

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ALGÈBRE DE DESCENTES ET ALGÈBRE DE FACES DES GROUPES  
DE COXETER FINIS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

LAURE LEJEUNE

AOUT 2010

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de ces formidables années universitaires à l'UQAM.

Je tiens à remercier très sincèrement Christophe Hohlweg, mon directeur de maîtrise, pour son aide, son soutien et ses conseils concernant ce mémoire, mais surtout pour sa confiance tout au long de ma maîtrise. Grâce à lui, j'ai eu la chance de vivre mes premières expériences en enseignement. Je le remercie enfin de m'avoir fait connaître ce sujet qui m'a beaucoup inspirée.

Mes remerciements s'adressent également à Jérôme Tremblay, technicien informatique du LaCIM, pour son aide dans la réalisation écrite de ce mémoire, pour le temps qu'il a consacré à m'aider, pour sa gentillesse et sa patience.

Puis je tiens à remercier Manon Gauthier, assistante gestion au programme des études avancées, pour m'avoir donné les bonnes informations pour les parties administratives et financières de cette maîtrise.

Je remercie toutes les personnes du LaCIM, professeurs, étudiants, secrétaires, employés, pour m'avoir si bien accueillie au département de mathématiques de l'UQAM.

Je remercie la Fondation de l'UQAM et la Faculté des sciences de l'UQAM pour leur soutien financier très généreux.

Je n'oublie pas mes parents, mes soeurs et mon frère, qui malgré l'éloignement m'ont toujours encouragée et avec qui j'ai passé de bonnes heures de détente à la webcam !

## TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES . . . . .	vii
RÉSUMÉ . . . . .	ix
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
ALGÈBRE DE DESCENTES D'UN GROUPE DE COXETER FINI . . . . .	5
1.1 Groupes de réflexions . . . . .	6
1.2 Systèmes de racines . . . . .	8
1.3 Groupes de Coxeter finis . . . . .	12
1.4 Sous-groupe parabolique et classe de représentants minimal . . . . .	14
1.5 Les groupes de Coxeter sont des groupes de réflexions . . . . .	16
1.6 Algèbre de descentes d'un groupe de Coxeter fini . . . . .	19
CHAPITRE II	
ÉVENTAIL DE COXETER . . . . .	27
2.1 Cône et éventail d'un espace vectoriel . . . . .	28
2.2 Arrangement d'hyperplans vectoriel et éventail associé . . . . .	31
2.3 Éventail de Coxeter . . . . .	33
2.4 Chambre fondamentale . . . . .	37
2.5 Sous-groupes paraboliques . . . . .	40
2.6 Étiquetage de l'éventail de Coxeter . . . . .	42
CHAPITRE III	
ALGÈBRE DE FACES . . . . .	53
3.1 Vecteur signe et relation de faces . . . . .	53
3.2 L'algèbre de faces . . . . .	57
3.3 Anti-isomorphisme d'algèbres dans le cas de $S_n$ . . . . .	62
3.4 Généralisation aux groupes de Coxeter finis . . . . .	66
CONCLUSION . . . . .	71

BIBLIOGRAPHIE . . . . . 73

## TABLE DES FIGURES

1.1	Un système de racines $\Psi$ dans le plan . . . . .	9
1.2	Un autre système de racines $\Omega$ dans le plan . . . . .	10
1.3	Système de racines de $D_4$ . . . . .	11
2.1	Cône polyédral . . . . .	28
2.2	Cône polyédral vu comme l'intersection de demi-espaces . . . . .	29
2.3	Certaines faces du cône polyédral . . . . .	30
2.4	Un éventail . . . . .	30
2.5	Trois faces d'un arrangement d'hyperplans . . . . .	32
2.6	Une chambre d'un arrangement d'hyperplans . . . . .	33
2.7	Un mur d'un arrangement d'hyperplans . . . . .	34
2.8	Représentation de l'arrangement d'hyperplans de $S_3$ . . . . .	35
2.9	Une chambre de l'arrangement d'hyperplans de $S_3$ . . . . .	36
2.10	Un mur de l'arrangement d'hyperplans de $S_3$ . . . . .	37
2.11	Arrangement d'hyperplans de $S_4$ . . . . .	38
2.12	Demi-plans ouverts $H_{12}^+, H_{12}^-$ de $\mathbb{R}^2$ déterminés par la droite $H_{12}$ . . . . .	39
2.13	Chambre fondamentale de $S_3$ . . . . .	40
2.14	Faces de la chambre fondamentale de $S_3$ . . . . .	41

