

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

GÉOMÉTRIE TORIQUE DES QUADRILATÈRES CONVEXES

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR

EVELINE LEGENDRE

JUILLET 2010

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»



## REMERCIEMENTS

J'ai eu la chance d'avoir deux directeurs de thèse, Vestislav Apostolov et Paul Gauduchon, tout autant généreux de leur temps et de leurs conseils. Je remercie particulièrement Vestislav pour m'avoir poussée à aller toujours plus loin, pour son exceptionnelle disponibilité et ses relectures attentives. Je remercie particulièrement Paul pour sa gentillesse, son accueil à Paris et surtout pour avoir ouvert toutes grandes les portes de son savoir vaste et profond. Merci à David Calderbank pour ses commentaires sur le premier article lié à cette thèse et pour l'intérêt général qu'il a porté à mon travail.

Mille fois merci et plus encore à Rémi (Leclercq) qui est, non seulement, le lecteur le plus attentif que l'on puisse espérer, mais aussi, patient et toujours disponible. Un grand merci à Gabriel Chênevert, entre autres pour avoir partagé avec moi un automne triste ; à Baptiste Chantraine malgré mon caractère et à Alexandre Girouard malgré tout. Je vous remercie tous les quatre pour votre infaillible disponibilité et parce que l'époque waverlienne est encore la plus belle. Vous me manquez.

Les gens du CMLS, en particulier "les thésards", m'ont gentiment accueillie en France. Vu les complications administratives qu'implique une cotutelle, je m'en voudrais de ne pas remercier Michelle Lavalette du côté français et Manon Gauthier du côté québécois. Parlant de mon voyage en France, je me dois de remercier Kristel pour son accueil, nos discussions tardives et pour m'avoir sauvée des rats.

Je remercie les nombreux membres de ma famille (ma belle famille aussi) pour leur support, leur encouragement et parce qu'ils acceptent, sans trop se plaindre, que je sois souvent loin, rarement disponible. Merci à mes quelques amis qui l'acceptent aussi, je pense entre autres à Marie-Lou (qui serait bien mal placée pour se plaindre !), à Karine, à Nat et à Issa.

Je reviens à Rémi qui joue bien plus qu'un rôle, qui mérite bien plus qu'une phrase. Mais que dire ?



## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	ix
RÉSUMÉ . . . . .	xi
ABSTRACT . . . . .	xiii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
MÉTRIQUES EXTRÉMALES . . . . .	11
1.1 Métriques kählériennes extrémales au sens de Calabi . . . . .	11
1.2 Métriques sasakiennes extrémales . . . . .	14
1.2.1 Variétés de contact et cônes symplectiques . . . . .	14
1.2.2 Structures CR et métriques sasakiennes . . . . .	15
CHAPITRE II	
GÉOMÉTRIE TORIQUE . . . . .	21
2.1 Orbifolds symplectiques toriques et polytopes étiquetés . . . . .	21
2.1.1 Polytopes étiquetés . . . . .	21
2.1.2 Orbifolds symplectiques toriques . . . . .	23
2.1.3 Variétés algébriques toriques et éventails . . . . .	28
2.1.4 Un polytope rationnel pour différents réseaux . . . . .	30
2.2 Variétés de contact toriques et bons cônes . . . . .	32
2.2.1 Correspondance de Lerman . . . . .	32
2.2.2 Champ de Reeb . . . . .	35
2.3 Métriques kählériennes et sasakiennes compatibles . . . . .	37
2.3.1 Coordonnées action-angle . . . . .	37
2.3.2 Conditions au bord pour les potentiels dans le cas des cônes kählériens toriques. . . . .	40
2.3.3 Fonction affine extrémale d'un polytope étiqueté . . . . .	44
2.3.4 La conjecture de Donaldson . . . . .	49
2.3.5 Unicité des métriques extrémales . . . . .	50

CHAPITRE III	
CLASSIFICATION DES ORBIFOLDS SYMPLECTIQUES TORIQUES DE DIMENSION	
4 ADMETTANT DES 2-FORMES HAMILTONIENNES . . . . . 53	
3.1	Structures orthotoriques et quadrilatères génériques . . . . . 55
3.1.1	Structures orthotoriques . . . . . 55
3.1.2	Métriques orthotoriques extrémales . . . . . 59
3.2	Structures toriques de type Calabi et trapèzes . . . . . 63
3.2.1	Orbifolds kählériens toriques de dimension 4 admettant une 2-forme hamiltonienne non triviale . . . . . 63
3.2.2	Structures toriques de type Calabi . . . . . 67
3.2.3	Métriques toriques de type Calabi extrémales . . . . . 69
CHAPITRE IV	
FONCTIONS AFFINES EXTRÉMALES ÉQUIPOSÉES ET RÉOLUTION EXPLICITE	
ET LA CONJECTURE DE DONALDSON SUR UNE CLASSE DE QUADRILATÈRES . . . . . 73	
4.1	Fonctions équiposées et existence de solutions . . . . . 74
4.1.1	Cônes de vecteurs normaux intérieurs et solutions formelles . . . . . 74
4.1.2	Le cône des vecteurs normaux intérieurs avec fonction affine extrémale équiposée . . . . . 75
4.2	Stabilité et fonction affine extrémale équiposée . . . . . 78
4.3	Le cône de normales d'un quadrilatère convexe . . . . . 80
CHAPITRE V	
FAMILLE DE REEB DE POLYTOPE ÉTIQUETÉ ET L'INVARIANT DE FUTAKI TRANS-	
VERSE . . . . . 87	
5.1	Famille de Reeb d'un polytope étiqueté . . . . . 87
5.1.1	Cône canonique au dessus d'un polytope étiqueté . . . . . 87
5.1.2	À propos des conditions de rationalité . . . . . 89
5.1.3	Une paramétrisation de la famille de Reeb d'un polytope étiqueté . . . . . 90
5.2	L'invariant de Futaki transverse . . . . . 92
CHAPITRE VI	
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES . . . . . 99	
6.1	Existence de métriques extrémales orthotoriques et de type Calabi sur un orbifold torique . . . . . 99
6.1.1	Un critère pour les polygones rationnels . . . . . 99
6.1.2	Exemples . . . . . 103
6.2	Existence de métriques sasakiennes à courbure scalaire constante sur $S^2 \times S^3$ . . . 105

6.2.1	Champs de Reeb avec invariant de Futaki transverse restreint trivial . . . .	105
6.2.2	Existence et non unicité de métriques sasakiennes à courbure scalaire constante sur $S^2 \times S^3$ . . . . .	107
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	115



## LISTE DES FIGURES

5.1	$\mathcal{C}(I)$ et deux polytopes caractéristiques, $I_b$ et $I_o$ . . . . .	97
-----	---	----



## RÉSUMÉ

Le résultat principal contenu dans cette thèse est la résolution explicite de l'équation d'Abreu pour les quadrilatères convexes étiquetés dont la fonction affine extrémale est équilibrée (ceci inclut le cas où cette fonction est constante), confirmant ainsi la conjecture de Donaldson dans ce cas. De plus, nous donnons une classification des orbifolds symplectiques toriques de dimension 4 admettant une métrique kählérienne torique compatible avec une 2-forme hamiltonienne non triviale, en termes de classes d'équivalence de quadrilatères convexes étiquetés. Ces résultats conduisent à une classification explicite des métriques toriques extrémales admettant une 2-forme hamiltonienne non triviale sur les orbifolds symplectiques toriques de dimension 4 (excluant le cas des projectifs à poids, déjà traité par Apostolov, Calderbank, Gauduchon et Tønnesen-Friedman, 2004). Ceci inclut une classification des métriques toriques faiblement Bochner-plates.

Comme application, nous obtenons aussi qu'un orbifold symplectique torique dont le polytope moment est un quadrilatère et dont l'invariant de Futaki est nul admet une métrique kählérienne torique compatible, explicitement donnée via deux polynômes de degré au plus 3, et dont la courbure scalaire est constante. Nous donnons également des familles explicites d'orbifolds symplectiques toriques de dimension 4 admettant une métrique extrémale, à courbure scalaire constante, faiblement Bochner-plate ou Kähler-Einstein, ainsi que des familles explicites d'orbifolds symplectiques toriques de dimension 4 instables, n'admettant pas de métrique extrémale.

Dans le cas saskien torique, nous dégageons une fonctionnelle, définie sur le cône des champs de Reeb, dont les points critiques sont les champs de Reeb induisant un polytope caractéristique ayant une fonction affine extrémale constante (i.e d'invariant de Futaki transverse—restreint à l'algèbre de Lie du tore—nul). En étudiant cette fonctionnelle, nous obtenons l'existence de tels champs de Reeb sur toute variété de contact compacte torique co-orientée. En raffinant nos calculs en dimension 5, nous en déduisons l'existence d'une métrique saskienne compatible à courbure scalaire constante sur toute variété de contact compacte torique co-orientée de dimension 5, dont le cône moment a 4 facettes. Finalement, nous exhibons une famille à un paramètre rationnel de structures de contact toriques (bien connues) sur  $S^2 \times S^3$ , chacune admettant deux métriques (de même volume) toriques, compatibles et non isométriques. À notre connaissance, ceci constitue le premier exemple connu de non unicité de métriques extrémales saskiennes compatibles avec la même structure de contact.

Les résultats principaux de cette thèse ont donné lieu aux deux articles (Legendre, b) et (Legendre, a).

MOTS-CLÉS — structures kählériennes toriques et saskiennes toriques, structures kählériennes et saskiennes extrémales, 2-formes hamiltoniennes, structures orthotoriques, métriques à courbure scalaire constante, équation d'Abreu, polytopes étiquetés, bons cônes.



## ABSTRACT

The main result contained in this thesis is the explicit resolution of the Abreu equation on convex labeled quadrilaterals whose extremal affine function is equiposed (this includes the case when this function is constant), which confirms a conjecture of Donaldson in this particular case. Moreover, we give a classification of 4-dimensional toric symplectic orbifolds admitting a toric Kähler metric compatible with a non-trivial Hamiltonian 2-form, in terms of equivalence classes of labeled convex quadrilaterals. These results lead us to an explicit classification of extremal toric metrics admitting a non-trivial Hamiltonian 2-form on 4-dimensional toric symplectic orbifolds (excluding the case of weighted projective spaces, already studied by Apostolov, Calderbank, Gauduchon and Tønnesen-Friedman, 2004). This include a classification of weakly Bochner-flat toric metrics.

As applications, we also get that a toric symplectic orbifold whose moment polytope is a quadrilateral and whose Futaki invariant vanishes admits a compatible toric Kähler metric, explicitly given via two polynomials of degree at most 3, and whose scalar curvature is constant. We also point out explicit families of 4-dimensional toric symplectic orbifolds which admit extremal metrics, with constant scalar curvature, weakly Bochner-flat or Kähler-Einstein, and explicit families of instable 4-dimensional toric symplectic orbifolds which do not admit any extremal metric.

In the toric Sasaki case, we define a functional on the cone of Reeb vector fields, whose critical points are the Reeb vector fields inducing a characteristic polytope with constant extremal affine function (that is, whose transversal Futaki invariant, restricted to the Lie algebra of the torus, vanishes). By studying this functional, we get the existence of such Reeb vector fields on any co-oriented toric compact contact manifold. By refining our computations in dimension 5, we derive the existence of compatible Sasaki metrics with constant scalar curvature on any 5-dimensional co-oriented toric compact contact manifold, whose moment cone has 4 facets. Finally, we point out a family, parametrized by one rational parameter, of (well-known) toric contact structures on  $S^2 \times S^3$  admitting two non-isometric compatible toric metrics (with same volume). At our knowledge, this is the first example of non-uniqueness of extremal Sasaki metrics, compatible with the same contact structure.

The main results of this thesis can be found in the two papers (Legendre, b) and (Legendre, a).

**KEYWORDS** — toric Kähler and toric Sasaki structures, extremal Kähler and Sasaki structures, Hamiltonian 2-forms, orthotoric structures, constant scalar curvature metrics, Abreu's equation, labeled polytopes, good cones.



## INTRODUCTION

### Le problème

Cette thèse concerne un cas particulier du problème que nous décrivons ici. Soit  $\Delta$  un polytope simple et compact dans un espace vectoriel  $\mathfrak{t}^*$ , ses *facettes*, dénotées  $F_1, \dots, F_d$ , sont les faces de codimension 1. Un polytope est dit *étiqueté* s'il est muni d'un ensemble de vecteurs  $u = \{u_1, \dots, u_d\} \subset \mathfrak{t}$ , ses *normales*, tel que chaque  $u_k \in u$  est intérieur à  $\Delta$  et normal à la facette  $F_k$ . Étant donné un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$ , on dénote par  $\mathcal{S}(\Delta, u)$  l'ensemble des *potentiels symplectiques*, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions  $\phi$  lisses et strictement convexes sur  $\overset{\circ}{\Delta}$ , l'intérieur du polytope, telles que  $\mathbf{H} = (\text{Hess } \phi)^{-1}$  est lisse sur  $\Delta$ , définie positive sur l'intérieur de toutes les faces et satisfait, pour tout  $y$  dans l'intérieur de  $F_k$ ,

$$\mathbf{H}_y(u_k, \cdot) = 0 \quad \text{et} \quad d\mathbf{H}_y(u_k, u_k) = 2u_k. \quad (1)$$

Ces dernières expressions utilisent l'identification standard  $T_y^* \mathfrak{t}^* \simeq \mathfrak{t}$ .

Il existe une unique fonction affine sur  $\Delta$ , notée  $\zeta_{(\Delta, u)}$ , telle que la fonctionnelle

$$\mathcal{L}_{(\Delta, u)}(f) = \int_{\partial\Delta} f d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Delta} \zeta_{(\Delta, u)} f d\varpi$$

soit nulle sur les fonctions affines ( $d\varpi$  est une forme volume euclidienne sur  $\mathfrak{t}^*$  et  $d\sigma$  est la forme volume sur  $\partial\Delta$  telle que  $u_k \wedge d\sigma = -d\varpi$  sur  $F_k$ ,  $k = 1, \dots, d$ ). De façon équivalente,  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est la  $L^2(\Delta, d\varpi)$ -projection sur l'espace des fonctions affines de

$$S(\phi) = - \sum_{ij} \frac{\partial^2 H_{ij}}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \quad (2)$$

où  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$ ,  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  sont des coordonnées sur  $\mathfrak{t}^*$  et  $\mathbf{H} = (\text{Hess } \phi)^{-1} = (H_{ij})$ .

**Problème 1.** *Étant donné un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$ , existe-t-il un potentiel symplectique  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  satisfaisant l'équation d'Abreu :*

$$S(\phi) = \zeta_{(\Delta, u)} ? \quad (3)$$

*Dans ce cas, peut-on trouver cette solution explicitement ?*

Une des motivations à l'étude de ce problème est la recherche de métriques kählériennes extrémales (au sens de Calabi) compatibles sur les orbifolds compacts symplectiques toriques. Ces derniers sont en bijection avec les *polytopes étiquetés rationnels* (polytopes étiquetés dont les normales sont incluses dans un réseau) via la correspondance de Delzant–Lerman–Tolman. Plus précisément, si  $(M, \omega, T)$  est un orbifold compact symplectique torique avec une application moment  $\mu: M \rightarrow \mathfrak{t}^*$  où  $\mathfrak{t} = \text{Lie } T$ , alors  $\Delta = \text{im } \mu$  et les poids de l'action de  $T$  déterminent et sont déterminés par les normales  $u \subset \Lambda$  où  $\Lambda$  est le réseau dans  $\mathfrak{t}$  des sous-groupes circulaires de  $T$ . Guillemin et Abreu ont montré qu'à travers cette correspondance, l'espace des métriques kählériennes  $T$ -invariantes compatibles sur  $(M, \omega)$  est paramétrisé par  $\mathcal{S}(\Delta, u)$  (modulo addition de fonctions affines), de sorte que la courbure scalaire de la métrique associée à  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  est le tiré-en-arrière de la fonction  $S(\phi)$  par l'application moment. Ainsi, les solutions du problème 1 correspondent aux métriques kählériennes extrémales.

Une autre motivation est la recherche de métriques sasakiennes extrémales (au sens de Boyer–Galicki–Simanca) compatibles, sur les variétés de contact, toriques, compactes, de type Reeb. Ces dernières sont en bijection, via la correspondance de Delzant–Lerman, avec les bons cônes strictement convexes. Un *bon cône* est une paire  $(\mathcal{C}, \Lambda)$  où  $\mathcal{C} \subset \hat{\mathfrak{t}}^*$  est un cône de sommet 0 et  $\Lambda$  est un réseau de  $\hat{\mathfrak{t}}$  tels que, pour chacune de ses facettes  $\hat{F}_k$ ,  $\mathcal{C}$  admet un vecteur normal  $\hat{u}_k$  intérieur, primitif dans  $\Lambda$  et pour chacune des faces de  $\mathcal{C}$ , l'ensemble des vecteurs normaux associés peut être complété en une base de  $\Lambda$ .  $\mathcal{C}$  est *strictement convexe* si l'intérieur de son cône dual  $\mathcal{C}_+^* = \{a \in \hat{\mathfrak{t}} \mid \langle y, a \rangle > 0, \forall y \in \mathcal{C} \setminus \{0\}\}$  est non vide. Étant donné un bon cône strictement convexe  $(\mathcal{C}, \Lambda)$  et un vecteur  $b \in \mathcal{C}_+^*$  le *polytope étiqueté caractéristique*  $(\Delta_b, u_b)$  consiste en

$$\Delta_b = \mathcal{C} \cap \{y \in \hat{\mathfrak{t}}^* \mid \langle y, b \rangle = 1\} \quad \text{et} \quad u_b = \{[\hat{u}_1], \dots, [\hat{u}_d]\} \subset \hat{\mathfrak{t}}/\mathbb{R}b.$$

Grâce aux travaux de Boyer–Galicki et d'Abreu, nous savons que les métriques sasakiennes toriques compatibles sur la variété de contact associée à  $(\mathcal{C}, \Lambda)$  et dont le champ de Reeb  $X_b$  est induit par l'action infinitésimale de  $b$  sont en correspondance biunivoque avec les potentiels symplectiques  $\mathcal{S}(\Delta_b, u_b)$  (modulo addition de fonctions affines), de sorte que la courbure scalaire de la métrique saskienne associée au potentiel  $\phi$  est le tiré-en-arrière de la fonction  $4S(\phi) - 2n$  par l'application moment.

Bryant et Abreu ont montré que dans le cas où  $(\Delta, u)$  est un simplexe étiqueté, une solution (unique à addition d'une fonction affine près) du problème 1 est donnée par le *potentiel de Guillemin*,

$$\phi = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^d L_k \log L_k - L_\infty \log L_\infty \right) \quad (4)$$

où  $L_k(\cdot) = \langle \cdot, u_k \rangle - \lambda_k$  est une fonction affine telle que  $F_k \subset L_k^{-1}(0)$  et  $L_\infty = \sum_{k=1}^d L_k$ . Parfois, le terme “potentiel de Guillemin” désigne plutôt la fonction  $\sum_{k=1}^d L_k \log L_k$  qui est aussi un potentiel symplectique pour tout polytope étiqueté (Guillemin, 1994a). Des solutions explicites au problème 1 sont connues sur des trapèzes étiquetés correspondant aux surfaces d'Hirzebruch toriques (Calabi, 1985; Abreu, 1998) et ont été étudiées dans le cadre de la géométrie saskienne (Gauntlett et al., 2004; Cvetič et al., 2005). Il est à noter que les travaux de (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2003; Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006; Apostolov et al., 2004), en plus de donner des exemples nouveaux, regroupent ces exemples explicites dans un cadre géométrique unifié.

Yau (Yau, 1993) puis Tian (Tian, 1997) ont conjecturé l'équivalence entre l'existence des métriques kählériennes à courbure scalaire constante dans une classe de cohomologie entière et la stabilité de la variété polarisée associée à cette classe. Donaldson a précisé la notion de stabilité impliquée, en a donné une définition dans le cas torique qui s'exprime exclusivement en termes du polytope étiqueté, puis a donné un énoncé détaillé de la conjecture :

**Définition 0.1.** *Un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  est analytiquement relativement  $K$ -stable par rapport aux dégénération toriques si  $\mathcal{L}_{\Delta, u}(f) \geq 0$  pour toute fonction  $f$  continue, convexe et affine par morceaux sur  $\Delta$ , avec égalité si et seulement si  $f$  est affine.*

**Conjecture 1.** (Donaldson, 2002) *Soit  $(\Delta, u)$  un polytope étiqueté. Il existe une solution  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  de l'équation (3) si et seulement si  $(\Delta, u)$  est analytiquement relativement  $K$ -stable par rapport aux dégénération toriques.*

Donaldson a démontré la conjecture 1 pour les polygones convexes ( $n = 2$ ) lorsque  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est constante, en utilisant la méthode de continuité (Donaldson, 2002; Donaldson, 2005; Donaldson, 2008a; Donaldson, 2009). Zhou–Zhu ont montré que l'existence d'une solution de (3) implique la stabilité (Zhou et Zhu, 2008).

Cette conjecture s'interprète en géométrie sasakiennne de la façon suivante.

**Conjecture 2.** *Il existe une métrique sasakiennne torique extrémale compatible sur une variété de contact, co-orientée, torique, compacte, de type Reeb, associée au bon cône  $(C, \Lambda)$  si et seulement s'il existe  $b \in \mathcal{C}_+^*$  tel que  $(\Delta_b, u_b)$  est analytiquement relativement  $K$ -stable par rapport aux dégénérationns toriques.*

### Les résultats principaux

Dans cette thèse, nous abordons le problème 1 avec les outils développés dans (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2003). Les auteurs ont introduit la notion de 2-formes hamiltoniennes qui permet une séparation des variables de l'équation (3).

Un résultat intermédiaire clé de cette thèse, voir le théorème 3.1, est que tout orbifold symplectique torique dont le polytope moment est un quadrilatère admet des métriques kählériennes compatibles admettant des 2-formes hamiltoniennes. Du fait de la séparation de variables qui en résulte et en utilisant une paramétrisation adéquate, il est alors possible de réduire à une simple équation le critère d'existence de solutions formelles du problème 1. Plus précisément,

**Définition 0.2.** *Soit  $\Delta$  un quadrilatère de sommets  $s_1, \dots, s_4$ , tels que  $s_1$  et  $s_3$  ne sont pas successifs. On dit que qu'une fonction affine  $f$  est équiposée sur  $\Delta$  si*

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^i f(s_i) = 0.$$

**Théorème 0.3.** *Soit  $(\Delta, u)$  un quadrilatère convexe étiqueté avec une fonction affine extrémale  $\zeta_{(\Delta, u)}$  équiposée. Il existe deux polynômes  $A$  et  $B$  de degré au plus 4, avec lesquels on peut construire explicitement une fonction  $\mathbf{H}_{A, B}$ , à valeurs dans  $S^2\mathfrak{t}^*$  qui satisfait les conditions au bord (1) et l'équation (3).*

*De plus,  $(\Delta, u)$  est analytiquement relativement  $K$ -stable par rapport aux dégénérationns toriques si et seulement si  $\mathbf{H}_{A, B}$  est l'inverse de la hessienne d'une solution  $\phi_{A, B} \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  du*

*problème 1, ce qui se produit si et seulement si  $\mathbf{H}_{A,B}$  est définie positive sur  $\mathring{\Delta}$ .<sup>1</sup> En particulier, si le problème 1 admet une solution, cette solution est donnée par  $\phi_{A,B}$ .*

Ce résultat donne une façon de vérifier la condition de stabilité relative et traite en particulier les cas où la fonction affine extrémale est constante puisque une fonction constante est équiposée. Néanmoins, il n’englobe pas tous les quadrilatères convexes étiquetés admettant des solutions au problème 1. En effet, il découle de (Donaldson, 2005) que l’ensemble de quadruplets de normales  $u$  sur un quadrilatère  $\Delta$  pour lesquels  $(\Delta, u)$  admet une solution au problème 1 est ouvert dans l’ensemble des normales et, comme nous le verrons ci-dessous, rencontre l’hyper-surface correspondant aux normales menant à une fonction affine extrémale équiposée.

“Fixer un polytope et faire varier les normales” est un point de vue largement adopté dans cette thèse. Il se révèle efficace essentiellement parce que les coefficients des polynômes  $A$  et  $B$  varient de façon linéaire par rapport aux normales. Pour préciser cela, nous introduisons plusieurs ensembles. Soit  $\Delta$  un quadrilatère convexe. On dénote par  $\mathbf{N}(\Delta)$  le cône de dimension 4 de normales intérieures  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  associées aux facettes de  $\Delta$  et son sous-ensemble  $\mathbf{E}(\Delta)$  (respectivement  $\mathbf{C}(\Delta)$ ) de quadruplets pour lesquels  $\zeta_{(\Delta,u)}$  est équiposée (respectivement constante). On définit  $\mathbf{E}^+(\Delta)$  comme l’ensemble des éléments  $u \in \mathbf{E}(\Delta)$  tels que  $(\Delta, u)$  est analytiquement relativement  $K$ -stable par rapport aux dégénération toriques. Étudier ces différents espaces nous mène au résultat suivant.

**Théorème 0.4.** *Soit  $\Delta$  un quadrilatère convexe qui n’est pas un parallélogramme.  $\mathbf{C}(\Delta)$  est un cône de codimension 1 dans  $\mathbf{E}(\Delta)$  qui est lui-même un cône de codimension 1 dans  $\mathbf{N}(\Delta)$ . De plus,  $\mathbf{E}^+(\Delta)$  contient  $\mathbf{C}(\Delta)$  et est un ouvert non-vide de  $\mathbf{E}(\Delta)$ .*

*Enfin, il y a un cône  $\mathbf{K}(\Delta)$  de codimension 1 dans  $\mathbf{C}(\Delta)$  constitué des éléments tels que les solutions correspondantes  $\phi_{A,B} \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  donnent lieu à des métriques Kähler–Einstein homothétiques sur  $\mathring{\Delta} \times \mathbb{R}^2$ .*

Dans un autre registre, étant donné un bon cône  $(\mathcal{C}, \Lambda)$ , nous allons dégager une fonctionnelle  $F: \mathcal{C}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  qui détecte les champs de Reeb dont le polytope caractéristique associé a sa

---

1. Cette condition s’exprime par la positivité de  $A$  et  $B$  sur certains intervalles et implique donc que  $\mathbf{H}_{A,B}$  satisfait les conditions de positivité sur les facettes.

fonction affine extrémale constante. Plus précisément, on fixe une mesure euclidienne  $d\varpi$  sur  $\hat{t}^*$ , l'espace ambiant de  $\mathcal{C}$ , et pour  $b \in \mathcal{C}_+^*$  on considère les fonctionnelles

- *volume* :  $W(b) = \int_{\Delta_b} d\varpi_b$  où  $d\varpi_b$  est défini par  $b \wedge d\varpi_b = d\varpi$  et
- *d'Hilbert–Einstein* :  $Z(b) = \int_{\Delta_b} S(\phi) d\varpi_b$  qui ne dépend pas du choix de  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta_b, u_b)$ .

La fonctionnelle qui nous intéresse est alors

$$F(b) = \frac{Z(b)^{n+1}}{W(b)^n}.$$

Le théorème suivant résume ce que nous en savons dans le cas général.

**Théorème 0.5.** *La fonctionnelle  $F$  est homogène sur le cône  $\mathcal{C}_+^*$  et, lorsque restreinte à un hyperplan transverse, ses points critiques forment un ensemble non vide et correspondent aux vecteurs  $b$  tels que  $\zeta_{(\Delta_b, u_b)}$  est constante. De plus, si on fixe  $\Delta$ , un polytope caractéristique à  $\mathcal{C}$ , alors  $F(b)$  est une fonction rationnelle en les valeurs de  $b$  sur les sommets de  $\Delta$ .*

Étant intéressés aux métriques Sasaki–Einstein, Martelli, Sparks et Yau ont étudié le cas où le bon cône  $(\mathcal{C}, \Lambda)$  est associé à une variété de contact dont la symplectisation est un cône de Calabi–Yau. Cette condition correspond au fait que les normales de  $\mathcal{C}$ , primitives dans  $\Lambda$ , soient toutes contenues dans un même hyperplan. Ils ont montré que, dans ce cas, il existe un hyperplan de  $\hat{t}$  sur lequel les (restrictions des) fonctionnelles  $W$  et  $Z$  coïncident à une constante multiplicative près. Ensuite, ils ont montré que  $W$  (restreinte à cet hyperplan) est une fonction strictement convexe et possède donc un unique point critique qui correspond à une fonction affine extrémale constante<sup>2</sup>. Les méthodes et le cadre de travail général introduits dans cette thèse permettent de retrouver ces résultats comme cas particuliers.

## Applications

Comme application directe du théorème 0.3 (et du théorème 3.1), nous obtenons une classification partielle *explicite* des métriques kählériennes extrémales compatibles sur un orbifold symplectique torique dont le polytope moment est un quadrilatère. Cette classification partielle

---

2. Martelli, Sparks et Yau considéraient en fait l'invariant de Futaki transverse. Ils ont montré que celui-ci est nul, ce qui implique que la fonction affine extrémale est constante.

inclut les cas de métriques kählériennes à courbure scalaire constante et a fortiori de métriques Kähler–Einstein sur de tels orbifolds. Ceci implique aussi une paramétrisation effective des cas de métriques Kähler–Einstein exhibées dans (Gauntlett et al., 2004; Cvetič et al., 2005; Apostolov et al., 2004). De plus, nous obtenons également une classification des métriques faiblement Bochner-plates (et a fortiori Bochner-plates) qui ne sont pas Kähler–Einstein puisque celles-ci admettent par définition une 2–forme hamiltonienne non triviale, voir définition 3.2.

Comme corollaire direct du théorème 0.4, on a

**Corollaire 0.6.** *Un orbifold symplectique torique dont le polytope moment est un quadrilatère et dont l’invariant de Futaki est nul admet une métrique à courbure scalaire constante. De plus, cette métrique s’exprime de façon explicite par deux polynômes de degré 3.*

Dans le cas d’un quadrilatère convexe  $\Delta$  fortement rationnel (i.e dont les sommets sont inclus dans un réseau), les équations déterminant les ensembles  $\mathbf{E}(\Delta)$ ,  $\mathbf{C}(\Delta)$  et  $\mathbf{K}(\Delta)$  sont à coefficients rationnels et admettent donc des solutions rationnelles, c’est-à-dire des quadruplets de normales engendrant un réseau. Ceci nous permet de prouver l’existence de familles d’orbifolds symplectiques toriques admettant des métriques kählériennes extrémales de différents types, voir la proposition 6.10, ainsi que l’existence de familles d’orbifolds symplectiques toriques instables n’admettant pas de métrique kählérienne extrémale. Par exemple, on a

**Corollaire 0.7.** *Soit  $\Delta$  un quadrilatère convexe. Si  $\Delta$  est fortement rationnel, à homothétie près et à revêtement (d’orbifolds) fini près, il existe un unique orbifold torique Kähler–Einstein dont le polytope moment est  $\Delta$ .*

Concernant la géométrie sasakienne torique, le théorème 0.4, allié à la paramétrisation des métriques sasakiennes toriques en termes des potentiels symplectiques des polytopes caractéristiques, voir (Abreu, 2010) et §2.3.2, implique que

**Corollaire 0.8.** *Une variété de contact torique de type Reeb dont le cône moment a 4 facettes admet une métrique à courbure scalaire constante avec un champ de Reeb  $X_b$  si et seulement si  $\zeta_{(\Delta_b, u_b)}$  est constante. De plus, cette métrique s’exprime de façon explicite en termes de deux polynômes de degré 3.*

De plus, le théorème 0.5 nous donne le résultat suivant.

**Théorème 0.9.** *Une variété de contact torique co-orientée de type Reeb admet au moins un rayon de champs de Reeb pour lesquels la fonction affine extrémale du polytope caractéristique est constante.*

Finalement, en raffinant nos calculs dans le cas où le cône moment est un cône de dimension 3 au-dessus d'un quadrilatère, et en utilisant le théorème 0.4, nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 0.10.** *Une variété de contact torique co-orientée de type Reeb de dimension 5 et dont le cône moment a 4 facettes admet au moins 1 et au plus 7 rayons distincts de métriques sasakiennes à courbure scalaire constante transversalement homothétiques.*

*De plus, pour chaque couple de nombres copremiers  $(p, q)$  avec  $p > 5q$ , il existe 2 métriques sasakiennes à courbure scalaire constante qui ne sont pas isométriques, même à homothéties transversales près, et qui sont compatibles avec la même structure de contact sur la variété de Wang–Ziller  $M_{p,q}^{1,1}$ .*

### Plan de la thèse

Le chapitre 1 contient les grandes lignes de la théorie générale des métriques kählériennes extrémales telle qu'introduite dans (Calabi, 1982) et de celle des métriques sasakiennes extrémales telle qu'introduite dans (Boyer, Galicki et Simanca, 2008a). Le chapitre 2 contient les bases de la géométrie torique ainsi que quelques résultats intermédiaires importants pour la suite, comme l'adaptation des conditions au bord satisfaites par les potentiels symplectiques données dans (Apostolov et al., 2004), aux potentiels associés aux métriques kählériennes coniques. Nous donnons de plus des résultats originaux d'unicité en ce qui a trait aux métriques sasakiennes toriques.

Le chapitre 3 contient la classification des orbifolds symplectiques toriques de dimension 4 admettant des 2-formes hamiltoniennes, en termes de classes d'équivalence de quadrilatères convexes étiquetés. Nous procédons par cas : nous excluons le cas des triangles correspondant aux projectifs à poids (cas déjà traité dans (Apostolov et al., 2004)) et nous interprétons

les conditions d'existence de métriques de type Calabi et orthotoriques, comme définies dans (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2003), en termes de nombres de paires de côtés parallèles d'un quadrilatère. Nous résolvons ensuite le système linéaire posé dans (Apostolov et al., 2004), correspondant aux conditions (explicites sur des polynômes de degré 4) déterminant si ces métriques sont extrémales.

Le chapitre 4 est le cœur de cette thèse et contient la démonstration du fait que les conditions (linéaires sur les normales) d'extrémalité des métriques obtenues au chapitre précédent correspondent au fait que la fonction affine extrémale est équiposée. Équipé de ces solutions formelles, nous vérifions la conjecture de Donaldson en reproduisant une preuve apparaissant déjà dans (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, ). Puis nous étudions en détail les différents cônes de normales d'un quadrilatère et ceci nous mène au théorème 0.4.

Dans le chapitre 5, nous introduisons un point de vue original sur les familles de Reeb (i.e familles de polytopes étiquetés caractéristiques à un même cône) donnant lieu à une condition qui nous permet de déterminer si un polytope étiqueté est caractéristique à un bon cône. De plus, ce point de vue donne une paramétrisation canonique de la famille de Reeb d'un polytope étiqueté. Ces outils nous permettent (de trouver et) d'étudier la fonctionnelle  $F$  et de démontrer le théorème 0.5.

Finalement, le chapitre 6 regroupe toutes les applications géométriques ainsi qu'un critère permettant de déterminer pour un polytope donné s'il existe un réseau pour lequel ce polytope est rationnel.



## Chapitre I

### MÉTRIQUES EXTRÉMALES

#### 1.1 Métriques kählériennes extrémales au sens de Calabi

Le matériel de cette section est tiré du livre (Gauduchon, ), .

Une *structure kählérienne* sur une variété lisse  $M$  est un triplet  $(\omega, J, g)$  où  $\omega$  est une 2-forme non dégénérée et fermée, dite *forme symplectique*,  $g$  est une *métrique riemannienne* et  $J$  est une *structure complexe* sur  $M$ , vérifiant

$$g(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, J\cdot) \quad \text{et} \quad g(J\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, \cdot).$$

On dit alors que  $(M, \omega, J, g)$  est une *variété kählérienne de classe de Kähler*  $[\omega] \in H_{\text{dR}}^2(M, \mathbb{R})$ .

**Remarque 1.1.** Une *structure complexe*  $J$  est une *structure presque complexe*, c'est-à-dire un endomorphisme du fibré tangent tel que  $J^2 = -\text{Id}$ , qui est intégrable, ce qui signifie que l'espace propre  $T^{1,0}M$  associé à la valeur propre  $i$  de l'extension linéaire de  $J$  sur la complexification  $TM \otimes \mathbb{C}$  est intégrable (i.e fermé sous le crochet de Lie  $[\cdot, \cdot]$ ).

Puisque n'importe quel couple de structures d'un triplet kählérien  $(\omega, J, g)$  détermine la troisième par la formule  $g(J\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, \cdot)$ , nous omettons souvent l'une des trois structures dans la notation. Nous dirons qu'une métrique  $g$  est *compatible* à une forme symplectique  $\omega$  s'il existe une structure complexe  $J$  telle que le triplet  $(\omega, J, g)$  soit kählérien.

Il existe de nombreux exemples de variétés kählériennes, telles  $\mathbb{C}^n$  et  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  munies de leurs métriques respectives standard et leurs sous variétés complexes. La littérature à leur sujet est

vaste et nous ne nous étendrons pas ici sur leurs nombreuses propriétés. Nous allons seulement énoncer ci-dessous les résultats utilisés explicitement dans les chapitres ultérieurs et nous référerons à (Gauduchon, ) pour les définitions des objets standard tels la connexion de Levi-Civita, le tenseur de courbure, la courbure scalaire, etc. Toutefois, nous énonçons le *lemme  $dd^c$*  dans le cas des 2-formes où  $d^c f = -df \circ J$ , puisque ce résultat crucial est à la base de la géométrie kählérienne.

**Lemme 1.2.** *Soit  $(M, \omega, J, g)$  une variété compacte kählérienne et  $\psi$  une 2-forme exacte  $J$ -invariante. Il existe une fonction  $f$  telle que  $\psi = dd^c f$ .*

Soit  $(M, J)$  une variété compacte complexe. Pour une classe donnée  $\Omega \in H_{\text{dR}}^2(M, \mathbb{R})$ , l'ensemble

$$\mathcal{M}_\Omega = \{\omega \in \Omega \mid (\omega, J, g) \text{ définit une structure kählérienne}\},$$

s'il est non vide, est un espace de Fréchet de dimension infinie. Plus précisément, grâce au lemme  $dd^c$ , une fois choisi un point  $\omega_o \in \mathcal{M}_\Omega$  tout autre point de  $\mathcal{M}_\Omega$  s'exprime comme  $\omega_o + dd^c f$  pour une fonction lisse  $f$ . Ainsi  $\mathcal{M}_\Omega$  s'identifie à  $\{f \in C^\infty(M) \mid \omega_o + dd^c f > 0 \text{ et } \int_M f \omega_o^n = 0\}$ .

La *fonctionnelle de Calabi* est l'application  $\mathcal{C}: \mathcal{M}_\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par la formule

$$\mathcal{C}(g) = \int_M s_g^2 dv_g$$

où  $s_g$  est la courbure scalaire de  $g$  et  $dv_g$  la forme volume associée à  $g$ . Un point critique de la fonctionnelle  $\mathcal{C}$  en est un minimum local que l'on appelle une *métrique kählérienne extrémale* (Calabi, 1982). Il est à noter que  $\mathcal{C}$  est invariante sous l'action de  $\text{Aut}(M, J)$ .

Dans cette thèse, la composante connexe de l'identité d'un groupe de Lie  $G$  est notée  $G_o$ . Nous utilisons les notations standard par exemple,  $\text{Isom}(M, g)$  est le groupe des isométries de  $(M, g)$ ,  $\text{Symp}(M, \omega)$  le groupe des symplectomorphismes de  $(M, \omega)$ , etc. Il est bien connu que  $\text{Isom}_o(M, g) \subsetneq \text{Aut}_o(M, J)$  puisqu'un *champ de Killing* (i.e un champ de vecteurs  $X$  vérifiant  $\mathcal{L}_X g = 0$ ) est nécessairement *holomorphe (réel)* (i.e  $\mathcal{L}_X J = 0$ ).

**Théorème 1.3.** (Calabi, 1985) *Soit  $(M, \omega, J, g)$  une variété compacte kählérienne extrémale.  $\text{Isom}_o(M, g)$  est un sous-groupe compact maximal de  $\text{Aut}_o(M, J)$ .*

**Théorème 1.4.** (Calabi, 1982) Soit  $(M, \omega, J, g)$  une variété compacte kählérienne.  $(g, J)$  est extrémale si et seulement si  $J\text{grad } s_g$  est un champ de Killing.

Il en découle immédiatement que les métriques à courbure scalaire constante sont extrémales et que toute autre métrique kählérienne extrémale admet un champ de Killing non trivial.

Le lemme de Moser déclare que deux formes symplectiques cohomologues et compatibles avec la même structure complexe peuvent être envoyées l'une sur l'autre par un difféomorphisme. En particulier, les points de  $\mathcal{M}_\Omega$  sont identifiés deux à deux via un difféomorphisme qui transforme la structure complexe en une autre structure complexe compatible. Ainsi, le problème soulevé par Calabi est équivalent à fixer une forme symplectique  $\omega$  sur une variété compacte et se demander s'il existe une métrique kählérienne compatible  $g$  pour laquelle  $J\text{grad } s_g$  est un champ de Killing.

**L'invariant de Futaki** Soit  $(M, \omega, J, g)$  une variété compacte kählérienne. On étend les tenseurs et les formes différentielles par  $\mathbb{C}$ -linéarité sur le fibré  $TM \otimes \mathbb{C}$ . Le fibré  $T^{1,0}M$  est muni d'une structure holomorphe et pour  $Z$  une section holomorphe de ce fibré, il existe une fonction  $F: M \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$\mathcal{L}_Z \omega = dd^c F.$$

On note la courbure scalaire moyenne  $\bar{s}_g = (\int_M s_g dv_g) / (\int_M dv_g)$ . L'invariant de Futaki de  $(M, J)$  est un caractère défini sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes  $\mathfrak{h}$  (i.e  $\mathfrak{h} = \text{Lie Aut}(M, J)$ ) par

$$\mathcal{F}_\Omega(Z) = \int_M (s_g - \bar{s}_g) F dv_g$$

où  $\mathcal{L}_Z \omega = dd^c F$ . Cet invariant a été introduit dans (Futaki, 1983) et l'auteur y montre qu'il ne dépend pas de la métrique kählérienne compatible  $g$  choisie dans  $\mathcal{M}_\Omega$ , il obtient ainsi :

**Théorème 1.5.** (Futaki, 1983) S'il existe une métrique kählérienne extrémale dans  $\mathcal{M}_\Omega$  alors cette métrique est à courbure scalaire constante si et seulement si  $\mathcal{F}_\Omega$  est identiquement nul.

## 1.2 Métriques sasakiennes extrémales

### 1.2.1 Variétés de contact et cônes symplectiques

Pour une distribution  $\mathcal{D}$  sur une variété  $N$  (i.e un sous-fibré de  $TN$ ), le tenseur de Frobenius

$$[\cdot, \cdot]: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow TN/\mathcal{D}$$

est un opérateur  $C^\infty(N)$ -bilinéaire.

**Définition 1.6.** Une distribution de contact  $\mathcal{D}$  sur une variété  $N$  est une distribution de codimension 1 pour laquelle le tenseur de Frobenius est non dégénéré. On dit alors que  $(N, \mathcal{D})$  est une variété de contact.

**Remarque 1.7.** – Le fait qu’il existe une 2-forme non-dégénérée sur  $\mathcal{D}_p$  pour tout  $p \in N$  (le tenseur de Frobenius) implique que c’est un fibré de rang pair. En particulier, une variété de contact est de dimension impaire.

- On note  $\mathcal{D}^\circ$  l’annulateur de  $\mathcal{D}$  dans  $T^*N$ . C’est un fibré de rang 1 tel que  $\mathcal{D}^\circ \simeq (TN/\mathcal{D})^*$ . Une forme de contact est une section de  $\mathcal{D}^\circ$ , nulle part nulle.
- Dans tout ce texte, nous supposons les variétés de contact co-orientables (i.e  $\mathcal{D}^\circ$  est orientable). En particulier, il existe des formes de contact.
- Un champ de vecteurs,  $X \in \Gamma(TN)$ , est dit transverse (à la distribution  $\mathcal{D}$ ) si pour tout  $p \in N$ ,  $X_p$  est contenu dans  $\mathcal{D}_p$  si et seulement si  $X_p$  est nul.

