la production et la transformation à l'intérieur d'un même registre. En effet, nous avons observé ces activités surtout dans le registre algébrique. Les manipulations algébriques nécessaires pour trouver la dérivée ont souvent été faites explicitement au tableau. Nous avons aussi pu voir quelques conversions, mais très peu de réelle coordination.

Cependant, il faut admettre qu'il y avait des coordinations entre le registre algébrique et verbal pour rendre plus compréhensibles les manipulations effectuées.

Un autre élément important nous est apparu lors de l'analyse des séances en classe. Bien que les enseignantes aient l'expertise pour effectuer les différentes activités sur les représentations, elles ne les rendent que rarement explicites. En effet, nous avons remarqué un nombre important de sous-entendus liés à des activités de conversions ou de transformation. En fait, nous pouvons même émettre l'hypothèse que la résistance possible des élèves à l'utilisation des représentations pourrait résider, selon nous, en partie dans ces implicites. Comme les enseignantes sont capables d'effectuer certaines activités mentalement, dû à leur connaissance en mathématiques et à leur expérience, nous supposons que ces manipulations deviennent évidentes pour elles. Par contre, nous doutons que les élèves puissent les suivre lorsqu'elles restent implicites, dû au fait que les élèves ne sont pas du tout au même niveau de compréhension que les enseignantes.

6.3 Les limites

Bien sûr, ce projet comporte certaines limites. Au départ, nous voulions observer l'utilisation des représentations dans la pratique d'enseignantes choisies. Pour nous, plusieurs éléments font partie de la pratique d'un enseignant. En plus de l'enseignement en classe, que nous avons observé, le choix des tâches et l'élaboration des examens font aussi partie de la pratique enseignante. L'ampleur et la richesse des données des séances en classe nous ont amenée à abandonner l'analyse des tâches et examens soumis aux élèves. Toutefois, nous avons tout de même pu être en contact avec certaines tâches lors des observations en classe. Nous pouvons ainsi faire l'hypothèse que ces tâches sont le reflet de ce que nous aurions pu trouver en analysant les autres tâches proposées aux élèves. Ceci reste toutefois une hypothèse. Malgré tout, nous avons tout de même une bonne idée de la pratique des enseignantes soit leur enseignement en classe.

Un autre aspect délicat de notre projet est la façon d'aborder ou d'analyser les actions, et le discours des enseignantes. Comme notre cadre théorique nous amenait à aller voir un aspect très spécifique de la pratique des enseignantes, il était parfois difficile de cibler tous les aspects désirés. Le nombre de représentations évoquées par une enseignante étant évidemment impressionnant, il fallait s'assurer de bien cibler les éléments les plus pertinents. De plus, il était aussi difficile d'à la fois conserver ce point de vue très spécifique et de prendre un certain recul sur une pratique plus globale nécessaire à la compréhension de certaines représentations ou combinaisons de représentations. Ainsi, ce travail d'analyse demandait une grande minutie et pouvait parfois devenir un peu étourdissant.

6.4 Prolongements

Nous avons déjà mentionné dans les limites qu'il serait intéressant de lier une analyse du type de ce projet à une analyse approfondie des tâches proposées aux élèves et des examens (étude similaire à celle amenée par Hardy, 2009). Évidemment, une analyse des productions des élèves serait aussi un très bon élément à ajouter à ce projet. En effet, une fois que nous connaissons mieux l'utilisation des représentations par un enseignant donné, il serait enrichissant de voir comment les élèves gèrent, à leur tour, les représentations. En ayant en main ces deux analyses, il serait possible de faire des rapprochements entre l'enseignement reçu et l'utilisation des représentations chez les élèves.

Suite à nos analyses, nous avons pu conclure que les enseignantes utilisaient majoritairement des représentations algébriques et que les activités sur les représentations restaient souvent implicites. En effet, plusieurs auteurs insistent sur la difficulté des élèves à gérer les différentes représentations. Dans cette recherche, nous avons observé des pratiques qui n'en font pas nécessairement la promotion. Ainsi, il serait très intéressant de savoir si un enseignement qui ferait la promotion de l'utilisation des représentations, et ce, de façon plus explicite aurait réellement une incidence sur l'utilisation qu'en font les élèves.

Un autre élément à considérer est l'approche physico-mathématique que les deux enseignantes utilisent pour introduire la dérivée. Il serait intéressant de voir si cette approche pourrait être clarifiée de façon à ce que le contexte physique ne soit pas éludé. En considérant que les élèves ont déjà une idée sur ce contexte, il pourrait être utile de voir comment une telle approche interdisciplinaire pourrait servir à faire évoluer les représentations spontanées des élèves vers des représentations plus institutionnelles.

