

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

JEU DE TAQUIN

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

MARIE-EVE HARVIE

MARS 2011

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je désire remercier avant tout mon directeur de maîtrise, Christophe Reutenauer, pour sa patience, son ouverture et sa disponibilité à mon égard. Il m'a encouragée à travailler sur un sujet qui m'a réellement passionnée tout le long de mon écriture. En me guidant dans mon cheminement, il a su éteindre mes diverses inquiétudes dans la progression de mon mémoire.

Merci à Lise Tourigny pour sa bonne humeur à toute épreuve et sa générosité sans borne. Honnêtement, je ne pourrais imaginer le LACIM sans elle.

Je tiens également à remercier François Bergeron qui a bien accepté de me diriger pendant un moment, malgré sa fonction de directeur du LACIM.

Je voudrais aussi remercier M. Haiman pour avoir eu la gentillesse de répondre, par l'intermédiaire du web, à quelques-unes de mes interrogations à propos de son article (Dual equivalence with a conjecture of Proctor, 1992).

Un merci infini à feu Pierre Leroux, sans qui tout cela n'aurait été possible. Il a été mon tout premier contact avec la recherche, pendant le stage d'été de ma première année à l'UQÀM, au baccalauréat. Moi qui, au départ, n'étais pas certaine de m'embarquer dans une maîtrise, il m'a rapidement fait changer d'idée avec ses sujets fascinants et sa façon d'être unique. Le rôle de lanterne qu'il a joué dans mon cheminement académique tient une valeur inestimable à mes yeux. Je ne l'oublierai jamais.

Un merci à mes parents, Francine et Éddé, et à ma soeur Véronique qui m'ont encouragée à continuer malgré les épreuves. Ils ont été le support dont j'avais besoin dans les moments les plus difficiles comme dans les plus heureux.

Enfin, merci à Paul-Émile, avec qui le bonheur est là. Nous avons accompli les mêmes étapes ensemble, en nous encourageant mutuellement. Il est tellement plus facile de concrétiser ses rêves en unissant nos forces.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----|
| LISTE DES FIGURES | vii |
| INTRODUCTION | 1 |
| CHAPITRE I | |
| DÉFINITIONS ET NOTIONS DE BASE | 3 |
| 1.1 Formes et tableaux | 3 |
| 1.2 Jeu de taquin | 6 |
| 1.3 Correspondance de Robinson-Schensted-Knuth | 12 |
| CHAPITRE II | |
| ÉQUIVALENCE DUALE ÉLÉMENTAIRE | 15 |
| 2.1 Équivalence duale | 15 |
| 2.2 Équivalence duale élémentaire | 19 |
| 2.3 Pilotage d'un tableau par deux tableaux dualement équivalents | 24 |
| CHAPITRE III | |
| ÉQUIVALENCE DUALE ET TABLEAU D'INDEXATION DE SCHENSTED | 33 |
| CHAPITRE IV | |
| THÉORÈMES FONDAMENTAUX DU JEU DE TAQUIN | 41 |
| CONCLUSION | 47 |
| APPENDICE A | |
| | 49 |
| BIBLIOGRAPHIE | 73 |

LISTE DES FIGURES

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Diagramme gauche : $D_{(7,7,3,2,1)/(4,3,3,1,1)}$ | 4 |
| 1.2 | Tableaux ayant le même mot-ligne $\sigma = (12, 6, 13, 3, 8, 11, 2, 5, 9, 1, 4, 7, 10)$ | 5 |
| 1.3 | Les tableaux P, Q et $P \cup Q$ | 6 |
| 1.4 | Tableau de forme $\lambda = (5, 4, 3)/(3, 1)$, ses 2 coins inférieurs et ses 4 coins supérieurs | 6 |
| 1.5 | Une traînée | 7 |
| 1.6 | Un tableau après glissement | 7 |
| 1.7 | Étapes d'une transformation d'un tableau gauche en un tableau normal | 8 |
| 1.8 | Pilotage de T (en jaune) par X (en bleu) | 9 |
| 1.9 | Tableau formé des cases laissées vacantes par pilotage de T par X | 9 |
| 1.10 | Pilotage de T (en jaune) par Y (en bleu) | 10 |
| 1.11 | Tableau formé des cases laissées vacantes par pilotage de T par Y | 10 |
| 2.1 | Tableaux étant liés par une équivalence duale élémentaire | 20 |
| 2.2 | Choix possible pour la case e , les cases c et d étant fixées | 22 |
| 2.3 | Action r_i résultant sur un tableau | 24 |
| 3.1 | Tableau de permutation associé à un tableau T (ici, $\pi_T = 42513$) | 35 |

RÉSUMÉ

L'objet principal de ce mémoire est l'étude du jeu de taquin du point de vue de la combinatoire algébrique. Il s'appuie sur l'article de Mark Haiman «Dual equivalence with a conjecture of Proctor», *Discrete Mathematics*, 99, 1992 79-113. Dans cet article, Haiman étudie, entre autres, le jeu de taquin de Schützenberger, avec des preuves différentes de celle de Schützenberger ; les preuves de Haiman se font uniquement en termes de jeu de taquin.

Nous expliquerons la preuve des deux théorèmes fondamentaux du jeu de taquin dus à Schützenberger.

Le premier théorème fondamental du jeu de taquin (Théorème 4.0.3) affirme que le redressé par jeu de taquin d'un tableau gauche quelconque ne dépend que de ce tableau, et pas de la suite de glissements choisis. C'est un théorème de confluence en somme. La preuve de Haiman utilise, d'une part, la notion d'équivalence duale des tableaux gauches, qu'il a défini. Il prouve entre autres que tous les tableaux de forme normale sont dualement équivalents (Corollaire 2.2.1). Il démontre aussi que l'équivalence duale des tableaux gauches se ramène à une suite d'équivalences duales élémentaires, c'est-à-dire d'équivalences duales de sous-tableaux à trois cases, appelés «miniatures» (Théorème 2.2.1). D'autre part, il utilise la notion de jeu de taquin «piloté» : les glissements du tableau sont déterminés par un autre tableau. Ceci permet à Haiman de démontrer un très beau résultat de dualité (Lemme 2.3.1) : les cases laissées vacantes dans le tableau T , lors d'un jeu de taquin piloté par le tableau S , déterminent un tableau, lequel est égal au tableau obtenu à partir de S par jeu de taquin piloté par T .

Le second théorème fondamental du jeu de taquin (Théorème 4.0.6) affirme que le nombre de tableaux gauches de forme λ qui se redressent par jeu de taquin en un tableau normal T fixé, ne dépend que de la forme gauche λ et de la forme du tableau T (c'est ce qui permet à Lascoux et Schützenberger de donner la première preuve complète de la règle de Littlewood-Richardson).

Notamment, le lien entre le jeu de taquin et l'algorithme de Robinson-Schensted est clairement établi : le jeu de taquin permet de simuler cet algorithme (Proposition 3.0.1) et l'équivalence des tableaux par jeu de taquin se ramène à l'égalité des tableaux d'insertion de Schensted de leur permutation ligne-à-ligne (Corollaire 4.0.5), alors que l'équivalence duale se ramène à l'égalité des tableaux d'indexation (Théorème 3.0.2).

Mots-clés : jeu de taquin ; Schützenberger ; Haiman ; équivalence duale ; tableaux ; algorithme de Robinson-Schensted.

INTRODUCTION

Une recherche rapide dans le dictionnaire «le Grand Robert» du verbe taquiner (un instrument) nous en révèle le sens : en jouer négligemment. De plus, si l'on vérifie le sens du jeu de taquin, il nous dit ceci : jeu fondé sur des combinaisons, dans lequel on déplace de proche en proche, pour les remettre dans leur ordre naturel, des plaques numérotées rangées (dans un ordre quelconque) dans une boîte carrée. Les jeux de taquin que l'on peut acheter en magasin sont généralement formés d'une image découpée en $(n \times n)$ morceaux, chacun comportant un bout d'image où l'on a volontairement retiré un morceau afin de pouvoir les déplacer. Le but du jeu est de replacer les cases dans l'ordre afin de reformer l'image de départ. Une variante, si les cases sont numérotées de 1 à $n - 1$, consiste à replacer les cases dans l'ordre numérique. Il semblerait que ce jeu ait été imaginé en Amérique par un sourd-muet qui se proposa, par hasard, de ranger des numéros qui s'y trouvaient en désordre, sans les sortir de la boîte. C'est du moins l'explication qui a été rapportée par Édouard Lucas, au congrès de Reims, et émis par M. Sylvester, membre correspondant de l'Académie des sciences de Paris, professeur à l'université John's Hopkins, à Baltimore.

Il existe diverses variantes au jeu de taquin, mais nous nous concentrerons ici sur le jeu de taquin appliqué sur les tableaux gauches, élaboré dans les années 70 par Lascoux et Schützenberger. Il s'agit de transformer un tableau gauche en un tableau droit en glissant les cases de ce tableau tout en suivant certaines règles. Nous démontrerons que, partant d'un tableau gauche fixé, ce tableau droit est unique et ne dépend pas de la suite de mouvements effectués sur le tableau gauche. Il existe certaines preuves de cette unicité, notamment celle de Sagan, faisant appel à l'équivalence de Knuth et au théorème de Green. Ce qui nous distingue ici est que nous ferons uniquement appel aux mouvements du jeu de taquin, plus précisément à l'équivalence duale, et à la bijection

de Robinson-Schensted-Knuth. De plus, nous montrerons que le nombre de tableaux de forme gauche λ/μ se redressant en un tableau arbitraire, mais fixé, T de forme normale ν dépend uniquement des formes λ/μ et ν , et non du contenu (c'est-à-dire des étiquettes) du tableau T . Ce nombre est connu sous le nom de coefficient de Littlewood-Richardson. Ces deux preuves que nous expliquerons ici proviennent de Haiman (Dual equivalence with a conjecture of Proctor, 1992).

CHAPITRE I

DÉFINITIONS ET NOTIONS DE BASE

1.1 Formes et tableaux

Tout d'abord, discutons des notions préalables à l'étude du jeu de taquin appliqué sur les tableaux. Un partage (ou une forme normale) est une suite d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$ telle que :

$$(i) \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = n$$

Lorsque λ est un partage de n , on note $\lambda \vdash n$, ou alors $|\lambda| = n$. On représente souvent un partage par son diagramme de Ferrers. Un diagramme D_λ est un sous-ensemble fini du plan \mathbb{N}_*^2 . Les éléments $(a, b) \in \mathbb{N}_*^2$ de D_λ sont appelés cases de D_λ . Il existe la relation d'ordre naturel (c'est-à-dire réflexive, transitive et anti-symétrique) partiel suivante sur les cases de D_λ :

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ et } b \leq d$$

Un *diagramme de Ferrers* est un diagramme D_λ tel que si $(c, d) \in D_\lambda$ et $(a, b) \leq (c, d)$, alors $(a, b) \in D_\lambda$. Visuellement, un tel diagramme est en forme d'escalier. D'autre part, lorsque $D_\mu \subseteq D_\lambda$, on peut définir ceci : $D_{\lambda/\mu} = D_\lambda \setminus D_\mu$ (voir fig. 1.1). On dit dans ce cas que $D_{\lambda/\mu}$ est un diagramme gauche. Il faut noter qu'un diagramme gauche peut

être un diagramme de Ferrers, et dans ce cas $D_\mu = \emptyset$. Pour simplifier la notation, on confondra le partage et son diagramme de Ferrers : $D_{\lambda/\mu}$ sera noté λ/μ (et D_λ par λ). On appellera λ/μ une *forme*).

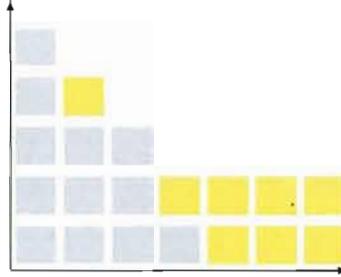


Figure 1.1 Diagramme gauche : $D_{(7,7,3,2,1)/(4,3,3,1,1)}$

Dans le cadre de cette étude, nous utiliserons la notation française en ce qui a trait à la représentation d'une forme. Elle fait référence au premier quadrant du plan cartésien \mathbb{N}_*^2 , à l'inverse de la notation anglaise qui elle, fait plutôt référence à la notation matricielle.

Nous dirons qu'une forme α prolonge la forme β (où α et β sont des formes normales ou/et gauches) si $\beta \cup \alpha$ est une forme valide et si

$$\forall \text{ case } c_2 \in \alpha, \nexists \text{ case } c_1 \in \beta \text{ t.q. } c_1 \geq c_2$$

Par exemple, au regard du schéma ci-dessus, la forme gauche $\alpha = (7, 7, 3, 2, 1)/(4, 3, 3, 1, 1)$ prolonge la forme normale $\beta = (4, 3, 3, 1, 1)$.

Si nous agrémentons une forme μ d'une fonction $T : \mu \rightarrow \mathbb{N}_*$ où « $T(c) = i$ » signifie en langage courant que «le nombre i est dans la case c », nous obtiendrons donc un tableau que nous noterons de façon peu abusive T . Nous dirons qu'un tableau est *normal* ou *droit* si son diagramme λ est de Ferrers. Nous pouvons noter celui-ci par un tableau de forme normale λ . De la même façon, un *tableau gauche* est un tableau dont le diagramme est gauche. Encore une fois, nous pouvons noter cela par un tableau de forme gauche $\beta = \lambda/\mu$. Dans tout ce mémoire, le mot *tableau* désignera un tableau gauche. De plus, si la forme d'un tableau T prolonge la forme d'un autre tableau X , nous dirons que le *tableau T prolonge le tableau X* , ou encore que le tableau X est prolongé par le tableau T .

Nous dirons qu'un tableau T de forme λ (gauche ou normale, et notée $forme(T)$) est *standard* si la fonction T , qui va de λ (où λ comporte n cases) vers l'ensemble $[n]$, est telle que :

$$(i) \quad \forall(a, b) \text{ et } (a + 1, b) \in \lambda, T(a, b) < T(a + 1, b);$$

$$(ii) \quad \forall(a, b) \text{ et } (a, b + 1) \in \lambda, T(a, b) < T(a, b + 1).$$

Il y a donc croissance stricte dans les lignes et dans les colonnes. Ultérieurement, lorsque nous parlerons de tableaux dans cette étude, nous référerons aux tableaux standards. En d'autres mots, si le tableau T « comporte n cases », alors chacune des cases c portera un nombre différent de 1 à n qu'on appellera l'*étiquette d'une case* et qu'on notera T_c . De plus, le nombre de cases de T sera noté $|T| = n$. Ce nombre représente également la cardinalité de la forme du tableau T , notée $|\lambda|$. En particulier, le tableau vide contiendra 0 case.

Nous appellerons le *mot-ligne* d'un tableau T la permutation $\pi_T \in S_n$ qui « lit » les chiffres contenus dans le tableau de gauche à droite en partant du haut du tableau. Il est donc possible qu'une même permutation soit associée à 2 tableaux différents (voir fig. 1.2).

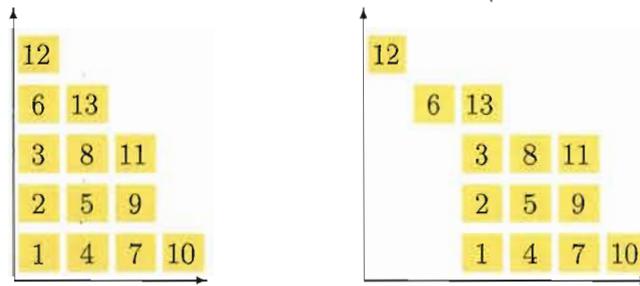


Figure 1.2 Tableaux ayant le même mot-ligne $\sigma = (12, 6, 13, 3, 8, 11, 2, 5, 9, 1, 4, 7, 10)$

Enfin, le concept d'union de tableaux sera utile pour la section concernant l'équivalence duale élémentaire. Soit les tableaux P et Q , de forme respective β et α , où la forme α prolonge la forme β . L'*union de P et de Q* , notée $P \cup Q$, est définie comme le tableau de forme $\beta \cup \alpha$ où chaque entier contenu dans la case c de $P \cup Q$ est tel que voici :

$$(P \cup Q)_c = \begin{cases} P_c & \text{si } c \text{ est une case de } P \\ Q_c + |P| & \text{si } c \text{ est une case de } Q \end{cases}$$

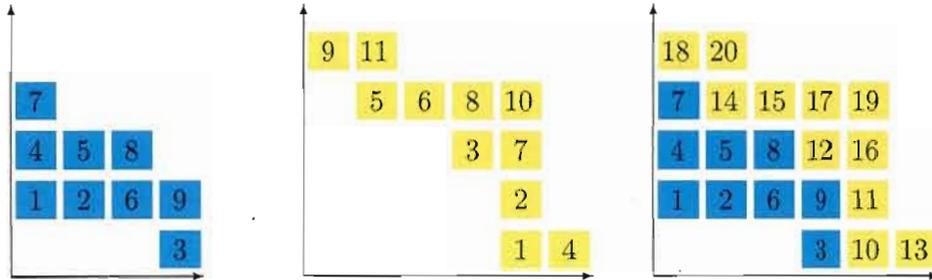


Figure 1.3 Les tableaux P , Q et $P \cup Q$

1.2 Jeu de taquin

Soit T , un tableau standard de forme λ . Considérons les cases $b \in \mathbb{N}_*^2 \setminus \lambda$ qui peuvent être ajoutées à λ de sorte que chaque case b soit reliée par au moins un côté à une case de λ et telle que $\{b\} \cup \lambda$ soit également une forme (normale ou gauche). Désignons par

- les *coins inférieurs*, c'est-à-dire les cases b qui sont reliées à λ par leur côté droit ou leur côté supérieur et par ◦ les *coins supérieurs*, c'est-à-dire les cases b qui sont reliées à λ par leur côté gauche ou leur côté inférieur (fig. 1.4).

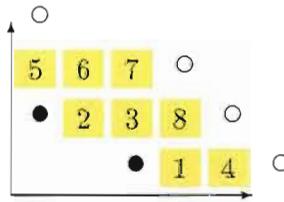


Figure 1.4 Tableau de forme $\lambda = (5, 4, 3)/(3, 1)$, ses 2 coins inférieurs et ses 4 coins supérieurs

Pour chaque case b marquée • ou ◦, nous associons une transformation de T , qu'on appellera glissement de taquin de T dans la case b , ou simplement *glissement de T dans b* . C'est à partir d'une suite de glissements qu'il sera possible de transformer un tableau gauche en un tableau normal. Si le glissement part d'un coin inférieur, nous dirons

que c'est un *glissement inférieur*, et s'il part d'un coin supérieur, ce sera un *glissement supérieur*.

Afin de traduire ce qu'est un glissement inférieur, considérons un coin inférieur arbitraire b_0 (\bullet). Par ce qui précède, $b_0 \notin \lambda$. Par définition d'un coin inférieur, il existe au moins une case b_1 dans la forme λ adjacente à b_0 , de sorte que b_0 soit reliée par un côté à b_1 de par la droite ou le haut. S'il existe 2 possibilités pour le choix de b_1 , alors choisissons la case portant la plus petite étiquette. Par la suite, déplaçons l'étiquette de b_1 vers la case b_0 (la nouvelle étiquette de la case b_0 sera l'ancienne étiquette de b_1 et b_1 n'aura désormais plus d'étiquette). Ensuite, à partir de ce «nouveau tableau troué», observons ce qui se trouve à droite et en haut de la case b_1 (c'est-à-dire les cases $b_i \in \lambda$ telles que $b_1 < b_i$ et b_i soit adjacente à b_1). S'il existe une seule case étiquetée b_i adjacente, alors on «déplace» l'étiquette de cette case vers celle de b_1 . Dans le cas contraire, on choisit la case ayant la plus petite étiquette. Le jeu se poursuit jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cases étiquetées à droite ou en haut de b_k ($k \in \mathbb{N}$). Le tableau résultant (fig. 1.6) est appelé ${}_{b_0}T$. On appelle «la traînée correspondant à b_0 » ou encore «la traînée associée au glissement de T dans b_0 » la suite de cases (b_1, b_2, \dots, b_k) (fig. 1.5). La case b_k sera appelée la case laissée vacante par le glissement.