**Définition 1.8.** Soit une variété de contact co-orientable  $(M, \mathcal{D})$  dont on a fixé une forme de contact  $\eta$ . On définit le champ de Reeb associé comme étant l’unique champ transverse  $\xi \in \Gamma(TM)$  tel que  $\eta(\xi) = 1$  et  $\mathcal{L}_\xi \eta = 0$ .

**Définition 1.9.** Un cône symplectique est un triplet  $(M, \omega, \varsigma)$  où  $(M, \omega)$  est une variété symplectique et  $\varsigma$  un champ de vecteurs, appelé champ de Liouville, induisant une action libre et propre  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\rho: \mathbb{R}_+^* \times M \rightarrow M$  telle que  $\mathcal{L}_\varsigma \omega = 2\omega$ . De même, un cône riemannien  $(M, g, \varsigma)$  satisfait  $\mathcal{L}_\varsigma g = 2g$ .

**Remarque 1.10.** Il y a une correspondance biunivoque entre variétés de contact co-orientées et cônes symplectiques :

- Soit  $N$  une variété, son cotangent  $T^*N$  admet une 1-forme canonique, appelée forme de Liouville et notée  $\lambda$ , définie en  $\alpha_p \in T_p^*N$  par  $\lambda(\alpha_p) = \alpha_p \circ d\pi$ . Sa différentielle  $d\lambda$  est la forme symplectique standard du cotangent. Le champ de vecteurs de Liouville  $\varsigma$  est un champ de vecteurs sur le cotangent, défini en  $\alpha_p \in T_p^*N$  par

$$\varsigma_{\alpha_p} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} e^{2s} \alpha_p.$$

Ainsi,  $(T^*N, d\lambda, \xi)$  est un cône symplectique.

- $(N, \mathcal{D})$  est une variété de contact si et seulement si  $\mathcal{D}^0$  est une sous-variété symplectique de  $(T^*N, d\lambda)$
- La symplectisation d'une variété de contact co-orientée  $(N, \mathcal{D})$  est le cône symplectique  $(\mathcal{D}_+^0, \hat{\omega}, \varsigma)$ , où  $\mathcal{D}_+^0$  est une composante connexe de  $\mathcal{D}^0$  privé de la section nulle et  $\hat{\omega}$  est la restriction à  $\mathcal{D}_+^0$  de  $d\lambda$ .
- Réciproquement, un cône symplectique  $(M, \omega, \varsigma)$  détermine une variété de contact  $(N, \mathcal{D})$  via quotient par l'action engendrée par  $\varsigma$ , plus précisément  $N = M/\varsigma$  et  $\mathcal{D} = \varsigma^\perp \omega / \varsigma$ .

## 1.2.2 Structures CR et métriques sasakiennes

**Définition 1.11.** Une structure CR sur une variété  $N$ ,  $(N, \mathcal{D}, J)$ , est la donnée d'une distribution  $p \mapsto \mathcal{D}_p \subset T_p N$  et d'un automorphisme  $J \in \text{Aut}(\mathcal{D})$ , tels que  $J^2 = -\text{Id}$  et que, pour toutes sections (locales)  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{D}$ , on ait  $[JX, Y] + [X, JY] \in \mathcal{D}$  et  $J([JX, Y] + [X, JY]) = [X, Y] + [JX, JY]$ .

**Définition 1.12.** Une application CR entre deux variétés CR,  $(N, \mathcal{D}, J)$  et  $(M, \mathcal{E}, I)$ , est une application lisse  $f : N \rightarrow M$  telle que  $\text{im}(df|_{\mathcal{D}}) \subset \mathcal{E}$  et  $I \circ df \circ J = df$ .

**Définition 1.13.** Un cône kählérien  $(M, g, \omega, \varsigma)$  est une variété kählérienne dont les structures riemannienne et symplectique sont toutes deux homogènes de degré deux par rapport au champ de Liouville  $\varsigma$ .

**Remarque 1.14.** Sur un cône kählérien  $(M, g, \omega, \varsigma)$  de structure complexe  $J$ , le champ de Liouville est holomorphe. En effet, pour des champs  $X, Y \in \Gamma(TN)$ , on a

$$(\mathcal{L}_\varsigma \omega)(X, Y) = \varsigma \cdot \omega(X, Y) - \omega(\mathcal{L}_\varsigma X, Y) - \omega(X, \mathcal{L}_\varsigma Y) = (\mathcal{L}_\varsigma g)(JX, Y) + g((\mathcal{L}_\varsigma J)X, Y).$$

D'un autre côté,  $(\mathcal{L}_\zeta\omega)(X, Y) = 2\omega(X, Y) = 2g(JX, Y) = (\mathcal{L}_\zeta g)(JX, Y)$  implique que  $\mathcal{L}_\zeta J = 0$ . De même, si un cône symplectique admet une structure complexe compatible et pour laquelle le champ de Liouville est holomorphe alors la métrique associée à ces deux structures est conique.

Étant donnée une variété de contact co-orientée  $(N, \mathcal{D})$ , une métrique riemannienne  $g$  détermine une section  $\eta_g: N \rightarrow \mathcal{D}_+^o$  en prenant  $\eta_g = g(X, \cdot)$  où  $X$  est l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux à  $\mathcal{D}$ . Cette section  $\eta_g$  définit un plongement de  $N$  dans  $\mathcal{D}_+^o$ . Notons  $N_g = \text{im } \eta_g$ .

**Définition 1.15.** La métrique conique de  $g$  est l'unique métrique riemannienne  $\hat{g}$  sur  $\mathcal{D}_+^o$  qui est homogène de degré 2 par rapport au champ de Liouville  $\zeta$  et qui vérifie  $\eta_g^* \hat{g}|_{N_g} = g$ .

**Définition 1.16.** Une variété sasakienne  $(N, \mathcal{D}, g)$  est la donnée d'une variété de contact co-orientée  $(N, \mathcal{D})$  et d'une métrique riemannienne  $g$  sur  $N$  pour laquelle la métrique conique  $\hat{g}$  est une métrique kählérienne compatible sur le cône symplectique, c'est-à-dire que  $(\mathcal{D}_+^o, \hat{\omega}, \zeta, \hat{g})$  est un cône kählérien.

Soit un cône kählérien  $(M, \hat{g}, \omega, \zeta)$  de structure complexe  $J$ . L'hypersurface  $N = \{p \mid \hat{g}_p(\zeta, \zeta) = 1\}$  admet une structure de contact  $\mathcal{D} = TN \cap \ker \iota_\zeta \omega$ , une structure CR,  $(\mathcal{D}, J|_1)$ , et  $\hat{g}$  se restreint à  $N$  en une métrique sasakienne  $g$ .

**Remarque 1.17.** La correspondance entre variétés de contact co-orientées et cônes symplectiques donne lieu à une correspondance entre variétés sasakiennes et cônes kählériens.

Une variété sasakienne  $(N, \mathcal{D}, g)$  via cette correspondance possède naturellement un champ de Reeb  $\xi$ , la restriction de  $\xi = J\zeta$  sur  $N_g \subset \mathcal{D}_+^o$ , et donc une structure de contact  $\eta = \eta_g = g(\xi, \cdot)$ . De plus,  $(N, \mathcal{D}, g)$  définit une structure CR sous-jacente,  $(\mathcal{D}, J|_1)$ , pour laquelle le plongement  $\eta: N \rightarrow \mathcal{D}_+^o$  est une application CR. Le champ  $\xi$  est holomorphe puisque  $\zeta$  l'est et est projectable puisqu'il commute avec  $\zeta$ . On définit l'endomorphisme  $\Phi \in \text{End}(TN)$  par

$$\Phi|_{\mathcal{D}} = J \quad \text{et} \quad \Phi(\xi) = 0.$$

Ces objets possèdent de très fortes propriétés, en voici quelques unes :

**Proposition 1.18.** (Boyer et Galicki, 2008) Soit  $(N, \mathcal{D}, g)$  une variété sasakienne. On a  $\Phi^2 = -\text{Id} + \eta \otimes \xi$ ,  $d\eta = d\eta(\Phi(\cdot), \Phi(\cdot))$  et

$$g = d\eta(\cdot, \Phi(\cdot)) + \eta \otimes \eta.$$

De plus, le champ de Reeb  $\xi$  est un champ de Killing unitaire pour  $g$  et  $\mathcal{D}$  est la distribution  $g$ -orthogonale de  $\xi$ .

**Remarque 1.19.** Sur un cône kählérien  $(M, \hat{g}, \omega, \varsigma)$ , la métrique donne un moyen canonique d'obtenir une décomposition de  $M$  en produit. En effet, comme l'action est libre et  $\varsigma.g_c(\varsigma, \varsigma) = (\mathcal{L}_\varsigma \hat{g})(\varsigma, \varsigma) = 2\hat{g}(\varsigma, \varsigma) > 0$ , l'application suivante est un difféomorphisme :

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow N \times \mathbb{R}_+ \\ p &\longmapsto ([p], \hat{g}(\varsigma, \varsigma)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

où  $N = M/\varsigma$ . Pour  $r^2 = \hat{g}(\varsigma, \varsigma)$ , on a  $\varsigma = r \frac{\partial}{\partial r}$  et  $\hat{g} = dr \otimes dr + r^2 g$  où  $g$  est la métrique sasakienne sur  $N$ . Avec ces notations,  $\omega = -\frac{1}{2} dr^2 \eta$  et  $\xi = J\varsigma = J(r \frac{\partial}{\partial r})$ . Par dualité riemannienne entre  $\eta \in \Gamma(T^*M)$  et  $\xi$ , on a aussi  $\eta = \frac{dr}{r}$  et en particulier  $\omega = -\frac{1}{4} dd^c r^2$ .

Pour  $\lambda > 0$ , l'application  $\xi \mapsto \lambda^{-1}\xi$ , de façon équivalente  $\eta \mapsto \lambda\eta$ , conduit à un rayon de structures sasakiennes

$$g' = \lambda g + (\lambda^2 - \lambda)\eta \otimes \eta.$$

Une telle déformation, nommée *homothétie transversale*, transforme la courbure scalaire de la façon suivante :

$$s_{g'} = \lambda^{-1}(s_g + 2n) - 2n,$$

voir (Boyer et Galicki, 2008). En particulier, les métriques sasakiennes à courbure scalaire constante viennent en rayons.

Le fibré quotient  $q: TN \rightarrow \mathcal{Q}$ , défini fibre par fibre par  $\mathcal{Q}_p = T_p N / \mathbb{R}\xi_p$ , est muni d'une structure complexe  $\bar{J}$  héritée de  $\Phi$  (i.e  $\bar{J}q(X) = q(\Phi(X))$ ) et d'un crochet de Lie via

$$[q(X), q(Y)] = q([X, Y]).$$

Une *polarisation*  $\mathcal{M}_{(\mathcal{Q}, \bar{J}, \xi)}$  au sens de (Boyer, Galicki et Simanca, 2008a) désigne l'ensemble des structures sasakiennes partageant le même champ de Reeb  $\xi$  et la même structure complexe transversale au sens où le diagramme

$$\begin{array}{ccc} TN & \xrightarrow{\Phi} & TN \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ \mathcal{Q} & \xrightarrow{\bar{J}} & \mathcal{Q} \end{array} \quad (1.2)$$

est commutatif.

**Définition 1.20.** (Boyer, Galicki et Simanca, 2008a) Une structure saskienne  $(\mathcal{D}, g)$  sur une variété  $N$  est extrémale si elle est un point critique de la fonctionnelle définie sur  $\mathcal{M}_{(\mathcal{Q}, \bar{J}, \xi)}$  par

$$(\mathcal{D}, g) \mapsto \int_N s_g^2 dv_g$$

où  $s_g$  est la courbure scalaire.

**Définition 1.21.** Soit une variété  $N$  sur laquelle on a fixé une polarisation  $\mathcal{M}_{(\mathcal{Q}, \bar{J}, \xi)}$ . Un champ de vecteurs  $X \in \Gamma(TN)$  est transversalement holomorphe si pour toute section  $Y \in \Gamma(TN)$ ,  $\bar{J}q([X, Y]) = \bar{J}q([X, Y])$ .

Il est immédiat que  $X$  est transversalement holomorphe si et seulement si  $\Phi(X)$  l'est.

**Théorème 1.22.** (Boyer, Galicki et Simanca, 2008a) Une structure saskienne  $(\mathcal{D}, g)$  sur une variété  $N$  est extrémale si et seulement si  $\text{grad } s_g$  est transversalement holomorphe.

À vrai dire Boyer, Galicki et Simanca travaillent avec des champs de vecteurs complexes et une structure holomorphe induite par  $\bar{J}$  et démontrent que  $(\mathcal{D}, g)$  est extrémale si et seulement si la partie  $(1, 0)$  dans  $TN \otimes \mathbb{C}$  du gradient de  $s_g$  est holomorphe. Or, un champ de vecteurs réel  $X \in \Gamma(TN)$  est transversalement holomorphe si et seulement si sa partie  $(1, 0)$ ,  $\frac{1}{2}(X - i\Phi(X)) \in \Gamma(TN \otimes \mathbb{C})$  est holomorphe, voir (Brînzanescu et Slobodeanu, 2006).

**Lemme 1.23.** (Boyer, Galicki et Simanca, 2008a; Brînzanescu et Slobodeanu, 2006) Un champ de vecteurs  $X$  est transversalement holomorphe si et seulement si  $(\mathcal{L}_X \Phi)(Y) = \eta([X, \Phi(Y)])\xi$ . En particulier, si  $X$  est transversalement holomorphe alors pour toute fonction lisse  $f$ ,  $X + f\xi$  est transversalement holomorphe.

**Lemme 1.24.** (*Brînzanescu et Slobodeanu, 2006*) Soit  $(N, \mathcal{D}, g)$  une variété sasakienne. Le champ de vecteurs  $X$  sur  $N$  est un champ de Killing qui commute avec  $\xi$  si et seulement si  $X$  est transversalement holomorphe et  $\mathcal{L}_X \eta = 0$ .

Ceci nous amène à reformuler la condition de (Boyer, Galicki et Simanca, 2008a) :

**Proposition 1.25.** Une structure sasakienne  $(\mathcal{D}, g)$  sur une variété  $N$  est extrémale si et seulement si  $\Phi(\text{grad } s_g) + s_g \xi$  est un champ de Killing.

*Démonstration.* Le champ de vecteurs  $\text{grad } s_g$  est transversalement holomorphe si et seulement si  $\Phi(\text{grad } s_g) + s_g \xi$  l'est. De plus

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Phi(\text{grad } s_g) + s_g \xi} \eta &= d(\eta(\Phi(\text{grad } s_g) + s_g \xi)) + d\eta(\Phi(\text{grad } s_g) + s_g \xi, \cdot) \\ &= ds_g + d\eta(\Phi(\text{grad } s_g), \cdot) = ds_g - d\eta(\text{grad } s_g, \Phi(\cdot)) \\ &= ds_g - g(\text{grad } s_g, \cdot) = 0. \end{aligned}$$

Où l'on a utilisé le fait que  $g(\text{grad } s_g, \xi) = 0$  puisque  $\xi$  est un champ de Killing.  $\square$



## Chapitre II

# GÉOMÉTRIE TORIQUE

### 2.1 Orbifolds symplectiques toriques et polytopes étiquetés

#### 2.1.1 Polytopes étiquetés

Les espaces affines que nous considérons dans cette thèse apparaissent soit comme l'espace affine sous-jacent au dual de l'algèbre de Lie d'un tore, soit comme un hyperplan dans un tel espace vectoriel. Généralement, nous désignerons l'algèbre de Lie d'un tore de dimension  $n$  par  $\mathfrak{t}$ , nous noterons aussi bien son dual que l'espace affine sous-jacent à son dual par  $\mathfrak{t}^*$ .

Un *polytope*  $\Delta$  dans un espace affine  $\mathfrak{t}^*$  est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. De façon équivalente, c'est un ensemble compact donné comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces affines fermés  $\mathcal{H}_k$  ( $1 \leq k \leq d$ ). Nous supposons que  $d$  est minimal. Pour chaque  $\mathcal{H}_k$ , nous pouvons spécifier un vecteur normal intérieur  $u_k \in \mathfrak{t}$  de sorte que  $\mathcal{H}_k = \{x \mid L_k(x) \geq 0\}$  où  $L_k$  est une fonction affine s'écrivant  $L_k = \langle \cdot, u_k \rangle + \lambda_k$  où  $\lambda_k$  est une constante déterminée par le fait que  $L_k^{-1}(0) = \partial\mathcal{H}_k$ . Le polytope  $\Delta$  est alors décrit à l'aide des *fonctions définissantes*  $L_1, \dots, L_d$  par

$$\Delta = \{x \in \mathfrak{t}^* \mid L_k(x) \geq 0 \text{ pour } k = 1, \dots, d\}. \quad (2.1)$$

Nous supposons que l'*intérieur* du polytope,  $\overset{\circ}{\Delta}$ , est un ouvert non vide de  $\mathfrak{t}^*$ . Une *face* de  $\Delta$  est un sous-ensemble non vide  $F$ , pour lequel il existe  $I \subset \{1, \dots, d\}$  tel que  $F = F_I = \bigcap_{k \in I} \mathcal{H}_k \cap \Delta$ . En particulier,  $\Delta = F_\emptyset$  est considéré comme une face et toutes les faces sont fermées. Les faces de codimension 1,  $F_1 = F_{\{1\}}, \dots, F_d = F_{\{d\}}$  sont appelées les *facettes* de

$\Delta$ . Les *sommets* sont les faces de  $\Delta$  consistant en un unique point. Un polytope est dit *simple*, si chacun de ses sommets est l'intersection de  $n$  facettes distinctes où  $n$  est la dimension de  $\Delta$ .

*Dans tout ce qui suit, nous supposons les polytopes considérés simples et compacts.*

**Définition 2.1.** *Un polytope  $\Delta$  est dit rationnel par rapport à un réseau  $\Lambda \subset \mathfrak{t}$ , si chacune de ses facettes admet un vecteur normal appartenant à  $\Lambda$ , et nous dirons d'une telle paire  $(\Delta, \Lambda)$  qu'elle est rationnelle. Un polytope  $\Delta$  est dit de type rationnel, s'il existe un réseau  $\Lambda \subset \mathfrak{t}^*$  tel que la paire  $(\Delta, \Lambda)$  soit rationnelle ; il est dit fortement rationnel si ses sommets appartiennent à un réseau de  $\mathfrak{t}^*$ .*

**Définition 2.2.** *Un polytope étiqueté  $(\Delta, u_1, \dots, u_d)$  est un polytope  $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$  muni d'un vecteur normal intérieur à chacune de ses facettes. Ces vecteurs sont appelés normales et les  $F_i$  sont dites étiquetées par les  $u_i$ . Un polytope étiqueté rationnel,  $(\Delta, \Lambda, u_1, \dots, u_d)$ , est constitué d'un polytope étiqueté et d'un réseau  $\Lambda$  tels que les normales  $u_i$  soient des éléments de  $\Lambda$ . Comme le polytope est simple, les normales d'un polytope étiqueté rationnel engendrent un sous-réseau  $\Lambda_{\min} = \langle u_1, \dots, u_d \rangle_{\mathbb{Z}} \subset \Lambda$ .*

Un vecteur  $v \in \mathfrak{t}$  est dit *primitif* dans un réseau  $\Lambda$  s'il engendre  $\mathbb{R}v \cap \Lambda$ . Nous considérerons parfois une paire rationnelle  $(\Delta, \Lambda)$  comme un polytope étiqueté rationnel, en utilisant pour normales les vecteurs primitifs du réseau.

**Remarque 2.3.** *La notion de polytope étiqueté rationnel a été introduite par Lerman et Tolman dans (Lerman et Tolman, 1997). Le polytope étiqueté rationnel  $(\Delta, \Lambda, m_1, \dots, m_d)$  est défini comme une paire rationnelle  $(\Delta, \Lambda)$  ainsi qu'un entier positif  $m_i$  associé à chaque facette  $F_i$ . De notre point de vue,  $(\Delta, \Lambda, m_1, \dots, m_d)$  correspond à  $(\Delta, \Lambda, m_1 w_1, \dots, m_d w_d)$  où, pour tout  $i$ ,  $w_i$  est l'unique vecteur normal intérieur à  $F_i$  qui est primitif dans le réseau  $\Lambda$ .*

**Définition 2.4.** *Un polytope de Delzant est une paire rationnelle  $(\Delta, \Lambda)$ , telle que l'ensemble des normales primitives associées à des facettes dont l'intersection est un sommet est une base de  $\Lambda$ .*

**Définition 2.5.** *Les polytopes  $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$  et  $\Delta' \subset \mathfrak{s}^*$  sont dits équivalents, s'il existe une transformation affine  $\phi$  entre les espaces affines respectifs telle que  $\phi(\Delta) = \Delta'$ . Deux polytopes*

étiquetés sont dits équivalents, si les polytopes sous-jacents sont équivalents via une application affine,  $\phi: \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{s}^*$ , dont l'adjoint de la différentielle  $(d\phi)^*: \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{t}$  fait correspondre les normales. Finalement, deux polytopes étiquetés rationnels sont équivalents s'ils sont équivalents en tant que polytopes étiquetés via une application affine  $\phi$  dont l'adjoint de la différentielle  $(d\phi)^*$  fait correspondre les réseaux.

## 2.1.2 Orbifolds symplectiques toriques

La théorie des variétés et des orbifolds symplectiques toriques remonte à l'étude des systèmes hamiltoniens en physique. Du point de vue mathématique (symplectique), cette théorie se base essentiellement sur les travaux de (Atiyah, 1982; Guillemin et Sternberg, 1982; Delzant, 1988; Lerman et Tolman, 1997). On peut aussi consulter les livres (Guillemin, 1994b; Audin, 2004).

La définition d'orbifold utilisée ici est celle de (Satake, 1957), c'est aussi celle qui est utilisée dans (Lerman et Tolman, 1997) d'où l'on tire tels quels les définitions et les faits ci-dessous.

**Définition 2.6.** *Un orbifold  $M$  est la donnée d'un espace topologique Hausdorff  $|M|$  et d'une classe d'équivalence d'atlas de cartes uniformisantes  $\mathcal{U} = \{(\tilde{U}, \Gamma, \varphi)\}$  où  $\tilde{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma$  est un groupe fini agissant linéairement sur  $\tilde{U}$  de sorte que l'ensemble des points de  $\tilde{U}$  ayant un stabilisateur non trivial dans  $\Gamma$  soit de codimension au moins 2 et  $\varphi: \tilde{U} \rightarrow |M|$  induit un homéomorphisme de  $\tilde{U}/\Gamma$  à  $U \subset |M|$ . L'atlas est soumis aux conditions de compatibilité :*

1. *Pour tout  $p \in |M|$  il existe une carte  $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi) \in \mathcal{U}$  telle que  $p \in \varphi(\tilde{U})$ .*
2. *Pour toutes  $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi), (\tilde{U}', \Gamma', \varphi') \in \mathcal{U}$  et  $p \in \varphi(\tilde{U}) \cap \varphi'(\tilde{U}')$  il existe  $(\tilde{U}'', \Gamma'', \varphi'') \in \mathcal{U}$  telle que  $x \in \varphi''(\tilde{U}'') = \varphi(\tilde{U}) \cap \varphi'(\tilde{U}')$ .*
3. *Pour toutes  $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi)$  et  $(\tilde{U}', \Gamma', \varphi') \in \mathcal{U}$  telles que  $\varphi(\tilde{U}) \subset \varphi'(\tilde{U}')$ , il existe une injection de  $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi)$  dans  $(\tilde{U}', \Gamma', \varphi')$  c'est-à-dire un plongement lisse  $\lambda: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$  tel que  $\varphi' \circ \lambda = \varphi$ .*

*Deux atlas sont directement équivalents s'il existe un troisième atlas les contenant tous les deux et deux atlas sont équivalents s'ils sont reliés par une chaîne d'atlas directement équivalents.*

Si  $\lambda'$  est une autre injection de  $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi)$  dans  $(\tilde{U}', \Gamma', \varphi')$  alors il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\lambda' \circ \gamma = \lambda$ . Une application entre orbifolds  $f: M \rightarrow N$  est une collection d'objets : d'abord une application entre les atlas  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  c'est-à-dire pour chaque carte uniformisante de  $M$ ,  $\tilde{U} \in \mathcal{U}$ , il y a une carte correspondante  $f(\tilde{U}) = \tilde{V} \in \mathcal{V}$  et une application lisse  $f_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  et pour chaque injection  $\lambda: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$  une injection  $f_\lambda$  de  $f(\tilde{U})$  dans  $f(\tilde{U}')$  telle que  $f_\lambda \circ f_{\tilde{U}} = f_{\tilde{U}'} \circ \lambda$ .

Un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est un champ de vecteurs  $\Gamma$ -invariant  $X_{\tilde{U}}$  sur chaque carte uniformisante  $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi)$  tel que si  $\lambda$  est une injection de  $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi)$  dans  $(\tilde{U}', \Gamma', \varphi')$  alors  $\lambda_* X_{\tilde{U}} = X_{\tilde{U}'}$ . Les tenseurs et les formes différentielles sont définis de façon similaire.

Pour  $p \in |M|$ , si  $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi) \in \mathcal{U}$  est telle qu'il existe  $\tilde{p} \in \tilde{U}$  avec  $p = \varphi(\tilde{p})$ , le stabilisateur de  $\tilde{p}$  dans  $\Gamma$  est nommé le *groupe de structure* de  $p$  et est noté  $\Gamma_p$ . Ce groupe est bien défini en tant que groupe abstrait. On peut montrer qu'il existe une carte  $(\tilde{U}, \Gamma_p, \varphi)$  dans  $\mathcal{U}$  avec  $p = \varphi(\tilde{U})$ . L'*espace tangent uniformisant* de  $p$ , noté  $\tilde{T}_p M$ , est  $T_{\tilde{p}} \tilde{U}$ , il est considéré comme un espace de représentation de  $\Gamma_p$ .  $T_p M$  est défini comme le quotient  $T_{\tilde{p}} \tilde{U} / \Gamma_p$ .

**Définition 2.7.** Soit  $G$  un groupe de Lie. Une action lisse de  $G$  sur un orbifold  $M$  est une application lisse d'orbifolds  $\rho: G \times M \rightarrow M$  telle que pour tous  $g$  et  $g' \in G$

$$\rho(g, \rho(g', p)) = \rho(gg', p) \quad \text{et} \quad \rho(\text{Id}, p) = p$$

où  $\text{Id}$  est l'identité de  $G$ .

Une action lisse de  $G$  sur un orbifold  $M$  implique une action continue de  $G$  sur  $|M|$ . Pour tout  $g_o \in G$  et  $p_o \in M$ , il y a des voisinages  $W$  de  $g_o$  dans  $G$ ,  $U$  de  $p_o$  dans  $M$  et  $U'$  de  $\rho(g_o, p_o)$  dans  $M$ , des cartes uniformisantes  $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi)$  et  $(\tilde{U}', \Gamma', \varphi')$  et une application lisse  $\tilde{\rho}: W \times \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$  telle que  $\varphi'(\tilde{\rho}(g, p)) = \rho((g, p))$  pour tout  $(g, p) \in W \times \tilde{U}$ .  $\tilde{\rho}$  est uniquement définie à action des groupes de structure de  $p_o$  et  $g_o p_o$  près.

En prenant  $g_o = \text{Id}$ ,  $\tilde{\rho}$  fournit une action locale de  $G$  sur  $\tilde{U}$ . En particulier, l'action de  $G$  sur  $M$  induit une action infinitésimale de  $\mathfrak{g}$ , l'algèbre de Lie de  $G$ . Pour un vecteur  $a \in \mathfrak{g}$ , on note  $X_a$  le champ de vecteurs induit sur  $M$ , qui est défini en  $p \in M$ , pour une carte  $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi)$  avec  $\tilde{p} \in \tilde{U}$  et  $p = \varphi(\tilde{p})$ , comme

$$X_a(\tilde{p}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{\rho}(\exp ta, \tilde{p})$$

où  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  est l'exponentielle de groupe de Lie. On peut montrer qu'étant donné un point  $p \in M$  fixé par l'action de  $G$ , il existe une carte  $(\tilde{U}, \Gamma_p, \varphi)$ , une extension

$$1 \longrightarrow \Gamma_p \xrightarrow{\pi} \tilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1 \quad (2.2)$$

et une action  $\rho'$  de  $\tilde{G}$  sur  $\tilde{U}$  telle que  $\varphi \circ \rho' = \rho(\pi(\cdot), \varphi(\cdot))$ . En particulier, l'action de  $\tilde{G}$  commute avec celle de  $\Gamma_p$ . En utilisant ces extensions, Lerman–Tolman ont adapté au cas orbifoldien le Théorème de Slice qui décrit l'action locale d'un groupe de Lie autour d'un point fixe en termes d'action linéaire sur l'espace tangent, voir (Lerman et Tolman, 1997). Nous référons au chapitre 4 de (Boyer et Galicki, 2008) pour une exposition détaillée de la théorie des orbifolds et à l'article (Lerman et Tolman, 1997) pour une exposition détaillée des résultats concernant les actions de groupes de Lie sur les orbifolds.

Soit  $(M, \omega)$  un orbifold symplectique,  $T$  un tore,  $\mathfrak{t}$  son algèbre de Lie et  $\mathfrak{t}^*$  l'espace vectoriel dual de  $\mathfrak{t}$ . Une *action hamiltonienne* de  $T$  sur  $(M, \omega)$  est une représentation fidèle  $\rho: T \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$  ainsi qu'une application lisse  $T$ -équivariante  $\mu: M \rightarrow \mathfrak{t}^*$  satisfaisant

$$d\langle \mu, a \rangle = -\iota_{X_a} \omega.$$

Si la dimension de  $T$  est la moitié de la dimension de  $M$ ,  $(M, \omega, \mu, T, \rho)$  est un *orbifold symplectique torique*. Deux tels orbifolds,  $(M, \omega, \mu, T, \rho)$  et  $(M', \omega', \mu', T', \rho')$ , sont dits *équivalents* s'il existe un symplectomorphisme (d'orbifolds)  $\psi: (M, \omega) \rightarrow (M', \omega')$  et un isomorphisme  $h: T \rightarrow T'$  tels que  $\psi \circ \rho(t) \circ \psi^{-1} = \rho'(h(t))$  pour tout  $t \in T$ . Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous omettons de spécifier la représentation  $\rho$  dans la notation.

Il est bien connu, (Atiyah, 1982; Guillemin et Sternberg, 1982; Delzant, 1988; Lerman et Tolman, 1997), que l'image de l'application moment d'un orbifold torique compact est un polytope convexe  $\Delta$  de  $\mathfrak{t}^*$  et que la pré-image d'un point par l'application moment est un tore (connexe) dont la dimension est égale à celle de la plus petite face à laquelle ce point appartient. De plus, ce polytope est rationnel par rapport au réseau  $\Lambda = \ker(\exp: \mathfrak{t} \rightarrow T)$ . Dans le cas des variétés (i.e quand  $M$  n'est pas singulière), Delzant a montré que ce polytope satisfait la condition de la définition 2.4 maintenant appelée *condition de Delzant* (Delzant, 1988).

Dans le cas orbifoldien, Lerman–Tolman (Lerman et Tolman, 1997) ont montré que pour tout  $p \in M$ , le groupe de structure orbifoldien de  $p$ ,  $\Gamma_p$ , ne dépend que de la plus petite

face  $F$  contenant  $\mu(p)$ . Plus précisément, si  $F$  est le polytope  $\Delta$  lui-même (c'est-à-dire si  $\mu(p)$  est à l'intérieur de  $\Delta$ ) alors  $\Gamma_p$  est trivial. Si  $F$  est une facette, alors  $\Gamma_p$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/m_F\mathbb{Z}$  pour un certain entier  $m_F$  appelé l'étiquette de  $F$ . Tout orbifold torique compact  $(M, \omega, \mu, T, \rho)$  détermine donc un polytope étiqueté,  $(\text{im } \mu, \Lambda, \{m_F\})$ , comme défini dans (Lerman et Tolman, 1997), qui correspond à un polytope étiqueté rationnel,  $(\text{im } \mu, \Lambda, \{u_F\})$  via la remarque 2.3. Si  $E$  est la plus petite face de  $\Delta$  contenant  $\mu(p)$  alors le groupe de structure de  $p$  dans  $M$  est isomorphe à

$$\langle u_F | E \subset F \rangle_{\mathbb{R}} \cap \Lambda / \langle u_F | E \subset F \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

**Remarque 2.8.** *Les normales apparaissent naturellement du point de vue géométrique. En effet, considérons un point fixe de l'action de  $T$  sur  $M$ ,  $p$ . Son image  $\mu(p)$  est un sommet de  $\Delta$ . Notons  $u_1, \dots, u_n$  les normales de  $\Delta$  telles que  $\{p\} = \cap_{i=1}^n F_i$ . L'extension de  $T$ , dénotée  $\tilde{T}$ , comme précédemment, agit symplectiquement (et linéairement) sur l'espace  $(\tilde{T}_p M, \omega)$  et l'ensemble des éléments de la base duale à  $(u_1, \dots, u_n)$  sont les poids de cette action. On rappelle que l'action  $\rho$  d'un tore  $T$  de dimension  $n$  sur un espace vectoriel symplectique  $(V, \omega)$  de dimension  $2n$  peut être diagonalisée, c'est-à-dire que  $(V, \omega)$  se décompose en espaces de représentation irréductibles de dimension 2 :  $(V, \omega) = \oplus_{i=1}^n (V_i, \omega_i)$ . Les représentations  $\rho_i : T \rightarrow \text{Symp}(V_i, \omega_i)$  ont comme image un cercle puisque  $V_i$  est de dimension 2 et on considère alors que  $d\rho_i \in \mathfrak{t}^*$ . Les poids de l'action  $\rho$  sont  $d\rho_1, \dots, d\rho_n \in \mathfrak{t}^*$  et déterminent complètement l'action de  $T$ .*

La correspondance de Delzant–Lerman–Tolman (Delzant, 1988; Lerman et Tolman, 1997) résulte des deux théorèmes suivants.

**Théorème 2.9.** *(Delzant, 1988; Lerman et Tolman, 1997) Soit  $(M, \omega, T, \mu)$  et  $(M', \omega', T, \mu')$  deux orbifolds toriques compacts associés au même polytope étiqueté. Il existe un symplectomorphisme  $T$ -équivariant  $\phi : M \rightarrow M'$  tel que  $\mu' \circ \phi = \mu$ .*

**Théorème 2.10.** *(Delzant, 1988; Lerman et Tolman, 1997) Soit un polytope étiqueté rationnel,  $(\Delta, u, \Lambda)$ ,  $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$ . Il existe un orbifold torique  $(M, \omega, \mathfrak{t}/\Lambda, \mu)$  dont le polytope étiqueté associé est  $(\Delta, u, \Lambda)$ . De plus,  $M$  possède une structure complexe  $T$ -invariante et compatible avec  $\omega$ .*

La difficulté principale de cette correspondance consiste en montrer que deux orbifolds toriques ayant le même polytope étiqueté rationnel sont isomorphes. Pour ce faire, Delzant, puis Lerman et Tolman ont introduit une cohomologie de faisceaux au-dessus du polytope moment d'un orbifold  $(M, \omega, T)$  avec  $\mu: M \rightarrow \Delta$  : pour un ouvert  $U \subset \Delta$ , ils définissent

$$\mathcal{F}(U) = \{\text{classe d'isomorphisme (d'orbifolds) de } \mu^{-1}(U)\}.$$

Ils montrent ensuite que le premier groupe (les sections globales) de la cohomologie de Čech ainsi engendrée est trivial. La réciproque est la construction de Delzant que nous décrivons brièvement ci-dessous.

**Construction de Delzant (Delzant, 1988)** Soit un polytope étiqueté rationnel  $(\Delta, u, \Lambda)$  ayant  $d$  facettes dans  $\mathfrak{t}^*$ , un espace vectoriel de dimension  $n$ . Notons  $L_l = \langle \cdot, u_l \rangle + \lambda_l$  les fonctions définissantes de  $(\Delta, u)$  et posons  $\Lambda' = \langle u_1, \dots, u_d \rangle_{\mathbb{Z}}$ . On définit l'application  $\pi_u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{t}$  et un plongement linéaire quelconque  $\kappa_u: \mathbb{R}^{d-n} \rightarrow \ker \pi_u$ . Le fait que  $u$  soit inclus dans un réseau  $\Lambda' \subset \Lambda$  implique que  $\pi_u$  passe au quotient  $\bar{\pi}_u: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathfrak{t}/\Lambda$  et on peut montrer que le noyau  $K$  de  $\bar{\pi}_u$  est isomorphe au groupe abélien

$$\mathbb{T}^{d-n} \times \Lambda/\Lambda'.$$

La composante connexe à l'identité de  $K$  est l'image de l'application  $\bar{\kappa}_u: \mathbb{T}^{d-n} \rightarrow \mathbb{T}^d$ . Elle admet une action hamiltonienne sur  $\mathbb{C}^d$  d'application moment  $\kappa_u^* \circ \mu$ , où  $\mu: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est définie par la formule

$$\mu(z_1, \dots, z_d) = \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2) - (\lambda_1, \dots, \lambda_d).$$

On procède alors à une *réduction symplectique* usuelle, par rapport à la valeur régulière 0, c'est-à-dire que l'on considère la variété  $M = (\kappa_u^* \circ \mu)^{-1}(0)/K$  qui possède une structure kählérienne puisque localement l'espace tangent en un point  $[p] \in M$  s'identifie au quotient  $(T_p K(p))^{\perp \omega} / JT_p K(p)$  où  $J$  est la structure complexe de  $\mathbb{C}^d$ . L'action de  $\mathbb{T}^d$  sur  $(\kappa_u^* \circ \mu)^{-1}(0)$  descend en une action hamiltonienne de  $T = \mathbb{T}^d/K$  sur  $M$  pour laquelle une application moment, donnée par construction, a comme image  $\Delta$ .

Deux actions hamiltoniennes  $(\mu, T, \rho)$  et  $(\mu', T', \rho')$  sur un orbifold symplectique  $(M, \omega)$  sont équivalentes si et seulement si les polytopes étiquetés associés sont équivalents dans le sens de la définition 2.5. Dans (Karshon, Kessler et Pinsonnault, 2007), cette affirmation est prouvée dans le cas lisse sous l'hypothèse  $T' = T$ . La contrepartie orbifoldienne est formellement identique mais demande de porter une attention particulière aux normales d'un côté et aux poids de l'action du tore de l'autre.

Deux polytopes étiquetés rationnels  $(\Delta, \Lambda', u)$  et  $(\Delta, \Lambda, u)$  avec  $\Lambda' \subset \Lambda$  se correspondent (via la construction de Delzant) à un revêtement fini d'orbifolds (dont  $\Lambda/\Lambda'$  est le groupe des automorphismes) près. Plus précisément,  $\Lambda/\Lambda' \subset T' = \mathfrak{t}/\Lambda'$  est fini et agit par symplectomorphismes sur l'orbifold symplectique torique  $(M', \omega', T')$  associé à  $(\Delta, \Lambda', u)$ . Le quotient de  $M'$  par  $\Lambda/\Lambda'$  est alors un orbifold symplectique torique par rapport au tore  $T = \mathfrak{t}/\Lambda$  et il est associé à  $(\Delta, \Lambda, u)$  par l'intermédiaire de la correspondance de Delzant–Lerman–Tolman. Il n'est donc pas restrictif, en vue d'étudier les métriques kählériennes  $T$ -invariantes, de considérer le réseau minimal  $\Lambda_{\min} = \langle u_1, \dots, u_d \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Les réseaux minimaux correspondent aux *orbifolds simplement connexes*, voir (Apostolov et al., 2004) et (Painchaud, 2007). Dans la suite de ce texte, nous ne mentionnerons pas le réseau dans la notation du polytope étiqueté rationnel lorsqu'il s'agit du réseau minimal.

La classe de cohomologie de la forme symplectique d'un orbifold symplectique torique est rationnelle si et seulement si le polytope associé est fortement rationnel par rapport au réseau des sous-groupes circulaires. En effet, cette propriété, qui est un corollaire de la construction de Delzant (Delzant, 1988), est aussi vérifiée dans le cas orbifoldien, voir (Lerman et Tolman, 1997).

### 2.1.3 Variétés algébriques toriques et éventails

Avant que la correspondance de Delzant ne soit établie, une correspondance analogue était connue en géométrie algébrique (Danilov, 1978; Fulton, 1993). Nous ne travaillerons pas avec ce point de vue ici mais nous utiliserons néanmoins des résultats de Lerman–Tolman (Lerman et Tolman, 1997) concernant cette théorie et c'est pourquoi nous en rappelons quelques faits. Le matériel présenté ci-dessous est extrait de (Danilov, 1978).

Une *variété algébrique torique* est une variété algébrique contenant le tore complexe comme

ouvert dense, telle que l'action de ce tore sur lui-même s'étend à toute la variété. Soit  $(\Delta, u, \Lambda)$  un polytope étiqueté rationnel,  $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$ , avec  $d$  facettes  $F_1, \dots, F_d$ . Pour une face  $F_I$  de  $\Delta$ , déterminée par un ensemble  $I \subset \{1, \dots, d\}$ , via  $F_I = \Delta \cap_{l \in I} F_l$ , on note  $\delta_I = \langle u_l \mid l \in I \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ . En particulier,  $\delta_{\{l\}} = \mathbb{R}_{\geq 0} u_l$  et puisque (par définition) le polytope lui-même est une face,  $\Delta = F_{\{\emptyset\}}$ , il est associé à un cône,  $\delta_{\{\emptyset\}} = \{0\}$ . L'éventail associé à  $\Delta$  est l'ensemble de cônes

$$\mathcal{E}(\Delta) = \{\delta_I \mid F_I \text{ est une face de } \Delta\}.$$

Rappelons que le dual d'un cône  $\delta \subset \mathfrak{t}$  est  $\delta^* = \{x \in \mathfrak{t}^* \mid \langle x, y \rangle \geq 0, \forall y \in \delta\}$  et que le dual d'un réseau  $\Lambda \subset \mathfrak{t}$  est  $\Lambda^* = \{x \in \mathfrak{t}^* \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}, \forall y \in \Lambda\}$ . Puisque  $(\Delta, \Lambda)$  est rationnel, pour chacun des cônes  $\delta \in \mathcal{E}(\Delta)$ ,  $\delta^* \cap \Lambda^*$  est un semi-groupe finiment engendré et définit donc une variété algébrique affine que l'on note  $V_\delta$ . Par exemple  $V_{\delta_{\{\emptyset\}}}$  est le tore complexe vu comme spectre de l'anneau  $\mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, x_2, \dots, x_n^{-1}]$ . L'inclusion d'une face  $\delta \subset \delta'$  implique une identification de  $V_\delta$  comme une sous-variété ouverte de  $V_{\delta'}$  et la relation  $\delta \cap \delta' = \delta''$  permet de recoller les variétés affines  $V_\delta, V_{\delta'}$  sur l'ouvert dense  $V_{\delta''}$ . Ainsi, l'éventail  $\mathcal{E}(\Delta)$  détermine une variété algébrique  $X_{(\Delta, \Lambda)}$  contenant le tore complexe comme ouvert dense.

La construction ci-dessus ne dépend pas des normales  $u$ , mais seulement du réseau, des rayons  $\delta_{\{l\}}$  et de la combinatoire du polytope. Plus précisément, bouger légèrement une facette  $F_l$  en conservant son rayon normal  $\delta_{\{l\}}$  ne change pas la construction. Choisir le polytope  $\Delta$  correspond au choix d'une classe de cohomologie de de Rham, voir par exemple (Donaldson, 2008b), et si les sommets de  $\Delta$  sont dans  $\Lambda^*$ , cette classe est la première classe de Chern d'un fibré ample donné par un diviseur de la forme  $\sum_{l=1}^d D_l$ , où  $D_l$  est déterminé par  $F_l \cap \Lambda^*$ . Choisir des normales  $u$  revient à choisir des étiquettes  $(m_1, \dots, m_d)$ , voir la remarque 2.3, et ainsi à fixer un *diviseur ramifié*  $\sum_{l=1}^d \left(1 - \frac{1}{m_l}\right) D_l$  qui correspond à une structure d'orbifold sur  $X_{(\Delta, \Lambda)}$ , comme expliqué dans le chapitre 4 de (Boyer et Galicki, 2008).

