

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉQUATIONS SUR LES MOTS ET TUILES DOUBLEMENT PAVANTES

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ARIANE GARON

NOVEMBRE 2010

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur Srečko Brlek, pour avoir accepté de travailler avec moi sans me connaître et ce, malgré la distance. Il m'a soutenu dans tous mes projets et m'a fait découvrir le monde fascinant de la recherche, qui me semblait jadis inaccessible. Généreux de ses connaissances et de ses idées, il a été pour moi une source de motivation et un guide exceptionnel.

Merci à mes amis, collègues et co-auteurs Alexandre Blondin-Massé et Sébastien Labbé, qui ont usé d'une patience infinie pour me partager leurs connaissances autant informatiques que mathématiques. Les côtoyer a été une chance inestimable.

Merci aux membres de mon jury, Christophe Reutenauer et Xavier Provençal, pour avoir accepté d'évaluer mon mémoire. Je considère comme un réel privilège d'avoir comme lecteurs des chercheurs aussi compétents et attentifs.

Merci à Lise Tourigny et Jérôme Tremblay, pour leur dévouement et leur bonne humeur légendaire qui irradient au LaCIM.

Merci à Manon Gauthier, pour m'avoir accompagnée avec bienveillance dans toutes mes démarches hasardeuses.

Merci à Olivier Collin, Vestislav Apostolov, Pierre Bouchard et Yeong Nan Yeh pour leurs judicieux conseils.

Merci à Louis-Xavier Proulx et Jean-Phillipe Labbé, qui ont partagé avec moi leur enthousiasme et leur passion pour les mathématiques.

Merci à ma famille d'avoir toujours été là pour moi, tout particulièrement pendant ces deux dernières années. Un merci tout particulier à mon amoureux Yannick Assénat pour son soutien inconditionnel et sa compréhension.

Merci au Conseil de recherche en sciences naturelles et génie du Canada qui m'a soutenu financièrement.

- - - - -

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vii
RÉSUMÉ	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
MOTS ET ÉQUATIONS	5
1.1 Généralités sur les mots	5
1.2 Conjugaison	6
1.3 Périodicité	8
1.4 Palindromicité	9
1.5 Équations sur les palindromes	11
CHAPITRE II	
CHEMINS, POLYOMINOS ET PAVAGES	15
2.1 Chemins	15
2.2 Transformations sur les chemins	17
2.3 Polyominos	23
2.4 Pavage par translation et tuiles	25
2.5 Composition	29
CHAPITRE III	
CHEMINS TRIPLES-CARRÉS	31
3.1 Codage relatif de chemins	32
3.1.1 Nombre d'enroulements	34
3.2 Description des triple-carrés	37
3.3 Réflexions	40
3.4 Preuve du théorème principal	46
CHAPITRE IV	
DOUBLES CARRÉS	49
4.1 Solutions admissibles	50

4.2	Réduction de solutions	57
4.2.1	Opérateurs de réduction	57
4.2.2	Algorithme de réduction	62
4.3	Génération de solutions admissibles.	66
4.4	Remarques et problèmes ouverts	71
	CONCLUSION	75
	BIBLIOGRAPHIE	77

LISTE DES FIGURES

1.1	Représentation du mot circulaire $[m_0m_1 \cdots m_9]$	7
2.1	(a) Les quatre déplacements élémentaires sont codés par $\{0, 1, 2, 3\}$. (b) Un chemin m (c) représenté par le mot $m = \mathbf{01012223211}$	16
2.2	(a) Un chemin simple $m_1 = \mathbf{01012223211}$, (b) un chemin fermé $m_2 = \mathbf{0033301012223211}$, (c) un chemin simple et fermé $m_3 = \mathbf{010122232300}$ et (d) le chemin circulaire $[m_3]$	17
2.3	Le chemin $m = 01012223211$ et ses rotations $\rho(m)$, $\rho^2(m)$ et $\rho^3(m)$	18
2.4	Le mot $m = 01012223211$ et les symétries $\sigma_0(m)$, $\sigma_1(m)$ et $\sigma_2(m)$	19
2.5	Les chemins homologues (a) $m = 01012223211$ et (b) $\hat{m} = 33010003232$	19
2.6	Un polyomino, son bord et l'un de ses chemins de contour.	24
2.7	Translaté d'un polyomino	25
2.8	Une tuile P et l'un de ses pavages par translation	26
2.9	Pavage non-régulier du plan par translation du rectangle 3×1	26
2.10	Un pseudo-carré et un pseudo-hexagone.	27
2.11	Deux pavages du plan.	28
2.12	Multifactorisations.	28
2.13	Composition du polyomino P avec le pseudo-carré \mathcal{C}	30
3.1	Un chemin et ses trois factorisations de type pseudo-carré.	31

3.2	(a) Un chemin $m = \mathbf{01012223211}$ (b) et la représentation de $\Delta m = \mathbf{1311001330}$	32
3.3	(a) Un chemin m et (b) son chemin réduit r	36
3.4	Les trois factorisations de T	38
3.5	Le passage d'un "côté" à un autre sur un pseudo-carré s'effectue nécessairement par un virage à gauche.	39
3.6	Les trois factorisations de $\Delta(T)$	39
3.7	La réflexion s centrée en u et v	41
3.8	(a) Application de s_1 à x_i et y_i et (b) application de s_3 sur les mêmes x_i et y_i	43
3.9	Factorisation de $\Delta(Y) = \Delta(Y_1)\Delta(Y_2)\Delta(Y_3)$	44
3.10	Lien entre les lettres de x et de y sous l'action de s_3 . Lorsque $x_i = y_i$, nous avons que $x_{s_3(i)} = \sigma_0(x_i)$ et $y_{s_3(i)} = \sigma_0(y_i)$	45
3.11	Les trois réflexions agissant sur x , où $n = 30$, $d = 3$, $e = 5$, $ A = 17$, $ X = 17$ et $ W = 15$	47
4.1	(a) Une tuile de Christoffel, ses deux factorisations distinctes en pseudo-carré et les deux pavages ainsi générés. (b) Une tuile de Fibonacci, ses deux factorisations distinctes en pseudo-carré et les deux pavages ainsi générés.	49
4.2	Décomposition plus fine d'un double carré.	50
4.3	Un double carré D avec ses deux BN-factorisations et une de ses solutions admissibles.	51
4.4	Un double carré et ses facteurs périodiques.	53

4.5	Représentation de $S = (0, 12101210, 121, 21, 2, 30323032, 303, 03)$. . .	56
4.6	Opérateurs ÉCHANGE et COUPE.	58
4.7	Opérateurs P-COUBE et S-COUBE.	59
4.8	La croix \oplus	63
4.9	Réduction d'un double carré à la croix.	66
4.10	Deux façons différentes de générer le même double carré. Le diagramme commute en vertu de la Proposition 24 (iii) et (iv).	69

RÉSUMÉ

Ce travail se consacre principalement à l'étude d'équations sur les mots ainsi qu'à leur application en géométrie discrète. Comme le rappelle Freeman en 1961, tout chemin dans le plan discret, que l'on peut voir comme une liste de déplacements parmi $\{\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow\}$, peut être représenté par un mot pour lequel chaque lettre représente l'un des quatre déplacements élémentaires possibles. Ce point de vue offre entre autre la possibilité de décrire plusieurs objets de la géométrie discrète, tels les polyominos par exemple, en termes d'équations sur les mots. Dans cet ouvrage, nous utilisons cette correspondance pour étudier les pavages du plan par translation dont il est bien connu qu'il en existe deux réguliers : les pavages hexagonaux et les pavages carrés. Ce résultat important fut établi par Beauquier et Nivat et a permis d'étudier les pavages du point de vue algorithmique. Une classe importante est apparue naturellement, à savoir celle des polyominos qui pavent le plan par translation de plusieurs manières. Alors qu'il existe des polyominos pavants à la manière d'un hexagone d'un nombre arbitraire de façons, il en est tout autrement pour le cas des carrés : nous présentons et résolvons la conjecture selon laquelle un polyomino pave comme un carré d'au plus deux façons, puis nous étudions plus en détail la structure de ces derniers. Puisque les contours sont codés sur un alphabet fini, la combinatoire des mots s'impose comme l'outil principal pour traiter ces problèmes de nature géométrique.

INTRODUCTION

La combinatoire des mots constitue la branche des mathématiques qui étudie les mots, leur structure, les équations où ils interviennent, de même que certaines statistiques les concernant. Cette spécialité, qui a considérablement évolué avec l'avènement de l'ère informatique, soulève des problèmes profonds vu le peu d'axiomes que satisfont les mots : l'ensemble des mots sur un alphabet \mathcal{A} muni de la concaténation constitue un simple monoïde. Ainsi, les équations sur les mots, même élémentaires, sont souvent difficilement résolubles et constituent en soi un intéressant sujet d'étude.

Malgré cette complexité, la non commutativité de ses éléments présente l'avantage qu'elle appelle à la notion de "sens" sur les mots : leur sens de lecture. Cette propriété suggère un parallèle naturel entre les concepts de mot et de chemin (orienté) dans le plan discret $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, comme le fait remarquer (Freeman, 1961). En effet, codant par les lettres de l'alphabet $\mathcal{F} = \{0, 1, 2, 3\}$ les déplacements unitaires respectifs $\{\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow\}$, la lecture séquentielle de tout mot m sur l'alphabet \mathcal{F} se traduit par le parcours d'un chemin orienté dans le plan. Cette analogie établit une liaison fondamentale entre les mondes de la combinatoire des mots et de la géométrie discrète.

L'intérieur d'un chemin simple et fermé, codé par le mot m , constitue le polyomino P de bord m , ce que nous écrivons $b(P) \equiv m$. Le symbole \equiv souligne simplement que le point de départ du chemin n'a pas d'importance, celui-ci étant fermé. En d'autres termes, les polyominos réalisent l'équivalent discret des figures connexes et sans trou. Il convient de souligner que si on parcourt le chemin codé par m en sens inverse, on obtient un chemin noté \widehat{m} qui définit également P , ce qui impose de choisir un sens de parcours, horaire ou anti-horaire, pour assurer une bijection adéquate.

Les *tuiles* constituent une famille particulièrement intéressante de polyominos, possédant

la propriété de paver le plan par translation : elles apparaissent dans de nombreux domaines de la science, telle la chimie (structure des quasi-cristaux), l'informatique (structures de données) et l'art. Par exemple, les considérations esthétiques des temps anciens ont poussé les hommes à construire des pavages distinctifs, dont la classification mathématique n'a été établie que beaucoup plus tard. Plus récemment, l'art d'Escher a fourni une riche moisson de pavages qui s'avèrent également fondamentaux.

Utilisant les travaux de (Wijshoff et van Leeuwen, 1984) sur la régularité des pavages obtenus par translation d'une tuile unique, il est connu depuis (Beauquier et Nivat, 1991) que le bord d'une telle tuile P se factorise en trois paires de chemins homologues, soit

$$b(P) \equiv ABC\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}.$$

Dans cette factorisation, une seule variable parmi A , B et C peut être vide, auquel cas la tuile P est appelée *pseudo-carré*, sinon elle est appelée *pseudo-hexagone*. Rappelons que les mots m et \widehat{m} codent le même chemin à sens de parcours près.

Dans ce travail, nous nous intéressons entre autre au nombre possible de factorisations en pseudo-carré que peut posséder une tuile, ainsi qu'à la structure imposée par une telle double-factorisation. Pour ce faire, nous utilisons toute la puissance de la combinatoire des mots en traduisant ces questions de nature géométrique en termes d'équations sur les mots.

Ce mémoire est subdivisé en quatre chapitres. Dans le Chapitre 1, nous rappelons les concepts fondamentaux de la combinatoire des mots et présentons d'importants éléments de structure qu'on y retrouve, soit la périodicité et la palindromicité. Nous parsemons le dialogue d'exemples d'équations connues imposant une structure (périodique ou palindromique) à ses solutions. Nous présentons enfin quelques résultats traitant d'équations multiples impliquant la superposition de plusieurs palindromes. Certains d'entre eux ont été présentés au cours de la 7ème conférence internationale biennale "Words" en 2009.

Dans la première partie du Chapitre 2, nous dressons un bref portrait des éléments

de géométrie discrète qui nous seront utiles par la suite, et ce en termes de codage de Freeman des chemins. Nous présentons quelques transformations de base définies sur ceux-ci : rotations, symétries et parcours inversé. Dans la seconde partie, nous abordons la question des polyominos pavant le plan par translation et présentons plus en détail leur caractérisation donnée par Beauquier et Nivat en termes d'équations sur les mots (Beauquier et Nivat, 1991).

Dans le Chapitre 3, nous démontrons une conjecture émise par Brlek, Fédou, Dulucq et Provençal en 2007 selon laquelle il n'existe pas de polyominos possédant trois factorisations distinctes en pseudo-carré. Pour ce faire, nous présentons une nouvelle interprétation géométrique des mots sur $\{0, 1, 2, 3\}$ par des déplacements dits relatifs. Nous traduisons ensuite la caractérisation de Beauquier et Nivat en ces termes, qui font apparaître une nouvelle contrainte dans l'écriture des pseudo-carrés. Enfin, nous démontrons par contradiction le résultat, en exploitant les diverses propriétés de symétrie apparaissant grâce aux multiples factorisations. Les résultats de ce chapitre ont été présentés à la 7ème conférence internationale "Lattice Paths" en 2010.

Dans le Chapitre 4, nous étudions les solutions aux équations de type $AB\widehat{A}\widehat{B} \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$ dites admissibles, i.e. celles qui peuvent potentiellement coder des polyominos. Nous en déduisons des propriétés de périodicité locale, que nous utilisons pour définir des opérateurs inversibles agissant sur les solutions admissibles. Nous obtenons de ceux-ci des algorithmes de réduction et de génération de solutions, qui ouvrent une voie intéressante à la résolution d'une conjecture émise dans la thèse de (Provençal, 2008). Les résultats constituant ce dernier chapitre ont fait l'objet d'un exposé lors de la 7ème conférence internationale GASCom en 2010.

La plupart des résultats nouveaux de ce mémoire sont le fruit d'un travail effectué en collaboration avec Alexandre Blondin-Massé et Sébastien Labbé, sous la direction de Srećko Brlek.

CHAPITRE I

MOTS ET ÉQUATIONS

Les notations introduites ci-après sont empruntées de M. Lothaire, un collectif d'auteurs, qui a constitué les fondements de la combinatoire des mots (Lothaire, 1983).

1.1 Généralités sur les mots

Un **alphabet** \mathcal{A} est un ensemble fini dont les éléments sont appelés **lettres**. Un **mot** m sur \mathcal{A} est une suite de lettres $m : [0..n] \rightarrow \mathcal{A}$ où $n \in \mathbb{N}$. La **longueur** de m est $|m| = n + 1$ et la i^{eme} lettre de m est notée m_i ou $m[i]$. Nous désignons par $|m|_\alpha$ le nombre d'occurrences de la lettre α dans m . L'ensemble des mots de longueur n sur \mathcal{A} est noté \mathcal{A}^n . L'ensemble $\cup_{n \geq 0} \mathcal{A}^n$ de tous les mots de longueur finie sur \mathcal{A} muni de l'opération de concaténation forme le monoïde libre \mathcal{A}^* . L'élément neutre de \mathcal{A}^* est le **mot vide** ε , de longueur $|\varepsilon| = 0$. Il est d'usage de désigner l'ensemble des mots non vides par $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$.

Il est toujours possible d'écrire un mot m comme $m = pfs$ où $p, f, s \in \mathcal{A}^*$ sont possiblement vides. Les mots p , f et s sont respectivement appelés **préfixe**, **facteur** et **suffixe** de m . Lorsque ces derniers ne sont pas égaux à m , ils sont de plus dits **propres**. L'ensemble de tous les préfixes (resp. facteurs, suffixes) de m est noté $\text{Pref}(m)$ (resp. $\text{Fact}(m)$, $\text{Suff}(m)$). Plus spécifiquement, le préfixe de m de longueur d est noté $\text{Pref}_d(m) = \text{Pref}(m) \cap \mathcal{A}^d$. De façon similaire, $\text{Suff}_d(m)$ désigne le suffixe de m de longueur d et $\text{Fact}_d(m)$ désigne l'ensemble de tous les facteurs de m de longueur d .

Exemple 1. Soit $m = abcbb$ un mot sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$. Alors, $m \in \mathcal{A}^+$. Nous avons $abc \in \text{Pref}(m)$, $bb \in \text{Suff}(m)$ et $cb \in \text{Fact}(m)$. Plus précisément, $abc = \text{Pref}_3(m)$, $bb = \text{Suff}_2(m)$ et $cb \in \text{Fact}_2(m)$. Enfin, ce sont tous des facteurs propres de m .

Soit m et s deux mots. Alors

$$m(s)^{-1} = \begin{cases} m' & \text{si } m = m's; \\ m & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'expression $m(s)^{-1}$ désigne donc le mot obtenu de m après la suppression de son suffixe s lorsqu'il existe. Le mot $p^{-1}m$ est défini de façon similaire.

Exemple 2. Toujours avec le mot $m = abcbb$, nous avons que $m(bb)^{-1} = abc$ mais que $m(bbb)^{-1} = m$. De même, $a^{-1}m = bcbb$ mais $b^{-1}m = m$.

Étant donné deux alphabets \mathcal{A} et \mathcal{B} , un **morphisme** $f : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{B}^*$ est une fonction compatible avec la concaténation, c'est-à-dire qui vérifie la propriété

$$\forall x, y \in \mathcal{A}^*, f(xy) = f(x)f(y).$$

En particulier, un morphisme est entièrement déterminé par son image sur les lettres de \mathcal{A} . De même, f est un **antimorphisme** si

$$\forall x, y \in \mathcal{A}^*, f(xy) = f(y)f(x).$$

Un exemple classique d'antimorphisme provient de la fonction miroir $\tilde{\cdot} : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$ définie sur tout mot $m = m_0m_1 \cdots m_n$ par $\tilde{m} = m_n \cdots m_1m_0$. En d'autres termes, l'**image miroir** \tilde{m} de m est le mot obtenu en lisant m de droite à gauche. L'antimorphisme $\tilde{\cdot}$ s'avère très utile, comme nous le verrons par la suite.

1.2 Conjugaison

Soit m et m' deux mots de \mathcal{A}^* . Nous dirons que m est **conjugué** à m' , noté $m \equiv m'$, s'il existe deux mots $u, v \in \mathcal{A}^*$ tels que $m = uv$ et $m' = vu$. Clairement, la relation de conjugaison \equiv est une relation d'équivalence. Étant donné un mot $m \in \mathcal{A}^*$,

nous noterons $[m] = \{xmx^{-1} \mid x \in \text{Suff}(m)\}$ sa classe d'équivalence sous la relation de conjugaison. Il convient de représenter les classes en écrivant le mot sur un cercle, donc sans extrémités définies, et pour cette raison les classes $[m] \in A^*/\equiv$ sont communément appelées **mots circulaires**. Les concepts définis sur les mots peuvent généralement s'étendre aux mots circulaires. Par exemple, nous définissons l'ensemble $\text{Fact}([m]) = \text{Fact}(m) \cup \{yx \mid m = xfy\}$. Les notions de préfixe et de suffixe perdent cependant toute signification dans le contexte des mots circulaires.

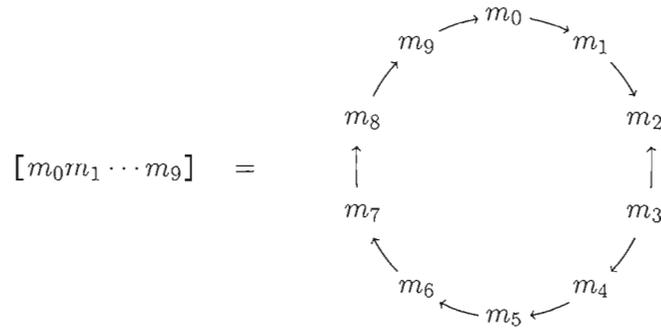


Figure 1.1: Représentation du mot circulaire $[m_0m_1 \cdots m_9]$.

Nous dirons que deux mots m et m' sont conjugués **avec délai** d , que nous noterons $m \equiv_d m'$, si et seulement si $m = uv$ et $m' = vu$ avec $|u| \equiv d \pmod{|m|}$. Par exemple, les mots $m = abcbbc$ et $m' = bbcabc$ satisfont $m \equiv_3 m'$. La relation $\equiv_{|u|}$ n'est, quant à elle, pas une relation d'équivalence puisqu'elle n'est pas symétrique. En effet, par définition, nous avons que $m \equiv_d m'$ si et seulement si $m' \equiv_{|m|-d} m$. La notion de conjugaison avec délai est toutefois intéressante du fait qu'elle contient l'information sur la décomposition de m et m' . Par exemple, le comportement de la conjugaison par transitivité devient clair lorsque l'on observe l'évolution des délais associés.

Lemme 1. *Si $x \equiv_{d_1} y$ et $y \equiv_{d_2} z$, alors $x \equiv_{d_1+d_2} z$.*

Il sera parfois pratique de travailler avec un délai négatif. Ainsi, pour un nombre naturel d , nous posons que $m' \equiv_{-d} m$ si et seulement si $m \equiv_d m'$.

1.3 Périodicité

Étant donné un mot $m = m_0m_1 \cdots m_n$ de \mathcal{A}^* , $p \in \mathbb{N}_+$ est une **période** de m si $m_i = m_{i+p}$ pour $i \in [0..n-p]$. Selon cette définition, tout entier $p \geq |p|$ constitue une période de m . Nous dirons alors de m qu'il est **périodique**. Rien n'empêche un mot m de posséder plus d'une période. Le théorème suivant, dû à Fine et Wilf, qu'on trouve sous sa forme combinatoire des mots par exemple dans (Lothaire, 2005), exprime le fait que la présence de deux périodes dans un même mot impose parfois celle d'une troisième qui peut être plus petite.

Théorème 1. (Fine et Wilf, 1965) Soit m un mot ayant deux périodes p et q . Si $|m| \geq p + q - \text{pgcd}(p, q)$, alors $\text{pgcd}(p, q)$ est aussi une période de m .

Il existe plusieurs liens qui unissent les notions de périodicité et de conjugaison. D'abord notons que si m est périodique de période p , alors toute paire de facteurs $x, y \in \text{Fact}_p(m)$ vérifie la relation $x \equiv y$. La proposition suivante nous informe de plus qu'un mot m non trivialement conjugué à lui-même est de la forme $m = t^n$ avec $n \geq 2$, donc périodique.

Proposition 1 (Lothaire, 1983). Soit deux mots non vides $x, y \in \mathcal{A}^+$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) x et y commutent, i.e. $xy = yx$;
- (ii) il existe $i, j \in \mathbb{N}^+$ et $t \in \mathcal{A}^*$ tels que $x = t^i$ et $y = t^j$.

Ce résultat suffit pour les besoins de ce mémoire. Il est cependant intéressant de souligner qu'il se généralise en un premier temps en remplaçant la condition

$$(i) \ xy = yx \text{ par } (i') \text{ ''}xu = yv \text{ où } u, v \in \{x, y\}^* \text{''}.$$

Il s'étend aussi au cas de trois mots non vides de la façon suivante :

Si trois mots $x, y, z \in \mathcal{A}^+$ satisfont deux équations distinctes, alors il existe $i, j, k \in \mathbb{N}^+$ et $t \in \mathcal{A}^+$ tels que $x = t^i$, $y = t^j$ et $z = t^k$.

Cette dernière hypothèse signifie que les deux équations sont de la forme

$$\left. \begin{array}{l} x\alpha = y\beta \\ y\gamma = z\delta \end{array} \right\} \text{ où } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{x, y, z\}^+.$$

Le lecteur intéressé trouvera plus d'informations sur ces résultats dans (Karhumäki, 2004). Il n'est cependant pas nécessaire pour trois mots x , y et z de satisfaire deux relations pour obtenir de l'information sur leur structure périodique. Le résultat suivant présente un exemple d'équation simple qui, lorsque satisfaite par trois mots, fournit de nombreuses informations sur leur structure.