La définition d'un glissement supérieur est analogue, il suffit de prendre la plus grande étiquette lorsqu'il était question de la plus petite étiquette en ce qui a trait au glissement inférieur. De plus, nous devons regarder les cases adjacentes de par la gauche et par le bas (au lieu de par la droite et par le haut).

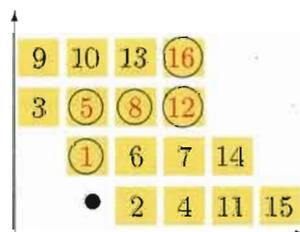


Figure 1.5 Une traînée

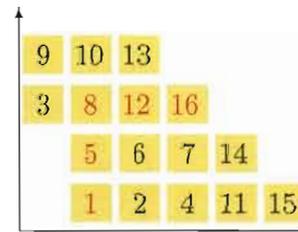


Figure 1.6 Un tableau après glissement

En partant du tableau obtenu après le premier glissement inférieur, puis en effectuant plusieurs glissements inférieurs consécutifs, on obtient un tableau normal (fig. 1.7). Nous nommerons l'action d'effectuer une suite de glissements dans le but d'obtenir un tableau normal, «appliquer le jeu de taquin sur un tableau» ou alors «redresser un tableau». Afin de clarifier la notion de glissement, nous dirons qu'une *suite de glissements* est une suite de cases (c_1, \dots, c_k) telle qu'il est possible d'énoncer la suite de tableaux suivante : $(T = T_0, T_1, \dots, T_k)$ où chaque tableau T_i est obtenu en effectuant un glissement de T_{i-1} dans la case c_i , et où T_0 est le tableau initial. Deux tableaux seront dits *taquin-équivalents* si l'un peut être obtenu de l'autre par une suite de glissements. C'est évidemment une relation d'équivalence. En particulier, en partant du tableau obtenu par glissements, il est facile de revenir au tableau initial en effectuant ces glissements dans l'ordre inverse.

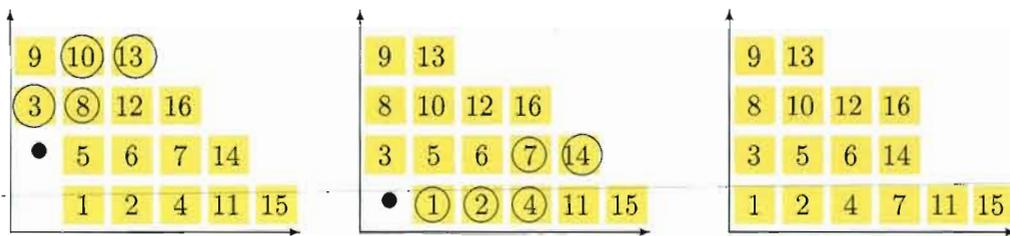


Figure 1.7 Étapes d'une transformation d'un tableau gauche en un tableau normal

Il est commode d'utiliser seulement les tableaux, et non les coins inférieurs, afin de redresser un tableau gauche, c'est-à-dire de transformer un tableau gauche en un tableau droit. En effet, étant donné qu'un tableau gauche peut avoir plusieurs coins inférieurs, est-ce que le choix de la suite de coins inférieurs aura une incidence sur le tableau redressé? Nous verrons à la toute fin de ce mémoire que la réponse à cette question est négative.

Si X et T sont deux tableaux tels que la forme de T prolonge la forme de X , alors il est possible de prendre les cases de X dans l'ordre inverse des nombres contenus dans ces cases et de former une suite de glissements inférieurs qu'on appliquera à T . Le résultat de cette suite de glissements est appelé le *pilotage du tableau T par le tableau X* et se notera ${}_X T$ (fig. 1.8).

La suite des cases de T laissées vacantes lors du pilotage de T par X formera un tableau où chaque case portera l'entier contenu dans la case concernée du tableau X . On notera ce tableau $V({}_X T)$ (fig. 1.9).

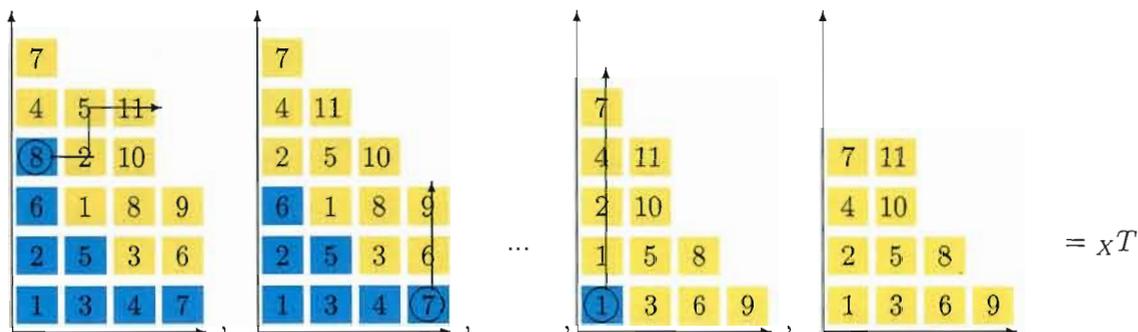


Figure 1.8 Pilotage de T (en jaune) par X (en bleu)

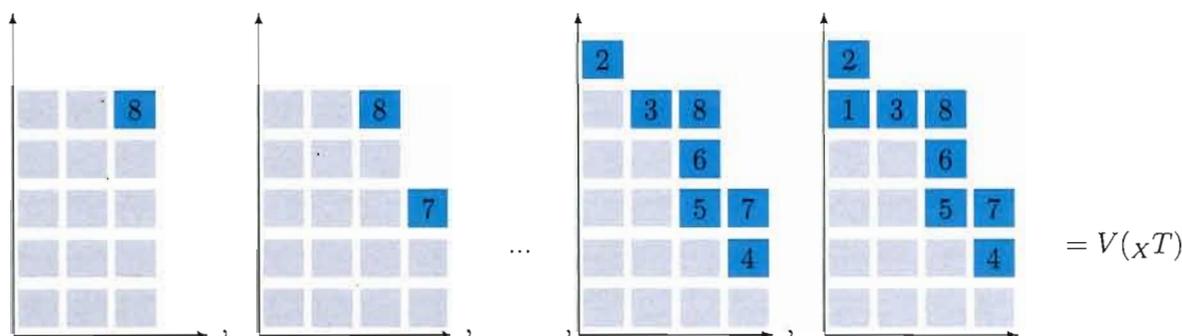


Figure 1.9 Tableau formé des cases laissées vacantes par pilotage de T par X

De façon analogue, si T et Y sont des tableaux tels que la forme de Y prolonge la forme de T , alors il est possible de prendre les cases de Y dans l'ordre des nombres contenus dans ces cases et de former une suite de glissements supérieurs qu'on appliquera à T . Le résultat de cette suite de glissements est appelé le pilotage du tableau T par le tableau Y et se notera T^Y (fig. 1.10).

De même, la suite des cases de T laissées vacantes lors du pilotage de T par Y formera un tableau où chaque case portera l'entier associé à l'ordre de cette case dans la suite. On notera ce tableau $V(T^Y)$ (fig. 1.11).

Suite à ces définitions, nous pourrions définir ce qu'est une *proposition inverse*, selon le sens du jeu de taquin. Tout d'abord, sous l'action d'une réflexion par rapport à l'axe

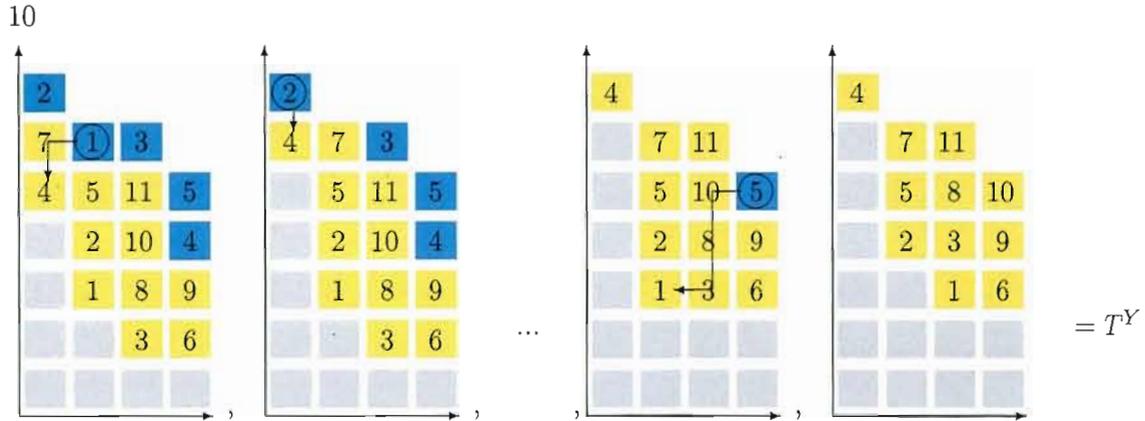


Figure 1.10 Pilotage de T (en jaune) par Y (en bleu)

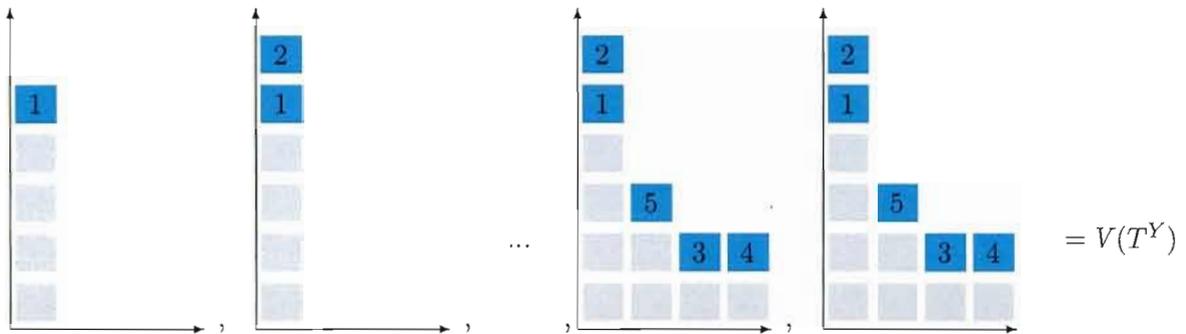


Figure 1.11 Tableau formé des cases laissées vacantes par pilotage de T par Y

des ordonnées, puis par l'axe des abscisses, le plan \mathbb{N}^2 envoie chaque case (i, j) d'un tableau vers la case $(-i, -j)$. L'ordre énoncé plus tôt sur les cases d'un tableau est donc inversé. Les propositions, définitions, propriétés et théorèmes qui correspondent sous cette réflexion seront alors notés «opposés», «inverses» ou «miroirs». Conséquemment, l'action opposée à un glissement supérieur est un glissement inférieur. De plus, nous dirons qu'un tableau est *anti-normal* si, lorsque nous lui faisons subir cette réflexion, sa forme est normale.

Étant donné la façon dont a été défini le pilotage d'un tableau par un autre tableau, on peut formuler l'identité suivante qui découle de la définition de cette notion :

\forall tableaux X, T et Y tels que $forme(Y)$ prolonge $forme(T)$ et $forme(T)$ prolonge $forme(X)$, on a :

$$v_{(T^Y)}(T^Y) = T = ({}_X T)^{V({}_X T)}$$

Démonstration. Posons $|X| = l$, $|T| = m$ et $|Y| = n$. D'abord, effectuons le pilotage du tableau T par le tableau Y . Ce pilotage se composera donc d'une série de n glissements notée (t_1, \dots, t_n) . Le dernier glissement est un glissement supérieur du tableau T' dans la case étiquetée n du tableau Y (T' étant le tableau obtenu par les $n - 1$ premiers glissements effectués dans T). Notons la traînée associée à ce glissement (b_1, \dots, b_k) . Nous obtenons alors le tableau T^Y , et du même coup le tableau qui «enregistre» la suite de cases laissées vacantes lors du pilotage de T par Y , noté $V(T^Y)$.

Puis, partons du tableau T^Y et appliquons-lui le pilotage par le tableau $V(T^Y)$. Ce pilotage sera également composé d'une suite de n glissements. Étant donné le fait que T^Y prolonge $V(T^Y)$, le premier glissement effectué sera le glissement inférieur de T^Y dans la case étiquetée n du tableau $V(T^Y)$. Notons que la traînée associée à ce glissement est la suite formée des éléments pris dans l'ordre inverse de la traînée associée au n -ième glissement du pilotage de T par Y (le dernier glissement), c'est-à-dire (b_k, \dots, b_1) .

Ensuite, le deuxième glissement effectué sera le glissement inférieur du tableau obtenu ci-dessus dans la case étiquetée $n - 1$ du tableau $V(T^Y)$. Notons encore une fois que la traînée associée à ce glissement est la suite formée des éléments pris dans l'ordre inverse de la traînée associée au $(n - 1)$ -ième glissement du pilotage de T par Y .

Puis, le troisième glissement effectué sera associée à la traînée formée de la suite des éléments pris dans l'ordre inverse de la traînée associée au $(n - 2)$ -ième glissement de T par Y , et ainsi de suite jusqu'au dernier glissement, le n -ième, qui sera associé à la traînée formée de la suite des éléments pris dans l'ordre inverse de la traînée associée au premier glissement de T par Y .

En fait, le pilotage de T^Y par $V(T^Y)$ reprend exactement les mêmes traînées que le pilotage de T par Y , mais dans l'ordre inverse. C'est pourquoi en partant du tableau T , et en effectuant ces deux pilotages, on revient exactement au tableau initial, soit T , en raison de l'opération inverse. La preuve de la deuxième égalité est analogue. Il suffit simplement d'appliquer des glissements supérieurs au lieu des glissements inférieurs. \square

1.3 Correspondance de Robinson-Schensted-Knuth

Nous traiterons très brièvement de la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth (RSK), qu'on utilisera à la dernière section de la présente étude (F. Bergeron, J. Labelle, 2006). Cette correspondance, qui est en fait une bijection, associe à chaque permutation un unique couple de tableaux de même forme normale. Elle tient un grand rôle dans la théorie de la représentation des groupes. Nous noterons $(P(\lambda), Q(\lambda))$ le couple de tableaux associé à la permutation $\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_n$, considérée ici comme un mot, c'est-à-dire une suite d'éléments d'un ensemble fini quelconque (ici, cet ensemble est $[n]$). Le tableau $P(\lambda)$ sera appelé le *tableau d'insertion de Schensted* et $Q(\lambda)$, le *tableau d'indexation de Schensted*.

La correspondance RSK se construit en *insérant* successivement (de gauche à droite) les lettres λ_i . On débute avec deux tableaux vides, et l'insertion ajoute une case dans chaque tableau (d'insertion et d'indexation) dans un processus qui détermine la position de la nouvelle case, tout en modifiant les valeurs de certaines autres cases.

Décrivons cette construction récursive pour n'importe quel mot $\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_n$, où les $\lambda_i \in \mathbb{N}^*$ sont tous distincts :

1. Si λ est le mot vide, alors $(P(\lambda), Q(\lambda)) = \emptyset$
2. Sinon, λ est de la forme $\lambda = \tau a$ pour $\tau = \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$, un mot de longueur $n - 1$ et $a \in \mathbb{N}^*$. On suppose avoir déjà construit $(P(\tau), Q(\tau))$, et on modifie ces 2 tableaux de la façon suivante :
 - (a) La valeur a remplace la plus petite valeur (qui est éjectée) de la première ligne de $P(\tau)$, en partant du bas, s'il en existe une supérieure à a . La valeur éjectée est alors récursivement insérée dans le tableau formé de la deuxième ligne de $P(\tau)$, et ainsi de suite. Si a est plus grande que toutes les valeurs de la première ligne, alors on rajoute une case étiquetée a à l'extrême droite de cette ligne. Il en résulte un tableau qui diffère de $P(\tau)$ dans sa forme, par une case de plus.

- (b) Pour ce qui est du tableau d'indexation $Q(\tau)$, on le modifie en lui ajoutant une case en même position que celle par laquelle $P(\tau)$ diffère de $P(\lambda)$, et on étiquette cette case du nombre n .

CHAPITRE II

ÉQUIVALENCE DUALE ÉLÉMENTAIRE

2.1 Équivalence duale

L'équivalence duale est la notion fondamentale à notre étude. Cette équivalence est appelée duale au regard de la correspondance de Schensted par rapport à l'équivalence de taquin. En fait, elle établit en quelque sorte le même pont que celui existant entre cette correspondance, que nous verrons dans le troisième chapitre, et le jeu de taquin. Plus précisément, nous montrerons que l'équivalence duale assure la propriété d'obtenir le même tableau d'indexation dans la correspondance de Schensted.

Deux tableaux S et T de même forme seront dits *dualement équivalents* si n'importe quelle suite de glissements (c_1, \dots, c_k) appliqués respectivement à S et à T résulte en deux tableaux de même forme. Notons cette équivalence $S \approx T$. Il découle de cette définition que S et T doivent être de même forme pour espérer être dualement équivalents.

Lemme 2.1.1. *Soient S et T deux tableaux tels que $S \approx T$. Alors, si S' et T' sont deux tableaux obtenus par une même suite de glissements à partir de S et T respectivement, alors $S' \approx T'$.*

Preuve. Soient S et T deux tableaux tels que $S \approx T$. Appliquons à S et à T le glissement dans une case c_1 et notons S' et T' les tableaux obtenus respectivement par ce glissement. Il nous suffira de traiter le cas où la suite de glissements appliqués à S et à T est de longueur 1. Étant donné $S \approx T$, n'importe quelle suite de glissements

(c_2, \dots, c_k) appliqués à S' et à T' résultera en deux tableaux de même forme. Ce qui prouve $S' \approx T'$ \square

Lemme 2.1.2. *Soient les tableaux S , T et X tels que $\text{forme}(S) = \text{forme}(T)$ et $\text{forme}(S)$ prolonge $\text{forme}(X)$. Alors,*

$$S \approx T \Rightarrow V({}_X S) = V({}_X T)$$

Preuve. Soient les tableaux S , T et X tels que $S \approx T$ et X prolonge S . Appliquons à S et à T la suite de glissements qu'on notera (c_1, \dots, c_k) afin d'obtenir ${}_X S$ et ${}_X T$. Clairement, le case c_1 est la case étiquetée $|X|$ du tableau X et c_k est la case étiquetée 1 du même tableau X .