2.15	Bijection entre les faces de la chambre fondamentale et les sous-groupes paraboliques de $S_3$ . . . . .	42
2.16	1ère étape de l'étiquetage . . . . .	46
2.17	2ème étape de l'étiquetage . . . . .	46
2.18	3ème étape de l'étiquetage . . . . .	47
2.19	4ème étape de l'étiquetage . . . . .	48
2.20	5ème étape de l'étiquetage . . . . .	49
2.21	Représentation finale de l'arrangement d'hyperplans de $S_3$ étiqueté . . .	50
2.22	Étiquetage de l'arrangement d'hyperplans de $S_3$ . . . . .	51
2.23	Arrangement d'hyperplans de $S_4$ étiqueté . . . . .	52
3.1	Vecteur signe . . . . .	55
3.2	Représentation des vecteurs signes dans l'arrangement d'hyperplans de $S_3$ . . . . .	56
3.3	Galerie d'une face vers l'autre . . . . .	58

## RÉSUMÉ

En 1976, le mathématicien Solomon a découvert l'existence d'une sous-algèbre de l'algèbre d'un groupe de Coxeter  $W$  : l'algèbre de descentes de  $W$ . Dans son approche, cette algèbre est définie algébriquement par le biais des systèmes de racines et des systèmes de représentants des classes de  $W$  pour des sous groupes paraboliques. Nous introduisons dans ce mémoire cette sous-algèbre et montrons la formule de Solomon qui explicite les constantes de structures de cette algèbre. Puis nous présentons une approche géométrique des groupes de Coxeter finis qui permet de présenter cette sous-algèbre d'une manière intrinsèque. L'étude des arrangements d'hyperplans est notre outil principal pour définir une algèbre de faces et ainsi construire un anti-isomorphisme entre l'algèbre de descentes et la sous-algèbre de faces invariante selon l'action de  $W$ . Le cas du groupe symétrique  $W = S_n$  sera notre exemple principal.



## INTRODUCTION

La notion mathématique de groupe est née de l'étude des équations polynomiales par le mathématicien Français Evariste Galois dans les années 1830. Par la suite, on s'est aperçu de l'importance de cette notion dans de multiples champs de mathématiques. La théorie des groupes est rapidement devenue une branche très active des mathématiques, en géométrie par exemple, notamment par le mathématicien Klein dans son programme d'Erlangen (1872) qui influença profondément l'évolution de la géométrie (voir (Klein, 1939)).

En cherchant à répondre à plusieurs questions provenant entre autre de la théorie de Galois, les mathématiciens ont développé la théorie de la représentation des groupes finis (voir (Serre, 1968)). Elle consiste à étudier un groupe  $G$  via des actions linéaires sur des espaces vectoriels  $V$ . Cette approche donne des outils supplémentaires pour étudier les espaces sur lequel le groupe opère, en plus de fournir des informations sur le groupe lui-même. Un des objets centraux de cette théorie est l'algèbre du groupe, notée  $kG$  (pour un corps  $k$ ), définie comme le  $k$ -espace vectoriel engendré par les éléments de  $G$ , c'est à dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients dans  $k$  des éléments de  $G$ . L'analyse de l'action d'un groupe  $G$  sur son algèbre de groupe permet d'approfondir l'étude des représentations du groupe. Puis, dans le but d'explorer les groupes, les mathématiciens ont élaboré différentes notions pour réduire le groupe en plus petits ensembles qui sont plus faciles à étudier comme par exemple les sous-groupes ou les groupes quotients. On s'intéressa entre autre à certaines classes de groupes et plus particulièrement à leurs représentants.

Dans ce contexte, Solomon a découvert en 1976 l'algèbre de descentes d'un groupe de Coxeter. En effet, en étudiant l'algèbre du groupe  $QW$  du système de Coxeter  $(W, S)$  il a découvert qu'une sous-algèbre  $\mathcal{D}(W)$  (aussi parfois notée  $\Sigma W$ ) existait dans

l'algèbre  $\mathbb{Q}W$ . Elle est engendrée par les éléments  $x_I = \sum_{w \in X_I} w$ , avec  $I \subseteq S$  et  $X_I$  un système de représentants de longueur minimale des classes à gauche du sous-groupe parabolique  $W_I$ .  $\mathcal{D}(W)$  est appelée algèbre de descentes de Solomon. Puis, dans le but de trouver une formule "à la Mackey" (voir (Solomon, 1976)), il a construit un homomorphisme d'algèbre  $\Phi$  :

$$\Phi : x_I \longrightarrow 1_{W_I}^W$$

où  $1_{W_I}^W$  est le caractère induit à  $W$  du caractère trivial de  $W_I$ .

Remarquons cependant que ces beaux résultats se basent sur un choix de représentants  $X_I$ . On peut donc se demander s'il existe une autre approche indépendante de ce choix. C'est cette question qui motive notre étude. Ce mémoire propose de réécrire l'algèbre de descentes d'une manière intrinsèque, c'est à dire par une approche géométrique qui évite le choix de représentants. Cette approche fait appel aux arrangements d'hyperplans associés aux groupes de Coxeter et plus particulièrement à leur algèbre de faces. Nous allons construire un anti-isomorphisme d'algèbre entre la sous-algèbre de faces invariante et l'algèbre de descentes.