ANNEXE A

EXTRAIT DU PLAN DE COURS DE COURS UTILISÉ PAR LOUISE ET JOSÉE

BUTS GÉNÉRAUX ET OBJECTIFS

BUTS GENERAUX DU PROGRAMME

Ce cours contribuera à l'atteinte des buts suivants:

- résoudre des problèmes de façon systématique;
- utiliser des technologies appropriées de traitement de l'information;
- raisonner avec rigueur;
- communiquer de façon claire et précise,
- apprendre de façon autonome;
- établir des liens entre la science, la technologie et l'évolution de la société;
- situer le contexte d'émergence et d'élaboration des concepts scientifiques;
- adopter des attitudes utilises au travail scientifique;
- traiter des situations nouvelles à partir de ses acquis.

OBJECTIFS

2.2.1 Énoncé de la compétence à atteindre
Appliquer les méthodes du calcul différentiel à l'étude de fonctions et à la résolution de problèmes tirés du domaine des sciences de la nature.

2.2.2 Éléments de compétence

À la fin du cours, les étudiantes et les étudiants devront avoir acquis des connaissances déclaratives (décrire un contexte historique, utiliser un vocabulaire approprié, définir correctement des termes ou des expressions, énoncer des théorèmes, énoncer des formules, etc.), des connaissances procédurales (manipuler des expressions symboliques, effectuer des calculs, appliquer une technique, etc.) et des connaissances conditionnelles (formuler un problème en langage mathématique, choisir une stratégie de résolution de problèmes, etc.).

Les éléments de la compétence à atteindre sont les suivants :

1. Reconnaître et décrire les caractéristiques d'une fonction représentée sous forme d'expression symbolique ou sous forme graphique.
2. Déterminer si une fonction a une limite, est continue, est dérivable, en un point et sur un intervalle.
3. Appliquer les règles et les techniques de dérivation.
4. Utiliser la dérivée et les notions connexes pour analyser les variations d'une fonction et tracer son graphique.
5. Résoudre des problèmes d'optimisation et de taux de variation.

2.2.3 Contenu et objectifs terminaux et intermédiaires

Chapitre 1 Limite et continuité
Contenu
Historique du concept de limite
Approche « contextualisée », graphique, numérique et analytique du concept de limite
Existence de la limite d'une fonction en un point
Types de limites (à gauche, à droite, à l'infini, infinies, d'une forme indéterminée, etc.)
Stratégies d'évaluation d'une limite
Continuité (en un point, sur un intervalle ou sur 3)
Types de discontinuité

Objectif terminal 1
Déterminer si une fonction admet une limite (en un point ou à l'infini) et déterminer l'ensemble des valeurs pour lesquelles une fonction est continue.

Objectifs intermédiaires
1.1 Évaluer une fonction en un point.
1.2 Résoudre une équation simple.
1.3 Illustrer l'utilisation du concept de limite dans des situations courantes.
1.4 Traduire en ses mots une expression symbolique où apparaît le concept de limite.
1.5 Traduire en langage symbolique une situation décrite en langue courante, en faisant appel aux différentes notations associées aux limites.
1.6 Utiliser les différentes notations de limite (limite en un point, limite à gauche, limite à droite, limite à l'infini, limite infinie, etc.) de manière appropriée.
1.7 Estimer la valeur d'une fonction à partir d'un graphique ou en donner la valeur à partir d'un tableau de valeurs approprié.
1.8 À partir d'un graphique ou d'un tableau de valeurs approprié, estimer une limite ou expliquer pourquoi elle n'existe pas.
1.9 Utiliser les propriétés des limites pour évaluer une limite ou dire pourquoi celle-ci n'existe pas.
1.10 Résoudre des problèmes « contextualisés » en faisant appel, s'il y lieu, au concept de limite.
1.11 Donner une interprétation (géométrique, économique, biologique, physique, etc.) à une limite.
1.12 Déterminer l'équation d'une asymptote (verticale ou horizontale).
1.13 Évaluer des limites de formes particulières ($\sqrt[0]{0}$, b/0, etc).
1.14 Lever une indétermination de la forme 0/0, ∞/∞, ou $\infty - \infty$.
1.15 Déterminer le domaine d'une fonction.
1.16 Déterminer (de manière graphique, à l'aide des propriétés ou à l'aide de la définition) si une fonction est continue en un point ou sur un intervalle.
1.17 À partir d'un graphique ou de l'expression analytique d'une fonction, déterminer, s'il y a lieu, en quelles valeurs une fonction admet une discontinuité.
1.18 Déterminer l'ensemble des valeurs pour lesquelles une fonction est continue.
1.19 Qualifier la nature (continue ou discontinue) d'une fonction en un point ou sur intervalle, et, s'il y a lieu, déterminer le type de discontinuité (non essentielle par trou ou par déplacement, essentielle par manque, par saut ou infinie).
1.20 Redéfinir une fonction qui présente une discontinuité non essentielle, par trou ou par déplacement, pour la rendre continue.
1.21 Confirmer ou infirmer un énoncé portant sur les limites ou sur la continuité.