Comme $S \approx T$, un glissement de S dans la case c_1 laissera la même case vacante que le glissement de T dans la case c_1 . Notons ces deux tableaux obtenus de ce glissement S' et T' . Par le lemme 2.1.1, $S' \approx T'$. Par conséquent, un glissement de S' dans la case c_2 laissera la même case vacante que le glissement de T' dans la case c_2 . Poursuivons ce raisonnement jusqu'au dernier glissement de la suite de glissement (c_1, \dots, c_k) . Il laissera également la même case vacante dans chacun de ces 2 tableaux obtenus par les $k - 1$ autres glissements. Pendant tout ce processus, le tableau formé par les cases laissées vacantes par la suite de glissements (c_1, \dots, c_k) effectués sur S et noté par définition $V({}_X S)$, sera exactement le même tableau que celui formé par les cases laissées vacantes par la suite de glissements (c_1, \dots, c_k) effectués sur T et noté par définition $V({}_X T)$. \square

Lemme 2.1.3. *Soient X , S , T et Y des tableaux tels que $\text{forme}(S) = \text{forme}(T)$ et tels que $\text{forme}(Y)$ prolonge $\text{forme}(S)$, et $\text{forme}(S)$ prolonge $\text{forme}(X)$.*

Si $S \approx T$, alors $(X \cup S \cup Y) \approx (X \cup T \cup Y)$

Preuve. Considérons l'action d'un glissement supérieur du tableau $X \cup S \cup Y$ dans une case d . Le principe pour un glissement inférieur est analogue. Notons la traînée associée à ce glissement $(a_1, \dots, a_{k_1}, b_1, \dots, b_{k_2}, c_1, \dots, c_{k_3})$, où $a_i \in Y$, $b_i \in S$, $c_i \in X$ et où

les k_j peuvent être nuls. En fait, on y trouve 3 cas : soit k_1, k_2 et k_3 sont tous non-nuls, soit seulement un des k_i est nul ou bien soit deux des k_i sont nuls.

Dans le premier cas, le glissement est en réalité un premier glissement du tableau Y dans la case d , puis un deuxième glissement du tableau S dans la case laissée vacante par le premier glissement, puis finalement un troisième glissement du tableau X dans la case laissée vacante par le deuxième glissement. Dans le deuxième cas, par exemple si $k_2 = 0$, il s'agit d'un premier glissement du tableau Y dans la case d , puis d'un deuxième glissement du tableau X dans la case laissée vacante par le premier glissement. Le troisième cas correspond simplement à un glissement du tableau X, Y ou S dans la case d .

Le tableau obtenu suite à ce glissement est donc $X' \cup S' \cup Y'$ dans le premier cas, $X' \cup S \cup Y'$, $X \cup S' \cup Y'$ ou $X' \cup S' \cup Y$ dans le deuxième, ou alors $X' \cup S \cup Y$, $X \cup S' \cup Y$ ou $X \cup S' \cup Y'$ dans le troisième cas.

Si $S \approx T$, alors un glissement du tableau T dans n'importe quelle case c laissera vacante la même case que la case laissée vacante par un glissement du tableau S dans la case c . Conséquemment, appliquer un glissement du tableau $X \cup T \cup Y$ dans la case d nous donnerait le tableau $X' \cup T' \cup Y'$ (avec les 3 cas respectifs énumérés plus tôt et les mêmes tableaux X' et Y' cités plus haut), où $forme(X' \cup T' \cup Y') = forme(X' \cup S' \cup Y')$

De plus, par le lemme 2.1.1 nous aurons que $S' \approx T'$.

En conclusion, si nous appliquons au tableau $X \cup S \cup Y$ un glissement dans n'importe quelle case d et un glissement au tableau $X \cup T \cup Y$ dans cette même case, nous obtiendrons respectivement les tableaux $X' \cup S' \cup Y'$ et $X' \cup T' \cup Y'$, ayant la même forme, où $S' \approx T'$. En réitérant ce procédé, on obtiendra 2 tableaux de même forme peu importe le nombre de glissements. On aura donc que $(X \cup S \cup Y) \approx (X \cup T \cup Y)$. \square

Plus loin, nous traiterons d'un cas particulier de l'équivalence duale, soit l'équivalence duale élémentaire. Pour cela, nous aurons besoin de savoir ce qu'est un tableau minia-

ture. D'abord, une *forme miniature* λ est telle que $\lambda \vdash 3$. Un *tableau miniature* est un tableau tel que sa forme est miniature. En fait, c'est tout simplement un tableau qui contient 3 cases.

La proposition suivante nous permettra de mieux comprendre cet ensemble de tableaux, au regard de l'équivalence duale.

Proposition 2.1.1. *Chaque classe d'équivalence duale de tableaux miniatures comprend soit un ou deux éléments. De plus, un tableau T miniature appartient à une classe comprenant deux éléments si et seulement si son mot-ligne est soit $x1y$, où $\{x, y\} = \{2, 3\}$, soit $x3y$, où $\{x, y\} = \{1, 2\}$. Dans ces deux cas, l'autre tableau T' dualement équivalent à T diffère de T par un simple échange des étiquettes x et y .*

Preuve. D'abord, nous vérifions que pour n'importe quelle forme donnée, les 2 tableaux de même forme ayant pour mot-ligne $x1y$, avec $\{x, y\} = \{2, 3\}$ sont dualement équivalents : voir Appendice A. Aussi, pour n'importe quelle forme donnée, les 2 tableaux de même forme ayant pour mot-ligne $x3y$, où $\{x, y\} = \{1, 2\}$, sont dualement équivalents (voir Appendice A).

Ensuite, soit S et T , deux tableaux miniatures distincts de forme λ dualement équivalents. Choisissons un tableau X de forme normale μ telle que λ prolonge μ . Par le lemme 2.1.2, $S \approx T$ implique $V({}_X S) = V({}_X T) = Y$. Par l'identité énoncée à la fin du chapitre 1.2, on a :

$$\begin{aligned}({}_X S)^{V({}_X S)} &= ({}_X S)^Y = S \\({}_X T)^{V({}_X T)} &= ({}_X T)^Y = T\end{aligned}$$

En particulier, ${}_X S$ et ${}_X T$ sont distincts. En effet, s'ils ne l'étaient pas, alors $({}_X S)^Y$ et $({}_X T)^Y$ seraient deux tableaux identiques, et donc, $S = T$, ce qui est une contradiction avec nos hypothèses de départ.

Enfin, on a que $S' = {}_X S$ et $T' = {}_X T$ sont deux tableaux miniatures distincts de même forme normale dualement équivalents. Alors, on n'a qu'une seule possibilité :

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right\} = \{S', T'\}$$

Ces deux tableaux forment une paire de tableaux dont le mot est $x1y$ et $y1x$, où $\{x, y\} = \{2, 3\}$. Dans l'Appendice A, en énumérant tous les tableaux miniatures dont le mot est $x1y$, où $\{x, y\} = \{2, 3\}$, on peut constater qu'une telle paire engendre, par des glissements, une autre paire de tableaux dualement équivalents dont les mots sont $x1y$ et $y1x$, où $\{x, y\} = \{2, 3\}$, ou alors $x3y$ et $y3x$, où $\{x, y\} = \{1, 2\}$. Par conséquent, le résultat est démontré. \square

2.2 Équivalence duale élémentaire

Comme mentionné précédemment, l'équivalence duale élémentaire est un cas particulier de l'équivalence duale. On s'en sert essentiellement pour démontrer le corollaire de cette section, le corollaire 2.3.1, qui aura une importance considérable à l'obtention de nos résultats du chapitre 4.

En fait, on dit que la relation d'équivalence duale \approx est une *équivalence duale élémentaire* si elle est de la forme $X \cup T \cup Y \approx X \cup S \cup Y$, où S et T sont des tableaux miniatures distincts tels que $S \approx T$ et où $forme(Y)$ prolonge $forme(S)$ et $forme(S)$ prolonge $forme(X)$. L'équivalence duale élémentaire sera notée $\overset{e}{\approx}$.

La proposition 2.1.1 est utile afin de comprendre l'équivalence duale élémentaire. Supposons que S et T soient deux tableaux de même format qui contiennent des cases de mêmes étiquettes exception faite de 2 cases que nous appellerons c et d , d'étiquette respective k et $k + 1$ dans le tableau S . Si S et T contiennent une autre case f d'étiquette $k + 2$ ou $k - 1$, telle que les coordonnées (x, y) de la case f satisfassent les relations $x_c < x < x_d$ et $y_d < y < y_c$, où c est de coordonnées (x_c, y_c) et d est de coordonnées

(x_d, y_d) dans le tableau S (voir la figure 2.1), alors le lemme 2.1.3 implique que ces 2 tableaux sont liés par une relation d'équivalence duale élémentaire. En effet, les cases c , d et f , par les contraintes émises, constituent une forme gauche. Par cela, nous pouvons noter le tableau formé par les cases inférieures par la relation d'ordre sur les cases, le tableau X . De plus, notons par S' le tableau formé des cases de S , mais dont on a rajouté l'étiquette de chaque case du nombre $|X|$. Enfin, notons par Y le tableau formé des cases d'étiquette supérieure à $|X| + 3$ dans le tableau S , mais dont on a retranché l'étiquette de chaque case de $|X| + 3$. En observant que $S = X \cup S' \cup Y$ et $T = X \cup T' \cup Y$, que $S' \approx T'$ par la proposition 2.1.1, et que $|S'| = |T'| = 3$, on a donc la relation d'équivalence élémentaire entre les tableaux S et T .

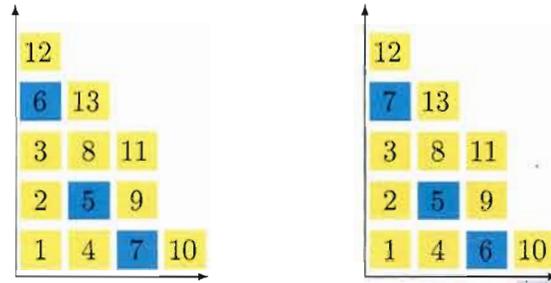


Figure 2.1 Tableaux étant liés par une équivalence duale élémentaire

Lemme 2.2.1. Soit $U \stackrel{e}{\approx} V$ une équivalence duale élémentaire (i.e. $U = X \cup S \cup Y \approx X \cup T \cup Y = V$, où S et T sont deux tableaux miniatures tels que $S \approx T$). Alors, appliquer n'importe quel glissement simultanément à U et à V résulte en deux tableaux respectifs U' et V' tels que $U' \stackrel{e}{\approx} V'$.

Preuve. Considérons l'action d'un glissement supérieur du tableau $U = X \cup S \cup Y$ dans une case d . Le tableau obtenu suite à ce glissement est donc le même tableau décrit au lemme 2.1.3 : $U' = X' \cup S' \cup Y'$. De même, l'action d'un glissement supérieur du tableau $V = X \cup T \cup Y$ dans la même case d nous donnera le tableau $V' = X' \cup T' \cup Y'$, où $S' \approx T'$ (S' et T' sont des tableaux miniatures). De plus, par le lemme 2.1.1, $U' \approx V'$. Donc, nous avons l'équivalence duale élémentaire attendue : $U' \stackrel{e}{\approx} V'$. \square

Proposition 2.2.1. Soient S et T deux tableaux de même forme normale λ . Alors, S

et T sont liés par une chaîne d'équivalences duales élémentaires : $S \stackrel{e}{\approx} \dots \stackrel{e}{\approx} T$

Preuve. Procédons par induction sur le nombre de cases $n = |\lambda|$ des tableaux S et T .

Si $n = 0$, alors la proposition est vraie car il s'agit de la relation vide.

Si $n > 0$, alors posons l'hypothèse que pour tout tableau S et T de même forme normale λ , où $|\lambda| = n$, il existe une chaîne d'équivalences duales élémentaires entre S et T .

Montrons que cette hypothèse est aussi valable pour deux tableaux de même forme μ S' et T' , où $|S'| = |T'| = n + 1$.

Démontrons d'abord ceci pour 2 tableaux S' et T' dont la case étiquetée $n + 1$ est la même.

Soit les tableaux P et Q , obtenus de S' et de T' respectivement en supprimant la case c étant étiquetée $n + 1$ dans le tableau S' et T' . Les tableaux P et Q sont évidemment reliés par une chaîne d'équivalences élémentaires, par l'hypothèse d'induction.

Ceci implique que S' et T' seront liés par une chaîne d'équivalences élémentaires. En effet, nous aurons donc les deux chaînes d'équivalences duales élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} P &\stackrel{e}{\approx} V_1 \stackrel{e}{\approx} \dots \stackrel{e}{\approx} V_m \stackrel{e}{\approx} Q \\ S' &\stackrel{e}{\approx} V'_1 \stackrel{e}{\approx} \dots \stackrel{e}{\approx} V'_m \stackrel{e}{\approx} T' \end{aligned}$$

Chaque tableau de la deuxième chaîne contient la case c étiquetée $n + 1$. En clair, cette case ne change pas d'étiquette tout au long de la chaîne d'équivalence. Donc, nous avons bien que S' et T' sont reliés par une chaîne d'équivalences élémentaires.

Maintenant, montrons que deux tableaux S' et T' de même forme μ , où $|S'| = |T'| = n + 1$, où la case c étiquetée $n + 1$ dans le tableau S' est une case différente de la case d étiquetée $n + 1$ dans le tableau T' , sont reliés par une chaîne d'équivalences élémentaires.

Il suffit de montrer qu'il existe deux tableaux U et W de même forme μ tels que $U \stackrel{e}{\approx} W$ et

tels que $U_c = n+1$ et $W_d = n+1$. En effet, on a démontré plus haut que deux tableaux de même forme normale, ayant $n+1$ cases, tels que la case étiquetée $n+1$ soit la même pour les deux tableaux, sont reliés par une chaîne d'équivalences élémentaires. De cette façon, on aura $S' \stackrel{e}{\approx} \dots \stackrel{e}{\approx} U$ et $T' \stackrel{e}{\approx} \dots \stackrel{e}{\approx} W$, ce qui impliquera $S' \stackrel{e}{\approx} \dots \stackrel{e}{\approx} U \stackrel{e}{\approx} W \stackrel{e}{\approx} \dots \stackrel{e}{\approx} T'$.

Construisons ces deux tableaux U et W . D'abord, notons ν la forme constituée des cases de μ comprises entre c et d pour l'ordre croisé de \mathbb{N}^2 (c'est l'ordre tel que $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq b_1$ et $a_2 \geq b_2$) à l'exception des cases c et d . Dans ν , choisissons une case notée e qui est un coin d'ordonnée maximum. Une telle case e existe toujours car μ est une forme normale (voir figure 2.2). Posons $U_c = n+1$, $U_e = n-1$, $U_d = n$, $W_c = n$, $W_e = n-1$, $W_d = n+1$ et plaçons les étiquettes $\{1, \dots, n-2\}$ aléatoirement dans les cases restantes de U et W , mais de façon identique dans ces deux tableaux. D'un autre point de vue, pour obtenir le tableau W , on a simplement interchangé les étiquettes n et $n+1$ dans le tableau U . Alors, par définition de l'équivalence duale élémentaire et la proposition 2.1.1, on aura bien $U \stackrel{e}{\approx} W$. Les tableaux U et W seront donc construits tel que voulu, et la proposition est ainsi démontrée. \square

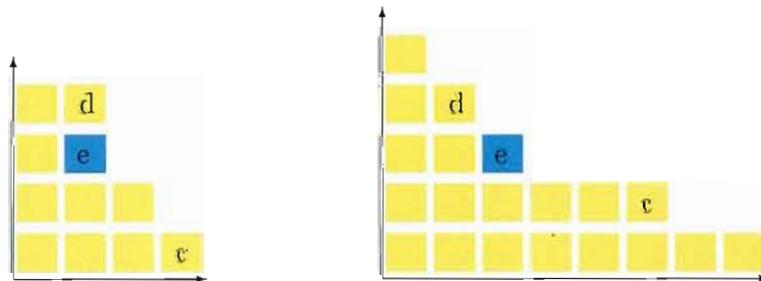


Figure 2.2 Choix possible pour la case e , les cases c et d étant fixées

Théorème 2.2.1. *Les tableaux S et T sont dualement équivalents si et seulement si ils sont reliés par une chaîne d'équivalences duales élémentaires.*

Preuve.

\Leftarrow Soit $S \stackrel{e}{\approx} P_1 \stackrel{e}{\approx} \dots \stackrel{e}{\approx} P_k \stackrel{e}{\approx} T$ la chaîne d'équivalences duales élémentaires reliant les tableaux S et T . Alors, les tableaux S, P_1, \dots, P_k et T sont tous dualement équivalents

entre eux. En effet, l'équivalence duale est une relation transitive (ce que n'est pas l'équivalence duale élémentaire). Donc, nous avons bien que S et T sont dualement équivalents.

⇒ Soit $S \approx T$. Alors, posons $forme(S) = forme(T) = \delta/\mu$ et X , un tableau de forme normale μ . Étant donné la forme normale des tableaux ${}_X S$ et ${}_X T$, ceux-ci sont reliés par une chaîne d'équivalences duales élémentaires, par la proposition 2.2.1 :

$${}_X S \stackrel{e}{\approx} Q_1 \stackrel{e}{\approx} \dots \stackrel{e}{\approx} Q_k \stackrel{e}{\approx} {}_X T$$

Si l'on applique la même séquence de glissements à ces $k + 2$ tableaux, cette chaîne demeurera une chaîne d'équivalences duales élémentaires, par le lemme 2.2.1 :

$$S \stackrel{e}{\approx} Q'_1 \stackrel{e}{\approx} \dots \stackrel{e}{\approx} Q'_k \stackrel{e}{\approx} T$$

La séquence de glissements appliqués ici à chaque tableau est le pilotage de celui-ci par le tableau $Y = V({}_X S) = V({}_X T)$. En effet, S et T étant dualement équivalents, le pilotage de ceux-ci par le tableau X «enregistre» les mêmes cases laissées vacantes par la suite de glissements. En effet, par l'identité énoncée à la toute fin de la section «Jeu de Taquin», au chapitre 1, nous avons :

$$S = ({}_X S)^{V({}_X S)}$$

$$T = ({}_X T)^{V({}_X T)} = ({}_X T)^{V({}_X S)}$$

$$Q'_i = (Q_i)^{V({}_X S)}$$

Donc, les tableaux S et T sont bien reliés par une chaîne d'équivalences duales élémentaires.

□

Le théorème et la proposition précédents mènent à un fait qui aura une importance capitale dans les prochains chapitres :

Corollaire 2.2.1. *Tous les tableaux de forme normale donnée λ sont dualement équivalents.*

2.3 Pilotage d'un tableau par deux tableaux dualement équivalents

Soit P , un tableau vu comme une fonction croissante $\theta : \text{forme}(P) \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ pour l'ordre naturel de \mathbb{N}^2 . Nous définissons la fonction suivante :

$$r_{i,i+1}\theta = \begin{cases} \theta & \text{si } \theta^{-1}(i) < \theta^{-1}(i+1) \\ (i, i+1)\theta & \text{sinon } ((i, i+1) \text{ est une transposition}) \end{cases}$$

Par exemple, si la bijection θ est représentée par le tableau de la figure 2.3, on peut observer l'action décrite ci-dessus sur ce tableau :

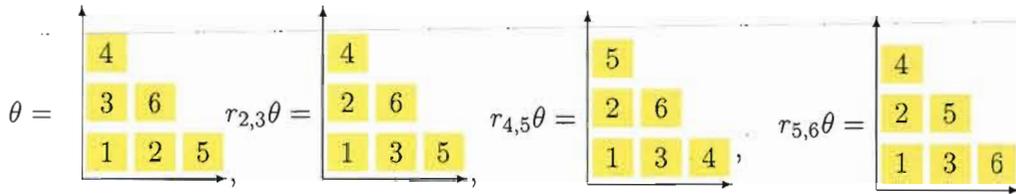


Figure 2.3 Action r_i résultant sur un tableau

En se référant à cette figure, étant donné que $\theta^{-1}(1) < \theta^{-1}(2)$, on a bien $r_{1,2}\theta = \theta$. Aussi, étant donné que $\theta^{-1}(3) < \theta^{-1}(4)$, on a bien $r_{3,4}\theta = \theta$.

Lemme 2.3.1. Soient des tableaux S et T tels que $\text{forme}(T)$ prolonge $\text{forme}(S)$. Alors, on a l'égalité suivante : ${}_S T = V(S^T)$ et $S^T = V({}_S T)$.