**Théorème 2.11.** (Delzant, 1988; Lerman et Tolman, 1997) *Soit  $(M, \omega, T)$  un orbifold compact symplectique torique associé au polytope étiqueté rationnel  $(\Delta, u, \Lambda)$  et  $J$  une structure complexe compatible avec  $\omega$ .  $(M, J)$  peut-être identifiée de façon équivariante à la variété algébrique torique associée à  $(\mathcal{E}(\Delta), \Lambda)$ .*

*De plus, si  $(M', \omega', T)$  est un orbifold compact symplectique torique associé au polytope étiqueté*

rationnel  $(\Delta', u', \Lambda)$  avec  $J'$  une structure complexe compatible avec  $\omega'$ , alors  $(M, J)$  et  $(M', J')$  sont biholomorphes si et seulement si  $\mathcal{E}(\Delta) = \mathcal{E}(\Delta')$ .

#### 2.1.4 Un polytope rationnel pour différents réseaux

Dans cette section, nous explorons le cas de figure suivant : on se donne un polytope  $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$  de type rationnel et on se demande à quoi mènent, du point de vue géométrique, deux étiquetages rationnels différents. Nous savons déjà que

- (1) si nous fixons les normales  $u = \{u_1, \dots, u_d\}$  et considérons deux réseaux  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  contenant tous deux l'ensemble de vecteurs  $u$ , alors les orbifolds symplectiques toriques  $(M, \omega, T)$  et  $(M', \omega', T')$  associés respectivement à  $(\Delta, u, \Lambda)$  et  $(\Delta, u, \Lambda')$  ont en commun un revêtement (d'orbifolds) fini correspondant au polytope étiqueté rationnel  $(\Delta, u, \Lambda \cap \Lambda')$ , voir (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2003).
- (2) si  $(\Delta, u, \Lambda)$  est associé à l'orbifold symplectique torique  $(M, \omega, T)$ , alors pour tout nombre réel  $s > 0$ ,  $(\Delta, su, s\Lambda)$  est associé à l'orbifold symplectique torique  $(M, s\omega, T)$ .
- (3)  $(\Delta, u, \Lambda)$  et  $(\Delta, u', \Lambda)$  définissent les mêmes éventails par rapport à un même réseau. En particulier, ils sont associés à des orbifolds symplectiques toriques qui sont biholomorphes, pour n'importe quelles structures complexes compatibles, voir (Lerman, 2003).

Ceci nous amène à définir la relation d'équivalence suivante :

**Définition 2.12.** *Deux réseaux  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  d'un espace vectoriel  $\mathfrak{t}$  sont comparables s'il existe un nombre réel  $s > 0$  tel que  $\Lambda \cap s\Lambda'$  est un réseau dans  $\mathfrak{t}$ .*

Les faits (1) à (3) ci-dessus impliquent que deux polytopes rationnels étiquetés  $(\Delta, u, \Lambda)$  et  $(\Delta, u', \Lambda')$  avec des réseaux comparables sont associés à des orbifolds symplectiques toriques ayant, à revêtement (d'orbifolds) fini près, la même variété algébrique sous-jacente. C'est ce qui justifie l'intérêt de la proposition suivante.

**Proposition 2.13.** *Soit deux réseaux  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  d'un espace vectoriel  $\mathfrak{t}$ . S'il existe un polytope  $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$  qui n'est pas un produit, pour lequel  $(\Delta, \Lambda)$  et  $(\Delta, \Lambda')$  sont tous deux rationnels, alors  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont comparables.*

Avant de prouver cette proposition, clarifions la notion de polytope produit.

**Définition 2.14.** Un polytope  $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$  est un produit si il existe une décomposition  $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{h}^*$  et deux polytopes  $\Sigma \subset \mathfrak{g}^*$  et  $\Xi \subset \mathfrak{h}^*$  tels que  $\Delta = \{\xi + \nu \mid \xi \in \Xi, \nu \in \Sigma\}$ .

**Lemme 2.15.** Soit  $(\Delta, u)$  un polytope étiqueté à  $d$  facettes.  $\Delta$  est un polytope produit si et seulement si l'ensemble des normales se scinde en deux sous-ensembles disjoints  $u = \{u_1, \dots, u_k\} \cup \{u_{k+1}, \dots, u_d\}$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{l=1}^d x_l u_l = 0 \quad \implies \quad \sum_{l=1}^k x_l u_l = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{l=k+1}^d x_l u_l = 0. \quad (2.3)$$

*Démonstration.* Le sens direct est évident. Pour la réciproque, supposons que l'ensemble des normales  $u = \{u_1, \dots, u_k\} \cup \{u_{k+1}, \dots, u_d\}$  satisfait (2.3) et, quitte à faire une translation, supposons que  $\Delta$  contient l'origine. Notons  $L_l = \langle \cdot, u_l \rangle + \lambda_l$  les fonctions affines telles que  $\Delta = \{\mu \in \mathfrak{t}^* \mid L_i(\mu) \geq 0, i = 1, \dots, d\}$ . Considérons les espaces vectoriels  $\mathfrak{g} = \langle u_1, \dots, u_k \rangle_{\mathbb{R}}$  et  $\mathfrak{h} = \langle u_{k+1}, \dots, u_d \rangle_{\mathbb{R}}$  ainsi que leurs annulateurs respectifs  $\mathfrak{g}^\circ$  et  $\mathfrak{h}^\circ$  dans  $\mathfrak{t}^*$ . La condition (2.3) implique  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$  et donc  $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{g}^\circ \oplus \mathfrak{h}^\circ$ . Finalement, on définit

$$\Xi = \{\xi \in \mathfrak{g}^\circ \mid L_i(\xi) \geq 0, i = k+1, \dots, d\} \quad \text{et} \quad \Sigma = \{\nu \in \mathfrak{h}^\circ \mid L_i(\nu) \geq 0, i = 1, \dots, k\}.$$

Puisque  $0 \in \Delta$ ,  $\lambda_l > 0$  pour  $l = 1, \dots, d$ ,  $0 \in \Sigma \cap \Xi$  et  $\Delta = \{\xi + \nu \mid \xi \in \Xi, \nu \in \Sigma\}$ .  $\square$

*Preuve de la proposition 2.13.* Étant donné que  $(\Delta, \Lambda)$  et  $(\Delta, \Lambda')$  sont tous deux rationnels, on peut choisir pour chacune des facettes  $F_l$  de  $\Delta$ ,  $l = 1, \dots, d$ , deux vecteurs  $u_l \in \Lambda$ ,  $u'_l \in \Lambda'$  tous deux normaux à  $F_l$  et intérieurs à  $\Delta$ . Ainsi, il existe un nombre réel  $r_l > 0$  tel que  $u_l = r_l u'_l$ . Le lemme sera démontré si l'on montre que  $\frac{r_l}{r_k} \in \mathbb{Q}$  pour tout  $k, l \in \{1, \dots, d\}$ .

L'ensemble  $u$  se scinde en sous-ensembles disjoints  $W_1, \dots, W_N$  tels que  $u_i, u_j$  sont dans le même ensemble si et seulement si  $r_i/r_j \in \mathbb{Q}$ . Nous allons montrer que  $\Delta$  est un produit de  $N$  polytopes.

Il est clair que chaque paire d'ensembles  $W_l, W_k$  satisfait la propriété (2.3) et que les espaces vectoriels  $\mathfrak{g}_l = \langle u_i \mid u_i \in W_l \rangle_{\mathbb{R}}$  sont disjoints deux à deux. On a  $n \geq \sum_{l=1}^N n_l$  où  $n_l = \dim \mathfrak{g}_l$ . Pour  $l = 1, \dots, N$ , posons  $|W_l| = d_l$ . En particulier  $\sum_{l=1}^N d_l = d$ . Posons, de plus,  $W_l = \{u_{il} \mid i = 1, \dots, d_l\}$ ,  $K = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d x_i u_i = 0\}$ ,  $K_l = \{x \in \mathbb{R}^{d_l} \mid \sum_{i=1}^{d_l} x_i u_{il} = 0\}$ . Par

le théorème du rang,  $\dim K = d - n$  et  $\dim K_l = d_l - n_l$ . Il est évident que l'on a une injection  $\bigoplus_{l=1}^N K_l \hookrightarrow K$ . Cette injection est surjective parce que

$$d - n = \dim K > \sum_{l=1}^N \dim K_l = \sum_{l=1}^N (d_l - n_l) = d - \sum_{l=1}^N n_l$$

si et seulement si  $n < \sum_{l=1}^N n_l$ , ce qui est impossible.

Le fait que  $K = \bigoplus_{l=1}^N K_l$  implique que la décomposition  $u = W_1 \cup \dots \cup W_N$  satisfait (2.3). Ainsi,  $\Delta$  est un produit de  $N$  polytopes.  $\square$

**Corollaire 2.16.** *Des orbifolds symplectiques toriques munis de structures complexes compatibles sont, à revêtement (d'orbifolds) fini près, biholomorphes si et seulement s'ils ont le même polytope moment (à transformations affines près).*

## 2.2 Variétés de contact toriques et bons cônes

### 2.2.1 Correspondance de Lerman

Le matériel de cette section est essentiellement extrait de (Lerman, 2002; Lerman, 2003).

Rappelons que la composante connexe à l'identité du groupe de difféomorphismes d'une variété  $N$  se relève de façon canonique comme un sous-groupe du groupe de symplectomorphismes hamiltoniens du cotangent munit de sa forme symplectique standard  $(T^*N, d\lambda)$ . Plus précisément, La forme de Liouville  $\lambda$  étant définie par  $\lambda(\alpha_p) = \alpha_p \circ d\pi$ , elle est invariante par difféomorphisme. Ainsi, si  $X$  est un champ de vecteurs sur  $T^*N$  qui relève un champ de vecteur (induit par un chemin de difféomorphismes) de  $N$  alors  $\mathcal{L}_X \lambda = 0$  et par la formule de Cartan  $-d\iota_X \lambda = \iota_X d\lambda = \iota_X \omega$ , c'est-à-dire que  $X$  est un champ de vecteurs hamiltonien.

Le groupe des contactomorphismes d'une variété de contact  $\text{Con}(N, \mathcal{D})$  est le sous-groupe des difféomorphismes de  $N$  qui préservent  $\mathcal{D}$ . Les éléments de la composante connexe à l'identité de  $\text{Con}(N, \mathcal{D})$  préservent aussi la co-orientation et se relèvent en symplectomorphismes hamiltonniens de la symplectisation  $(\mathcal{D}_+^o, d\lambda|_+)$  dont l'action commute avec celle du champ de Liouville. Ceci explique l'équivalence des définitions suivantes.

**Définition 2.17.** *L'action d'un tore sur une variété de contact  $(N, \mathcal{D})$  de dimension  $2n + 1$  est dite complètement intégrable si elle est effective, préserve la structure de contact et  $\dim T = \frac{1}{2}(\dim N + 1)$ . Une variété contact torique est une variété de contact co-orientée qui admet l'action complètement intégrable d'un tore.*

**Définition 2.18.** *Une variété de contact co-orientée  $(N, \mathcal{D})$  est torique si sa symplectisation  $(\mathcal{D}_+^o, \hat{\omega})$  est torique et que l'action du tore commute avec le champ de Liouville.*

Définissons dans ce cadre, l'application moment d'une 1-forme.

**Définition 2.19.** *Soit  $G$  un groupe de Lie agissant proprement sur une variété  $N$  et préservant une 1-forme  $\eta$ . On appelle  $\eta$ -application moment, l'application  $\hat{\mu}_\eta: N \rightarrow \mathfrak{g}^*$  définie par*

$$\langle \hat{\mu}_\eta(p), a \rangle = \eta_p(X_a(p))$$

pour tout  $p \in N$  et  $a \in \mathfrak{g}$ .

**Remarque 2.20.** *Le fait que  $\eta$  soit  $G$ -invariante implique que  $\hat{\mu}_\eta$  est  $G$ -invariante.*

**Définition/Proposition 2.21.** *(Lerman et Tolman, 1997) Soit  $(N, \mathcal{D}, T)$  variété de contact torique l'application moment de contact,  $\hat{\mu}: \mathcal{D}_+^o \rightarrow \mathfrak{t}^*$ , est la  $\lambda$ -application moment de l'action de  $T$  sur  $\mathcal{D}_+^o$ . C'est une application moment pour l'action de  $T$  sur  $\mathcal{D}_+^o$ , qui est homogène de degré 2 par rapport à  $\varsigma$  et  $\mathcal{C} = \text{im } \hat{\mu} \cup \{0\}$  est un cône nommé cône moment. Pour une 1-forme de contact  $T$ -invariante positive  $\eta: N \rightarrow \mathcal{D}_+^o$ , on a  $\hat{\mu}_\eta = \hat{\mu} \circ \eta$ .*

**Remarque 2.22.** *L'application moment de contact est la seule application moment (usuelle) de l'action de  $T$  sur  $(\mathcal{D}_+^o, \hat{\omega})$  qui est homogène de degré deux par rapport au champ de Liouville.*

**Lemme 2.23.** *Soit une variété de contact co-orientée de dimension  $2n + 1$ , un tore de dimension  $n + 1$  dans le groupe des contactomorphismes est maximal.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que les orbites de  $T$  dans  $\mathcal{D}_+^o$  sont isotropiques. Soit  $a, b \in \mathfrak{t}$  alors

$$d\hat{\omega}(X_a, X_b) = \hat{\omega}([X_a, X_b], \cdot) = 0,$$

voir (Gauduchon, ) pour la première égalité. Ainsi  $\hat{\omega}(X_a, X_b)$  est une constante sur  $\mathcal{D}_+^2$ . Or  $c$ 'est une fonction homogène de degré 2 par rapport à  $\varsigma$  parce que

$$\mathcal{L}_\varsigma(\hat{\omega}(X_a, X_b)) = (\mathcal{L}_\varsigma \hat{\omega})(X_a, X_b) - \hat{\omega}([\varsigma, X_a], X_b) - \hat{\omega}(X_a, [\varsigma, X_b]) = 2\hat{\omega}(X_a, X_b).$$

La seule possibilité est donc  $\hat{\omega}(X_a, X_b) = 0$ .  $\square$

Les cônes polyédraux que nous allons considérer dans ce texte ont leur sommet en 0. Un tel cône  $C \subset V$  est *rationnel* par rapport à un réseau  $\Lambda \subset V^*$  si chacune de ses facettes admet un vecteur normal dans  $\Lambda$ .

**Définition 2.24.** *Soit un cône  $C$  rationnel par rapport à un réseau  $\Lambda$ . Notons  $u_i$  le vecteur normal à la facette  $F_i$ , primitif dans  $\Lambda$  et intérieur à  $C$ . Le cône  $C$  est un bon cône si pour toute face  $F_I = \bigcap_{i \in I} F_i \neq \{0\}$ , on a  $\langle u_i \mid i \in I \rangle_{\mathbb{Z}} = \Lambda \cap \langle u_i \mid i \in I \rangle_{\mathbb{R}}$ .*

**Proposition 2.25.** *(Lerman et Tolman, 1997) Le cône moment  $C$  est un cône convexe polyédral. De plus, il est bon par rapport au réseau  $\Lambda = \ker(\exp: \mathfrak{t} \rightarrow T)$ .*

Banyaga et Molino, Boyer et Galicki, et Lerman (Banyaga et Molino, 1993; Banyaga et Molino, 1996; Boyer et Galicki, 2000; Lerman, 2002; Lerman, 2003) ont classifié les variétés de contact toriques. Celles de dimension 3 se retrouvent un peu à part et, comme nous le verrons plus loin, en dimension au moins 5, une action torique non libre est synonyme d'existence d'une structure sasakienne compatible. Or comme l'a montré Lerman (Lerman, 2003), une variété de contact torique de dimension 3 est soit  $\mathbb{T}^3$ ,  $S^1 \times S^2$ ,  $S^3$  ou un espace lenticulaire. Seuls les deux derniers cas admettent des structures sasakiennes compatibles bien que  $S^1 \times S^2$  admette également une action torique non libre, voir (Boyer et Galicki, 2008). Afin de simplifier la suite de ce texte, nous ne considérerons que le cas des variétés de contact toriques de dimension au moins 5.

**Définition 2.26.** *Un cône strictement convexe est un cône ne contenant aucun sous-ensemble linéaire non trivial. De façon équivalente, l'intérieur de son dual  $C_+^*$ , défini par*

$$C_+^* = \{a \in \mathfrak{t} \mid \langle x, a \rangle > 0, \forall x \in C \setminus \{0\}\},$$

*est non vide.*

**Théorème 2.27.** (*Lerman, 2003*) *Les variétés de contact toriques de dimension au moins 5 pour lesquelles l'action torique est non libre sont en correspondance biunivoque avec les bons cônes polyédraux strictement convexes.*

Comme précédemment, la démonstration de ce théorème suit les mêmes étapes que celle du résultat analogue concernant les orbifolds compacts symplectiques : Lerman introduit une cohomologie de faisceaux au-dessus du cône moment et montre que le premier groupe de cohomologie (les sections globales) est trivial. La réciproque utilise une version légèrement modifiée de la construction de Delzant.

## 2.2.2 Champ de Reeb

**Proposition 2.28.** (*Boyer et Galicki, 2008*) *Soit  $(N, \mathcal{D}, T)$  une variété de contact torique de dimension au moins 5 et  $(C, \Lambda)$  le bon cône associé. Tout élément de  $C_+^*$  correspond à un champ de Reeb. De plus, l'action de  $T$  sur  $N$  est libre si et seulement si  $C_+^*$  est vide.*

En effet, soit  $a \in C_+^*$  et  $\eta$  une forme de contact  $T$ -invariante (une telle forme existe puisque le tore et la variété  $N$  sont compacts). Le champ  $X_a$  est transverse parce que  $\eta(X_a) = \langle \hat{\mu}_\eta, a \rangle > 0$ . De plus, la forme  $\frac{\eta}{\eta(X_a)}$  est une forme de contact pour laquelle  $X_a$  est un champ de Reeb, puisque  $\frac{\eta}{\eta(X_a)}(X_a) = 1$  et  $\mathcal{L}_{X_a} \frac{\eta}{\eta(X_a)} = -X_a \cdot \eta(X_a) \frac{\eta}{\eta(X_a)^2} + \frac{\mathcal{L}_{X_a} \eta}{\eta(X_a)} = 0$ .

**Définition 2.29.** *Une variété de contact torique est de type Reeb si elle admet un champ de Reeb induit par l'action infinitésimale de  $T$  ou, de façon équivalente, si son cône moment est strictement convexe.*

**Définition 2.30.** *Étant donné un cône strictement convexe  $C$  et un vecteur de Reeb  $b \in C_+^*$ , on définit l'hyperplan caractéristique  $\mathfrak{t}_b^* = \{y \in \mathfrak{t}^* \mid \langle y, b \rangle = 1/2\}$ , le polytope caractéristique  $\Delta_b = C \cap \mathfrak{t}_b^*$  et le polytope étiqueté caractéristique  $(\Delta_b, u_b)$  où  $u_b = \{[\hat{u}_1], \dots, [\hat{u}_d]\}$  est l'ensemble des classes d'équivalence des vecteurs  $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_d$  dans  $\mathfrak{t}/(\mathbb{R}b)$ . La paire  $(\Delta_b, u_b)$  est un polytope étiqueté au sens usuel via l'identification  $(\mathfrak{t}/\mathbb{R}b)^* \simeq \mathfrak{t}_b^*$ .*

Soit  $T$  un tore et  $\mathfrak{t}$  son algèbre de Lie. Pour  $v \in \mathfrak{t}$ , on dénote  $T_v = \{\exp tv \mid t \in \mathbb{R}\}$  et  $v^\circ = \{x \in \mathfrak{t}^* \mid \langle x, v \rangle = 0\}$ .

**Proposition 2.31.** (Boyer et Galicki, 2000) Soit  $(M, \hat{\omega}, \varsigma, T, \hat{\mu})$  un cône symplectique torique dont le cône associé  $\mathcal{C} = \text{im } \hat{\mu}$  est un bon cône par rapport au réseau  $\Lambda = \ker(\exp: \mathfrak{t} \rightarrow T)$ , et dont les vecteurs normaux primitifs pour  $\Lambda$  sont  $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_d$ . Pour tout  $b \in \mathcal{C}_o^*$  tel que  $\mathbb{R}b \cap \Lambda \neq \{\emptyset\}$ , l'orbifold torique  $(\mathcal{Z}_b = \hat{\mu}(b)^{-1}(1/2)/T_b, \omega, T/T_b, \hat{\mu}_b)$  obtenu par réduction symplectique est associé au polytope étiqueté caractéristique

$$(\Delta_b, [\hat{u}_1], \dots, [\hat{u}_d])$$

où  $\omega$  désigne la forme symplectique obtenue de la réduction et  $\hat{\mu}_b$  est l'application moment de la réduction  $\hat{\mu}_b = \hat{\mu}|_{\hat{\mu}(b)^{-1}(1/2)}$ .

On identifie l'hyperplan  $\mathfrak{t}_b^*$  avec l'annulateur de  $b$  dans  $\mathfrak{t}^*$ . C'est aussi le dual de  $\mathfrak{t}_b = \mathfrak{t}/\mathbb{R}b = \text{Lie } T_b$ . Le stabilisateur d'un point  $p \in M$  est décrit explicitement par son image par  $\hat{\mu}$  de la façon suivante : soit  $I_p = \{i \in \{1, \dots, d\} \mid \langle \hat{\mu}(p), \hat{u}_i \rangle = 0\}$  alors

$$\text{Stab}_p T = \{\exp v \mid v = \sum_{i \in I_p} r_i \hat{u}_i, r_i \in \mathbb{R}\}.$$

En particulier, si  $p$  est dans  $\hat{\mu}(b)^{-1}(1/2)$  et  $\hat{\mu}(p)$  est dans une seule facette  $F_i \subset \hat{u}_i^o$  alors le groupe de structure de  $[p] \in \mathcal{Z}_b$  est donné par

$$\text{Stab}_p T_b = T_b \cap \text{Stab}_p T = T_b \cap T_{\hat{u}_i}.$$

**Définition 2.32.** Une variété sasakienne torique  $(N, \mathcal{D}, g, T)$  est la donnée d'une variété de contact torique et d'une métrique sasakienne  $T$ -invariante.

**Lemme 2.33.** (Boyer et Galicki, 2008) Le champ de Reeb d'une variété sasakienne torique est induit par l'action du tore, c'est à dire qu'il existe un vecteur  $b \in \mathcal{C}_+^*$  tel que  $\xi = X_b$ . En particulier, le cône moment est strictement convexe et  $\hat{\mu}(N_g) = \Delta_b$ .

En effet, l'intégrabilité de la structure presque complexe  $J$  implique que pour tout champ de vecteurs  $Y$ , on a  $\mathcal{L}_Y J = J \mathcal{L}_Y J$  voir (Gauduchon, ). Ainsi, puisque  $\varsigma$  est holomorphe,  $\xi$  commute avec l'action du tore

$$\mathcal{L}_{J\varsigma}(X_a) = -J \mathcal{L}_{J\varsigma}(JX_a) = -J \circ J(\mathcal{L}_\varsigma J)(JX_a) = -\mathcal{L}_\varsigma X_a = 0,$$

pour tout  $a \in \mathfrak{t}$ . La maximalité de  $T$  dans  $\text{Con}(N, \mathcal{D})$ , voir le lemme 2.23, implique donc que  $\xi = X_b$  pour un certain  $b \in \mathfrak{t}$ . La dernière partie du lemme suit du calcul :

$$2\langle \hat{\mu}, b \rangle = \mathcal{L}_\zeta \langle \hat{\mu}, b \rangle = -\hat{\omega}(X_b, \zeta) = \hat{g}(X_b, X_b).$$

## 2.3 Métriques kählériennes et sasakiennes compatibles

### 2.3.1 Coordonnées action-angle

Le matériel contenu dans cette section est extrait de (Abreu, 2001; Abreu, 2010; Burns, Guillemin et Lerman, 2008; Calderbank, David et Gauduchon, 2003; Guillemin, 1994a).

Soit  $(M^{2n}, \omega, J, g, T)$  un orbifold kählérien torique, c'est-à-dire que  $g$  est une métrique kählérienne  $T$ -invariante et  $J$  est une structure complexe telle que  $g(J \cdot, \cdot) = \omega(\cdot, \cdot)$ . On note  $\mu$  l'application moment et  $\mathcal{P} = \text{im } \mu$ . Les cas qui nous intéressent sont ceux où  $M$  est un orbifold compact ou un cône admettant une action propre et libre engendrée par le champ de Liouville  $\zeta$ . Dans le premier cas,  $\mathcal{P}$  est un polytope et dans le second, un cône polyédral strictement convexe. Rappelons de (Delzant, 1988; Lerman et Tolman, 1997), que  $\mathring{M} = \mu^{-1}(\mathring{\mathcal{P}})$  est le sous-ensemble de  $M$  où l'action du tore est libre. La métrique kählérienne définit une distribution horizontale sur le  $T$ -fibré principal  $\mu: \mathring{M} \rightarrow \mathring{\mathcal{P}}$  qui est engendrée par les champs de vecteurs  $JX_u$ ,  $u \in \mathfrak{t} = \text{Lie } T$ . Ceci induit une identification entre l'espace tangent de n'importe quel point de  $\mathring{M}$  et  $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}^*$ . En général, on choisit une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathfrak{t}$  pour identifier  $\mathring{M} \simeq \mathring{\mathcal{P}} \times T$  en utilisant les flots des champs de vecteurs induits  $X_{e_1}, \dots, X_{e_n}, JX_{e_1}, \dots, JX_{e_n}$  (qui commutent du fait de l'intégrabilité de  $J$ ). Les coordonnées action-angle sur  $\mathring{M}$  sont des coordonnées locales  $(\mu_1, \dots, \mu_d, t_1, \dots, t_d)$  sur  $\mathring{M}$  telles que  $\mu_i = \langle \mu, e_i \rangle$  et les 1-formes  $dt_i$  sont les duales de  $X_{e_i}$  (i.e.  $dt_i(X_{e_i}) = \delta_{ij}$  et  $dt_i(JX_{e_j}) = 0$ ).

Dans le système de coordonnées action-angle  $(\mu_1, \dots, \mu_d, t_1, \dots, t_d)$ , la forme symplectique devient  $\omega = \sum_{i=1}^n d\mu_i \wedge dt_i$ . Il est bien connu, voir (Guillemin, 1994a), qu'une métrique kählérienne torique peut être exprimée, dans ces coordonnées, de la façon suivante :

$$g = \sum_{s,r} G_{rs} d\mu_r \otimes d\mu_s + H_{rs} dt_r \otimes dt_s, \quad (2.4)$$

où les matrices  $(G_{rs})$  et  $(H_{rs})$  sont lisses sur  $\mathring{\mathcal{P}}$ , symétriques, définies positives et inverses l'une de l'autre. En particulier,  $g_{\text{red}} = \sum G_{rs} d\mu_r \otimes d\mu_s$  est une métrique riemannienne sur  $\mathring{\mathcal{P}}$ . Il peut être plus pratique de considérer ces objets à travers l'identification entre les espaces tangents de  $\mathring{M}$  et  $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}^*$  mentionnée ci-dessus. En effet, comme dans (Apostolov et al., 2004), on peut définir la fonction  $\mathbf{H}: \mathring{\mathcal{P}} \rightarrow \mathfrak{t}^* \otimes \mathfrak{t}^*$ , à valeurs dans  $S^2 \mathfrak{t}^*$ , par  $\mathbf{H}_{\mu(p)}(u, v) = g_p(X_u, X_v)$ , et poser  $H_{rs} = \mathbf{H}(e_r, e_s)$ . De la même façon,  $\mathbf{G}: \mathring{\mathcal{P}} \rightarrow \mathfrak{t} \otimes \mathfrak{t}$  est la métrique  $g_{\text{red}}$  via l'identification habituelle  $T_\nu \mathring{\mathcal{P}} \simeq \mathfrak{t}^*$ .

L'expression (2.4) étant donnée, la structure complexe  $J$  associée à  $\omega$  et  $g$  s'exprime aussi dans ces coordonnées :

$$J = - \sum \hat{H}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dt_j + \hat{G}_{ji} \frac{\partial}{\partial t_i} \otimes dx_j. \quad (2.5)$$

De plus, l'intégrabilité de la structure complexe  $J$  est alors équivalente à la relation

$$\frac{\partial}{\partial \mu_j} G_{rs} = \frac{\partial}{\partial \mu_r} G_{js} \quad (2.6)$$

ou, de manière équivalente, au fait que  $(G_{rs})$  est la hessienne d'un potentiel  $\phi \in C^\infty(\mathring{\mathcal{P}})$ .

**Remarque 2.34.** *Il est parfois commode de considérer des fonctions  $\mathbf{G}$  à valeurs dans  $S^2 \mathfrak{t}$  sans exiger que  $\mathbf{G}$  soit la hessienne d'un potentiel  $\phi \in C^\infty(\mathring{\mathcal{P}})$ . Dans ce cas, l'expression (2.4) donne lieu à une métrique presque kählérienne.*

Dans le cas d'un cône kählérien nous avons le raffinement suivant.

**Lemme 2.35.** (Martelli, Sparks et Yau, 2006) *Soit un cône kählérien torique  $(M, \omega, \hat{g}, J, \varsigma, T, \hat{\mu})$  avec des coordonnées action-angle  $(\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_n, t_1, \dots, t_n)$ . Le champ de Liouville s'écrit  $\varsigma = \sum_{i=0}^n \hat{\mu}_i \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}_i}$ . De plus, en notant la métrique  $\hat{g} = \sum_{s,r} \hat{G}_{rs} d\hat{\mu}_r \otimes d\hat{\mu}_s + \hat{H}_{rs} dt_r \otimes dt_s$ , les fonctions  $\hat{G}_{ij}$  sont homogènes d'ordre  $-2$ , et les fonctions  $\hat{H}_{ij}$  sont homogènes d'ordre 2 par rapport à  $\varsigma$ . Finalement, si  $X_b = J\varsigma$  est le champ de Reeb, alors pour tout  $\hat{\mu} \in \mathcal{C}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{\hat{\mu}}(b, \cdot) = 2\hat{\mu}$ .*

### 2.3.1.1 Potentiels symplectiques

Dans le cas où  $M$  est un orbifold compact, des conditions nécessaires et suffisantes au fait qu'une fonction  $\mathbf{H}$ , à valeurs dans  $S^2 \mathfrak{t}^*$ , soit induite par une métrique kählérienne torique,

définie globalement sur  $M$  ont été établies dans (Abreu, 2001; Donaldson, 2005; Apostolov et al., 2004). Dans cette thèse, nous utiliserons les conditions au bord de l'article (Apostolov et al., 2004). De plus, nous allons adapter ce point de vue au cas des cônes kählériens dans la section 2.3.2. Pour toute face non vide  $F = F_I = \bigcap_{l \in I} F_l$  de  $\mathcal{P}$ , notons  $\mathfrak{t}_F = \langle u_l \mid l \in I \rangle_{\mathbb{R}}$  où  $u_l$  est un vecteur normal à  $F_l$ , une facette de  $\mathcal{P}$ . Son annulateur dans  $\mathfrak{t}^*$ , dénoté  $\mathfrak{t}_F^o$ , est naturellement identifié avec  $(\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_F)^*$ . Dans le reste de cette sous-section, nous ne considérons pas les sommets d'un polytope ou d'un cône comme des faces.

**Proposition 2.36.** (Apostolov et al., 2004, proposition 1) Soit  $(M^{2n}, \omega, g, T)$  un orbifold kählérien torique associé au polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  et soit  $\mathbf{H}$  une fonction à valeurs dans  $S^2 \mathfrak{t}^*$ , définie positive sur  $\mathring{\Delta}$ .  $\mathbf{H}$  est induite par une métrique presque kählérienne sur  $M$  si et seulement si  $\mathbf{H}$  est la restriction à  $\mathring{\Delta}$  d'une fonction lisse sur  $\Delta$ , pour tout  $y \in F_l$ ,

$$\mathbf{H}_y(u_l, \cdot) = 0 \quad \text{et} \quad d\mathbf{H}_y(u_l, u_l) = 2u_l, \quad (2.7)$$

et la restriction de  $\mathbf{H}$  sur l'intérieur de chaque face  $F \subset \Delta$  est définie positive lorsqu'on la considère comme une fonction à valeurs dans  $S^2 (\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_F)^*$ .

**Remarque 2.37.** Notons que la condition au bord (2.7) utilise les normales et non pas le réseau. Ceci est en accord avec le fait que différents réseaux (mais des normales identiques) conduisent à des orbifolds qui admettent un revêtement (d'orbifolds) fini commun.

**Définition 2.38.** L'ensemble des potentiels symplectiques  $\mathcal{S}(\Delta, u)$  est l'ensemble des fonctions lisses  $\phi \in C^\infty(\mathring{\Delta})$ , strictement convexes sur  $\mathring{\Delta}$  pour lesquelles  $\mathbf{H} = (\text{Hess } \phi)^{-1}$  satisfait les conditions de la proposition 2.36.

### 2.3.1.2 Potentiels de Guillemin et de Boothy–Wang

La construction de Delzant, fournit une structure kählérienne canonique sur les orbifolds symplectiques toriques construits à partir de polytopes étiquetés rationnels. Pour un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$ , cette structure a été détaillée dans (Guillemin, 1994a). Elle est associée à un potentiel symplectique  $\phi_0 \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  appelé *potentiel de Guillemin* et défini comme

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^d L_k \log L_k - L_\infty \log L_\infty \right) \quad (2.8)$$

où  $L_k(\cdot) = \langle \cdot, u_k \rangle - \lambda_k$  est une fonction affine telle que  $F_k \subset L_k^{-1}(0)$  et  $L_\infty = \sum_{k=1}^d L_k$ .

**Définition 2.39.** Pour  $b \in \mathcal{C}_+^*$ , le potentiel de Boothy–Wang  $\hat{\phi}$  de  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta_b, u_b)$  est la fonction

$$\hat{\phi}(\hat{\mu}) = 2\langle \hat{\mu}, b \rangle \cdot \phi\left(\frac{\hat{\mu}}{2\langle \hat{\mu}, b \rangle}\right) + \frac{\langle \hat{\mu}, b \rangle}{2} \log \langle \hat{\mu}, b \rangle$$

définie sur l'intérieur du cône  $\mathcal{C}$ .

Étant donné un bon cône strictement convexe  $(\mathcal{C}, \Lambda)$ , chaque  $b \in \mathcal{C}_+^*$  donne lieu à une structure kählérienne conique “canonique” sur le cône symplectique torique associé à  $(\mathcal{C}, \Lambda)$ . En effet, dans (Abreu, 2010), Abreu montre que pour  $b \in \mathcal{C}_+^*$ , le potentiel de Boothy–Wang du potentiel de Guillemin  $\phi_0 \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  est un potentiel pour la métrique kählérienne conique obtenue à travers la construction de Delzant.

### 2.3.2 Conditions au bord pour les potentiels dans le cas des cônes kählériens toriques.

Dans cette section, nous adaptons la proposition 2.36 au cas des cônes kählériens toriques. Dans (Apostolov et al., 2004) la proposition 2.36 suit deux lemmes : (Apostolov et al., 2004, lemme 2) qui s'applique sans égard au fait que la métrique soit complète et qui régit donc aussi les métriques sur des cônes kählériens (voir le lemme 2.40 ci-dessous) et (Apostolov et al., 2004, lemme 3) qui nécessite une adaptation dans le cas des cônes kählériens (voir le lemme 2.41 ci-dessous).

**Lemme 2.40.** (Abreu, 1998; Apostolov et al., 2004) Soit  $(M, \omega)$  un orbifold symplectique torique de dimension  $2n$  avec une application moment  $\mu: M \rightarrow \mathcal{P} \subset \mathfrak{t}^*$ . Soit  $(g_0, J_0), (g, J)$  des métriques presque kählériennes compatibles sur  $\mathring{M} = \mu^{-1}(\mathring{\mathcal{P}})$  de la forme (2.4), données par  $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}$  et les mêmes coordonnées action-angle. Supposons que  $(g_0, J_0)$  s'étende en une métrique presque kählérienne sur  $M$ . Alors  $(g, J)$  s'étend en une métrique presque kählérienne sur  $M$  si  $\mathbf{G} - \mathbf{G}_0$  et  $\mathbf{G}_0 \mathbf{H} \mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0$  sont lisses sur  $\text{im } \mu$ .

**Lemme 2.41.** Soit  $(M, \hat{\omega}, \varsigma)$  un cône symplectique torique au-dessus d'une variété de contact compacte co-orientée de type Reeb. Si deux métriques kählériennes coniques induisent la même fonction  $\hat{\mathbf{G}}$  à valeurs dans  $S^{2\hat{\mathbf{t}}}$  sur l'intérieur du cône moment, alors il existe un symplectomorphisme équivariant de  $(M, \hat{\omega})$  qui commute avec  $\varsigma$  et envoie une métrique sur l'autre.

*Démonstration.* Soit  $\hat{g}$  et  $\hat{g}'$  deux telles métriques. Elles ont le même ensemble de niveau

$$N_g = \{p \in M \mid \hat{g}_p(\varsigma, \varsigma) = 1\} = \{p \in M \mid \hat{g}'_p(\varsigma, \varsigma) = 1\} = N_{g'} \simeq N.$$

En effet, la partie  $(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n)$  des coordonnées action-angle ne dépend pas de la métrique, le champ de Liouville est  $\varsigma = \sum_i 2\hat{\mu}_i \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}_i}$  et alors

$$\hat{g}(\varsigma, \varsigma) = 4 \sum_{i,j=0}^n \hat{\mu}_i \hat{\mu}_j \hat{G}_{ij} = \hat{g}'(\varsigma, \varsigma).$$

Le symplectomorphisme équivariant, disons  $\psi$ , de  $(\hat{M}, \hat{\omega})$  qui envoie un système de coordonnées sur l'autre commute avec  $\varsigma$  et envoie une métrique sur l'autre. De plus, il se restreint à  $\hat{N}$  en une isométrie équivariante entre  $g$  et  $g'$ , qui peut être étendue uniquement en une isométrie équivariante lisse sur  $N$  par un argument standard utilisant la compacité de  $N$ . Finalement, puisque  $g$  et  $g'$  déterminent uniquement leur métrique conique respective, cette isométrie s'étend en une isométrie globale sur  $M$  qui coïncide avec  $\psi$  sur  $\hat{M}$ .  $\square$

**Proposition 2.42.** Soit  $(M, \hat{\omega}, \hat{T}, \varsigma)$  un cône symplectique torique associé à un bon cône polyédral strictement convexe  $(C, \Lambda)$  de vecteurs normaux intérieurs primitifs  $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_d$ .  $\hat{\mathbf{H}}$  est une fonction sur  $\hat{C}$  à valeurs dans  $S^2\hat{\mathfrak{t}}^*$  qui correspond à une métrique conique presque Kähler et  $\hat{T}$ -invariante sur  $M$  si et seulement si

- (1)  $\hat{\mathbf{H}}$  est la restriction sur  $\hat{C}$  d'une fonction lisse sur  $C$  à valeurs dans  $S^2\hat{\mathfrak{t}}^*$ ,
- (2) pour tout  $y$  dans l'intérieur de la facette  $\hat{F}_l \subset C$ ,

$$\hat{\mathbf{H}}_y(\hat{u}_l, \cdot) = 0 \quad \text{et} \quad d\hat{\mathbf{H}}_y(\hat{u}_l, \hat{u}_l) = 2\hat{u}_l, \quad (2.9)$$

- (3) la restriction de  $\hat{\mathbf{H}}$  sur l'intérieur de n'importe quelle face  $\hat{F} \subset C$  est définie positive lorsque vue comme fonction à valeurs dans  $S^2(\hat{\mathfrak{t}}/\hat{\mathfrak{t}}_F)^*$ ,
- (4)  $\hat{\mathbf{H}}$  est homogène d'ordre 2 par rapport à la dilatation dans  $\hat{\mathfrak{t}}^*$ .

*Démonstration.* Le sens direct de cette proposition découle directement de la proposition 2.36 puisque la preuve dans ce sens n'utilise que des arguments locaux. Supposons, en effet, que  $\hat{\mathbf{H}}$  corresponde à une métrique kählérienne, c'est-à-dire que pour tout  $a, c \in \hat{\mathfrak{t}}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}(a, c) = \hat{g}(X_a, X_c)$ . Il en découle les conditions (1) et (3) puisque si  $p \in \hat{\mu}^{-1}(\hat{F}_l)$  alors  $X_{\hat{u}_l} = 0$  et

$\hat{\mathbf{H}}_{\hat{\mu}(p)}(\hat{u}_l, \cdot) = 0$ . D'autre part, en considérant l'identification  $\hat{\mathfrak{t}} = T_y^* \hat{\mathfrak{t}}^*$ , on a  $d\hat{\mathbf{H}}(\hat{u}_l, \cdot): \mathcal{C} \rightarrow \text{End}(\hat{\mathfrak{t}})$  dans le sens où  $d\hat{\mathbf{H}}_y(\hat{u}_l, v) \in T_y^* \hat{\mathfrak{t}}^*$  pour tout  $v \in \hat{\mathfrak{t}}$ . Le fait que l'application  $\hat{\mathbf{H}}(\hat{u}_l, \cdot)$  s'annule sur  $\hat{F}_l$  implique que, vue comme un endomorphisme, la transposée de  $d_y \hat{\mathbf{H}}(\hat{u}_l, \cdot)$  s'annule sur  $T_y \hat{F}_l$ . Ainsi,  $d_y \hat{\mathbf{H}}(\hat{u}_l, \cdot): \hat{\mathfrak{t}} \rightarrow (T_y \hat{F}_l)^\circ = \mathbb{R}u_l$ . Cette application n'est pas nulle et dans (Apostolov et al., 2004), les auteurs ont calculé que  $d_y \hat{\mathbf{H}}(\hat{u}_l, \hat{u}_l) = 2\hat{u}_l$  ce qui donne la condition (2). La condition (4) est contenue dans le lemme 2.35

Réciproquement, supposons que  $\hat{\mathbf{H}}$  satisfasse les conditions (1) à (4).  $\hat{\mathbf{H}}$  définit une structure kählérienne conique et torique sur  $\hat{M} = \hat{\mu}^{-1}(\hat{\mathcal{C}})$ . En particulier, elle détermine un champ de Reeb et donc un vecteur  $b \in \mathcal{C}_+^*$  tel que  $\hat{\mathbf{H}}(b, \cdot) = 2\hat{\mu}$ . Elle détermine de plus un polytope étiqueté caractéristique  $(\Delta_b, u_b)$  où, rappelons-le,  $\Delta_b = \mathcal{C} \cap \{\hat{\mu} \mid \langle \hat{\mu}, b \rangle = \frac{1}{2}\}$  et  $u_b = \{[\hat{u}_1], \dots, [\hat{u}_d]\}$  avec  $[a]$  la classe d'équivalence de  $a \in \hat{\mathfrak{t}}$  dans  $\hat{\mathfrak{t}}/\mathbb{R}b$ . Posons

$$\mathbf{H}_\mu^b = \frac{1}{2\langle \hat{\mu}, b \rangle} \left( \hat{\mathbf{H}}_\mu - 2 \frac{\hat{\mu} \otimes \hat{\mu}}{\langle \hat{\mu}, b \rangle} \right). \quad (2.10)$$

Nous allons montrer que  $\mathbf{H}^b$  satisfait les conditions de la proposition 2.36 par rapport à  $(\Delta_b, u_b)$ . Tout d'abord, (4) implique que  $\mathbf{H}^b$  est une fonction homogène de degré 0 par rapport à la dilatation, elle est donc bien définie comme fonction sur  $\Delta_b$ . De plus, pour tout  $\mu = \frac{\hat{\mu}}{2\langle \hat{\mu}, b \rangle} \in \Delta_b$ ,  $\mathbf{H}_\mu^b$  est bien définie sur  $\hat{\mathfrak{t}}/\mathbb{R}b$  puisque  $\mathbf{H}^b(b, \cdot) = 0$ . En effet, la formule (2.10) équivaut à

$$2\langle \hat{\mu}, b \rangle \mathbf{H}_\mu^b = \hat{\mathbf{H}}_\mu - \frac{\hat{\mathbf{H}}_\mu(b, \cdot) \otimes \hat{\mathbf{H}}_\mu(b, \cdot)}{\hat{\mathbf{H}}_\mu(b, b)}.$$

Le fait que  $\hat{\mathbf{H}}$  corresponde à une métrique  $\hat{g}$  signifie que  $\hat{\mathbf{H}}(a, c) = \hat{g}(X_a, X_c)$  et donc pour  $y \in \hat{F}_l$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_y(\hat{u}_l, \cdot) = 0$ . De plus,  $\hat{F}_l$  est incluse dans l'annulateur de son vecteur normal  $\hat{u}_l$  puisque  $\mathcal{C}$  a son sommet en l'origine de  $\hat{\mathfrak{t}}^*$ . Ainsi,  $\mathbf{H}_y^b([\hat{u}_k], \cdot) = \mathbf{H}_y^b(u_k, \cdot) = 0$  et par hypothèse (i.e  $d_y \hat{\mathbf{H}}(\hat{u}_k, \hat{u}_k) = 2\hat{u}_k$ ), on a

$$d_y 2\langle \hat{\mu}, b \rangle \mathbf{H}^b([\hat{u}_k], [\hat{u}_k]) = 2\langle \hat{\mu}, b \rangle d_y \hat{\mathbf{H}}(\hat{u}_k, \hat{u}_k) - 2 \frac{\langle y, \hat{u}_k \rangle}{\langle y, b \rangle} \hat{u}_k + \frac{\langle y, \hat{u}_k \rangle^2}{\langle y, b \rangle^2} b = d_y \hat{\mathbf{H}}(\hat{u}_k, \hat{u}_k) = 2\hat{u}_k.$$

Prenons une base  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  de  $\hat{\mathfrak{t}}$  telle que  $e_0 = b$  induit le champ de Reeb. Considérons  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$  les coordonnées correspondantes sur  $\hat{\mathfrak{t}}^*$  et écrivons  $\hat{\mathbf{H}}$  et son inverse  $\hat{\mathbf{G}}$  comme

des matrices dans ces coordonnées en utilisant (2.10)

$$\hat{\mathbf{H}} = 2 \left( \begin{array}{c|ccc} y_0 & y_1 & \dots & y_n \\ \hline y_1 & & & \\ \vdots & & & \\ y_n & & & \end{array} \middle| \begin{array}{c} y_0 \mathbf{H}^b + \frac{1}{y_0} \mathbf{Y} \\ \\ \\ \end{array} \right) \quad \hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{2y_0^3} \left( \begin{array}{c|ccc} y_0^2 + y_i y_j G_{ij}^b & -y_0 y_i G_{i1}^b & \dots & -y_0 y_i G_{in}^b \\ \hline -y_0 y_j G_{1j}^b & & & \\ \vdots & & & \\ -y_0 y_j G_{nj}^b & & & \end{array} \middle| \begin{array}{c} \\ \\ y_0^2 \mathbf{G}^b \\ \end{array} \right) \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{Y} = (y_i y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ ,  $\mathbf{G}^b$  est l'inverse de  $\mathbf{H}^b$  et où on utilise la convention qu'un indice répété dans une expression indique qu'on prend la somme (sur cet indice) de 1 à  $n$ .