Chapitre 2 Dérivée de fonctions algébriques

Contenu

Taux de variation moyen
Taux de variation instantané
Dérivée en un point
Fonction dérivée
Formules de dérivation
Dérivation d'ordre supérieur
Dérivation implicite

Objectif terminal 2

Vous devrez être capable de déterminer si une fonction est dérivable en un point ou sur un intervalle et d'évaluer la dérivée de la fonction en faisant appel aux différentes formules et règles de dérivation.

Objectifs intermédiaires

2.1 Déterminer la variable indépendante et la variable dépendante dans un contexte.
2.2 Évaluer la pente de la sécante passant par deux points d'une courbe.
2.3 Évaluer la pente de la droite tangente à une courbe en un point.
2.4 Calculer un taux moyen et un taux instantané de variation.
2.5 Donner une interprétation contextuelle à un taux de variation moyen ou instantané.
2.6 Définir la dérivée d'une fonction en un point.
2.7 Évaluer la dérivée d'une fonction en un point en faisant appel à la définition de la dérivée.
2.8 Utiliser les notations usuelles de la dérivée et de la dérivée en un point d'une fonction.
2.9 Définir la fonction dérivée.
2.10 Vérifier l'expression de la dérivée d'une fonction en faisant appel à la définition de la fonction dérivée.
2.11 Formuler la relation entre fonction dérivable et fonction continue.


EXAMEN 1 : 25 %

2.12 Démontrer des formules de dérivation.
2.13 Dériver des fonctions (comportant ou non des constantes littérales) à l'aide des formules de dérivation.
2.14 Évaluer la dérivée d'une fonction en un point.
2.15 Déterminer l'ensemble sur lequel une fonction est dérivable.
2.16 Esquisser la courbe décrite par la dérivée d'une fonction simple.
2.17 Esquisser la courbe décrite par une fonction à partir de la courbe décrite par sa dérivée.
2.18 Déterminer le signe de la dérivée première ou de la dérivée seconde d'une fonction à partir de la courbe décrite par une fonction.
2.19 Repérer un point anguleux ou un point de rebroussement.
2.20 Interpréter correctement le signe d'une dérivée.
2.21 Trouver l'équation de la droite tangente ou de la droite normale à une courbe en un point.
2.22 Évaluer des dérivées d'ordre supérieur à 1.
2.23 Vérifier qu'une fonction satisfait une équation différentielle, soit une équation comportant une fonction et ses dérivées de différents ordres.
2.24 Dériver de manière implicite.

2.25 Donner une interprétation contextuelle (géométrique, biologique, physique, économique, etc.) d'une dérivée.
2.26 Traduire l'information contenue dans une phrase sous la forme d'un énoncé (par exemple une équation) écrit avec le symbolisme mathématique approprié.
2.27 Résoudre des problèmes contextualisés, en faisant appel, s'il y lieu, au concept de dérivée.
2.28 Utiliser correctement le vocabulaire et les notations propres au calcul différentiel.

Chapitre 3 Dérivée de fonctions transcendantes
Contenu
Fonctions transcendantes
Évaluation de limites d'expressions comportant des fonctions transcendantes
Dérivation de fonctions transcendantes

Objectif terminal 3
Vous devrez être capable d'effectuer différentes opérations (arithmétiques ou autres) sur des fonctions transcendantes.

Objectifs intermédiaires
3.1 Utiliser adéquatement les fonctions transcendantes (trigonométriques, trigonométriques inverses, exponentielles et logarithmiques) usuelles.
3.2 Résoudre une équation qui comporte des fonctions transcendantes.
3.3 Évaluer la limite d'une expression qui comporte des fonctions transcendantes.
3.4 Utiliser le fait que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ dans l'évaluation de limites comportant des fonctions trigonométriques.
3.5 Trouver la dérivée d'ordre donné d'une expression comportant des fonctions transcendantes, et, s'il y lieu l'évaluer en un point.
3.7 Résoudre des problèmes contextualisés où apparaissent des fonctions transcendantes, en faisant appel, s'il y lieu, aux concepts de limite et de dérivée.

EXAMEN 2 : 25 % (Techniques de dérivations)

Chapitre 4 Taux liés
Contenu
Taux de variation simple
Taux de variation lié

Objectif terminal 4
Vous devrez être capable d'utiliser les différentielles de manière appropriée et de résoudre des problèmes de taux de variation liés.

Objectifs intermédiaires
4.1 Calculer la différentielle d'une fonction.
4.2 Effectuer l'approximation linéaire d'une fonction en un point en faisant appel aux différentielles.
4.3 Estimer la valeur d'une fonction en un point à partir de l'approximation linéaire de la fonction à proximité de ce point.

4.4 Évaluer une incertitude relative ou absolue.
4.5 Résoudre des problèmes de taux de variation simples ou liés en respectant la marche à suivre proposée.