Preuve. D'abord, notons $\text{forme}(S) \cup \text{forme}(T)$ par P . Le tableau $S \cup T$ est donc une fonction bijective croissante $\theta : \text{forme}(P) \longrightarrow \{1, \dots, n\}$, où $|P| = n$ et où P est muni

de l'ordre naturel de \mathbb{N}^2 .

Montrons que $r_{i,i+1}\theta$ est également une fonction bijective préservant l'ordre. De cette façon, nous pourrions considérer cette fonction comme une action résultant en un tableau.

Partons d'un tableau Q formé par la fonction θ , où $\theta(c)$ sera l'étiquette de la case c de Q . En fait, si $Q(c) = i$ et que $Q(c') = i + 1$, appliquer la fonction $r_i\theta$ au tableau Q consistera à échanger les étiquettes i et $i + 1$ du tableau T si les cases c et c' ne se comparent pas (le cas $c \geq c'$ étant bien sûr exclu).

Si $c < c'$, alors $r_{i,i+1}\theta = \theta$. L'ordre est donc préservé.

Si c et c' ne se comparent pas, alors $r_{i,i+1}\theta = (i, i + 1)\theta$. Nous avons donc échangé les étiquettes des cases c et c' . Regardons autour des cases c et c' pour savoir si l'ordre est toujours préservé :

- Autour de la case c , nouvellement étiquetée $i + 1$, on voudrait que si $a < c$ (où a est une case de Q) alors $\theta(a) < i + 1$, et que si $c < a$, alors $i + 1 < \theta(a)$. On a que :

$$a < c \Rightarrow \theta(a) < \theta(c) = i < i + 1$$

et

$$c < a \Rightarrow \theta(c) = i < \theta(a)$$

Mais l'étiquette $i + 1$ est déjà prise par la case c , donc on a bien $i + 1 < \theta(a)$

- Autour de la case c' , nouvellement étiquetée i , on voudrait que si $a < c'$, où a est une case de Q , alors $\theta(a) < i$, et que si $c' < a$, alors $i < \theta(a)$:

$$a < c' \Rightarrow \theta(a) < \theta(c) < i + 1$$

Mais l'étiquette $i + 1$ est déjà prise par la case c , alors $\theta(a) < i$. De plus,

$$c' < a \Rightarrow i < i + 1 < \theta(a)$$

En conclusion, $r_{i,i+1}\theta$ est une fonction bijective conservant bien l'ordre des cases.

Maintenant, revenons aux hypothèses de notre lemme, en posant $|S| = k$, $|T| = l$, $k + l = n$, et où θ_0 est la bijection représentant le tableau $S \cup T$. En prouvant les deux égalités suivantes, nous allons ensuite montrer qu'il existe une égalité entre ces quatre expressions, ce qui entraînera les 2 égalités recherchées dans le lemme :

$$\begin{array}{ccc}
 (1) & & (2) \\
 V(S^T) \cup S^T = & r_{l,l+1} r_{l+1,l+2} \cdots r_{n-1,n} & s^T \cup V(s^T) = r_{l,l+1} r_{l-1,l} \cdots r_{1,2} \\
 \dots & & \dots \\
 & r_{2,3} r_{3,4} \cdots r_{k+1,k+2} & r_{n-2,n-1} r_{n-3,n-2} \cdots r_{k-1,k} \\
 & r_{1,2} r_{2,3} \cdots r_{k,k+1} \theta_0 & r_{n-1,n} r_{n-2,n-1} \cdots r_{k,k+1} \theta_0
 \end{array}$$

Prouvons la première égalité, dans le cas où $|T| = l = 1$, c'est-à-dire $V(S^T) \cup S^T = r_{1,2} r_{2,3} \cdots r_{k,k+1} \theta_0$. Notons θ_F , la bijection associée au tableau $V(S^T) \cup S^T$, $\theta_i = r_{n-i,n-i+1} \theta_{i-1}$ et $\theta_f = \theta_k$. Nous voulons montrer que pour chacune des cases des deux tableaux obtenus de chaque bord de l'égalité, l'étiquette soit la même, c'est-à-dire prouvons que $\theta_F^{-1}(i) = \theta_f^{-1}(i) \quad \forall i \in [n]$.

- Si $\theta_0^{-1}(k) < \theta_0^{-1}(k+1)$, alors $\theta_0^{-1}(k+1) = \theta_F^{-1}(k+1) = \theta_f^{-1}(k+1)$
- Sinon, on échange les étiquettes des cases étiquetées k et $k+1$ pour obtenir θ_1 . Alors, on aura :

$$\theta_1^{-1}(k) = \theta_0^{-1}(k+1)$$

et

$$\theta_1^{-1}(k+1) = \theta_0^{-1}(k) = \theta_f^{-1}(k+1)$$

D'un autre côté, étant donné que la case étiquetée k dans le tableau S^T doit être forcément un coin supérieur, on aura donc

$$\theta_F^{-1}(k+1) = \theta_f^{-1}(k+1)$$

Maintenant, procédons par récurrence. Étant donné que la case étiquetée $k+1$ ne change pas d'étiquette pendant les transformations $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, il suffit de reprendre le même principe que plus haut, mais en ne tenant pas compte de la case étiquetée $k+1$.

Nous venons donc de prouver l'égalité (1) dans le cas $|T| = 1$. Si le tableau T comporte l cases, alors prenons les notations suivantes :

$$\theta_{1,k} = r_{1,2}r_{2,3} \cdots r_{k,k+1}\theta_0$$

$$\theta_{i,k} = r_{i,i+1}r_{i+1,i+2} \cdots r_{i+k-1,i+k}\theta_{i-1,k} \text{ où } i \in [l], i > 1$$

Nous devons donc prouver que $V(S^T) \cup S^T = \theta_{l,k}$.

Notons par $t_{[i]}$ la partie de T formée des cases étiquetées de 1 à i . Pour obtenir le membre de gauche de l'égalité, on devra calculer $S^{t_{[1]}} \cup (T \setminus t_{[1]})$, puis $S^{t_{[2]}} \cup (T \setminus t_{[2]})$, et ainsi de suite jusqu'à $S^{t_{[l]}} \cup (T \setminus t_{[l]})$ (ici, $T \setminus t_{[l]} = \emptyset$). Finalement, nous calculerons $V(S^{t_{[l]}}) \cup S^{t_{[l]}}$ (*).

Si on montre que $V(S^{t_{[i]}}) \cup S^{t_{[i]}} \cup (T \setminus t_{[i]}) = \theta_{i,k} \forall i \in [l]$, nous aurons prouvé que (*) = $\theta_{l,k}$.

On a montré que cette égalité est vraie pour $l = 1$. Supposons qu'elle est vraie $\forall l \in \mathbb{N}^*$, montrons qu'elle serait également vraie pour $l+1 = \text{forme}(T')$ (où T' est le tableau obtenu de T en rajoutant n'importe quelle case d'étiquette $l+1$).

Les cases étiquetées de 1 à i gardent la même étiquette lorsqu'on passe du tableau associé à la bijection $\theta_{i,k}$ au tableau associé à $\theta_{i+1,k}$. De même, ces mêmes cases gardent la même étiquette lorsqu'on passe du tableau $V(S^{t_{[i]}}) \cup S^{t_{[i]}} \cup (T \setminus t_{[i]})$ au tableau $V(S^{t_{[i+1]}}) \cup S^{t_{[i+1]}} \cup (T \setminus t_{[i+1]})$.

Donc, il suffit d'itérer la procédure, peu importe où se trouve la case étiquetée $i+1$, pour obtenir $V(S^{t_{[i+1]}}) \cup S^{t_{[i+1]}} \cup (T \setminus t_{[i+1]}) = \theta_{i+1,k}$. Ainsi, à chaque bijection $\theta_{i,k}$ correspond un glissement en partance de la case étiquetée i du tableau T . Ceci termine la preuve

par induction. Nous avons donc :

$$V(S^{t[l]}) \cup S^{t[l]} = \theta_{l,k}$$

ce qui implique l'égalité recherchée :

$$V(S^T) \cup S^T = \theta_{l,k}$$

Maintenant, prouvons la deuxième égalité. Nous dirons que θ_F sera la bijection associée au tableau ${}_S T \cup V({}_S T)$ et prendrons également les notations suivantes :

$$\theta_{i,l} = r_{n-i,n-i+1} r_{n-i-1,n-i-2} \cdots r_{k-i+1,k-i+2} \theta_{i-1,l} \quad \forall i \in [k]$$

$$\text{où } \theta_{0,l} = \theta_0$$

Nous devons donc montrer que ${}_S T \cup V({}_S T) = \theta_{k,l}$

Notons par $s_{[i]}$ la partie de S formée des cases étiquetées de $k-i+1$ à k . Pour obtenir le membre de gauche de l'égalité, on devra calculer $(S \setminus s_{[1]}) \cup_{s_{[1]}} T \cup V({}_{s_{[1]}} T)$, puis $(S \setminus s_{[2]}) \cup_{s_{[2]}} T \cup V({}_{s_{[2]}} T)$, et ainsi de suite jusqu'à $(S \setminus s_{[k]}) \cup_{s_{[k]}} T \cup V({}_{s_{[k]}} T)$ (ici, $S \setminus s_{[k]} = \emptyset$). Finalement, cela nous mènera à ${}_{s_{[k]}} T \cup V({}_{s_{[k]}} T)$ ($\star\star$).

Si on montre que $(S \setminus s_{[i]}) \cup_{s_{[i]}} T \cup V({}_{s_{[i]}} T) = \theta_{i,l} \quad \forall i \in [k]$, nous aurons prouvé que ($\star\star$) = $\theta_{k,l}$.

Prenons le cas $|S| = k = 1$:

- Si $\theta_0^{-1}(1) < \theta_0^{-1}(2)$, alors $r_{1,2}\theta_0 = \theta_0$. Donc, on aura :

$$\theta_0^{-1}(1) = \theta_f^{-1}(1)$$

car la case étiquetée 1 garde la même étiquette après la première transformation, et également aux autres transformations qui suivent. De plus,

$$\theta_0^{-1}(1) = \theta_F^{-1}(1)$$

car le glissement partant de T nous menant vers ${}_S T$ «transporte» l'étiquette 1 vers la case $\theta_0^{-1}(1)$. Donc, on aura bien $\theta_f^{-1}(1) = \theta_F^{-1}(1)$

- Sinon, on doit échanger les étiquettes 1 et 2 dans le tableau associé à θ_0 afin d'obtenir $r_{1,2}\theta_0$ (notons cette bijection θ_1). Nous aurons donc :

$$\theta_1^{-1}(1) = \theta_0^{-1}(2) = \theta_f^{-1}(1)$$

D'un autre côté, l'étiquette 2 du tableau T doit se trouver dans l'un des coins inférieurs car la seule étiquette inférieure à 2 est l'étiquette 1, et elles ne sont pas adjacentes entre elles. Donc, les transformations qui suivent n'affectent pas la case portant l'étiquette 1. Par conséquent,

$$\theta_F^{-1}(2-1) = \theta_0^{-1}(2) = \theta_f^{-1}(1)$$

En effet, étant donné l'union des tableau S et T , on doit re-numéroter les étiquettes en les retranchant d'une unité.

Donc, on a bien que $\theta_F^{-1}(1) = \theta_f^{-1}(1)$

Maintenant, procédons par récurrence. Il suffit de ne pas prendre en compte les cases étiquetées $\{n, n-1, \dots, n-i+1\}$, car ces dernières gardent la même étiquette lorsqu'on passe de la transformation $\theta_{i,l}$ à $\theta_{i+1,l}$ ou d'un autre point de vue, lorsqu'on passe du tableau $(S \setminus s_{[i]}) \cup_{s_{[i]}} T$ au tableau $(S \setminus s_{[i+1]}) \cup_{s_{[i+1]}} T$, et de suivre le même raisonnement que pour la première égalité. Nous pourrions donc affirmer l'égalité (2).

De plus, nous avons que \forall bijection θ décrite au début de la preuve, et i, j tels que $|i-j| > 1$:

$$r_{i,i+1}r_{j,j+1}\theta = r_{j,j+1}r_{i,i+1}\theta$$

En effet, la fonction $r_{i,i+1}\theta$ n'implique que les cases étiquetées i et $i+1$ du tableau représenté par θ . Dans ce cas, $r_{i,i+1}r_{j,j+1}\theta$ et $r_{j,j+1}r_{i,i+1}\theta$ impliqueraient les 4 cases distinctes étiquetées $i, i+1, j$ et $j+1$ car $i \notin \{j, j+1\}$ et $i+1 \notin \{j, j+1\}$.

Étant donné cette commutativité (sous la condition $|i-j| > 1$), nous allons montrer que les 2 expressions de l'égalité (1) sont égales aux 2 expressions de l'égalité (2). Observons la première étape de l'algorithme prouvant cette égalité (les $l-2$ autres étapes se font

facilement par récurrence). Aussi, les cas $k = 1$ ou $l = 1$ étant triviaux, nous nous concentrerons sur les autres cas.

Partons avec le membre de droite de l'égalité (1), et notons-le \clubsuit . Étant donné $|(l-1) - (l+p)| > 1 \quad \forall p > 1$, on peut donc écrire ceci :

$$\begin{aligned}
 \clubsuit &= r_{l,l+1}r_{l+1,l+2}r_{l+2,l+3} \cdots r_{n-1,n} &= r_{l,l+1}r_{l-1,l}r_{l+1,l+2}r_{l+2,l+3} \cdots r_{n-1,n} \\
 & \quad r_{l-1,l}r_{l,l+1}r_{l+1,l+2} \cdots r_{n-2,n-1} & \quad r_{l,l+1}r_{l+1,l+2} \cdots r_{n-2,n-1} \\
 & \quad \cdots & \quad \cdots \\
 & \quad r_{2,3}r_{3,4}r_{4,5} \cdots r_{k+1,k+2} & \quad r_{2,3}r_{3,4}r_{4,5} \cdots r_{k+1,k+2} \\
 & \quad r_{1,2}r_{2,3}r_{3,4} \cdots r_{k,k+1}\theta_0 & \quad r_{1,2}r_{2,3}r_{3,4} \cdots r_{k,k+1}\theta_0
 \end{aligned}$$

De plus, étant donné $|(l-2) - (l+p)| > 1 \quad \forall p > 0$, on peut donc écrire ceci :

$$\begin{aligned}
 \clubsuit &= r_{l,l+1}r_{l-1,l}r_{l+1,l+2}r_{l+2,l+3} \cdots r_{n-1,n} &= r_{l,l+1}r_{l-1,l}r_{l-2,l-1}r_{l+1,l+2}r_{l+2,l+3} \cdots r_{n-1,n} \\
 & \quad r_{l,l+1}r_{l+1,l+2} \cdots r_{n-2,n-1} & \quad r_{l,l+1}r_{l+1,l+2} \cdots r_{n-2,n-1} \\
 & \quad r_{l-2,l-1}r_{l-1,l} \cdots r_{n-3,n-2} & \quad r_{l-1,l}r_{l,l+1} \cdots r_{n-3,n-2} \\
 & \quad \cdots & \quad \cdots \\
 & \quad r_{2,3}r_{3,4}r_{4,5} \cdots r_{k+1,k+2} & \quad r_{2,3}r_{3,4}r_{4,5} \cdots r_{k+1,k+2} \\
 & \quad r_{1,2}r_{2,3}r_{3,4} \cdots r_{k,k+1}\theta_0 & \quad r_{1,2}r_{2,3}r_{3,4} \cdots r_{k,k+1}\theta_0
 \end{aligned}$$

Si nous continuons ainsi, nous obtiendrons donc :

$$\begin{aligned}
\clubsuit &= r_{l,l+1}r_{l-1,l}r_{l-2,l-1} \cdots r_{2,3}r_{1,2}r_{l+1,l+2}r_{l+2,l+3} \cdots r_{n-1,n} \\
& r_{l,l+1}r_{l+1,l+2} \cdots r_{n-2,n-1} \\
& r_{l-1,l}r_{l,l+1} \cdots r_{n-3,n-2} \\
& \cdots \\
& r_{3,4}r_{4,5} \cdots r_{k+1,k+2} \\
& r_{2,3}r_{3,4} \cdots r_{k,k+1}\theta_0
\end{aligned}$$

Enfin, si nous réitérons cet algorithme, nous aurons l'égalité recherchée :

$$\begin{aligned}
\clubsuit &= r_{l,l+1}r_{l-1,l}r_{l-2,l-1} \cdots r_{2,3}r_{1,2} \\
& r_{l+1,l+2}r_{l,l+1}r_{l-1,l-2} \cdots r_{3,4}r_{2,3} \\
& \cdots \\
& r_{n-2,n-1}r_{n-3,n-2}r_{n-4,n-3} \cdots r_{k,k+1}r_{k-1,k} \\
& r_{n-1,n}r_{n-2,n-1}r_{n-3,n-2} \cdots r_{k+1,k+2}r_{k,k+1}
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $V(S^T) \cup S^T = {}_S T \cup V({}_S T)$. Finalement, étant donné $|V(S^T)| = |T| = |{}_S T| = l$, on a forcément l'égalité suivante $V(S^T) = {}_S T$, ce qui implique également $S^T = V({}_S T)$ \square

Le lemme précédent sera utilisé dans la preuve du corollaire suivant. Ce dernier nous révélera que si $S \approx T$ et que X est un tableau prolongé par S et T , alors le tableau résultant d'un pilotage de X par S sera identique au tableau résultant d'un pilotage de X par T . De surcroît, nous pourrons ensuite affirmer le corollaire miroir ou inverse, au sens du jeu de Taquin énoncé à la fin du premier chapitre.

Corollaire 2.3.1. *Soient les tableaux S , T et X tels que $S \approx T$ et que X prolonge S et T . Alors,*

$${}_S X = {}_T X$$

Preuve. Par le lemme 2.3.1, ${}_S X = V(S^X)$ et ${}_T X = V(T^X)$. Aussi, étant donné $S \approx T$, chaque glissement appliqué aux deux tableaux nous donne deux autres tableaux de même forme. Conséquemment, les cases laissées vacantes seront les mêmes :

$$\begin{aligned} S \approx T &\Rightarrow V(S^X) = V(T^X) \\ &\Rightarrow {}_S X = {}_T X \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.3.2. *Soient les tableaux S , T et X tels que $S \approx T$ et que S et T prolongent X . Alors,*

$$X^S = X^T$$

Preuve. Par le lemme 2.3.1, $X^S = V({}_X S)$ et $X^T = V({}_X T)$. Aussi, étant donné $S \approx T$, chaque glissement appliqué aux deux tableaux nous donne deux autres tableaux de même forme. Conséquemment, les cases laissées vacantes seront les mêmes :

$$\begin{aligned} S \approx T &\Rightarrow V({}_X S) = V({}_X T) \\ &\Rightarrow X^S = X^T \end{aligned}$$

□

Finalement, on a bien que le pilotage d'un tableau X par un autre tableau S résultera en un tableau identique à celui résultant d'un pilotage de X par un autre tableau T dualement équivalent à S , peu importe que le pilotage soit intérieur ou extérieur.

CHAPITRE III

ÉQUIVALENCE DUALE ET TABLEAU D'INDEXATION DE SCHENSTED

Cette section approfondira le concept de l'équivalence duale, et justifiera le choix de son appellation. Nous découvrirons qu'il existe un lien fort intéressant et surprenant entre celle-ci et la correspondance de Schensted.