Le fait que  $\mathbf{H}^b$  satisfasse les conditions de la proposition 2.36 pour  $(\Delta_b, u_b)$  implique que  $\mathbf{G}^b - \mathbf{G}_0^b$  et  $\mathbf{G}_0^b \mathbf{H}^b \mathbf{G}_0^b - \mathbf{G}_0^b$  sont toutes deux lisses sur  $\Delta_b$  où  $\mathbf{G}_0^b$  est la hessienne du potentiel de Guillemin  $\phi_0$  de  $(\Delta_b, u_b)$ . Ceci est suffisant pour assurer que  $\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{G}}_0$  et  $\hat{\mathbf{G}}_0 \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{G}}_0 - \hat{\mathbf{G}}_0$ , où  $\hat{\mathbf{G}}_0$  est la hessienne du potentiel de Boothby–Wang de  $\phi_0$ , sont lisses sur  $\mathcal{C}$ . Le lemme 2.40 conclut la preuve.  $\square$

**Corollaire 2.43.**  $\hat{\mathbf{H}}$  est l'inverse de la hessienne d'un potentiel  $\hat{\phi}$  si et seulement si  $\hat{\phi}$  est le potentiel de Boothby–Wang d'une fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta_b, u_b)$  dont l'inverse de la hessienne est  $\mathbf{H}^b$ .

**Proposition 2.44.** Si  $\check{g}$  désigne la métrique transversale associée à la métrique sasakienne  $g$  donnant lieu à  $\hat{g}$ , alors  $\check{g}(X_a, X_c) = \mathbf{H}^b(a, c)$  sur  $N_g$ . En particulier, si  $\mathbb{R}b \cap \Lambda \neq \{0\}$  alors la métrique transversale  $\check{g}$  induite par  $\hat{g}$  sur l'orbifold  $\mathcal{Z}_b$  est associée à  $\mathbf{H}^b$ .

*Démonstration.* La fonction à valeurs dans  $S^{2\hat{\mathfrak{t}}}$  associée à la métrique  $\check{g}$  est définie par

$$\mathbf{H}^{\check{g}}(a, c) = \check{g}(X_a, X_c)$$

pour deux vecteurs  $a, c \in \hat{\mathfrak{t}}$ . D'autre part, la métrique kählérienne  $\check{g}$  induite sur  $\mathcal{Z}_b$  par  $\hat{g}$  est définie par  $\check{g}_{[p]}([X], [X']) = \hat{g}_p(Z, Z')$  où  $Z$  (resp.  $Z'$ ) est la projection horizontale de  $X$  (resp.  $X'$ ) en  $p$  et  $[\cdot]$  dénote la classe d'équivalence de points ou de vecteurs par rapport à l'action infinitésimale générée par  $X_b$ . Pour  $a \in \hat{\mathfrak{t}}$ , la projection horizontale de  $X_a$  est

$$Z_a = X_a - \frac{\hat{\mathbf{H}}(a, b)}{\hat{\mathbf{H}}(b, b)} X_b.$$

Ainsi  $\mathbf{H}^{\check{g}}([a], [c]) = \check{g}(X_{[a]}, X_{[c]}) = \check{g}([X_a], [X_c]) = \hat{g}_p(Z_a, Z_c) = \mathbf{H}^b([a], [c])$ .  $\square$

### 2.3.3 Fonction affine extrémale d'un polytope étiqueté

#### 2.3.3.1 Courbure scalaire

Dans (Abreu, 1998; Abreu, 2010), Abreu a calculé la courbure d'une métrique kählérienne torique  $g$  compatible sur un orbifold torique symplectique  $(M, \omega, T)$ , en termes de son potentiel  $\phi_g: \mathring{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$ . En choisissant une base de  $\mathfrak{t} = \text{Lie } T$  et en utilisant le système de coordonnées action-angle pour exprimer la métrique sous la forme (2.4), la courbure scalaire de  $g$  est le tiré en arrière par l'application moment de la fonction

$$S(\phi_g) = - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 H_{ij}}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \quad (2.12)$$

ou  $(H_{ij})$  est l'inverse de la hessienne de  $\phi_g$ .

**Lemme 2.45.** *Soit  $(M, \omega, g, J, T)$  un orbifold kählérien torique avec application moment  $\mu: M \rightarrow \mathcal{P}$  et  $f$  une fonction lisse sur l'image de  $\mu$ . Le champ de vecteurs hamiltonien  $K = J \text{grad } \mu^* f$  est un champ de Killing si et seulement si  $f$  est une fonction affine.*

*Démonstration.* Soit  $J$  la structure complexe associée à  $(\omega, g)$ . Par définition,  $K$  commute avec l'action de  $T$  et alors, en chaque point  $p \in M$ , l'espace  $K_p \cup \{X_a(p) \mid a \in \mathfrak{t}\}$  est isotropique dans  $(T_p M, \omega_p)$ . Puisque les orbites génériques de  $T$  sont des lagrangiennes, on a  $K_p \in \{X_a(p) \mid a \in \mathfrak{t}\}$  pour tout  $p \in \mathring{M}$ . Ainsi,  $K = \sum_{i=1}^n f_i X_{e_i}$  où  $e_1, \dots, e_n$  est une base de  $\mathfrak{t}$  et  $f_i$  sont des fonctions  $T$ -invariantes. De plus, si  $K$  est de Killing, il est holomorphe réel et donc  $(\mathcal{L}_K J)(X_a) = \sum_{i=1}^n df_i(JX_a)X_{e_i} = 0$  pour tout  $a \in \mathfrak{t}$ . En particulier, les  $f_i$  sont constantes. La réciproque est immédiate.  $\square$

Dans le cas d'un orbifold compact, ce dernier lemme se aussi démontre en utilisant la compacité du groupe d'isométries. Dans tous les cas, le lemme 2.45 allié à la formule d'Abreu ci-dessus et au théorème 1.4, implique

**Corollaire 2.46.** *Soit  $(M, \omega, g, J, T)$  un orbifold kählérien torique tel que  $g$  soit associée au potentiel symplectique  $\phi_g$ . La métrique kählérienne compatible  $T$ -invariante  $g$  est extrémale si et seulement si  $S(\phi_g)$  est une fonction affine.*

Dans le cas sasakien, Abreu montre que si  $\hat{\phi}$  est le potentiel de Boothy–Wang de  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta_b, u_b)$  alors

$$S(\hat{\phi})(\hat{\mu}) = \frac{1}{\langle \hat{\mu}, b \rangle} \left( 2S(\phi) \left( \frac{\hat{\mu}}{\langle \hat{\mu}, b \rangle} \right) - 2n(n+1) \right). \quad (2.13)$$

Une structure sasakienne  $(N, \mathcal{D}, g)$  implique trois structures métriques : la métrique riemannienne  $g$  sur la variété de contact  $N$ , la métrique transversale  $\tilde{g}$  sur le fibré de contact  $\mathcal{D} \rightarrow N$  et la métrique riemannienne  $\hat{g}$  sur la symplectisation  $M = \mathcal{D}_+^o$ . Les courbures scalaires de ces métriques sont reliées entre elles par la formule

$$s_{\hat{g}|_N} = s_{\tilde{g}} - 4n(n+1) = s_g - 2n(2n+1),$$

voir (Boyer et Galicki, 2008). En particulier, la formule d’Abreu (2.12) et la relation (2.13) déterminent ces trois courbures dans le cas torique. Il est alors évident que

**Lemme 2.47.** (Abreu, 2010) *Soit  $g$  une métrique sasakienne torique, avec champ de Reeb  $X_b$ , associée à un potentiel  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta_b, u_b)$ . La courbure scalaire  $s_g$  est le tiré-en-arrière par  $\hat{\mu}|_N$  de la fonction*

$$4S(\phi) - 2n.$$

*En particulier la métrique sasakienne  $g$  est à courbure scalaire constante si et seulement si  $S(\phi)$  est une fonction constante.*

**Lemme 2.48.** *Soit  $g$  une métrique sasakienne torique, avec champ de Reeb  $X_b$ , associée à un potentiel  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta_b, u_b)$ .  $g$  est extrémale si et seulement si  $S(\phi)$  est une fonction affine.*

*Démonstration.* Posons  $X = \Phi(\text{grad } s_g) + s_g X_b$ . Par la proposition 1.25 on sait que  $g$  est extrémale si et seulement si  $X$  est un champ de Killing et, via le lemme 1.24, ceci est équivalent à ce que  $X$  soit transversalement holomorphe et  $\mathcal{L}_X \eta = 0$ . Dans ce cas,  $X$  est dans l’algèbre de Lie des contactomorphismes de  $(N, \mathcal{D})$  et commute avec le tore puisque  $g$  est  $T$ -invariante. Par maximalité du tore dans  $\text{Con}(N, \mathcal{D})$ , voir le lemme 2.23,  $X$  est donc induit par l’action infinitésimale du tore. En particulier,  $X$  est un champ de Killing si et seulement si il existe un vecteur  $a \in \mathfrak{t}$  tel que  $X_a = X$  et dans ce cas,  $\langle \hat{\mu}, a \rangle = \eta(X_a) = s_g = \hat{\mu}^*(4S(\phi) - 2n)$ . La réciproque est immédiate.  $\square$

### 2.3.3.2 Fonction affine extrémale d'un polytope étiqueté

Soit  $(\Delta, u)$  un polytope étiqueté.

**Définition 2.49.** La fonction affine extrémale de  $(\Delta, u)$ , notée  $\zeta_{(\Delta, u)}$ , est l'unique fonction affine telle que la fonctionnelle de Futaki relative définie par

$$\mathcal{L}_{\Delta, u}(f) = \int_{\partial\Delta} f d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Delta} f \zeta_{(\Delta, u)} d\varpi, \quad (2.14)$$

s'annule sur les fonctions affines sur  $\Delta$  où  $d\varpi$  est une forme volume euclidienne sur  $\mathfrak{t}^*$  et  $d\sigma$  est une forme volume sur  $\partial\Delta$  définie par l'égalité  $u_j \wedge d\sigma = -d\varpi$  sur la facette  $F_j$ .

À un facteur multiplicatif positif près,  $\mathcal{L}_{\Delta, u}$  ne dépend pas de  $d\varpi$ . La restriction de la  $(n-1)$ -forme  $d\sigma$  sur une facette est une forme volume euclidienne. Le fait qu'une telle fonction  $\zeta_{(\Delta, u)}$  existe (et est unique) découle du lemme suivant via le corollaire 2.51.

**Lemme 2.50.** (Donaldson, 2002) Pour  $f \in C^\infty(\Delta)$  et  $\mathbf{H}$  une fonction à valeurs dans  $S^2\mathfrak{t}^*$  satisfaisant les conditions au bord (2.7)

$$\int_{\Delta} \langle \mathbf{H}, \text{Hess} f \rangle d\varpi = 2 \int_{\partial\Delta} f d\sigma - \int_{\Delta} f S(\mathbf{H}) d\varpi \quad (2.15)$$

où  $\langle \mathbf{H}, \text{Hess} f \rangle = \text{tr}(\mathbf{H} \cdot \text{Hess} f)$  et  $S(\mathbf{H}) = -\sum_{i,j} \frac{\partial^2 H_{ij}}{\partial \mu_i \partial \mu_j}$ .

Ce lemme ayant une place cruciale dans cette thèse nous en donnons la preuve ci-dessous.

*Démonstration.* On prend une base de  $\mathfrak{t}$  qui nous donne des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  sur  $\mathfrak{t}^*$   $d\varpi = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  et on écrit  $\mathbf{H} = (H_{ij})$ ,  $\text{Hess} f = (f_{,ij}) = (\partial_i \partial_j f)$ . L'identification  $\mathfrak{t} \simeq T^*\mathfrak{t}^*$  se lit par exemple  $u_l = \sum_{i=1}^n u_{li} dx_i$ . On a

$$\int_{\Delta} \langle \mathbf{H}, \text{Hess} f \rangle d\varpi = \int_{\Delta} \sum_{i,j} H_{ij} f_{,ij} d\varpi = \int_{\Delta} \sum_{i,j} \partial_j (H_{ij} f_{,i}) - \sum_{i,j} H_{ij,j} f_{,i} d\varpi. \quad (2.16)$$

Posons  $X = \sum_{i,j} H_{ij} f_{,i} \partial_j \in \Gamma(T\mathfrak{t}^*)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \langle \mathbf{H}, \text{Hess} f \rangle d\varpi &= \int_{\Delta} (\text{div} X - \sum_{i,j} H_{ij,j} f_{,i}) d\varpi \\ &= \int_{\partial\Delta} \iota_X d\varpi - \int_{\Delta} \sum_{i,j} H_{ij,j} f_{,i} d\varpi \end{aligned} \quad (2.17)$$

où on a utilisé le théorème de divergence. On a que  $\iota_X d\varpi|_{\partial\Delta} = 0$ . En effet, par définition,  $u_l \in (TF_l)^\circ$  et on calcule que  $u_l \wedge \iota_X d\varpi = \mathbf{H}(\nabla f, u_l) d\varpi$  puisque  $u_l = \sum_j u_{lj} dx_j$  et  $\iota_X d\varpi = \sum_{i,j} (-1)^j H_{ij} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$ . On se retrouve avec

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \langle \mathbf{H}, \text{Hess} f \rangle d\varpi &= - \int_{\Delta} \sum_{i,j} H_{ij,j} f_i d\varpi \\ &= - \int_{\Delta} \sum_{i,j} (\partial_i (H_{ij,j} f) - f H_{ij,ji}) d\varpi \\ &= - \int_{\partial\Delta} f \iota_Y d\varpi + \int_{\Delta} \sum_{i,j} f H_{ij,ji} d\varpi \end{aligned} \quad (2.18)$$

où  $Y = \sum_{i,j} H_{ij,j} \partial_i$ . Il suffit maintenant de montrer que  $\iota_Y d\varpi|_{\partial\Delta} = -2d\sigma$ , c'est-à-dire que  $u_l \wedge \iota_Y d\varpi = 2d\varpi$  sur  $F_l$ . On a  $\iota_Y d\varpi = \sum_{i,j} (-1)^{i+1} H_{ij,j} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$  et  $u_l = \sum_i u_{li} dx_i$  et donc, sur  $F_l$ ,

$$u_l \wedge \iota_Y d\varpi = \sum_{i,j} H_{ij,j} u_{li} d\varpi = \text{tr} (d\mathbf{H}(u_l, \cdot)) d\varpi = 2d\varpi.$$

En effet,  $\mathbf{H}(u_l, \cdot) = \sum_{i,j} H_{ij} u_{li} \partial_j$  et donc  $d\mathbf{H}(u_l, \cdot) = \sum_{i,j,k} H_{ij,k} u_{li} \partial_j \otimes dx_k$ .  $\square$

**Corollaire 2.51.**  $\zeta_{(\Delta,u)}$  est la  $L^2(\Delta, d\varpi)$ -projection de  $S(\phi)$  sur  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$  pour n'importe quel potentiel  $\phi \in S(\Delta, u)$ .

**Remarque 2.52.** Soit  $\mathbf{H} = (H_{ij})$  une fonction quelconque définie sur  $\Delta$ , à valeurs dans  $S^2 \mathfrak{t}^*$ , satisfaisant les conditions au bord (2.7) mais n'étant pas nécessairement définie positive. Le lemme 2.50 implique que la projection  $L^2(\Delta, d\varpi)$  de la fonction  $S(\mathbf{H})$  sur l'espace des fonctions affines sur  $\Delta$  est égale à  $\zeta_{(\Delta,u)}$ .

La proposition suivante qui est élémentaire, donne une définition alternative de  $\zeta_{(\Delta,u)}$ .

**Proposition 2.53.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathfrak{t}$  et  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  les coordonnées de  $\mathfrak{t}^*$  associées. On pose  $\mu_0 = 1$ . La fonction affine extrémale de  $(\Delta, u)$  est donnée dans ces coordonnées par  $\zeta_{(\Delta,u)} = \sum_{i=0}^n \zeta_i \mu_i$  où  $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  est l'unique solution du système linéaire

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n W_{ij}(\Delta) \zeta_j &= Z_i(\Delta, u), \quad i = 0, \dots, n \\ \text{avec } W_{ij}(\Delta) &= \int_{\Delta} \mu_i \mu_j d\varpi \quad \text{et } Z_i(\Delta, u) = 2 \int_{\partial\Delta} \mu_i d\sigma, \end{aligned} \quad (2.19)$$

où  $d\varpi = d\mu_1 \wedge \cdots \wedge d\mu_n$  et la mesure  $d\sigma$  sur  $\partial\Delta$  est définie par l'égalité  $u_j \wedge d\sigma = -d\varpi$  sur la facette  $F_j$ .

Chacune des quantités  $W_{ij}(\Delta)$  et  $Z_i(\Delta, u)$  dépend de la base (et donc des coordonnées) choisie.

Comme mentionné dans l'introduction, au vu de l'équation d'Abreu (3), le problème de l'existence de métriques kählériennes extrémales se formule comme suit :

**Problème 1.** *Étant donné un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$ , est-ce qu'il existe un potentiel symplectique  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  qui satisfait l'équation d'Abreu*

$$S(\phi) = \zeta_{(\Delta, u)} ? \quad (3)$$

*Si oui, peut-on trouver  $\phi$  explicitement ?*

Pour  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$ , définissons la fonctionnelle linéaire  $\mathcal{F}_{(\Delta, u)} : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{R}$  comme

$$\mathcal{F}_{(\Delta, u)}(a) = \int_{\Delta} f_a S(\phi) d\varpi$$

où  $f_a(\mu) = \langle a, \mu \rangle \int_{\Delta} d\varpi - \int_{\Delta} \langle a, \mu \rangle d\varpi$  a une moyenne nulle. Via le lemme 2.50,  $\mathcal{F}_{(\Delta, u)}$  ne dépend pas du choix de  $\phi$ . En effet, en posant  $\bar{Z} = \frac{1}{\int_{\Delta} d\varpi} Z_0(\Delta, u) = \frac{1}{\int_{\Delta} d\varpi} \int_{\Delta} \zeta_{(\Delta, u)} d\varpi$ ,

$$\mathcal{F}_{(\Delta, u)}(a) = \int_{\Delta} f_a \zeta_{(\Delta, u)} d\varpi = \int_{\Delta} f_a (\zeta_{(\Delta, u)} - \bar{Z}) d\varpi.$$

En particulier,  $\mathcal{F}_{(\Delta, u)} = 0$  si et seulement si  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est constante.

Dans le cas où  $(\Delta, u)$  est rationnel et donc associé, via la correspondance de Delzant–Lerman–Tolman, à un orbifold symplectique torique  $(M, \omega, T)$ , la fonctionnelle  $\mathcal{F}_{(\Delta, u)}$  correspond à la version symplectique de l'invariant de Futaki introduite dans (Lejmi, 2010). Plus précisément, pour toute structure complexe  $T$ -invariante,  $J$ , compatible avec  $\omega$ ,  $\mathcal{F}_{(\Delta, u)}$  est la restriction de l'invariant de Futaki introduit dans (Futaki, 1983) à l'espace des champs de vecteurs réels holomorphes induits par l'action torique.

Pour toute structure CR  $\hat{T}$ -invariante sur une variété de contact de type Reeb avec champ de Reeb  $X_b$ ,  $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_{(\Delta_b, u_b)}$  est la restriction de l'invariant de Futaki transversal de (Boyer, Galicki et Simanca, 2008a) à l'espace des champs de vecteurs réels transversalement holomorphes qui

sont induits par l'action torique. Cependant, notre définition de  $\mathcal{F}_{(\Delta_b, u_b)}$  ne dépend pas du choix de structure CR compatible et se rapproche donc de la version symplectique de l'invariant de Futaki de (Lejmi, 2010).

**Remarque 2.54.** *Toujours dans le cas où  $(\Delta, u)$  est rationnel,  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est l'hamiltonien induisant un champ de vecteurs  $Z^T$  sur  $M$ . Ce champ de vecteurs est le champ de vecteurs extrémal introduit dans (Futaki et Mabuchi, 1995). Pour toute métrique kählérienne  $T$ -invariante  $(g, J)$  compatible avec  $\omega$ ,  $JZ^T$  est un champ de Killing. Si jamais il existe une métrique kählérienne extrémale  $T$ -invariante et compatible avec  $\omega$  alors le gradient de sa courbure scalaire est  $Z^T$ .*

### 2.3.4 La conjecture de Donaldson

La  $K$ -énergie relative (ou la fonctionnelle de Mabuchi relative) définie sur l'espace des métriques toriques a été calculée via leur potentiel  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$

$$\mathcal{E}(\phi) = 2\mathcal{L}_{(\Delta, u)}(\phi) - \int_{\Delta} (\log \det \text{Hess}(\phi)) d\varpi$$

dans (Donaldson, 2002). Cette fonctionnelle est convexe et on peut vérifier que les points critiques de  $\mathcal{E}$  sont exactement les solutions de (3), du fait du calcul suivant :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{\phi}(f) &= 2\mathcal{L}_{(\Delta, u)}(f) - \int_{\Delta} \langle \mathbf{H}, \text{Hess} f \rangle d\varpi \\ &= - \int_{\Delta} \left( \zeta_{(\Delta, u)} + \sum_{i, j} \frac{\partial^2 H_{ij}}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \right) f d\varpi, \end{aligned} \tag{2.20}$$

où  $\mathbf{H} = (\text{Hess } \phi)^{-1}$ .

De plus, Donaldson montre que soit  $\mathcal{E}$  est bornée inférieurement, soit il existe une fonction convexe non affine  $f$ , définie sur l'union de  $\hat{\Delta}$  et de ses facettes, pour laquelle  $\mathcal{L}_{(\Delta, u)}(f) = 0$ . Dans ce dernier cas, il existe une suite  $\{f_k\}_k$  de fonctions continues convexes et affines par morceaux telles que  $\int_{\Delta} |f - f_k| d\varpi$  et  $\int_{\Delta} |f - f_k| d\sigma$  tendent vers 0.

**Définition 2.55** (Définition 0.1). *Un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  est analytiquement relativement  $K$ -stable par rapport aux dégénération toriques si  $\mathcal{L}_{\Delta, u}(f) \geq 0$  pour toute fonction  $f$  continue convexe et affine par morceaux sur  $\Delta$  avec égalité si et seulement si  $f$  est affine.*

**Conjecture 1.** (Donaldson, 2002) Soit  $(\Delta, u)$  un polytope étiqueté. Il y a une solution  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  à l'équation d'Abreu (3) si et seulement si  $(\Delta, u)$  est analytiquement relativement  $K$ -stable par rapport aux dégénération toriques.

**Théorème 2.56.** (Donaldson, 2002 ; 2005 ; 2008a ; 2009) Soit  $(\Delta, u)$  un polytope étiqueté de dimension 2 tel que  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est constante. Il existe une solution  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  à l'équation d'Abreu (3) si et seulement si  $(\Delta, u)$  est analytiquement relativement  $K$ -stable par rapport aux dégénération toriques.

**Théorème 2.57.** (Zhou et Zhu, 2008) Soit  $(\Delta, u)$  un polytope étiqueté. S'il existe une solution  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  à l'équation d'Abreu (3) alors  $(\Delta, u)$  est analytiquement relativement  $K$ -stable par rapport aux dégénération toriques.

### 2.3.5 Unicité des métriques extrémales

Dans (Guan, 1999), Guan a montré l'unicité, à automorphismes près, des métriques kählériennes toriques extrémales compatibles sur une variété symplectique torique compacte lisse. En fait, il a démontré qu'une géodésique dans l'espace des métriques kählériennes  $T$ -invariantes compatibles correspond, via le lemme de Moser, à une ligne droite dans l'espace des potentiels symplectiques  $\mathcal{S}(\Delta, u)$ . Ainsi, deux métriques kählériennes toriques quelconques peuvent être reliées entre elles par une géodésique et, selon un argument bien connu utilisant la convexité de la  $K$ -énergie relative de Guan–Mabuchi–Simanca,  $\mathcal{E}$ , le long des géodésiques, deux métriques toriques extrémales coïncident à automorphismes près.

La preuve de Guan peut être remaniée en termes de potentiels symplectiques en utilisant le travail contenu dans (Donaldson, 2002). En effet, pour deux potentiels symplectiques  $\phi_0, \phi_1$ , le segment de droite  $\phi_t = t\phi_1 + (1-t)\phi_0$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) est inclus dans  $\mathcal{S}(\Delta, u)$  : il suffit pour voir cela, de considérer les valeurs propres de  $\mathbf{G}_t = \text{Hess } \phi_t$ . De plus, on a

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{E}(\phi_t) = \int_{\Delta} \langle \mathbf{H}_t(\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_0), \mathbf{H}_t(\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_0) \rangle d\omega, \quad (2.21)$$

où  $\mathbf{H}_t = \mathbf{G}_t^{-1}$ . Ceci implique que  $\mathcal{E}$  est convexe le long des segments de  $\mathcal{S}(\Delta, u)$ . Donc, si  $\phi_0$  et  $\phi_1$  sont deux solutions de (3),  $\mathcal{E}$  est constante le long de  $\phi_t$  et  $\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{E}(\phi_t) = 0$ . Du fait de (2.21), ceci implique que  $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_0 = 0$ , c'est-à-dire que  $\phi_1 - \phi_0$  est affine. On vient donc de démontrer :

**Proposition 2.58.** *Soit  $(\Delta, u)$  un polytope étiqueté. À addition d'une fonction affine près, il existe au plus une fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  telle que  $S(\phi) = \zeta_{(\Delta, u)}$ .*

**Théorème 2.59.** *(Guan, 1999) Sur un orbifold symplectique torique il n'existe, à symplectomorphisme équivariant près, qu'une seule métrique torique kählérienne compatible extrémale.*

Dans le cas sasakien, deux potentiels  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\phi}'$  sur le cône moment  $\mathcal{C}$  donnant lieu à des métriques kählériennes partageant le même champ de Reeb  $X_b$  sont les potentiels de Boothy–Wang respectifs de deux fonctions  $\phi$  et  $\phi' \in \mathcal{S}(\Delta_b, u_b)$  telles que  $\phi - \phi'$  est une fonction affine si et seulement si  $\hat{\phi} - \hat{\phi}'$  l'est aussi. La proposition 2.58 implique aussi

**Corollaire 2.60.** *Pour chaque  $b \in \mathcal{C}_+^*$ , à contactomorphisme équivariant près, il existe au plus une métrique saskienne à courbure scalaire constante ayant  $X_b$  comme champ de Reeb.*

**Proposition 2.61.** *Soit  $(N, \mathcal{D}, \hat{T})$  une variété de contact co-orientée de type Reeb avec application moment  $\hat{\mu}: \mathcal{D}_+^o \rightarrow \hat{\mathfrak{t}}^*$  et cône moment  $\mathcal{C}$ . Soit  $g_a$  et  $g_b$  des métriques saskiennes  $\hat{T}$ -invariantes compatibles sur  $(N, \mathcal{D})$  ayant les champs de Reeb respectifs  $X_a$  et  $X_b$ . On suppose que  $N$  n'est pas une sphère, sa dimension est au moins 5 et que ni  $(N, \mathcal{D}, g_a)$ , ni  $(N, \mathcal{D}, g_b)$  n'est 3-Sasaki.*

*Si  $\varphi: N \rightarrow N$  est un difféomorphisme tel que  $\varphi^*g_a = g_b$  alors  $\varphi$  est un contactomorphisme et il existe  $A \in \text{Gl}(\hat{\mathfrak{t}})$ , préservant le réseau  $\Lambda = \ker(\exp: \hat{\mathfrak{t}} \rightarrow \hat{T})$ , et  $\psi \in \text{Isom}(N, g_b)$  telles que*

$$\hat{\mu} \circ (\varphi \circ \psi)^* = A^* \circ \hat{\mu}.$$

*En particulier,  $A^*$  est un automorphisme de  $\mathcal{C}$  et  $Ab = a$ .*

*Réciproquement, tout automorphisme de  $\mathcal{C}$  dont l'adjoint préserve le réseau donne lieu à un contactomorphisme  $T$ -équivariant  $\psi$  tel que si  $g$  est une métrique saskienne  $T$ -invariante compatible sur  $(N, \mathcal{D}, \hat{T})$  alors  $\psi^*g$  l'est aussi.*

*Démonstration.* Les sphères, les variétés 3-Sasaki, et les variétés de dimension 3 sont les seules variétés admettant des métriques riemanniennes qui sont saskiennes par rapport à plus d'une structure de contact, voir (Boyer et Galicki, 2008). Nos hypothèses assurent donc que  $\text{Isom}(N, g_b) \subset \text{Con}(N, \mathcal{D})$ . Ainsi  $\hat{T}$  et  $\varphi^{-1} \circ \hat{T} \circ \varphi$  sont des tores dans  $\text{Con}(N, \mathcal{D})$ . Puisqu'une

action hamiltonienne sur la symplectisation  $(\mathcal{D}_+^o, \hat{\omega}, \varsigma)$  qui commute avec le champ de Liouville induit des distributions isotropiques,  $\hat{T}$  et  $\varphi^{-1} \circ \hat{T} \circ \varphi$  sont maximaux dans  $\text{Isom}(N, g_b)$  qui est un groupe de Lie compact puisque  $N$  est compact. En particulier, ils sont conjugués, c'est-à-dire qu'il existe  $\psi \in \text{Isom}(N, g_b)$  telle que

$$\hat{T} = (\varphi \circ \psi)^{-1} \circ \hat{T} \circ \varphi \circ \psi.$$

La différentielle  $A$  en  $\text{Id} \in \hat{T}$  de l'automorphisme  $\tau \mapsto (\varphi \circ \psi)^{-1} \circ \tau \circ \varphi \circ \psi$  est linéaire et préserve le réseau. De plus,  $\hat{\mu} \circ (\varphi \circ \psi)^*$  et  $A^* \circ \hat{\mu}$  sont des applications moment pour l'action hamiltonienne de  $\hat{T}$  sur  $(\mathcal{D}_+^o, \hat{\omega})$  et elles sont toutes deux homogènes de degré 2 par rapport au champ de Liouville. Ainsi,  $\hat{\mu} \circ (\varphi \circ \psi)^* = A^* \circ \hat{\mu}$ .

Remarquons que  $(\varphi \circ \psi)_* X_b = X_a$  puisque  $(\varphi \circ \psi)^* g_a = g_b$  et  $\varphi \circ \psi \in \text{Con}(N, \mathcal{D})$ . La réciproque suit de la construction de Delzant–Lerman.  $\square$

Dans la preuve précédente, l'hypothèse que  $(N, \mathcal{D}, g_b)$  n'est ni 3–sasakienne, ni une sphère, ni une variété de dimension 3 est utilisée pour déduire que  $\varphi^{-1} \circ \hat{T} \circ \varphi$  est inclus dans  $\text{Con}(N, \mathcal{D})$ . On peut donc omettre cette hypothèse si l'on suppose que  $\varphi$  est un contactomorphisme. On obtient ainsi à l'aide du lemme 2.60 :

**Proposition 2.62.** *Soit  $(N, \mathcal{D}, \hat{T})$  une variété de contact co-orientée de type Reeb de dimension au moins 5. Les métriques sasakiennes  $\hat{T}$ –invariantes compatibles  $g_a$  et  $g_b$ , ayant les champs de Reeb respectifs  $X_a$  et  $X_b$ , sont transversalement homothétiques à un contactomorphisme près si et seulement s'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $(\lambda \Delta_b, u_b)$  et  $(\Delta_a, u_a)$  sont équivalents au sens de la définition 2.5.*

### Chapitre III

## CLASSIFICATION DES ORBIFOLDS SYMPLECTIQUES TORIQUES DE DIMENSION 4 ADMETTANT DES 2-FORMES HAMILTONIENNES

Dans ce chapitre nous donnons une classification des orbifolds compacts kählériens toriques de dimension 4 admettant une 2-forme hamiltonienne en termes de leurs polytopes moments. Ces formes sont définies et étudiées dans (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2003; Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006; Apostolov et al., 2004) où les auteurs montrent, entre autres, que tout espaces projectifs à poids admettent de telles formes.

Sur un orbifold compact  $(M, \omega, J, g)$ , une 2-forme  $\Psi$  est dite *hamiltonienne* si, pour tout champ de vecteurs  $X$ ,

$$2\nabla_X \Psi = d\sigma_1 \wedge \omega(X, \cdot) + d^c \sigma_1 \wedge g(X, \cdot)$$

où  $\sigma_1 = \text{tr}_\omega \Psi = \frac{\Psi \wedge \omega}{\omega^2}$ . Une telle forme est dite non triviale si elle n'est pas un multiple de  $\omega$ . Comme démontré dans (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006), les valeurs propres de  $J\Psi$  sont de deux types : celles qui sont constantes et celles qui ne le sont nulle part (sur aucun ouvert). De plus, sur un ouvert dense  $\overset{\circ}{M}$  ces dernières, que nous noterons  $\xi_1 \leq \dots \leq \xi_q$ , sont deux à deux distinctes, leurs gradients sont deux à deux  $g$ -orthogonaux et si  $\sigma_i$  dénote la  $i$ -ième fonction symétrique à  $q$  éléments alors les champs de vecteurs hamiltoniens induits par les fonctions  $\sigma_1(\xi_1, \dots, \xi_q), \dots, \sigma_q(\xi_1, \dots, \xi_q)$  sont des champs de Killing commutatifs. En particulier, il existe un tore de dimension au moins  $q$  dans  $\text{Isom}(M, g) \cap \text{Ham}(M, \omega)$ . On appelle  $q$  l'ordre de la 2-forme hamiltonienne.

**Théorème 3.1.** *Soit  $(M, \omega, J, g, T)$  un orbifold kählérien torique de dimension 4. S'il admet une 2-forme hamiltonienne non triviale, son polytope moment est soit un triangle (et alors*

$(M, J)$  est un plan projectif à poids) soit un quadrilatère. Dans ce dernier cas, l'ordre de la 2-forme hamiltonienne est  $2 - q$  où  $q$  est le nombre de paires de côtés parallèles.

De plus, tout orbifold symplectique torique dont le polytope moment est un quadrilatère admet une métrique kählérienne compatible admettant une 2-forme hamiltonienne.

Nous excluons le cas des projectifs à poids (des triangles) et référons à (Apostolov et al., 2004) pour une classification des 2-formes hamiltoniennes sur ceux-ci. Puis nous démontrons le théorème 3.1 pour les autres cas 3 types de 2-formes hamiltoniennes correspondentes respectivement aux 3 types de quadrilatères convexes :

$q = 2$  les quadrilatères génériques correspondent aux métriques orthotoriques (voir Proposition 3.11),

$q = 1$  les trapèzes correspondent aux métriques de Calabi (voir Proposition 3.28),

$q = 0$  les trapèzes correspondent aux métriques produits (voir Proposition 3.21).

**Métriques toriques faiblement Bochner-plates** La classification présentée dans ce chapitre fournit immédiatement une classification des métriques toriques faiblement Bochner-plates. Celles-ci sont définies comme des métriques toriques dont le tenseur de Bochner est co-fermé. Ces métriques sont extrémales et l'on peut en donner la définition alternative suivante :

**Définition 3.2.** (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006)  $(g, J, \omega)$  est faiblement Bochner-plate si la 2-forme

$$\tilde{\rho}_g = \rho_g - \frac{\text{Scal}_g}{2m(m+1)} \omega$$

(où  $\rho_g$  est la forme de Ricci) est hamiltonienne.

En particulier, si  $(g, J, \omega)$  est une métrique torique faiblement Bochner-plate, alors soit elle est de type Kähler-Einstein soit elle admet une 2-forme hamiltonienne non triviale,  $\tilde{\rho}_g$ .

**Notation** Soit  $\Delta$  un quadrilatère convexe dans  $\mathfrak{t}^*$  et  $s_1, s_2, s_3, s_4$  ses sommets, tels que  $s_1$  et  $s_3$  ne sont pas adjacents. En choisissant  $(s_2 - s_1, s_4 - s_1)$  comme base de  $\mathfrak{t}^*$ ,  $\Delta$  est l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^2$  des points  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(a, b)$  et  $(0, 1)$ . Nous dénoterons  $\Delta'_{(a,b)}$  le polytope

résultant et l'appellerons la *forme normale* de  $\Delta$ . Comme  $\Delta$  est convexe,  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $a + b > 1$ . Notons que si  $a$  et  $b \neq 1$ ,  $\Delta$  est *générique*, c'est-à-dire que ses côtés opposés ne sont pas parallèles entre eux. La forme normale d'un polytope n'est évidemment pas unique.

**Lemme 3.3.** *Il existe une application affine de  $\mathbb{R}^2$  qui envoie  $\Delta'_{(a',b')}$  sur  $\Delta'_{(a,b)}$  si et seulement si  $(a', b')$  appartient à*

$$\left\{ (a, b), \frac{1}{a}(a + b - 1, 1), \frac{1}{a + b - 1}(a, b), \frac{1}{b}(1, a + b - 1), \right. \\ \left. (b, a), \frac{1}{a}(1, a + b - 1), \frac{1}{a + b - 1}(a, b), \frac{1}{b}(a + b - 1, 1) \right\}. \quad (3.1)$$

*En particulier, un quadrilatère convexe  $\Delta$  ne peut être envoyé (via une application affine) que sur un seul polytope  $\Delta'_{(a,b)} \subset \mathbb{R}^2$  tel que  $a$  et  $b > 0$ ,  $b \leq 1 \leq a$  et  $a + b \geq 2$ .*

**Corollaire 3.4.** *Pour tout quadrilatère convexe  $\Delta$ , il existe une unique paire  $(\alpha, \beta)$ , satisfaisant  $0 \leq \beta < 1 \leq \alpha$  et  $\alpha - \beta \geq 1$ , telle que  $\Delta$  corresponde via une application affine à la forme normale  $\Delta'_{(\alpha, 1-\beta)}$ . Nous appellerons  $(\alpha, \beta)$  la paire caractéristique de  $\Delta$ .*

### 3.1 Structures orthotoriques et quadrilatères génériques

#### 3.1.1 Structures orthotoriques

**Définition 3.5.** *Soit  $(M^4, \omega, J, g, T, \mu)$  un orbifold kählérien, torique<sup>1</sup> de dimension 4, compact et connexe. Il est orthotorique s'il existe deux fonctions positives, lisses et  $T$ -invariantes  $x, y \in C^\infty(\mathring{M})$  dont les gradients sont  $g$ -orthogonaux sur  $\mathring{M}$ , et une identification entre  $\mathfrak{t}^*$  et  $\mathbb{R}^2$  à travers laquelle l'application moment est  $\mu = (x + y, xy)$ . Les fonctions  $x$  et  $y$  sont appelées coordonnées orthotoriques sur  $\mathring{M}$ .*

Dans (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006), les auteurs montrent qu'un orbifold orthotorique admet une 2-forme hamiltonienne  $\Psi$ , d'ordre maximal. En dimension complexe 2, les coordonnées orthotoriques  $(x, y)$  sont les valeurs propres de  $J \circ \Psi$  (considéré comme un champ

---

1. Tout orbifold compact admettant une métrique kählérienne orthotorique selon la définition de (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2003) est torique, voir (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006).

d'endomorphismes complexes de  $(M, J)$  par l'intermédiaire de la métrique  $g$ ). En particulier,  $x$  et  $y$  sont définies continûment sur  $M$  tout entier. Remarquons que  $\sigma_1 = x + y$  et posons

$$\sigma_2 = xy = \det_{\omega} \Psi = \frac{\Psi \wedge \Psi}{\omega^2}.$$

L'application moment d'un orbifold orthotorique est

$$\mu = (\sigma_1, \sigma_2) = (x + y, xy)$$

et son polytope moment  $\Delta = \text{im } \mu$  a une forme particulière que nous décrivons à présent. Comme  $\mu$  est une application moment, son rang est 2 sur  $\overset{\circ}{M}$  et  $x - y$  ne s'y annule donc pas. Prenons comme convention que  $x \geq y$  sur  $M$  et posons  $\text{im } x = [\alpha_1, \alpha_2]$  et  $\text{im } y = [\beta_1, \beta_2]$ , avec  $\alpha_1 \geq \beta_2$ . Les facettes de  $\Delta$  sont les images des facettes du rectangle  $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$  via  $\sigma: (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ , c'est-à-dire qu'elles sont, pour  $i = 1, 2$ :

$$F_{\alpha_i} = \{\sigma(\alpha_i, y) \mid y \in [\beta_1, \beta_2]\} \text{ et } F_{\beta_i} = \{\sigma(x, \beta_i) \mid x \in [\alpha_1, \alpha_2]\}.$$

Les normales de  $\Delta$  associées à  $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, F_{\beta_1}$  et  $F_{\beta_2}$  sont respectivement

$$u_{\alpha_1} = C_{\alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_{\alpha_2} = C_{\alpha_2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_{\beta_1} = C_{\beta_1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_{\beta_2} = C_{\beta_2} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

pour certaines constantes  $C_{\alpha_1}, C_{\beta_2} > 0$  et  $C_{\alpha_2}, C_{\beta_1} < 0$ , où les signes sont prescrits par la convention que les normales sont des vecteurs intérieurs au polytope.