Proposition 2 (Lothaire, 1983). *Soit x, y et z trois mots non vides tels que $xy = yz$. Alors il existe deux mots u, v et $i \in \mathbb{N}$ tels que $x = uv$, $y = (uv)^i u$ et $z = vu$.*

En particulier, $xy = yz$ est périodique de période $|x| = |z|$. Nous verrons par la suite que cette équation revient fréquemment dans les problèmes de résolution d'équations sur les mots. Par exemple, elle a pour conséquence immédiate le résultat suivant.

Corollaire 1. *Soit $x, y, z \in \mathcal{A}^+$ tels que $m = xyz = zyx$. Alors $|xy|$, $|zy|$ et $\text{pgcd}(|xy|, |zy|)$ sont des périodes de m .*

Démonstration. Par hypothèse, nous avons

$$xy \cdot zy = xyz \cdot y = zyx \cdot y = zy \cdot xy$$

qui est de la forme $ab = ba$. Il existe donc un mot p , et deux entiers i et j tels que $a = p^i$ et $b = p^j$ (Proposition 1), i.e. $xy = p^i$ et $zy = p^j$. Il s'en suit que $|p|$ divise à la fois $|xy|$ et $|zy|$, et donc aussi $\text{pgcd}(|xy|, |zy|)$. ■

1.4 Palindromicité

Un autre élément de structure intéressant à étudier dans les mots est la palindromicité. Soit $m = m_0 m_1 \cdots m_n$ un mot sur l'alphabet \mathcal{A} . Nous dirons d'un mot m qu'il est un **palindrome** si $m = \tilde{m}$. L'ensemble de tous les palindromes de \mathcal{A}^* est noté $\text{Pal}(\mathcal{A}^*)$,

et ceux de longueur d sont désignés par $\text{Pal}_d(\mathcal{A}^*) = \text{Pal}(\mathcal{A}^*) \cap \mathcal{A}^d$. Par convention, $\varepsilon = \text{Pal}_0(\mathcal{A}^*)$. Nous définissons enfin la fonction $\text{LPS} : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ qui associe à un mot son plus long suffixe palindromique. Celle-ci est bien définie puisque tout mot m possède toujours le mot vide comme suffixe, qui est un palindrome. Clairement, un mot m est un palindrome si et seulement si $\text{LPS}(m) = m$.

Exemple 3. Nous avons que $aba \in \text{Pal}_3(\mathcal{A}^*)$, $abccba \in \text{Pal}_6(\mathcal{A}^*)$ et $abbba \in \text{Pal}_5(\mathcal{A}^*)$ sont des palindromes, où $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$. De plus, $\text{LPS}(abcaac) = caac$, $\text{LPS}(aaab) = b$ et $\text{LPS}(abcba) = abcba$.

Sous certaines conditions, il arrive que la présence de périodicité dans un mot permette de propager (ou d'étendre) la palindromicité de certains de ses facteurs. La proposition suivante en est un exemple intéressant.

Proposition 3. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) *Soit $x, y, z \in \mathcal{A}^+$ tels que $m = xy = yz$ et soient $u, v \in \mathcal{A}^*$, $i \geq 0$ tels que définis dans la Proposition 2. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) $x = \tilde{z}$;
- (ii) u et v sont des palindromes ;
- (iii) m est un palindrome ;
- (iv) xyz est un palindrome.

De plus, si l'une des conditions ci-dessus est satisfaite, alors

- (v) y est un palindrome.

Il arrive aussi que la situation inverse soit vraie ; c'est-à-dire que la présence de palindromes dans un mot y induise la périodicité.

Corollaire 2. (Blondin Massé et al., 2008) *Supposons que $m = xp = qz$ où p et q sont des palindromes avec $|q| > |x|$. Alors m est périodique de période $|x| + |z|$ et $x\tilde{z}$ est le produit de deux palindromes.*

Comme pour la périodicité, la palindromicité est un élément de structure qui apparaît lors de la résolution d'équations sur les mots. Elle apparaît plus spécifiquement lorsque les équations étudiées font intervenir des mots et leur image miroir, ou encore d'autres palindromes. Si les deux résultats précédents sont les exemples les plus fondamentaux de telles équations, il en existe plusieurs autres d'intérêt. Nous présentons ici les équations et paires d'équations qui ont particulièrement attiré notre attention.

1.5 Équations sur les palindromes

Les prochains résultats sont tirés du mémoire de Sébastien Labbé (Labbé, 2008). La présentation que nous en faisons ici est considérablement simplifiée, et basée sur le lemme suivant. Celui-ci peut être considéré comme un cas particulier de la Proposition 3 ne faisant pas intervenir de périodicité.

Lemme 2. *Soit $m = \tilde{y}p = qy$ tel que $p, q \in \text{Pal}(\mathcal{A}^*)$. Alors $m \in \text{Pal}(\mathcal{A}^*)$.*

Démonstration. Considérons la suite d'égalités suivante : $\tilde{y} \tilde{y} \tilde{m} = \tilde{y} \tilde{y} p y = \tilde{y} q y y = \tilde{m} y y$. Comme l'égalité $\tilde{y} \tilde{y} \cdot \tilde{m} = \tilde{m} \cdot y y$ est de la forme $ab = bc$ où $a = \tilde{c}$ et $b = \tilde{m}$, il suit de la Proposition 3 que m est un palindrome. ■

Proposition 4. *Soit $x, y, p, s \in \mathcal{A}^*$ et soit $v, w \in \text{Pal}(\mathcal{A}^*)$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i) *si $xs = pv$ et $\tilde{x}s = pw$, alors x est un palindrome ;*
- (ii) *si $xs = py$ et $\tilde{x}s = p\tilde{y}$, alors x et y sont des palindromes ;*
- (iii) *si $sx = vp$ et $s\tilde{x} = wp$, alors x est un palindrome.*

Démonstration. (i) Par hypothèse, nous pouvons écrire $\tilde{s}pv = \tilde{s}xs = \tilde{w}\tilde{p}s$. Les hypothèses du Lemme 2 sont alors satisfaites avec $y = \tilde{p}s$ de telle sorte que nous pouvons déduire que $\tilde{s}xs$ est un palindrome, et donc x aussi.

(ii) Écrivons cette fois $\tilde{s} \cdot py = \tilde{s}xs = y\tilde{p} \cdot s$. Si $|y| > 0$, cette équation est de la forme $uy = y\tilde{u}$ avec $u = \tilde{s}p$. Alors la Proposition 3 (i) et (iii) s'applique de telle sorte que $\tilde{s}xs$

est un palindrome et donc x aussi. Si $|y| = 0$, l'équation s'écrit $xs = p = \tilde{x}s$ et x est palindrome.

(iii) Prenant l'image miroir de chacune des égalités, les hypothèses du point (i) sont vérifiées. ■

Corollaire 3. *Soit $x, y, p, s \in \mathcal{A}^*$, et $v, w \in \text{Pal}(\mathcal{A}^*)$. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (i) *Si $sx = pv$ et $s\tilde{x} = pw$, alors x est un palindrome ;*
- (ii) *Supposons que $|p| \neq |s|$. Si $sx = py$ et $s\tilde{x} = p\tilde{y}$, alors x et y sont des palindromes.*

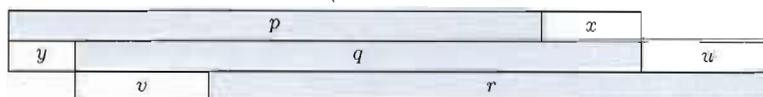
Démonstration. (i) Si $|p| > |s|$, alors il existe $p' \neq \varepsilon$ tel que $x = p'v$ et $\tilde{x} = p'w$. Nous concluons alors directement de la Proposition 4 (i) que x est un palindrome. Maintenant, si $|p| < |s|$, alors il existe $s' \neq \varepsilon$ tel $s'x = v$ et $s'\tilde{x} = w$. La Proposition 4 (iii) s'applique alors, et x est un palindrome.

(ii) Considérons sans perte de généralité que $|p| > |s|$. Alors il existe $p' \neq \varepsilon$ tel que $x = p'y$ et $\tilde{x} = p'\tilde{y}$. Le résultat découle alors directement de la Proposition 4 (ii). ■

Nous avons vu au Corollaire 2 que lorsque deux palindromes se superposent, alors le mot ainsi formé contient nécessairement une période. Les résultats suivants montrent que sous certaines conditions, cette propriété de périodicité s'étend à la superposition de trois palindromes.

Proposition 5. *Soit $m = p \cdot xu = y \cdot q \cdot u = yv \cdot r$ où p, q et r sont des palindromes avec $|q| > |x|$ et $|q| > |v|$. Soit $a = |x| + |y|$ et $b = |u| + |v|$. Si $|q| \geq a + b - \text{pgcd}(a, b)$, alors $\text{pgcd}(a, b)$ est une période de m .*

Démonstration. Les positions relatives de p, q et r sont illustrées ci-dessous. Soulignons



tout d'abord que les deux équations $yq = px$ et $vr = qu$ sont de la même forme que celle traitée au Corollaire 2, duquel nous déduisons que yq et qu possèdent respectivement

$a = |x| + |y|$ et $b = |u| + |v|$ pour périodes. Comme q en particulier possède les deux périodes et que $|q| \geq a + b - \text{pgcd}(a, b)$ par hypothèse, le Théorème de Fine et Wilf s'applique de telle sorte que $\text{pgcd}(a, b)$ est aussi une période de q . Enfin, l'hypothèse $|q| \geq a + b - \text{pgcd}(a, b)$ implique aussi que $|q| \geq a$ et $|q| \geq b$, et donc que yq et qu ont eux aussi $\text{pgcd}(a, b)$ comme période. Ainsi, $m = yqu$ est périodique de période $\text{pgcd}(a, b)$. ■

Si nous renforçons les hypothèses en supposant que q et r sont les plus longs suffixes palindromiques, nous obtenons davantage de restrictions sur les longueurs possibles de a et de b . L'énoncé suivant utilise les notations introduites précédemment.

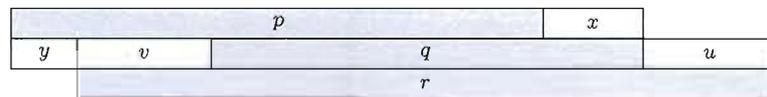
Corollaire 4. *Supposons que $q = \text{LPS}(px)$ ou $r = \text{LPS}(qu)$, où $|x| > 0$ et $|v| > 0$. Si $|q| \geq a + b - 1$, alors $\text{pgcd}(a, b) \neq 1$.*

Démonstration. Par la Proposition 5, nous savons que m a $\text{pgcd}(a, b)$ comme période. Par contradiction, supposons que $\text{pgcd}(a, b) = 1$, c'est-à-dire que $m = \alpha^{|m|}$ pour $\alpha \in \mathcal{A}$. Comme $|v| > 0$, nous obtenons que $\text{LPS}(qu) = vr \neq r$, ce qui est une contradiction. ■

Dans la proposition suivante, nous considérons une autre configuration pour p , q et r .

Proposition 6. *Soit $m = pxu = yvqu = yr$ où p , q et r sont des palindromes tels que $|q| > |x|$ et $|r| > |xu|$. Posons $a = |x| + |y| + |u|$ et $b = |y| + |v| + |x|$. Si $|yvq| > a + b - \text{pgcd}(a, b)$, alors $\text{pgcd}(a, b)$ est une période de m .*

Démonstration. Le schéma ci-bas représente les positions respectives des palindromes p, q et r . Comme le Corollaire 2 s'applique aux équations $m = yr = pxu$ et $yvq = px$,



nous savons que $a = |y| + |xu|$ est une période de m et que $b = |yv| + |x|$ est une période de yvq . En particulier, yvq possède les deux périodes a et b . De plus, par hypothèse, $|yvq| > a + b - \text{pgcd}(a, b)$ de telle sorte que le Théorème 1 de Fine et Wilf s'applique et $\text{pgcd}(a, b)$ est aussi une période de yvq . Enfin, comme $|yvq| > a$, la période $\text{pgcd}(a, b)$ s'étend sur tout m . ■

CHAPITRE II

CHEMINS, POLYOMINOS ET PAVAGES

En géométrie discrète, les éléments de base sont les points qu'on dispose sur un réseau discret. Dans cet ouvrage, nous considérons uniquement le réseau classique $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, que nous appelons *plan discret*. Les objets qui nous intéressent dans ce chapitre sont les polyominos. Il existe plusieurs manières de les définir. Celle que nous avons choisie est basée sur le codage de leur bord par des pas élémentaires. Cette approche est avantageuse du fait que les polyominos sont alors complètement décrits par des mots (circulaires) et permet ainsi d'utiliser toute la machinerie de la combinatoire des mots pour les étudier et les manipuler. Ce chapitre s'oriente particulièrement vers la description des polyominos qui pavent le plan par translation, notre principal sujet d'étude dans les Chapitres 3 et 4.

2.1 Chemins

Soit \mathbb{Z}^2 le plan discret. Nous appelons **déplacements élémentaires** les quatre vecteurs unitaires $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Un **chemin** dans le plan discret consiste alors naturellement en une suite de déplacements élémentaires effectués à partir d'un point de départ, et possède donc une orientation. Clairement, tout chemin peut alors être codé par un mot sur un alphabet de quatre lettres, chaque lettre représentant l'un des déplacement élémentaire. Un tel codage est appelé **codage de Freeman** d'un chemin, introduit par ce dernier comme outil de codage et traitement de figures discrètes (Freeman, 1970). Il consiste en un alphabet $\mathcal{F} = \{0, 1, 2, 3\} = \mathbb{Z}_4$, communément appelé

alphabet de Freeman. Son avantage réside dans la structure additive ainsi induite sur les lettres, facilitant l'écriture de certaines opérations fondamentales sur les chemins, et permettant une implémentation efficace de celles-ci. Pour la suite,

- 0** code le déplacement vers la droite $(1, 0)$,
- 1** code le déplacement vers le haut $(0, 1)$,
- 2** code le déplacement unitaire vers la gauche $(-1, 0)$ et
- 3** code le déplacement unitaire vers le bas $(0, -1)$.

Étant donné un mot $m \in \mathcal{F}^k$, m est le codage de Freeman d'un chemin C , partant de l'origine et constitué des déplacements élémentaires indiqués par les lettres de m lues séquentiellement selon l'ordre naturel m_0, m_1, \dots, m_{k-1} .

Clairement, le codage de Freeman des chemins fournit une bijection naturelle entre les chemins du plan discret commençant à l'origine et les mots de \mathcal{F}^* . Puisque par la suite nous restreignons notre étude aux mots, cela équivaut à considérer les classes d'équivalence par translation sur l'ensemble des chemins. Il s'en suit que le pointage devient superflu. Cependant, nous indiquons le pointage sur les chemins dans le plan discret pour identifier le début du codage de Freeman.

Comme l'utilisation de l'expression "codage de Freeman de (...)" alourdirait inutilement le texte, nous tirons profit de cette bijection pour parler autant du *mot* m que du *chemin* m .

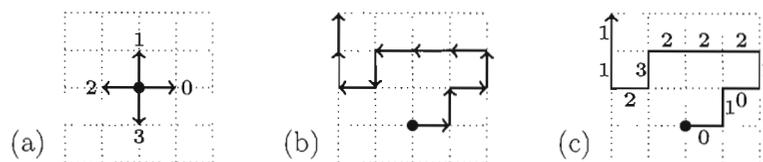


Figure 2.1: (a) Les quatre déplacements élémentaires sont codés par $\{0, 1, 2, 3\}$. (b) Un chemin m (c) représenté par le mot $m = 01012223211$.

Géométriquement, un chemin est fermé s'il revient à son point de départ (i.e. la somme vectorielle de tous ses déplacements élémentaires est nulle). Cette propriété, bien que de

nature géométrique, trouve son équivalent dans le langage de la combinatoire des mots. On en tire en effet la définition suivante.

Définition 1. *Un chemin $m \in \mathcal{F}^+$ est fermé si et seulement si*

$$|m|_0 = |m|_2 \quad \text{et} \quad |m|_1 = |m|_3.$$

Un chemin est **simple** s'il ne se croise pas. En termes de mots cela se traduit par la propriété suivante, qui découle directement de la définition.

Lemme 3. *Un chemin m est simple si et seulement si aucun de ses facteurs propres $f \in \text{Fact}(m)$ n'est fermé.*

Étant donné un chemin fermé m , le chemin sans extrémités correspondant au mot circulaire $[m]$ sera appelé chemin **circulaire**. Deux chemins fermés $m \equiv m'$ déterminent ainsi le même chemin circulaire. Il est important de souligner qu'un chemin fermé, et

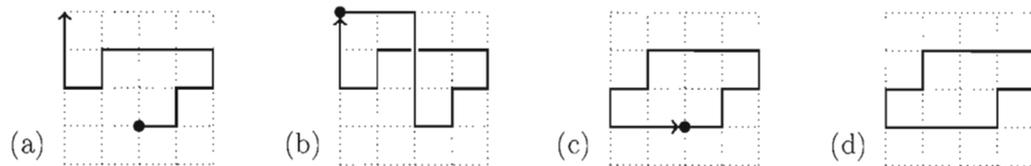


Figure 2.2: (a) Un chemin simple $m_1 = 01012223211$, (b) un chemin fermé $m_2 = 0033301012223211$, (c) un chemin simple et fermé $m_3 = 010122232300$ et (d) le chemin circulaire $[m_3]$.

donc un chemin circulaire, peut se croiser. Il peut en particulier contenir des lettres successives qui s'annulent : **02, 20, 13, 31**.

2.2 Transformations sur les chemins

Tout comme la caractérisation géométrique des chemins simples ou fermés est convenablement décrite par la combinatoire des mots, il en est de même pour les transformations

de chemins. En effet, une **transformation de chemins** n'est rien d'autre qu'une fonction $\varphi : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$ transformant tout chemin m en le chemin $\varphi(m)$. Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement aux isométries naturelles du plan discret, en particulier les rotations multiples de $\pi/2$ et les symétries préservant $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nous présentons de plus la transformation "de parcours inversé" (qui inverse le sens de parcours des chemins) ainsi que la classe des transformations dites homologues. Dans ce qui suit, i désigne un entier de \mathbb{Z}_4 .

Rotations. Le morphisme $\rho : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$ défini sur les lettres par

$$\rho : x \mapsto x + 1 \pmod{4}$$

agit sur les chemins comme la **rotation d'angle** $\frac{\pi}{2}$. Il s'en suit que le morphisme ρ^i , obtenu par composition, agit comme la transformation de **rotation d'angle** $\frac{i\pi}{2}$. La rotation ρ^2 sera aussi notée $\bar{\cdot}$, i.e. $\bar{0} = 2$, $\bar{1} = 3$, $\bar{2} = 0$ et $\bar{3} = 1$.

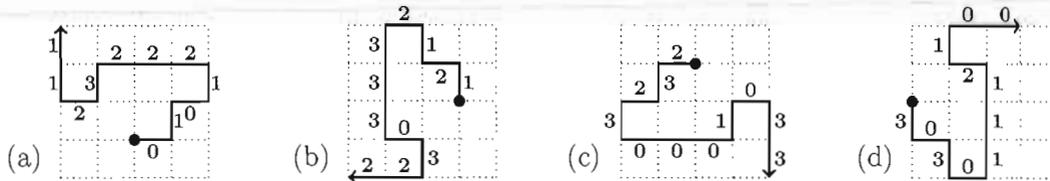


Figure 2.3: Le chemin $m = 01012223211$ et ses rotations $\rho(m)$, $\rho^2(m)$ et $\rho^3(m)$.

Symétries. Considérons maintenant les morphismes $\sigma_i : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$ définis par

$$\sigma_i : x \mapsto i - x \pmod{4}.$$

Alors σ_0 , σ_1 , σ_2 et σ_3 agissent sur les chemins par symétrie respectivement par rapport aux axes $y = 0$, $x = y$, $x = 0$ et $x = -y$.

Remarque. L'ensemble des rotations et des symétries constituent, avec l'opération de composition, le groupe diédral d'ordre 8. En particulier, $\forall i \in \mathbb{Z}_4$, les relations suivantes sont satisfaites : $\rho^4 = \text{Id}$, $\sigma_i^2 = \text{Id}$ et $\rho^{-1} = \sigma_i \circ \rho \circ \sigma_i$.

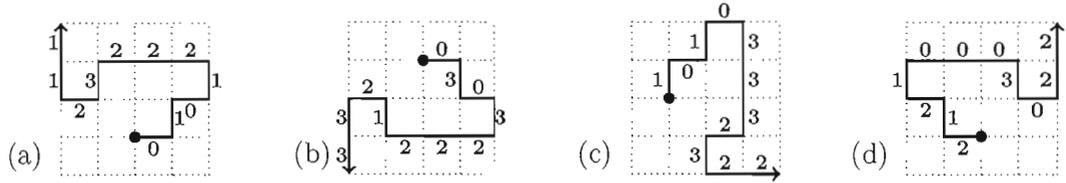


Figure 2.4: Le mot $m = 01012223211$ et les symétries $\sigma_0(m)$, $\sigma_1(m)$ et $\sigma_2(m)$.

Parcours inversé. Considérons enfin l'antimorphisme $\hat{\cdot} : \mathcal{F}^* \longrightarrow \mathcal{F}^*$ défini par

$$\hat{\cdot} = \rho^2 \circ \tilde{\cdot} = \tilde{\cdot} \circ \rho^2. \tag{2.1}$$

La transformation $\hat{\cdot}$ agit sur un chemin m en inversant le sens dans lequel il est parcouru.

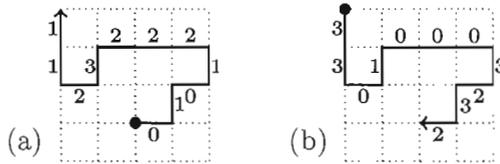


Figure 2.5: Les chemins homologues (a) $m = 01012223211$ et (b) $\hat{m} = 33010003232$.

Définition 2. Les chemins m et \hat{m} sont dits *homologues*.

Notons que l'opérateur $\hat{\cdot}$ agit sur les lettres de \mathcal{F} comme la rotation ρ^2 . Il est intéressant d'utiliser $\hat{\cdot}$ pour comprendre la géométrie des chemins codés par des palindromes. Puisque les lettres sont des palindromes, de l'Équation (2.1) nous avons plus généralement

Proposition 7. m est un palindrome si et seulement si $\hat{m} = \rho^2(m)$.

Ainsi, les chemins codés par des palindromes sont exactement ceux qui sont homologues à leur propre rotation d'angle π . Comme l'opérateur $\hat{\cdot}$ ne modifie pas la géométrie du chemin auquel il s'applique, il est clair que celui-ci préserve les propriétés de fermeture

et de simplicité des chemins. Cet opérateur satisfait quelques autres propriétés toutes aussi naturelles et intéressantes à souligner, que nous nous permettons de présenter sans preuve. Mais juste avant, introduisons la généralisation suivante de palindrome :

Définition 3. Soit f un morphisme $f : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$. Un mot $m \in \mathcal{A}^*$ est appelé *f-palindrome* si $f(\tilde{m}) = m$.

Proposition 8. Soit $m \in \mathcal{F}^*$. Les propriétés suivantes sont vérifiées

- (i) $\hat{\cdot}$ est une involution ;
- (ii) $|m|_\alpha = |\hat{m}|_{\bar{\alpha}}$;
- (iii) $m \cdot \hat{m}$ et $\hat{m} \cdot m$ sont des chemins fermés ;
- (iv) $m \cdot \hat{m}$ et $\hat{m} \cdot m$ sont des ρ^2 -palindromes.

Il est aisé de démontrer que l'ensemble des transformations présentées ci-haut sont bien définies sur les mots circulaires $[m] \in \mathcal{F}^*/\equiv$, donc en particulier sur les chemins circulaires. Cette propriété provient du fait que ρ^i et σ_i sont des morphismes et que $\hat{\cdot}$ est un antimorphisme. En fait, pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\rho^i} & \mathcal{F} \\
 \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
 \mathcal{F}^*/\equiv & \xrightarrow{\rho^i} & \mathcal{F}^*/\equiv
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\sigma_i} & \mathcal{F} \\
 \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
 \mathcal{F}^*/\equiv & \xrightarrow{\sigma_i} & \mathcal{F}^*/\equiv
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\hat{\cdot}} & \mathcal{F} \\
 \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
 \mathcal{F}^*/\equiv & \xrightarrow{\hat{\cdot}} & \mathcal{F}^*/\equiv
 \end{array}$$

où π est la projection canonique. Ces diagrammes commutatifs se traduisent par les relations suivantes.