Chapitre 5 Optimisation
Contenu
Croissance et décroissance d'une fonction
Valeurs critiques d'une fonction
Critères d'optimisation
Stratégie de résolution d'un problème d'optimisation

Objectif terminal 5
Vous devrez être capable de résoudre des problèmes d'optimisation.

Objectifs intermédiaires
5.1 Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance d'une fonction.
5.2 Appliquer correctement les théorèmes d'optimisation.
5.3 Trouver les extremums relatifs et absolus d'une fonction sur un intervalle donné.
5.4 Résoudre des problèmes d'optimisation.

Chapitre 6 Tracé de courbes
Contenu
Valeurs critiques d'une fonction
Croissance et décroissance d'une fonction
Extremums
Concavité (vers le haut et vers le bas)
Points d'inflexion
Asymptotes (horizontales, verticales, obliques)

Objectif terminal 6
Vous devrez être capable de déterminer les principales caractéristiques graphiques de la courbe décrite par une fonction et d'esquisser cette courbe.

Objectifs intermédiaires
6.1 Déterminer le domaine d'une fonction.
6.2 Utiliser le test de la dérivée première et le test de la dérivée seconde pour repérer les extremums relatifs, et donner la nature de ces derniers.
6.3 Repérer les valeurs critiques d'une fonction et en donner la nature.
6.4 Trouver les extremums et les points d'inflexion de la courbe décrite par une fonction.
6.5 Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance d'une fonction.
6.6 Déterminer les intervalles où la courbe décrite par une fonction est concave vers le haut et ceux où elle est concave vers le bas.
6.7 Déterminer la nature d'un point : extremum (relatif ou absolu), point d'inflexion, point anguleux ou de rebroussement, etc.
6.8 Trouver les asymptotes (horizontales, verticales, obliques) à la courbe décrite par une fonction.
6.9 Construire un tableau des signes et de valeurs où sont consignées les valeurs critiques, les extremums, les points d'inflexion, les intervalles de croissance et de décroissance, les intervalles de concavité vers le haut et de concavité vers le bas et les asymptotes verticales.
6.10 Esquisser la courbe décrite par une fonction après en avoir fait l'étude.