**Remarque 3.6.** *Le cas où  $\alpha_2 = \beta_1$  a été étudié très largement dans (Apostolov et al., 2004) et correspond aux triangles, c'est-à-dire aux espaces projectifs à poids. Il y est en particulier montré que  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  est la seule variété compacte de dimension  $2n$  qui admette une structure orthotorique.*

**Définition 3.7.** *Un quadrilatère  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  est un polytope orthotorique s'il existe un rectangle  $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2] \subset \mathbb{R}^2$ , avec  $\beta_2 < \alpha_1$ , qui est envoyé sur  $\Delta$  par l'application  $\sigma(x, y) = (x + y, xy)$ . Nous noterons un tel polytope  $\Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}$ . Tout polytope étiqueté orthotorique est donc uniquement déterminé les 8 nombres réels  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2})$  que nous appellerons ses paramètres orthotoriques.*

**Lemme 3.8.** *Tout quadrilatère convexe générique est équivalent à un polytope orthotorique.*

*Démonstration.* Soit  $\Delta'_{(a,b)}$  la forme normale du quadrilatère convexe  $\Delta$ , voir Corollaire 3.4.

La transformation affine

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} 1-b & a-1 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si  $\Delta$  est générique. Dans ce cas,  $\Phi^*(\Delta'_{(a,b)})$  est l'enveloppe convexe des points  $(1, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(2-b, 1-b)$  et  $(a+(1-b), a(1-b))$ . En particulier,  $\Phi^*(\Delta'_{(a,b)})$  est orthotorique puisque c'est l'image par  $\sigma$  du rectangle  $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ , avec

$$\alpha_1 = \min\{1, a\}, \quad \alpha_2 = \max\{1, a\}, \quad \beta_1 = \min\{0, 1-b\}, \quad \beta_2 = \max\{0, 1-b\}.$$

On remarque que  $\beta_2 < \alpha_1$ , puisque  $a+b > 1$  et  $a, b > 0$ . □

**Corollaire 3.9.** *Pour tout quadrilatère convexe générique  $\Delta$ , il existe une unique paire  $(\alpha, \beta)$ , satisfaisant  $0 < \beta < 1 < \alpha$  et  $\alpha - \beta \geq 1$ , et telle que  $\Delta$  corresponde, via une application affine, à la forme normale  $\Delta'_{(\alpha, 1-\beta)}$  ainsi qu'au quadrilatère orthotorique  $\Delta_{\alpha, \beta} = \sigma([0, \beta] \times [1, \alpha])$ .*

Nous résumons (et reformulons) à présent les propositions (Apostolov et al., 2004, proposition 1) et (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006, proposition 11) qui, ensemble, décrivent l'espace des métriques kählériennes orthotoriques compatibles avec un orbifold symplectique torique donné.

**Proposition 3.10.** (Apostolov et al., 2004), (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006) *Soit  $(M, \omega, g, \mu, T)$  un orbifold orthotorique de coordonnées orthotoriques  $x$  et  $y$  et de coordonnées moment  $\sigma_1 = x + y$ ,  $\sigma_2 = xy$ . Soit  $t_1$  et  $t_2$  les coordonnées angle correspondantes sur  $\mathring{M}$ . Posons  $\text{im } x = [\alpha_1, \alpha_2]$  et  $\text{im } y = [\beta_1, \beta_2]$ . Il existe des fonctions  $A \in C^\infty([\alpha_1, \alpha_2])$  et  $B \in C^\infty([\beta_1, \beta_2])$ , telles que  $A(x)$  et  $B(y)$  sont positives sur  $\mathring{M}$ ,*

$$g|_{\mathring{M}} = \frac{(x-y)}{A(x)} dx^2 + \frac{(x-y)}{B(y)} dy^2 + \frac{A(x)}{x-y} (dt_1 + y dt_2)^2 + \frac{B(y)}{x-y} (dt_1 + x dt_2)^2 \quad (3.3)$$

et vérifiant

$$\begin{aligned} A(\alpha_i) &= 0, \quad B(\beta_i) = 0, \\ A'(\alpha_i) &= 2/C_{\alpha_i}, \quad B'(\beta_i) = -2/C_{\beta_i}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Réciproquement, pour toute paire de fonctions lisses, respectivement positives sur  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et  $(\beta_1, \beta_2)$  et satisfaisant (3.4), la formule (3.3) définit une métrique kählérienne orthotorique lisse sur  $M$ , compatible avec  $\omega$ , et de coordonnées orthotoriques  $x$  et  $y$ .

La fonction à valeurs dans  $S^2\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{H} = (g(X_{e_i}, X_{e_j}))_{i,j}$ , associée à la métrique (3.3) s'écrit

$$\mathbf{H}_{A,B} = \frac{1}{x-y} \begin{pmatrix} A(x) + B(y) & yA(x) + xB(y) \\ yA(x) + xB(y) & y^2A(x) + x^2B(y) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

La proposition 3.10 peut être déduite de (3.5) en utilisant la proposition 2.36. La condition d'intégrabilité (2.6) est satisfaite par construction. En particulier, on peut donner une expression explicite du potentiel symplectique (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006, proposition 11) :

$$\phi_{A,B}(x, y) = - \int_{\alpha_1}^x \frac{(t-x)(t-y)}{A(t)} dt + \int_{\beta_1}^y \frac{(t-x)(t-y)}{B(t)} dt. \quad (3.6)$$

La proposition suivante découle du lemme 3.8 et de la proposition 3.10.

**Proposition 3.11.** *Soit  $(M, \omega, T, \mu)$  un orbifold symplectique torique de dimension 4. Il existe une métrique orthotorique compatible avec  $\omega$  si et seulement si le polytope  $\text{im } \mu$  est un quadrilatère générique ou un triangle.*

*Démonstration.* Pour les triangles, nous référons le lecteur à (Apostolov et al., 2004). Un quadrilatère orthotorique est générique par définition. Réciproquement, si  $\text{im } \mu$  est générique, le lemme 3.8 nous permet d'identifier l'algèbre de Lie de  $T$  avec  $\mathbb{R}^2$ , de sorte que  $\text{im } \mu$  soit un polytope orthotorique. Donc  $\text{im } \mu$  est l'image par  $\sigma$  du rectangle  $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2] \subset \mathbb{R}^2$  avec  $\beta_2 < \alpha_1$ . Les fonctions

$$x = \frac{\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 - 4\sigma_2}}{2\sigma_2} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sigma_1 - \sqrt{\sigma_1^2 - 4\sigma_2}}{2\sigma_2}$$

sont lisses sur  $M$  puisque  $x > y$ . De plus,  $dx$  et  $dy$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathring{M}$  car  $\mu$  est une application moment. Donc choisir des fonctions positives  $A$  et  $B$  satisfaisant la condition (3.4) définit une métrique lisse via la formule (3.3) pour laquelle  $dx$  et  $dy$  sont orthogonales.  $\square$

### 3.1.2 Métriques orthotoriques extrémales

La “séparation des variables”, mentionnée ci-dessus, apparaît dans la formule donnant la courbure scalaire d’une métrique orthotorique  $g_{A,B}$  :

$$S(\phi_{A,B}) = -\frac{A''(x) + B''(y)}{x - y} \quad (3.7)$$

voir (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2003).

**Remarque 3.12.** *Il est élémentaire de vérifier que si  $A$  et  $B$  sont positives, l’inverse de la hessienne du potentiel (3.6), par rapport à  $\sigma_1 = x + y$  et  $\sigma_2 = xy$ , est donné par (3.5) et qu’ainsi (3.7) ci-dessus nous donne la courbure scalaire. Il n’est par conséquent pas nécessaire de remarquer ici la présence d’une 2-forme hamiltonienne (qui n’est autre qu’une métrique orthotorique dans ce cas) mais cette structure géométrique unifie notre cadre de travail.*

La métrique est extrémale si et seulement si sa courbure scalaire est le tiré en arrière, par l’application moment, d’une fonction affine sur  $\mathfrak{t}^*$ . Ceci s’exprime en termes des fonctions  $A$  et  $B$  sous la forme suivante :

**Proposition 3.13.** (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2003) *Soit  $(M, \omega, g, J, \mu)$  un orbifold orthotorique où  $g$  s’exprime sur  $\check{M}$  selon (3.3) par rapport aux coordonnées orthotoriques  $x$  et  $y$ . La métrique  $g$  est extrémale si et seulement si  $A$  et  $B$  sont des polynômes de degré 4,  $A(x) = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4$  et  $B(y) = B_0y^4 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4$ , avec*

$$A_0 = -B_0, \quad A_1 = -B_1 \quad \text{et} \quad A_2 = -B_2. \quad (3.8)$$

*De plus, dans ce cas,*

- 1)  *$g$  est à courbure scalaire constante si et seulement si  $A_0 = 0$ ,*
- 2)  *$g$  est faiblement Bochner-plate si et seulement si*

$$A_3 = -B_3. \quad (3.9)$$

- 3)  *$g$  est de type Kähler–Einstein si et seulement si*

$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad A_3 = -B_3, \quad (3.10)$$

**Remarque 3.14.** *Notons que pour toute métrique orthotorique extrémale*

$$S(\phi_{A,B}) = -12A_0(x+y) - 6A_1 = -12A_0\sigma_1 - 6A_1. \quad (3.11)$$

*Il s'ensuit que la courbure scalaire d'une métrique orthotorique extrémale est équiposée, au sens de la définition 0.2.*

**Remarque 3.15.** *Bien que nous ayons trouvé instructif, du point de vue géométrique, de présenter la plupart des résultats de cette section dans le cadre des orbifolds toriques, l'hypothèse spécifiant que les polytopes étiquetés correspondants sont rationnels n'est pas nécessaire. Par exemple, si l'on considère un polytope étiqueté orthotorique  $(\Delta, u)$ , de paramètres orthotoriques donnés  $(\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2})$ , et s'il existe des polynômes  $A$  et  $B$  respectivement positifs sur  $[\alpha_1, \alpha_2]$  et  $[\beta_1, \beta_2]$ , satisfaisant les conditions (3.4) et (3.8), alors la fonction  $\phi_{A,B}$  définie par (3.6) est une solution du problème 1 pour  $(\Delta, u)$ . De plus, du fait des propositions 3.10 et 3.13, la métrique  $g_{A,B}$  donnée par (3.3) définit une métrique kählérienne extrémale sur  $\mathring{\Delta} \times \mathbb{R}^n$  satisfaisant les conditions au bord (2.7).*

Le lemme qui suit donne une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres orthotoriques pour qu'il existe une *solution formelle* au problème 1, c'est-à-dire une solution  $\mathbf{H}_{A,B}$  de l'équation (3) qui n'est pas nécessairement définie positive. Ceci équivaut à l'existence de polynômes  $A$  et  $B$  satisfaisant les conditions (3.4) et (3.8) mais n'étant pas nécessairement respectivement positifs sur  $[\alpha_1, \alpha_2]$  et  $[\beta_1, \beta_2]$ .

**Lemme 3.16.** *Soit  $\beta_1 < \beta_2 < \alpha_1 < \alpha_2$  des nombres réels et  $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2}$  des nombres réels non nuls. Il existe des polynômes de degré au plus 4,  $A$  et  $B$ , satisfaisant les conditions (3.4) et (3.8) si et seulement si*

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2\alpha_2^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 + 2\beta_1\beta_2 - 2(2\alpha_2 + \alpha_1)(\beta_1 + \beta_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 C_{\alpha_1}} \\ & + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2\alpha_1^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 + 2\beta_1\beta_2 - 2(2\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 C_{\alpha_2}} \\ & + \frac{(\beta_1 + \beta_2)^2 + 2\beta_2^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - 2(2\beta_2 + \beta_1)(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\beta_2 - \beta_1)^2 C_{\beta_1}} \\ & + \frac{(\beta_1 + \beta_2)^2 + 2\beta_1^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - 2(2\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\beta_2 - \beta_1)^2 C_{\beta_2}} = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

*Dans ce cas,  $A$  et  $B$  sont uniquement déterminés par les paramètres orthotoriques et*

1) ils sont de degré 3 (i.e  $A_0 = 0$ ) si et seulement si

$$\frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{1}{C_{\alpha_1}} + \frac{1}{C_{\alpha_2}} \right) = \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)^2} \left( \frac{1}{C_{\beta_1}} + \frac{1}{C_{\beta_2}} \right), \quad (3.13)$$

2) ils satisfont (3.9) si et seulement si

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_2)}{C_{\alpha_1}} + \frac{\alpha_1(2\alpha_2 + \alpha_1)}{C_{\alpha_2}} \right) - \frac{2}{(\beta_2 - \beta_1)^2} \left( \frac{\beta_2(2\beta_1 + \beta_2)}{C_{\beta_1}} + \frac{\beta_1(2\beta_2 + \beta_1)}{C_{\beta_2}} \right) \\ &= \frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_2 + \alpha_1) - \beta_1\beta_2(\beta_2 + \beta_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2)} \left( \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{1}{C_{\alpha_1}} + \frac{1}{C_{\alpha_2}} \right) - \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)^2} \left( \frac{1}{C_{\beta_1}} + \frac{1}{C_{\beta_2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

3) ils satisfont (3.10) si et seulement si en plus de (3.13), on a

$$\frac{2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_2)}{C_{\alpha_1}} + \frac{\alpha_1(2\alpha_2 + \alpha_1)}{C_{\alpha_2}} \right) = \frac{2}{(\beta_2 - \beta_1)^2} \left( \frac{\beta_2(2\beta_1 + \beta_2)}{C_{\beta_1}} + \frac{\beta_1(2\beta_2 + \beta_1)}{C_{\beta_2}} \right) \quad (3.15)$$

*Démonstration.* La condition (3.4) implique que  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\beta_1, \beta_2$  sont respectivement des racines de  $A$  et  $B$ . Donc si de tels polynômes existent, ils sont nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} A(x) &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(A_0x^2 + R_1x + R_2) \quad \text{et} \\ B(y) &= (y - \beta_1)(y - \beta_2)(-A_0y^2 + S_1y + S_2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

pour certaines constantes  $A_0, R_1, R_2, S_1$  et  $S_2$ . Les conditions d'extrémalité (3.8) impliquent

$$\begin{aligned} R_1 - A_0(\alpha_1 + \alpha_2) &= -S_1 - A_0(\beta_1 + \beta_2), \\ R_2 + A_0\alpha_1\alpha_2 - R_1(\alpha_1 + \alpha_2) &= -S_2 + A_0\beta_1\beta_2 + S_1(\beta_1 + \beta_2). \end{aligned} \quad (3.17)$$

La condition (3.4) se lit alors, au vu de (3.16),

$$\begin{aligned} A'(\alpha_i) &= (-1)^i(\alpha_2 - \alpha_1)(A_0\alpha_i^2 + R_1\alpha_i + R_2) = 2/C_{\alpha_i}, \\ B'(\beta_i) &= (-1)^i(\beta_2 - \beta_1)(-A_0\beta_i^2 + S_1\beta_i + S_2) = -2/C_{\beta_i} \end{aligned} \quad (3.18)$$

pour  $i = 1, 2$ . De ce fait,  $R_1$  et  $R_2$  peuvent être vues comme des fonctions de  $A_0$

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{2}{C_{\alpha_1}} + \frac{2}{C_{\alpha_2}} \right) - A_0(\alpha_1 + \alpha_2), \\ R_2 &= -\frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{2\alpha_2}{C_{\alpha_1}} + \frac{2\alpha_1}{C_{\alpha_2}} \right) + A_0\alpha_1\alpha_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

et, de manière similaire,

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)^2} \left( \frac{2}{C_{\beta_1}} + \frac{2}{C_{\beta_2}} \right) + A_0(\beta_1 + \beta_2), \\ S_2 &= \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)^2} \left( \frac{2\beta_2}{C_{\beta_1}} + \frac{2\beta_1}{C_{\beta_2}} \right) - A_0\beta_1\beta_2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

La condition (3.17), combinée au fait que  $\alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2) \neq 0$ , nous permet de déterminer  $A_0$  en fonction des paramètres orthotoriques

$$A_0 = \frac{1}{2(\alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2))} \left( \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{2}{C_{\alpha_1}} + \frac{2}{C_{\alpha_2}} \right) - \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)^2} \left( \frac{2}{C_{\beta_1}} + \frac{2}{C_{\beta_2}} \right) \right). \quad (3.21)$$

Enfin, la seconde égalité de (3.17) implique

$$\begin{aligned} \frac{2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{2\alpha_2 + \alpha_1}{C_{\alpha_1}} + \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{C_{\alpha_2}} \right) - \frac{2}{(\beta_2 - \beta_1)^2} \left( \frac{2\beta_2 + \beta_1}{C_{\beta_1}} + \frac{2\beta_1 + \beta_2}{C_{\beta_2}} \right) \\ = A_0((\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2)^2 - 2\beta_1\beta_2). \end{aligned} \quad (3.22)$$

En utilisant (3.21) pour remplacer  $A_0$ , (3.22) conduit immédiatement à (3.12). Lorsque  $A_0 = 0$ , (3.13) découle directement de (3.21). L'équation (3.9) correspond à

$$-R_1\alpha_1\alpha_2 + R_2(\alpha_1 + \alpha_2) = S_1\beta_1\beta_2 - S_2(\beta_1 + \beta_2)$$

qui, en utilisant (3.19) et (3.20), nous donne

$$\begin{aligned} \frac{2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_2)}{C_{\alpha_1}} + \frac{\alpha_1(2\alpha_2 + \alpha_1)}{C_{\alpha_2}} \right) - \frac{2}{(\beta_2 - \beta_1)^2} \left( \frac{\beta_2(2\beta_1 + \beta_2)}{C_{\beta_1}} + \frac{\beta_1(2\beta_2 + \beta_1)}{C_{\beta_2}} \right) \\ = 2A_0(\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)). \end{aligned}$$

Cette dernière équation, alliée à (3.21), nous donne l'équation (3.14) et en imposant  $A_0$  nous donne (3.15) qui correspond à (3.10).  $\square$

**Remarque 3.17.** Les polynômes de degré 3 qui satisfont la condition (3.4) sont automatiquement positifs sur  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et  $(\beta_1, \beta_2)$ .

## 3.2 Structures toriques de type Calabi et trapèzes

### 3.2.1 Orbifolds kählériens toriques de dimension 4 admettant une 2–forme hamiltonienne non triviale

**Définition 3.18.** *Un orbifold kählérien torique de dimension 4,  $(M, \omega, J, g, T, \mu)$ , est dit torique de type Calabi par rapport à un champ de vecteurs de Killing  $K$ , s'il existe une 2–forme hamiltonienne d'ordre 1 dont la valeur propre non constante est un hamiltonien engendrant  $K$ . Nous noterons  $(M, \omega, J, g, K, T, \mu)$  un tel orbifold.*

La proposition 10 de (Apostolov et al., 2004) nous apprend que, excepté  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , si un orbifold torique de dimension 4 admet une 2–forme hamiltonienne non triviale, celle-ci est unique, à addition d'un multiple de la forme symplectique près. En particulier, une telle 2–forme hamiltonienne, ainsi que le gradient symplectique de sa trace, sont  $T$ –invariants.

**Proposition 3.19.** *Le polytope moment d'un orbifold symplectique, torique admettant une métrique torique de type Calabi, compatible est un trapèze ou un triangle.*

*Démonstration.* Soit  $(M, \omega, J, g, K, T, \mu)$  un orbifold torique de type Calabi. Soit  $v \in \mathfrak{t}$  tel que  $K = X_v$  (un tel vecteur existe puisque  $K$  est un champ de vecteurs hamiltonien de Killing commutant avec l'action infinitésimale de  $T$  sur  $M$ ). Soit  $x = \mu(v)$ . Notons que  $dx = d\mu(v) = -\omega(X_v, \cdot)$  ne s'annule que sur l'ensemble des zéros de  $K$  alors que, grâce (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006, théorème 1), nous savons que  $g(K, K)$  ne dépend que des valeurs de  $x$ . En particulier, les points critiques de  $x$  sont contenus dans la pré-image des extrémités de l'intervalle  $\text{im } x$ . Donc  $\Delta \cap \text{ev}_v^{-1}(\overset{\circ}{\text{im}} x)$  ne contient aucun sommet de  $\Delta$ , ce dernier est donc un trapèze ou un triangle.  $\square$

Dans ce qui suit, nous supposons que l'action torique d'un orbifold torique de type Calabi fixe quatre points, de sorte que son polytope est un trapèze : nous excluons ainsi le cas des espaces projectifs à poids.

**Proposition 3.20.** *Un orbifold kählérien torique  $(M, \omega, J, g, T, \mu)$  est torique de type Calabi par rapport à  $K$  si et seulement s'il existe deux fonctions lisses, strictement positives,  $T$ -invariantes,  $x$  et  $y \in C^\infty(M)$ , telles que leurs gradients soient  $g$ -orthogonaux, que  $K = J\text{grad } x$  et qu'il existe une identification entre  $\mathfrak{t}^*$  et  $\mathbb{R}^2$  à travers laquelle  $\mu = (x, xy)$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, supposons que  $(M, \omega, J, g, K, T, \mu)$  soit torique de type Calabi. Posons  $x = \mu(v)$ . Rappelons que  $\mathring{M}$  dénote le sous-ensemble ouvert et dense où l'action du tore est libre. Il est connu que  $\mathring{M}$  est une variété difféomorphe à  $\mathring{\Delta} \times T$ . Munie de la restriction de la structure kählérienne de  $M$ ,  $\mathring{M}$  est donc une variété kählérienne connexe, admettant une 2-forme hamiltonienne d'ordre 1 dont la valeur propre non constante  $\xi$  est un potentiel de Killing pour  $K$ . Nous pouvons donc utiliser le théorème 1 de (Apostolov, Calderbank et Gauchon, 2006) qui donne une description explicite de la restriction de la structure kählérienne  $(\omega, J, g)$  sur  $\mathring{M}$  :

$$\begin{aligned} g &= \frac{x}{A(x)} dx^2 + x g_\lambda + \frac{A(x)}{x} \theta^2, & Jdx &= \frac{A(x)}{x} \theta, \\ \omega &= x \omega_\lambda + dx \wedge \theta, & d\theta &= -\omega_\lambda \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $\lambda$  est la valeur propre constante de la 2-forme hamiltonienne, telle que la fonction  $x$ , définie par  $x = |\lambda - \xi|$ , est non nulle sur  $\mathring{M}$ , où la 1-forme  $\theta$  satisfait  $\theta(K) = 1$  et où  $(g_\lambda, \omega_\lambda)$  est une structure kählérienne sur une surface de Riemann.

Quitte à ajouter une constante à  $\mu$ , nous pouvons supposer que  $x = \mu(v) > 0$ . Soit  $u \in \mathfrak{t}$  un vecteur quelconque pour lequel le couple  $(v, u)$  forme une base de  $\mathfrak{t}$ . Ce choix induit une identification entre  $\text{Lie } T$  et  $\mathbb{R}^2$  à travers laquelle

$$\mu = \mu(v)v^* + \mu(u)u^* = (x, \mu(u)).$$

Quitte à le translater par  $v$ , on peut choisir  $u$  de sorte que la fonction  $T$ -invariante

$$f_u = \theta(X_u) = \frac{x}{A(x)} g(X_u, X_v)$$

soit strictement positive. On a  $\mathcal{L}_{X_u} f_u = 0$  et  $\mathcal{L}_{X_v} f_u = 0$  puisque  $f_u$  est  $T$ -invariante et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{JX_v} f_u &= d\theta(JX_v, X_u) = 0 \\ \mathcal{L}_{JX_u} f_u &= -d\theta(X_u, JX_u) = \frac{-1}{x} (\omega(X_u, JX_u) + f_u dx(JX_u)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

en utilisant (3.23). Les champs de vecteurs  $X_u, X_v, JX_u$  et  $JX_v$  commutent et les formules ci-dessus déterminent donc la différentielle  $df_u = \frac{1}{x}(d\mu(u) - f_u dx)$  et l'on obtient  $\mu(u) = xf_u + c$ , pour une certaine constante  $c$ .

L'application  $\tilde{\mu} = \mu - cu^*$  est une application moment pour l'action de  $T$  telle que  $\tilde{\mu}(v) = \mu(v) > 0$  et

$$\tilde{\mu} = \mu(v)v^* + (\mu(u) - c)u^* = (x, xf_u). \quad (3.25)$$

En particulier, la fonction  $f_u$  peut être définie sur  $M$  tout entier. En effet, l'hypothèse selon laquelle  $T$  fixe 4 points de  $M$  équivaut au fait que  $\text{im } \tilde{\mu}$  est un quadrilatère, ce qui ne peut être le cas que si  $x > 0$  sur  $M$ . On pose  $y = f_u$  et l'on a alors  $\tilde{\mu} = (x, xy)$ . Finalement, notons que la première formule de (3.24) implique que  $dy$  et  $dx$  sont orthogonales.

Réciproquement, le fait que l'application moment soit  $\mu = (x, xy)$ , avec  $x > 0$  et  $y \geq 0$ , implique que le polytope étiqueté rationnel associé à  $(M, \omega, T)$  a une normale colinéaire à  $e_1$ . En particulier, l'intersection de la droite  $\mathbb{R}e_1$  avec  $\Lambda$  (où  $T = \mathbb{R}^2/\Lambda$ ) est non triviale et détermine un cercle,  $S \subset T$ , dont le générateur est  $(\mathbb{R}-)$ colinéaire à  $K = J\text{grad } x$  qui est un champ de vecteurs hamiltoniens de Killing sur  $M$ . Considérons les coordonnées action-angle  $(\sigma_1, \sigma_2, t, s)$  sur  $\mathring{M}$  où  $(\sigma_1, \sigma_2) = (x, xy)$  et  $dt(K) = 1$  et l'expression normale de la métrique torique en termes de matrices  $\mathbf{H} = (H_{ij})$  et  $\mathbf{G} = (G_{ij})$ . L'hypothèse selon laquelle  $dx$  et  $dy$  sont orthogonales par rapport à  $g$  implique les relations suivantes :

$$G_{11} + 2yG_{12} + y^2G_{22} = f(x, y), \quad x(G_{12} + yG_{22}) = 0 \quad \text{et} \quad x^2G_{22} = h(x, y). \quad (3.26)$$

De ces équations et de l'intégrabilité de  $J$ , nous pouvons en déduire que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma_2} G_{11} - \frac{\partial}{\partial \sigma_1} G_{12} &= \frac{1}{x} \partial_y f - y \left( \frac{\partial}{\partial \sigma_2} G_{12} - \frac{\partial}{\partial \sigma_1} G_{22} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_2} G_{12} - \frac{\partial}{\partial \sigma_1} G_{22} &= \frac{1}{x^3} (h - x \partial_x h) = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Il existe donc des fonctions  $A$  et  $B$  telles que  $f(x, y) = x/A(x)$ ,  $h(x, y) = x/B(y)$  et

$$\mathbf{H}_{A,B} = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} A(x) & yA(x) \\ yA(x) & x^2B(y) + y^2A(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_{A,B} = \begin{pmatrix} \frac{x}{A(x)} + \frac{y^2}{xB(y)} & \frac{-y}{xB(y)} \\ \frac{-y}{xB(y)} & \frac{1}{xB(y)} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Il vient donc que l'expression de la structure kählérienne sur  $\mathring{M}$  associée à  $\mathbf{H}_{A,B}$  et à  $\mathbf{G}_{A,B}$  est exactement de la forme (3.23) où  $\theta = dt + yds$ ,  $\omega_\lambda = dy \wedge ds$  et  $g_\lambda = \frac{dy^2}{B(y)} + B(y)ds^2$ .

En utilisant le théorème 2 de (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006), on obtient donc une 2–forme hamiltonienne d’ordre 1 sur  $\mathring{M}$  donnée explicitement par  $\Psi = x(\omega - x\omega_\lambda)$ . Cette 2–forme admet une unique extension à  $M$  puisque c’est une 2–forme parallèle par rapport à une connection, voir (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006, Proposition 4).  $\square$

Le théorème 3.1 qui classe les 2–formes hamiltoniennes sur les orbifolds symplectiques toriques de dimension 4, s’obtient en combinant la proposition suivante avec la proposition 3.20, et en utilisant le fait que les métriques orthotoriques caractérisent les métriques admettant une 2–forme hamiltonienne d’ordre 2, voir (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2006) pour une démonstration de ce dernier point.

**Proposition 3.21.** *Soit  $(M, \omega, J, g, T)$  un orbifold kählérien torique de dimension 4 admettant une 2–forme hamiltonienne non triviale d’ordre zéro. Le polytope moment associé est un parallélogramme. En particulier,  $(M, \omega, J, g)$  est un produit de droites projectives à poids, muni d’un produit de métriques kählériennes toriques.*

*Démonstration.* Soit  $\Psi$  une 2–forme hamiltonienne non triviale (i.e qui n’est pas un multiple de l’identité) d’ordre zéro sur  $M$ . Considéré comme un endomorphisme grâce à  $g$ ,  $J\Psi$  a deux valeurs propres constantes,  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ , qui sont distinctes puisque  $\Psi$  n’est pas triviale. La structure kählérienne se restreint en une structure kählérienne sur les espaces propres de  $\Psi$  et la décomposition de l’espace tangent induite  $TM = V_1 \oplus V_2$  est invariante par l’action locale engendrée par  $\mathfrak{t}$ . Comme  $\Psi$  est parallèle par rapport à la connection de Levi–Civita, les distributions  $V_i$  ne sont pas seulement intégrables au sens de Frobenius mais aussi fermées pour la connection de Levi–Civita (i.e.  $\nabla_Y X(p) \in (V_i)_p$  pour toute section  $X$  de  $V_i$ ). Un champ de vecteurs  $K$ , se décomposant  $K = K_1 + K_2$  avec  $K_i \in V_i$ , est donc de Killing si et seulement si chaque champ de vecteurs  $K_i$  l’est. On peut donc choisir une base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathfrak{t}$  telle que  $g(X_{e_1}, X_{e_2}) = 0$  et  $X_{e_i}(p) \in (V_i)_p$  pour tout  $p \in U$ . En prenant une application moment quelconque,  $\mu$ , de l’action de  $T$  sur  $M$ , les fonctions  $x = \mu(e_1)$  et  $y = \mu(e_2)$  ont des gradients orthogonaux qui ne s’annulent pas sur  $\mathring{M}$ . Dans la base  $(e_1, e_2)$ ,  $\text{im } \mu$  est un rectangle puisque  $\mu = (x, y)$ . La proposition découle de la classification des orbifolds toriques de Delzant–Lerman–Tolman.  $\square$

### 3.2.2 Structures toriques de type Calabi

Au vu de la proposition 3.20, nous pouvons donner une définition d'orbifold torique de type Calabi, sans référence à un champ de vecteurs. Plus précisément, un orbifold torique de type Calabi au sens de la définition suivante, est un orbifold torique de type Calabi par rapport au champ de vecteurs  $K = J\text{grad } x$ , au sens de la définition 3.18.

**Définition 3.22.** Soit  $(M, \omega, J, g, T, \mu)$  un orbifold kälérien, torique, compact, connexe, de dimension 4. Il est dit torique de type Calabi s'il existe des fonctions lisses, (strictement) positives,  $T$ -invariantes  $x$  et  $y \in C^\infty(M)$  de gradients  $g$ -orthogonaux sur  $\overset{\circ}{M}$ , ainsi qu'une identification entre  $\mathfrak{t}^*$  et  $\mathbb{R}^2$  à travers laquelle l'application moment est  $\mu = (x, xy)$ . Nous appellerons de telles fonctions  $x$  et  $y$  les coordonnées de Calabi.

Le polytope moment  $\Delta = \text{im } \mu$  d'un orbifold torique de type Calabi a une forme particulière. Soit  $\text{im } x = [\alpha_1, \alpha_2]$  et  $\text{im } y = [\beta_1, \beta_2]$ , avec  $\alpha_1 > 0$  et  $\beta_1 \geq 0$ .  $\Delta$  est l'image du rectangle  $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ , par  $\sigma: (x, y) \mapsto (x, xy)$ . Les normales de  $\Delta$  sont

$$u_{\alpha_1} = C_{\alpha_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{\alpha_2} = C_{\alpha_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{\beta_1} = C_{\beta_1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_{\beta_2} = C_{\beta_2} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

avec  $C_{\alpha_1}, C_{\beta_2} > 0$  et  $C_{\alpha_2}, C_{\beta_1} < 0$ . Ceci nous conduit à la définition suivante.

**Définition 3.23.** Un polytope de type Calabi est un polytope qui est l'image d'un rectangle  $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2] \subset \mathbb{R}^2$ , avec  $\alpha_1 > 0$  et  $\beta_1 \geq 0$ , par l'application  $\sigma: (x, y) \mapsto (x, xy)$ . Ainsi, tout polytope étiqueté de type Calabi détermine et est déterminé par la donnée de 8 nombres réels,  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2})$ , que nous appellerons ses paramètres de Calabi.

**Lemme 3.24.** Un polytope de type Calabi est un trapèze et tout trapèze est équivalent à un polytope de type Calabi.

*Démonstration.* Soit  $\alpha > 1$  et soit  $\Delta$  le trapèze de type Calabi donné comme l'image par  $\sigma$  du rectangle  $[1, \alpha] \times [0, 1]$ . L'application affine

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

envoie  $\Delta$  sur  $\Delta'_{(\alpha,1)}$ , l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^2$  des points  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,\alpha)$  et  $(0,1)$ . Il ne reste plus qu'à conclure en utilisant les formes normales des quadrilatères données par le corollaire 3.9.  $\square$

**Remarque 3.25.** *Le trapèze de type Calabi dont les paramètres de Calabi sont*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2})$$

*est équivalent au trapèze de type Calabi de paramètres*

$$\left(1, \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 0, 1, \alpha_1 C_{\alpha_1}, \alpha_1 C_{\alpha_2}, (\beta_2 - \beta_1) \alpha_1 C_{\beta_1}, (\beta_2 - \beta_1) \alpha_1 C_{\beta_1}\right).$$

**Proposition 3.26.** *Soit  $(M, \omega, g, \mu, T)$  un orbifold torique de type Calabi avec coordonnées de Calabi  $x$  et  $y$  et coordonnées moment  $\sigma_1 = x$  et  $\sigma_2 = xy$ . Soit  $t_1$  et  $t_2$  les coordonnées angle correspondantes sur  $\mathring{M}$ . Posons  $\text{im } x = [\alpha_1, \alpha_2]$  et  $\text{im } y = [\beta_1, \beta_2]$ . Il existe des fonctions  $A \in C^\infty([\alpha_1, \alpha_2])$  et  $B \in C^\infty([\beta_1, \beta_2])$ , telles que  $A(x)$  et  $B(y)$  soient positives sur  $\mathring{M}$ , et*

$$g|_{\mathring{M}} = x \frac{dx^2}{A(x)} + x \frac{dy^2}{B(y)} + \frac{A(x)}{x} (dt + y ds)^2 + x B(y) ds^2 \quad (3.30)$$

*et vérifiant*

$$\begin{aligned} A(\alpha_i) &= 0, \quad B(\beta_i) = 0 \\ A'(\alpha_i) &= \frac{2}{C_{\alpha_i}}, \quad B'(\beta_i) = -\frac{2}{C_{\beta_i}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

*Réciproquement, pour toute paire de fonctions lisses  $A$  et  $B$ , respectivement positives sur  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et  $(\beta_1, \beta_2)$  et satisfaisant (3.31), la formule (3.30) définit une métrique torique de type Calabi, lisse sur  $M$ , compatible avec  $\omega$ , et de coordonnées de Calabi  $x$  et  $y$ .*

*Démonstration.* L'expression (3.30) est la métrique associée à la matrice  $\mathbf{H}_{A,B}$  donnée par (3.28). Il suffit ensuite de vérifier que  $\mathbf{H}_{A,B}$  satisfait les conditions au bord (2.7) si et seulement si les conditions (3.31) sont satisfaites. Nous calculons :

$$\mathbf{H}_{(\alpha_i, y\alpha_i)}(u_{\alpha_i}, \cdot) = \begin{pmatrix} A(\alpha_i) \\ yA(\alpha_i) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{(x, x\beta_i)}(u_{\beta_i}, \cdot) = \begin{pmatrix} 0 \\ xB(\beta_i) \end{pmatrix}.$$

De plus,  $d\mathbf{H}_{(\alpha_i, y\alpha_i)}(u_{\alpha_i}, u_{\alpha_i}) = C_{\alpha_i}^2 A'(\alpha_i) d\sigma_1$  et

$$d\mathbf{H}_{(x, x\beta_i)}(u_{\beta_i}, u_{\beta_i}) = -C_{\beta_i}^2 B'(\beta_i)(\beta_i d\sigma_1 - d\sigma_2).$$

Finalement, il vient  $u_{\beta_i} = C_{\beta_i}(\beta_i d\sigma_1 - d\sigma_2)$  et  $u_{\alpha_i} = C_{\alpha_i} d\sigma_1$  par l'intermédiaire des identifications standard  $T_\mu \Delta \simeq \mathfrak{t}^*$  et  $\mathfrak{t}^* \simeq \mathfrak{t}$ , données par la base  $(\sigma_1, \sigma_2)$ .  $\square$

**Corollaire 3.27.** *Un potentiel symplectique de la métrique torique de type Calabi  $g_{A,B}$  est donné par la formule*

$$\phi_{A,B}(x, y) = x \int_{s_0}^y \left( \int_{t_0}^s \frac{1}{B(t)} dt \right) ds - x \int_{s_0}^x \frac{1}{s^2} \left( \int_{t_0}^s \frac{t}{A(t)} dt \right) ds.$$

*Il est unique, à addition d'une fonction affine en les variables  $x$  et  $xy$  près.*

Avec un argument similaire au cas générique, voir la proposition 3.11, nous déduisons de la proposition 3.26, le résultat suivant.

**Proposition 3.28.** *Soit  $(M, \omega, T)$  un orbifold symplectique torique de dimension 4 d'application moment  $\mu$ . Il existe une métrique torique de type Calabi compatible sur  $(M, \omega)$  si et seulement si  $\text{im } \mu$  est un trapèze qui n'est pas un parallélogramme.*

### 3.2.3 Métriques toriques de type Calabi extrémales

En utilisant la formule d'Abreu (2.4) ainsi que l'expression de  $g = g_{A,B}$  par rapport aux coordonnées moment  $\sigma_1 = x$  et  $\sigma_2 = xy$ , on peut effectuer le calcul suivant :

$$S(\phi_{A,B}) = - \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} H_{ij} = - \frac{B''(y) + A''(x)}{x}. \quad (3.32)$$

En particulier, la condition d'extrémalité d'une telle métrique peut être exprimée comme des conditions sur  $A$  et  $B$ . Plus précisément, comme la métrique  $g_{A,B}$  est une métrique de type Calabi, lisse sur la variété  $\mathring{M}$ , nous pouvons appliquer (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2003, proposition 14) et obtenir :

**Proposition 3.29.** *(Calabi, 1985; Apostolov, Calderbank et Gauduchon, 2003) Soit un orbifold torique de type Calabi avec coordonnées  $x$  et  $y$ ,  $(M^4, \omega, J, g_{A,B}, T)$ . La métrique  $g_{A,B}$  est*

extrémale si et seulement si  $A$  est un polynôme de degré au plus 4,  $A(x) = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4$ , et  $B$  un polynôme de degré 2 tels que

$$B''(y) = -2A_2. \quad (3.33)$$

De plus, dans ce cas,

- 1)  $g_{A,B}$  est à courbure constante si et seulement si  $A_0 = 0$ ,
- 2)  $g_{A,B}$  est faiblement Bochner–plate si et seulement si  $A_3 = 0$ ,
- 3)  $g_{A,B}$  est Kähler–Einstein si et seulement si

$$A_1 = A_3 = 0. \quad (3.34)$$

En particulier, si  $g_{A,B}$  est extrémale,

$$S(G_{g_{A,B}}) = -12A_0x - 6A_1 = -12A_0\sigma_1 - 6A_1. \quad (3.35)$$

**Corollaire 3.30.** *Si la métrique torique de type Calabi  $g_{A,B}$  est extrémale, alors  $\zeta_{(\Delta,u)}$  est equiposée et la métrique  $g_\Sigma = \frac{dy^2}{B(y)} + B(y)ds^2$  est à courbure scalaire constante (positive)  $2\kappa = -B''(y)$ .*

Voici à présent la contrepartie “torique de type Calabi” du lemme 3.16.

**Lemme 3.31.** *Considérons le trapèze étiqueté de type Calabi  $(\Delta, u)$  de paramètres de Calabi  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2}) \in \mathbb{R}^8$ . Il existe des polynômes  $A$  et  $B$  de degrés respectifs au plus 4 et 2, satisfaisant (3.31) et (3.33) si et seulement si*

$$C_{\beta_2} = -C_{\beta_1}. \quad (3.36)$$

Dans ce cas,  $A$  et  $B$  sont uniquement déterminés par les paramètres de Calabi de  $(\Delta, u)$  et

- 1)  $A$  est de degré 3 si et seulement si

$$\frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{2\alpha_2 + \alpha_1}{C_{\alpha_1}} + \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{C_{\alpha_2}} \right) = -\frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)C_{\beta_2}}, \quad (3.37)$$

- 2)  $A_3 = 0$  si et seulement si

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_2)}{C_{\alpha_1}} + \frac{\alpha_1(2\alpha_2 + \alpha_1)}{C_{\alpha_2}} \right) \\ &= 2 \frac{\alpha_2\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_1)}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2 + 2\alpha_1\alpha_2} \left( \frac{2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{2\alpha_2 + \alpha_1}{C_{\alpha_1}} + \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{C_{\alpha_2}} \right) + \kappa \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

3)  $A_0 = A_3 = 0$  si et seulement si en plus de (3.37)

$$\frac{(2\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_2}{C_{\alpha_1}} + \frac{(2\alpha_2 + \alpha_1)\alpha_1}{C_{\alpha_2}} = 0. \quad (3.39)$$

*Démonstration.* Nous pouvons déduire des conditions au bord (3.31) et du fait que  $B''(y) = -2\kappa$  doit être constante (voir la proposition 3.29), que  $B(y) = -\kappa(y - \beta_1)(y - \beta_2)$ . Il vient donc que

$$B''(y) = -2\kappa = \frac{4}{(\beta_2 - \beta_1)C_{\beta_1}} = -\frac{4}{(\beta_2 - \beta_1)C_{\beta_2}} \quad (3.40)$$

est négative. De la même façon, les conditions (3.31) combinées au fait que  $A(x)$  doit être un polynôme de degré 4 (voir la proposition 3.29), conduit à

$$A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)Q_A(x)$$

pour un certain polynôme de degré 2,  $Q_A(x) = A_0x^2 + R_1x + R_2$ . Grâce aux conditions au bord satisfaites par  $A$ , nous obtenons 3 équations linéaires en les variables  $A_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$  :

$$\begin{aligned} A'(\alpha_1) &= (\alpha_1 - \alpha_2)Q_A(\alpha_1) = 2/C_{\alpha_1}, \\ A'(\alpha_2) &= (\alpha_2 - \alpha_1)Q_A(\alpha_2) = 2/C_{\alpha_2}, \\ A_2 &= R_2 - R_1(\alpha_1 + \alpha_2) + A_0\alpha_1\alpha_2 = \kappa \end{aligned}$$

dont la solution est

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{2}{C_{\alpha_1}} + \frac{2}{C_{\alpha_2}} \right) - A_0(\alpha_2 + \alpha_1) \\ R_2 &= \frac{-1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{2\alpha_2}{C_{\alpha_1}} + \frac{2\alpha_1}{C_{\alpha_2}} \right) + A_0\alpha_2\alpha_1 \\ A_0((\alpha_2 + \alpha_1)^2 + 2\alpha_1\alpha_2) &= \frac{2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left( \frac{2\alpha_2 + \alpha_1}{C_{\alpha_1}} + \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{C_{\alpha_2}} \right) + \kappa. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Notons que  $(\alpha_2 + \alpha_1)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 > 0$  puisque, par hypothèse,  $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ . Ainsi, nous pouvons en déduire l'expression des coefficients  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2 = \kappa$ ,  $A_3$  et  $A_4$  en termes des paramètres de Calabi. L'équation (3.37) équivaut à  $A_0 = 0$  tandis que (3.38) correspond à

$$R_1\alpha_1\alpha_2 - R_2(\alpha_2 + \alpha_1) = 0$$

et les deux conditions  $A_0 = 0$  et  $A_3 = 0$  s'écrivent aussi comme (3.37) et (3.39).  $\square$



## Chapitre IV

### FONCTIONS AFFINES EXTRÉMALES ÉQUIPOSÉES ET RÉSOLUTION EXPLICITE ET LA CONJECTURE DE DONALDSON SUR UNE CLASSE DE QUADRILATÈRES

En utilisant les 2-formes hamiltoniennes et la classification présentée dans le chapitre précédent pour séparer les variables de l'équation d'Abreu nous allons fournir les solutions explicites du problème 1 dans le cas de quadrilatères convexes étiquetés  $(\Delta, u)$  dont la fonction affine extrémale est *équiposée*. Ceci nous amènera à démontrer les résultats principaux de cette thèse que nous avons mentionnés en introduction et que nous rappelons ci-dessous.