Proposition 9. Étant donné deux mots conjugués $m \equiv m'$, nous avons :

- (i) $\rho^i(m) \equiv \rho^i(m')$;
- (ii) $\sigma_i(m) \equiv \sigma_i(m')$;
- (iii) $\hat{m} \equiv \hat{m}'$.

Transformations homologues. Pour terminer cette section, nous présentons une classe de transformations sur les chemins qui conservent leur géométrie.

Définition 4. Une *transformation homologue* est une fonction $\varphi : \mathcal{F}^* \longrightarrow \mathcal{F}^*$ telle que $\varphi(\widehat{m}) = \widehat{\varphi(m)}$ pour tout $m \in \mathcal{F}^*$.

Autrement dit, les images de deux chemins homologues par une transformation homologue sont homologues.

C'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^* & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F} \\ \downarrow \widehat{\cdot} & & \downarrow \widehat{\cdot} \\ \mathcal{F}^* & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}^* \end{array}$$

Les morphismes (resp. antimorphismes) qui sont des transformations homologues sont définis d'une manière très spécifique.

Proposition 10. Soit $\varphi : \mathcal{F}^* \longrightarrow \mathcal{F}^*$ un morphisme (resp. antimorphisme). Alors φ est une transformation homologue si et seulement si $\varphi(\widehat{\alpha}) = \widehat{\varphi(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{F}$.

Démonstration. Nous montrons le résultat dans le cas où φ est un morphisme, le cas où φ est un antimorphisme étant similaire. Clairement, si φ est une transformation homologue, alors $\varphi(\widehat{\alpha}) = \widehat{\varphi(\alpha)}$ puisque $\varphi(\widehat{m}) = \widehat{\varphi(m)}$ pour tout $m \in \mathcal{F}^*$. Maintenant, pour montrer l'autre implication, nous procédons par induction sur la longueur de m . Le cas $|m| = 0$ est trivial et le cas $|m| = 1$ est vrai par hypothèse. Supposons maintenant le résultat vrai pour les mots de longueur inférieure à n et voyons pour ceux de longueur n . Soit m tel que $|m| = n$ et écrivons $m = xy$ où $x, y \neq \varepsilon$. Alors

$$\varphi(\widehat{m}) = \varphi(\widehat{xy}) = \varphi(\widehat{y}\widehat{x}) = \varphi(\widehat{y})\varphi(\widehat{x})$$

puisque $\widehat{\cdot}$ est un antimorphisme et que φ est un morphisme. Par hypothèse de récurrence, ceci est égal à

$$\widehat{\varphi(y)}\widehat{\varphi(x)} = \widehat{\varphi(x)\varphi(y)} = \widehat{\varphi(xy)} = \widehat{\varphi(m)}$$

ce qui prouve le résultat. ■

Corollaire 5. *Les transformations ρ^i , σ_i et $\hat{\cdot}$ sont homologues, pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.*

D'autre part, cette proposition nous fournit une méthode pour construire une infinité de transformations homologues. Étant donné deux chemins $A, B \in \mathcal{F}^*$, l'unique morphisme (resp. antimorphisme) φ déterminé par

$$\varphi(\mathbf{0}) = A, \quad \varphi(\mathbf{1}) = B, \quad \varphi(\mathbf{2}) = \hat{A}, \quad \varphi(\mathbf{3}) = \hat{B} \quad (2.2)$$

est une transformation homologue. Les morphismes et antimorphismes qui sont des transformations homologues sont d'autant plus intéressants qu'ils préservent la propriété de fermeture de chemins.

Proposition 11. *Soit φ un morphisme (resp. antimorphisme) qui est une transformation homologue. Si m est un chemin fermé alors $\varphi(m)$ est aussi un chemin fermé.*

Démonstration. Afin d'alléger la preuve, utilisons les relations de l'Équation (2.2). Montrons d'abord que $|\varphi(m)|_0 = |\varphi(m)|_2$. Écrivons d'abord

$$\begin{aligned} |\varphi(m)|_0 &= |m|_0 \cdot |\varphi(\mathbf{0})|_0 + |m|_1 \cdot |\varphi(\mathbf{1})|_0 + |m|_2 \cdot |\varphi(\mathbf{2})|_0 + |m|_3 \cdot |\varphi(\mathbf{3})|_0 \\ &= |m|_0 \cdot |A|_0 + |m|_1 \cdot |B|_0 + |m|_2 \cdot |\hat{A}|_0 + |m|_3 \cdot |\hat{B}|_0. \end{aligned}$$

Par la Proposition 8, nous savons que $|\hat{A}|_0 = |A|_2$ et $|\hat{B}|_0 = |B|_2$. Nous pouvons donc réécrire notre expression comme

$$= |m|_0 \cdot |\hat{A}|_2 + |m|_1 \cdot |\hat{B}|_2 + |m|_2 \cdot |A|_2 + |m|_3 \cdot |B|_2.$$

Comme m est un chemin fermé, nous avons de plus que $|m|_0 = |m|_2$ et $|m|_1 = |m|_3$.

L'expression précédente se réécrit ainsi avec ces égalités comme

$$\begin{aligned} &= |m|_2 \cdot |\hat{A}|_2 + |m|_3 \cdot |\hat{B}|_2 + |m|_0 \cdot |A|_2 + |m|_1 \cdot |B|_2 \\ &= |\varphi(m)|_2. \end{aligned}$$

Donc $|\varphi(m)|_0 = |\varphi(m)|_2$. Nous montrons par la même méthode que $|\varphi(m)|_1 = |\varphi(m)|_3$, ce qui prouve que $\varphi(m)$ est bien un chemin fermé. ■

Exemple 4. Considérons la transformation $t : \mathcal{F}^* \longrightarrow \mathcal{F}^*$ définie par

$$t(m_0 m_1 \cdots m_{n-1}) = m_0 \cdot \rho(m_1) \cdot m_2 \cdot \rho(m_3) \cdots \rho^{n-1}(m_{n-1}).$$

Alors, t n'est pas homologue : pour $m = \mathbf{0000}$ et $\widehat{m} = \mathbf{2222}$, nous avons $t(m) = \mathbf{0101}$ et $t(\widehat{m}) = \mathbf{2323}$, mais $\widehat{t(m)} = \mathbf{3232} \neq t(\widehat{m})$.

2.3 Polyominos

Grosso modo, les polyominos se décrivent dans le langage courant comme étant des figures discrètes et sans trou. C'est au début 20^{ème} siècle qu'ils commencent réellement à susciter l'intérêt en tant qu'objets mathématiques, principalement grâce à leur caractère ludique. D'abord énoncés par (Dudeney, 1902) sans leur attribuer de nom, c'est le mathématicien Salomon Golomb qui leur donne un premier coup d'envoi en 1953 lors d'une conférence présentée à Harvard. Intéressé, Gardner vulgarise le sujet dans ses *Mathematical Games* (Gardner, 1958). Golomb leur consacre ensuite un livre complet (Golomb, 1996) où il introduit pour la première fois et pour de bon le terme polyomino. Il existe plusieurs approches pour définir les polyominos, toutes aussi pertinentes les unes que les autres. Celle que nous présentons est fondée sur l'utilisation des chemins circulaires simples.

Définition 5. Un *polyomino* P est l'intérieur d'un chemin circulaire simple $[m]$, dont ce dernier fait partie.

Notons que si $[m]$ détermine le polyomino P , il en est de même pour $[\widehat{m}]$ puisque ces deux chemins circulaires sont géométriquement les mêmes, à sens de parcours près. Par ailleurs, il est clair que ces deux chemins sont les seuls à déterminer P . Nous posons alors que le **bord** $b(P)$ de P est l'unique chemin circulaire $[m]$ déterminant P tel que le chemin m est parcouru en sens anti-horaire. Cette définition sous-entend une bijection naturelle entre l'ensemble des polyominos et l'ensemble des chemins circulaires simples parcourus en sens anti-horaire. Pour cette raison, ces derniers sont appelés *bords*, sans nécessairement nous intéresser au polyomino qu'ils définissent. Enfin, comme les

chemins circulaires sont construits à partir de chemins fermés, nous appelons **chemin de contour** de P tout chemin fermé m tel que $[m] = b(P)$. Ainsi, un polyomino possède autant de chemins de contour que la longueur de son périmètre. Par exemple, l'image de droite de la Figure 2.6 illustre l'un des 16 chemins de contour possibles du polyomino P .

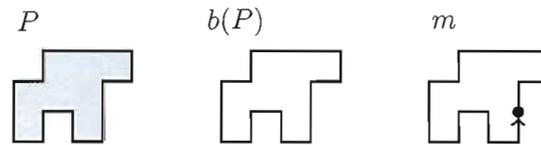


Figure 2.6: Un polyomino, son bord et l'un de ses chemins de contour.

On trouve une littérature abondante sur les polyominos. Outre les travaux traitant de leur énumération selon certains paramètres, ils apparaissent dans de nombreux domaines d'application : on en trouve une synthèse dans (Bousquet-Mélou, 1991).

En géométrie discrète, l'analyse et la reconnaissance de figures simplement connexes constitue un important champ d'étude. Les techniques utilisées proviennent principalement de l'analyse classique, mais récemment, s'inspirant de la théorie des suites sturmiennes, la combinatoire des mots a fourni une approche qui s'est révélée fructueuse. Dans ce contexte, l'étude des polyominos s'impose aussi, puisqu'ils constituent l'équivalent discret des figures simplement connexes de \mathbb{R}^2 d'aires finies.

En plus de constituer un cadre théorique nouveau pour l'étude des courbes discrètes dans le plan discret, la combinatoire des mots a conduit à une série d'algorithmes optimaux pour le calcul de certains paramètres comme l'aire, le moment d'inertie, le centre de gravité, les projections (Brlek, Labelle et Lacasse, 2003; Brlek, Labelle et Lacasse, 2005a) ou la reconnaissance de motifs tels que la convexité (Brlek, Lachaud et Provençal, 2008; Brlek et al., 2009).

Dans ce mémoire, nous nous penchons sur une classe spécifique de polyominos, à savoir ceux qui pavent le plan par translation.

2.4 Pavage par translation et tuiles

Soit P un polyomino. Nous considérons que P est basé à un quelconque endroit dans le plan. Étant donné un vecteur \vec{v} de \mathbb{Z}^2 , $P_{\vec{v}}$ désigne le polyomino P translaté selon le vecteur \vec{v} . En particulier, $P_{\vec{0}} = P$.

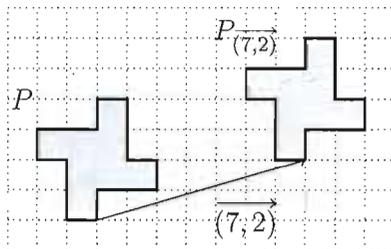


Figure 2.7: Translaté d'un polyomino

Définition 6. *Un polyomino P pave le plan par translation s'il existe un ensemble de vecteurs $V \subset \mathbb{Z}^2$ tel que l'ensemble $\{P_{\vec{v}}\}_{\vec{v} \in V}$ recouvre complètement \mathbb{R}^2 et tel que pour tout $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ nous avons que*

$$P_{\vec{v}_1} \cap P_{\vec{v}_2}$$

est soit vide ou soit à la fois dans $b(P_{\vec{v}_1})$ et dans $b(P_{\vec{v}_2})$.

Autrement dit, les seuls endroits où les polyominos s'intersectent sont en leurs bords. Nous appelons alors **pavage** le couple (P, V) et **tuile** tout polyomino pavant le plan par translation.

Comme tout polyomino n'est pas une tuile, il est naturel de croire que ceux qui le sont possèdent une structure particulière liée aux pavages du plan qu'ils déterminent. En particulier, lorsque l'ensemble V du pavage (P, V) possède une forme suffisamment régulière, l'étude de la structure du pavage se restreint à une analyse locale.

Définition 7. *Un pavage (P, V) est régulier s'il existe deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{Z}^2$ tels que*

$$V = \{\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2\}_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2}.$$

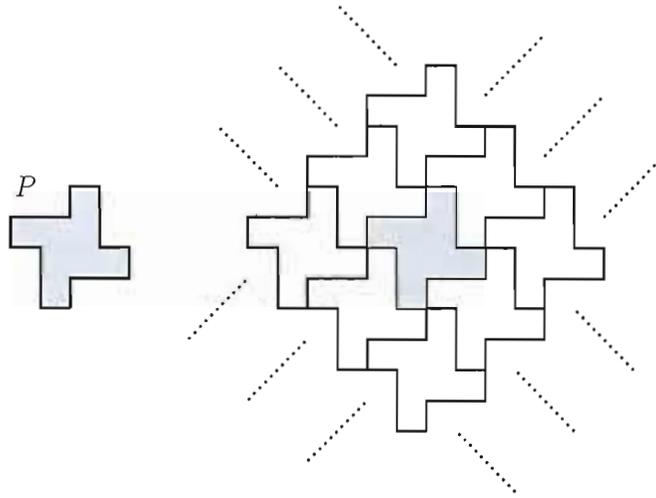


Figure 2.8: Une tuile P et l'un de ses pavages par translation

Nous trouvons dans la Figure 2.8 un exemple de pavage régulier, alors que la figure suivante exhibe un pavage non régulier du plan.

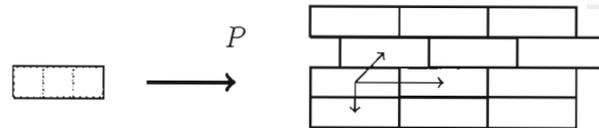


Figure 2.9: Pavage non-régulier du plan par translation du rectangle 3×1 .

Heureusement, nous savons grâce à (Wijshoff et van Leeuwen, 1984) que l'étude des pavages réguliers est suffisante pour comprendre la structure générale de toutes les tuiles.

Théorème 2. (Wijshoff et van Leeuwen, 1984) *Si P est une tuile, alors il existe un pavage régulier du plan par P .*

Ce résultat de poids fournit à (Beauquier et Nivat, 1991) un élément clé pour établir la caractérisation complète des tuiles.

Théorème 3. (Beauquier et Nivat, 1991) *Un polyomino P pave le plan par translation si et seulement s'il existe $A, B, C \in \mathcal{F}^*$ tels que $b(P) = [ABC\hat{A}\hat{B}\hat{C}]$ où au plus un des mots A, B, C est vide.*

Une telle factorisation sera par la suite appelée une **BN-factorisation**. Beauquier et Nivat en distinguent deux types, selon qu'une des variables est vide : une tuile P est un **pseudo-hexagone** si elle possède une BN-factorisation pour laquelle aucune des variables n'est vide, et un **pseudo-carré** si l'une d'elles est vide.

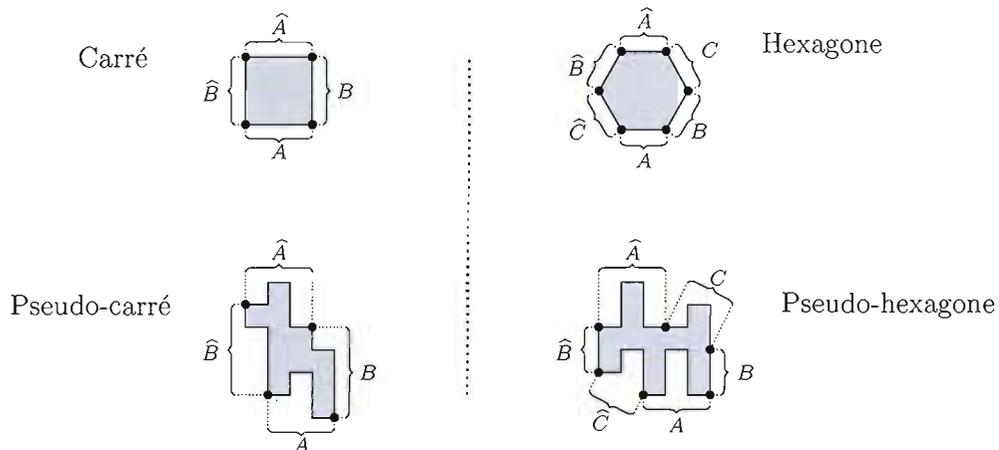


Figure 2.10: Un pseudo-carré et un pseudo-hexagone.

Rappelons que les deux chemins m et \hat{m} sont homologues (voir la Figure 2.5). Le polyomino dont le bord est de la forme $[ABC\hat{A}\hat{B}\hat{C}]$ est alors construit à l'aide de trois paires de chemins homologues $\{(A, \hat{A}), (B, \hat{B}), (C, \hat{C})\}$, tout comme l'est un hexagone. De même, le polyomino dont le bord est de la forme $[AB\hat{A}\hat{B}]$ est construit à l'aide de deux paires de chemins homologues $\{(A, \hat{A}), (B, \hat{B})\}$, tout comme l'est un carré. Ce parallèle est illustré dans la Figure 2.10. Soulignons que la donnée d'une BN-factorisation $[ABC\hat{A}\hat{B}\hat{C}]$ de P nous indique la manière dont on doit disposer les différentes copies de P pour paver le plan de manière régulière : deux copies de P s'intersectent si et seulement si elles s'intersectent exactement sur l'un de leur côté donné par la factorisation $\{A, B, C, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$. Par exemple, les tuiles de la Figure 2.10 se disposent les unes par rapport aux autres de la façon indiquée dans la Figure 2.11.

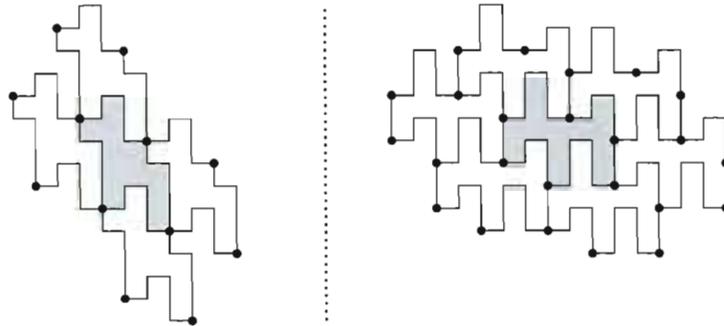


Figure 2.11: Deux pavages du plan.

Définition 8. Nous dirons que deux BN-factorisations $[ABC\hat{A}\hat{B}\hat{C}]$ et $[XYZ\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}]$ d'un même polyomino sont *équivalentes* si elles sont obtenues l'une de l'autre par permutation circulaire des facteurs $A, B, C, \hat{A}, \hat{B}$ et \hat{C} . Autrement, nous dirons qu'elles sont *distinctes*.

Un polyomino peut posséder plusieurs BN-factorisations distinctes, pouvant même être à la fois pseudo-carré et pseudo-hexagone. Ce phénomène est illustré dans la Figure 2.12 avec trois exemples de polyominos ayant deux factorisations distinctes, un pour chacun des cas possibles. Le rectangle $n \times 1$ est un exemple intéressant de tuile, possédant

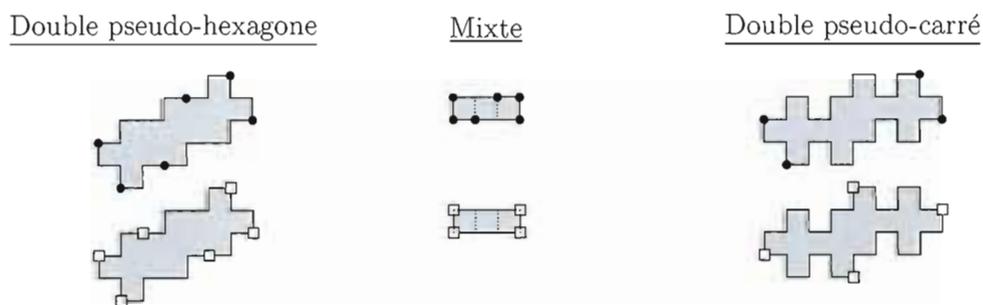


Figure 2.12: Multifactorisations.

exactement n BN-factorisations distinctes : l'une en pseudo-carré et les $n - 1$ autres en pseudo-hexagones. Ce cas particulier témoigne du fait qu'il n'existe pas de restriction (outre la taille du polyomino bien sûr) quant au nombre possible de factorisations hexagonales d'un polyomino. Le chapitre suivant est dédié à montrer qu'il n'est pas de telle

liberté en ce qui concerne le nombre de factorisations en pseudo-carré d'une tuile.

2.5 Composition

Avant d'entamer le prochain chapitre, nous désirons présenter une jolie construction faisant intervenir polyominos et pseudo-carrés pour construire par composition de nouveaux polyominos. Introduite pour la première fois dans la thèse de Xavier Provençal (Provençal, 2008), nous en donnons une variante basée sur les transformations homologues.

Soit \mathcal{C} un pseudo-carré ayant la BN-factorisation $b(\mathcal{C}) = [AB\widehat{A}\widehat{B}]$. Nous définissons à partir de cette factorisation le morphisme $\varphi : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$ défini par

$$\varphi(\mathbf{0}) = A, \quad \varphi(\mathbf{1}) = B, \quad \varphi(\mathbf{2}) = \widehat{A}, \quad \varphi(\mathbf{3}) = \widehat{B}.$$

Le morphisme ainsi défini est alors une transformation homologue (voir la fin de la section 2.2). Maintenant soit P un polyomino quelconque dont le bord est codé par $b(P) = [m]$. Nous avons la définition suivante :

Définition 9. *La composition de P avec le pseudo-carré \mathcal{C} selon sa factorisation $b(\mathcal{C}) = [AB\widehat{A}\widehat{B}]$, notée $P \circ \mathcal{C}_{[A,B]}$, est l'unique polyomino dont le bord est donné par $[\varphi(m)]$.*

Bien que la composition de polyominos dépende de la BN-factorisation de \mathcal{C} , il arrive que l'on écrive simplement $P \circ \mathcal{C}$ plutôt que $P \circ \mathcal{C}_{[A,B]}$, lorsqu'il n'y a aucune confusion possible. Nous pouvons voir, comme dans (Provençal, 2008), le polyomino $P \circ \mathcal{C}_{[A,B]}$ comme construit en remplaçant chacun des carrés unités de P par \mathcal{C} , selon bien-sûr sa factorisation en pseudo-carré.

Remarque. L'élément neutre (à droite et à gauche) de la composition est le carré unité $\mathbf{I} = [\mathbf{0} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3}]$, pouvant jouer autant le rôle de polyomino que de pseudo-carré dans la composition.

La composition appelle naturellement la notion de primalité : un polyomino P est dit **premier** si la seule façon de l'obtenir par composition est de le composer lui-même avec

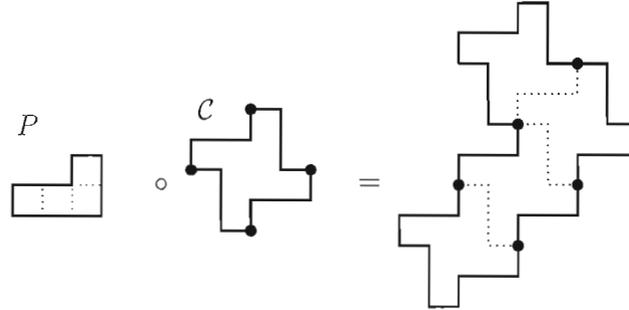


Figure 2.13: Composition du polyomino P avec le pseudo-carré C .

le carré unité (Provençal, 2008). C'est-à-dire, P est premier si et seulement si

$$P = C \circ D \implies (C = \mathbf{I} \text{ et } D = P) \text{ ou } (C = P \text{ et } D = \mathbf{I}).$$

Par exemple, le polyomino P de la Figure 2.13 est premier. Nous savons par la Proposition 11 que le morphisme φ transforme les chemins fermés en chemins fermés, et donc les chemins circulaires en chemins circulaires. La propriété supplémentaire que le résultat de la composition soit un polyomino découle quant à elle du fait que l'image par φ du carré unité soit un polyomino. Ainsi, si nous n'exigeons pas que la simplicité des chemins soit préservée, la notion de composition se réduit à l'application d'une quelconque transformation homologue ψ qui est un morphisme.