EXAMEN SYNTHÈSE 40 %

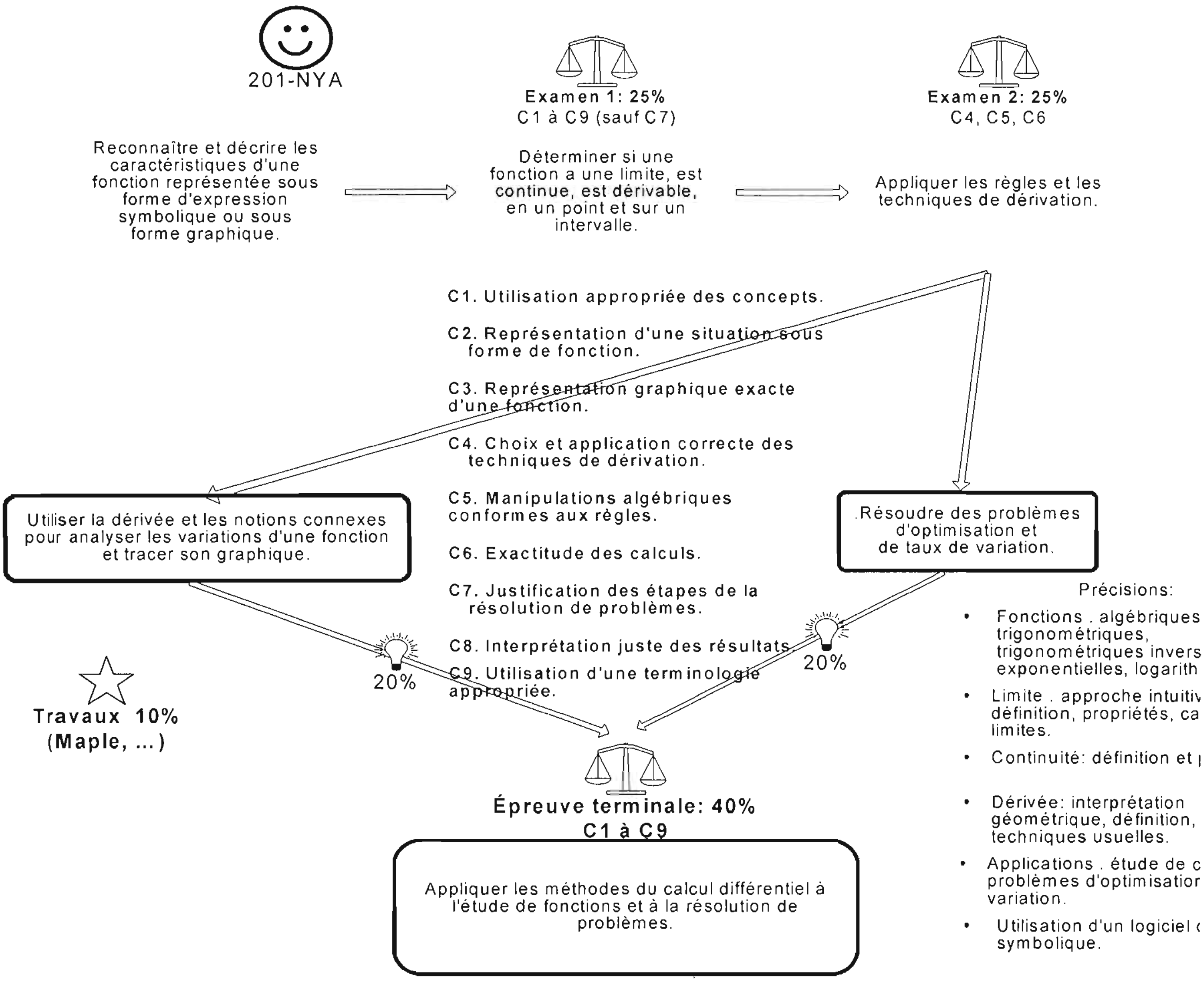
Partie MAPLE

Objectif terminal 7
Maple est un logiciel de calcul symbolique qui effectue efficacement des algorithmes fastidieux. À la fin du cours, vous devrez être capable d'utiliser les fonctionnalités de base de Maple et résoudre des problèmes liés au calcul différentiel.

Objectifs intermédiaires

7.1 Effectuer les opérations arithmétiques usuelles.
7.2 Assigner un nom à une expression.
7.3 Écrire une fonction.
7.4 Évaluer une fonction (valeur exacte ou valeur décimale).
7.5 Résoudre des équations.
7.6 Évaluer des limites.
7.7 Dériver des fonctions.
7.8 Tracer des courbes.
7.9 Résoudre des problèmes en utilisant Maple.

TRAVAUX : 10%


201-NYA
Reconnaître et décrire les caractéristiques d'une fonction représentée sous forme d'expression symbolique ou sous forme graphique.
Examen 1: 25%
C1 à C9 (sauf C7)
Déterminer si une fonction a une limite, est continue, est dérivable, en un point et sur un intervalle.
Examen 2: 25%
C4, C5, C6
Appliquer les règles et les techniques de dérivation.
C1. Utilisation appropriée des concepts.
C2. Représentation d'une situation sous forme de fonction.
C3. Représentation graphique exacte d'une fonction.
C4. Choix et application correcte des techniques de dérivation.
C5. Manipulations algébriques conformes aux règles.
C6. Exactitude des calculs.
C7. Justification des étapes de la résolution de problèmes.
C8. Interprétation juste des résultats.
C9. Utilisation d'une terminologie appropriée.
Utiliser la dérivée et les notions connexes pour analyser les variations d'une fonction et tracer son graphique.
.Résoudre des problèmes d'optimisation et de taux de variation.
20%
20%
Travaux 10%
(Maple, ...)
Épreuve terminale: 40%
C1 à C9
Appliquer les méthodes du calcul différentiel à l'étude de fonctions et à la résolution de problèmes.
Précisions:
• Fonctions . algébriques trigonométriques, trigonométriques invers exponentielles, logarith
• Limite . approche intuitiv définition, propriétés, ca limites.
• Continuité: définition et
• Dérivée: interprétation géométrique, définition, techniques usuelles.
• Applications . étude de c problèmes d'optimisatior variation.
• Utilisation d'un logiciel symbolique.

ANNEXE B

EXTRAIT DE VERBATIM DE LA SÉANCE 1 DE LOUISE

L : Supposons qu'on lance une balle en l'air. Là, je vais prendre ma formule là-dedans pour être bien certaine d'avoir le même exemple parce que vous savez le don que j'ai pour les exercices. [5 :57].

É3 : C'est à quelle page?

L : Vous n'avez pas besoin de votre volume. Ouvrez le pas tout de suite, je ne veux pas que vous regardiez tout de suite. Si je vous dit : On lance une balle vers le haut à partir d'une hauteur de un mètre, avec une vitesse initiale de neuf point huit mètres par seconde [9,8 m/s]. La position de la balle, la hauteur mesurée en mètre après son lancement, est donnée par la fonction s de t et est égal à moins quatre point neuf t deux plus neuf point huit t plus un [elle écrit : $s(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 1$]. Je me vérifie. Est-ce qu'elle a du sens cette formule là? [6 :43] Au début, on a lancé à partir de quelle hauteur?

És : Un.

L : Est-ce que vous pensez qu'on est capable de vérifier qu'on l'a bien lancé à partir d'un mètre? [pause] C'est à quel moment qu'on était à un mètre?