**Définition 4.1** (Définition 0.2). *Soit  $\Delta$  un quadrilatère de sommets  $s_1, \dots, s_4$ , tels que  $s_1$  et  $s_3$  ne sont pas sur une même arête. On dit que qu'une fonction affine  $f$  est équiposée sur  $\Delta$  si*

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^i f(s_i) = 0.$$

**Théorème 4.2** (Théorème 0.3). *Soit  $(\Delta, u)$  un quadrilatère convexe étiqueté,  $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$ , dont la fonction affine extrémale  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est équiposée. Il existe deux polynômes de degrés au plus 4,  $A$  et  $B$ , avec lesquels on peut construire explicitement une fonction  $\mathbf{H}_{A, B}$  à valeurs dans  $S^2 \mathfrak{t}^*$  satisfaisant les conditions (2.7) et l'équation d'Abreu (3).*

*De plus,  $(\Delta, u)$  est analytiquement relativement  $K$ -stable par rapport aux dégénération toriques si et seulement si  $\mathbf{H}_{A, B}$  est l'inverse de la hessienne d'une solution  $\phi_{A, B} \in S(\Delta, u)$  de l'équation d'Abreu (3). Ceci se produit si et seulement si  $\mathbf{H}_{A, B}$  est définie positive<sup>1</sup>. En particulier, si (3) admet une solution dans  $S(\Delta, u)$  alors cette solution est donnée par  $\phi_{A, B}$ .*

---

1. Cette condition équivaut à la condition que  $A$  et  $B$  soient positifs sur certains intervalles.

Ce théorème englobe le cas particulier des métriques à courbure scalaire constante sur les quadrilatères étiquetés puisque les fonctions constantes sont équiposées (voir le corollaire 4.7). Il est à noter que sur un parallélogramme toute fonction affine est équiposée (puisque ceci est vrai pour le carré et que tout parallélogramme est équivalent au carré, via une application affine). La solution du problème 1 dans ce cas est le potentiel de Guillemin (2.8) des intervalles étiquetés. Le cas des parallélogrammes étant ainsi essentiellement résolu, nous nous intéressons dans ce qui suit aux quadrilatères convexes qui ne sont pas des parallélogrammes.

La preuve du Théorème 4.2 occupe les deux prochaines sections.

#### 4.1 Fonctions équiposées et existence de solutions

Nous avons établi précédemment que tout quadrilatère convexe,  $\Delta$ , qui n'est pas un parallélogramme est équivalent (via transformations affines) soit à un polytope orthotorique soit à un polytope de type Calabi. Plus précisément, il existe une application affine inversible envoyant  $\Delta$  sur un quadrilatère de  $\mathbb{R}^2$  qui est l'image d'un rectangle  $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$  via l'application  $\sigma(x, y) = (x + y, xy)$  si  $\Delta$  est générique et  $\sigma(x, y) = (x, xy)$  si  $\Delta$  est un trapèze, voir les définitions 3.7 et 3.23. Fixons un tel représentant de  $\Delta$  et un ensemble de normales  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ . Tout autre choix de vecteurs normaux intérieurs est obtenu de  $u$  par

$$u(r) = \left( \frac{u_1}{r_1}, \frac{u_2}{r_2}, \frac{u_3}{r_3}, \frac{u_4}{r_4} \right) \quad (4.1)$$

avec  $r = (r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}_{>0}^4$ . Dans le cas orthotorique (resp. de type Calabi), on choisit  $u$  de sorte que  $u(r)$  donne les normales (3.2) (resp. (3.29)) pour

$$r = \left( \frac{1}{C_{\alpha_1}}, \frac{-1}{C_{\alpha_2}}, \frac{-1}{C_{\beta_1}}, \frac{1}{C_{\beta_2}} \right). \quad (4.2)$$

##### 4.1.1 Cônes de vecteurs normaux intérieurs et solutions formelles

Dans les sections 3.1 et 3.2, nous avons introduit deux sortes de solutions de l'équation (3) en termes de fonctions  $\mathbf{H}_{A,B}$ , à valeurs dans  $S^2\mathbb{R}^2$ , dépendant de deux polynômes  $A$  et  $B$  respectivement donnés par (3.5) si  $\Delta$  est générique et par (3.28) si  $\Delta$  est un trapèze. Dans les deux cas, nous avons obtenu un critère sur les normales  $u(r)$  pour que  $(\Delta, u(r))$  admette une telle solution, critère exprimé sous la forme d'une équation homogène en les variables  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$ ,

voir les lemmes 3.16 et 3.31. Soit  $\mathbf{X}(\Delta)$  le cône des normales intérieures (étiquetant  $\Delta$ ) satisfaisant ce critère. Plus précisément, en utilisant la paramétrisation ci-dessus, si  $\Delta$  est générique

$$\mathbf{X}(\Delta) = \{(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}_{>0}^4 \mid (3.12) \text{ est vérifiée} \}, \quad (4.3)$$

et si  $\Delta$  est un trapèze

$$\mathbf{X}(\Delta) = \{(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}_{>0}^4 \mid r_3 = r_4\}. \quad (4.4)$$

**Lemme 4.3.** *Pour tout quadrilatère convexe  $\Delta$  qui n'est pas un parallélogramme,  $\mathbf{X}(\Delta)$  est un cône de dimension 3.*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{X}'(\Delta)$  l'espace vectoriel engendré par  $\mathbf{X}(\Delta)$ . On a  $\mathbf{X}(\Delta) = \mathbb{R}_{>0}^4 \cap \mathbf{X}'(\Delta)$ . Si  $\Delta$  est un trapèze, le lemme 4.3 découle évidemment de la définition et de la proposition 3.31. Si  $\Delta$  est générique, nous dénotons  $(\alpha, \beta)$  sa paire caractéristique, définie par le corollaire 3.4, et nous identifions  $\Delta$  avec  $\sigma([1, \alpha] \times [0, \beta])$ . Avec les notations (4.2), l'équation (3.12) devient

$$D_1 \frac{r_1}{(\alpha - 1)^2} - D_2 \frac{r_2}{(\alpha - 1)^2} - D_3 \frac{r_3}{\beta^2} + D_4 \frac{r_4}{\beta^2} = 0, \quad (4.5)$$

où

$$D_1 = (1 + \alpha)^2 + 2\alpha^2 + \beta^2 - 2(2\alpha + 1)(\beta),$$

$$D_2 = (1 + \alpha)^2 + 2 + \beta^2 - 2(2 + \alpha)\beta,$$

$$D_3 = 3\beta^2 + (1 + \alpha)^2 + 2\alpha - 4\beta(1 + \alpha),$$

$$D_4 = \beta^2 + (1 + \alpha)^2 + 2\alpha - 2\beta(1 + \alpha).$$

Le lemme découle alors du fait que  $D_1 > D_4 > D_3 > D_2 > 0$  qui lui-même vient des encadrements  $0 < \beta < 1 < \alpha$  (obtenus en corollaire 3.9).  $\square$

#### 4.1.2 Le cône des vecteurs normaux intérieurs avec fonction affine extrémale équiposée

Nous supposerons dorénavant (sans perte de généralité du fait des lemmes 3.8 et 3.24) que tout quadrilatère qui n'est pas un parallélogramme est soit un polytope orthotorique soit un polytope de type Calabi. Ces deux types de polytopes viennent avec un plongement affine fixé

$\Delta \subset \mathbb{R}^2 = \{(\sigma_1, \sigma_2) \mid \sigma_i \in \mathbb{R}\}$  dont une propriété commune est que la fonction  $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1$  est équioposée sur  $\Delta$  tandis que  $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_2$  ne l'est pas. Une fonction affine  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  est donc équioposée sur  $\Delta$  si et seulement si elle est constante par rapport à  $\sigma_2$ .

De ce fait, au vu du système linéaire (2.19), pour un étiquetage donné  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ , la fonction affine extrémale  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est équioposée si et seulement si le système linéaire

$$\begin{cases} W_{01}\zeta_1 + W_{00}\zeta_0 = Z_0 \\ W_{11}\zeta_1 + W_{01}\zeta_0 = Z_1 \\ W_{21}\zeta_1 + W_{02}\zeta_0 = Z_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

admet une solution  $(\zeta_0, \zeta_1)$ , c'est-à-dire si et seulement si

$$(W_{00}W_{11} - W_{01}^2)Z_2 = (W_{02}W_{11} - W_{12}W_{01})Z_0 + (W_{12}W_{00} - W_{02}W_{01})Z_1. \quad (4.7)$$

Remarquons que dans le système (2.19) (et donc dans (4.6)), seule la partie droite dépend des normales : pour tout autre choix de vecteurs normaux intérieurs  $u(r)$  avec  $r = (r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}_{>0}^4$  (4.1), la matrice  $W$  reste inchangée tandis que  $Z(r)$  dépend linéairement de  $r$ . L'équation (4.7) est donc homogène et linéaire en la variable  $r$ . Dénotons  $a_{ij} = \int_{F_j} \mu_i d\nu_j$  où  $u_j \wedge d\nu_j = -d\mu_1 \wedge d\mu_2$  sur  $F_j$ , de sorte que  $Z_i(r) = \sum_j a_{ij} r_j$ . L'équation (4.7) peut être reformulée sous la forme  $\sum_{j=1}^4 E_j r_j = 0$ , où

$$E_j = a_{2j}(W_{00}W_{11} - W_{01}^2) - a_{0j}(W_{02}W_{11} - W_{12}W_{01}) - a_{1j}(W_{12}W_{00} - W_{02}W_{01}).$$

On définit l'espace vectoriel  $\mathbf{E}'(\Delta) = \left\{ r \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{j=1}^4 E_j r_j = 0 \right\}$ , tel que

$$\mathbf{E}(\Delta) = \mathbf{E}'(\Delta) \cap \mathbb{R}_{>0}^4 = \{ r \in \mathbb{R}_{>0}^4 \mid \zeta_{(\Delta, u(r))} \text{ est équioposée sur } \Delta \}.$$

Le lemme suivant est la clé de voûte du théorème 4.2. Il découle du fait que nous avons linéarisé l'équation aux dérivées partielles du problème 1 dans les lemmes 3.16 et 3.31.

**Lemme 4.4.** *Pour tout quadrilatère convexe  $\Delta$  qui n'est pas un parallélogramme*

$$\mathbf{E}(\Delta) = \mathbf{X}(\Delta).$$

*Démonstration.* Comme  $\mathbf{E}(\Delta) = \mathbf{E}'(\Delta) \cap \mathbb{R}_{>0}^4$  et  $\mathbf{X}(\Delta) = \mathbf{X}'(\Delta) \cap \mathbb{R}_{>0}^4$ , et comme nous avons démontré que  $\mathbf{X}'(\Delta)$  est un espace vectoriel de dimension 3, il nous suffit juste de prouver que  $\mathbf{X}(\Delta) \subset \mathbf{E}(\Delta)$  et que  $\mathbf{E}'(\Delta)$  est un espace vectoriel de dimension 3.

Premièrement, pour tout  $r \in \mathbf{X}(\Delta)$ , on peut construire une fonction  $\mathbf{H}_{A,B} = (H_{ij})$ , à valeurs matricielles, satisfaisant les conditions au bord (2.7) et (3) grâce aux lemmes 3.16 et 3.31. La dernière condition signifie que la fonction

$$S(\mathbf{H}_{A,B}) = -\frac{\partial^2 H_{ij}}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \quad (4.8)$$

est affine et donc qu'elle coïncide avec  $\zeta_{(\Delta, u(r))}$ , voir la remarque 2.52. En particulier, par construction  $\zeta_{(\Delta, u(r))}$  est équioposée et donc  $r \in \mathbf{E}(\Delta)$ , voir la remarque 3.14 et le corollaire 3.30. L'inclusion  $\mathbf{X}(\Delta) \subset \mathbf{E}(\Delta)$  est donc vérifiée.

Deuxièmement,  $\mathbf{E}'(\Delta)$  est de dimension 3 puisque les coefficients  $E_i$  de l'équation définissante  $\sum_{j=1}^4 E_j r_j = 0$  ne sont pas tous nuls. Nous prouvons ce fait, en séparant les deux cas.

(i) Si  $\Delta$  est générique, il s'identifie à un polytope orthotorique de paramètres  $\beta_1 < \beta_2 < \alpha_1 < \alpha_2$ . Rappelons les vecteurs normaux intérieurs (fixés)  $u$  donnés par (4.1) et (4.2) :

$$u_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} Z_0(r) &= 2(\beta_2 - \beta_1)(r_2 + r_1) + 2(\alpha_2 - \alpha_1)(r_4 + r_3), \\ Z_1(r) &= (\beta_2 - \beta_1)((2\alpha_2 + \beta_2 + \beta_1)r_2 + (2\alpha_1 + \beta_2 + \beta_1)r_1) \\ &\quad + (\alpha_2 - \alpha_1)((2\beta_2 + \alpha_2 + \alpha_1)r_4 + (2\beta_1 + \alpha_2 + \alpha_1)r_3) \quad \text{et} \\ Z_2(r) &= (\beta_2^2 - \beta_1^2)(\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1) + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(\beta_2 r_4 + \beta_1 r_3). \end{aligned} \quad (4.9)$$

En particulier, au moins l'un des coefficients est non nul puisque la somme alternée  $-E_1 + E_2 - E_3 + E_4$  donne

$$(\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)(W_{00}W_{11} - W_{01}^2)(\alpha_2 + \alpha_1 - \beta_2 - \beta_1) \neq 0. \quad (4.10)$$

En effet, on rappelle que  $W_{ij} = \int_{\Delta} \mu_i \mu_j dv$  est un produit scalaire sur  $L^2(\Delta)$  et que  $\mu_0$  et  $\mu_1$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  partout linéairement indépendantes. Elles satisfont donc l'inégalité *stricte*

de Cauchy–Schwarz :  $W_{01}^2 > W_{00}W_{11}$ . Combiner ceci aux inégalités  $\beta_1 < \beta_2 < \alpha_1 < \alpha_2$  donne (4.10).

(ii) Si  $\Delta$  est un trapèze, il correspond à un polytope de type Calabi de paramètres  $\beta_2 > \beta_1 \geq 0$  et  $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ . Les vecteurs normaux intérieurs sont donnés par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} Z_0(r) &= (\beta_2 - \beta_1)(2\alpha_2 r_2 + 2\alpha_1 r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)(2r_4 + 2r_3), \\ Z_1(r) &= (\beta_2 - \beta_1)(2\alpha_2^2 r_2 + 2\alpha_1^2 r_1) - (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(r_4 + r_3) \quad \text{et} \\ Z_2(r) &= (\beta_2^2 - \beta_1^2)(\alpha_2^2 r_2 + \alpha_1^2 r_1) - (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(\beta_2 r_4 - \beta_1 r_3). \end{aligned}$$

On remarque, comme précédemment, que

$$E_4 - E_3 = -(\beta_2 - \beta_1)(W_{00}W_{11} - W_{01}^2)(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0$$

et l'on en conclut que l'un, au moins, des coefficients n'est pas nul.  $\square$

## 4.2 Stabilité et fonction affine extrémale équiposée

La preuve que nous donnons ci-dessous est similaire à celle du théorème 3 de (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, ).

Soit  $(\Delta, u)$  un quadrilatère étiqueté convexe dont la fonction  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est équiposée. Supposons que  $\Delta$  ne soit pas un parallélogramme. De par le lemme 4.4, nous savons qu'il existe des polynômes  $A$  et  $B$  pour lesquels la matrice  $\mathbf{H}_{A, B}$  – donnée par (3.28) dans le cas des trapèzes et par (3.5) dans le cas des quadrilatères génériques – satisfait les conditions au bord (2.7) et est telle que  $S(\mathbf{H}_{A, B}) = \zeta_{(\Delta, u)}$ . Du fait de l'unicité de la solution du problème 1, voir §2.3.5, pour démontrer le théorème 4.2, il nous suffit de montrer que  $\mathbf{H}_{A, B}$  est définie positive si et seulement si  $(\Delta, u)$  est relativement analytiquement  $K$ -stable par rapport aux dégénération toriques.

Notons par  $\mathcal{P}(\Delta)$  l'ensemble des fonctions affines par morceaux, convexes, non lisses de  $\Delta$ . Supposons que  $f \in \mathcal{P}(\Delta)$  n'ait qu'un seul pli<sup>2</sup>, c'est-à-dire que  $\Delta$  est partagé en deux parties  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$  sur chacune desquelles  $f$  est affine (donc  $f_i = f|_{\Delta_i}$  est lisse). Notons par  $S_f = \partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2$ , le segment passant à l'intérieur de  $\Delta$ , déterminé par l'unique pli de  $f$ . Un vecteur normal à  $S_f$  est donné par

$$u_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mu_1} f_1 - \frac{\partial}{\partial \mu_1} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial \mu_2} f_1 - \frac{\partial}{\partial \mu_2} f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{21} \\ a_{12} - a_{22} \end{pmatrix}$$

où les coefficients  $a_{sj} = \frac{\partial}{\partial \mu_j} f_s$  sont constants. Ce vecteur est intérieur à  $\Delta_1$ . Notons par  $d\nu_f$  la forme volume (positive) sur le segment orienté  $S_f$  pour laquelle  $-u_f \wedge d\nu_f = dv = d\mu_1 \wedge d\mu_2$ . En remplaçant  $\zeta_{(\Delta, u)}$  par  $S(\mathbf{H}_{A, B})$  (que  $\mathbf{H}_{A, B}$  soit définie positive ou non), nous obtenons

$$\mathcal{L}_{(\Delta, u)}(f) = \int_{S_f} \mathbf{H}_{A, B}(u_f, u_f) d\nu_f. \quad (4.11)$$

Pour des fonctions admettant plus d'un pli, la fonctionnelle de Futaki relative se décompose en une somme, indexée par les plis, d'expressions du type (4.11). En effet, l'intégration par parties conduisant à (4.11) peut être utilisée successivement, comme dans (Zhou et Zhu, 2008), ce qui montre que si  $\mathbf{H}_{A, B}$  est définie positive, alors  $(\Delta, u)$  est relativement analytiquement  $K$ -stable par rapport aux dégénération toriques. Il nous reste à démontrer la réciproque.

Du fait des lemmes 3.8 et 3.24, nous pouvons supposer que  $\Delta$  est l'image d'une rectangle  $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$  via l'application affine  $\sigma$ , voir les définitions 3.7 et 3.23. Soit  $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}$  et  $C_{\beta_2}$  les constantes déterminant respectivement les normales (3.2) et (3.29). À tout  $x \in [\alpha_1, \alpha_2]$  correspond alors un segment  $S_x \subset \Delta$ , donné comme l'image de  $[\beta_1, \beta_2]$  par  $\sigma(x, \cdot)$ . Nous définissons de la même manière un segment  $S_y$  pour chaque élément  $y \in [\beta_1, \beta_2]$ . Pour toute fonction  $f$  dont l'unique pli est  $S_x$ , il vient

$$\mathcal{L}_{(\Delta, u)}(f) = \int_{S_x} \mathbf{H}_{A, B}(u_f, u_f) d\nu_f = A(x)(\beta_2 - \beta_1), \quad (4.12)$$

---

2. Ici "pli" est une traduction libre de "crease" introduit par Donaldson et signifiant le lieu de singularité d'une fonction affine par morceaux

à un facteur multiplicatif positif près. De la même façon, si  $S_y$  est l'unique pli de  $f$ , nous obtenons que, à un facteur multiplicatif positif près,

$$\mathcal{L}_{(\Delta, u)}(f) = \int_{S_y} \mathbf{H}_{A, B}(u_f, u_f) dv_f = B(y)(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (4.13)$$

Les égalités (4.12) et (4.13) donnent donc que si  $\mathcal{L}_{(\Delta, u)}(f) > 0$  pour toute fonction non affine  $f \in \mathcal{P}(\Delta)$ , alors  $A$  et  $B$  sont positifs sur les intervalles respectifs  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et  $(\beta_1, \beta_2)$ , ce qui implique que  $\mathbf{H}_{A, B}$  est définie positive.

**Remarque 4.5.** *Le cas particulier où les paramètres  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2}$  sont tous rationnels est intéressant. On obtient alors un polytope étiqueté rationnel  $(\Delta, \Lambda, u)$  dont les sommets appartiennent à  $\Lambda^*$ , voir le lemme 6.9. Ceci constitue le cadre dans lequel le problème a un sens (algébrico-)géométrique, d'après (Donaldson, 2002) pour les variétés lisses et le travail de (Ross et Thomas, 2009) pour les orbifolds avec groupes de structure (orbifoldiens) cycliques.*

*Il mérite d'être remarqué, à l'instar du théorème 3 de (Apostolov, Calderbank et Gauduchon, ), que sous cette hypothèse, les polynômes  $A$  et  $B$  sont à coefficients rationnels, et admettent deux racines rationnelles simples. Ils ne peuvent donc pas admettre de racines irrationnelles doubles, ce qui montre que  $\mathbf{H}_{A, B}$  est définie positive dès que  $\mathcal{L}_{(\Delta, u)}(f) > 0$  pour toute fonction rationnelle de  $\mathcal{P}(\Delta)$ .*

### 4.3 Le cône de normales d'un quadrilatère convexe

Dans cette section, nous considérons les cônes de normales intérieures à un quadrilatère convexe donnant lieu à une fonction affine extrémale équiposée, notre but étant de comprendre dans quelle mesure cette condition est restrictive. En particulier, nous démontrons le théorème 0.4 de l'introduction (que nous rappelons ci-dessous).

Pour un quadrilatère convexe  $\Delta$ , on note  $\mathbf{N}(\Delta)$  l'ensemble des quadruplets  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  de normales aux facettes, intérieures au polytope.  $\mathbf{N}(\Delta)$  est un cône de dimension 4. On note  $\mathbf{E}(\Delta)$  (respectivement  $\mathbf{C}(\Delta)$ ) le sous-cône de  $\mathbf{N}(\Delta)$  défini par la condition que  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est équiposée (respectivement constante). On définit  $\mathbf{E}^+(\Delta)$  comme l'ensemble des quadruplets

de normales  $u \in \mathbf{E}(\Delta)$  tels que  $(\Delta, u)$  est relativement analytiquement  $K$ -stable par rapport aux dégénération toriques.

**Théorème 4.6.** *Soit  $\Delta$  un quadrilatère convexe qui n'est pas un parallélogramme.  $\mathbf{C}(\Delta)$  est un cône de codimension 1 dans  $\mathbf{E}(\Delta)$  qui est lui-même un cône de codimension 1 dans  $\mathbf{N}(\Delta)$ . De plus,  $\mathbf{E}^+(\Delta)$  contient  $\mathbf{C}(\Delta)$  et est un ouvert non-vide de  $\mathbf{E}(\Delta)$ .*

*Enfin, il y a un cône  $\mathbf{K}(\Delta)$  de codimension 1 dans  $\mathbf{C}(\Delta)$  constitué des éléments tels que les solutions correspondantes  $\phi_{A,B} \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  donnent lieu à des métriques Kähler-Einstein homothétiques sur  $\mathring{\Delta} \times \mathbb{R}^2$ .*

Rappelons que le corollaire 0.6 (reformulé ci-dessous) est une conséquence directe du théorème précédent.

**Corollaire 4.7** (Corollaire 0.6). *Soit  $(\Delta, u)$  un quadrilatère convexe étiqueté. Si  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est constante, alors il existe une unique fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  telle que  $S(\phi) = \zeta_{(\Delta, u)}$ . De plus,  $\phi$  s'écrit de façon explicite à l'aide de deux polynômes de degré au plus 3.*

Nous allons maintenant démontrer le théorème 4.6. Tout d'abord (**Étape 1.** ci-dessous), nous allons montrer la dernière partie de l'affirmation concernant  $\mathbf{C}(\Delta)$  et  $\mathbf{K}(\Delta)$ . Ensuite, nous prouverons que  $\mathbf{E}^+(\Delta)$  et  $\mathbf{E}(\Delta) \setminus \mathbf{E}^+(\Delta)$  sont tous deux non vides pour les quadrilatères génériques (**Étape 2.**) et pour les trapèzes (**Étape 3.**).

Nous commençons par donner des définitions alternatives à  $\mathbf{E}^+(\Delta)$ ,  $\mathbf{C}(\Delta)$  et  $\mathbf{K}(\Delta)$ .

Soit  $\Delta$  un quadrilatère convexe qui n'est pas un parallélogramme. Supposons, sans perte de généralité, que  $\Delta$  est plongé dans  $\mathbb{R}^2$  comme un quadrilatère orthotorique s'il est générique et comme un trapèze de type Calabi sinon. Dans les deux cas, les paramètres associés sont dénotés  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  et  $\beta_2$ .

Nous fixons des vecteurs normaux intérieurs  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  de sorte que tout autre quadruplet de vecteurs normaux intérieurs s'exprime sous la forme  $u(r)$  pour un certain  $r \in \mathbb{R}_{>0}^4$ , selon nos conventions (4.1) et (4.2). Via cette paramétrisation,  $\mathbf{N}(\Delta) = \mathbb{R}_{>0}^4$ .

Nous savons grâce aux lemmes 4.3 et 4.4 que la condition que  $\zeta_{(\Delta, u)}$  soit équilibrée définit un sous-cône de codimension 1,  $\mathbf{E}(\Delta) \subset \mathbf{N}(\Delta)$ , qui peut être défini de manière équivalente

comme le cône  $\mathbf{X}(\Delta)$  de normales pour lesquelles il existe des polynômes de degré 4,  $A$  et  $B$ , tels que  $\mathbf{H}_{A,B}$  (donnée par (3.5) si  $\Delta$  est générique et par (3.28) sinon) est une solution de (3) satisfaisant la condition au bord (2.7). Rappelons que  $A$  et  $B$  sont uniquement déterminés par ces conditions. En posant  $A(x) = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4$  et en reprenant la démonstration du lemme 4.4, nous obtenons

$$\mathbf{E}(\Delta) = \left\{ r \in \mathbf{N}(\Delta) \mid \zeta_{(\Delta, u(r))} = -12A_0\sigma_1 - 6A_1 \right\}.$$

En particulier, en remarquant que la fonction constante est équiposée pour tout quadrilatère, l'ensemble des normales  $\mathbf{C}(\Delta)$  pour lesquelles  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est constante est un sous-ensemble de  $\mathbf{E}(\Delta)$ , qui peut être défini de manière équivalente par

$$\mathbf{C}(\Delta) = \{ r \in \mathbf{E}(\Delta) \mid A_0 = 0 \}.$$

Le sous-ensemble  $\mathbf{E}^+(\Delta)$  des normales pour lesquelles  $(\Delta, u)$  est relativement analytiquement  $K$ -stable correspond, par l'intermédiaire du théorème 4.2, au sous-ensemble de  $\mathbf{E}(\Delta)$  pour lequel les polynômes  $A$  et  $B$  sont positifs respectivement sur  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et  $(\beta_1, \beta_2)$ .

**Étape 1.** Pour tout élément de  $\mathbf{C}(\Delta) \subset \mathbf{E}(\Delta)$ ,  $A$  est de degré 3 et admet  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  comme racines. Les conditions  $A'(\alpha_1) > 0$  et  $A'(\alpha_2) < 0$  assurent que  $A$  est positif sur  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . Pour des raisons similaires,  $B$  est positif sur  $(\beta_1, \beta_2)$ . On a donc  $\mathbf{C}(\Delta) \subset \mathbf{E}^+(\Delta)$ .

En utilisant les lemmes 3.16 et 3.31, il est clair que les ensembles  $\mathbf{C}(\Delta)$  et  $\mathbf{E}(\Delta)$  sont définis par des équations linéaires en les variables  $r_1, r_2, r_3$  et  $r_4$ . Nous savions déjà, grâce au lemme 4.3, que  $\mathbf{E}(\Delta)$  est de dimension 3. De la même manière, l'ensemble  $\mathbf{C}(\Delta)$ , constitué des normales pour lesquelles  $\zeta_{(\Delta, u)}$  est constante, est défini par

$$\mathbf{C}(\Delta) = \left\{ r \in \mathbf{N}(\Delta) \mid \begin{array}{l} (3.12) \text{ et } (3.13) \text{ sont satisfaites, si } \Delta \text{ est générique} \\ (3.36) \text{ et } (3.37) \text{ sont satisfaites, si } \Delta \text{ est un trapèze} \end{array} \right\}.$$

On définit le cône correspondant aux solutions (formellement) faiblement Bochner-plates

$$\mathbf{W}(\Delta) = \left\{ r \in \mathbf{N}(\Delta) \mid \begin{array}{l} (3.12) \text{ et } (3.14) \text{ sont satisfaites, si } \Delta \text{ est générique} \\ (3.36) \text{ et } (3.38) \text{ sont satisfaites, si } \Delta \text{ est un trapèze} \end{array} \right\}.$$

Ainsi  $\mathbf{K}(\Delta) = \mathbf{W}(\Delta) \cap \mathbf{C}(\Delta)$  et nous déduisons du lemme 4.4 que  $\mathbf{E}(\Delta)$ ,  $\mathbf{C}(\Delta)$ ,  $\mathbf{W}(\Delta)$  et  $\mathbf{K}(\Delta)$  sont des sous-cônes de  $\mathbf{N}(\Delta)$  de codimensions respectives 1, 2, 2 et 3.

**Remarque 4.8.** *Via les lemmes 3.16 et 3.31, pour tout  $u \in \mathbf{W}(\Delta) \cap \mathbf{E}^+(\Delta)$ , la solution correspondante  $\phi_{A,B} \in \mathcal{S}(\Delta, u)$  du problème 1 correspond à une métrique faiblement Bochner-plate. Puisque  $\mathbf{K}(\Delta) = \mathbf{W}(\Delta) \cap \mathbf{C}(\Delta)$  est un sous ensemble non vide de  $\mathbf{E}^+(\Delta)$ , qui est lui-même un ouvert de  $\mathbf{E}(\Delta)$ , on a que  $\mathbf{W}(\Delta) \cap \mathbf{E}^+(\Delta)$  est un ouvert non vide dans  $\mathbf{W}(\Delta)$ .*

Comme  $\mathbf{E}^+(\Delta)$  est un ouvert de  $\mathbf{E}(\Delta)$  par définition, il nous reste à démontrer qu'il en est un sous-espace propre. Rappelons, voir les démonstrations des lemmes 3.16 et 3.31, que  $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)Q_A(x)$  et  $B(y) = (y - \beta_1)(y - \beta_2)Q_B(y)$  où  $Q_A(x) = A_0x^2 + R_1x + R_2$  et où le degré de  $Q_B$  dépend de ce que  $\Delta$  est générique (ou non). Le polynôme  $A$  (resp.  $B$ ) est positif sur  $(\alpha_1, \alpha_2)$  (resp.  $(\beta_1, \beta_2)$ ) si et seulement si  $Q_A$  (resp.  $Q_B$ ) est négatif sur cet intervalle. La condition au bord implique que  $Q_A$  (resp.  $Q_B$ ) est négatif aux extrémités de l'intervalle  $(\alpha_1, \alpha_2)$  (resp.  $(\beta_1, \beta_2)$ ). En particulier, si  $A_0 > 0$  alors  $A$  est positif sur  $(\alpha_1, \alpha_2)$ .

**Étape 2.** Si  $\Delta$  est générique,  $Q_B(y) = -A_0y^2 + S_1y + S_2$ . Le fait que  $\mathbf{E}^+(\Delta)$  soit non vide découle alors de l'existence d'un élément  $r \in \mathbf{E}(\Delta)$  pour lequel  $A_0 > 0$  et  $Q_B$  a des racines complexes non réelles. En effet,  $A_0 > 0$  implique  $A > 0$  sur  $(\alpha_1, \alpha_2)$  comme précédemment, et puisque  $Q_B$  n'a pas de racine réelle et qu'il est négatif en  $\beta_1$ , il est partout négatif. Un tel  $r$  appartient à l'ouvert de  $\mathbf{E}(\Delta)$  (inclus dans  $\mathbf{E}^+(\Delta)$ ) défini par  $A_0 > 0$  et  $S_1^2 + 4S_2A_0 < 0$ . Maintenant, le fait que  $\mathbf{E}^+(\Delta)$  est propre dans  $\mathbf{E}(\Delta)$  découle de l'existence d'un  $r \in \mathbf{E}(\Delta)$  pour lequel  $A_0 > 0$  et  $Q_B$  admet une racine double dans  $(\beta_1, \beta_2)$ . Nous montrons à présent que de tels  $r$  existent.

Supposons (sans perte de généralité, voir le corollaire 3.9) que  $\Delta$  soit un quadrilatère orthotrique de paire caractéristique  $(\alpha, \beta)$ , où  $0 < \beta < 1 < \alpha$  et  $\alpha - \beta \geq 1$ . Nous utilisons la notation de la preuve du lemme 4.3. Soit  $r = (r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}_{>0}^4$ . Posons  $a = \frac{r_2 - r_1}{(\alpha - 1)^2}$  et  $b = \frac{r_4 - r_3}{\beta^2}$ .  $r \in \mathbf{E}(\Delta)$  si et seulement si

$$\frac{r_1}{(\alpha - 1)^2}(D_1 - D_2) = -\frac{r_3}{\beta^2}(D_4 - D_3) + aD_2 - bD_4. \quad (4.14)$$

On rappelle, voir le lemme 4.3, que  $D_1 > D_4 > D_3 > D_2 > 0$ . Maintenant,  $r \in \mathbf{E}^+(\Delta)$  et

$A_0 > 0$  si et seulement si, en supposant (4.14), les conditions suivantes sont satisfaites :

$$a > -\frac{r_1}{(\alpha-1)^2}, \quad \frac{r_3}{\beta^2} > \max\{0, -b\} \quad \text{et} \quad \frac{r_3}{\beta^2}(D_4 - D_3) < aD_2 - bD_4, \quad (4.15)$$

$$a > b. \quad (4.16)$$

De plus,  $Q_B$  a des racines complexes conjuguées si et seulement si  $S_1^2 + 4A_0S_2 \leq 0$ , c'est-à-dire, si et seulement si

$$\frac{r_3}{\beta^2} \geq \frac{b^2(\alpha+1-\beta)}{2(a-b)\beta} + \frac{(a-b)\beta}{8(\alpha+1-\beta)} - b, \quad (4.17)$$

avec égalité si et seulement si  $Q_B$  admet une racine double (réelle)  $\lambda = \frac{S_1}{2A_0}$ .

**Lemme 4.9.** *Pour tout  $b < 0$ , il existe  $a_0 > 0$  tel que pour tout  $a > a_0$*

$$\frac{1}{D_4 - D_3} (aD_2 - bD_4) > \frac{b^2(\alpha+1-\beta)}{2(a-b)\beta} + \frac{(a-b)\beta}{8(\alpha+1-\beta)} - b. \quad (4.18)$$

Ce lemme conclut l'étape 2 puisque pour de tels  $a$  et  $b$ ,  $a > 0 > b$  – et donc (4.16) est satisfaite – et l'inégalité (4.18) nous permet de choisir  $r_3$  tel que

$$\frac{r_3}{\beta^2} < \frac{1}{D_4 - D_3} (aD_2 - bD_4), \quad (4.19)$$

$$\frac{r_3}{\beta^2} \geq \frac{b^2(\alpha+1-\beta)}{2(a-b)\beta} + \frac{(a-b)\beta}{8(\alpha+1-\beta)} - b. \quad (4.20)$$

(4.20) implique que  $\frac{r_3}{\beta^2} > -b$  tandis que (4.19), combinée avec (4.14), implique que  $r_1 > 0$ , et la condition (4.15) est donc satisfaite. Choisir  $r_3$  de sorte que l'inégalité (4.20) soit stricte implique que l'inégalité (4.17) est stricte ( $Q_B$  n'a pas de racine réelle) tandis que choisir  $r_3$  tel que (4.20) soit une égalité implique que  $Q_B$  a une racine double  $\lambda$ . Cette racine appartient à  $(0, \beta)$  si et seulement si  $S_1 \in (0, 2A_0\beta)$  ce qui implique (du fait de (3.20)) que  $-A_0\beta < 2b < A_0\beta$ . Le polynôme  $Q_B$  admet donc une racine double dans  $(0, \beta)$  si et seulement si

$$-\frac{\beta(a-b)}{2(\alpha+1-\beta)} < 2b < \frac{\beta(a-b)}{2(\alpha+1-\beta)} \quad (4.21)$$

ce qui est vérifié dès que  $a$  est assez grand. Il ne nous reste plus qu'à démontrer le lemme 4.9.

**Remarque 4.10.** *Il est facile de voir qu'une fois donné  $r \in \mathbf{E}(\Delta) \setminus \mathbf{E}^+(\Delta)$  tel que  $A_0 > 0$  et  $Q_B$  a une racine double, il existe une famille à 3 paramètres de telles solutions.*

*Démonstration du lemme 4.9.* On procède au calcul suivant :

$$\frac{1}{D_4 - D_3} (aD_2 - bD_4) = \frac{(a-b)[(\alpha-\beta)^2 + 3 + 2\alpha - 4\beta] + 2b(1-\beta-\alpha)}{2\beta(\alpha+1-\beta)}.$$

On peut supposer que  $a > b$  de sorte que l'inégalité (4.18) est vérifiée si et seulement si

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{4(\alpha-\beta)^2 + 8\alpha + 12 - 16\beta - \beta^2}{8\beta(\alpha+1-\beta)} \right] (a-b)^2 \\ & + \left[ \frac{2b(1-\beta-\alpha)}{2\beta(\alpha+1-\beta)} + b \right] (a-b) - \frac{b^2(\alpha+1-\beta)}{2\beta} > 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

En fixant  $b < 0$ , le terme de gauche de cette inégalité est un polynôme en  $(a-b)$ ,  $P(a-b)$ , de degré 2 et dont le coefficient dominant

$$\frac{4(\alpha-\beta)^2 + 8\alpha + 12 - 16\beta - \beta^2}{8\beta(\alpha+1-\beta)}$$

est positif.  $P$  est donc une fonction convexe et il existe une valeur  $a_0$  assez grande telle que  $P(a-b)$  est positif pour tout  $a > a_0$ .  $\square$

**Étape 3.** Si  $\Delta$  est un trapèze  $Q_B(y) = -\kappa = -2r_3$  et  $\mathbf{E}(\Delta) = \{r \in \mathbb{R}_{>0}^4 \mid r_3 = r_4\}$ .

En utilisant les formules du lemme 3.31, nous pouvons exprimer  $A_0$  en termes des variables  $r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$  et des paramètres de Calabi  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  et  $\beta_2$ . En particulier, pour tous nombres  $r_3 = r_4 > 0$ , il existe  $r_1$  et  $r_2 > 0$  tels que  $(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbf{E}(\Delta)$  et  $A_0 > 0$ . Pour un tel  $r$ ,  $A$  est donc positif sur  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . Nous pouvons en déduire que  $\mathbf{E}^+(\Delta)$  n'est pas vide.

Il nous reste à exhiber un point de  $\mathbf{E}(\Delta) \setminus \mathbf{E}^+(\Delta)$ . Posons  $a = r_1 - r_2$ . Remarquons que  $Q_A$  admet une racine dans  $(\alpha_1, \alpha_2)$  dès qu'il a des racines réelles et que la racine de  $Q'_A$  appartient à  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , c'est-à-dire, si et seulement si

$$R_1^2 - 4A_0R_2 > 0, \quad (4.23)$$

$$2|a| < -A_0(\alpha_2 - \alpha_1)^3. \quad (4.24)$$

Par définition de  $R_1$  et  $R_2$ , voir (3.41),

$$(R_1^2 - 4A_0R_2)(\alpha_2 - \alpha_1)^4 = (2a + A_0(\alpha_2 - \alpha_1)^3)^2 + 8A_0(\alpha_2 - \alpha_1)^3r_2. \quad (4.25)$$

Fixons  $A_0 < 0$ , et choisissons  $a \in (0, -\frac{A_0}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)^3)$  et  $r_2 \in (0, \frac{(2a + A_0(\alpha_2 - \alpha_1)^3)^2}{-8A_0(\alpha_2 - \alpha_1)^3})$ . Via la troisième égalité de (3.41),  $r_2$  et  $r_1 = a + r_2$  déterminent  $\kappa$  et donc  $r_3$  et  $r_4$ . Pour le point  $r = (r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbf{E}(\Delta)$ ,  $A$  a une racine appartenant à l'intervalle  $(\alpha_1, \alpha_2)$ .



## Chapitre V

### FAMILLE DE REEB DE POLYTOPE ÉTIQUETÉ ET L'INVARIANT DE FUTAKI TRANSVERSE

#### 5.1 Famille de Reeb d'un polytope étiqueté

##### 5.1.1 Cône canonique au dessus d'un polytope étiqueté

Un cône étiqueté  $(C, L)$  d'un espace vectoriel  $V$  est un cône polyédral  $C \subset V$  ayant  $d$  facettes et un ensemble de  $d$  vecteurs  $L = \{L_1, \dots, L_d\} \subset V^*$  tel que  $C = \{y \mid \langle y, L_i \rangle \geq 0 \ i = 1, \dots, d\}$ . Un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  est caractéristique à  $(C, L)$  en  $b \in C_+^*$  si  $\Delta = C \cap \{y \mid \langle y, b \rangle = 1\}$  et  $u_i = [L_i] \in V^*/\mathbb{R}b$ .

**Remarque 5.1.** Les cas de cônes étiquetés qui vont nous intéresser sont ceux pour lesquels  $L$  est inclus dans un réseau  $\Lambda \subset V^*$  tel que  $(C, \Lambda)$  est bon puisque ceux-ci correspondent à une variété de contact. Nous introduisons la notion de cônes étiquetés dans le seul but de systématiser notre étude, sans avoir à se soucier d'un éventuel sens géométrique.

**Convention 5.2.** À partir de maintenant, on considère  $\Delta = C \cap \{y \mid \langle y, b \rangle = 1\}$  plutôt que  $\Delta = C \cap \{y \mid \langle y, b \rangle = 1/2\}$ . Cette convention facilite les calculs des prochaines sections. Géométriquement, elle correspond à normaliser le champ de Liouville pour que la forme symplectique de la symplectisation soit homogène de degré 1 et non 2.

**Définition 5.3.** Une famille de Reeb est l'ensemble des classes d'équivalence de polytopes étiquetés caractéristiques à un cône étiqueté donné.