CHAPITRE III

CHEMINS TRIPLES-CARRÉS

Nous avons présenté à la fin du chapitre précédent un exemple élémentaire de polyomino possédant $n - 1$ factorisations hexagonales. X. Provençal et S. Brlek se sont les premiers penchés sur la question à savoir s'il est aussi possible pour une tuile de posséder plusieurs factorisations en pseudo-carré. S'il s'est avéré relativement aisé de générer des exemples de polyominos ayant deux telles factorisations, les seuls exemples de chemins circulaires possédant trois factorisations en pseudo-carré qu'ils sont parvenus à construire possèdent des croisements. La figure ci-dessous en illustre l'un des plus petits exemples non-trivial. Après plusieurs essais et observations, ils en sont venus à formuler la conjecture à l'effet

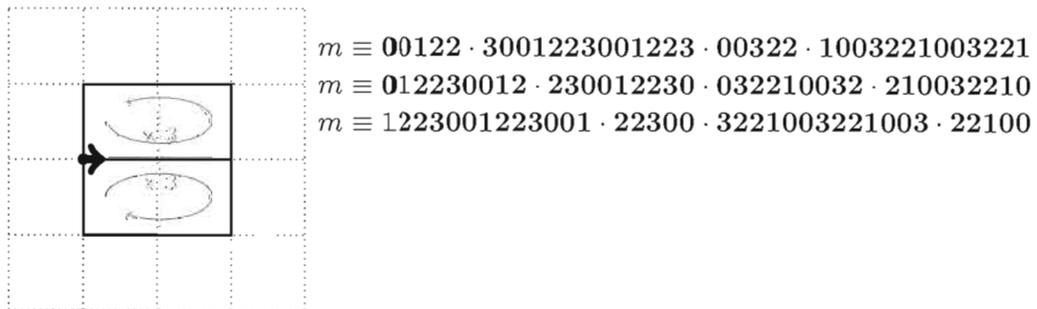


Figure 3.1: Un chemin et ses trois factorisations de type pseudo-carré.

qu'un polyomino possède au plus deux factorisations en pseudo-carré. Dans ce chapitre, nous faisons de cette conjecture notre théorème principal.

Théorème 4. *Un polyomino possède au plus deux factorisations en pseudo-carré.*

Nous démontrons ce résultat en faisant usage du codage “relatif” pour décrire les chemins, élément clé de notre démarche. Nous expliquons en détail dans la section suivante de quoi il s’agit.

3.1 Codage relatif de chemins

Nous avons vu au Chapitre 2 que tout mot $m \in \mathcal{F}^*$ peut être vu comme un chemin constitué de pas élémentaires. Nous présentons maintenant une autre interprétation des mots de \mathcal{F}^* comme des chemins, cette fois en utilisant le codage dit relatif. Soit les quatre déplacements relatifs de base suivants, codés par les lettres de $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_4$:

- 0 code l’action “continuer tout droit”,
- 1 code l’action “tourner à gauche”,
- 2 code l’action “reculer” et
- 3 code l’action “tourner à droite”.

Si $m \in \mathcal{F}^*$ est un chemin, le **codage relatif** de m , noté $\Delta(m)$, est le mot obtenu en notant les déplacements relatifs effectués pour parcourir m . Plus précisément, si $m = m_0 m_1 \cdots m_n$, alors la fonction $\Delta : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$ est définie par

$$\Delta(m) = (m_1 - m_0) \cdot (m_2 - m_1) \cdots (m_n - m_{n-1}), \quad (3.1)$$

où \cdot est la concaténation des mots. La fonction Δ est communément appelée **suite de différences premières**.

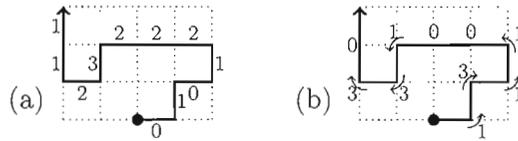


Figure 3.2: (a) Un chemin $m = 01012223211$ (b) et la représentation de $\Delta m = 1311001330$.

L’application de Δ à la concaténation de deux mots satisfait l’identité qui suit.

Proposition 12. *Soit $m \in \mathcal{F}^{n+1}$ et $z \in \mathcal{F}^{k+1}$ deux mots non vides. Alors*

$$\Delta(mz) = \Delta(m) \cdot (z_0 - m_n) \cdot \Delta(z).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\Delta(mz) &= \Delta(\mathbf{m}_0 \cdots \mathbf{m}_n \mathbf{z}_0 \cdots \mathbf{z}_k) \\
&= (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_0) \cdots (\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_{n-1}) \cdot (\mathbf{z}_0 - \mathbf{m}_n) \cdot (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0) \cdots (\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1}) \\
&= \Delta(m) \cdot (\mathbf{z}_0 - \mathbf{m}_n) \cdot \Delta(z). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Comme nous l'avons fait pour les transformations de chemins, il est souhaitable d'étendre la notion de codage relatif aux chemins circulaires. En particulier, le codage relatif doit lui-même être représenté par un mot circulaire. Ainsi, étant donné un chemin fermé $m \in \mathcal{F}^n$, nous définissons

$$\Delta([m]) = [\Delta(m) \cdot (\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_n)]. \quad (3.2)$$

Cette définition exprime le fait que dans le codage relatif d'un chemin circulaire $[m]$, il faut prendre en considération le déplacement relatif effectué pour aller de \mathbf{m}_n à \mathbf{m}_0 , i.e. pour boucler le chemin. Avec cette définition, toute paire de chemins fermés et conjugués $m \equiv m'$ satisfait

$$\Delta([m]) = \Delta([m']).$$

Remarque. La longueur de tout chemin $m \in \mathcal{F}^*$ satisfait $|\Delta m| = |m| - 1$, alors que celle de tout chemin circulaire $[m]$ satisfait $|\Delta([m])| = |m|$.

Voyons maintenant comment se traduisent les transformations de chemins introduites à la Section 2.2 en termes de codage relatif.

Lemme 4. *Soit $m \in \mathcal{F}^*$ et $i \in \mathbb{Z}$. Alors*

- (i) $\Delta(\rho^i(m)) = \Delta(m)$,
- (ii) $\Delta(\sigma_i(m)) = \sigma_0(\Delta(m))$,
- (iii) $\Delta(\widehat{m}) = \Delta(\widetilde{m}) = \sigma_0(\widetilde{\Delta(m)})$.

Démonstration. (i) $\Delta(\rho^i(m)) = ((\mathbf{m}_1 + i) - (\mathbf{m}_0 + i)) \cdots ((\mathbf{m}_n + i) - (\mathbf{m}_{n-1} + i)) = \Delta(m)$.
(ii) $\Delta(\sigma_i(m)) = \Delta((i - \mathbf{m}_0) \cdots (i - \mathbf{m}_n)) = -(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_0) \cdots -(\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_{n-1}) = \sigma_0(\Delta(m))$.
(iii) En utilisant le point (i), nous avons que $\Delta(\widehat{m}) = \Delta(\rho^2(\widetilde{m})) = \Delta(\widetilde{m})$, ce qui prouve la première égalité. Quant à la seconde, se déduit de la suite d'égalités suivante : $\Delta(\widetilde{m}) = (\mathbf{m}_{n-1} - \mathbf{m}_n) \cdots (\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_1) = \sigma_0((\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_{n-1}) \cdots (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_0)) = \sigma_0(\widetilde{\Delta(m)})$. \blacksquare

La fonction $\Delta : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$ n'est ainsi pas injective, étant invariante par rotation (Lemme 4 (i)). Cependant, il est suffisant de connaître une seule des lettres du chemin m pour pouvoir le retrouver à partir de sa suite de différences premières $\Delta(m)$. Il existe une construction permettant de retrouver m à partir de $\Delta(m)$; nous ne la présentons pas dans ce mémoire. En effet, comme nous détenons toujours au moins l'information de ce qu'est le chemin m , elle ne nous est d'aucune utilité. Le lecteur intéressé peut cependant se référer à (Blondin Massé et al., 2009).

3.1.1 Nombre d'enroulements

Le codage relatif s'avère particulièrement adapté lorsqu'on souhaite déterminer le nombre d'enroulements effectués lors du parcours d'un chemin m , noté $\mathcal{T}(m)$. Remarquons que ce problème fut d'abord considéré par (Daurat et Nivat, 2003) sous une forme plus contraignante¹. Les auteurs y considèrent en effet uniquement les chemins circulaires simples non-orientés, vus comme le bord d'ensembles discrets dans le plan. L'approche présentée ici est quant à elle tirée de (Brlék, Labelle et Lacasse, 2005b; Brlék, Labelle et Lacasse, 2006), dans lequel les auteurs traduisent (et par le fait même généralisent) la question en termes de chemins auto-évitant orientés, au sens où nous l'entendons dans ce mémoire. Cette approche leur permet d'obtenir une preuve beaucoup plus simple d'un résultat aussi plus général (Théorème 5) se trouvant à la fin de cette section.

Le **nombre d'enroulements** $\mathcal{T}(m)$ d'un chemin m est obtenu à partir du calcul de la différence entre le nombre de virages à gauche (1) et le nombre de virages à droite (3) dans $\Delta(m)$. Cependant, une ambiguïté apparaît lorsque m possède des facteurs de la forme $x\hat{x}$, c'est-à-dire quand le chemin revient par moments sur ses pas. En effet, il n'est alors pas clair si de tels retours devraient être interprétés comme deux virages à droite ou deux virages à gauche, ou simplement pour aucun virage. Afin de résoudre cette ambiguïté, nous établissons la convention que la dernière interprétation est la bonne,

1. Leur mesure est en effet égale à $4 \left| \mathcal{T}([m]) \right|$. La positivité provenant du fait que leurs figures discrètes ne sont pas représentées par des chemins circulaires orientés.

i.e.

$$\mathfrak{F}(x\hat{x}) = 0. \quad (3.3)$$

Chemins réduits. Il convient donc de construire efficacement pour tout mot $m \in \mathcal{F}^*$ un chemin réduit r ne contenant pas de facteurs de type $x\hat{x}$. Soit $\mathcal{C} = \{02, 20, 13, 31\}$ l'ensemble des mots correspondant à des pas en arrière sur un chemin. Nous constatons par une vérification directe que cet ensemble est formé des plus petits mots non-vides possédant cette forme. Si un mot $m \in \mathcal{F}^*$ peut contenir des facteurs de \mathcal{C} , il peut néanmoins se réduire en un unique mot r de la manière suivante. Il suffit d'appliquer séquentiellement les règles de réécriture dans l'ensemble suivant $\{u \mapsto \varepsilon \mid u \in \mathcal{C}\}$. Le **mot réduit** r de m est alors un mot dans l'ensemble $\mathcal{F}^* \setminus \mathcal{F}^*\mathcal{C}\mathcal{F}^*$. Il est bien connu qu'une telle réduction notée $m \xrightarrow{*} r$ s'obtient par un arbre de dérivation.

Lemme 5. *Pour tout mot $m \in \mathcal{F}^*$, il existe un unique mot réduit r tel que $m \xrightarrow{*} r$.*

Comme r est aussi, par construction, l'unique chemin obtenu à partir de m en appliquant les règles de réécriture $\{x\hat{x} \mapsto \varepsilon, \forall x\hat{x} \in \text{Fact}(m)\}$, nous avons, en vertu de la convention donnée par l'Équation 3.3

$$\mathfrak{F}(r) = \mathfrak{F}(m).$$

Nous pouvons ainsi définir sans ambiguïté pour tout mot $m \in \mathcal{F}^*$

$$\mathfrak{F}(m) = \frac{|\Delta(r)|_1 - |\Delta(r)|_3}{4}.$$

Exemple 5. Le réduit du chemin $m = \mathbf{22331122330122330031230001122011}$ est $r = \mathbf{222233012233000300011211}$. Ces deux chemins sont illustrés dans la Figure 3.3. Nous calculons directement que $\Delta(r) = \mathbf{00010111010100310010130}$. Nous avons alors que $\mathfrak{F}(m) = \mathfrak{F}(r) = \frac{|\Delta(r)|_1 - |\Delta(r)|_3}{4} = \frac{9-2}{4} = \frac{7}{4}$.

Le résultat suivant découle alors directement de la Proposition 12.

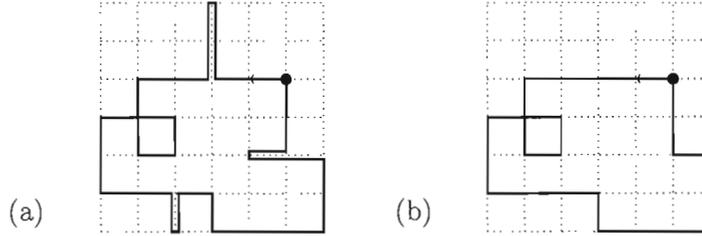


Figure 3.3: (a) Un chemin m et (b) son chemin réduit r .

Corollaire 6. Soit $m = m_0 m_1 \cdots m_n$ et $z = z_0 z_1 \cdots z_k$ deux mots de \mathcal{F}^+ . Alors

$$\mathcal{F}(mz) = \mathcal{F}(m) + \mathcal{F}(m_n z_1) + \mathcal{F}(z).$$

Le cas des chemins circulaires $[m]$ se traite de façon similaire, $[s]$ étant le mot circulaire obtenu de $[m]$ en appliquant les règles de réécriture $\{x\hat{x} \mapsto \varepsilon, \forall x\hat{x} \in \text{Fact}([m])\}$. Nous définissons ainsi le nombre d'enroulements effectués par le chemin circulaire $[m]$ comme

$$\mathcal{F}([m]) = \frac{|\Delta([s])|_1 - |\Delta([s])|_3}{4}.$$

Exemple 6. (suite de l'Exemple 5)

Le réduit du chemin $[m] = [22331122330122330031230001122011]$ est

$$[s] = [r] = [222233012233000300011211].$$

Nous calculons directement que $\Delta([r]) = [000101110101003100101301]$. Nous avons alors que $\mathcal{F}([m]) = \mathcal{F}([r]) = \frac{|\Delta([r])|_1 - |\Delta([r])|_3}{4} = \frac{10 - 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

Nous pouvons enfin présenter le théorème suivant, qui trouve application dans la description des polyominos.

Théorème 5. (Brek, Labelle et Lacasse, 2005b) *Tout chemin circulaire simple $[m]$ satisfait $\mathcal{F}[m] = \pm 1$.*

Par ce théorème, le bord d'un polyomino P est caractérisé comme l'unique chemin circulaire $[m]$ déterminant P tel que $\mathcal{F}([m]) = +1$, la positivité nous informant

que le chemin est parcouru en sens antihoraire. Selon cette logique, le chemin circulaire $[\widehat{m}]$ doit, quant à lui, avoir un nombre négatif d'enroulements, étant parcouru en sens horaire.

Proposition 13. *Soit $m \in \mathcal{F}^*$. Alors $\mathcal{F}(m) = -\mathcal{F}(\widehat{m})$. De même, si m est un chemin fermé, $\mathcal{F}([m]) = -\mathcal{F}([\widehat{m}])$.*

3.2 Description des triple-carrés

Le concept de BN-factorisation s'étend naturellement aux mots circulaires en général et il est donc naturel de supposer qu'un mot circulaire puisse avoir un nombre quelconque (mais fini) de telles factorisations. Pour démontrer qu'une tuile ne peut avoir plus de deux factorisations en pseudo-carré, nous allons considérer l'ensemble des mots qui en ont trois et montrer que de tels mots ne peuvent coder le bord d'un polyomino. Nous allons expliciter maintenant des propriétés utiles des mots ayant trois BN-factorisations.

Définition 10. *Un mot T est un **triple-carré** s'il possède trois BN-factorisations distinctes en pseudo-carrés, c'est à dire, il existe $A, B, X, Y, W, Z \in \mathcal{F}^+$ tels que*

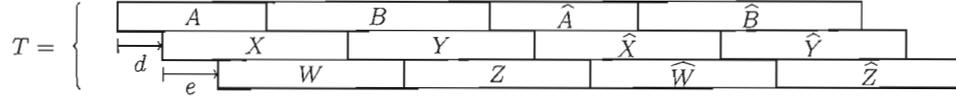
$$T = [AB\widehat{A}\widehat{B}] = [XY\widehat{X}\widehat{Y}] = [WZ\widehat{W}\widehat{Z}].$$

Comme nous avons besoin de spécifier les décalages, supposons que d, e sont deux entiers tels que

$$AB\widehat{A}\widehat{B} \equiv_d XY\widehat{X}\widehat{Y} \equiv_e WZ\widehat{W}\widehat{Z}.$$

Nous considérons sans perte de généralité que $0 < d < |A|$ et $0 < e < |A| - d$, quitte à réorganiser par une permutation circulaire les différentes factorisations de T . La situation est représentée dans la Figure 3.4.

Il est important de souligner le fait que dans cette figure, toutes les factorisations sont alternées, i.e. aucun des facteurs déterminés par l'une des factorisations n'est inclus dans un autre. Nous n'allons par la suite que considérer les triples-carrés possédant cette forme. La raison de cette contrainte n'est pas laissée au hasard, mais tire sa motivation du résultat suivant, provenant de (Provençal, 2008).

Figure 3.4: Les trois factorisations de T

Proposition 14. *Si le bord d'une tuile P possède les deux factorisations en pseudo-carré $AB\hat{A}\hat{B} \equiv_d XY\hat{X}\hat{Y}$, alors le décalage d peut être choisi tel que $0 < d < |A| < d + |X|$.*

Comme nous nous intéressons aux triples carrés qui codent potentiellement un polyomino, cette proposition doit être satisfaite par chacune des paires de factorisations de T et s'étend donc aux trois factorisations simultanément de sorte que

$$0 < d < d + e < |A| < d + |X| < d + e + |W|, \quad (3.4)$$

comme nous pouvons le voir dans la Figure 3.4. Considérons maintenant la situation du point de vue du codage relatif. Nous devons tout d'abord traduire la caractérisation de Beauquier et Nivat des pseudo-carrés en ces termes.

Proposition 15. *Soit P un pseudo-carré de factorisation $b(P) = [AB\hat{A}\hat{B}]$. Alors*

$$\Delta(b(P)) = [1 \cdot \Delta(A) \cdot 1 \cdot \Delta(B) \cdot 1 \cdot \Delta(\hat{A}) \cdot 1 \cdot \Delta(\hat{B})].$$

Démonstration. Sans perte de généralité, posons que $|A| = k$ et $|B| = n$. Nous utilisons ici la notation $\bar{\cdot} = \rho^2$ introduite au Chapitre 2. Nous savons grâce au Corollaire 6 que

$$\mathfrak{F}(b(P)) = \mathfrak{F}(\overline{B_0A_0}) + \mathfrak{F}(A) + \mathfrak{F}(A_kB_0) + \mathfrak{F}(B) + \mathfrak{F}(B_n\overline{A_k}) + \mathfrak{F}(\hat{A}) + \mathfrak{F}(\overline{A_0B_n}) + \mathfrak{F}(\hat{B}).$$

Puisque $\mathfrak{F}(A) + \mathfrak{F}(\hat{A}) = 0$ et $\mathfrak{F}(B) + \mathfrak{F}(\hat{B}) = 0$ (Proposition 13), et sachant que $\mathfrak{F}(b(P)) = 1$ (bord d'un polyomino), l'égalité ci-dessus se traduit par

$$1 = \mathfrak{F}(\overline{B_0A_0}) + \mathfrak{F}(A_kB_0) + \mathfrak{F}(B_n\overline{A_k}) + \mathfrak{F}(\overline{A_0B_n}). \quad (3.5)$$

Mais par définition, tout mot $m \in \mathcal{F}^2$ satisfait $\mathfrak{F}(m) \in \{-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\}$. Ainsi, l'Équation (3.5) est vérifiée seulement si chaque terme de la somme du membre de droite vaut $\frac{1}{4}$, i.e

$$\Delta(\overline{B_0A_0}) = \Delta(A_kB_0) = \Delta(B_n\overline{A_k}) = \Delta(\overline{A_0B_n}) = 1.$$

Le résultat découle alors directement de ces égalités, de la Proposition 12 et aussi de l'Équation 3.2. ■

Remarque. Cette caractérisation s'interprète de la façon suivante : Soit P un pseudo-carré ayant A, B, \hat{A} et \hat{B} comme "côtés". Alors le passage de A à B se fait par un virage à gauche 1, de même que le passage de B à \hat{A} , de \hat{A} à \hat{B} et de \hat{B} à A (voir la Figure 3.5).

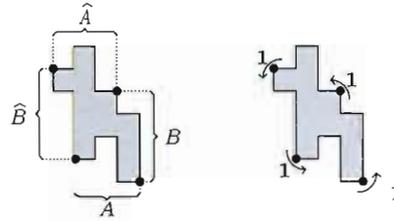


Figure 3.5: Le passage d'un "côté" à un autre sur un pseudo-carré s'effectue nécessairement par un virage à gauche.

Cette équivalence étant valide pour chacune des BN-factorisations de notre triple-carré T , il s'en suit que $\Delta(T)$ possède les trois factorisations illustrées dans la Figure 3.6.

$$\Delta(T) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{x \quad y} \\ \overline{1 \quad \Delta A \quad 1 \quad \Delta B \quad 1 \quad \Delta \hat{A} \quad 1 \quad \Delta \hat{B}} \\ \overline{d \quad 1 \quad \Delta X \quad 1 \quad \Delta Y \quad 1 \quad \Delta \hat{X} \quad 1 \quad \Delta \hat{Y}} \\ \overline{e \quad 1 \quad \Delta W \quad 1 \quad \Delta Z \quad 1 \quad \Delta \hat{W} \quad 1 \quad \Delta \hat{Z}} \end{array} \right.$$

Figure 3.6: Les trois factorisations de $\Delta(T)$.

Il s'avère pratique de considérer T en deux moitiés x et y d'égale longueur, soit

$$x = x_0 x_1 \cdots x_{n-1} = 1 \cdot \Delta(A) \cdot 1 \cdot \Delta(B) \tag{3.6}$$

$$y = y_0 y_1 \cdots y_{n-1} = 1 \cdot \Delta(\hat{A}) \cdot 1 \cdot \Delta(\hat{B}). \tag{3.7}$$

Ici, n est la longueur du demi-périmètre de $\Delta(T)$, i.e. $|\Delta(T)| = 2n$. Nous notons alors par $I = \{0, d, d + e, |A|, d + |X|, d + e + |W|\}$ l'ensemble des indices i pour lesquels les

factorisations en triple-carré imposent $x_i = y_i = \mathbf{1}$. Comme les factorisations de $\Delta(T)$ doivent alterner, il en découle que ces six indices sont tous distincts.

3.3 Réflexions

La suite de notre étude consiste à décrire la façon dont les différents $\mathbf{1}$ imposés dans $\Delta(T)$ se propagent dans tout le mot circulaire. Cette propagation est possible grâce aux trois factorisations qui déterminent des réflexions sur x et sur y .

Chaque permutation $s \in S_n$ agit naturellement sur un mot $x \in \mathcal{A}^n$ comme

$$s : x_0x_1 \cdots x_{n-1} \mapsto x_{s(0)}x_{s(1)} \cdots x_{s(n-1)}.$$

Par exemple, si $s = \begin{pmatrix} 0123 \\ 2013 \end{pmatrix}$ et $x = x_0x_1x_2x_3 = abcd$, alors $s(x) = x_{s(0)}x_{s(1)}x_{s(2)}x_{s(3)} = x_2x_0x_1x_3 = cabd$. Une **réflexion** est une permutation $s \in S_n$ de la forme

$$s : i \mapsto k - i \pmod n$$

où i varie entre 0 et $n - 1$. La réflexion $s \in S_n$ est ainsi complètement déterminée par son image sur 0, soit $s(0) = k$. Nous constatons que les réflexions de paramètre $k = 0$ agissent sur les mots telle la fonction image miroir : $s(m) = \tilde{m}$. Cette propriété s'étend de la manière suivante pour toutes les autres réflexions.