É1 : Zéro.

L : Au temps initial [elle écrit t au tableau], donc là, notre variable, plutôt qu'être x, c'est t. Ça vous êtes d'accord avec ça?

És : Oui. [7 :03]

L : Si on regardait le graphique de cette courbe là. Avez-vous une idée de l'allure du graphique? [Elle trace et identifie les axes.]

É3 : Une parabole.

L : Une parabole... [elle part pour aller la tracer] Est-ce qu'on a besoin de la tracer du côté négatif?

És : Non.

É3 : Non, à moins que tu ailles dans le sous-sol!

L : Dans le sous-sol...ben là, ton négatif des t c'est ici là [en montrant le deuxième quadrant]. Mais si elle descend dans le sous-sol, là, ce serait ça [en montrant l'axe des y dans le quatrième quadrant]. Donc, on est sûr qu'au départ, on part de 1 mètre [elle place l'ordonnée à l'origine] et elle va avoir [elle trace la parabole] cette allure-là. Et ça, si vous auriez vu, c'était très beau avec Maple. Vraiment magnifique, mais...[7 :43] Il faut s'organiser avec la main. Ici, on va avoir notre deux [elle écrit l'échelle du graphique], ici on va avoir trois, ici on va avoir un. [Voir figure 1][7 : 53]

Figure 1

L : Si maintenant, je vous demandais, c'est quoi la vitesse moyenne de la balle entre point cinq [0,5] seconde et mettons un point cinq [1,5]? Donc, on veut avoir la vitesse moyenne entre point cinq seconde et un point cinq [elle l'écrit, voir figure 2].

Figure 2

[8 :12] L : Si je vous demandais graphiquement, à quelle hauteur était la balle, lorsqu'il y avait point cinq [0,5] seconde d'écoulé?

É1 : On remplace les t par point cinq [0,5].

L : Graphiquement? On va venir ici, à point cinq [0,5], la hauteur de la balle serait [elle trace le point (0,5, s(0,5)) dans le graphique], ça ici. D'accord avec moi?

És : Oui.

L : À un point cinq [1,5], on va être ici [elle trace le point (1,5, s(1,5))]. Vous imaginez que c'est très bien tracé! Ce point-là [(0,5, s(0,5))], il était rouge et ce point-là [(1,5, s(1,5))], il était bleu. C'était cute! Quand je vais calculer la vitesse moyenne, qu'est-ce que je vais faire pour calculer la vitesse moyenne?

É3 : On relie les deux points.

L : Eh, au niveau algébrique. [8 :57]

É3 : Tu vas introduire ton x delta x là!

L : Non, pas encore. Qu'est-ce qu'on a dit que c'était la vitesse moyenne? [Elle pointe la formule au tableau.]

É2 : Variation de distance...
L : Variation de distance sur?
É2 : Variation de temps.
L : Variation de temps.
É1 : On trouve la distance en remplaçant t par la valeur...
L : Variation de temps, variation de distance. [Elle met ces variations en évidence sur le graphique. Voir figure 3.]

Figure 3

Comment je vais faire pour calculer ma variation de distance? Ben, je vais dire « s » où était ma...à quelle hauteur était ma balle après un point cinq seconde moins point cinq [mais elle écrit s(0,5). On voit au tableau s(1,5)-s(0,5)]. [Voir figure 4] D'accord avec ça?

Figure 4

És : Oui, oui.
L : Sur une variation de temps. Une variation de temps, qu'est-ce que ça va me donner? Si je le mets au niveau formule, je vais faire un point cinq moins point cinq [1,5 – 0,5]. [9 :53] [pause] Comment on appelait ça? Vitesse moyenne, mais si on veut le mettre plus général? [Elle écrit TVM.] Est-ce que vous avez déjà vu ces lettres-là?
É3 : Ah c'est eh...
É5 : ...moyen.
L : Taux de variation moyen. Correct! Est-ce qu'il y en a un qui peut me rentrer ça dans les formules et me calculer ça? Parce que c'est là! [Elle fait le geste de pitonner sur la calculatrice avec ses doigts.] Donc moins...pour calculer s de un point cinq [s(1,5)], vous aller me faire moins quatre point neuf fois un point cinq au carré plus neuf point huit fois point cinq plus un $[-4{,}9(1{,}5)^2 + 9{,}8(0{,}5) + 1]$. Qu'est-ce que ça me donne? [pause] Ça ne va pas eh...[en parlant en retrait à un élève] [pause] Qu'est-ce que ça donne? Allez, quelques-uns...chouc chouc chouc

chouc [elle essaie de faire le bruit de la calculatrice]. Et on arrive à? On n'arrive pas...Ah ah ah! Tu n'es pas arrivé?

É2 : Non.