Théorème 3.0.1. *Soient les tableaux S et T tels que $\text{forme}(S) = \text{forme}(T) = \lambda$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

- a) $S \approx T$
- b) $V({}_X S) = V({}_X T)$ pour tout X tel que S et T prolongent X
- c) $V({}_X S) = V({}_X T)$ pour un X tel que S et T prolongent X et X est normal
- d) $V(S^X) = V(T^X)$ pour tout X tel que X prolonge S et T
- e) $V(S^X) = V(T^X)$ pour un X tel que X prolonge S et T et X est anti-normal
- f) $X^S = X^T$ pour tout X tel que S et T prolongent X
- g) $X^S = X^T$ pour un X tel que S et T prolongent X et X est normal
- h) ${}_S X = {}_T X$ pour tout X tel que X prolonge S et T
- i) ${}_S X = {}_T X$ pour un X tel que X prolonge S et T et X est anti-normal
- j) Il existe deux tableaux S' et T' de même forme normale et un tableau Y de forme prolongeant S' et T' tels que $S = (S')^Y$ et $T = (T')^Y$
- k) Il existe deux tableaux S' et T' de même forme anti-normale et un tableau Y où S' et T' prolongent Y tels que $S = {}_Y S'$ et $T = {}_Y T'$

Preuve. a) \Rightarrow b) Par le lemme 2.1.2

b) \Rightarrow c) Cas particulier

c) \Rightarrow j) Posons $S' = {}_X S$, $T' = {}_X T$ et $Y = V({}_X S) = V({}_X T)$. Montrons que ces trois tableaux satisfont les caractéristiques demandées. D'abord, X étant de forme normale, ${}_X S$ et ${}_X T$ sont également de forme normale. Ensuite, $V({}_X S)$ prolonge évidemment ${}_X S$ et $V({}_X T)$ prolonge ${}_X T$. Ceci implique que ${}_X S$ et ${}_X T$ sont de même forme. Enfin, par l'identité énoncée à la fin de la section 1.2, nous avons que $(S')^Y = ({}_X S)^{V({}_X S)} = S$ et $(T')^Y = ({}_X T)^{V({}_X T)} = T$

j) \Rightarrow a) Si S' et T' sont de même forme normale, alors par le corollaire 2.2.1, $S' \approx T'$.

De plus, par le lemme 2.1.1, on a $(S')^Y \approx (T')^Y$. Donc, on a bien $S \approx T$

f) \Leftrightarrow b) Par le lemme 2.3.1, on a $X^S = V({}_X S)$ et $X^T = V({}_X T)$. Alors, on a bien $V({}_X S) = V({}_X T)$

g) \Leftrightarrow c) même preuve que celle précédente, mais dans le cas particulier où X est normal

Étant donné que les propositions b), c), j), f) et g) sont respectivement les propositions inverses des propositions d), e), k), h) et i) et que la proposition a) est son propre inverse, alors les preuves ci-dessus s'appliquent de la même façon qu'à ces dernières propositions. \square

Nous allons introduire une autre caractérisation de l'équivalence duale en termes de tableau de permutation. Selon Schützenberger, un *tableau de permutation* est un tableau dont la forme est une anti-chaîne. En d'autres mots, c'est un tableau où il n'y a aucune case qui puisse se comparer avec une autre case de T . Cependant, nous allons nous restreindre aux tableaux T tels que si le mot-ligne de T est noté $\pi_T = t_1 t_2 \dots t_n$, alors le tableau de permutation de T sera formé de manière à ce que la case $(i, n - i + 1)$ soit étiquetée t_i (voir fig. 3.1).

N'importe quelle permutation peut être associée à un unique tableau de permutation. On peut donc utiliser ce type de tableau pour représenter une permutation. D'un autre côté, en partant d'un tableau de forme λ (normale ou gauche), il est possible de décrire une suite de glissements nous menant à un tableau de permutation, de sorte que, partant

d'un tableau quelconque, il existe un unique tableau de permutation lui étant associé. Il suffit de procéder ainsi :

Soit T un tableau droit de forme λ tel que $c_{1,1}, \dots, c_{k_1,1}$ sont les cellules de la première ligne de T en partant du bas, $c_{1,2}, \dots, c_{k_2,2}$ sont celles de la deuxième ligne, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne formée par les cellules $c_{1,l}, \dots, c_{k_l,1}$. Si T est de forme gauche, il suffit de procéder de la même façon que l'algorithme qui suit, mais en effectuant possiblement des glissements inférieurs, au lieu des glissements supérieurs.

Effectuons la suite de glissements envoyant la première ligne de T vers la droite. Pour cela, nous commencerons par un premier glissement dans la case située à droite de la case $c_{k_1,1}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que la case $c_{k_1,1}$ soit déplacée dans la case $(n, 1)$. Ensuite, déplaçons la deuxième ligne de T vers la droite, par une suite de glissements similaires aux précédents, de sorte que la case $c_{k_2,2}$ soit située dans la case $(a-1, b+1)$, où les nouvelles coordonnées de la case $c_{1,1}$ sont (a, b) . Continuons ainsi jusqu'à la dernière ligne de T (voir les 2 premiers tableaux de la figure 3.1).

Par la suite, réitérons cet algorithme en suivant les colonnes au lieu des lignes. De cette façon, nous ferons des déplacements verticaux afin d'obtenir le tableau de permutation associé au tableau T . Effectuons la suite de glissements envoyant la case située dans la première colonne vers la case $(1, n)$. Puis, effectuons la suite de glissements envoyant la case située dans la deuxième colonne vers la case $(2, n-1)$, et ainsi de suite, pour finalement obtenir le tableau de permutation associé à T (voir fig. 3.1).

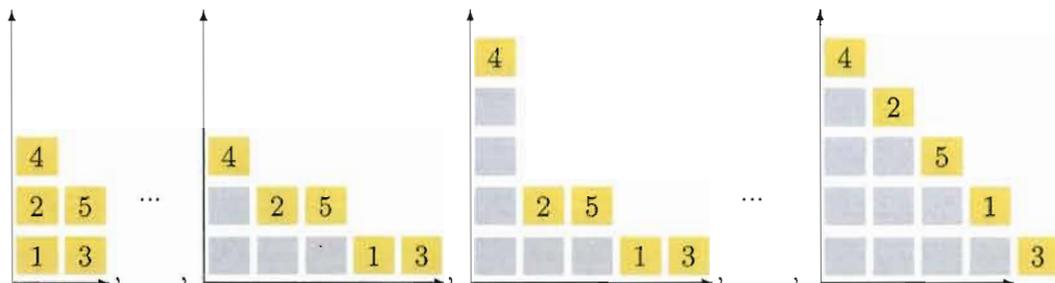


Figure 3.1 Tableau de permutation associé à un tableau T (ici, $\pi_T = 42513$)

Il est à remarquer qu'en effectuant la suite inverse de glissements, il est facile de retrouver la tableau initial T . On peut donc effectivement dire qu'à un tableau donné peut être associé, par l'algorithme décrit, à un seul tableau de permutation. Cependant, un tableau de permutation peut être associé à plusieurs tableaux différents, de même mot-ligne. Toutefois, un tableau de permutation formé par l'algorithme ci-dessus ne peut être associé qu'à un seul tableau de forme donné λ .

De surcroît, par la façon dont cet algorithme a été formé, si deux tableaux ont la même forme, alors la suite de cellules laissées vacantes par cette suite de glissements va être la même pour ces deux tableaux, peu importe ce que contient ces deux tableaux.

Étant donné que cet algorithme est en fait une suite de glissements, il est facile d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 3.0.2. *Soient les tableaux S et T de même forme λ . On a donc ceci :*

$S \approx T \Leftrightarrow$ les tableaux de permutations obtenus par l'algorithme ci-haut de S et de T sont duals-équivalents.

Nous devons donc déterminer à quel moment deux tableaux de permutations sont duals-équivalents. Le théorème qui suit nous le révèle. Cependant, nous aurons besoin du lemme et de la proposition suivante afin de le démontrer.

Lemme 3.0.3. *Soit T , un tableau formé d'une seule ligne, où $\pi_T = t_1 t_2 \dots t_n$ et $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} = [n+1] \setminus \{k\}$, où $k \in [n+1]$.*

Alors, insérer par Schensted la case étiquetée k dans T résulte en un même tableau que le redressement de T auquel on a rajouté la case d'étiquette k , située à l'extrême droite de T , une rangée plus bas.

Preuve. Soit T , un tableau formé d'une seule ligne, où $\pi_T = t_1 t_2 \dots t_n$ et $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} = [n+1] \setminus \{k\}$, où $k \in [n+1]$.

Simulons le redressement de T auquel on a ajouté la case d'étiquette k située à l'extrême droite de T , une rangée plus bas. D'abord, il n'existe qu'un seul coin inférieur dans ce tableau, alors nous n'avons pas le choix du premier glissement. La case portant la plus petite étiquette entre t_n et k se déplacera donc dans le coin inférieur.

Si $k = n + 1$, alors cela signifie que k est la plus grande des étiquettes des cases du tableau mentionné ci-dessus. Ce sera donc la case d'étiquette t_n qui sera déplacée, et la case d'étiquette k se retrouvera à sa droite. Le redressement se poursuit, en déplaçant à chaque glissement la case située en haut du coin inférieur. Cela résulte donc en le tableau formé d'une seule ligne dont les cases sont étiquetées de 1 à $n + 1$.

Si $k \neq n + 1$, alors $t_n = n + 1$. La case étiquetée k se déplacera donc sous la case étiquetée t_n . Le redressement continuant de cette façon, on remarquera qu'il n'y a qu'un coin inférieur possible pour chacune des étapes du redressement. Le redressement est alors unique. Aussi, la case étiquetée k se déplace par la gauche jusqu'à ce qu'on arrive au coin inférieur où le choix des cases est celles étiquetées k et $k - 1$. À ce moment là, nous devons déplacer cette dernière case car son étiquette est la plus petite. On peut aussi remarquer qu'à cette étape, la case d'étiquette $k + 1$ est située juste en haut de celle étiquetée k . Après ce glissement, nous nous retrouvons donc avec un tableau où la case étiquetée k est à la droite de celle étiquetée $k - 1$, et où celle étiquetée $k + 1$ est au-dessus de celle étiquetée $k - 1$. Nous pouvons aussi noter que la deuxième ligne de ce tableau est formée des cases d'étiquettes de 1 à $k - 2$. On peut donc constater que la suite de glissements suivants déplacera ces cases pour en arriver au tableau formé par les cases étiquetées $t_1 t_2 \dots k \dots t_{i-1}$ à la première rangée en partant du bas, ainsi que par la case étiquetée $k + 1$ à la deuxième rangée.

D'un autre côté, simulons l'insertion par Schensted de la case étiquetée k dans le tableau T .

Si $k = n + 1$, alors cela signifie que le tableau T est formé des cases étiquetées de 1 à n . L'insertion par Schensted de la case étiquetée k dans le tableau T résultera en le tableau formé d'une ligne dont les cases sont étiquetées de 1 à $n + 1$.

Sinon, la case d'étiquette k remplacera la case d'étiquette $k + 1$ et cette dernière sera éjectée pour être remplacée à la deuxième rangée de ce tableau, par la façon dont l'algorithme de Schensted a été formé (voir le chapitre 1). On aura bien que le tableau obtenu est formé des cases étiquetées $t_1 t_2 \dots k \dots t_{i-1}$ à la première rangée en partant du bas, ainsi que par la case étiquetée $k + 1$ à la deuxième rangée. \square

Proposition 3.0.1. *Soit S un tableau de permutation associé à la permutation $s_1 s_2 \dots s_n$. Alors $P(s_1 s_2 \dots s_i)$ s'obtient par redressement du sous-tableau de S formé par les cases étiquetées $s_1 s_2 \dots s_i$.*

Preuve. Procédons par récurrence. Si $i = 1$, l'égalité est triviale. Supposons que l'égalité soit vraie pour tout i , montrons qu'elle demeure vraie pour $i + 1$. Soit S , un tableau de permutation associé à la permutation $s_1 s_2 \dots s_n$ et S' , le redressé du sous-tableau de S associé à la permutation $s_1 s_2 \dots s_i$. Par l'hypothèse de récurrence, S' est identique au tableau d'insertion de Schensted $P(s_1 s_2 \dots s_i)$.

Nous devons donc montrer que le redressé de S' auquel on a rajouté la case d'étiquette s_{i+1} , située à l'extrême droite de S' , une rangée plus bas, est le même tableau que S' auquel on a inséré avec l'algorithme de Schensted la case s_{i+1} . Notons ces 2 tableaux respectifs T_1 et T_2 . Démontrons ceci pour un tableau S' formé d'une seule ligne (l'algorithme de Schensted s'effectuant ligne par ligne, cela est suffisant à la démonstration). Ceci est prouvé dans le lemme 3.0.3. \square

Corollaire 3.0.3. *Soit T un tableau. Il existe un redressement de T qui est égal à $P(\pi_T)$.*

Preuve. En effet, soit T un tableau de mot-ligne $t_1 t_2 \dots t_n$ et soit T' un tableau de permutation associé à T de même mot-ligne. Par la proposition 3.0.1, le tableau obtenu par un redressement de T' est identique au tableau $P(\pi_{t_1 t_2 \dots t_n})$. T' étant obtenu par des glissements de T , nous pouvons donc dire qu'un redressement de T est identique au tableau $P(\pi_{t_1 t_2 \dots t_n})$ \square

Nous verrons dans le prochain chapitre qu'il y a un seul redressé du tableau T .

Nous aimerions en savoir un peu plus maintenant sur le tableau d'indexation de Schensted. Le théorème suivant nous en dira un peu plus.

Théorème 3.0.2. *Soient S et T deux tableaux de même forme, et S' et T' , leur tableau de permutation respectif associé par l'algorithme construit. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

S et T sont duals-équivalents

S' et T' sont duals-équivalents

$$Q(\pi_S) = Q(\pi_T)$$

Preuve. Nous allons nous concentrer sur l'équivalence des deux dernières propositions du théorème, l'équivalence entre les deux premières découlant du lemme 3.0.2.

\Rightarrow $Q(\pi_{S'})$ «enregistre» la suite de forme $\lambda_1 \subseteq \lambda_2 \subseteq \dots \subseteq \lambda_n$, où $\lambda_i = \text{forme}(P(s_1 s_2 \dots s_i))$ et $s_1 s_2 \dots s_n$ est la permutation associée au tableau S' .

$S' \approx T'$ implique que la suite de glissements appliqués à S' et à T' afin d'obtenir un tableau droit de même forme λ_i (par la proposition précédente) nous donnera la même suite de cases laissées vacantes chez ces deux tableaux. En conséquence, on aura bien l'égalité recherchée $Q(\pi_{S'}) = Q(\pi_{T'})$.

\Leftarrow Soit $s_1 s_2 \dots s_n$, la permutation associée au tableau de permutation S' . Cette permutation est la même que celle associée au tableau S , par la façon dont l'algorithme pour passer d'un tableau à son tableau de permutation a été formé. Nous aurons donc $\pi_S = \pi_{S'}$. De plus, par le même raisonnement, nous aurons $\pi_T = \pi_{T'}$. Fixons un tableau X décrivant la suite de glissements menant à un redressement de S' . Posons $Y = V({}_X S')$. Pour tout tableau W tel que $S' \approx W$, on aura $V({}_X S') = V({}_X W) = Y$. Évidemment, n'importe quel redressement de W aura la même forme λ qu'un redressement de S' , mais ne contiendra toutefois pas les mêmes étiquettes, sinon W et S'

seraient identiques. Nous pouvons donc affirmer que l'action, c'est-à-dire la suite de glissements, permettant de transformer un tableau S' en un tableau normal ${}_X S'$ décrit une bijection entre la classe d'équivalence duale de S' et les tableaux de forme normale λ . Inversement, l'action permettant de transformer un tableau ${}_X S'$ de forme normale en un tableau de permutation $({}_X S')^Y = S'$ forme également une bijection entre ces deux mêmes ensembles.

De plus, la correspondance de Schensted nous mène à la bijection suivante : si $E = \{W \mid Q(W) = Q(S')\}$, alors on a une bijection entre E et les tableaux de forme normale. Nous venons de décrire deux bijections dont l'ensemble d'arrivée est le même : les tableaux de forme normale λ . L'ensemble de départ de l'un est la classe d'équivalence duale de S' , et l'ensemble de départ de l'autre est l'ensemble E . Par l'implication précédente (\Rightarrow), la classe duale d'équivalence de S' est contenue dans l'ensemble E .

Par conséquent, ces deux ensembles doivent être égaux.

□

Le théorème que nous venons d'énoncer justifie le terme «duale-équivalence». Dans le prochain chapitre, nous verrons que l'équivalence avec laquelle cette dernière est duale est l'équivalence par le jeu de taquin, c'est-à-dire par une suite de glissements.

CHAPITRE IV

THÉORÈMES FONDAMENTAUX DU JEU DE TAQUIN

Ce chapitre clôt cette étude sur l'élaboration d'une preuve entièrement construite sur le jeu de taquin à l'effet que le redressé d'un tableau est unique (élaborée par Haiman). Ce théorème porte le nom de « premier théorème fondamental du jeu de taquin ».

Plus loin, nous prouverons le deuxième théorème fondamental du jeu de taquin stipulant que le nombre de tableaux de même forme qui, lorsqu'on les redresse, se transforment en un tableau arbitraire mais fixé T de forme normale dépend uniquement de cette dernière forme et de la forme des tableaux initiaux, et non du contenu de T .

Théorème 4.0.3. *Premier théorème fondamental du jeu de taquin :*

Le tableau de forme normale résultant d'une suite de glissements effectués sur un tableau T dépend uniquement de T et non de la suite de glissements.

Preuve. Soient deux tableaux de même forme normale X_1 et X_2 tels que T prolonge ces deux tableaux. Par le corollaire 2.2.1, $X_1 \approx X_2$ car leur forme est identique et normale. De plus, par le théorème 3.0.1, $X_1 \approx X_2$ si et seulement si $X_1 T = X_2 T$. Cela prouve que peu importe la suite de glissements effectués afin de redresser le tableau T , le redressé de T sera unique. □

Nous appellerons *redressé d'un tableau T* l'unique tableau de forme normale obtenu par une suite de glissements.

Corollaire 4.0.4. *Soit T un tableau. Le redressé de T est égal au tableau d'insertion $P(\pi_T)$.*

Preuve. Par le premier théorème fondamental de taquin, le redressé d'un tableau est unique, et par le corollaire 3.0.3, il est égal au tableau $P(\pi_T)$. \square

Corollaire 4.0.5. *Les tableaux S et T sont taquin-équivalents si et seulement si $P(\pi_S) = P(\pi_T)$.*

Il sera donc naturel d'utiliser le tableau d'insertion $P(\sigma)$ pour représenter la classe d'équivalence de taquin d'un tableau T dont le mot est σ et le tableau d'indexation $Q(\sigma)$ pour représenter la classe d'équivalence duale de T .

La bijection de Schensted nous informe qu'à chaque permutation σ est associé un couple unique de tableaux $(P(\sigma), Q(\sigma))$. Donc, σ est entièrement représentée par la classe d'équivalence duale de son tableau de permutation, ainsi que par sa classe d'équivalence de taquin. Nous pouvons donc formuler l'un des théorèmes importants de cette étude :

Théorème 4.0.4. *Le tableau d'insertion de Schensted est un représentant de la classe de tableaux taquin-équivalents, et le tableau d'indexation de Schensted est un représentant de la classe de tableaux duals-équivalents.*

Les propositions suivantes utilisent la notion d'équivalence de forme. Nous définirons comme étant forme-équivalents deux tableaux S et T tels que ces deux tableaux sont taquin équivalents à deux tableaux de même forme normale. C'est ainsi dire, par le corollaire 4.0.4, que $forme(P(\pi_S)) = forme(P(\pi_T))$. Une classe de forme sera donc composée de tableaux tels que la forme du tableau d'insertion de Schensted de leur mot-ligne est la même.