Lemme 6. *Soit $x, u, v \in \mathcal{A}^*$ trois mots satisfaisant la relation $x \equiv_d uv$ et tels que $d + |u| \leq |x|$. Alors la réflexion $s \in S_n$ définie par $s : i \mapsto (|u| + 2d - 1 - i) \pmod{|x|}$ satisfait $s(x) \equiv_d \tilde{u} \tilde{v}$.*

Démonstration. Comme $x \equiv_d uv$, nous avons en utilisant l'hypothèse selon laquelle $d + |u| - 1 \leq |x|$ que les mots u et v s'écrivent

$$u = x_d \cdots x_{d+|u|-1} \quad \text{et} \quad v = x_{d+|u|} \cdots x_{|x|-1} x_0 \cdots x_{d-1}.$$

Le résultat découle alors directement de l'application de s sur les indices de u et v ainsi définis en fonction des lettres de x . ■

Autrement dit, la réflexion s préserve u et v à image miroir près. Selon cette remarque, nous pouvons représenter l'axe de la réflexion s comme traversant u et v en leur centre, tel qu'illustré dans la Figure 3.7.

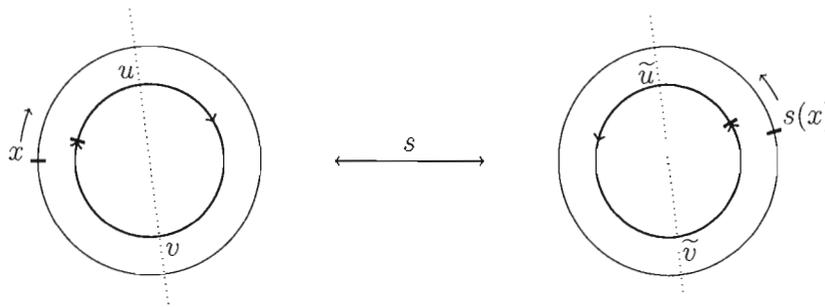


Figure 3.7: La réflexion s centrée en u et v .

Exemple 7. Soit $u = 1213$, $v = 031020$ et $x = 20 \cdot 1213 \cdot 0310$. Alors $x \equiv_2 uv$. La réflexion définie par cette relation est $s : i \mapsto (4 + 2 \cdot 2 - 1 - i) \pmod{10}$. Nous avons bien que $s(x) = 30 \cdot 3121 \cdot 0201 \equiv_2 \tilde{u}\tilde{v}$.

Maintenant, considérons à nouveau $\Delta(T)$ ainsi que ses trois factorisations. Nous reprenons ci-dessous la Figure 3.6 illustrant la situation.

$$\Delta(T) = \left\{ \begin{array}{c} \overline{x} \quad \overline{y} \\ \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta A \quad \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta B \quad \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta \hat{A} \quad \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta \hat{B} \\ \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta X \quad \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta Y \quad \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta \hat{X} \quad \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta \hat{Y} \\ \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta W \quad \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta Z \quad \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta \hat{W} \quad \overline{\mathbf{1}} \quad \Delta \hat{Z} \end{array} \right.$$

$\overbrace{\hspace{1.5cm}}^d$ $\overbrace{\hspace{1.5cm}}^e$

Nous déduisons directement de l'Équation (3.6) qu'il existe $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{F}^*$ tels que

$$\begin{aligned} x &\equiv_1 \Delta(A) \cdot U_1, \\ x &\equiv_{1+d} \Delta(X) \cdot U_2, \\ x &\equiv_{1+d+e} \Delta(W) \cdot U_3. \end{aligned}$$

Selon le Lemme 6, nous pouvons ainsi définir trois réflexions s_1, s_2 et s_3 de S_n qui,

lorsqu'elles sont appliquées à x , fixent respectivement $\Delta(A)$, $\Delta(X)$ et $\Delta(W)$:

$$\begin{aligned} s_1 : i &\mapsto (|A| - i) \pmod n, \\ s_2 : i &\mapsto (|X| + 2d - i) \pmod n, \\ s_3 : i &\mapsto (|W| + 2(d + e) - i) \pmod n. \end{aligned}$$

Nous avons ici utilisé le fait que $|\Delta(m)| + 1 = |m|$. Comme x et y possèdent la même structure, il existe aussi $V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{F}^*$ tels que

$$\begin{aligned} y &\equiv_1 \Delta(\widehat{A}) \cdot V_1, \\ y &\equiv_{1+d} \Delta(\widehat{X}) \cdot V_2, \\ y &\equiv_{1+d+e} \Delta(\widehat{W}) \cdot V_3. \end{aligned}$$

Il s'en suit que les réflexions s_1 , s_2 et s_3 fixent respectivement $\Delta(\widehat{A})$, $\Delta(\widehat{X})$ et $\Delta(\widehat{W})$ lorsqu'elles sont appliquées à y . Notons que par construction, $U_1 = \mathbf{1} \cdot \Delta(B) \cdot \mathbf{1}$ et $V_1 = \mathbf{1} \cdot \Delta(\widehat{B}) \cdot \mathbf{1}$. Ainsi, comme nous avons choisi s_1 de sorte qu'elle fixe également U_1 et V_1 à image miroir près lorsqu'elle est appliquée à x et y , nous obtenons directement que $\Delta(B)$ et $\Delta(\widehat{B})$ sont aussi laissés fixes à image miroir près. Cependant, les mots U_2 , V_2 , U_3 et V_3 ne possèdent quant à eux pas une telle forme. Ainsi, nous ne pouvons par exemple pas déduire que s_2 fixe $\Delta(Y)$ à image miroir près puisque $U_2 \neq \mathbf{1} \cdot \Delta Y \cdot \mathbf{1}$.

Exemple 8. *Nous pouvons voir dans la Figure 3.8 que la symétrie s_1 appliquée à x (resp. y) fixe à image miroir près $\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ (resp. $\Delta(\widehat{A})$ et $\Delta(\widehat{B})$). Cependant, s_3 appliquée à x (resp. y) fixe à image miroir près $\Delta(W)$ mais non $\Delta(Z)$ (resp. $\Delta(\widehat{W})$ mais non $\Delta(\widehat{Z})$). Notons que l'action de s_1 sur x et y est aisément comprise lorsque ces derniers sont exprimés en fonction de A et de B alors que l'action de s_3 l'est lorsque x et y sont exprimés en fonction de W et de Z .*

Proposition 16. *Les réflexions s_1 , s_2 et s_3 sont deux à deux distinctes.*

Démonstration. Nous prouvons uniquement que s_1 et s_2 sont distinctes, les deux autres cas se traitant de façon similaire. Comme toute réflexion est entièrement déterminée par son image sur 0, nous devons montrer que $|A| \pmod n \neq |X| + 2d \pmod n$. Nous

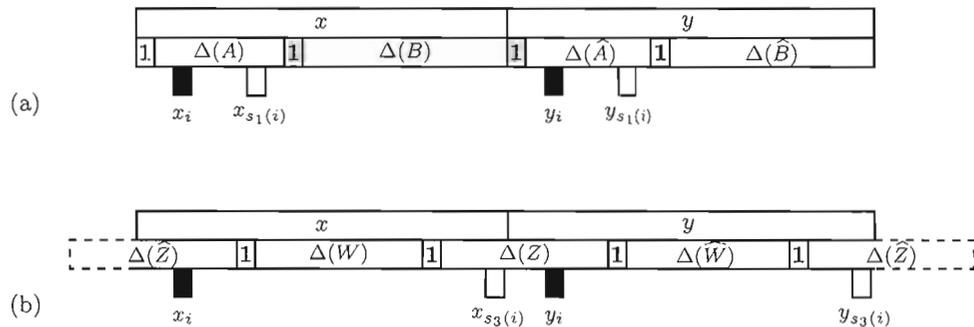


Figure 3.8: (a) Application de s_1 à x_i et y_i et (b) application de s_3 sur les mêmes x_i et y_i .

savons par la Proposition 14 que $0 < d < |A| < d + |X| < n$. De ces inégalités, si $|A| \bmod n = |X| + 2d \bmod n$, c'est que nécessairement $|X| + 2d = n + |A|$, et donc $2d = |Y| + |A|$ puisque $n = |X| + |Y|$. Mais encore, ceci implique que $|Y| < d$ puisque $|A| < d$. Alors $n = |X| + |Y| < |X| + d$, ce qui est une contradiction. ■

Définition 11. La réflexion s_1 est dite *admissible en i* si $i \notin \{0, |A|\}$. De même, s_2 est admissible en i si $i \notin \{d, |X| + d\}$ et s_3 est admissible en i si $i \notin \{d + e, |W| + d + e\}$.

Remarque. Selon cette définition, nous obtenons la description suivante de I :

$$i \in I \iff \text{il existe un } s_k \in \{s_1, s_2, s_3\} \text{ qui n'est pas admissible en } i.$$

Nous avons prouvé un peu plus tôt (Lemme 4 (iii)) l'égalité $\Delta\hat{m} = \sigma_0(\widetilde{\Delta m})$. En particulier, si α est la $i^{\text{ème}}$ lettre de $\Delta(m)$, l'égalité précédente implique que la $(|\Delta(m)| - 1 - i)^{\text{ème}}$ lettre de $\Delta(\hat{m})$ est $\sigma_0(\alpha)$. Sous certaines conditions, cette relation entre les lettres de $\Delta(m)$ et $\Delta(\hat{m})$ possède un équivalent pour $m \in \{A, B, X, Y, W, Z\}$ en termes de nos trois réflexions s_1 , s_2 et s_3 . Ceci provient du fait qu'elles font justement apparaître par leur action sur x et y l'image miroir de certains mots $\Delta(m)$ bien particuliers.

Lemme 7. Soit $i \in \mathbb{Z}_n$ et $j \in \{1, 2, 3\}$ tels que $x_i = y_i$ et s_j est admissible en i . Alors x_i et y_i satisfont $x_i = \sigma_0(x_{s_j(i)})$ et $y_i = \sigma_0(y_{s_j(i)})$.

Démonstration.

Considérons le cas $j = 2$. Supposons sans perte de généralité que $|\Delta(Y)| > 2d$ et choisissons Y_1, Y_2 et Y_3 trois mots tels que $\Delta(Y) = \Delta(Y_1)\Delta(Y_2)\Delta(Y_3)$ satisfaisant la condition $|\Delta(Y_1)| = |\Delta(Y_3)| = d$. Cette nouvelle factorisations de $\Delta(Y)$ est illustrée dans la Figure 3.9.

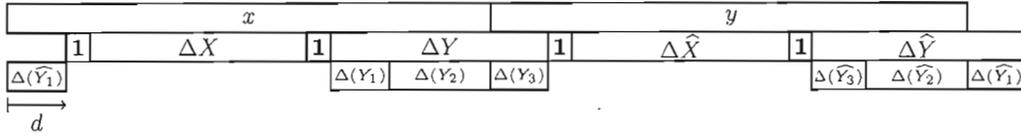


Figure 3.9: Factorisation de $\Delta(Y) = \Delta(Y_1)\Delta(Y_2)\Delta(Y_3)$.

Le mots U_2 tel que $x \equiv_{1+d} \Delta(X) \cdot U_2$ s'exprime ainsi comme

$$U_2 = \mathbf{1} \cdot \Delta(Y_1)\Delta(Y_2)\Delta(\hat{Y}_1) \cdot \mathbf{1}.$$

Nous avons par construction de s_2 (voir Lemme 6) que

$$\begin{aligned} s_2(x) &\equiv_{1+d} \widetilde{\Delta(X)} \cdot \widetilde{U_2} \\ &\iff \\ \sigma_0(s_2(x)) &\equiv_{1+d} \sigma_0(\widetilde{\Delta(X)}) \cdot \sigma_0(\widetilde{U_2}) \\ &\iff \\ \sigma_0(s_2(x)) &\equiv_{1+d} \Delta(\hat{X}) \cdot \mathbf{3} \cdot \Delta(Y_1)\Delta(\hat{Y}_2)\Delta(\hat{Y}_1) \cdot \mathbf{3} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\sigma_0(\widetilde{\Delta(m)}) = \Delta(\hat{m})$. Notons ensuite que le mot V_2 tel que $y \equiv_{1+d} \Delta(\hat{X}) \cdot V_2$ est égal à

$$V_2 = \mathbf{1} \cdot \Delta(\hat{Y}_3)\Delta(\hat{Y}_2)\Delta(Y_3) \cdot \mathbf{1}.$$

Comparant $\sigma_0(s_2(x))$ avec x et y :

$$\begin{aligned} \sigma_0(s_2(x)) &\equiv_{1+d} \Delta(\hat{X}) \cdot \mathbf{3} \cdot \Delta(Y_1)\Delta(\hat{Y}_2)\Delta(\hat{Y}_1) \cdot \mathbf{3}, \\ x &\equiv_{1+d} \Delta(X) \cdot \mathbf{1} \cdot \Delta(Y_1)\Delta(Y_2)\Delta(\hat{Y}_1) \cdot \mathbf{1}, \\ y &\equiv_{d+1} \Delta(\hat{X}) \cdot \mathbf{1} \cdot \Delta(\hat{Y}_3)\Delta(\hat{Y}_2)\Delta(Y_3) \cdot \mathbf{1}, \end{aligned}$$

nous déduisons directement que pour tout indice $i \neq d, |X| + d$, $\sigma_0(x_{s_2(i)}) \in \{x_i, y_i\}$. Selon le même raisonnement, nous obtenons aussi que $\sigma_0(y_{s_2(i)}) \in \{x_i, y_i\}$. Le résultat suit enfin de l'égalité $x_i = y_i$.

Notons que pour traiter le cas $|\Delta(Y)| < 2d$, il suffit simplement de choisir Y_1, Y_2 et Y_3 tels que $|\Delta(Y_1)\Delta(Y_2)| = |\Delta(Y_2)\Delta(Y_3)| = d$. La démonstration pour les cas $j = 3$ et $j = 1$ est semblable à la précédente, le cas $j = 1$ s'obtenant en posant $\Delta(Y_1) = \Delta(Y_3) = \emptyset$ et $\Delta(Y_2) = \Delta(B)$. ■

La Figure 3.10 illustre le lemme précédent dans le cas où l'on considère la réflexion s_3 .

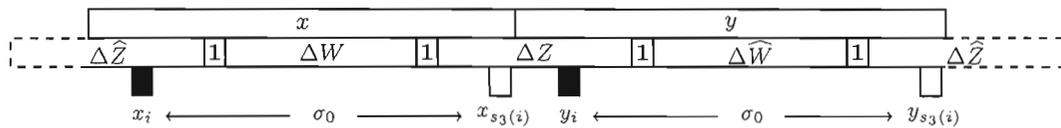


Figure 3.10: Lien entre les lettres de x et de y sous l'action de s_3 . Lorsque $x_i = y_i$, nous avons que $x_{s_3(i)} = \sigma_0(x_i)$ et $y_{s_3(i)} = \sigma_0(y_i)$.

Nous obtenons comme conséquence immédiate de ce lemme le résultat suivant.

Corollaire 7. *Soit $i \in \mathbb{Z}_n$, $j \in \{1, 2, 3\}$ tel que s_j est admissible en i et supposons que $x_i = y_i$. Alors $x_{s_j(i)} = y_{s_j(i)}$.*

Ce corollaire s'applique tout particulièrement lorsque nous prenons $i \in I$, car alors $x_i = y_i = \mathbf{1}$. Il s'en suit alors que $x_{s_j(i)} = y_{s_j(i)} = \mathbf{3}$, et ce corollaire s'applique de nouveau pour s_l admissible en $s_j(i)$, de sorte que $x_{s_l s_j(i)} = y_{s_l s_j(i)} = \mathbf{1}$. Ainsi, par récurrence, si $S = s_{j_m} s_{j_{m-1}} \cdots s_{j_2} s_{j_1}$ est un produit de réflexions tel que s_{j_1} est admissible en $i \in I$ et tel que s_{j_k} est admissible en $s_{j_{k-1}} \cdots s_{j_2} s_{j_1}(i)$ pour tout $k \in \{2..m\}$, alors $x_{S(i)} = y_{S(i)} = \sigma_0^m(\mathbf{1})$.

3.4 Preuve du théorème principal

Preuve du Théorème 4. Nous montrons que la présence des trois symétries dans T mène à la contradiction suivante : que s_1 est admissible en 0. Comme $s_1s_2s_3$ est une réflexion, nous avons que $(s_1s_2s_3)^2 = \text{Id}$ de telle sorte que $s_1 = s_2s_3s_1s_2s_3$. D'abord, s_3 est admissible en 0 puisque $0 \notin \{d+e, |W|+d+e\}$. Ensuite, si s_2 n'était pas admissible en $s_3(0)$, nous aurions que $x_{s_3(0)} \in I$ ce qui mènerait à la contradiction

$$\mathbf{1} = x_0 = x_{s_3(0)} = \sigma_0(x_0) = \mathbf{3}.$$

Donc s_2 est admissible en $s_3(0)$. Maintenant, si s_1 n'est pas admissible en $s_2s_3(0)$, c'est soit que $s_2s_3(0) = 0$, soit que $s_2s_3(0) = |A|$. Le premier cas est impossible, puisque nous aurions alors que $s_2(0) = s_3(0)$ et donc que $s_2 = s_3$. Donc la seule possibilité est que $s_2s_3(0) = |A|$. Comme s_1 s'écrit aussi comme $s_1 = s_3s_2s_1s_3s_2$, nous avons par les mêmes arguments que $s_3s_2(0) = |A|$ et donc que $s_2s_3 = s_3s_2$ (*). Considérant de la même manière $s_2 = s_1s_3s_2s_1s_3$ et $s_2 = s_3s_1s_2s_3s_1$, nous avons selon un raisonnement similaire que s_1 et s_3 satisfont $s_1s_3 = s_3s_1$ (**). Ainsi, par (*) et (**), $s_2s_3(0) = |A|$ implique que $s_2 = s_3$, ce qui n'est pas. Donc s_1 est admissible en $s_2s_3(0)$. Comme $x_{s_1s_2s_3(0)} = \sigma_0(x_0) = \mathbf{3} \neq \mathbf{1}$, nous savons de plus que s_3 est admissible en $s_1s_2s_3(0)$. Finalement, s_2 est admissible en $s_3s_1s_2s_3(0) = s_2s_1(0)$ puisque $s_1(0) = |A|$ et que $s_2(|A|) \notin \{d, |X|+d\}$. Donc $s_2s_1s_3s_2s_1 = s_1$ est admissible en 0, contradiction. ■

Exemple 9. Considérons le cas $AB\widehat{A}\widehat{B} \equiv_d XY\widehat{X}\widehat{Y} \equiv_e WZ\widehat{W}\widehat{Z}$ dont les paramètres sont les suivants : $|A| = 17$, $|B| = 13$, $|X| = 17$, $|W| = 15$, $d = 3$ et $e = 5$. Nous avons alors que $I = \{0, d, d+e, |A|, d+|X|, d+e+|W|\} = \{0, 3, 8, 17, 20, 23\}$ et l'application de $s_1 = s_2s_3s_1s_2s_3$ est illustrée dans la figure suivante. Nous voyons que ce produit de réflexions est admissible en 0, de telle sorte que $\mathbf{1} = x_0 = \sigma_0^5(x_{s_3s_2s_1s_3s_2(0)}) = \sigma_0(x_{s_3s_2s_1s_3s_2(0)}) = \sigma_0(x_{17}) = \sigma_0(\mathbf{1}) = \mathbf{3}$, une contradiction.

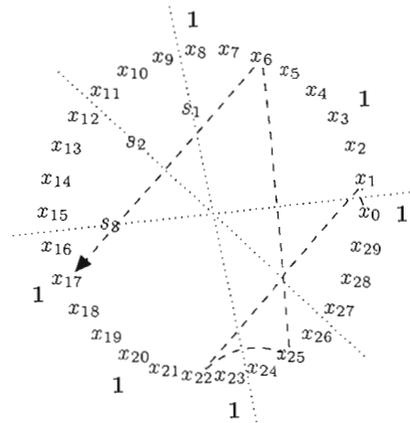


Figure 3.11: Les trois réflexions agissant sur x , où $n = 30$, $d = 3$, $e = 5$, $|A| = 17$, $|X| = 17$ et $|W| = 15$.

CHAPITRE IV

DOUBLES CARRÉS

S'il n'existe pas de tuile triple carrée, nous savons en revanche qu'il en existe des doubles, dont nous avons croisé un premier exemple dans la Figure 2.12. Il en existe bien sûr plus d'un. Nous trouvons par exemple dans (Provençal, 2008) l'énumération des doubles carrés dont le périmètre est inférieur ou égal à 32, ceux-ci étant au nombre de trente. Puis dans (Blondin Massé et al., 2009) une description exhaustive de deux classes infinies de doubles carrés, soit ceux dits de Fibonacci et ceux de Christoffel. La figure suivante présente un exemple de chacune de ces familles.

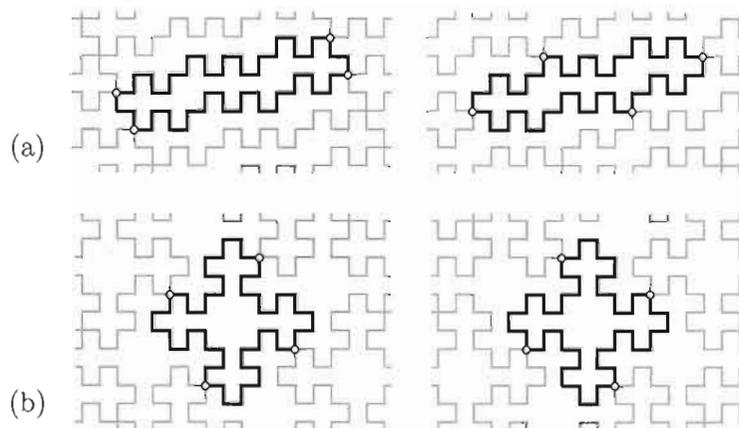


Figure 4.1: (a) Une tuile de Christoffel, ses deux factorisations distinctes en pseudo-carré et les deux pavages ainsi générés. (b) Une tuile de Fibonacci, ses deux factorisations distinctes en pseudo-carré et les deux pavages ainsi générés.

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, nous nous intéressons davantage à la structure

générale des doubles carrés. Nous étudions ainsi la famille de solutions non triviales à l'équation $[AB\hat{A}\hat{B}] = [XY\hat{X}\hat{Y}]$, dont font partie les doubles carrés, et ce en termes de combinatoire des mots uniquement. Ces solutions dites "admissibles" possèdent en effet certaines contraintes de périodicité imposées par la double factorisation, que nous illustrons sur le cas particulier des doubles carrés. Puis nous utilisons ces propriétés structurelles pour définir des opérateurs agissant sur l'espace des solutions admissibles, qui nous permettront de réduire tous les doubles carrés au plus petit qui existe : la croix \blacklozenge . Nous présentons enfin un algorithme de génération des doubles carrés à partir de la croix en inversant les opérateurs déjà introduits.

4.1 Solutions admissibles

Considérons l'équation suivante

$$[AB\hat{A}\hat{B}] = [XY\hat{X}\hat{Y}] \quad (4.1)$$

où $A, B, X, Y \in \mathcal{F}^+$. Une solution à l'Équation 4.1 est dite admissible si ses deux factorisations sont alternées. En particulier, il découle directement de la Proposition 14 que le bord d'un double carré fournit une solution admissible à l'Équation 4.1. Les solutions admissibles généralisent ainsi la notion de doubles carrés dans le cadre de la combinatoire des mots uniquement. Toute solution admissible peut être illustrée comme dans la Figure 4.2. Les w_i apparaissant dans cette figure sont définis selon le découpage

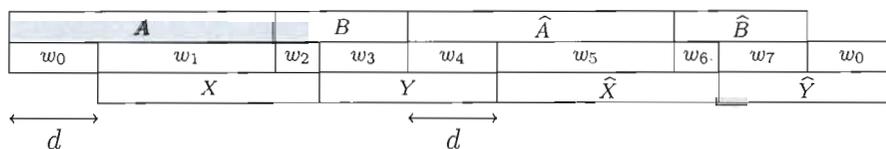


Figure 4.2: Décomposition plus fine d'un double carré.

naturel engendré par les deux factorisations, et déterminent complètement la solution qu'ils représentent. Il s'avère pratique de travailler avec ces w_i plutôt que A, B, X, Y , puisqu'ils nous informent de la position exacte des deux factorisations. Nous adoptons ainsi la définition suivante, qui raffine les BN-factorisations des solutions admissibles.