L : Moins quatre point neuf fois un point cinq au carré plus neuf point huit fois un point cinq plus un [$-4,9(1,5)^2+9,8(1,5)+1$]. Vous me calculez ça et vous me donnez la réponse du premier.

É3 : Quatre point huit [4,8]!

L : Quatre point huit [4,8].

É3 : Quatre point soixante-huit [4,68].

L : Quatre point soixante-huit [4,68] moins...vous me faites la même chose, mais un truc : faites seconde fonction entrer et vous allez remplacer un point cinq [1,5] par zéro point cinq [0,5]. [11 :30] Et là, vous faites enter et ça vous donne...? J'espère que vous allez avoir les bonnes réponses parce que si ça n'arrive pas...

É2 : Ça donne la même chose!

L : Il donne la même chose?

É2 : Ouais.

L : Quatre point soixante-huit [4,68] sur...

É2 : Sur un.

L : Sur...Un! Est-ce que vous êtes arrivés aux mêmes choses? [pause] Oui, j'ai eu les bonnes réponses, j'en ai pas d'autre!

És : J'arrive à ça aussi! [12 :08]

L : Ça veut dire ici que mon point, probablement que mon un point cinq là [1,5], il serait comme ça ici [elle ajuste son graphique]. La droite, elle serait horizontale. [pause] Ce qui nous fait une vitesse moyenne de zéro. Quelles sont les unités? La distance, elle est en...mètre et le temps, il est en seconde. Zéro mètre seconde. Est-ce que ça l'a du sens? Je vais replacer mon point ici, parce que là, on voit bien que mon point, il n'a pas d'allure là. Le point, il va être comme ça [elle réajuste encore son graphique]. Bel exemple! Qu'est-ce que ça veut dire ça? Si je vous demande, le zéro, qu'est-ce qu'il représente? [12 :51]

É6 : Quand la vitesse est constante.

É3 : Quand il est au sommet.

L : Non, pas vraiment! Qu'est-ce que...Si je vous demandais au niveau graphique, que représente le zéro?

L : Si mes points avaient été comme ça [elle trace une autre droite sécante sur le graphique]? Est-ce que je serais arrivée à zéro?

És : Non.

L : Mettons que je serais arrivée à deux! Qu'est-ce que ça aurait représenté ce deux-là?

É6 : C'est la pente!

L : C'est la pente de la droite qui passe par les deux points. Donc, ça représente « la pente »...une droite qui passe par deux points, on appelle ça comment cette droite-là? [13 :39][Pause] La pente qui coupe une courbe en deux points?

É2 : Sécante![13 :44]

L : Sécante! Donc, le taux de variation moyen [elle souligne TVM au tableau et montre la formule], qui représente en physique la notion de vitesse moyenne, représente graphiquement la pente de cette sécante-là [en pointant la droite sécante sur le graphique]. Est-ce que ça va pour ce concept-là?

É3 : Oui.

L : C'est clair pour tout le monde? Ça fait que si je vous demande de me calculer un TVM, si je vous demande de calculer la vitesse moyenne, si je vous demande de calculer la pente de la sécante...c'est la même chose. [14 :16] De façon générale, si j'ai une fonction f de x [elle écrit $f(x)$] et que je vous demande de calculer le TVM sur un intervalle a b [elle écrit $TVM_{[a,b]}$], qu'est-ce que vous feriez au niveau formule?

É3 : s de b ...

L : Hein?

É3: s de b [s(b)]...

[L pointe la fonction $f(x)$ au tableau.]

É2 : f de b [f(b)]...

É3 : Ben, je ferais l'autre avant!

L : Non, si je vous demande ça ici [en pointant la fonction f(x)]...si je vous demanderais ça, qu'est-ce que vous feriez?

É1 : f de b moins f de a sur...

L : ...f...

É1 : b moins a [$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$].

L : f de b moins f de a sur b moins a [$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$] [Voir figure 5].Et si je vous demande, géométriquement ou graphiquement, qu'est-ce que ça représente? Vous me diriez, ça représente...

Figure 5

É3 : La pente de sécante.

L : Ça représente la « pente de sécante ». Ici, c'est un cas particulier [en parlant de l'exemple calculé précédemment], dans la notion de distance et de temps et là [en pointant la formule impliquant a et b], c'est de façon générale, quel que soit le contexte. [15 :24] Ça va le parallèle entre les deux?

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10* (2.3), 241-286.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, France : Vrin.

Biza, E. (2010, février). *Making tangent lines...tangible! Using Latent Class Analysis and Confirmatory Factor Analysis to identify and classify students'perceptions of key concepts in Calculus*. Communication présentée à l'Université de Montréal, Montréal, Québec.

Boyer B., C. (1949). The history of the calculus and its conceptual development. Préf. De Richard Courant. New-York: Dover publications, 346 p.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Comptes-rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la *Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101-117), Louvain-la-Neuve.

Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4(2), 164-198.