Proposition 4.0.2. *Tous les tableaux d'une classe d'équivalence de taquin sont contenus dans la même classe de forme.*

Preuve. Soient deux tableaux quelconques S et T , taquin-équivalents. Par le théorème 4.0.3, ils se redressent en un même tableau normal. Donc, S et T sont contenus dans la même classe de forme. \square

Proposition 4.0.3. *Tous les tableaux d'une classe d'équivalence duale sont contenus dans la même classe de forme.*

Preuve. Soient deux tableaux quelconques S et T , duals-équivalents. Par le théorème 3.0.2, $Q(\pi_S) = Q(\pi_T)$. Donc, $forme(P(\pi_S)) = forme(P(\pi_T))$. En conséquence, S et T sont contenus dans la même classe de forme. \square

Proposition 4.0.4. *Une classe d'équivalence de taquin et une classe d'équivalence duale s'intersectent en un ou des tableaux si et seulement si ces deux classes sont contenues dans la même classe de forme.*

Preuve. Si tous les tableaux d'une classe d'équivalence de taquin (notée A) et d'une classe d'équivalence duale (notée B) sont contenues dans la même classe de forme, alors

$$\forall \text{ tableaux } U \text{ et } V \text{ appartenant à } A \cup B, \text{ on a } forme(P(\pi_U)) = forme(P(\pi_V))$$

. Supposons $A \cap B = \emptyset$ (nous voulons arriver à une contradiction). Alors, il n'existe pas de tableau W tel que $P(\pi_W) = P(\pi_U)$ pour un $U \in A$ et en même temps $Q(\pi_W) = Q(\pi_V)$ pour un $V \in B$. Cependant, on a par l'hypothèse de départ que $forme(P(\pi_V)) = forme(P(\pi_U)) = forme(Q(\pi_V)) = forme(Q(\pi_U))$. De plus, par la correspondance de Schensted, il existe une unique permutation associée au couple de tableaux normaux $(P(\pi_U), Q(\pi_V))$. Nous venons donc de trouver cette permutation π_W recherchée, qui sera en fait le mot-ligne du tableau W de même forme que le tableau V . Ceci contredit donc l'hypothèse $A \cap B = \emptyset$.

D'un autre côté, si $A \cap B \neq \emptyset$, alors posons $T \in A \cap B$. On aura donc $P(\pi_T) = P(\pi_U) \forall U \in A$ et $Q(\pi_T) = Q(\pi_V) \forall V \in B$. Étant donné que $forme(P(\pi_T)) = forme(Q(\pi_T))$, on aura donc $forme(P(\pi_U)) = forme(Q(\pi_V)) \forall V \in B$ et $U \in A$. En conséquence,

$forme(P(\pi_W)) = forme(P(\pi_V)) \forall V \in B$ et $U \in A$, ce qui confirme que les tableaux de A et B sont contenus dans la même classe de forme. \square

Théorème 4.0.5. *La classe d'équivalence de taquin d'un tableau T de forme λ et sa classe d'équivalence duale s'intersectent en le singleton $\{T\}$.*

Preuve. Soit un tableau T de forme λ . Notons \mathcal{T} la classe d'équivalence de taquin de T et \mathcal{D} sa classe d'équivalence duale.

Supposons que $X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{D}$. Alors, par le corollaire 4.0.5, $P(\pi_X) = P(\pi_T)$. De même, par le théorème 3.0.2, $Q(\pi_X) = Q(\pi_T)$. Donc, par la correspondance de Schensted, $\pi_X = \pi_T$. Comme X et T ont la même forme (puisque $X \in \mathcal{D}$), on a $X = T$. \square

Enfin, il est nécessaire de montrer l'attrait de l'équivalence duale en ce qui concerne les fondements du jeu de taquin. Le deuxième théorème fondamental du jeu de taquin élaboré par Schützenberger (Dual equivalence with a conjecture of Proctor, 1992) se sert de cette notion pour démontrer son résultat. ... —

Théorème 4.0.6. Deuxième théorème fondamental du jeu de taquin :

Le nombre de tableaux de forme gauche λ qui, lorsqu'on leur applique le jeu de taquin afin d'obtenir un tableau arbitraire mais fixé T de forme normale μ , dépend uniquement des formes λ et μ , et non du contenu du tableau T .

Preuve. Montrons que le nombre de tableaux de forme gauche λ se redressant en un tableau arbitraire mais fixé T_1 de forme normale μ est égal au nombre de tableaux de forme λ se redressant en un tableau arbitraire mais fixé T_2 de forme normale μ .

Notons \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 les classes d'équivalences de taquin de T_1 et de T_2 respectivement. De plus, notons A_1 (respectivement A_2) l'ensemble de tous les tableaux de forme λ dans \mathcal{T}_1 (respectivement dans \mathcal{T}_2). Par le corollaire 4.0.5, on aura donc :

$$A_1 = \{R \mid R \text{ est un tableau de forme } \lambda \text{ où } P(\pi_R) = T_1\},$$

$$A_2 = \{S \mid S \text{ est un tableau de forme } \lambda \text{ où } P(\pi_S) = T_2\}.$$

Nous voulons montrer que la cardinalité de ces deux ensembles est identique : $|A_1| = |A_2|$.

D'abord, notons R_1, R_2, \dots, R_k les tableaux de l'ensemble A_1 , et notons \mathcal{D}_{R_i} la classe duale de $R_i \forall i \in [k]$. La cardinalité de A_1 sera donc égal à k . Par le théorème 4.0.5, $T_1 \cap \mathcal{D}_{R_i} = \{R_i\} \forall i \in [k]$. Puis, notons S_i le tableau contenu dans l'intersection des ensembles T_2 et $\mathcal{D}_{R_i} \forall i \in [k]$. En effet, par la proposition 4.0.4, l'intersection n'est pas vide car T_2 et \mathcal{D}_{R_i} sont inclus dans la même classe de forme :

$$\text{forme}(P(\pi_{T_2})) = \text{forme}(P(\pi_{S_i})) = \text{forme}(Q(\pi_{S_i})) = \text{forme}(Q(\pi_{R_i})) = \text{forme}(P(\pi_{R_i}))$$

En effet, la première égalité découle du corollaire 4.0.5 car $S_i \in T_2$, et la troisième découle du théorème 3.0.2 car $S_i \in \mathcal{D}_{R_i}$. Cette égalité est suffisante pour un R_i et un S_i quelconque en raison des propositions 4.0.2 et 4.0.3.

De plus, nous aurons que $P(\pi_{S_i}) = T_2 \forall i \in [k]$ car $S_i \in T_2$ et nous aurons également que $\text{forme}(S_i) = \text{forme}(R_i) = \lambda \forall i \in [k]$ car $S_i \in \mathcal{D}_{R_i}$. Cela implique donc que $S_i \in A_2 \forall i \in [k]$. Nous avons donc que $|A_1| = k \leq |A_2|$.

Par symétrie, nous aurons que $|A_2| = l \leq |A_1|$.

Enfin, nous aurons bien l'égalité souhaitée : $|A_1| = |A_2|$.

□

CONCLUSION

Le but premier de ce mémoire était d'expliquer la preuve que Haiman avait bâtie dans l'article (Dual equivalence with a conjecture of Proctor, 1992) à propos de la confluence du jeu de taquin, c'est-à-dire le fait que le redressé d'un tableau gauche est unique, et ne dépend pas de la suite des glissements effectués. Rappelons que cette preuve ne fait strictement appel qu'au déplacement du jeu de taquin sur des tableaux.

Pour ce faire, nous avons utilisé un concept-clé à la démonstration de cette preuve : l'équivalence duale. Celle-ci nous a d'abord permis de démontrer que tous les tableaux de forme normale fixée sont dualement équivalents entre eux. Ensuite, il s'est avéré que le pilotage d'un tableau X par un autre tableau S résulte toujours en un tableau identique à celui obtenu par le pilotage de X par un autre tableau T dualement équivalent à S . Cela a entraîné la confluence du jeu de taquin.

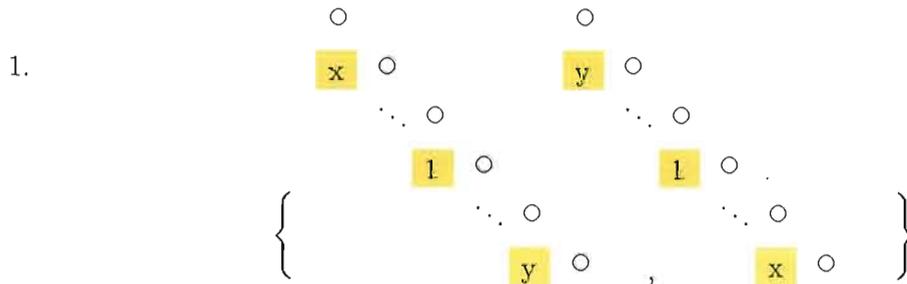
De plus, en approfondissant le concept d'équivalence duale et l'équivalence de taquin, il est apparu que tous les tableaux taquin-équivalents ont le même tableau d'insertion de Schensted, et tous les tableaux dualement équivalents ont le même tableau d'indexation de Schensted.

Enfin, nous avons démontré que le nombre de tableaux de forme λ qui, lorsqu'on leur applique le jeu de taquin afin d'obtenir un tableau arbitraire mais fixé T de forme normale μ , dépend uniquement des formes λ et μ , et non du contenu du tableau T .

APPENDICE A

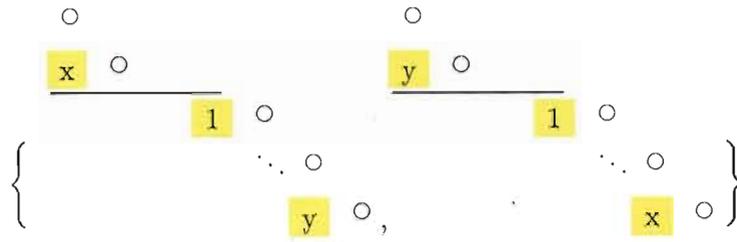
Glissements supérieurs (paire $x1y-y1x$)

Voici la liste de toutes les paires de tableaux de même forme dont le mot est $x1y$ et $y1x$, où $\{x, y\} = \{2, 3\}$. Chaque paire de tableau est numérotée. Chaque glissement supérieur effectué sur la paire de tableaux est associé à une lettre, en partant du haut de l'«escalier» représentant le tableau, jusqu'en bas. En consultant celle-ci, on peut se rendre à la paire de tableaux résultant du glissement de la paire initiale dans la case associée à la lettre en question. Lorsqu'il y a plusieurs choix possibles, on doit regarder la forme des tableaux initiaux afin de faire le bon choix.



- | | | |
|---------|---------|---------|
| a) 1 | c) 1, 2 | e) 1, 3 |
| b) 1, 4 | d) 1, 5 | f) 1 |

2.



a) 1, 4

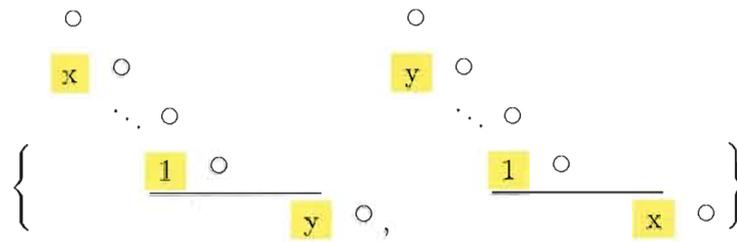
c) 2, 6

e) 2

b) 2, 10.1

d) 2, 8

3.



a) 3

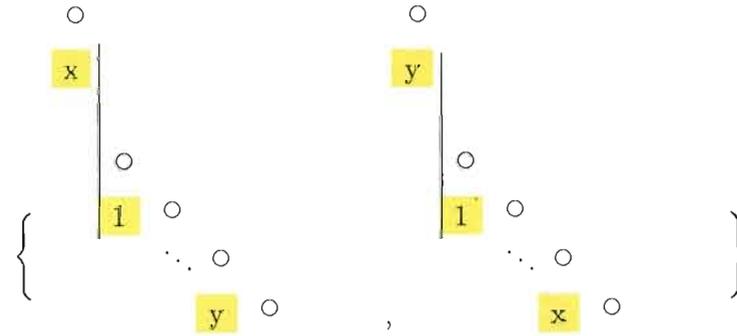
c) 1, 2, 5, 6

e) 3

b) 3, 7

d) 3, 11.1

4.



a) 4

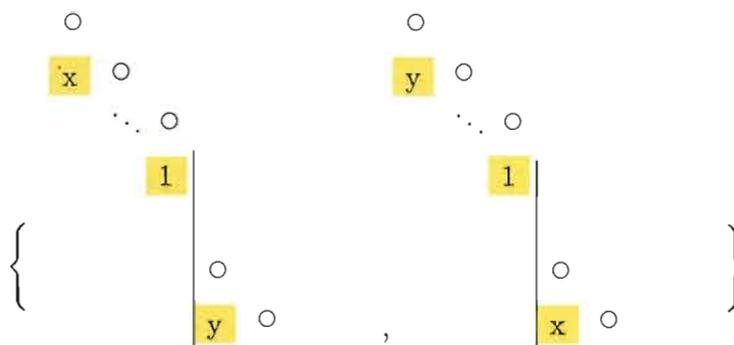
c) 1, 2, 5, 6

e) 4

b) 4, 10.1

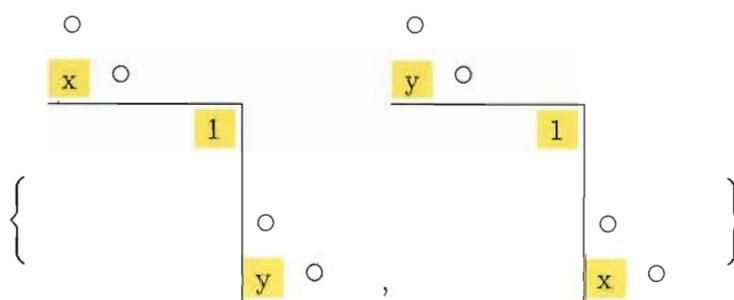
d) 4, 7

5.



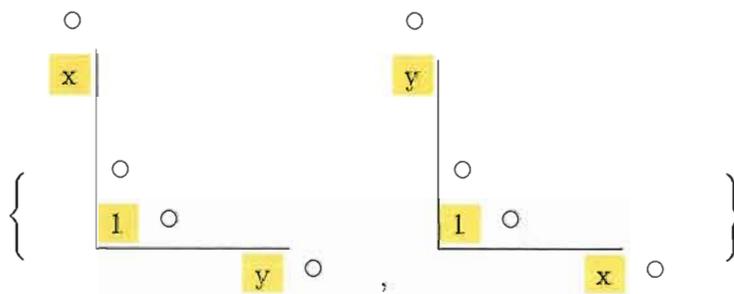
- a) 5
- b) 5, 9
- c) 5, 6
- d) 5, 11.1
- e) 1, 3

6.



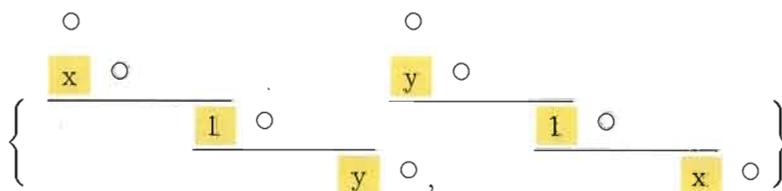
- a) 5, 9
- b) 6, 10.4
- c) 6, 11.3
- d) 2, 8

7.



- a) 7
- b) 4, 9, 10.3
- c) 3, 8
- d) 7

8.



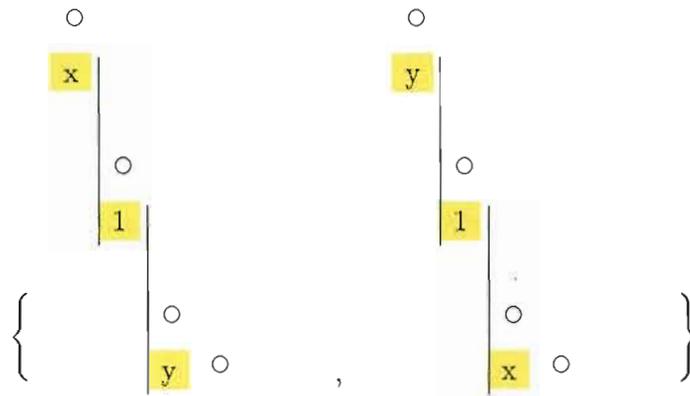
a) 3, 7

b) 8, 10.3

c) 8, 11.3

d) 8

9.



a) 9

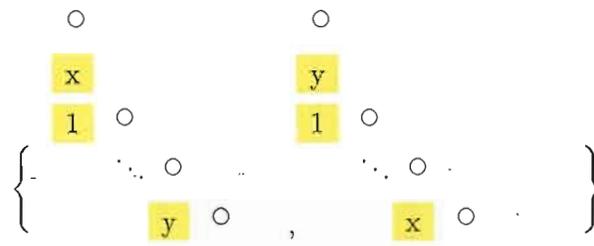
b) 9, 10.4

c) 9, 11.4

d) 4, 7

10.

10.1.



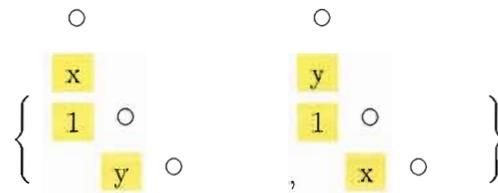
a) 10.1

b) 2, 6

c) 10.1, 10.3

d) 10.1

10.2.

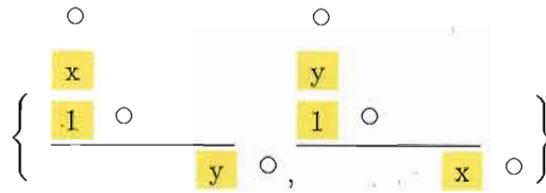


a) 10.4

b) 12

c) 10.3

10.3.

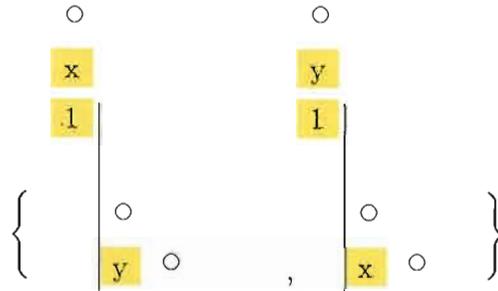


a) 10.1

b) 7

c) 10.3

10.4.



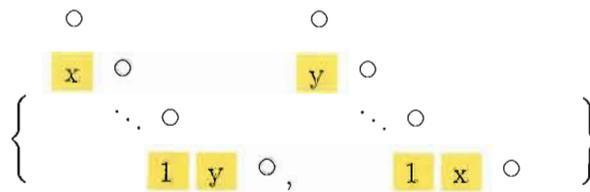
a) 10.4

b) 10.2, 10.4

c) 10.1

11.

11.1.



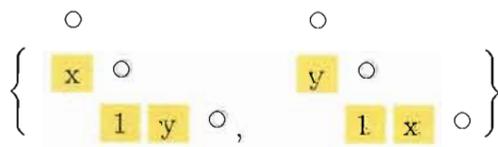
a) 11.1

b) 11.1, 11.4

c) 3, 6

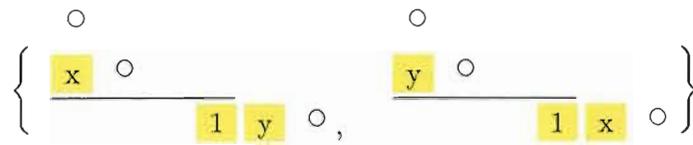
d) 11.1

11.2.