Définition 12. Une solution admissible est un 8-tuplet $(w_i)_{i \in [0..7]}$, $w_i \in \mathcal{F}^+$, tel que $|w_i| = |w_{i+4}|$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ et

- (i) $\widehat{w_0 w_1} = w_4 w_5$; (iii) $\widehat{w_2 w_3} = w_6 w_7$;
- (ii) $\widehat{w_1 w_2} = w_5 w_6$; (iv) $\widehat{w_3 w_4} = w_7 w_0$.

Remarquons qu'une solution admissible $(w_i)_{i \in [0..7]}$ est uniquement déterminée par les mots w_0, w_1, w_2 et w_3 . La **longueur** d'une solution $S = (w_i)_{i \in [0..7]}$ est naturellement définie comme $|S| = |w_0 w_1 \cdots w_7|$.

Exemple 10. La Figure 4.3 illustre un double carré D dont le bord possède deux BN-factorisations distinctes $b(D) \equiv AB\widehat{A}\widehat{B} \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$.

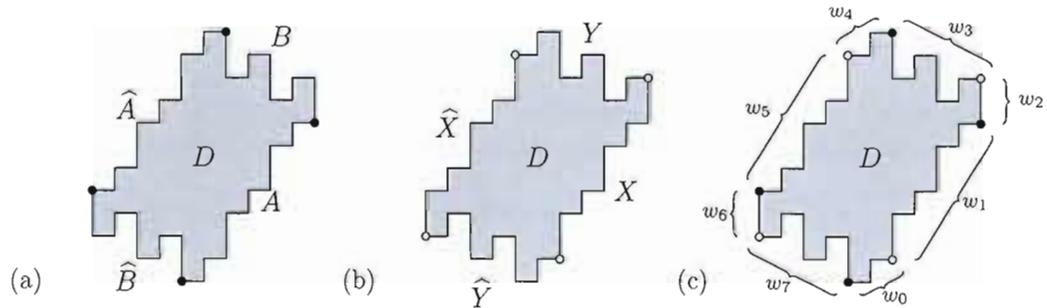


Figure 4.3: Un double carré D avec ses deux BN-factorisations et une de ses solutions admissibles.

Nous avons en (a) (points noirs) la factorisation

$$[AB\widehat{A}\widehat{B}] = [0101101011010 \cdot 112321123211 \cdot 2323323233232 \cdot 330103301033]$$

et en (b) (points blancs) la factorisation

$$[XY\widehat{X}\widehat{Y}] = [110101101011 \cdot 2321123211232 \cdot 332323323233 \cdot 0103301033010].$$

Le double carré D fournit alors la solution admissible

$$\begin{aligned} S &= (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) \\ &= (010, 1101011010, 11, 2321123211, 232, 3323233232, 33, 0103301033) \end{aligned}$$

où chacun des w_i est mis en évidence dans l'image (c). Remarquons que les w_i sont délimités par les paires adjacentes de points de différentes couleurs (noirs et blancs).

Dans ce qui suit, les additions sur les indices sont effectués modulo 8 et nous présentons quelques propriétés satisfaites par les solutions admissibles. Le premier résultat concerne la périodicité présente sur les mots w_i . Il introduit de plus les notations u_i, v_i, d_i et n_i que nous utilisons tout au long du chapitre.

Lemme 8. *Pour tout i , $d_i = |w_{i+1}| + |w_{i+3}|$ est une période de w_i . Plus précisément, il existe $u_i, v_i \in \mathcal{F}^*$ et $n_i \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\widehat{w_{i-3}w_{i-1}} = u_i v_i \quad (4.2)$$

$$w_i = (u_i v_i)^{n_i} u_i \quad (4.3)$$

$$w_{i+1} \widehat{w_{i+3}} = v_i u_i, \quad (4.4)$$

où $0 \leq |u_i| < d_i$. De plus, $d_0 = d_2 = d_4 = d_6$ et $d_1 = d_3 = d_5 = d_7$.

Démonstration. Nous avons directement de la définition de solution admissible que

$$\widehat{w_{i-3}w_{i-1}w_i} = \widehat{w_{i-3}w_{i+4}w_{i+3}} = \widehat{w_{i+5}w_{i+4}w_{i+3}} = w_i w_{i+1} \widehat{w_{i+3}}.$$

Les deux extrémités de cette égalité satisfont une équation de la forme $xy = yz$ où $x = \widehat{w_{i-3}w_{i-1}}$, $y = w_i$ et $z = w_{i+1} \widehat{w_{i+3}}$. Le résultat découle de la Proposition 2. Enfin, comme $|w_j| = |w_{j+4}|$ pour tout j , il s'en suit que $d_i = |w_{i+1}| + |w_{i+3}| = |w_{i+3}| + |w_{i+5}| = d_{i+2}$, ce qui prouve notre dernière affirmation. ■

Remarque. Par construction, $v_i \neq \varepsilon$ pour tout i . Seuls les u_i peuvent être vides.

Une conséquence directe du Lemme 8 est que les périodes s'étendent.

Corollaire 8. *Pour tout i , d_i est une période de $w_{i-1}w_iw_{i+1}$.*

Démonstration. Puisque d_i est une période de $(u_i v_i)^{n_i+2} u_i = \widehat{w_{i-3}w_{i-1}} \cdot w_i \cdot w_{i+1} \widehat{w_{i+3}}$, elle est en particulier une période de $w_{i-1}w_iw_{i+1}$. ■

Exemple 11. (suite) Nous rappelons dans l'image (a) de la Figure 4.4 la position de chacun des facteurs de la solution admissible S fournie par le double carré D . Nous avons ici que $d_1 = |w_0| + |w_2| = 5$, et aussi par le Lemme 8 que $d_1 = d_3 = d_5 = d_7 = 5$.

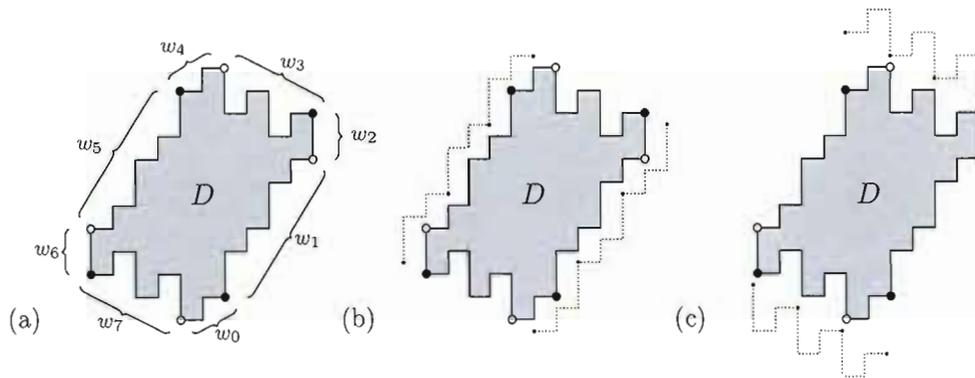


Figure 4.4: Un double carré et ses facteurs périodiques.

Nous avons mis en évidence les périodes de longueur $|w_0| + |w_2| = d_1 = d_3 = d_5 = d_7 = 5$ qui s'étendent dans $w_0w_1w_2$, $w_4w_5w_6$ (image (b)) et dans $w_2w_3w_4$ et $w_6w_7w_0$ (image (c)), en vertu du Corollaire 8.

Notons que la fréquence n_i des périodes dans les w_i ne peuvent être arbitrairement grandes. En effet, une restriction s'impose naturellement de leur définition.

Lemme 9. $n_i \neq 0 \implies n_{i+1} = n_{i+3} = n_{i+5} = n_{i+7} = 0$.

Démonstration. S'il existe i tel que $n_i \neq 0$ et $n_{i+1} \neq 0$, alors $|w_i| \geq |w_{i-1}| + |w_{i+1}|$ et $|w_{i+1}| \geq |w_i| + |w_{i+2}|$. Combinant ces deux égalités, nous obtenons alors que $|w_i| \geq |w_{i-1}| + |w_i| + |w_{i+2}|$ et donc que $|w_i| > |w_i|$, ce qui est absurde. Par un raisonnement semblable, $n_{i-1} = 0$ et on conclut en raison de l'identité $n_j = n_{j+4}$ pour tout j . ■

Par exemple, dans la Figure 4.4, les périodes de longueur $d_0 = d_2 = d_4 = d_6 = 20$ sont beaucoup plus grandes que la longueur des mots w_0, w_2, w_4 et w_6 .

Les deux résultats suivants expriment les relations algébriques satisfaites par nos facteurs w_i . Nous obtenons à partir du Lemme 8 les propriétés de commutativité suivantes entre les w_i et les périodes u_jv_j .

Corollaire 9. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}_8$, nous avons*

$$u_i v_i \cdot w_i = w_i \cdot v_i u_i, \quad (4.5)$$

$$w_i \cdot u_{i+1} v_{i+1} = \widehat{u_{i+5} v_{i+5}} \cdot w_i, \quad (4.6)$$

$$v_{i-1} u_{i-1} \cdot w_i = w_i \cdot \widehat{v_{i+3} u_{i+3}}. \quad (4.7)$$

Démonstration. L'Équation (4.5) est une conséquence directe de l'Équation (4.3). Les deux dernières égalités découlent de même directement du Lemme 8 :

$$w_i \cdot u_{i+1} v_{i+1} \stackrel{(4.2)}{=} w_i \widehat{w_{i-2} w_i} \stackrel{(4.4)}{=} \widehat{u_{i+5} v_{i+5}} w_i,$$

$$v_{i-1} u_{i-1} \cdot w_i \stackrel{(4.4)}{=} w_i \widehat{w_{i+2} w_i} \stackrel{(4.2)}{=} w_i \widehat{v_{i+3} u_{i+3}}. \quad \blacksquare$$

Le résultat suivant, énoncé selon les notations du Lemme 8, exprime cette fois la relation unissant les w_i aux u_j (resp. v_j) seuls.

Lemme 10. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}_8$, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

$$w_i u_{i+1} = \widehat{u_{i+5} w_{i+4}}; \quad (4.8)$$

$$u_i w_{i+1} = \widehat{w_{i+5} u_{i+4}}; \quad (4.9)$$

$$w_i \widehat{v_{i+3}} = v_{i+7} \widehat{w_{i+4}}; \quad (4.10)$$

$$\widehat{v_i} w_{i+3} = \widehat{w_{i+7} v_{i+4}}. \quad (4.11)$$

Démonstration. Le résultat découle de la décomposition présentée au Lemme 8. Nous obtenons (4.8) et (4.10) en comparant les suffixes et préfixes de l'égalité suivante

$$w_{i+1} \widehat{v_{i+4}} \cdot \widehat{u_{i+4} w_{i+3}} = w_{i+1} \widehat{w_{i+3} w_{i+1} w_{i+3}} = v_i u_i v_i u_i = v_i \widehat{w_{i-3}} \cdot w_{i-1} u_i,$$

et en adaptant les indices. De même, nous obtenons (4.9) et (4.11) de la série d'égalités

$$\widehat{w_{i-3} u_{i+4}} \cdot \widehat{v_{i+4} w_{i-1}} = \widehat{w_{i-3} w_{i-1} w_{i-3} w_{i-1}} = u_i v_i u_i v_i = u_i w_{i+1} \cdot \widehat{w_{i+3} v_i}. \quad \blacksquare$$

Nous étudions ci-après la structure particulière des solutions admissibles dont l'un des u_i est vide. Ce cas particulier possède entre autre une structure périodique plus fine que les solutions admissibles générales.

Lemme 11. *Supposons que $d_i = |w_{i+1}| + |w_{i+3}|$ divise $|w_i|$, i.e. que u_i soit vide. Posons $g = \text{pgcd}(|w_{i+2}|, d_{i+2})$. Alors*

$$(i) \quad w_{i+1} = \widehat{w_{i+5}} \text{ et } w_{i+3} = \widehat{w_{i+7}};$$

(ii) *il existe deux mots $p, q \in \mathcal{F}^+$ et $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que*

$$w_{i+1}w_{i+2}w_{i+3} = p^k \text{ et } w_{i+6} = \widehat{p}^\ell$$

$$w_{i+5}w_{i+6}w_{i+7} = q^k \text{ et } w_{i+2} = \widehat{q}^\ell$$

$$\text{où } |p| = |q| = g \text{ et } \ell = |w_{i+2}|/g;$$

$$(iii) \quad pw_{i+1} = w_{i+1}\widehat{q} \text{ et } \widehat{q}w_{i+3} = w_{i+3}p.$$

Démonstration. (i) Il découle du Lemme 8 que

$$\widehat{w_{i-3}}w_{i-1} = u_i v_i = \varepsilon \cdot v_i = v_i \cdot \varepsilon = v_i u_i = w_{i+1}\widehat{w_{i+3}}.$$

Comparant les préfixes et suffixes de cette égalité, il s'en suit que $w_{i+1} = \widehat{w_{i-3}} = \widehat{w_{i+5}}$ et $w_{i+3} = \widehat{w_{i-1}} = \widehat{w_{i+7}}$.

(ii) Utilisant l'affirmation (i), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} w_{i+1}w_{i+3}\widehat{w_{i+6}} &= w_{i+1}\widehat{w_{i+7}}\widehat{w_{i+6}} = w_{i+1}w_{i+2}w_{i+3} \\ &= \widehat{w_{i+6}}\widehat{w_{i+5}}w_{i+3} = \widehat{w_{i+6}}w_{i+1}w_{i+3}. \end{aligned}$$

Cette équation étant de la forme $ab = ba$, où $a = w_{i+1}w_{i+3}$ et $b = \widehat{w_{i+6}}$, nous déduisons de la Proposition 1 qu'il existe $p \in \mathcal{F}^*$ tel que

$$ab = w_{i+1}w_{i+2}w_{i+3} = \widehat{w_{i+6}}\widehat{w_{i+5}}w_{i+3} = p^k$$

avec $|p| = \text{pgcd}(|b|, |a|) = g$. En particulier, $w_{i+6} = \widehat{p}^\ell$. Pour prouver qu'il existe $q \in \mathcal{F}^*$ tel que $w_{i+5}w_{i+6}w_{i+7} = q^k$ avec $|q| = g$ et que $w_{i+2} = \widehat{q}^\ell$, il suffit d'incrémenter tous les indices de la preuve ci-avant par quatre.

(iii) Par le point (ii), nous savons que $w_{i+2} = \widehat{q}^\ell$ et que $w_{i+1}w_{i+2}$ a la période g avec $\text{Pref}_g(w_{i+1}w_{i+2}) = p$. Comme $w_{i+1}\widehat{q}$ possède aussi la période g , nous avons (Proposition 2) que w_{i+1} est aussi suffixe de $w_{i+1}\widehat{q}$, et donc que $w_{i+1}\widehat{q} = pw_{i+1}$. La preuve que $\widehat{q}w_{i+3} = w_{i+3}p$ est similaire. ■

Exemple 12. Considérons la solution admissible

$$S = (0, 12101210, 121, 21, 2, 30323032, 303, 03).$$

Nous trouvons dans la Figure 4.5 l'objet géométrique codé par cette solution. Nous avons ici par un calcul direct que $|w_1| = 8$ et $d_1 = |w_0| + |w_2| = 4$, de sorte que $|w_1| = 2 \cdot d_1$ et S satisfait l'hypothèse du Lemme 11 en prenant $i = 1$. Maintenant, nous calculons que $g = \text{pgcd}(|w_3|, d_3) = \text{pgcd}(|w_3|, |w_2| + |w_4|) = \text{pgcd}(2, 4) = 2$. Selon le Lemme 11, nous devons alors avoir que $w_2w_3w_4$ et $w_6w_7w_0$ sont périodiques de période 2. Et de fait, cette période est mise en évidence en pointillé dans l'image (b) de la Figure 4.5 .

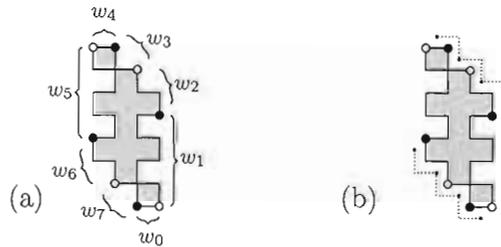


Figure 4.5: Représentation de $S = (0, 12101210, 121, 21, 2, 30323032, 303, 03)$.

Notons que S ne code pas un double carré, le chemin qu'il décrit n'étant pas simple. Il s'avère que toutes les solutions qui satisfont aux conditions du Lemme 11 se croisent. Nous en rediscutons dans la dernière section de ce chapitre.

Nombre d'enroulements et solutions admissibles. Le nombre d'enroulements d'une solution admissible $S = (w_i)_{i \in [0..7]}$ est naturellement défini à partir du mot circulaire qu'elle définit : $\mathcal{F}(S) = \mathcal{F}([w_0w_1w_2w_3w_4w_5w_6w_7])$. Comme nous sommes intéressés à l'étude des doubles carrés, il convient d'étudier les solutions S telles que $\mathcal{F}(S) = \pm 1$. Considérons d'abord la conséquence suivante de la Proposition 15, où $\text{FST}(m)$ et $\text{LST}(m)$ désignent respectivement la première et la dernière lettre du mot m .

Proposition 17. Soit P un pseudo-carré de BN-factorisation $b(P) = [AB\widehat{A}\widehat{B}]$. Alors $\text{FST}(A) = \text{LST}(A)$ et $\text{FST}(B) = \text{LST}(B)$.

Cette proposition se traduit de la manière suivante sur les solutions admissibles.

Lemme 12. $\mathcal{F}(S) = \pm 1$ si et seulement si $\text{FST}(w_i) = \text{LST}(w_{i+1})$ pour tout i .

Ce lemme nous assure alors que certaines solutions admissibles ne codent pas des doubles carrés. Plus précisément :

Proposition 18. *Supposons que $d_i = d_{i+1}$. Alors $\mathcal{F}(S) \notin \{-1, 1\}$.*

Le lecteur intéressé trouvera les démonstrations de la Proposition 17, du Lemme 12 et de la Proposition 18 dans (Blondin Massé et al., 2010).

4.2 Réduction de solutions

4.2.1 Opérateurs de réduction

Soit \mathcal{S} l'ensemble des solutions admissibles. Pour décrire la structure des doubles carrés, nous considérons des fonctions inversibles agissant sur \mathcal{S} . Nous décrivons ci-après chacune d'entre elles et illustrons la manière dont elles agissent sur les doubles carrés.

Définition 13. *Soit $S = (w_i)_{i \in [0..7]}$ une solution admissible et posons $g = \text{pgcd}(|w_2|, d_2)$, $p = \text{Pref}_g(w_1 w_2 w_3)$ et $q = \text{Pref}_g(w_5 w_6 w_7)$. Nous définissons les opérateurs suivants :*

$$\text{COUPE}(S) = (w_0(v_0 u_0)^{-1}, w_1, w_2, w_3, w_4(v_4 u_4)^{-1}, w_5, w_6, w_7),$$

$$\text{P-COUPE}(S) = (p^{-1}w_0, p^{-1}w_1, w_2, w_3, q^{-1}w_4, q^{-1}w_5, w_6, w_7),$$

$$\text{S-COUPE}(S) = (w_0 q^{-1}, w_1, w_2, w_3 p^{-1}, w_4 p^{-1}, w_5, w_6, w_7 q^{-1}),$$

$$\text{ÉCHANGE}(S) = (\widehat{w}_4, (v_1 u_1)^{n_1} v_1, \widehat{w}_6, (v_3 u_3)^{n_3} v_3, \widehat{w}_0, (v_5 u_5)^{n_5} v_5, \widehat{w}_2, (v_7 u_7)^{n_7} v_7).$$

Les lettres P et S insérées dans les termes P-COUPE et S-COUPE rappellent que ceux-ci suppriment respectivement des préfixes et des suffixes de facteurs dans la configuration admissible sur laquelle ils s'appliquent. Les opérateurs de base COUPE, P-COUPE, S-COUPE et ÉCHANGE se généralisent de la façon suivante afin d'agir sur n'importe quels w_i . Considérons l'opérateur de décalage CONJUGUE défini comme

$$\text{CONJUGUE}(S) = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_0).$$

Il est immédiat que $\text{CONJUGUE}(S)$ est une solution admissible. Alors pour tout $i \in [0..7]$ et pour chacun des opérateurs $\varphi \in \{\text{ÉCHANGE}, \text{COUPE}, \text{P-COUPE}, \text{S-COUPE}\}$, l'opérateur $\varphi_i(S)$ est défini comme

$$\varphi_i(S) = \text{CONJUGUE}^{-i} \circ \varphi \circ \text{CONJUGUE}^i(S).$$

Dans cette définition, le second décalage effectué vers l'arrière nous assure que les w_i restés intacts demeurent dans les mêmes positions. En particulier, $\varphi_0(S) = \varphi(S)$.

Exemple 13. Nous avons illustré sur un exemple dans la Figure 4.6 l'effet de l'application des opérateurs ÉCHANGE et COUPE sur la solution donnée par un double carré S . Nous voyons que $S'' = \text{ÉTIRE}_3(S)$ est obtenu de S en étendant w_3 et w_7 . Quant à $S' = \text{ÉCHANGE}(S)$, nous avons $w'_0 = \widehat{w}_4$, $w'_2 = \widehat{w}_6$, $w'_4 = \widehat{w}_0$ et $w'_6 = \widehat{w}_2$. De même, nous

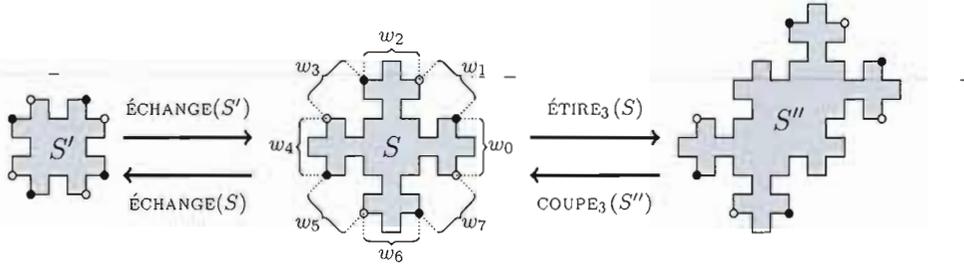


Figure 4.6: Opérateurs ÉCHANGE et COUPE.

trouvons illustré par un exemple dans la Figure 4.7 l'effet des opérateurs P-COUPE et S-COUPE sur un double carré. Nous voyons bien que l'opérateur P-COUPE modifie w_0 et w_1 , tandis que S-COUPE modifie w_7 et w_0 . Notons que nous avons ici défini les w_i en sens horaire. Le parcours de $w_7 w_0 w_1$ correspond ainsi au sens de lecture usuel des mots et facilite la visualisation de l'action de ces opérateurs.

Le résultat suivant fixe les conditions selon lesquelles l'image de ces opérateurs constitue des solutions admissibles.

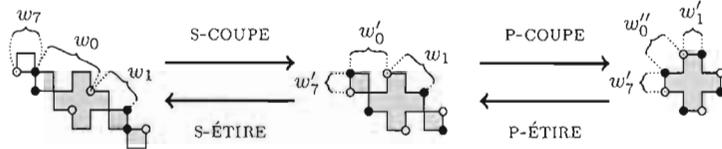


Figure 4.7: Opérateurs P-COUCPE et S-COUCPE.

Proposition 19. *Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- (i) Si $|w_i| > d_i$, alors $\text{COUCPE}_i(S)$ est une solution admissible.
- (ii) Si $|w_i| = d_i$ et $|w_{i+1}| > g$, alors $\text{P-COUCPE}_i(S)$ est une solution admissible.
- (iii) Si $|w_i| = d_i$ et $|w_{i+7}| > g$, alors $\text{S-COUCPE}_i(S)$ est une solution admissible.
- (iv) Si u_{i+1} et u_{i+3} sont non-vides, alors $\text{ÉCHANGE}_i(S)$ est une solution admissible.

Démonstration. Sans perte de généralité, nous prouvons le résultat pour $i = 0$.