Soit  $(\Delta, u)$  un polytope étiqueté avec  $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$  et  $u = \{u_1, \dots, u_d\} \subset \mathfrak{t}$ . On désigne les facettes

de  $\Delta$  par  $F_1, \dots, F_d$  tel que  $u_i$  soit normal à la facette  $F_i$ . Les fonctions définissantes de  $(\Delta, u)$  sont les fonctions affines

$$L_i = \langle \cdot, u_i \rangle + \lambda_i \in \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$$

telles que  $\Delta = \{x \in \mathfrak{t}^* \mid L_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, d\}$ ,  $F_i = \{x \in \mathfrak{t}^* \mid L_i(x) = 0\}$  et  $u_i = dL_i$  via l'identification  $T_\mu^* \mathfrak{t}^* \simeq \mathfrak{t}$ . Ces fonctions déterminent un cône

$$\mathcal{C}(\Delta) = \{y \in \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})^* \mid \langle y, L_i \rangle \geq 0 \ i = 1, \dots, d\}$$

et son dual  $\mathcal{C}^*(\Delta) = \{L \in \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R}) \mid \langle y, L \rangle \geq 0 \ \forall y \in \mathcal{C}(\Delta)\}$ . En tradant le polytope  $\Delta + \mu$  on produit une translation des fonctions définissantes  $L_i^\mu = L_i - \langle \mu, u_i \rangle$ , translation qui correspond à une application linéaire entre les cônes  $\mathcal{C}(\Delta)$  et  $\mathcal{C}(\Delta + \mu)$ . Plus généralement,

**Lemme 5.4.** *Si  $(\Delta, u)$  et  $(\Delta', u')$  sont équivalents par une transformation affine  $A$ , alors  $(\mathcal{C}(\Delta'), L')$  et  $(\mathcal{C}(\Delta), L)$  le sont également via l'adjointe du tiré en arrière de  $A$ .*

**Proposition 5.5.** *Un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  est caractéristique à un bon cône si et seulement si les fonctions définissantes  $L_1, \dots, L_d$  de  $(\Delta, u)$  sont primitives dans un réseau de  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$  pour lequel le cône  $\mathcal{C}(\Delta)$  est bon.*

Ceci découle du lemme suivant où  $\mathbf{1} \in \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$  dénote la fonction constante égal à 1.

**Lemme 5.6.** *Soit  $(\Delta, u)$  un polytope étiqueté avec fonctions définissantes  $L_1, \dots, L_d$ . Le cône polyédral  $\mathcal{C}(\Delta)$  est non vide et strictement convexe. De plus,  $(\Delta, u)$  est caractéristique en  $\mathbf{1} \in \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$  à  $(\mathcal{C}(\Delta), \{L_1, \dots, L_d\})$ , qui est à équivalences linéaires près, le seul cône étiqueté auquel  $(\Delta, u)$  est caractéristique.*

*Démonstration.* Considérons l'application d'évaluation  $e: \mathfrak{t}^* \hookrightarrow \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})^*$ , c'est-à-dire l'application linéaire définie pour  $\mu \in \mathfrak{t}^*$  par  $e_\mu: L \rightarrow L(\mu)$ . Comme  $\text{im } e = \{y \mid \langle y, \mathbf{1} \rangle = 1\}$ ,  $e(\Delta) = \text{im } e \cap \mathcal{C}(\Delta, u)$ . Pour tout  $y \in \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})^*$ , il existe un unique  $\mu \in \mathfrak{t}^*$  et un unique  $r = \langle y, \mathbf{1} \rangle \in \mathbb{R}$  tels que  $y = e_\mu - e_0 + r e_0$ . Ceci fournit une identification  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})^* \simeq \mathfrak{t}^* \times \mathbb{R}$  et

$$\mathcal{C}(\Delta) \setminus \{0\} = \{e_{r\mu} - e_0 + r e_0 \mid \mu \in \Delta, r > 0\} \simeq \Delta \times \mathbb{R}_{>0}. \quad (5.1)$$

En utilisant à nouveau l'identification  $T_\mu^* \mathfrak{t}^* \simeq \mathfrak{t}$ , la différentielle est une application définie sur  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$ , à valeurs dans  $\mathfrak{t}$  qui correspond aussi au passage au quotient par le sous-espace linéaire des fonctions constantes. Ainsi  $dL_i = [L_i] = u_i \in \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})/\mathbb{R}\mathbf{1}$ . L'unicité est immédiate.  $\square$

### 5.1.2 À propos des conditions de rationalité

Étant donné un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  avec fonctions définissantes  $L_1, \dots, L_d$ , considérons les applications  $\pi_L: \mathbb{R}^d \rightarrow \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$  et  $\pi_u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{t}$  définies par les formules

$$\pi_L(x) = \sum_{i=1}^d x_i L_i \quad \text{et} \quad \pi_u(x) = \sum_{i=1}^d x_i u_i. \quad (5.2)$$

**Lemme 5.7.** *Les fonctions affines  $L_1, \dots, L_d$  sont incluses dans un réseau de  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$  si et seulement si  $\text{rang}(\ker \pi_L \cap \mathbb{Z}^d) = d - (n + 1)$ .*

**Lemme 5.8.** *Si un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  est rationnel alors ses fonctions définissantes  $L_1, \dots, L_d$  sont incluses dans un réseau de  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$  si et seulement si  $(\Delta, u)$  est fortement rationnel ce qui se produit si et seulement si  $\mathbb{R}\mathbf{1} \cap \hat{\Lambda} \neq \{0\}$ .*

Pour un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  avec  $N$  sommets  $\nu_1, \dots, \nu_N$ , on peut définir  $N$  réseaux de  $\mathfrak{t}$ :

$$\Lambda_i := \langle u_l \mid \nu_i \in F_l \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

De façon analogue, on peut définir  $N$  sous-groupes de  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$  comme

$$\hat{\Lambda}_i = \langle L_l \mid \nu_i \in F_l \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Ce sont des groupes libres de rang  $n$ . Avec l'aide de ces réseaux, on peut reformuler les conditions de rationalité des polytopes et des cônes étiquetés.

**Lemme 5.9.** *Un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  est rationnel si et seulement si les réseaux  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N \subset \mathfrak{t}$  sont tous inclus dans un seul réseau  $\Lambda \subset \mathfrak{t}$ ; et  $(\Delta, u)$  satisfait la condition de Delzant si et seulement si  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \dots = \Lambda_N$ . De plus, en supposant que  $\hat{\Lambda} = \langle L_1, \dots, L_d \rangle_{\mathbb{Z}}$  est un réseau dans  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$ , alors  $(C(\Delta), \hat{\Lambda})$  est bon si et seulement si les groupes*

$$\hat{\Lambda} / \hat{\Lambda}_1, \dots, \hat{\Lambda} / \hat{\Lambda}_N$$

*sont libres.*

*Démonstration.* Les deux premières affirmations sont évidentes à partir des définitions. Concernant la dernière, remarquons d'abord que la condition d'être bon est "locale" puisqu'elle ne doit être vérifiée que pour les arêtes du cône. Soit  $E_1, \dots, E_N$  les arêtes de  $\mathcal{C}(\Delta)$  et  $\nu_1, \dots, \nu_N$  les sommets correspondants (i.e  $E_i \cap e(\Delta) = e_{\nu_i}$ ). Définissons les espaces vectoriels  $V_i = \langle L_i \mid \nu_i \in F_i \rangle_{\mathbb{R}}$ . Par définition,  $(\mathcal{C}(\Delta, u), \hat{\Lambda})$  est bon si et seulement si  $\hat{\Lambda}_i = V_i \cap \hat{\Lambda}$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ . Dans tous les cas,  $\hat{\Lambda}_i \subset V_i \cap \hat{\Lambda}$ . On peut donc dire que  $(\mathcal{C}(\Delta, u), \hat{\Lambda})$  n'est pas bon si et seulement si  $V_i \cap \hat{\Lambda} / \hat{\Lambda}_i$  est non trivial. De plus,  $V_i \cap \hat{\Lambda}$  et  $\hat{\Lambda}_i$  sont des réseaux dans  $V_i$ . Alors,  $V_i \cap \hat{\Lambda} / \hat{\Lambda}_i$  est un groupe fini qui est donc soit non trivial soit libre. En utilisant une base adéquate on peut construire un isomorphisme entre  $\hat{\Lambda} / \hat{\Lambda}_i$  et

$$(V_i \cap \hat{\Lambda}) / \hat{\Lambda}_i \times \hat{\Lambda} / (V_i \cap \hat{\Lambda}).$$

Le terme de droite est libre et donc  $V_i \cap \hat{\Lambda} / \hat{\Lambda}_i$  est trivial si et seulement si  $\hat{\Lambda} / \hat{\Lambda}_i$  est libre.  $\square$

### 5.1.3 Une paramétrisation de la famille de Reeb d'un polytope étiqueté

Soit un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  avec fonctions définissantes  $L_1, \dots, L_d$ . L'intérieur de  $\mathcal{C}^*(\Delta)$ , noté  $\mathcal{C}_+^*(\Delta)$ , est l'ensemble des fonctions  $b \in \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$  strictement positives sur  $\mathcal{C}(\Delta) \setminus \{0\}$ . Par le lemme 5.6,  $\mathcal{C}_+^*(\Delta)$  est un ouvert non vide alors que  $\mathcal{C}(\Delta)$  est fermé dans  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})^*$ . En utilisant (5.1), il vient

$$\mathcal{C}_+^*(\Delta) = \{b \in \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R}) \mid \langle b, \mu \rangle > 0 \forall \mu \in \Delta\}.$$

De plus, le lemme 5.6 implique que si  $(\Delta, u)$  et  $(\Delta', u')$  appartiennent à la même famille de Reeb, alors il existe un unique vecteur  $b \in \mathcal{C}_+^*(\Delta)$  tel que  $(\Delta', u')$  est caractéristique à  $(\mathcal{C}(\Delta), \{L_1, \dots, L_d\})$  en  $b$ . En particulier, le cône  $\mathcal{C}_+^*(\Delta)$  fournit une paramétrisation effective de la famille de Reeb de  $(\Delta, u)$ . L'hyperplan affine

$$\mathfrak{t}_b^* = \{y \in \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})^* \mid \langle y, b \rangle = 1\}$$

est identifié avec l'annulateur de  $b$  dans  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})^*$  via une translation et son dual est l'espace vectoriel  $\mathfrak{t}_b = \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R}) / \mathbb{R}b$ .

**Notation 5.10.** Une base,  $(v_1, \dots, v_n)$ , de  $\mathfrak{t}$  fournit non seulement des coordonnées  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  sur  $\mathfrak{t}^*$  via  $\mu_i = \langle \mu, v_i \rangle$  mais aussi une base de  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$ , c'est-à-dire

$$(\mathbf{1}, \langle \cdot, v_1 \rangle, \dots, \langle \cdot, v_n \rangle) \quad (5.3)$$

qui, en retour, donne des coordonnées  $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$  sur  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})^*$  où  $y_0 = \langle y, \mathbf{1} \rangle$  et  $y_i = \langle y, v_i \rangle$ .

**Proposition 5.11.** La famille de Reeb de  $(\Delta, u)$  est paramétrisée par

$$\{(\Delta_b, u_b) = (\Psi_b(\Delta), \{[L_1]_b, \dots, [L_d]_b\}) \mid b \in \mathcal{C}_+(\Delta)\}$$

où  $[L_i]_b$  est la classe d'équivalence de  $L_i$  dans  $\mathfrak{t}_b$  et l'application  $\Psi_b: \Delta \rightarrow \mathfrak{t}_b^*$  est définie par  $\Psi_b(\mu) = \frac{e_\mu}{b(\mu)}$ .

*Démonstration.* En utilisant (5.1), on voit que

$$\mathfrak{t}_b^* \cap \mathcal{C}(\Delta) = \left\{ e_{\frac{\mu}{b(\mu)}} - e_0 + \frac{e_0}{b(\mu)} = \frac{e_\mu}{b(\mu)} \mid \mu \in \Delta \right\}. \quad (5.4)$$

L'application  $\Psi_b(\mu) = \frac{e_\mu}{b(\mu)}$  est bien définie et injective sur n'importe quel ensemble où  $b$  est positif. En particulier, il existe des ouverts contenant  $\Delta$  sur lesquels  $\Psi_b$  est injective. Nous allons maintenant montrer que  $\Psi_b$  est une immersion.

Dans le système de coordonnées (5.10), nous avons  $e_\mu = (1, \mu_1, \dots, \mu_n)$  et donc

$$\Psi_b(\mu) = \frac{1}{b(\mu)}(1, \mu_1, \dots, \mu_n).$$

En dénotant,  $b = b(0)\mathbf{1} + \sum_{i=1}^n b_i v_i$ , la différentielle de  $\Psi_b$  en  $\mu \in \Delta$  est

$$d_\mu \Psi_b = \frac{1}{b(\mu)^2} \left( -\frac{\partial}{\partial y_0} \otimes db + \sum_{i,j=1}^n \left( b(\mu) \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes d\mu_i - b_j \mu_i \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes d\mu_j \right) \right) \quad (5.5)$$

où  $db$  est identifié avec un élément de  $\mathfrak{t}$  et donc avec une fonction linéaire dans  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$ . Pour un vecteur donné  $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial \mu_i} \in T_\mu \Delta$ , on calcule que  $d_\mu \Psi_b(X) = 0$  si et seulement si  $b(\mu)X = 0$ . Ainsi,  $\Psi_b$  est une immersion.  $\square$

## 5.2 L'invariant de Futaki transverse

Dans le cas de la géométrie sasakiennne, nous nous sommes intéressés aux métriques sasakiennes à courbure scalaire constante. En utilisant le formalisme développé au chapitre 2, le problème d'existence et d'unicité de telles métriques se formule comme suit :

**Problème 2.** *Étant donné un cône strictement convexe  $\mathcal{C}$ , existe-t-il un vecteur  $b \in C_0^*$  tel que*

(1)  $\zeta_{(\Delta_b, u_b)}$  est constante et

(2) il existe  $\phi \in \mathcal{S}(\Delta_b, u_b)$ , tel que  $S(\phi) = \zeta_{(\Delta_b, u_b)}$  ?

*Si oui, est-ce que ce vecteur  $b$  est unique à renormalisation près ?*

Dans cette section, nous dégageons une fonctionnelle  $F: C_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  qui détecte les solutions du point (1) du problème 2 et nous prouvons le théorème suivant, énoncé dans l'introduction.

**Théorème 5.12** (Théorème 0.5). *La fonctionnelle  $F$  est homogène sur le cône  $C_+^*$  et ses points critiques, qui forment un ensemble non vide, correspondent aux vecteurs  $b$  tels que  $\zeta_{(\Delta_b, u_b)}$  est constante. De plus, si on fixe  $\Delta$ , un polytope caractéristique à  $\mathcal{C}$ , alors  $F(b)$  est une fonction rationnelle en les valeurs de  $b$  sur les sommets de  $\Delta$ .*

**Définition 5.13.** *Soit  $\mathcal{C}$  un cône strictement convexe et  $d\varpi$  une forme volume euclidienne. Pour  $b \in C_+^*$ , la forme volume sasakiennne, noté  $d\varpi_b$  est la forme volume euclidienne sur  $\mathfrak{t}_b^* = \{y \mid \langle y, b \rangle = 1\}$  définie par l'égalité  $b \wedge d\varpi_b = d\varpi$ .*

La donnée d'une forme volume euclidienne sur un espace affine ne fournit pas de façon canonique une forme volume sur les hyperplans affines de cet espace mais bien deux rayons de formes volumes. Cependant, dans notre cas, les hyperplans qui nous intéressent  $\mathfrak{t}_b^* \subset \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})^*$  viennent avec la donnée d'un vecteur normal  $b$  menant à la définition de la forme volume sasakiennne. Cette terminologie est justifiée par le lemme suivant

**Lemme 5.14.** *Étant donné une variété de contact (co-orientée, compacte) torique  $(N, \mathcal{D}, T)$  de type Reeb dont le cône moment est  $\mathcal{C}$  et une forme de contact  $T$ -invariante  $\eta_b$  associée au champ de Reeb  $X_b$  induit par  $b \in C_+^*$ . On a*

$$\int_N \eta_b \wedge (d\eta_b)^n = 2^n (2\pi)^{n+1} \int_{\Delta_b} d\varpi_b$$

où  $d\varpi_b$  est la forme volume sasakiennne.

*Démonstration.* Prenons des coordonnées action-angle  $(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_{n+1}, t_1, \dots, t_{n+1})$ , en utilisant le lemme 2.35 on a  $\eta_b = g(X_b, \cdot) = 2 \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i dt_i$  et donc

$$\int_N \eta_b \wedge (d\eta_b)^n = (4\pi)^{n+1} \int_{\Delta_b} \iota_X d\varpi$$

où  $d\varpi = d\hat{\mu}_1 \wedge \dots \wedge d\hat{\mu}_{n+1}$  et  $X = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\mu}_i \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}_i}$ . On calcule que  $b \wedge \iota_X d\varpi = \langle b, \hat{\mu} \rangle d\varpi$ .  $\square$

Pour le reste de cette section on utilise le formalisme développé à la section 5.1. On considère un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  où  $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$  a  $d$  facettes et  $u = \{u_1, \dots, u_d\} \subset \mathfrak{t}$ . On note  $L = \{L_1, \dots, L_d\}$  l'ensemble des fonctions définissantes de  $(\Delta, u)$  et  $(C(\Delta), L)$  le cône étiqueté au-dessus de  $(\Delta, u)$ . Pour  $b \in C_+^*(\Delta)$ , on pose  $\mathfrak{t}_b^* = \{y \mid \langle y, b \rangle = 1\} \subset \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})^*$ . On définit  $d\sigma_b$  comme la forme volume (lisse par morceau) sur  $\partial\Delta_b$  déterminée par l'égalité  $L_l \wedge d\sigma_b = -d\varpi_b$  sur la facette  $F_{b,l} = \Delta_b \cap L_l^o$  où  $L_l^o$  dénote l'annulateur de  $L_l$  dans  $\text{Aff}(\mathfrak{t}_b^*, \mathbb{R})^*$  et  $d\varpi_b$  est la forme volume sasakienne.

**Notation 5.15.** Pour  $b \in C_+^*(\Delta)$ , posons  $\zeta(b) = \zeta_{(\Delta_b, u_b)}$  où  $(\Delta_b, u_b)$  est le polytope étiqueté de la famille de Reeb de  $(\Delta, u)$  donné par  $b$  par l'intermédiaire de la paramétrisation décrite par la proposition 5.11. Prenons un système de coordonnées  $\zeta(b) = \zeta_0(b) + \sum_{i=1}^n \zeta_i(b) \mu_i \in \text{Aff}(\mathfrak{t}_b^*, \mathbb{R})$  où  $(\zeta_0(b), \zeta_1(b), \dots, \zeta_n(b)) \in \mathbb{R}^{n+1}$  est la solution du système linéaire (2.19) impliquant les fonctions

$$W_{ij}(b) = W_{ij}(\Delta_b) \quad \text{et} \quad Z_i(b) = Z_i(\Delta_b, u_b)$$

définies en utilisant les formes  $d\varpi_b$  et  $d\sigma_b$  définies ci-dessus.

**Lemme 5.16.** Pour  $i, j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} W_{00}(b) &= \int_{\Delta} \frac{1}{b(\mu)^{n+1}} d\varpi, & W_{ij}(b) &= \int_{\Delta} \frac{\mu_i \mu_j}{b(\mu)^{n+3}} d\varpi, \\ W_{i0}(b) &= W_{0i}(b) = \int_{\Delta} \frac{\mu_i}{b(\mu)^{n+2}} d\varpi \\ \text{et} \quad Z_0(b) &= 2 \int_{\partial\Delta} \frac{1}{b(\mu)^n} d\sigma, & Z_i(b) &= 2 \int_{\partial\Delta} \frac{\mu_i}{b(\mu)^{n+1}} d\sigma. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous utilisons ici les systèmes de coordonnées sur  $\mathfrak{t}^*$  et  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$  introduits en notation 5.10. Choisissons  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta$  et dénotons

$$d\varpi_b = \frac{1}{b(p)} \left( dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} p_i dy_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \dots \wedge dy_n \right).$$

Il vient donc  $b \wedge d\varpi_b = dy_0 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ , puisque  $b = b(0)dy_0 + \sum_{i=1}^n b_i dy_i$  lorsqu'il est vu comme un élément de  $T_y^* \text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})^*$ . En posant  $\alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k$  avec  $\alpha_k = (-1)^{k+1} p_k dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_k} \wedge \cdots \wedge dy_n$ , nous obtenons

$$d\varpi_b = \frac{1}{b(p)} (dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n + dy_0 \wedge \alpha).$$

D'un autre côté, posons  $A_\mu = \sum_{i,j=1}^n (b(\mu) \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes d\mu_j - b_i \mu_j \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes d\mu_j)$ . Au vu de l'expression de  $d_\mu \Psi_b$  (5.5),  $A_\mu = b(\mu)^2 d_\mu \Psi_b + \frac{\partial}{\partial y_0} \otimes db$ . De plus,  $A_\mu$  est un morphisme entre  $T_\mu \Delta$  et le noyau de  $dy_0$  dans l'espace tangent de  $\text{Aff}(\mathfrak{t}_b^*, \mathbb{R})^*$  et l'on peut démontrer que <sup>1</sup>

$$\det A_\mu = b(0)b(\mu)^{n-1} \quad \text{et} \quad db \wedge A_\mu^* \alpha_k = -b_k p_k b(\mu)^{n-1} d\mu_1 \wedge \cdots \wedge d\mu_n.$$

Comme  $\alpha$  est une  $(n-2)$ -forme sur  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$  telle que  $\alpha(\frac{\partial}{\partial y_0}) = 0$ , il vient

$$(\Psi_b^* d\varpi_b)_\mu = \frac{1}{b(p)b(\mu)^{2n}} (A_\mu^* dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n - db \wedge A_\mu^* \alpha) = \frac{1}{b(\mu)^{n+1}} d\varpi$$

où  $db = \sum_{i=1}^n b_i d\mu_i$ , par l'intermédiaire de l'identification  $T_\mu^* \mathfrak{t}^* \simeq \mathfrak{t}$ . La première partie du lemme 5.16 en découle alors aisément. Finalement, remarquons que  $\Psi_b^* L_l = \frac{1}{b(\mu)} u_l$  et donc que

$$u_l \wedge (\Psi_b^* d\sigma_b)_\mu = b(\mu) \Psi_b^* (L_l \wedge d\sigma_b)_\mu = -b(\mu) (\Psi_b^* d\varpi)_\mu = -\frac{1}{b(\mu)^n} d\varpi.$$

Ceci montre que  $(\Psi_b^* d\sigma_b)_\mu = \frac{1}{b(\mu)^n} d\sigma$  pour  $\mu \in \partial\Delta$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Convention 5.17.** *À partir de maintenant, nous supposons que  $b(0) = 1$ . Ceci n'entraîne pas de perte de généralité puisque, au vu des équations définissantes (2.19), pour  $r > 0$  nous avons*

$$\zeta(rb) = r\zeta_0(b) + r^2 \sum_{i=1}^n \zeta_i(b) \mu_i.$$

Remarquons que  $\Omega = \{b \in C_+^*(\Delta) \mid b(0) = 1\}$  est relativement compact dans  $\text{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$ .

**Proposition 5.18.** *Les points critiques de la fonctionnelle  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par*

$$F(b) = \frac{Z_0(b)^{n+1}}{W_{00}(b)^n}$$

*sont les fonctions affines  $b$  pour lesquelles  $\zeta(b)$  est constante.*

1. On peut, par exemple, le démontrer par récurrence sur  $n$  en considérant  $A_\mu$  comme une matrice  $n \times n$  dépendant des deux vecteurs  $\mu \in \mathbb{R}^n$  et  $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

*Démonstration.* Remarquons que  $\zeta(b)$  est constante si et seulement si  $\zeta(b) = \zeta_0(b)$  ce qui se produit si et seulement si  $\zeta_0(b)$  est une solution du système linéaire

$$W_{i0}(b) \zeta_0(b) = Z_i(b), \quad i = 0, \dots, n. \quad (5.6)$$

Dans ce cas,  $\zeta_0(b) = \frac{Z_0(b)}{W_{00}(b)}$  avec  $b$  solution de :

$$W_{i0}(b)Z_0(b) - W_{00}(b)Z_i(b) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.7)$$

Remarquons que pour  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial}{\partial b_i} W_{00}(b) = -(n+1)W_{i0}(b) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial b_i} Z_0(b) = -nZ_i(b),$$

et que la différentielle de  $F$  en  $b \in \Omega$  s'écrit donc :

$$d_b F = \frac{-n(n+1)Z_0(b)^n}{W_{00}(b)^{n+1}} \sum_{i=1}^n (W_{i0}(b)Z_0(b) - W_{00}(b)Z_i(b)) db_i,$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

**Lemme 5.19.** Soit  $b \in \Omega$ . On a

$$W_{00}(b) = n \sum_l \int_{F_l} \frac{L_l(0)}{b^n} d\sigma.$$

*Démonstration.* Pour  $b \in \Omega$ , posons  $X = \sum_i \frac{\mu_i}{b^n} \frac{\partial}{\partial \mu_i}$  de sorte que nous ayons  $\text{div} X = \frac{n}{b^{n+1}}$ . Il vient donc

$$\frac{1}{n} W_{00}(b) = \int_{\partial \Delta} \iota_X d\varpi = - \sum_l \int_{F_l} \frac{\langle u_l, \mu \rangle}{b^n} d\sigma = \sum_l \int_{F_l} \frac{L_l(0)}{b^n} d\sigma$$

puisque  $u_l \wedge \sum_i \iota_{\frac{\partial}{\partial \mu_i}} d\varpi = \langle u_l, \mu \rangle d\varpi$ .  $\square$

Considérons l'application  $x = (x_1, \dots, x_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  dont les composantes sont les fonctions strictement convexes et strictement positives

$$x_l = x_l(b) = \int_{F_l} \frac{1}{b^n} d\sigma.$$

Avec cette notation et en posant  $\lambda_l = L_l(0)$ , les fonctionnelles  $W_{00}$ ,  $Z_0$  et  $F$  deviennent

$$W_{00}(b) = n \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i, \quad Z_0(b) = 2 \sum_{i=1}^d x_i \quad \text{et} \quad F(b) = \frac{(2 \sum x_l)^{n+1}}{(\sum n \lambda_l x_l)^n}. \quad (5.8)$$

Pour tout  $l = 1, \dots, d$ ,  $F_l$  est un polytope de dimension  $(n - 1)$  dont le volume est  $x_l$ , à un facteur multiplicatif positif – déterminé par  $u_l$  – près. Ceci suggère d'utiliser le lemme 5.19 successivement de façon à diminuer la dimension du domaine d'intégration jusqu'à exprimer  $W_{00}(b)$  en fonction des valeurs de  $b$  sur les sommets de  $\Delta$ . Remarquons que  $\int_E \frac{1}{b^2} d\sigma(E) = \frac{1}{b(p_E)b(q_E)}$ , où  $d\sigma(E)$  est la mesure de Lebesgue sur l'arête  $E$  et  $p_E$  et  $q_E$  dénotent les sommets de  $\Delta$  aux extrémités de  $E$ . Ainsi, pour toute arête il existe des constantes  $\alpha(E)$ ,  $\beta(E)$  telles que

$$W_{00}(b) = \sum_{E \in \text{arête}(\Delta)} \frac{\alpha(E)}{b(p_E)b(q_E)} \quad \text{et} \quad Z_0(b) = \sum_{E \in \text{arête}(\Delta)} \frac{\beta(E)}{b(p_E)b(q_E)}. \quad (5.9)$$

De plus,  $F$  est une fonction rationnelle en les valeurs de  $b$  sur les sommets. Plus précisément,

$$F(b) = \left( \prod_{\nu \in \text{sommet}(\Delta)} \frac{1}{b(\nu)} \right) \cdot \frac{(\sum \beta(E) \prod_{\nu \notin E} b(\nu))^{n+1}}{(\sum \alpha(E) \prod_{\nu \notin E} b(\nu))^n} \quad (5.10)$$

où les sommes sont prises sur l'ensemble des arêtes de  $\Delta$ . Ainsi, pour terminer la démonstration du théorème 0.5 il suffit de montrer le lemme suivant qui implique l'existence de points critiques de  $F$  dans  $\Omega$ .

**Lemme 5.20.**  *$F(b)$  converge vers l'infini lorsque  $b$  converge vers un point du bord  $\partial\Omega$ .*

*Démonstration.* Les formules (5.8) impliquent que  $\lambda = \max\{\lambda_l \mid l = 1, \dots, d\} > 0$  et

$$F(b) \geq \frac{(2 \sum x_l)^{n+1}}{(n\lambda \sum x_l)^n} = \frac{2^{n+1}}{(\lambda n)^n} \sum x_l = \frac{2^n}{(\lambda n)^n} Z_0(b).$$

De plus,  $\partial\Omega$  est l'ensemble des fonctions affines s'annulant sur le bord de  $\Delta$  (mais pas sur son intérieur). En particulier, ces fonctions s'annulent en certains sommets de  $\Delta$ . Comme  $Z_0(b)$  ne dépend que des valeurs de  $b$  sur les sommets, voir (5.9),  $Z_0(b)$  et donc  $F(b)$  convergent vers l'infini lorsque  $b$  converge vers un point du bord  $\partial\Omega$ .  $\square$

**Proposition 5.21.** *Soit  $(\Delta, u)$  un polytope étiqueté de dimension  $n$ , avec  $N$  sommets. L'ensemble des points critiques de  $F$  est l'ensemble algébrique (réel) des racines communes de  $n$  polynômes en  $n$  variables de degrés au plus  $2N - 3$ .*

*Démonstration.* En utilisant (5.9), on a que  $d_b F = 0$  si et seulement si pour toute fonction linéaire  $h: \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sum_E \frac{(nZ_0\alpha(E) - (n+1)W_{00}\beta(E)) (h(p_E)b(q_E) + h(q_E)b(p_E))}{b(p_E)^2 b(q_E)^2} = 0. \quad (5.11)$$



En utilisant le lemme 5.16, on calcule que pour  $b = (b_2, b_1)$ ,

$$W(b) = \int_I \frac{1}{(b_1 t + b_2)^2} dt = \frac{2}{b_2^2 - b_1^2}.$$

On peut aussi faire le calcul directement en remarquant d'abord que  $b_2 > 0$  et  $\frac{1}{b_2} dx$  se restreint en une forme volume sur  $I_b$  telle que  $b \wedge \frac{1}{b_2} dx = -dx \wedge dy$ . Puis on utilise une paramétrisation de  $I_b$  par exemple  $\gamma_t = \frac{1}{b_2 - b_1}(-1, 1) + \frac{2t}{b_2^2 - b_1^2}(b_2, -b_1)$  pour calculer l'intégrale

$$W(b) = \frac{1}{b_2} \int_0^1 dx(\gamma'_t) dt = \frac{2}{b_2^2 - b_1^2}.$$

De même, on calcule que  $Z(b) = \frac{2r_1}{b_2 - b_1} + \frac{2r_2}{b_2 + b_1}$  et donc

$$F(b) = \frac{2}{b_2^2 - b_1^2} (r_1(b_2 + b_1) + r_2(b_2 - b_1))^2.$$

Ensuite, on peut voir que  $b = (b_1, 1)$  est un point critique de  $F$  restreinte sur  $\Omega = \{b = (b_1, b_2) \in C_+^*(I) \mid b_2 = 1\}$  si et seulement si  $b_1 = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}$ .

Géométriquement, cet exemple correspond à la sphère  $S^3$  munie de la structure de contact torique fournie par l'inclusion

$$S^3 \simeq \{(z_1, z_2) \mid |z_1| + |z_2| = 1\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Plus précisément, la construction de Delzant–Lerman utilise l'application naturelle  $\pi^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^*$  définie par  $\pi^*(x_1, x_2) = x_1 L_1 + x_2 L_2$  comme morphisme entre l'algèbre de Lie de  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  et celle de  $T = \text{Aff}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \Lambda$  où  $\Lambda = \langle L_1, L_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Dans ce cas précis  $\pi^*$  est un isomorphisme et la construction de Delzant–Lerman produit  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  avec sa structure symplectique standard comme cône symplectique (Lerman, 2003). Ce cône est muni de l'action hamiltonnienne torique de  $T$  par l'intermédiaire de l'action standard de  $\mathbb{T}^2 = \pi^{-1}(T)$ .

Le vecteur critique  $b = \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}, 1\right)$  correspond au vecteur  $\pi_*^{-1}(b) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)(1, 1)$  qui induit l'action diagonale produisant la fibration de Hopf au-dessus de  $S^2$ .

## Chapitre VI

### APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

#### 6.1 Existence de métriques extrémales orthotoriques et de type Calabi sur un orbifold torique

##### 6.1.1 Un critère pour les polygones rationnels

Un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  est associé à un orbifold symplectique torique par l'intermédiaire de la correspondance de Delzant–Lerman–Tolman si et seulement si  $(\Delta, u)$  est un polytope rationnel par rapport à un réseau  $\Lambda$ . C'est ce qui justifie l'intérêt de trouver un critère pour déterminer si un polytope est de type rationnel. Rappelons que  $(\Delta, u)$  est *rationnel par rapport à un réseau*  $\Lambda$  si  $u_i \in \Lambda$  et  $\Delta$  est *de type rationnel* s'il existe un réseau  $\Lambda$  et un ensemble de normales  $u$  tels que  $(\Delta, u)$  est rationnel par rapport à  $\Lambda$ . Dans la première partie de cette section, nous donnons un critère intrinsèque pour tester la rationalité des polygones. Dans cette thèse, un *polygone* est un polytope de dimension 2. En particulier tout polygone est compact et convexe.

Soit  $\Delta$  un polytope à  $d$  facettes dans un espace affine de dimension 2,  $(\mathcal{A}, V)$ . Il existe une manière canonique de lui associer  $d$  points (pas nécessairement tous distincts) de  $\mathbb{P}(V^*)$  : les droites normales associées à ses facettes. Rappelons que le *birapport* est défini sur les ensembles ordonnés de 4 points distincts de la droite projective réelle,  $P_i = [x_i : y_i] \in \mathbb{RP}^1$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , avec  $P_i \neq P_j$  si  $i \neq j$ , par la formule

$$\mathbf{r}(P_1, P_2; P_3, P_4) = \frac{(x_1y_3 - y_1x_3)(x_2y_4 - y_2x_4)}{(x_1y_4 - y_1x_4)(x_2y_3 - y_2x_3)}.$$

Cette définition ne dépend pas des représentants choisis et est invariante sous transformations projectives. Le birapport peut également être défini pour un ensemble ordonné de 4 vecteurs distincts, non-nuls.

**Remarque 6.1.** Pour toute permutation  $\gamma \in S_4$  et 4 points distincts  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ , le nombre  $r_\gamma = r(P_{\gamma(1)}, P_{\gamma(2)}; P_{\gamma(3)}, P_{\gamma(4)})$  appartient à l'ensemble

$$\left\{ r, r^{-1}, 1 - r, (1 - r)^{-1}, \frac{r}{r-1}, \frac{r-1}{r} \right\}$$

où  $r = r_{\text{id}} = r(P_1, P_2; P_3, P_4)$ . Il vient donc que  $r_\gamma$  est rationnel si et seulement si  $r$  l'est également.

**Remarque 6.2.** L'action de  $\mathbb{P}\text{Gl}(2, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$  est simple et 3-transitive c'est-à-dire que pour tout ensemble ordonné de trois points distincts  $(P_1, P_2, P_3)$  de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ , il existe un unique  $A \in \mathbb{P}\text{Gl}(2, \mathbb{R})$  tel que  $AP_1 = [1 : 0]$ ,  $AP_2 = [0 : 1]$ ,  $AP_3 = [1 : 1]$ . Alors, pour tout  $P_4 \in \mathbb{R}\mathbb{P}^1$

$$r(P_1, P_2; P_3, P_4) = r([1 : 0], [0 : 1]; [1 : 1], AP_4) = \text{pente}(AP_4).$$

**Proposition 6.3.** Soit  $\Delta$  un polytope à  $d$  côtés d'un espace affine de dimension 2.  $\Delta$  est de type rationnel si et seulement si  $\Delta$  a

1. au plus 3 droites normales distinctes,
2. 4 droites normales distinctes de birapport rationnel,
3. plus de 4 droites normales distinctes et le birapport de (n'importe quel ensemble de) 4 d'entre elles est rationnel.

*Démonstration.* Soit  $\Delta$  un polygone convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Pour au plus 3 points de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ , il existe clairement un réseau qui intersecte non-trivialement chacun d'eux, voir la remarque 6.2. On peut donc supposer que  $\Delta$  ait au moins 4 droites normales  $\delta_1, \dots, \delta_k \in \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ .

Supposons qu'il existe un réseau  $\Lambda$  intersectant non-trivialement  $\delta_1, \dots, \delta_k$ . Il existe alors  $A \in \text{Gl}(2, \mathbb{R})$  tel que  $A(\Lambda) = \mathbb{Z}^2$ . Comme  $(A\delta_i \cap \mathbb{Z}^2) \neq \{0\}$  pour tout  $i$ , nous pouvons choisir un point de  $\mathbb{Z}^2$  non-nul de chaque droite réelle  $\delta_i$  pour calculer le birapport : pour tout quadruplet d'indices distincts  $(i, j, k, l)$ , nous obtenons

$$r(\delta_i, \delta_j; \delta_k, \delta_l) = r(A\delta_i, A\delta_j; A\delta_k, A\delta_l) \in \mathbb{Q}.$$

Réciproquement, fixons trois de ces droites normales, disons  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\delta_3$ . Du fait de la remarque 6.2, il existe un unique  $[A] \in \mathbb{P}\text{Gl}(2, \mathbb{R})$  tel que  $[A]\delta_1 = [0 : 1]$ ,  $[A]\delta_2 = [1 : 0]$  et  $[A]\delta_3 = [1 : 1]$ . Ainsi, par hypothèse et par la remarque 6.2,

$$\mathbf{r}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_i) = \text{pente}([A]\delta_i) \in \mathbb{Q},$$

pour tout entier  $i \geq 4$ . Les droites normales  $[A]\delta_1, \dots, [A]\delta_k$  intersectent donc (non-trivialement) le réseau  $\mathbb{Z}^2$ . Pour tout représentant  $A \in \text{Gl}(2, \mathbb{R})$  de  $[A]$ , le réseau  $A^{-1}\mathbb{Z}^2$  intersecte donc non-trivialement chacune des droites  $\delta_1, \dots, \delta_k$ .  $\square$

**Corollaire 6.4.** *Un quadrilatère est de type rationnel si et seulement si le birapport de ses normales est rationnel ou infini. De plus, l'ensemble des quadrilatères de type rationnel est dense dans l'ensemble de tous les quadrilatères et il contient des sous-familles connexes.*

La condition de rationalité appliquée au quadrilatère orthotorique dont le cas est étudié dans la section 3.1 se lit comme suit :

**Proposition 6.5.** *Un polytope orthotorique de paramètres  $\beta_1 < \beta_2 < \alpha_1 < \alpha_2$  est de type rationnel si et seulement si  $\mathbf{r} = \frac{(\beta_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \beta_1)}{(\beta_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}$  est rationnel.*

Pour un quadrilatère orthotorique de paire caractéristique  $(\alpha, \beta)$  sous forme normale  $\Delta_{\alpha, \beta}$  – on rappelle que  $0 < \beta < 1 < \alpha$ ,  $\alpha - \beta \geq 1$  et  $\Delta_{\alpha, \beta} = \sigma([0, \beta] \times [1, \alpha])$ , avec  $\sigma$  définie par  $\sigma(x, y) = (x + y, xy)$  – la condition d'être de type rationnel prend alors la forme

$$\mathbf{r}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha(\beta - 1)}{\beta(\alpha - 1)} \in \mathbb{Q}.$$

**Proposition 6.6.** *Un quadrilatère étiqueté orthotorique associé aux paramètres orthotoriques  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2})$  est un polytope étiqueté rationnel si et seulement si*

(1) *c'est un polytope de type rationnel :  $\mathbf{r} = \frac{(\beta_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \beta_1)}{(\beta_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \alpha_1)} \in \mathbb{Q}$ ,*

(2)  *$C_{\beta_2} > 0$  et il existe des nombres rationnels positifs  $p_{\beta_1}, p_{\alpha_2}, p_{\alpha_1}$  tels que  $p_{\beta_1}C_{\beta_1} = \frac{(\beta_2 - \alpha_1)}{(\alpha_1 - \beta_1)}C_{\beta_2}$ ,  $p_{\alpha_2}C_{\alpha_2} = -\frac{(\beta_2 - \beta_1)}{(\alpha_2 - \beta_1)}C_{\beta_2}$  et  $p_{\alpha_1}C_{\alpha_1} = \frac{(\beta_2 - \beta_1)}{(\alpha_1 - \beta_1)}C_{\beta_2}$ .*

La preuve de la proposition, repose sur le lemme (évident) suivant.

**Lemme 6.7.** *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 2. Des vecteurs  $u_0, u_1$  et  $u_2$ , deux à deux linéairement indépendants, engendrent un réseau si et seulement s'il existe des entiers tous non nuls  $n_0, n_1$  et  $n_2$  tels que  $n_0u_0 + n_1u_1 + n_2u_2 = 0$ .*

*Démonstration de la proposition 6.6.* Supposons que  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2})$  déterminent un polytope étiqueté rationnel. En appliquant successivement le lemme 6.7 aux vecteurs  $u_{C_{\alpha_1}}, u_{C_{\alpha_2}}, u_{C_{\beta_1}}$  puis  $u_{C_{\alpha_1}}, u_{C_{\beta_2}}, u_{C_{\beta_1}}$ , nous obtenons l'existence d'entiers non nuls  $n_1, n_2, n_3$  et  $k_1, k_2, k_3$ , tels que  $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2}$  vérifient les équations linéaires homogènes :

$$\begin{aligned} n_1\alpha_1C_{\alpha_1} + n_2\alpha_2C_{\alpha_2} + n_0\beta_1C_{\beta_1} &= 0 & n_1C_{\alpha_1} + n_2C_{\alpha_2} + n_0C_{\beta_1} &= 0 \\ k_1\alpha_1C_{\alpha_1} + k_2\beta_2C_{\beta_2} + k_0\beta_1C_{\beta_1} &= 0 & k_1C_{\alpha_1} + k_2C_{\beta_2} + k_0C_{\beta_1} &= 0 \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} C_{\beta_1} &= \frac{k_2(\beta_2 - \alpha_1)}{k_0(\alpha_1 - \beta_1)}C_{\beta_2}, & C_{\alpha_2} &= -\frac{n_0k_2(\beta_2 - \alpha_1)}{k_0n_2(\alpha_1 - \alpha_2)}C_{\beta_2}, & C_{\alpha_1} &= \frac{k_2(\beta_2 - \beta_1)}{k_1(\alpha_1 - \beta_1)}C_{\beta_2}, \\ \text{et } C_{\alpha_1} &= \frac{k_2n_0(\alpha_2 - \beta_1)(\beta_2 - \alpha_1)}{k_0n_1(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}C_{\beta_2} = \mathbf{r} \frac{k_2n_0(\beta_2 - \beta_1)}{k_0n_1(\alpha_1 - \beta_1)}C_{\beta_2} = \mathbf{r} \frac{k_1n_0}{k_0n_1}C_{\alpha_1}, \end{aligned}$$

dont on tire la condition sur le bi-rapport (1) (car  $\mathbf{r} = \frac{n_1k_0}{k_1n_0}$ ). L'expression des coefficients (2) s'ensuit facilement.

Réciproquement, si les conditions (1) et (2) sont satisfaites, les équations

$$p_{\beta_1}u_{C_{\beta_1}} + p_{\alpha_1}u_{C_{\alpha_1}} + u_{C_{\beta_2}} = 0 \quad \text{et} \quad p_{\beta_1}u_{C_{\beta_1}} + \mathbf{r}p_{\alpha_1}u_{C_{\alpha_1}} + \mathbf{r}p_{\alpha_2}u_{C_{\alpha_2}} = 0$$

sont à coefficients rationnels. Il vient alors que  $u_{C_{\beta_1}}, u_{C_{\alpha_1}}, u_{C_{\beta_2}}$  et  $u_{C_{\alpha_2}}$  sont tous contenus dans un réseau.  $\square$

Du fait de la proposition 6.3, nous savons que tout trapèze est de type rationnel. Cependant, les normales des trapèzes doivent satisfaire certaines conditions pour être contenues dans un réseau. Nous énonçons ces conditions dans le lemme suivant. La démonstration de ce lemme est tout à fait similaire à celle de la proposition 6.6.