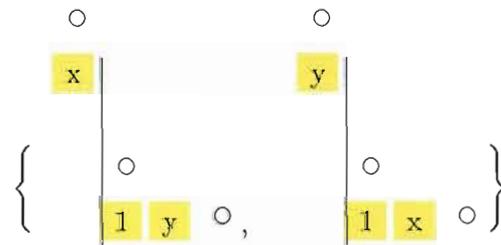
- a) 11.4 b) 12 c) 11.3

11.3.



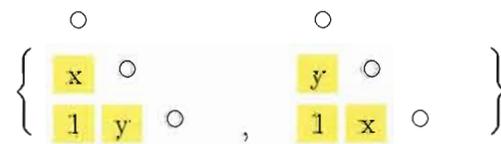
- a) 11.1 b) 11.1, 11.2 c) 11.3

11.4.



- a) 11.4 b) 7 c) 11.1

12.

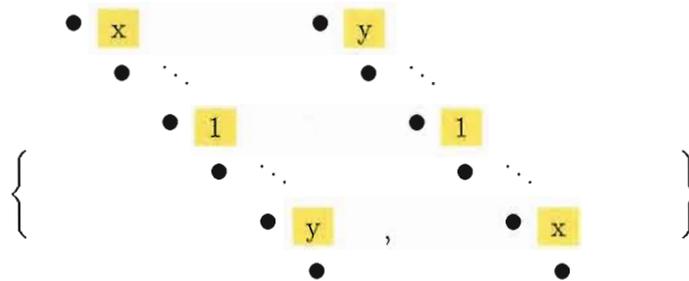


- a) 10.2
 b) voir tableau no.12 dans la liste de tableaux «glissements ext. (paire x^3y-y^3x)»
 c) 11.3

Glissements inférieurs (paire $x1y-y1x$)

Voici la liste de toutes les paires de tableaux de même forme dont le mot est $x1y$ et $y1x$, où $\{x, y\} = \{2, 3\}$. Chaque paire de tableau est numérotée. Chaque glissement inférieur effectué sur la paire de tableaux est associé à une lettre, en partant du haut de «l'escalier» représentant le tableau, jusqu'en bas. En consultant celle-ci, on peut se rendre à la paire de tableaux résultant du glissement de la paire initiale dans la case associée à la lettre en question. Lorsqu'il y a plusieurs choix possibles, on doit regarder la forme des tableaux initiaux afin de faire le bon choix.

1.



a) 1

c) 1, 4

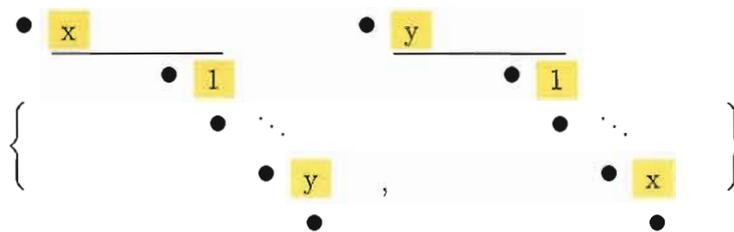
e) 1, 5

b) 1, 2

d) 1, 3

f) 1

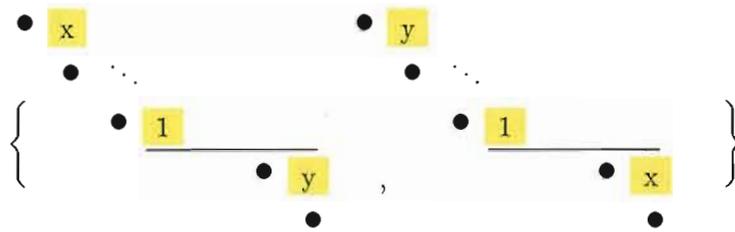
2.



56

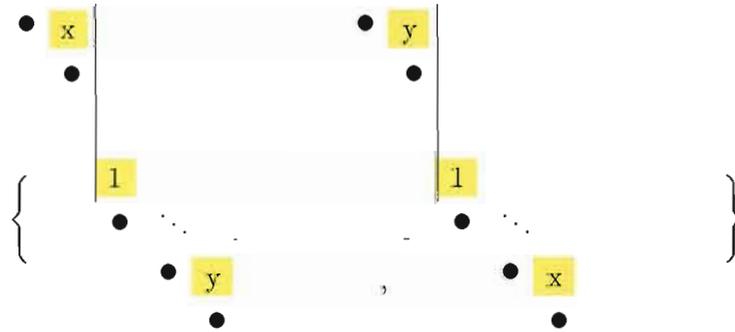
- a) 2 c) 1, 3, 4, 7 e) 2
b) 2, 10.1 d) 2, 6

3.



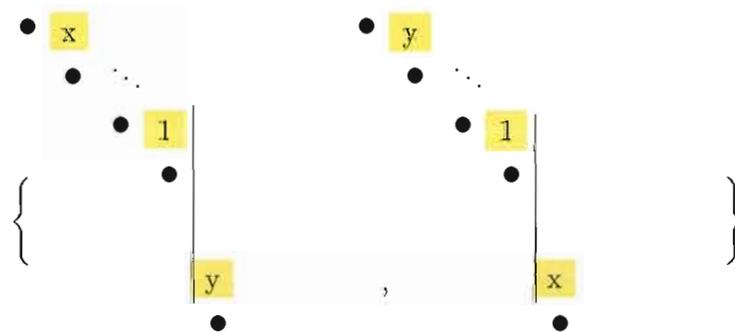
- a) 3 c) 3, 7 e) 1, 5
b) 3, 8 d) 3, 11.1

4.



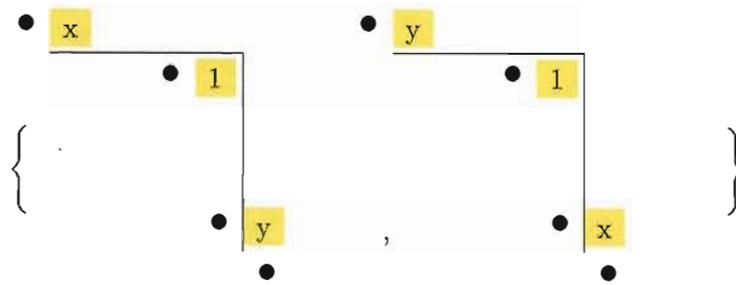
- a) 1, 2 c) 4, 7 e) 4
b) 4, 10.1 d) 4, 9

5.



- a) 5 c) 1, 3, 4, 7 e) 5
b) 5, 6 d) 5, 11.1

6.



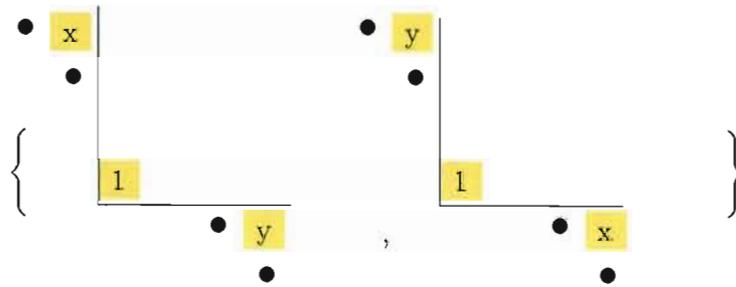
a) 6

b) 2, 8, 10.1

c) 5, 9, 11.1

d) 6

7.



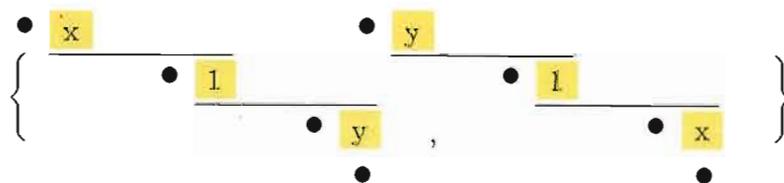
a) 3, 8

b) 7, 10.3

c) 7, 11.4

d) 4, 9

8.



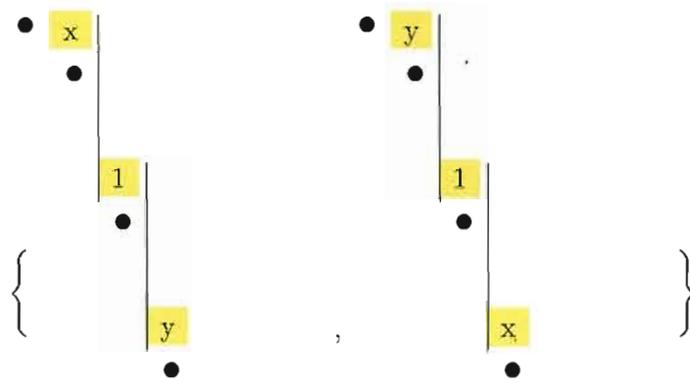
a) 8

b) 8, 10.3

c) 8, 11.1

d) 2, 6

9.



a) 5, 6

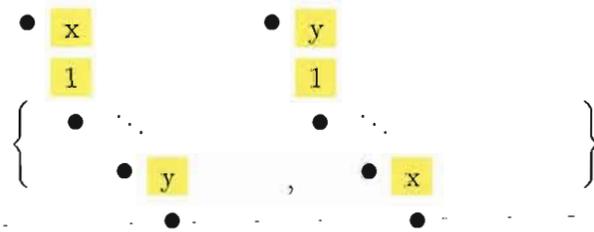
b) 9, 10.1

c) 9, 11.4

d) 9

10.

10.1.



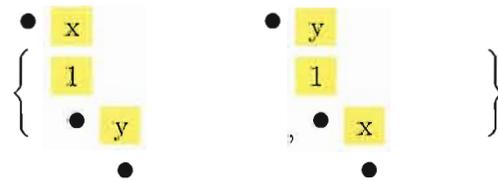
a) 2

b) 10.1, 10.3

c) 10.1, 10.4

d) 10.1

10.2.

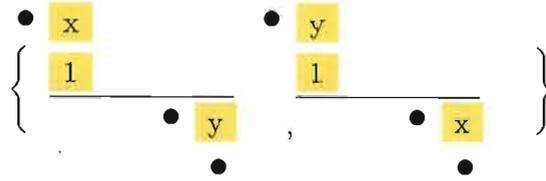


a) 6

b) 12

c) 10.4

10.3.

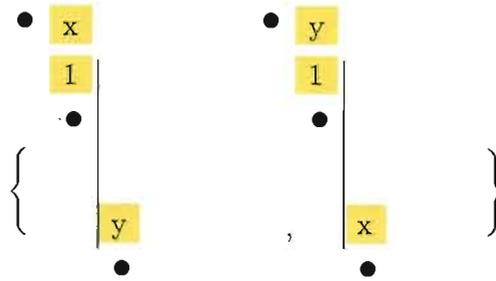


a) 7

b) 10.2, 10.3

c) 10.1

10.4.



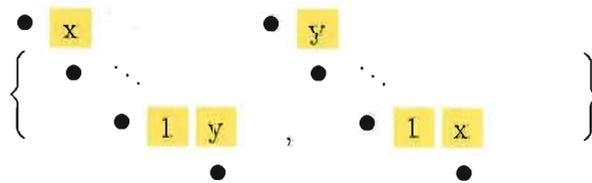
a) 6

b) 10.2, 10.4

c) 10.4

11.

11.1.



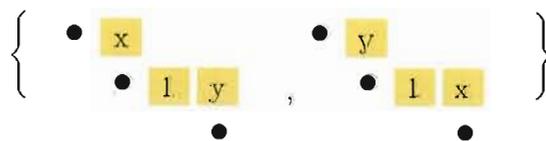
a) 11.1

b) 11.1, 11.3

c) 11.1, 11.4

d) 3

11.2.

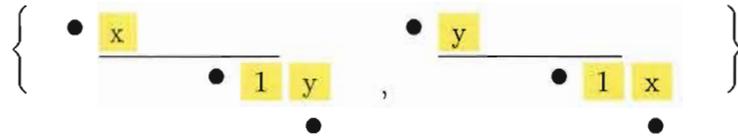


a) 11.3

b) 12

c) 6

11.3.

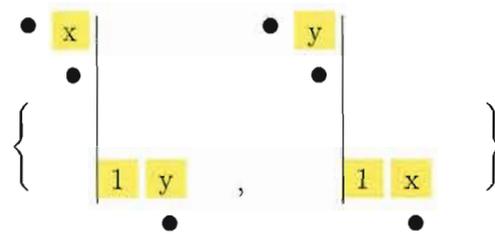


a) 11.3

b) 11.2, 11.3

c) 6

11.4.



a) 11.1.

b) 11.2, 11.4

c) 7

12.

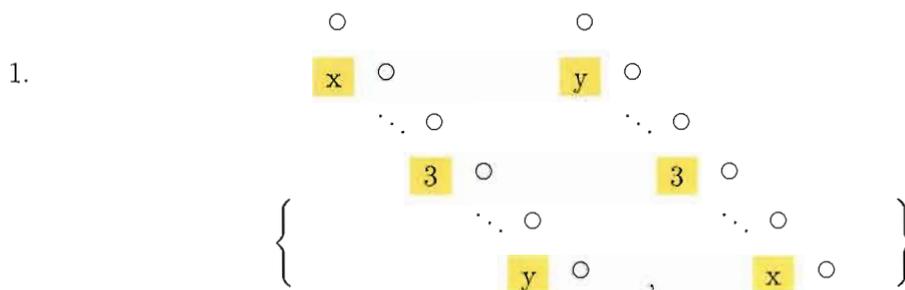


a) 11.2

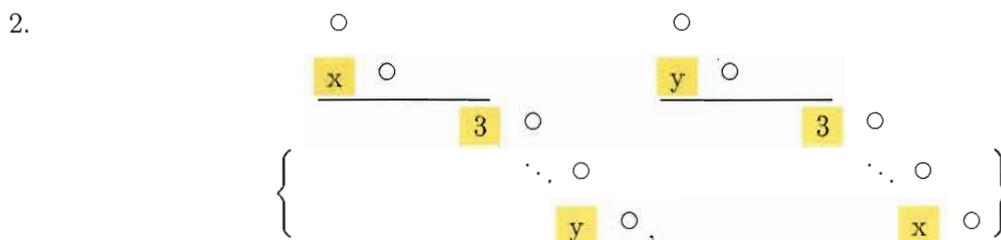
b) 12.2

Glissements supérieurs (paire $x3y-y3x$)

Voici la liste de toutes les paires de tableaux de même forme dont le mot est $x3y$ et $y3x$, où $\{x, y\} = \{1, 2\}$. Chaque paire de tableau est numérotée. Chaque glissement supérieur effectué sur la paire de tableaux est associé à une lettre, en partant du haut de «l'escalier» représentant le tableau, jusqu'en bas. En consultant celle-ci, on peut se rendre à la paire de tableaux résultant du glissement de la paire initiale dans la case associée à la lettre en question. Lorsqu'il y a plusieurs choix possibles, on doit regarder la forme des tableaux initiaux afin de faire le bon choix.

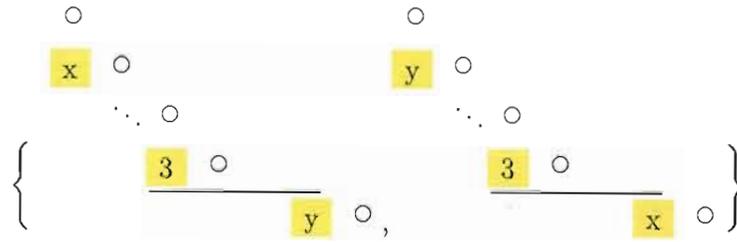


- a) 1 c) 1, 2 e) 1, 3
- b) 1, 4 d) 1, 5 f) 1



- a) 1, 4 c) 2, 6 e) 2
- b) 2, 11.1 d) 2, 8

3.



a) 3

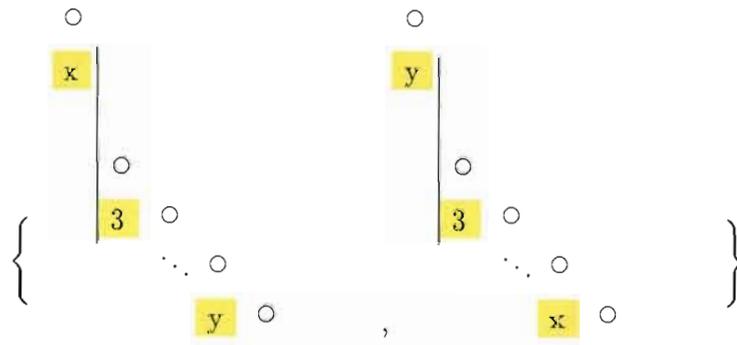
c) 1, 2, 5, 6

e) 3

b) 3, 7

d) 3, 10.1

4.



a) 4

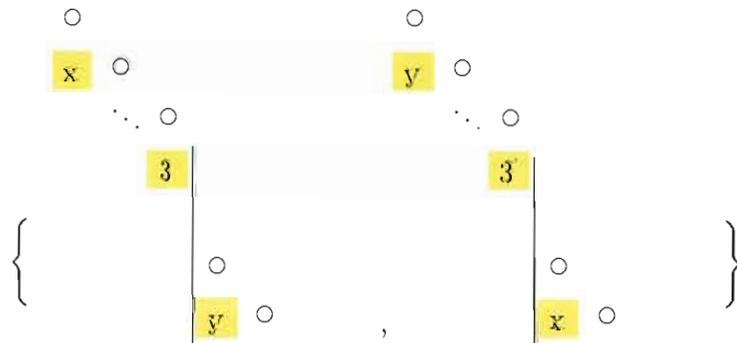
c) 1, 2, 5, 6

e) 4

b) 4, 11.1

d) 4, 7

5.



a) 5

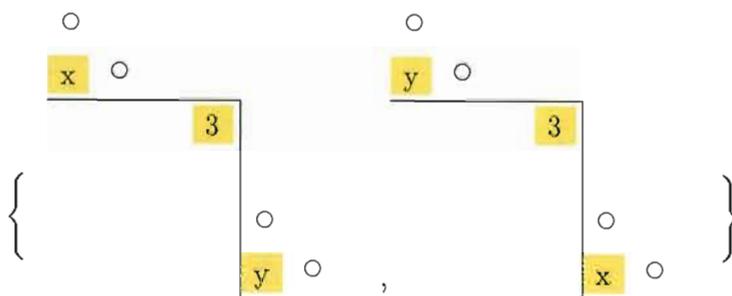
c) 5, 6

e) 1, 3

b) 5, 9

d) 5, 10.1

6.



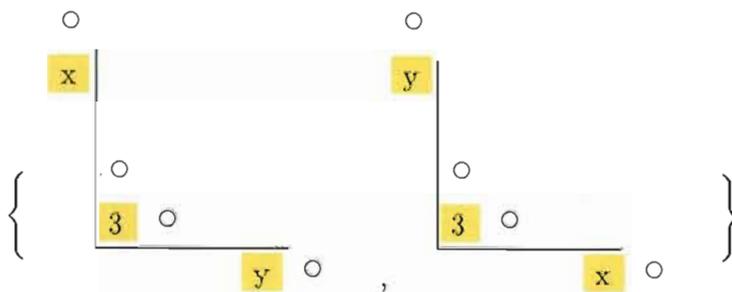
a) 5, 9

b) 6, 11.4

c) 6, 10.3

d) 2, 8

7.



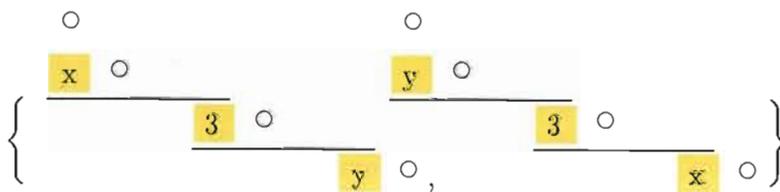
a) 7

b) 4, 7, 11.1

c) 3, 8, 10.1

d) 7

8.