(i) La condition $|w_0| > d_0$ signifie que $n_0 = n_4 \geq 1$. Posons $w_0 = u_0 v_0 \cdot w'_0 = w'_0 \cdot v_0 u_0$ et $w_4 = u_4 v_4 \cdot w'_4 = w'_4 \cdot v_4 u_4$. Nous voulons montrer que

$$\text{COUCPE}(S) = (w'_0, w_1, w_2, w_3, w'_4, w_5, w_6, w_7)$$

est une solution admissible, i.e. $w'_0 w_1 = \widehat{w'_4 w_5}$ et $w_7 w'_0 = \widehat{w_3 w'_4}$ (voir Définition 12). Ces deux égalités découlent directement des égalités $w_0 w_1 = \widehat{w_4 w_5}$ et $w_7 w_0 = \widehat{w_3 w_4}$ données par la solution admissible S , celles-ci s'écrivant respectivement comme

$$u_0 v_0 w'_0 w_1 = w_0 w_1 = \widehat{w_5 w_4} = \widehat{w_5 u_4 v_4 w'_4} = u_0 v_0 \widehat{w_5 w'_4},$$

$$w_7 w'_0 v_0 u_0 = w_7 w_0 = \widehat{w_4 w_3} = \widehat{w'_4 v_4 u_4 w_3} = \widehat{w'_4 w_3} v_0 u_0,$$

où nous avons utilisé l'Équation (4.7) pour obtenir les termes de droite. Donc $\text{COUCPE}(S)$ est bien une solution admissible.

(ii) Nous sommes ici dans le cas particulier du Lemme 11 où $n_0 = 1$. Posons $w_0 = p w'_0$, $w_1 = p w'_1$, $w_4 = q w'_4$ et $w_5 = q w'_5$. Nous voulons montrer que

$$\text{P-COUCPE}(S) = (w'_0, w'_1, w_2, w_3, w'_4, w'_5, w_6, w_7)$$

est une solution admissible. Puisque $n_0 = 1$, nous savons par le Lemme 8 que $w_0 = v_0 = w_1 \widehat{w}_3$ et donc que (*) $w'_0 = w'_1 \widehat{w}_3$. Selon les même arguments, nous avons que (**) $w'_4 = w'_5 \widehat{w}_7$. Comme $pw'_1 = w_1 = \widehat{w}_5 = \widehat{w}'_5 \widehat{q}$ (Lemme 11 (i)) possède la période $|p| = |q| = g$, ceci implique que (***) $w'_1 = \widehat{w}'_5$. Nous avons alors que

$$\begin{aligned} w_7 w'_0 &\stackrel{(*)}{=} w_7 w'_1 \cdot \widehat{w}_3 &\stackrel{(***)}{=} w_7 \widehat{w}'_5 \cdot \widehat{w}_3 &\stackrel{(**)}{=} \widehat{w}'_4 \widehat{w}_3 = \widehat{w}_3 \widehat{w}'_4 \\ w'_0 w'_1 &\stackrel{(*)}{=} w'_1 \cdot \widehat{w}_3 w'_1 &\stackrel{(***)}{=} \widehat{w}'_5 \cdot w_7 \widehat{w}'_5 &\stackrel{(**)}{=} \widehat{w}'_5 \widehat{w}'_4 = \widehat{w}'_4 \widehat{w}'_5. \end{aligned}$$

Enfin, puisque $w_1 w_2 = \widehat{w}_5 \widehat{w}_6$ possède la période g (Lemme 11 (ii)), nous déduisons de cette égalité qui s'écrit $pw'_1 w_2 = w_1 w_2 = \widehat{w}_6 \widehat{w}'_5 \widehat{q}$ que $w'_1 w_2 = \widehat{w}'_5 \widehat{w}_6$. Donc P-COUPÉ(S) est une solution admissible.

(iii) Les arguments pour prouver que S-COUPÉ(S) est une solution admissible sont semblables à ceux utilisés au point (ii), raisonnant avec les suffixes des w_i plutôt qu'avec leur préfixes.

(iv) Soit $(w'_i) = \text{ÉCHANGE}(S)$. Nous montrons d'abord que $w'_0 w'_1 = \widehat{w}'_4 \widehat{w}'_5$. Nous savons de l'Équation (4.6) que $\widehat{w}_4 v_1 u_1 = \widehat{v}_5 \widehat{u}_5 \widehat{w}_4$ et de l'Équation (4.11) que $\widehat{w}_4 v_1 = \widehat{v}_5 w_0$. Ainsi

$$w'_0 \cdot w'_1 \stackrel{def}{=} \widehat{w}_4 \cdot (v_1 u_1)^{n_1} v_1 = (\widehat{v}_5 \widehat{u}_5)^{n_1} \widehat{w}_4 v_1 = (\widehat{v}_5 \widehat{u}_5)^{n_1} \widehat{v}_5 w_0 = \widehat{w}'_4 \widehat{w}'_5.$$

Montrons maintenant que $w'_1 w'_2 = \widehat{w}'_5 \widehat{w}'_6$. Nous savons de l'Équation (4.7) que $u_1 v_1 \widehat{w}_6 = \widehat{w}_6 \widehat{u}_5 \widehat{v}_5$ et de l'Équation (4.10) que $v_1 \widehat{w}_6 = w_2 \widehat{v}_5$. Ainsi,

$$w'_1 \cdot w'_2 \stackrel{def}{=} v_1 (u_1 v_1)^{n_1} \cdot \widehat{w}_6 = (v_1 \widehat{w}_6 (\widehat{u}_5 \widehat{v}_5)^{n_1}) = w_2 \widehat{v}_5 (\widehat{u}_5 \widehat{v}_5)^{n_1} = \widehat{w}'_5 \widehat{w}'_6.$$

Les preuves pour $w'_2 w'_3 = \widehat{w}'_6 \widehat{w}'_7$ et $w'_3 w'_4 = \widehat{w}'_7 \widehat{w}'_0$ se font comme ci-haut en incrémentant les indices de 2. Ainsi ÉCHANGE(S) est une solution admissible. ■

Remarque. Comme nous ne sommes intéressés qu'aux solutions admissibles, nous disons que l'opérateur COUPÉ, P-COUPÉ, S-COUPÉ ou ÉCHANGE s'**applique** sur S si la condition décrite en (i), (ii), (iii) ou (iv) respectivement est satisfaite.

Lorsque COUPÉ $_i$, P-COUPÉ $_i$ ou S-COUPÉ $_i$ s'applique sur S , il y a en fait présence de périodicité locale dans le voisinage de w_i (Lemme 8 et 11). Conséquemment, l'action

de ces opérateurs résulte en la suppression d'une occurrence de la période présente, comme illustré dans les Figures 4.6 et 4.7. L'opérateur ÉCHANGE est, quant à lui, simplement défini à partir des relations entre les w_i et les diverses périodes $u_j v_j$ (Lemme 10). Nous prouvons un peu plus tard que COUPE, P-COUPE et S-COUPE sont tous inversibles (voir Section 4.3 pour la définition des inverses respectifs ÉTIRE, P-ÉTIRE et S-ÉTIRE).

Définition 14. *L'opérateur $\varphi \in \{\text{COUPE}_i, \text{P-COUPE}_i, \text{S-COUPE}_i, \text{ÉCHANGE}_i\}$ réduit la solutions admissible S si $|\varphi(S)| < |S|$.*

Ainsi, la discussion précédente nous indique que lorsqu'ils s'appliquent, les opérateurs COUPE, P-COUPE et S-COUPE réduisent les solutions admissibles. Quant à ÉCHANGE, il ne réduit une solution que sous certaines conditions.

Proposition 20. *Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- (i) Si $|w_i| > d_i$, alors $|\text{COUPE}_i(S)| < |S|$.
- (ii) Si $|w_i| = d_i$ et $|w_{i+1}| > g$, alors $|\text{P-COUPE}_i(S)| < |S|$.
- (iii) Si $|w_i| = d_i$ et $|w_{i+7}| > g$, alors $|\text{S-COUPE}_i(S)| < |S|$.
- (iv) Si u_{i+1} et u_{i+3} sont non vides alors

$$|v_{i+1}| + |v_{i+3}| < |u_{i+1}| + |u_{i+3}| \iff |\text{ÉCHANGE}_i(S)| < |S|.$$

Comme toutes les solutions admissibles ne codent pas un polyomino, rien encore ne nous garantit que l'image S' d'une solution S codant un double carré soit encore un double carré. À défaut de posséder cette information, nous savons à tout le moins que le nombre d'enroulements effectués par le résultat S' sera le même que S , soit $\mathcal{T}(S') = \mathcal{T}(S) = 1$. Plus généralement, nous avons le résultat suivant.

Lemme 13. *Le nombre d'enroulements \mathcal{F} est invariant sous l'application des opérateurs CONJUGUE, COUPE, P-COUPE, S-COUPE et ÉCHANGE, lorsque ceux-ci s'appliquent.*

Démonstration. En démontrant la Proposition 15, nous avons établi que pour $A, B \in \mathcal{F}^*$,

$$\mathcal{F}([AB\widehat{A}\widehat{B}]) = \mathcal{F}(\overline{B_1}A_1) + \mathcal{F}(A_k B_1) + \mathcal{F}(B_n \overline{A_k}) + \mathcal{F}(\overline{A_1}B_n)$$

où $|A| = k$ et $|B| = n$. Pour une solution admissible $S = (w_i)_{i \in [0..7]}$, ce résultat se traduit par

$$\mathcal{F}(S) = \sum_{n \in \{0,2,4,6\}} \text{FST}(w_n) - \text{LST}(w_{n-1}) \quad (4.12)$$

$$= \sum_{n \in \{1,3,5,7\}} \text{FST}(w_n) - \text{LST}(w_{n-1}) \quad (4.13)$$

où chaque écriture correspond à une BN-factorisation.

Clairement, $\mathcal{F}(\text{CONJUGUE}(S)) = \mathcal{F}(S)$ puisque l'opérateur CONJUGUE ne modifie pas le mot circulaire codé par la solution S . Ensuite, lorsque les opérateurs COUPE, P-COUPE et S-COUPE s'appliquent, nous savons qu'ils ne font que supprimer une occurrence de période, de sorte que $\text{FST}(w_i)$ et $\text{LST}(w_i)$ demeurent inchangés pour tout i . Par conséquent, le nombre d'enroulements reste aussi le même. Il ne reste donc qu'à montrer le résultat pour ÉCHANGE. Soit

$$S' = (\widehat{w}_4, (v_1 u_1)^{n_1} v_1, \widehat{w}_6, (v_3 u_3)^{n_3} v_3, \widehat{w}_0, (v_5 u_5)^{n_5} v_5, \widehat{w}_2, (v_7 u_7)^{n_7} v_7)$$

le résultat de ÉCHANGE(S). Nous déduisons de l'Équation (4.7) que $\text{FST}(\widehat{w}_i) = \text{FST}(w_{i+3})$, et de l'Équation (4.2) que $\text{LST}(v_i) = \text{LST}(w_{i-1})$. Ainsi, le nombre d'enroulements de ÉCHANGE(S) s'écrit par (4.12) comme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S') &= \sum_{n \in \{0,2,4,6\}} \text{FST}(w'_n) - \text{LST}(w'_{n-1}) \\ &= \sum_{n \in \{0,2,4,6\}} \text{FST}(w_{n+4+3}) - \text{LST}(w_{n-2}) \\ &= \sum_{n \in \{0,2,4,6\}} \text{FST}(w_{n+7}) - \text{LST}(w_{n+6}) \\ &= \sum_{n \in \{1,3,5,7\}} \text{FST}(w_n) - \text{LST}(w_{n-1}) \\ &= \mathcal{F}(S) \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de l'Équation (4.13). ■

4.2.2 Algorithme de réduction

Dans cette section, nous appliquons séquentiellement plusieurs opérateurs de réduction à un double carré pour montrer qu'il est possible d'atteindre une croix "composée". Ici,

nous considérons la composition dans le sens général du terme, comme il en a été discuté à la toute fin du Chapitre 2 ; c'est-à-dire que nous n'exigeons pas que la composition préserve la simplicité des chemins. La **croix** $\mathbf{+}$ est, quant à elle, le plus petit double carré non-trivial (voir le Tableau 4.1 de (Provençal, 2008)). La solution admissible qu'elle décrit est, à conjugaison et parcours inversé près,

$$b(\mathbf{+}) = [(0, 10, 1, 21, 2, 32, 3, 03)].$$

Nous appelons par la suite **croix composée** tout polyomino obtenu de la croix par composition.



Figure 4.8: La croix $\mathbf{+}$.

Définition 15. Soit S et S' deux solutions admissibles telles que $S' = \varphi_n \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(S)$, où les φ_i sont des opérateurs agissant sur les solutions. Nous disons que S se réduit à S' si φ_k réduit $\varphi_{k-1} \circ \varphi_{k-2} \circ \dots \circ \varphi_1(S)$ pour tout $k \in [1..n]$.

Le résultat suivant nous apprend qu'une solution S dont le nombre d'enroulements est $\mathcal{F}(S) = \pm 1$ est presque toujours réductible, sauf si elle possède une forme très particulière.

Proposition 21. Soit S une solution admissible telle que $\mathcal{F}(S) = \pm 1$. Alors soit S est une croix composée, ou soit l'un des opérateurs COUPE, ÉCHANGE, P-COUPE ou S-COUPE s'applique sur S et la réduit.

Démonstration. S'il existe $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $|w_i| > d_i$, alors COUPE $_i$ réduit S (Proposition 20 (i)). Aussi, s'il existe i tel que u_{i+1} et u_{i+3} sont non-vides et tel que $|u_{i+1}| + |u_{i+3}| > |v_{i+1}| + |v_{i+3}|$, alors ÉCHANGE $_i$ réduit S (Proposition 20 (iv)). Si ni COUPE ni ÉCHANGE ne réduit S , alors pour $i \in [0..7]$ on a $n_i \in \{0, 1\}$.

Le cas $(n_i, n_{i+1}, n_{i+2}, n_{i+3}) = (0, 0, 0, 0)$ est impossible. En effet, supposons que nous soyons dans cette situation, i.e. $w_i = u_i$ pour tout i . Comme ÉCHANGE_i ne réduit pas S , nous savons que $|u_{i+1}| + |u_{i+3}| \leq |v_{i+1}| + |v_{i+3}|$ pour tout i . Utilisant l'égalité $|v_i| = |w_{i-1}| + |w_{i+1}| - |u_i|$, ceci implique que $|u_i| + |u_{i+2}| \leq |u_{i+1}| + |u_{i+3}|$. Nous déduisons alors que $|u_0| + |u_2| = |u_1| + |u_3|$. Mais ceci implique par le Lemme 18 que $\mathcal{F}(S) \neq \pm 1$, qui est une contradiction.

Considérons maintenant le cas $(n_i, n_{i+1}, n_{i+2}, n_{i+3}) = (1, 0, 0, 0)$. Si $n_i = 1$, alors $w_i = (u_i v_i) u_i$ mais comme $|w_i| < d_i$ (sinon on pourrait appliquer COUPE_i), nous avons que $u_i = \varepsilon$. Nous savons de plus par le Lemme 9 que $n_{i+1} = n_{i+3} = 0$. Posons maintenant $g = \text{pgcd}(|w_{i+2}|, d_{i+2})$ où nous rappelons que $d_{i+2} = |w_{i+1}| + |w_{i+3}|$. Nous savons du Corollaire 8 que $w_{i+1} w_{i+2} w_{i+3}$ possède la période g . Si $n_{i+2} = 0$, nous avons en particulier que $|w_{i+2}| < d_{i+2} = |w_{i+1}| + |w_{i+3}|$, ce qui implique que $g < |w_{i+1}|$ ou $g < |w_{i+3}|$. De la Proposition 19, nous avons que S se réduit à $\text{P-COUPE}_i(S)$ dans le premier cas, et à $\text{S-COUPE}_i(S)$ dans le second.

Ne demeure que le cas $(n_0, n_1, n_2, n_3) = (1, 0, 1, 0)$. La solution admissible alors générée est $(u_1 \widehat{u}_3, u_1, u_3 u_1; u_3, \widehat{u}_1 u_3, \widehat{u}_1, \widehat{u}_3 \widehat{u}_1, \widehat{u}_3)$, qui est exactement la croix sur laquelle nous avons appliqué la transformation homologue $\mathbf{0} \mapsto u_1$, $\mathbf{1} \mapsto u_3$, $\mathbf{2} \mapsto \widehat{u}_1$ et $\mathbf{3} \mapsto \widehat{u}_3$. Lorsque $(n_0, n_1, n_2, n_3) = (0, 1, 0, 1)$, la solution admissible est d'une forme semblable, à conjugaison près. ■

Théorème 6. *Tout double carré se réduit à une croix composée.*

Démonstration. Soit S une solution générée par un double carré. Nous savons que le nombre d'enroulements de S est $\mathcal{F}(S) = \pm 1$. Alors, par la Proposition 21, soit S est une croix composée, soit S peut être réduit par un opérateur de réduction qui préserve le nombre d'enroulements (Lemme 13). Alors la Proposition 21 peut s'appliquer de nouveau. Puisque la longueur de la solution admissible diminue toujours à chaque étape, le principe de descente infinie de Fermat s'applique. Il s'en suit que le nombre d'itérations est fini et donc que S se réduit à une croix composée. ■

Algorithm 1 Réduction d'un double carré

```

1: function REDUCTION( $S$ )
2:   Entrée : une solution  $S = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7)$ 
3:   Sortie : une liste ordonnée d'opérateurs.
4:    $L \leftarrow ()$ 
5:   tant que  $\nexists i$  tel que  $|w_i| = d_i$  et  $|w_{i+2}| = d_{i+2}$  faire
6:     si  $\exists i$  tel que  $|w_i| > |w_{i-1}| + |w_{i+1}|$  alors
7:        $S \leftarrow \text{COUPE}_i(S)$ ,  $L \leftarrow L + (\text{COUPE}_i)$ 
8:     sinon si il existe  $i$  tel que  $|u_{i+1}| + |u_{i+3}| > |v_{i+1}| + |v_{i+3}|$  alors
9:        $S \leftarrow \text{ÉCHANGE}_i(S)$ ,  $L \leftarrow L + (\text{ÉCHANGE}_i)$ 
10:    sinon
11:       $g \leftarrow \text{pgcd}(|w_{i-1}| + |w_{i+1}|, |w_{i+2}|)$ 
12:      si  $g < |w_{i+1}|$  alors
13:         $S \leftarrow \text{P-COUPE}_i(S)$ ,  $L \leftarrow L + (\text{P-COUPE}_i)$ 
14:      sinon
15:         $S \leftarrow \text{S-COUPE}_i(S)$ ,  $L \leftarrow L + (\text{S-COUPE}_i)$ 
16:      fin si
17:    fin si
18:  fin tant que
19:  Retourne:  $L$ 
20: fin function

```

La démonstration de ce théorème propose en quelque sorte un algorithme nous permettant de réduire n'importe quel double carré à une croix composée, dont le pseudo-code se retrouve dans l'Algorithme 1. Celui-ci prend en entrée une solution admissible et retourne une liste d'opérateurs à appliquer pour réduire la solution à chaque étape. La Figure 4.9 illustre l'exécution de l'algorithme de réduction sur un double carré.

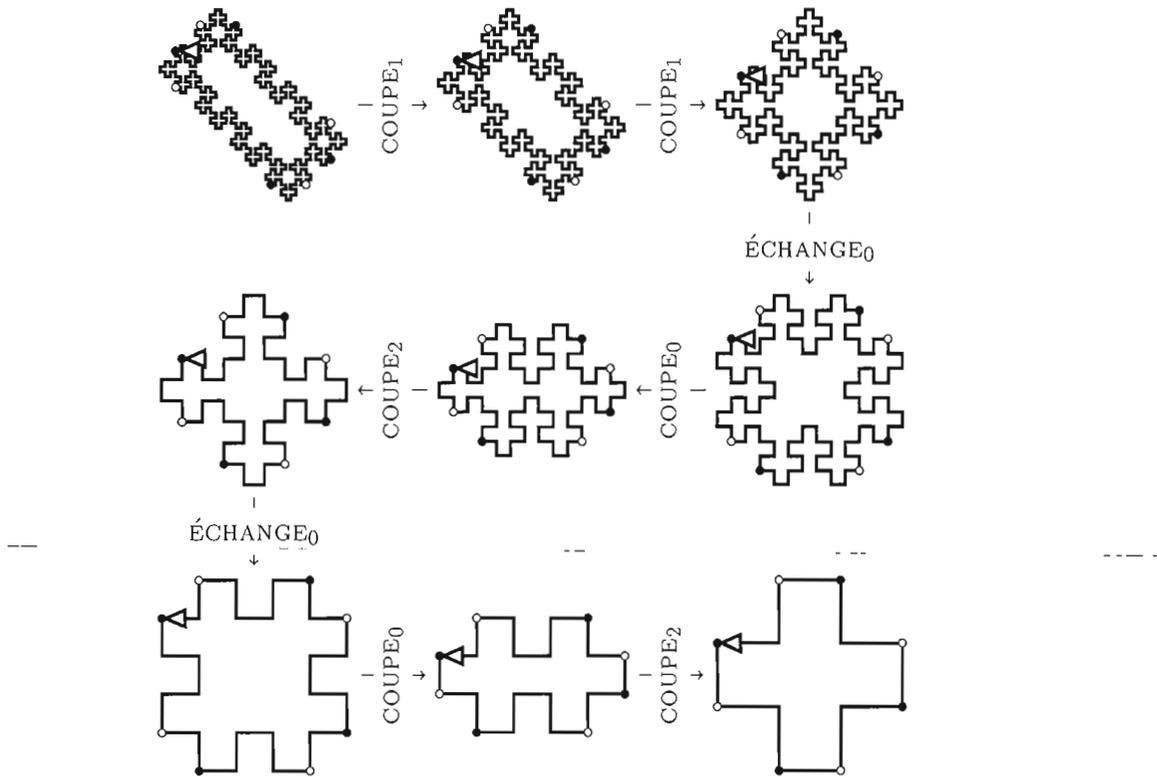


Figure 4.9: Réduction d'un double carré à la croix.

4.3 Génération de solutions admissibles.

Nous avons conclu la section précédente sur le Théorème 6 énonçant que tout double carré se réduit à une croix composée. S'impose alors naturellement la question à savoir si celui-ci fournit aussi un algorithme générant tous les doubles carrés lorsque l'on inverse les opérateurs de réduction. Dans cette section, nous introduisons de nouveaux opérateurs définis sur les solutions admissibles qui s'avèrent être ces inverses. Nous don-

nons de plus quelques relations qu'ils satisfont et nous présentons un algorithme qui génère tous les doubles carrés dont le périmètre est en-deçà d'une longueur donnée.

Définition 16. Soit $S = (w_i)_{i \in [0..7]}$ une solution admissible. Soit $g = \text{pgcd}(|w_2|, d_2)$, $p = \text{Pref}_g(w_1 w_2 w_3)$ et $q = \text{Pref}_g(w_5 w_6 w_7)$. Nous définissons

$$\text{ÉTIRE}(S) = (w_0(v_0 u_0), w_1, w_2, w_3, w_4(v_4 u_4), w_5, w_6, w_7),$$

$$\text{P-ÉTIRE}(S) = (p w_0, p w_1, w_2, w_3, q w_4, q w_5, w_6, w_7),$$

$$\text{S-ÉTIRE}(S) = (w_0 q, w_1, w_2, w_3 p, w_4 p, w_5, w_6, w_7 q).$$

Proposition 22. Soit $S = (w_i)_{i \in [0..7]}$ une solution admissible.

- (i) Alors $\text{ÉTIRE}(S)$ est une solution admissible.
- (ii) Si $|w_0| = d_0$ alors $\text{P-ÉTIRE}(S)$ est une solution admissible.
- (iii) Si $|w_0| = d_0$ alors $\text{S-ÉTIRE}(S)$ est une solution admissible.

Démonstration. Les arguments sont semblables à ceux utilisés dans la preuve de la Proposition 19, en ajoutant des périodes plutôt qu'en les enlevant. ■

Tous nos opérateurs sont inversibles, comme l'exprime le résultat suivant.

Proposition 23. Soit $S = (w_i)_{i \in [0..7]}$ une solution admissible.