**Proposition 6.8.** *Un trapèze étiqueté de type Calabi déterminé par les paramètres (de Calabi)  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2})$  est un polytope rationnel si et seulement si  $C_{\beta_2} > 0$  et s'il*

existe des nombres rationnels  $p_{\beta_1}, p_{\alpha_2}, p_{\alpha_1}$  tels que

$$-p_{\beta_1}C_{\beta_1} = C_{\beta_2}, \quad p_{\alpha_2}C_{\alpha_2} = (\beta_2 - \beta_1)C_{\beta_2} \quad \text{et} \quad -p_{\alpha_1}C_{\alpha_1} = -(\beta_2 - \beta_1)C_{\beta_2}.$$

**Lemme 6.9.** *Soit un quadrilatère  $\Delta$  dont la paire caractéristique est  $(\alpha, \beta)$ .  $\Delta$  est fortement rationnel si et seulement si  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ .*

*Démonstration.* Rappelons qu'un polytope  $\Delta$  contenu dans un espace vectoriel  $V$  est fortement rationnel s'il existe un réseau  $\Lambda^* \subset V$  tel que tous les sommets de  $\Delta$  (à translation près) soient contenus dans le réseau  $\Lambda^*$ . Remarquons que dans ce cas, si l'un des sommets appartient à  $\Lambda^*$  alors ils y appartiennent tous et, vus comme des vecteurs par rapport à l'origine, les sommets engendrent un sous-réseau. Supposons que  $\Delta$  soit un quadrilatère et considérons sa forme normale. Les sommets  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(\alpha, 1 - \beta)$  appartiennent à un réseau si et seulement si  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ . □

### 6.1.2 Exemples

**Théorème 6.10.** *Soit  $\Delta$  un quadrilatère convexe, fortement rationnel, qui ne soit pas un parallélogramme.*

- *Il existe une famille, paramétrée par 3 nombres rationnels positifs, d'orbifolds symplectiques toriques instables n'admettant aucune métrique extrémale non compatible et dont le polytope moment est  $\Delta$ .*
- *Il existe une famille, paramétrée par 3 nombres rationnels positifs, d'orbifolds kählériens orthotoriques extrémaux dont le polytope moment est  $\Delta$ . De plus, cette famille contient une sous-famille à 2 paramètres d'orbifolds kählériens à courbure scalaire constante et une sous-famille à 2 paramètres d'orbifolds faiblement Bochner-plats. L'intersection de ces deux sous-familles est une famille à 1 paramètre d'orbifolds Kähler–Einstein homothétiques.*

*Démonstration.* Soit  $\Delta$  un quadrilatère convexe n'étant pas un parallélogramme. Dénotons  $\mathbf{N}(\Delta)$  le cône de dimension 4 de normales intérieures associées aux facettes de  $\Delta$ . Nous fixons des vecteurs normaux intérieurs  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  de sorte que tout autre quadruplet de tels

vecteurs s'écrit  $u(r)$  pour un certain  $r \in \mathbb{R}_{>0}^4$ , selon nos conventions (4.1) et (4.2). On définit

$$\mathbf{R}(\Delta) = \{r \in \mathbb{R}_{>0}^4 \mid (\Delta, u(r)) \text{ est un polytope étiqueté rationnel}\},$$

de sorte que les orbifolds orthotoriques extrémaux de polytope moment  $\Delta$  soient en bijection avec les éléments de  $\mathbf{E}^+(\Delta) \cap \mathbf{R}(\Delta)$ . Les orbifolds toriques instables, de polytope moment  $\Delta$ , sont en bijection avec les éléments de  $(\mathbf{E}(\Delta) \setminus \mathbf{E}^+(\Delta)) \cap \mathbf{R}(\Delta)$ . De manière similaire, en utilisant les notations de §4.3, les orbifolds toriques kählériens à courbure scalaire constante (resp. faiblement Bochner-plats, resp. Kähler–Einstein) de polytope moment  $\Delta$  sont en bijection avec les points de  $\mathbf{C}(\Delta) \cap \mathbf{R}(\Delta)$  (resp.  $\mathbf{W}(\Delta) \cap \mathbf{E}^+(\Delta) \cap \mathbf{R}(\Delta)$ ,  $\mathbf{K}(\Delta) \cap \mathbf{E}^+(\Delta) \cap \mathbf{R}(\Delta)$ ). Le théorème 6.10 découle alors du lemme 6.11 ci-dessous.  $\square$

**Lemme 6.11.** *Si  $\Delta$  est fortement rationnel,  $\mathbf{R}(\Delta)$  contient des sous-ensembles denses de  $\mathbf{E}^+(\Delta)$ ,  $\mathbf{C}(\Delta)$ ,  $\mathbf{W}(\Delta)$ ,  $\mathbf{K}(\Delta)$  et  $\mathbf{E}(\Delta) \setminus \mathbf{E}^+(\Delta)$ .*

*Démonstration.* Rappelons qu'un quadrilatère connexe détermine et est déterminé par sa paire caractéristique  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  avec  $0 \leq \beta < 1 < \alpha$  et  $\alpha - \beta \geq 1$ , voir le corollaire 3.9. Grâce au lemme 6.9, nous savons que sous les hypothèses de ce lemme (c'est-à-dire lorsque  $\Delta$  est fortement rationnel)  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ .

Supposons d'abord que  $\Delta$  soit générique. Rappelons que  $\mathbf{R}(\Delta) \neq \emptyset$  si et seulement si  $r(\alpha, \beta) = \frac{\alpha(\beta-1)}{\beta(\alpha-1)} \in \mathbb{Q}$ , voir le corollaire 6.5. De plus, grâce à la proposition 6.6, si  $\mathbf{R}(\Delta) \neq \emptyset$ , l'on a

$$\mathbf{R}(\Delta) = \left\{ \left( \frac{sq_1}{\beta}, \frac{\alpha sq_2}{\beta}, \frac{sq_3}{1-\beta}, sq_4 \right) \mid \begin{array}{l} q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Q}_{>0}, \\ s \in \mathbb{R}_{>0} \end{array} \right\}.$$

Si  $\Delta$  est un trapèze, alors, grâce à la proposition 6.8,  $\mathbf{R}(\Delta) \neq \emptyset$  et

$$\mathbf{R}(\Delta) = \left\{ (sq_1, sq_2, sq_3, sq_4) \mid \begin{array}{l} q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Q}_{>0}, \\ s \in \mathbb{R}_{>0} \end{array} \right\}.$$

Le lemme 6.11 découle donc du théorème 4.6, combiné avec le fait que  $\mathbf{R}(\Delta)$  contient  $\mathbb{Q}_{>0}^4$  et les équations définissant  $\mathbf{E}(\Delta)$ ,  $\mathbf{C}(\Delta)$ ,  $\mathbf{W}(\Delta)$  et  $\mathbf{K}(\Delta)$  sont à coefficients rationnels, dès que  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Remarque 6.12.** *La condition d'être fortement rationnel est nécessaire. Supposons par exemple que  $\Delta$  soit un polytope générique de type rationnel. Les équations (3.12) et (3.13) définissant  $\mathbf{C}(\Delta) \cap \mathbf{R}(\Delta)$  dans  $\mathbf{N}(\Delta)$  peuvent être transformées en équations impliquant des polynômes d'une variable à coefficients rationnels en utilisant le fait que  $\mathbf{r} = \frac{\alpha(\beta-1)}{\beta(\alpha-1)} \in \mathbb{Q}$  ainsi que la paramétrisation de  $\mathbf{R}(\Delta)$  par des nombres rationnels. En particulier, l'existence d'un élément dans l'intersection  $\mathbf{C}(\Delta) \cap \mathbf{R}(\Delta)$  implique que  $\alpha$  et  $\beta$  sont algébriques de degrés au plus 3. Remarquons aussi que la condition  $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}$  implique qu'ils aient même degré. De manière similaire, si  $\Delta$  est rationnel mais pas fortement rationnel, alors  $\mathbf{K}(\Delta) \cap \mathbf{R}(\Delta)$  est vide. Ceci découle aussi de la théorie générale puisqu'il est bien connu que le polytope moment d'un orbifold Kähler–Einstein est fortement rationnel.*

## 6.2 Existence de métriques sasakiennes à courbure scalaire constante sur $S^2 \times S^3$

### 6.2.1 Champs de Reeb avec invariant de Futaki transverse restreint trivial

#### 6.2.1.1 Le cas général

Le théorème suivant (qui précise le théorème 0.9 de l'introduction) s'obtient aisément grâce aux résultats de la section 5.2.

**Théorème 6.13** (Théorème 0.9). *Une variété de contact torique co-orientée de type Reeb admet au moins un rayon de champs de Reeb dont les invariants de Futaki transverses (restreints) sont nuls. De plus, l'ensemble des champs de Reeb normalisés ayant un invariant de Futaki transverse (restreint) nul est un ensemble algébrique.*

*Démonstration.* La première partie du théorème 6.13 est un corollaire du lemme 5.20 combiné avec le fait que  $F$  est une fonction strictement positive, définie sur un ouvert relativement compact  $\Omega$ , et convergeant vers l'infini sur le bord. En particulier,  $F$  admet nécessairement un point critique à l'intérieur de  $\Omega$ . La deuxième partie est un corollaire de la proposition 5.21.  $\square$

#### 6.2.1.2 Le cas Sasaki–Einstein

Le théorème précédent couvre le cas Sasaki–Einstein. Un théorème dû à Martelli, Sparks et Yau, théorème 6.17 ci-dessous, est un cas particulier que nous démontrons avec les outils développés

dans ce travail.

Soit  $(N, \mathcal{D})$  une variété de contact telle que  $c_1(\mathcal{D})$ , la première classe de Chern du fibré de contact  $\mathcal{D}$ , s'annule. Dans (Martelli, Sparks et Yau, 2006), les auteurs ont démontré que le champ de vecteurs de Reeb normalisé pour lequel l'invariant de Futaki transverse est nul correspond aux points critiques de la fonctionnelle de volume et qu'un tel point est unique. Dans le contexte de la présente thèse, ceci implique que si  $c_1(\mathcal{D}) = 0$ , le point critique de  $F$  est unique et correspond au point critique de  $W_{00}(b)$  sur  $\Omega$ .

La condition  $c_1(\mathcal{D}) = 0$  est une condition nécessaire pour l'existence d'une métrique de type Sasaki–Einstein et correspond au fait que les normales primitives du cône moment sont contenues dans un hyperplan, voir (Futaki, Ono et Wang, 2010; Martelli, Sparks et Yau, 2006). De plus, si  $X_b$  est le champ de vecteurs de Reeb d'une métrique de type Sasaki–Einstein, alors la première classe de Chern basique vérifie  $c_1^B = 2(n + 1)[d\eta_b]_B$ , ce qui implique que  $(\Delta_b, u_b)$  est Fano selon la définition suivante.

**Définition 6.14.** *Un polytope étiqueté  $(\Delta, u)$  est Fano s'il existe  $\mu \in \mathring{\Delta}$  tel que  $L_l(\mu) = c$  pour tout  $l = 1, \dots, d$  où  $c$  est une constante positive.*

Il est connu, voir par exemple (Donaldson, 2008b), qu'un polytope de Delzant est Fano si et seulement si la variété torique complexe associée est Fano au sens habituel (le fibré en droite anticanonique est ample) ou, de manière équivalente, la variété symplectique  $(M, \omega)$  est monotone (la classe de de Rham de la forme symplectique  $\omega$  coïncide avec la première classe de Chern de  $(M, \omega)$  à un facteur multiplicatif positif près). Le lemme suivant est immédiat.

**Lemme 6.15.** *Les fonctions définissantes d'un polytope Fano appartiennent à un hyperplan et tout polytope étiqueté dans la famille de Reeb d'un polytope Fano est Fano.*

**Théorème 6.16.** (Martelli, Sparks et Yau, 2006) *Si  $(\Delta, u)$  est Fano, alors  $F$  admet un unique point critique. De plus, quitte à translater  $\Delta$ , il existe une constante  $\lambda > 0$  telle que  $W = \lambda Z$ .*

*Démonstration.* La fonctionnelle  $F$  dépend de manière équivariante du représentant de la classe d'équivalence d'un polytope étiqueté à transformations affines près. En particulier, le nombre

de points critiques de  $F$  ne change pas si l'on translate le polytope. Par définition, si  $(\Delta, u)$  est Fano, il existe  $\mu \in \mathring{\Delta}$  tel que  $L_i(\mu) = c > 0$  et, du fait du lemme 5.19, la fonction  $W_{00}$  associée à  $(\Delta - p, u)$  est alors  $W_{00}(b) = \frac{n}{c} Z_0(b)$ .  $\square$

**Corollaire 6.17.** (Martelli, Sparks et Yau, 2006) *Une variété de contact torique (compact, co-orientée) telle que  $c_1(\mathcal{D}) = 0$  admet un unique rayon de champ de Reeb ayant un invariant de Futaki relatif transversal nul.*

## 6.2.2 Existence et non unicité de métriques sasakiennes à courbure scalaire constante sur $S^2 \times S^3$

Nous démontrons ici le théorème 0.10 de l'introduction :

**Théorème 6.18** (Théorème 0.10). *Une variété de contact torique co-orientée de type Reeb de dimension 5 et dont le cône moment a 4 facettes admet au moins 1 et au plus 7 rayons distincts de métriques sasakiennes à courbure scalaire constante transversalement homothétiques.*

*De plus, pour chaque couple de nombre copremiers  $(p, q)$  avec  $p > 5q$ , il existe 2 métriques sasakiennes à courbure scalaire constante qui ne sont pas isométriques, même à homothéties transversales près, et qui sont compatibles avec la même structure de contact sur la variété de Wang-Ziller  $M_{p,q}^{1,1}$ .*

La structure de contact sur  $M_{p,q}^{1,1}$  est celle décrite dans (Boyer, Galicki et Simanca, 2008b).

À une transformation affine près, il existe un unique cône strictement convexe à 4 facettes dans  $\mathbb{R}^3$ . En effet,  $\mathbb{P}G1(3, \mathbb{R})$  agit transitivement sur l'ensemble des quadruplets génériques de points de  $\mathbb{R}P^2$ . En particulier, à une transformation linéaire près, toute famille de Reeb de quadrilatères contient la classe d'équivalence d'un carré étiqueté. Il est donc suffisant de considérer la famille de Reeb d'un carré étiqueté pour étudier les familles de Reeb des quadrilatères.

Soit  $\Delta_o$  l'enveloppe convexe de  $p_1 = (-1, -1)$ ,  $p_2 = (-1, 1)$ ,  $p_3 = (1, 1)$ ,  $p_4 = (1, -1)$  dans  $\mathbb{R}^2$ .  $\Delta_o$  est un carré et les vecteurs normaux à ses arêtes sont de la forme

$$u_1 = \frac{1}{r_1} e_1, \quad u_2 = \frac{-1}{r_2} e_2, \quad u_3 = \frac{-1}{r_3} e_1 \quad \text{et} \quad u_4 = \frac{1}{r_4} e_2 \quad (6.1)$$

où  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2)^*$ . Les fonctions définissantes de  $(\Delta_o, u)$  sont

$$L_l = \langle \cdot, u_l \rangle + \frac{1}{r_l}$$

pour  $l = 1, \dots, 4$ . Dénotons les arêtes  $E_l = L_l^{-1}(0) \cap \Delta_o$ . Avec les coordonnées  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , nous avons  $u_1 = \frac{1}{r_1} dx$ ,  $u_2 = \frac{-1}{r_2} dy$ ,  $u_3 = \frac{-1}{r_3} dx$ ,  $u_4 = \frac{1}{r_4} dy$ . Le lemme suivant est immédiat.

**Lemme 6.19.**  $(\Delta_o, u)$  est Fano si et seulement si  $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ .

De plus, on peut aisément vérifier que

$$\Omega = \{b = 1 + b_1 e_1 + b_2 e_2 \mid |b_1 + b_2| < 1, |b_1 - b_2| < 1\}.$$

En intégrant, nous obtenons

$$W_{00}(b) = \int_{\Delta_o} \frac{1}{b^3} dx dy = \frac{2}{b(p_1)b(p_2)b(p_3)b(p_4)}.$$

Dans ce contexte, la mesure  $d\sigma$  peut être explicitée :

$$d\sigma|_{E_1} = -r_1 dy, \quad d\sigma|_{E_2} = -r_2 dx, \quad d\sigma|_{E_3} = r_3 dy \quad \text{et} \quad d\sigma|_{E_4} = r_4 dx.$$

Intégrer de nouveau conduit à

$$Z_0(b) = \int_{\partial\Delta_o} \frac{1}{b^2} d\sigma = \frac{2r_1}{b(p_1)b(p_2)} + \frac{2r_2}{b(p_2)b(p_3)} + \frac{2r_3}{b(p_3)b(p_4)} + \frac{2r_4}{b(p_1)b(p_4)}.$$

Il vient alors

$$F(b) = \frac{Z_0(b)^3}{W_{00}(b)^2} = \frac{2(r_1 b(p_3)b(p_4) + r_2 b(p_1)b(p_4) + r_3 b(p_1)b(p_2) + r_4 b(p_2)b(p_3))^3}{b(p_1)b(p_2)b(p_3)b(p_4)}.$$

Posons  $a_1 = b_1 - b_2$  et  $a_2 = b_1 + b_2$  de sorte que  $b(p_1) = 1 - a_2$ ,  $b(p_2) = 1 - a_1$ ,  $b(p_3) = 1 + a_2$ ,  $b(p_4) = 1 + a_1$  et  $\Omega \simeq \{(a_1, a_2) \mid |a_i| < 1\}$ .  $F(b)$  s'écrit alors

$$F(b) = \frac{2(a_1 a_2 K + a_1(K - 2(r_2 - r_3)) + a_2(K - 2(r_4 - r_3)) + K - 2(r_2 + r_4))^3}{(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)}$$

avec  $K = r_1 + r_3 - r_2 - r_4$ . Remarquons que  $K = 0$  si  $(\Delta_o, u)$  est Fano.

Dénotons  $N(a) = a_1 a_2 K + a_1(K - 2(r_2 - r_3)) + a_2(K - 2(r_4 - r_3)) + K - 2(r_2 + r_4)$ . Il vient donc  $f(a) = F(b(a)) = \frac{2N(a)^3}{(1-a_1^2)(1-a_2^2)}$ . Pour  $h \in \mathbb{R}^2$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(a + th) &= \frac{4(h_1 a_1(1 - a_2^2) + h_2 a_2(1 - a_1^2))N(a)^3}{(1 - a_1^2)^2(1 - a_2^2)^2} \\ &+ \frac{6((h_1 a_2 + h_2 a_1)K + h_1(K - 2(r_2 - r_3)) + h_2(K - 2(r_4 - r_3)))N(a)^2}{(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)}. \end{aligned}$$

En particulier,  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(a + th) = 0$  pour tout  $h \in \mathbb{R}^2$  si et seulement si les deux équations suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} (3a_2 K + K + 2(r_2 - r_3))(1 - a_1^2) + 2a_1 N(a) &= 0, \\ (3a_1 K + K + 2(r_4 - r_3))(1 - a_2^2) + 2a_2 N(a) &= 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

La première équation de (6.2) signifie que  $(a_1, a_2)$  est une racine du polynôme

$$\begin{aligned} P(a_1, a_2) &= -a_1^2 a_2 K + a_1^2 (K + 2(r_2 - r_3)) + 2a_1 a_2 (K + 2(r_4 - r_3)) \\ &+ 2a_1 (K + 2(r_2 + r_4)) + 3a_2 K + K + 2(r_2 - r_3) \end{aligned}$$

et la seconde que  $(a_1, a_2)$  est racine de

$$\begin{aligned} Q(a_1, a_2) &= -a_2^2 a_1 K + a_2^2 (K + 2(r_4 - r_3)) + 2a_1 a_2 (K + 2(r_2 - r_3)) \\ &+ 2a_2 (K + 2(r_2 + r_4)) + 3a_1 K + K + 2(r_4 - r_3). \end{aligned}$$

**Lemme 6.20.** *Le point  $b = 1 + b_1 e_1 + b_2 e_2 \in \Omega$  est un point critique de  $F$  si et seulement si  $(a_1, a_2) = (b_1 - b_2, b_1 + b_2) \in \mathbb{R}^2$  est une racine commune des polynômes*

$$\begin{aligned} P(a_1, a_2) &= -a_1^2 a_2 K + a_1^2 (K + 2(r_2 - r_3)) + 2a_1 a_2 (K + 2(r_4 - r_3)) \\ &+ 2a_1 (K + 2(r_2 + r_4)) + 3a_2 K + K + 2(r_2 - r_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } Q(a_1, a_2) &= -a_2^2 a_1 K + a_2^2 (K + 2(r_4 - r_3)) + 2a_1 a_2 (K + 2(r_2 - r_3)) \\ &+ 2a_2 (K + 2(r_2 + r_4)) + 3a_1 K + K + 2(r_4 - r_3) \end{aligned}$$

contenue dans le carré  $\{(a_1, a_2) \mid |a_i| < 1\}$ . Il s'ensuit que  $F$  a au plus 7 points critiques.

*Démonstration.* La première partie du lemme découle de la discussion précédente et de la définition de  $P$  et  $Q$ . Pour la seconde partie, remarquons que  $P$  peut être écrit sous la forme

$P(a_1, a_2) = C(a_1)a_2 + D(a_1)$ , avec

$$C(a_1) = -a_1^2 K + 2a_1(K + 2(r_4 - r_3)) + 3K \quad \text{et}$$

$$D(a_1) = a_1^2(K + 2(r_2 - r_3)) + 2a_1(K + 2(r_2 + r_4)) + K + 2(r_2 - r_3).$$

Une racine commune de  $P$  et  $Q$  est un élément  $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$(1) \quad C(a_1) = 0, \quad D(a_1) = 0 \quad \text{et } a_2 \text{ est une racine du polynôme (en } x) \quad Q(a_1, x),$$

ou

$$(2) \quad C(a_1) \neq 0, \quad a_2 = -\frac{D(a_1)}{C(a_1)} \quad \text{et } a_1 \text{ est une racine du polynôme } C^2(x)Q\left(x, -\frac{D(x)}{C(x)}\right).$$

Remarquons que dans les deux cas,  $a_1$  est une racine du polynôme

$$\begin{aligned} C^2(x)Q\left(x, -\frac{D(x)}{C(x)}\right) &= [-KD^2(x) - 2D(x)C(x)(K + 2(r_2 - r_3)) + 3KC^2(x)]x \\ &\quad + (K + 2(r_4 - r_3))D^2(x) - 2(K + 2(r_4 + r_2))D(x)C(x) + (K + 2(r_4 - r_3))C^2(x) \end{aligned}$$

qui est de degré 5. Il vient donc qu'il existe au plus 5 tels nombres  $a_1$ .

Soit  $0 \leq k \leq 2$  le nombre de racines communes de  $C$  et  $D$ . Il existe au plus  $k$  nombres  $a_1$  et deux nombres  $a_2$  pour chacun d'eux, tels que  $(a_1, a_2)$  satisfasse (1) ( $Q(a_1, x)$  est un polynôme de degré 2 en  $x$ ). Au plus  $2k$  couples  $(a_1, a_2)$  satisfont donc (1) ci-dessus. Les  $5 - k$  autres valeurs possibles de  $a_1$  font partie du cas (2) et chacune d'elles détermine uniquement une valeur de  $a_2$ . Il vient donc que le nombre de racines communes de  $P$  et  $Q$  est borné par  $5 - k + 2k = 5 + k$ , qui est lui-même borné par 7.  $\square$

**Lemme 6.21.** Si  $r_1 = r_3, r_2 = r_4$  et  $r_1 + r_3 > 5(r_2 + r_4)$  alors  $K > 0$  et  $P$  et  $Q$  ont exactement 5 racines communes distinctes :  $(0, 0), \pm(a, -a)$  avec  $0 < a^2 = 1 - \frac{4(r_2 + r_4)}{K} < 1$  et  $\pm(a, a)$  avec  $a^2 = 5 + \frac{4(r_2 + r_4)}{K} > 1$ .

En particulier,  $F$  admet 3 points critiques distincts dans  $\Omega$ .

*Démonstration.* Si  $r_1 = r_3, r_2 = r_4$  alors  $K + 2(r_4 - r_3) = 0, K + 2(r_2 - r_3) = 0$  et

$$P(a_1, a_2) = -a_1^2 a_2 K + 2a_1(K + 2(r_2 + r_4)) + 3a_2 K,$$

$$Q(a_1, a_2) = -a_2^2 a_1 K + 2a_2(K + 2(r_2 + r_4)) + 3a_1 K.$$

Exprimons  $P$  sous la forme  $P(x, a_2) = C(x)a_2 + D(x)$  où  $C(x) = -Kx^2 + 3K$  et  $D(x) = 2(K + 2(r_2 + r_4))x$ . Comme  $C$  et  $D$  n'ont aucune racine commune,  $P$  et  $Q$  ont au plus 5 racines communes de la forme

$$\left(a, -\frac{D(a)}{C(a)}\right) \quad \text{avec } a \text{ racine de } C^2(x)Q\left(x, -\frac{D(x)}{C(x)}\right).$$

En remarquant que

$$P(a_1, -a_1) = -Q(a_1, -a_1) = a_1(a_1^2K - K + 4(r_2 + r_4)) \quad \text{et}$$

$$P(a_1, a_1) = Q(a_1, a_1) = a_1(-a_1^2K + 5K + 4(r_2 + r_4))$$

nous obtenons les 5 racines communes distinctes recherchées.

Comme  $r_1 + r_3 > 5(r_2 + r_4)$ , il vient  $0 < 1 - \frac{4(r_2+r_4)}{K} < 1$  tandis que  $5 + \frac{4(r_2+r_4)}{K} > 1$ .  $\square$

Nous allons à présent déterminer quels exemples provenant du lemme 6.21 correspondent effectivement à des champs de vecteurs de Reeb sur une variété de contact torique, c'est-à-dire, quels carrés étiquetés du lemme 6.21 sont caractéristiques à un bon cône. Dénotons par  $(e_1, e_2, e_3)$  la base standard de  $\mathbb{R}^3$ . Considérons le cône polyédral  $C_o = \{x \mid \langle x, \delta_j \rangle \geq 0, j = 1, \dots, 4\} \subset \mathbb{R}^3$  où les rayons  $\delta_i$  sont

$$\delta_1 = \mathbb{R}_{>0}(e_3 + e_1), \quad \delta_2 = \mathbb{R}_{>0}(e_3 + e_2), \quad \delta_3 = \mathbb{R}_{>0}(e_3 - e_1), \quad \delta_4 = \mathbb{R}_{>0}(e_3 - e_2).$$

**Lemme 6.22.** *Tout cône polyédral strictement convexe à 4 facettes dans  $\mathbb{R}^3$  est équivalent à  $C_o$  par une transformation affine. De plus,  $C_o$  est un bon cône par rapport au réseau  $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$  si et seulement si il existe  $s > 0$  tel que les vecteurs normaux primitifs intérieurs à  $C_o$  sont  $\hat{u}_1 = sc_1(e_1 + e_3)$ ,  $\hat{u}_2 = sc_2(e_2 + e_3)$ ,  $\hat{u}_3 = sc_3(e_3 - e_1)$  et  $\hat{u}_4 = sc_4(e_3 - e_2)$  pour des nombres entiers positifs  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$  tels que*

$$\text{ppcm}(c_1, c_2) = \text{ppcm}(c_1, c_4) = \text{ppcm}(c_3, c_2) = \text{ppcm}(c_3, c_4). \quad (6.3)$$

*Démonstration.* La première affirmation découle du fait que  $\mathbb{P}G1(3, \mathbb{R})$  agit transitivement sur les ensembles de quadruplets génériques de points de  $\mathbb{R}P^2$  et que les droites normales d'un cône polyédral strictement convexe sont génériques (tout sous-ensemble constitué de 3 d'entre elles est une base).

Dans notre cas, les vecteurs normaux intérieurs sont  $\hat{u}_1 = c_1(e_1 + e_3)$ ,  $\hat{u}_2 = c_2(e_2 + e_3)$ ,  $\hat{u}_3 = c_3(e_3 - e_1)$  et  $\hat{u}_4 = c_4(e_3 - e_2)$ . À une multiplication par une constante  $s > 0$  près, nous pouvons supposer que  $c_i \in \mathbb{Q}$ , pour tout  $i$ . En effet, le fait que  $(\mathcal{C}_o, \Lambda)$  est rationnel (c'est-à-dire qu'il est possible de choisir les  $u_j$  dans le réseau  $\Lambda$ ) implique que l'application linéaire  $A \in \text{Gl}(3, \mathbb{R})$  définie par  $A\hat{u}_1 = e_1$ ,  $A\hat{u}_2 = e_2$  et  $A\hat{u}_3 = e_3$ , envoie  $\hat{u}_4$  sur un vecteur  $A\hat{u}_4 = (-c_4/c_1, -c_4/c_2, c_4/c_3)$  dans  $\mathbb{Q}^3$ . Alors, à un facteur multiplicatif près, on peut supposer que  $c_i \in \mathbb{N}$  pour tout  $i$  et  $\text{pgcd}(c_1, c_2, c_3, c_4) = 1$ .

De plus, il existe un vecteur primitif de  $\mathbb{Z}^4$ , dénoté  $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ , tel que  $\sum_j k_j u_j = 0$ . Ce vecteur est unique à signe près et, en posant  $C = \text{ppcm}(c_1, c_2, c_3, c_4)$ , nous le choisissons comme étant

$$k = (C/c_1, -C/c_2, C/c_3, -C/c_4).$$

La construction de Delzant–Lerman (Lerman, 2003) entraîne que le cône symplectique au-dessus de la variété de contact torique est le quotient de

$$\tilde{X} = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} \left| \sum_{j=1}^4 k_j |z_j|^2 = \theta \right. \right\}$$

par l'action de  $S^1$ ,  $\rho: S^1 \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ , définie par

$$\rho(\lambda, z) = ((\lambda^{k_1} z_1, \lambda^{k_3} z_3), (\lambda^{k_2} z_2, \lambda^{k_4} z_4)).$$

Lerman (Lerman, 2003) a montré que le quotient construit selon cette méthode à partir d'un cône polyédral rationnel  $(\mathcal{C}_o, \Lambda)$  est lisse si et seulement si  $(\mathcal{C}_o, \Lambda)$  est un bon cône. Le stabilisateur d'un point  $z \in \tilde{X}$  est déterminé par ses composantes nulles, ou, plus précisément,  $\text{Stab}_\rho z = \{\lambda \in S^1 \mid \lambda^{k_j} = 1 \text{ if } z_j \neq 0\}$ . On peut alors vérifier que le stabilisateur de tout point  $z \in \tilde{X}$  est trivial si et seulement si

$$\text{pgcd}(k_1, k_2) = \text{pgcd}(k_1, k_4) = \text{pgcd}(k_3, k_2) = \text{pgcd}(k_1, k_4) = 1. \quad (6.4)$$

Comme  $k_j = (-1)^{j-1} C/c_j$  et  $|ab| = \text{ppcm}(a, b)\text{pgcd}(a, b)$ , la condition (6.4) équivaut à la condition  $\text{ppcm}(c_1, c_2) = \text{ppcm}(c_1, c_4) = \text{ppcm}(c_3, c_2) = \text{ppcm}(c_3, c_4) = C$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 6.18.* Soit  $(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{Z}^4$  avec  $r_1 = r_3 = p$ ,  $r_2 = r_4 = q$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers copremiers tels que  $p > 5q$ . Soit  $u$  défini par (6.1). Le cône étiqueté de  $(\Delta_o, u)$  est identifié avec le cône  $\mathcal{C}_o$  étiqueté par les vecteurs

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{p}(e_1 + e_3), \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{q}(e_2 + e_3), \quad \hat{u}_3 = \frac{1}{p}(e_3 - e_1) \quad \text{et} \quad \hat{u}_4 = \frac{1}{q}(e_2 - e_3).$$

Ces vecteurs sont tous contenus dans un réseau  $\Lambda$  et le cône rationnel  $(\mathcal{C}_o, \Lambda)$  est bon d'après le lemme 6.22. En particulier,  $(\mathcal{C}_o, \Lambda)$  est associé à la variété de Wang–Ziller  $M_{p,q}^{1,1}$  munie de la structure de contact torique  $(\mathcal{D}, \hat{T})$  décrite dans (Boyer, Galicki et Simanca, 2008b).

L'ensemble des polytopes étiquetés caractéristiques de  $(\mathcal{C}_o, \Lambda)$  est la famille de Reeb de  $(\Delta_o, u)$  qui satisfait les hypothèses du lemme 6.21. Il existe donc trois vecteurs de Reeb :

$$b_o = (0, 0, 1) \quad \text{et} \quad b_{\pm} = \left( 0, \pm \sqrt{1 + \frac{4q}{p-q}}, 1 \right)$$

dont les quadrilatères étiquetés caractéristiques respectifs ont une fonction extrémale affine constante. Grâce au corollaire 4.7, nous savons qu'il existe des potentiels symplectiques, dénotés  $\phi_{b_o} \in \mathcal{S}(\Delta_{b_o}, u_{b_o})$  et  $\phi_{\pm b} \in \mathcal{S}(\Delta_{b_{\pm}}, u_{b_{\pm}})$ , pour lesquels  $S(\phi_{b_o})$ ,  $S(\phi_{b_+})$  et  $S(\phi_{b_-})$  sont constants. En particulier, leurs potentiels symplectiques de Boothy–Wang respectifs  $\hat{\phi}_{b_o}$ ,  $\hat{\phi}_{b_+}$  et  $\hat{\phi}_{b_-}$  définissent des métriques cœniques kœhlériennes toriques  $\hat{g}_{b_o}$ ,  $\hat{g}_{b_+}$  et  $\hat{g}_{b_-}$  sur le cône symplectique au-dessus de  $(M_{p,q}^{1,1}, \mathcal{D}, \hat{T})$  pour lesquelles les métriques Sasaki associées  $g_{b_o}$ ,  $g_{b_+}$  et  $g_{b_-}$  sur  $M_{p,q}^{1,1}$  sont à courbure scalaire constante.

La variété de Wang–Ziller  $M_{p,q}^{1,1}$  est diffeomorphe au produit  $S^2 \times S^3$ , voir (Boyer, Galicki et Simanca, 2008b), et n'admet pas de structure 3–Sasaki du fait de sa dimension. Elle satisfait donc les hypothèses de la proposition 2.61. Ainsi, s'il existe un diffeomorphisme  $\psi$  tel que  $\psi^*g_{b_o}$  est une homothétie transversale de  $g_{b_+}$ , alors il existe un nombre réel  $\lambda > 0$  tel que  $(\lambda\Delta_{b_o}, u_{b_o})$  équivaut à  $(\Delta_{b_+}, u_{b_+})$  au sens de la définition 2.5. Cependant, ceci ne peut être le cas puisque  $\Delta_{b_o}$  est un carré alors que  $\Delta_{b_+}$  est un trapèze. De manière similaire  $g_{b_o}$  et  $g_{b_-}$  ne sont pas isométriques comme métriques riemanniennes, même à homothétie transversale près.

D'un autre côté, la transformation linéaire  $A = -e_1 \otimes e_1^* - e_2 \otimes e_2^* + e_3 \otimes e_3^*$  préserve l'ensemble des normales et échange  $b_+$  et  $b_-$ .  $A^*$  préserve donc  $\mathcal{C}_o$  et fournit un contactomorphisme  $\hat{T}$ -équivariant qui envoie  $g_{b_+}$  sur  $g_{b_-}$ , grâce à la proposition 2.62.  $\square$



## BIBLIOGRAPHIE

- Abreu, M. 1998. « Kähler geometry of toric varieties and extremal metrics », *Internat. J. Math.*, vol. 9, no. 6, p. 641–651.
- . 2001. « Kähler metrics on toric orbifolds », *J. Differential Geom.*, vol. 58, no. 1, p. 151–187.
- . 2010. « Kähler–Sasaki geometry of toric symplectic cones in action-angle coordinates », *Portugal. Math.*, to appear.
- Apostolov, V., D. Calderbank, et P. Gauduchon. « Ambi-Kähler complex surfaces, ambitoric geometry and Einstein 4-orbifolds, preprint », *Preprint*.
- Apostolov, V., D. M. J. Calderbank, et P. Gauduchon. 2003. « The geometry of weakly self-dual Kähler surfaces », *Compositio Math.*, vol. 135, no. 3, p. 279–322.
- Apostolov, V., D. M. J. Calderbank, et P. Gauduchon. 2006. « Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry. I. General theory », *J. Differential Geom.*, vol. 73, no. 3, p. 359–412.
- Apostolov, V., D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, et C. W. Tønnesen-Friedman. 2004. « Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry. II. Global classification », *J. Differential Geom.*, vol. 68, no. 2, p. 277–345.
- Atiyah, M. F. 1982. « Convexity and commuting Hamiltonians », *Bull. London Math. Soc.*, vol. 14, no. 1, p. 1–15.
- Audin, M. 2004. *Torus actions on symplectic manifolds*. T. 93, série *Progress in Mathematics*. Basel : Birkhäuser Verlag, revised édition.
- Banyaga, A. et P. Molino. 1993. *Géométrie des formes de contact complètement intégrables de type toriques*. Coll. « Séminaire Gaston Darboux de Géométrie et Topologie Différentielle, 1991–1992 (Montpellier) », p. 1–25. Montpellier : Univ. Montpellier II.
- . 1996. Complete integrability in contact geometry.
- Boyer, C. P. et K. Galicki. 2000. « A note on toric contact geometry », *J. Geom. Phys.*, vol. 35, no. 4, p. 288–298.
- . 2008. *Sasakian geometry*. Coll. « Oxford Mathematical Monographs ». Oxford : Oxford University Press.
- Boyer, C. P., K. Galicki, et S. R. Simanca. 2008a. « Canonical Sasakian metrics », *Comm. Math. Phys.*, vol. 279, no. 3, p. 705–733.

- . 2008b. « The Sasaki cone and extremal Sasakian metrics ». In *Proceedings of the conference on Riemannian topology*, p. 263–290, Boston. Birkhäuser.
- Brînzanescu, V. et R. Slobodeanu. 2006. « Holomorphicity and the walczak formula on sasakian manifolds », *Journal of Geometry and Physics*, vol. 57, no. 1, p. 193 – 207.
- Burns, D., V. Guillemin, et E. Lerman. 2008. « Kähler metrics on singular toric varieties », *Pacific J. Math.*, vol. 238, no. 1, p. 27–40.
- Calabi, E. 1982. *Extremal Kähler metrics*. Coll. « Seminar on Differential Geometry ». T. 102, série *Ann. of Math. Stud.*, p. 259–290. Princeton, N.J. : Princeton Univ. Press.
- . 1985. *Extremal Kähler metrics. II*. Coll. « Differential geometry and complex analysis », p. 95–114. Berlin : Springer.
- Calderbank, D. M. J., L. David, et P. Gauduchon. 2003. « The Guillemin formula and Kähler metrics on toric symplectic manifolds », *J. Symplectic Geom.*, vol. 1, no. 4, p. 767–784.
- Cvetič, M., H. Lü, D. N. Page, et C. N. Pope. 2005. « New Einstein-Sasaki spaces in five and higher dimensions », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, no. 7, p. 071101, 4.
- Danilov, V. I. 1978. « The geometry of toric varieties », *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 33, no. 2(200), p. 85–134, 247.
- Delzant, T. 1988. « Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment », *Bull. Soc. Math. France*, vol. 116, no. 3, p. 315–339.
- Donaldson, S. K. 2002. « Scalar curvature and stability of toric varieties », *J. Differential Geom.*, vol. 62, no. 2, p. 289–349.
- . 2005. « Interior estimates for solutions of Abreu’s equation », *Collect. Math.*, vol. 56, no. 2, p. 103–142.
- . 2008a. « Extremal metrics on toric surfaces : a continuity method », *J. Differential Geom.*, vol. 79, no. 3, p. 389–432.
- Donaldson, S. K. 2008b. *Kähler geometry on toric manifolds, and some other manifolds with large symmetry*. Coll. « Handbook of geometric analysis. No. 1 ». T. 7, série *Adv. Lect. Math. (ALM)*, p. 29–75. Int. Press, Somerville, MA.
- . 2009. « Constant scalar curvature metrics on toric surfaces », *Geom. Funct. Anal.*, vol. 19, no. 1, p. 83–136.
- Fulton, W. 1993. *Introduction to toric varieties*. T. 131, série *Annals of Mathematics Studies*. Princeton, NJ : Princeton University Press. The William H. Roever Lectures in Geometry.
- Futaki, A. 1983. « An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics », *Invent. Math.*, vol. 73, no. 3, p. 437–443.

- Futaki, A. et T. Mabuchi. 1995. « Bilinear forms and extremal Kähler vector fields associated with Kähler classes », *Math. Ann.*, vol. 301, no. 2, p. 199–210.
- Futaki, A., H. Ono, et G. Wang. 2010. « Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki–Einstein manifolds ».
- Gauduchon, P. *Extremal Kähler metrics : An elementary introduction, Lecture notes (en préparation)*.
- Gauntlett, J. P., D. Martelli, J. Sparks, et D. Waldram. 2004. « Sasaki-Einstein metrics on  $S^2 \times S^3$  », *Adv. Theor. Math. Phys.*, vol. 8, no. 4, p. 711–734.
- Guan, D. 1999. « On modified Mabuchi functional and Mabuchi moduli space of Kähler metrics on toric bundles », *Math. Res. Lett.*, vol. 6, no. 5-6, p. 547–555.
- Guillemin, V. 1994a. « Kaehler structures on toric varieties », *J. Differential Geom.*, vol. 40, no. 2, p. 285–309.
- . 1994b. *Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian  $T^n$ -spaces*. T. 122, série *Progress in Mathematics*. Boston, MA : Birkhäuser Boston Inc.
- Guillemin, V. et S. Sternberg. 1982. « Convexity properties of the moment mapping », *Invent. Math.*, vol. 67, no. 3, p. 491–513.
- Karshon, Y., L. Kessler, et M. Pinsonnault. 2007. « A compact symplectic four-manifold admits only finitely many inequivalent toric actions », *J. Symplectic Geom.*, vol. 5, no. 2, p. 139–166.
- Legendre, E. « Existence and non uniqueness of constant scalar curvature toric Sasaki metrics ».
- . « Toric geometry of convex quadrilaterals », *J. Symplectic Geom.*, to appear.
- Lejmi, M. 2010. « Extremal almost-Kähler metrics », *arXiv :math.DG/0908.0859*.
- Lerman, E. 2002. « A convexity theorem for torus actions on contact manifolds », *Illinois J. Math.*, vol. 46, no. 1, p. 171–184.
- . 2003. « Contact toric manifolds », *J. Symplectic Geom.*, vol. 1, no. 4, p. 785–828.
- Lerman, E. et S. Tolman. 1997. « Hamiltonian torus actions on symplectic orbifolds and toric varieties », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 349, no. 10, p. 4201–4230.
- Martelli, D., J. Sparks, et S.-T. Yau. 2006. « The geometric dual of  $\alpha$ -maximisation for toric Sasaki-Einstein manifolds », *Comm. Math. Phys.*, vol. 268, no. 1, p. 39–65.
- Painchaud, G. 2007. « Les orbifolds toriques et la formule de Guillemin », *Thèse de Maîtrise, Université du Québec à Montréal*.
- Ross, J. et R. Thomas. 2009. « Weighted projective embeddings, stability of orbifolds and constant scalar curvature », *arXiv :math.AG/0907.5214*.

- Satake, I. 1957. « The Gauss-Bonnet theorem for  $V$ -manifolds », *J. Math. Soc. Japan*, vol. 9, p. 464–492.
- Tian, G. 1997. « Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature », *Invent. Math.*, vol. 130, no. 1, p. 1–37.
- Yau, S.-T. 1993. *Open problems in geometry*. Coll. « Differential geometry : partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990) ». T. 54, série *Proc. Sympos. Pure Math.*, p. 1–28. Providence, RI : Amer. Math. Soc.
- Zhou, B. et X. Zhu. 2008. «  $K$ -stability on toric manifolds », *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 136, no. 9, p. 3301–3307.