Brousseau, G. (1987). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Études en didactique des mathématiques, doc. ronéo., Université de Bordeaux I : IREM,

Brousseau G. (1997). Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. Manuscrit inédit, Université de Montréal. Relevé à http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures : Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en didactique des mathématiques*, 15(1), 7-47.

Corriveau, C. et Tanguay, D. (2007). Formalisme accru du secondaire au collégial :les cours d'Algèbre linéaire comme indicateur. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, XLVII (1), 6-25.

diSessa, A. A, Hammer, D., & Sherin, B. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. *Journal of mathematical behavior*, 10, 117-160.

Dufour, S. (2009). Analyse de la résolution de problèmes non routiniers basée sur les représentations. Présentation par affiche. *61e rencontre de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM), Université de Montréal, 23 au 31 juillet.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations : L'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *1*, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 61, 103-131.

Eisenberg, T. et Dreyfus, T. (1991). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Dans W. Zimmermann & S. Cunnningham (Dir.), *Visualization in teaching and learning mathematics*. États-Unis: MAA Series.

Fischbein E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* D. Reidel Publishing Company. Kluwer Academic Publishers Group. Dordrecht.

Gattuso, L. et Mary, C. (2005). Trois problèmes semblables de moyenne pas si semblables que ça! L'influence de la structure d'un problème sur les réponses des élèves. *Statistics Education Journal*, 4(2), 82-102.

Grabiner, V. J. (1983). The changing concept on change : The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics magazine*, *56* (4), 195-206

Hamel, J., & Amyotte, L. (2007). *Calcul différentiel.* Canada: Édition du Renouveau Pédagogique Inc.

Hardy, N. (2009). *Student's Models of the Knowledge to be Learned about Limits in College Level Calculus Courses. The Influence of Routine Tasks and thee Role Played By Institutional Norms* (Thèse de doctorat non-publiée). Université Concordia.

Hitt, F. (1994). Teacher's Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *16*(4).

Hitt Espinosa, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Educación Matemática*, *10*(2), 23-45.

Hitt, F. (2000). Construction of mathematical concepts and use of symbolic calculators. *The fourth international DERIVE-TI89/92 Conference: Computer Algebra in Mathematics Education*. Liverpool, Royaume-Uni.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 8, 255-271.

Hitt, F. (2006). Students'functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An Exemple: The concept of limit. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 11, 251-267.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat cognitif et d'auto-réflexion. Dans *Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique : modèles, dispositifs et pratiques*. M. Baron, D. Guin, & L. Trouche (Éditeurs), (pp. 65-88) . Éditorial Hermes.

Hitt, F. (décembre, 2009). En communication personnelle.

Hitt, F., Guzmán, J., & Páez, R. (2001). Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques? *Colloque Annuel du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec* (pp.173-187). Montréal, Canada.

Hitt, F. & Kieran, C. (2009). Constructiong knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a task-technique-theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14*(2), 121-152.

Hitt, F., & Morasse, C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes. *CIEAEM61*. Université de Montréal.

Janvier, C. (éd.) (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum associates.

Karsenty, R. (2002). What do adults remember from their high school mathematics? The case of linear functions. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 117-144.

Lagrange, J-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, *43*, 1-30.

Ministère de l'Éducation des Loisirs et du Sports [MELS]. *Sciences de la nature : Programme d'études préuniversitaire 200 B0*. Repéré à http://www.mels.gouv.qc.ca/sections/publications/publications/Ens_Sup/Affaires_universitaires_collegiales/Ens_collegial/200_B0_SciencesDeLaNature_ProgEtudesPreUniv.pdf

Odierna, M. (2004). *Étude de l'enseignement et de l'apprentissage des formes indéterminées* (Mémoire de maîtrise non-publié). Université de Montréal.

Passaro, V. (2006). *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélées par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire* (Mémoire de maîtrise non publié). Université du Québec à Montréal.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-190.

Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire* (Thèse de doctorat non-publiée). Université du Québec à Montréal.

Selden, J., Mason, A., & Selden, A. (1989). Can Average Calculus Students Solve Nonroutine Problems? *Journal of Mathematical Behavior* , *8*, 45-50

Scheinder, M. (1992). À propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 317-350.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 5-67

Tall, D. (1993). Students'Difficulties in Calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students'Difficulties in Calculus*, ICME-7 (pp.13-28). Québec, Canada.

Vivier, L. (sous presse). La notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de didactique et des sciences cognitives*.

Vinner, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions- the case of the tangent. Dans A. Vermandel (éditeur), Proceedings of the *Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (pp.24-28). Universitaire Instelling: Antwerpen.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(2).

Williams, S. R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal of Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236.

Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 127-138). États-Unis : MAA Series.

Zimmermann W. & Cunningham S. (1991). What is Mathematical Visualization ?. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 1-8). États-Unis : MAA Series.