- (i) $\text{CONJUGUE}^8(S) = S$
- (ii) $\text{COUPE} \circ \text{ÉTIRE}(S) = S$ et si $|w_0| > d_0$, alors $\text{ÉTIRE} \circ \text{COUPE}(S) = S$.
- (iii) Si $|w_0| = d_0$ alors $\text{P-COUPE} \circ \text{P-ÉTIRE}(S) = S$. Si de plus $|w_1| > g$, alors $\text{P-ÉTIRE} \circ \text{P-COUPE}(S) = S$.
- (iv) Si $|w_0| = d_0$ alors $\text{S-COUPE} \circ \text{S-ÉTIRE}(S) = S$. Si de plus $|w_7| > g$, alors $\text{S-ÉTIRE} \circ \text{S-COUPE}(S) = S$.
- (v) Si u_{i+1} et u_{i+3} sont non-vides, alors $\text{ÉCHANGE}^2(S) = S$.

Démonstration. Le point (i) est immédiat, alors que (ii) découle du fait que les mots u_0, v_0, u_4, v_4 sont inchangés par l'application des opérateurs COUPE et ÉTIRE .

(iii) Soit $w'_0 = pw_0$, $w'_1 = pw_1$, $w'_4 = qw_4$ et $w'_5 = qw_5$. Alors

$$S' = \text{P-ÉTIRE}(S) = (w'_0, w'_1, w_2, w_3, w'_4, w'_5, w_6, w_7).$$

Notons d'abord que P-COUCPE est défini sur S' , la condition $|w'_0| = d'_0$ étant satisfaite. En effet, $|w'_0| = |w_0| + |p| = d_0 + |p| = |w_7| + |pw_1| = d'_0$. De plus, $|p'| = \text{pgcd}(w_2, d'_2) = \text{pgcd}(w_2, d_2 + |p|) = \text{pgcd}(w_2, d_2) = |p|$ puisque $|p| = \text{pgcd}(|w_2|, d_2)$. Nous avons alors que

$$\begin{aligned} \text{P-COUCPE}(S') &= (p'^{-1}w'_0, p'^{-1}w'_1, w_2, w_3, q'^{-1}w'_4, q'^{-1}w'_5, w_6, w_7) \\ &= (p^{-1}pw_0, p^{-1}pw_1, w_2, w_3, q^{-1}qw_4, q^{-1}qw_5, w_6, w_7) \\ &= S \end{aligned}$$

puisque $p' = \text{Pref}_{|p|}(w'_1w_2) = p$ et $q' = \text{Pref}_{|p|}(w'_5w_6) = q$. Ainsi $\text{P-COUCPE}(S') = \text{P-COUCPE} \circ \text{P-ÉTIRE}(S) = S$. Le fait que $\text{P-ÉTIRE} \circ \text{P-COUCPE}(S) = S$ se prouve par des arguments similaires. Les arguments pour prouver (iv) sont identiques à ceux utilisés au point (iii), considérant les suffixes au lieu des préfixes. Quant à (v), il découle directement de la définition de ÉCHANGE. ■

Dans le but d'obtenir un algorithme de génération plus efficace, mentionnons quelques propriétés de commutativité satisfaites par les opérateurs ÉTIRE, ÉCHANGE, P-ÉTIRE et S-ÉTIRE (voir Figure 4.10).

Proposition 24. Soit $\varphi \in \{\text{ÉTIRE}, \text{ÉCHANGE}, \text{P-ÉTIRE}, \text{S-ÉTIRE}\}$ et $i \in \mathbb{Z}_8$.

- (i) $\varphi_i = \varphi_{i+4}$;
- (ii) $\text{ÉCHANGE}_i = \text{ÉCHANGE}_{i+2}$;
- (iii) $\text{ÉTIRE}_{i+2} \circ \text{ÉTIRE}_i = \text{ÉTIRE}_i \circ \text{ÉTIRE}_{i+2}$;
- (iv) $\text{ÉTIRE}_{i+1} \circ \text{ÉCHANGE}_i = \text{ÉCHANGE}_i \circ \text{ÉTIRE}_{i+1}$;
- (v) $\text{P-ÉTIRE}_i \circ \text{S-ÉTIRE}_i = \text{S-ÉTIRE}_i \circ \text{P-ÉTIRE}_i$.

Basé sur les résultats précédents, l'Algorithme 2 permet de générer tous les doubles carrés de périmètre au plus n . Soulignons qu'il peut être considérablement amélioré en utilisant la Proposition 24. Plus précisément, il est possible d'éviter d'explorer tous les chemins impliquant des opérateurs commutatifs en choisissant une priorité sur les

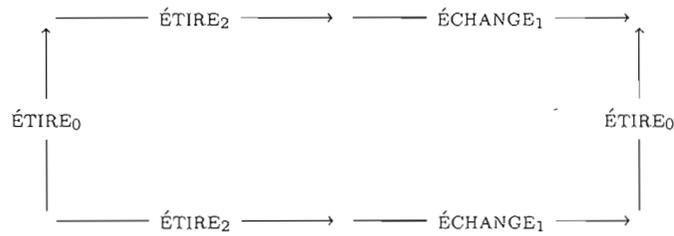


Figure 4.10: Deux façons différentes de générer le même double carré. Le diagramme commute en vertu de la Proposition 24 (iii) et (iv).

Algorithm 2 Génération de doubles carrés

```

1: function GENERATE( $n$ )
2:   Input :  $n$ , le périmètre maximum des double carrés générés.
3:   Output : l'ensemble de tous les doubles carrés de périmètre au plus  $n$ .
4:    $T \leftarrow \emptyset$ 
5:    $Q \leftarrow \{P : P \text{ est une croix composée de périmètre au plus } n\}$ 
6:   tant que  $Q \neq \emptyset$  faire
7:      $t \leftarrow \text{POP}(Q)$ 
8:     si  $[t]$  est un polyomino alors  $T \leftarrow T \cup \{[t]\}$ 
9:      $C \leftarrow \{\text{ÉTIRE}_i(t) : i = 0, 1, 2, 3\}$ 
10:     $C \leftarrow C \cup \{\text{ÉCHANGE}_i(t) : i = 0, 1\}$ 
11:     $C \leftarrow C \cup \{\text{P-ÉTIRE}_i(t) : i = 0, 1, 2, 3 \text{ and } |w_i| = d_i\}$ 
12:     $C \leftarrow C \cup \{\text{S-ÉTIRE}_i(t) : i = 0, 1, 2, 3 \text{ and } |w_i| = d_i\}$ 
13:     $Q \leftarrow Q \cup \{c \in C : |t| < |c| \leq n\}$ 
14:   fin tant que
15:   Retourne:  $T$ 
16: fin function

```

opérateurs. Par exemple, nous pouvons éviter d'utiliser l'opérateur ÉTIRE_2 si le dernier opérateur appliqué est soit ÉTIRE_0 ou ÉCHANGE_1 . Nous croyons aussi que certains opérateurs sont superflus ; nous en discutons dans la dernière section.

Le calcul de la complexité de l'Algorithme 2 n'est pas immédiat. En effet, excepté pour

quelques conjectures que nous énonçons dans la section suivante, nous ne savons pas exactement le nombre de solutions admissibles codant des doubles carrés. D'un autre côté, notre algorithme est clairement plus efficace que la stratégie naïve consistant à énumérer tous les mots de longueur n sur \mathcal{F} puis à vérifier s'ils décrivent chacun un double carré ou non. Une analyse raffinée des Lignes 5 et 8 de l'Algorithme 2 pourrait aussi s'avérer utile. On trouve par exemple dans (Brek, Koskas et Provençal, 2009) un test vérifiant en $O(n)$ si un mot de longueur n code le bord d'un polyomino, soit une procédure pour effectuer la Ligne 8 en temps optimal. Enfin, il ne serait pas trop difficile d'énumérer les doubles carrés en fonction de la longueur de leur périmètre : il suffirait de faire de Q une file à priorité.

4.4 Remarques et problèmes ouverts

Bien que nous ayons exhibé un algorithme générant des doubles carrés, plusieurs améliorations peuvent encore être effectuées. Par exemple, nous avons observé que toutes les solutions admissibles dont la génération utilise au moins un opérateur parmi P-COUCPE et S-COUCPE possèdent des croisements. Ainsi, nous conjecturons que seulement deux des opérateurs de réduction suffisent pour réduire les solutions admissibles qui sont des doubles carrés, de telle sorte que seuls les opérateurs ÉTIRE et ÉCHANGE seraient nécessaires dans le processus de génération.

Conjecture 1. Soit S une solution admissible codant un double carré. Alors

- (i) S est une croix composée ou
- (ii) $\text{COUCPE}_i(S)$ est un double carré de taille plus petite que S ou
- (iii) $\text{ÉCHANGE}_i(S)$ est un double carré de taille plus petite que S .

Comme première étape vers la résolution de cette conjecture, nous avons montré que les conditions d'application des opérateurs P-COUCPE et S-COUCPE imposent nécessairement un croisement dans la solution sur laquelle ils s'appliquent.

Corollaire 10. Soit S une solution admissible telle que $d_i = |w_{i+1}| + |w_{i+3}|$ divise $|w_i|$, i.e. u_i est vide. Alors le chemin décrit par S possède un croisement.

La Figure 4.5 illustre justement un exemple de solution satisfaisant à ces hypothèses. La seconde étape pour vérifier si la Conjecture 1 est vraie serait de prouver que ces croisements ne disparaissent jamais sous l'application consécutive d'opérateurs de génération.

Nous nous sommes aussi intéressés à la conjecture tirée de (Provençal, 2008) selon laquelle les facteurs $w_i w_{i+1}$ d'un double carré premier seraient nécessairement des palindromes, pour tout $i \in \mathbb{Z}_8$. Bien que cette conjecture demeure non résolue, nous avons comme point de départ vers sa résolution les résultats suivants.

Lemme 14. *Soit $S = (w_i)_{i \in [0..7]}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $w_i w_{i+1}$ est un palindrome pour tout i ;
- (ii) $w_i = \overline{w_{i+4}}$ pour tout i ;
- (iii) $u_i = \overline{u_{i+4}}$ et $v_i = \overline{v_{i+4}}$ pour tout i .

Démonstration. (i) \iff (ii) Comme $w_i w_{i+1} = \widehat{w_{i+5} w_{i+4}}$, nous avons que

$$w_i w_{i+1} \in \text{Pal}(\mathcal{F}^*) \iff \widetilde{w_{i+1} w_i} = w_i w_{i+1} = \widehat{w_{i+5} w_{i+4}}.$$

Puisque $|w_i| = |w_{i+4}|$, le résultat suit.

(ii) \iff (iii) Comme $|u_i| = |u_{i+4}|$ et $|v_i| = |v_{i+4}|$ pour tout i , nous avons que $w_i = \overline{w_{i+4}}$ pour tout i si et seulement si

$$u_i v_i = \widehat{w_{i-3} w_{i-1}} = \widetilde{w_{i+1} w_{i+3}} = \overline{w_{i+1} w_{i+3}} = \overline{u_{i+4} v_{i+4}}. \quad \blacksquare$$

Proposition 25. *Soit $S = (w_i)_{i \in [0..7]}$ une solution et φ un opérateur de génération ou de réduction s'appliquant sur S . Posons $S' = \varphi(S)$. Alors $w_i w_{i+1}$ est un palindrome pour tout i si et seulement si $w'_i w'_{i+1}$ est un palindrome pour tout i .*

Démonstration. Sans perte de généralité, nous supposons que $i = 0$. Nous savons du Lemme 3 qu'un mot m possédant la période p satisfait la condition suivante

$$m \text{ est un palindrome} \iff xm \text{ et } mz \text{ sont des palindromes}$$

où $x = \text{Pref}_p(m)$ et $z = \text{Suff}_p(m)$. Posons $w_0 = w'_0 \cdot (v_0 u_0)$. Comme l'opérateur COUPE enlève exactement un facteur périodique de période d_0 au mot w_0 , et sachant que $w_7 w_0 w_1$ possède la période d_0 (Corollaire 8), il s'en suit par l'équivalence ci-haut que $w_7 w'_0$ et $w'_0 w_1$ sont encore des palindromes. Comme $\text{ÉTIRE}_0 = \text{ÉTIRE}_4$ (Proposition 24), nous avons aussi que $w_3 w'_4$ et $w'_4 w_5$ sont des palindromes, ce qui prouve le résultat pour ÉTIRE_i .

Considérons maintenant $S' = \text{ÉCHANGE}(S)$, i.e.

$$(w'_i)_{i \in [0..7]} = (\widehat{w}_4, (v_1 u_1)^{n_1} v_1, \widehat{w}_6, (v_3 u_3)^{n_3} v_3, \widehat{w}_0, (v_5 u_5)^{n_5} v_5, \widehat{w}_2, (v_7 u_7)^{n_7} v_7).$$

Nous avons du lemme précédent (ii) et (iii) que $w'_0 w'_1 = \widehat{w}_4 (v_1 u_1)^{n_1} v_1 = \widehat{w}_0 (\overline{v_5 u_5})^{n_1} \overline{v_5}$. Prenant l'image miroir de cette égalité, nous obtenons en utilisant les Équations (4.6) et (4.11) que $(\widehat{v_5 u_5})^{n_1} \widehat{v_5} w_0 = \widehat{w}_4 (v_1 u_1)^{n_1} v_1$, prouvant donc que $w'_0 w'_1$ est bien un palindrome. Nous montrons par les mêmes arguments que $w'_1 w'_2$ est un palindrome. Comme $\text{ÉCHANGE}_i = \text{ÉCHANGE}_{i+2}$ (Proposition 24), nous concluons que $w'_i w'_{i+1}$ est un palindrome pour tout i . Considérons enfin $S' = \text{P-COUPE}$, où

$$(w'_i)_{i \in [0..7]} = (p^{-1} w_0, p^{-1} w_1, w_2, w_3, q^{-1} w_4, q^{-1} w_5, w_6, w_7).$$

Nous sommes dans la situation $u_0 = \varepsilon$ et $w_0 = v_0$, i.e. $w_0 = w_1 \widehat{w}_3$. Comme $w_7 w_0$ et $w_0 w_1$ sont des palindromes, nous avons que w_1 et w_3 sont eux aussi des palindromes puisque $w_7 w_0 = w_7 w_1 \widehat{w}_3$ et $w_0 w_1 = w_1 \widehat{w}_3 w_1$. Maintenant, comme $w_1 w_2 w_3$ possède la période $|p|$ (Lemme 11 (ii)), nous avons par la condition du début que $p^{-1} w_1 w_2 = w'_1 w_2$ et $p^{-1} w_1$ sont encore des palindromes. Ainsi, $w'_0 w'_1 = w'_1 \widehat{w}_3 w'_1$ et $w_7 w'_0 = w_7 \cdot w'_1 \widetilde{w}_7$ sont aussi des palindromes, achevant la preuve que P-COUPE préserve les palindromes. Nous montrons selon le même raisonnement que S-COUPE préserve les palindromes. Encore selon les mêmes arguments, nous montrons que les inverses ÉTIRE , P-ÉTIRE et S-ÉTIRE préservent les palindromes, ce qui termine la preuve. ■

Corollaire 11. *Soit $w = [AB\widehat{A}\widehat{B}] = [XY\widehat{X}\widehat{Y}]$ le bord d'un double carré. Si w se réduit à la croix (qui est premier), alors A , B , X et Y sont des palindromes.*

Démonstration. Ceci est une conséquence directe de la proposition précédente jointe au fait que chaque facteur $w_i w_{i+1}$ de la croix est un palindrome. Rappelons en effet que la solution admissible décrite par la croix est, à conjugaison et parcours inversé près, $b(\oplus) = [(0, 10, 1, 21, 2, 32, 3, 03)]$. ■

La conjecture de palindromicité des tuiles premières se réduit ainsi à la suivante.

Conjecture 2. Soit S une solution première et φ un opérateur de réduction s'appliquant sur S . Alors $\varphi(S)$ est aussi une solution première.

En d'autres mots, les opérateurs de réduction préserveraient la propriété de primalité des solutions en plus de préserver la palindromicité des facteurs $w_i w_{i+1}$.

CONCLUSION

Ce mémoire avait pour objectif principal d'illustrer la facilité avec laquelle certains problèmes de géométrie discrète peuvent être approchés grâce à la combinatoire des mots et ses équations. Ainsi, après avoir introduit au Chapitre 1 et 2 les éléments de base constituant ces deux disciplines, nous avons présenté deux problèmes de différente nature en géométrie discrète que nous avons considérés en termes d'équations sur les mots.

Comme premier problème, nous avons étudié la conjecture selon laquelle un polyomino possède au plus deux factorisations en pseudo-carré. Sa résolution a été possible grâce à deux éléments clés qui ont été déduits directement des équations : 1) le codage relatif d'un pseudo-carré est caractérisé par quatre virages à gauche pour passer d'un côté à l'autre et 2) chaque factorisation en pseudo-carré fait apparaître des symétries particulières chez celui-ci. Par ailleurs, il semble que la méthode de résolution empruntée pour prouver cette conjecture puisse être adaptée afin de démontrer sa généralisation :

Conjecture 3. Soit D un polyomino possédant deux BN-factorisations distinctes en pseudo-carré. Alors D ne possède aucune autre BN-factorisation, qu'elle soit carrée ou hexagonale.

Le second problème était d'obtenir plus d'informations sur la structure des doubles carrés que celles déjà fournies par ses BN-factorisations. Pour ce faire, nous avons considéré les solutions générales à l'équation fournie par cette double factorisation ; celles-ci se sont avérées posséder une structure périodique locale très rigide. Cette structure nous a fourni les éléments nécessaires à la construction d'un algorithme de réduction et de génération de doubles carrés. Ces derniers ne semblent pas être optimaux : en effet, certains opérateurs peuvent vraisemblablement être éliminés. Cette remarque constitue

un point intéressant à étudier dans un futur rapproché.

Notons que les travaux du Chapitre 4 ont été partiellement motivés par la résolution d'une conjecture reliant primalité et palindromicité des doubles carrés. Bien que celle-ci demeure toujours non résolue, le modèle proposé semble adéquat et permet notamment de démontrer que la palindromicité est conservée par les opérateurs de réduction et de génération. Elle se traduit désormais simplement en termes de préservation de la primalité lors de l'exécution de l'algorithme de réduction. Enfin, il serait intéressant de restreindre l'application des algorithmes de réduction et de génération aux doubles carrés uniquement. En effet, plusieurs questions naturelles à ce propos apparaissent et demeurent sans réponses à ce jour :

Sous quelles conditions un opérateur (de réduction ou de génération) préserve la simplicité des chemins, i.e. la propriété de coder un double carré ?

Existe-t-il toujours une manière de réduire un double carré de telle sorte que la simplicité soit préservée à chaque étape de l'algorithme ?

Si oui, est-elle unique ?

Il ne fait aucun doute que des réponses positives à ces deux dernières questions amélioreraient considérablement l'efficacité des Algorithmes 1 et 2.

BIBLIOGRAPHIE

- Beauquier, D. et M. Nivat. 1991. « On translating one polyomino to tile the plane », *Discrete Comput. Geom.*, vol. 6, p. 575–592.
- Blondin Massé, A., S. Brlek, A. Frosini, S. Labbé, et S. Rinaldi. 2008. « Reconstructing words from a fixed palindromic length sequence ». In *TCS 2008, 5th IFIP Int. Conf. on Theoretical Computer Science*. Coll. « IFIP », no 273, p. 101–114. Springer-Verlag.
- Blondin Massé, A., S. Brlek, A. Garon, et S. Labbé. 2009. « Christoffel and Fibonacci tiles ». In Brlek, S., X. Provençal, et C. Reutenauer, éditeurs, *Proc. DGCI 2009, 15th IAPR Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery*. Coll. « LNCS », no 5810, p. 67–78. Springer-Verlag.
- Blondin Massé, A., S. Brlek, et S. Labbé. 2008. « Palindromic lacunas of the Thue-Morse word ». In *GASCom, Int. Conf. on Random Generation of Combinatorial Structures*, p. 53–67.
- Blondin Massé, A., Garon, A. et S. Labbé. 2010. « Generation of double squares ». In *GASCom, Int. Conf. on Random Generation of Combinatorial Structures*.
- Bousquet-Mélou, M. 1991. « q-énumération de polyominos convexes ». Thèse de Doctorat, Publications du LaCIM no. 9.
- Brlek, S., M. Koskas, et X. Provençal. 2009. « A linear time and space algorithm for detecting path intersection ». In Brlek, S., X. Provençal, et C. Reutenauer, éditeurs, *Proc. DGCI 2009, 15th IAPR Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery*. Coll. « LNCS », no 5810, p. 398–409. Springer-Verlag.
- Brlek, S., G. Labelle, et A. Lacasse. 2003. « Incremental algorithms based on discrete Green theorem ». In Nystrom, I., G. S. di Baja, et S. Svensson, éditeurs, *Proc. DGCI 2003, 11-th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery*. Coll. « LNCS », no 2886, p. 277–287. Springer-Verlag.
- . 2005a. « Algorithms for polyominoes based on the discrete Green theorem », *Discrete Applied Math.*, vol. 147, no. 3, p. 187–205.
- . 2005b. « A note on a result of Daurat and Nivat ». In de Felice, C. et A. Restivo, éditeurs, *Proc. DLT 2005, 9-th Int. Conf. on Developments in Language Theory*. Coll. « LNCS », no 3572, p. 189–198. Springer-Verlag.

- . 2006. « Properties of the contour path of discrete sets », *Int. J. Found. Comput. Sci.*, vol. 17, no. 3, p. 543–556.
- Brlek, S., J.-O. Lachaud, et X. Provençal. 2008. « Combinatorial view of convexity. ». In Coeurjolly, D., I. Sivignon, L. Tougne, et F. Dupont, éditeurs, *Proc. DGCI 2008, 14th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery*. Coll. « LNCS », no 4992, p. 57–68. Springer-Verlag.
- Brlek, S., J.-O. Lachaud, X. Provençal, et C. Reutenauer. 2009. « Lyndon + Christoffel = digitally convex », *Pattern Recognition*, vol. 42, p. 2239–2246.
- Daurat, A. et M. Nivat. 2003. « Salient and reentrant points of discrete sets ». In del Lungo, A., V. di Gesu, et A. Kuba, éditeurs, *Proc. IW CIA '03, International Workshop on Combinatorial Image Analysis*. Coll. « Electronic Notes in Discrete Mathematics », Palermo, Italia. Elsevier Science.
- Dudeney, H. 1902. « The canterbury puzzles : Sequels to the adventures », *London Mag.*, vol. 47, p. 480–482.
- Fine, N. et S. Wilf. 1965. « Uniqueness theorems for periodic functions », *Proc. Amer. Soc.*, vol. 16, p. 109–114.
- Freeman, H. 1961. « On the encoding of arbitrary geometric configurations », *IRE Trans. Electronic Computer*, vol. 10, p. 260–268.
- . 1970. « Boundary encoding and processing ». In Lipkin, B. et A. Rosenfeld, éditeurs, *Picture Processing and Psychopictorics*, p. 241–266. Academic Press, New York.
- Gardner, M. 1958. « Mathematical games », *Scientific American*, p. Sept. 182–192, Nov. 136–142.
- Golomb, S. W. 1996. *Polyominoes : Puzzles, Patterns, Problems, and Packings*. Princeton : Princeton Academic Press.
- Karhumäki, J. 2004. Combinatorics on words : a new challenging topic. Rapport no. 645, Center for Computer Science, Turku University.
- Labbé, S. 2008. « Propriétés combinatoires des f -palindromes ». Mémoire de maîtrise, M10615, Université du Québec à Montréal.
- Lothaire, M. 1983. *Combinatorics on Words*. T. 17, série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge : Cambridge University Press.
- . 2005. *Applied Combinatorics on Words*. T. 105, série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Provençal, X. 2008. « Combinatoire des mots, géométrie discrète et pavages ». Thèse de Doctorat, D1715, Université du Québec à Montréal.

Wijshoff, H. A. G. et J. van Leeuwen. 1984. « Arbitrary versus periodic storage schemes and tessellations of the plane using one type of polyomino », *Inform. Control*, vol. 62, p. 1-25.