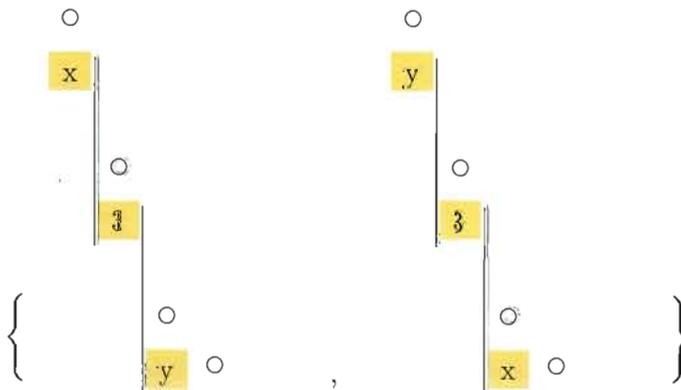
a) 3, 7

b) 8, 11.1

c) 8, 10.3

d) 8

9.



a) 9

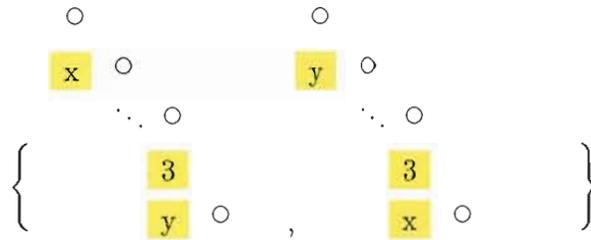
b) 9, 11.4

c) 9, 10.1

d) 4, 7

10.

10.1.



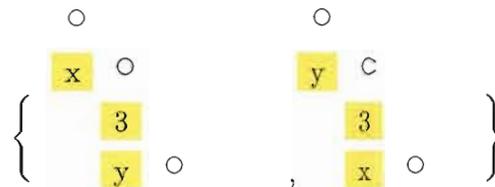
a) 10.1

b) 10.1, 10.4

c) 10.1, 10.3

d) 3

10.2.

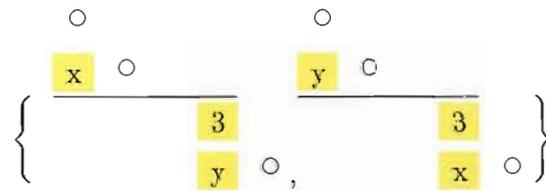


a) 10.4

b) 12

c) 6

10.3.

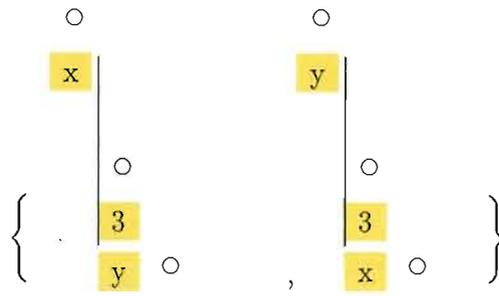


a) 10.1, 10.4

b) 10.3

c) 6

10.4.



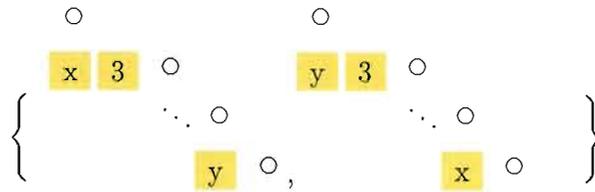
a) 10.4

b) 10.4

c) 7

11.

11.1.



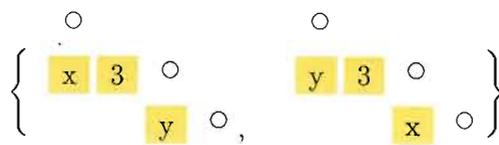
a) 2

b) 11.1, 11.4

c) 11.1, 11.3

d) 11.1

11.2.

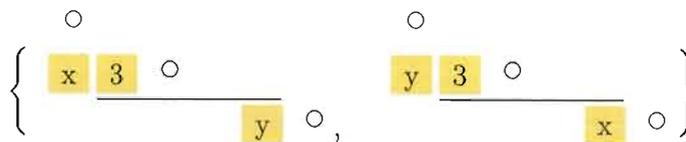


a) 6

b) 12

c) 11.3

11.3.

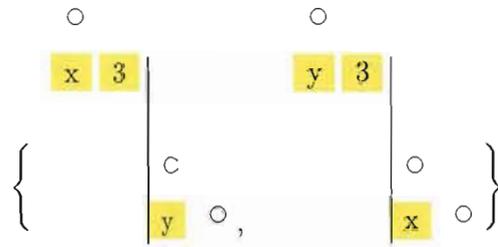


a) 7

b) 11.2, 11.3

c) 11.3

11.4.

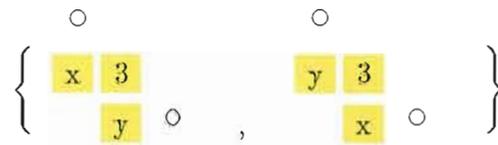


a) 6

b) 11.2, 11.4

c) 11.1, 11.3

12.



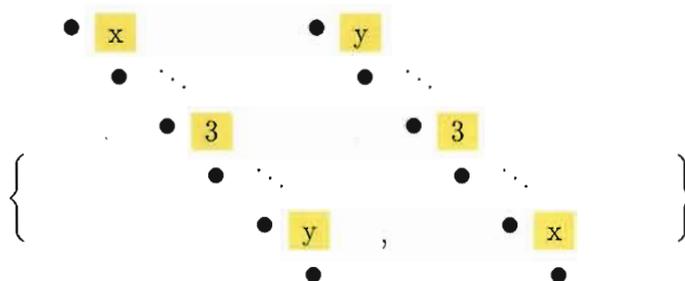
a) 10.2

b) 11.2

Glissements inférieurs (paire $x3y-y3x$)

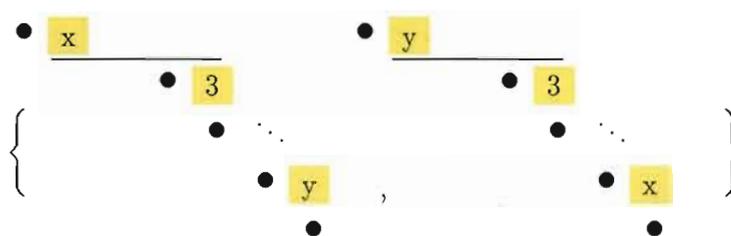
Voici la liste de toutes les paires de tableaux de même forme dont le mot est $x3y$ et $y3x$, où $\{x, y\} = \{1, 2\}$. Chaque paire de tableau est numérotée. Chaque glissement inférieur effectué sur la paire de tableaux est associé à une lettre, en partant du haut de «l'escalier» représentant le tableau, jusqu'en bas. En consultant celle-ci, on peut se rendre à la paire de tableaux résultant du glissement de la paire initiale dans la case associée à la lettre en question. Lorsqu'il y a plusieurs choix possibles, on doit regarder la forme des tableaux initiaux afin de faire le bon choix.

1.



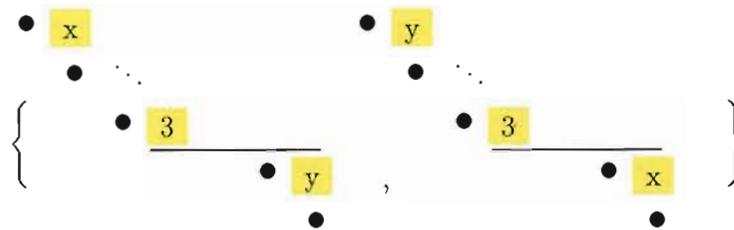
- | | | |
|---------|---------|---------|
| a) 1 | c) 1, 4 | e) 1, 5 |
| b) 1, 2 | d) 1, 3 | f) 1 |

2.



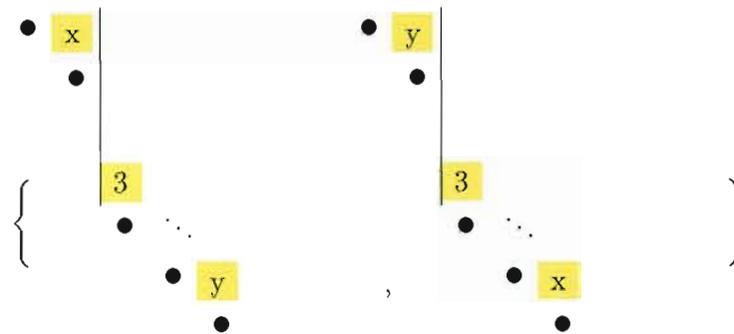
- | | | |
|------------|---------------|------|
| a) 2 | c) 1, 3, 4, 7 | e) 2 |
| b) 2, 11.1 | d) 2, 6 | |

3.



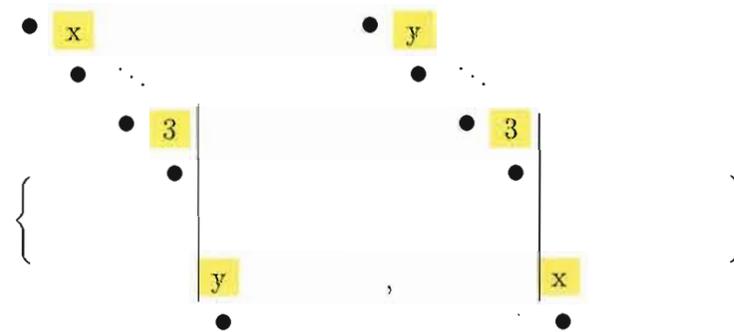
- a) 3
- b) 3, 8
- c) 3, 7
- d) 3, 10.1
- e) 1, 5

4.



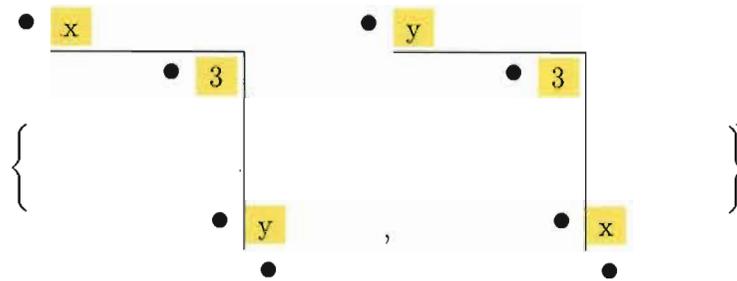
- a) 1, 2
- b) 4, 11.1
- c) 4, 7
- d) 4, 9
- e) 4

5.



- a) 5
- b) 5, 6
- c) 1, 3, 4, 7
- d) 5, 10.1
- e) 5

6.



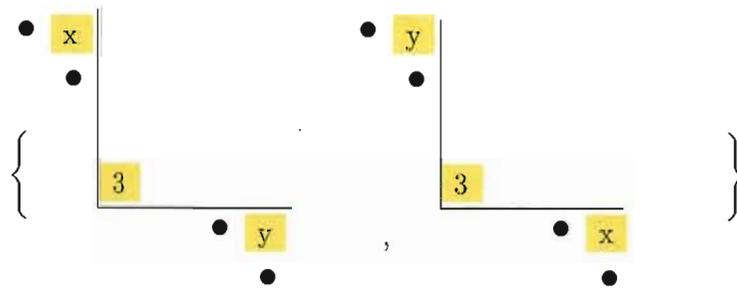
a) 6

b) 2, 8, 11.4

c) 5, 9, 10.4

d) 6

7.



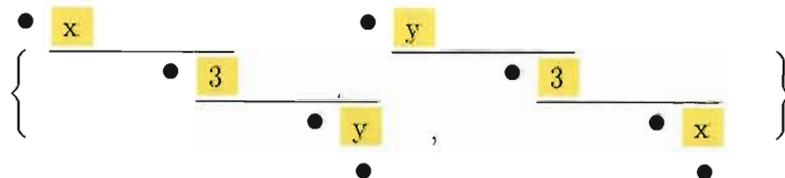
a) 3, 8

b) 7, 11.3

c) 7, 10.4

d) 4, 9

8.



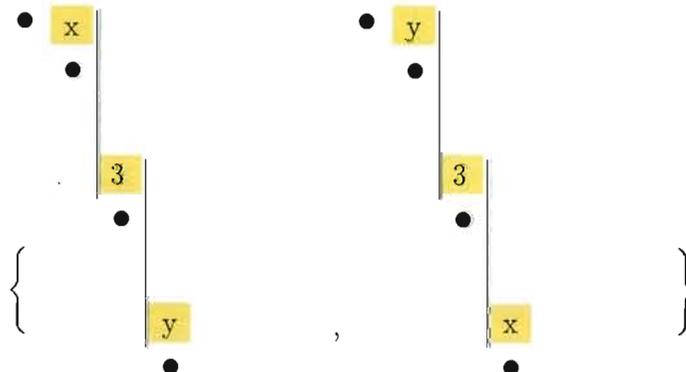
a) 8

b) 8, 11.3

c) 8, 10.3

d) 2, 6

9.



70

a) 5, 6

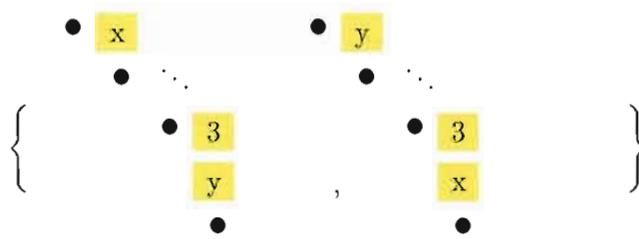
b) 9, 11.4

c) 9, 10.4

d) 9

10.

10.1.



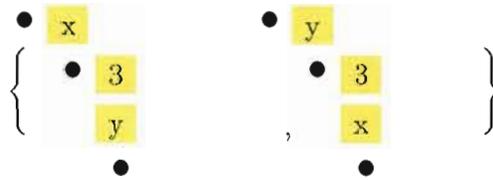
a) 10.1

b) 10.1, 10.3

c) 3, 7

d) 10.1

10.2.

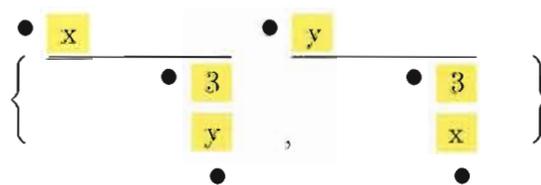


a) 10.3

b) 12

c) 10.4

10.3.

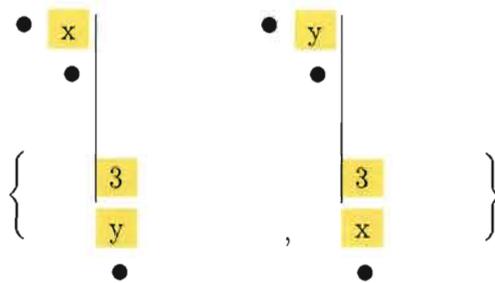


a) 10.3

b) 6

c) 10.1

10.4.



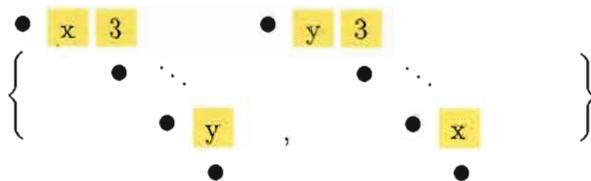
a) 10.1

b) 10.4, 12

c) 10.4

11.

11.1.



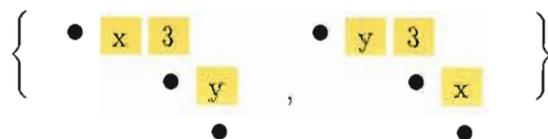
a) 11.1

b) 2, 7

c) 11.1, 11.4

d) 11.1

11.2.

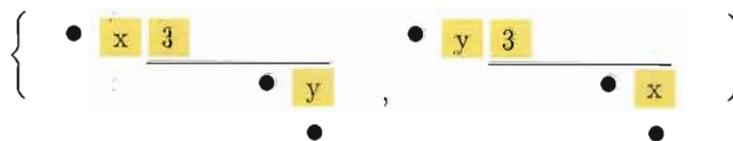


a) 11.3

b) 12

c) 11.4

11.3.

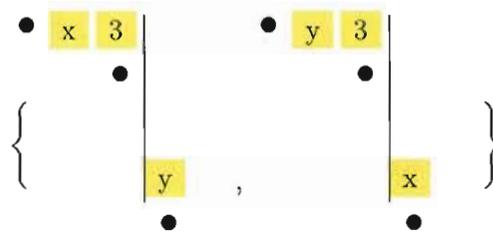


a) 11.3

b) 11.3

c) 11.1, 11.4

11.4.



a) 11.1, 11.3

b) 6

c) 11.4

12.



a) 11.2

b) voir tableau no.12 dans la liste de tableaux «glissements int. (paire x1y-y1x)»

c) 10.2

BIBLIOGRAPHIE

- Bruce E. Sagan, « The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms and symmetric functions », *Wadsworth & Brooks/Cole mathematics series*, 1991 (seconde édition Springer 2001), 119-130
- Christophe Reutenauer, « Le jeu de taquin de Schützenberger », *Gazette des mathématiciens*, 117, 2008, 5-10
- C. Malvenuto, C. Reutenauer, « Evacuation of labelled graphs », *Discrete Mathematics*, 132, 1994, 137-143
- Édouard Lucas, « Récréations Mathématiques », 3e série, Gauthier-Villars, Paris, 1881, p.365
- F. Bergeron, J. Labelle, « Introduction à la combinatoire », notes de cours, 2006, 128-143
- M.-P. Schützenberger, « La correspondance de Robinson », *D. Foata, ed., Combinatoire et Représentation du groupe symétrique - Strasbourg*, 1976, Lecture notes in math, 579 (Springer, Berlin, 1977), 59-113
- Mark Haiman, « Dual equivalence with a conjecture of Proctor », *Discrete Mathematics*, 99, 1992, 79-113
- Pete Littelmann, « Jeu de Taquin et tableaux de Young », *L'Ouvvert*, no 94, 1999, 1-17
- Sergey Fomin, « Knuth equivalence, jeu de taquin and the Littlewood-Richardson rule », *Appendice au livre de R. Stanley, Enumerative Combinatorics*, vol.2, Cambridge univ. Press, 1999

INDEX

- Classe de forme, 42
- Coins inférieurs, 6
- Coins supérieurs, 6
- Diagramme de Ferrers, 3
- Forme, 4
- Forme miniature, 18
- Forme prolongeant une autre forme, 4
- Glissement d'un tableau dans une case,
6
- Glissement inférieur, 7
- Glissement supérieur, 7
- Mot-ligne d'un tableau, 5
- Pilotage d'un tableau par un autre ta-
bleau, 8
- Proposition inverse, 9
- Redresser un tableau, 8
- Redressé d'un tableau, 41
- Suite de glissements, 8
- Tableau, 4
- Tableau anti-normal, 10
- Tableau d'indexation de Schensted, 12
- Tableau d'insertion de Schensted, 12
- Tableau de permutation, 34
- Tableau gauche, 4
- Tableau miniature, 18
- Tableau normal, 4
- Tableau prolongeant un autre tableau, 4
- Tableau standard, 5
- Tableaux dualement équivalents, 15
- Tableaux taquin-équivalents, 8
- Union de deux tableaux, 5
- Équivalence duale élémentaire, 19
- Étiquette d'une case, 5