Ce mémoire se présente en trois chapitres. Nous introduisons dans un premier temps les groupes de Coxeter fini et leur algèbre de descentes. Nous rappelons les principaux résultats de Solomon qui établit un lien profond entre la théorie de la représentation d'un groupe de Coxeter et celle de son algèbre de descentes.

Nous nous intéressons ensuite aux arrangements d'hyperplans, plus particulièrement ceux qui sont associés aux groupes de réflexions. Nous introduisons les différentes notions de base concernant ces arrangements d'hyperplans et étudions le complexe de Coxeter qui permet de paramétrer les faces de cet arrangement pour certaines classes de sous-groupes de réflexions.

Enfin nous construisons l'algèbre de faces d'un arrangement en introduisant un produit entre les faces. Nous aboutissons ainsi à énoncer et montrer l'anti-isomorphisme souhaité d'abord dans le cas du groupe symétrique  $S_n$ , puis pour tous les groupes de

Coxeter.

On retrouve ainsi l'algèbre de descentes de façon intrinsèque en liaison avec les aspects algébriques, géométriques et combinatoires des groupes de Coxeter.

Le groupe symétrique  $S_n$  sert de fil directeur tout au long de ce mémoire afin d'illustrer notre étude et de se familiariser avec les nouvelles notions.



## CHAPITRE I

### ALGÈBRE DE DESCENTES D'UN GROUPE DE COXETER FINI

Dans ce chapitre, nous donnons une présentation algébrique de l'algèbre de descentes d'un groupe de Coxeter. Pour un groupe fini quelconque  $G$  et  $k$  un corps, on peut considérer l'algèbre du groupe  $G$  sur le corps  $k$ . Dans le cas où  $G$  est un groupe de Coxeter fini, cette algèbre  $kG$  contient une sous-algèbre remarquable, dite algèbre de descentes et introduite par Solomon en 1976 (Solomon, 1976). Le but de ce chapitre est de rappeler la définition de Solomon de cette algèbre de descentes et de montrer la formule permettant de calculer le produit de deux éléments de la base de cette algèbre. Nous présentons cette théorie en commençant par rappeler les notions de base sur les groupes de réflexions. Puis nous rappelons les propriétés des systèmes de racines, ingrédients essentiels pour l'étude de système de Coxeter. Nous considérons plus particulièrement les groupes de Coxeter finis ainsi que leurs sous-groupes paraboliques. Ceux-ci jouent en effet un rôle important dans la définition de l'algèbre de descentes. Nous verrons que chaque système de Coxeter fini  $(W, S)$  est étudié en correspondance avec un système de racines  $\Phi$ , que l'on peut restreindre à un système simple  $\Delta$  (qui est un ensemble encore plus petit que  $\Phi$  puisque les vecteurs doivent être indépendants). Ce chapitre conclue avec une description explicite de l'algèbre de descentes de Solomon.

Historiquement, Solomon découvre l'algèbre de descentes en 1976. Par la suite plusieurs auteurs (tels que Garcia et Reutenauer) se sont intéressés aux décompositions des algèbres de descentes des groupes de Coxeter et à diverses façon de reformuler les règles de multiplication dans ces algèbres. Les algèbres de descentes trouvent des

applications dans d'autres domaines des mathématiques comme dans la théorie des probabilités, l'étude de l'homologie de Hochschild, la théorie des représentations et dans la théorie des algèbres de Lie libre (voir (Reutenauer, 1993), (Garcia et Reutenauer, 1989) et les références qu'ils contiennent).

Dans ce chapitre, la plupart des résultats sont classiques. Ces rappels seront donc énoncés sans preuve. Nous renvoyons le lecteur au très bon livre de Humphreys (Humphreys, 1990) pour les détails.

## 1.1 Groupes de réflexions

Soit  $V$  un espace euclidien (réel) de dimension fini muni d'une forme bilinéaire définie positive  $(\lambda, \mu)$ . Une *réflexion*  $s_\alpha$  est un endomorphisme linéaire  $s$  de  $V$  qui envoie un vecteur non nul  $\alpha$  sur son opposé et dont l'ensemble des points fixes est un hyperplan  $H_\alpha$ . Ceci s'exprime en formule comme suit :

$$s_\alpha(x) = x - \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \cdot \alpha.$$

On a bien  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ , et pour tout  $x \in H_\alpha$ ,  $s_\alpha(x) = x$  (car  $(x, \alpha) = 0$ ), donc  $s_\alpha$  est bien définie pour tout  $x \in V = \mathbb{R}\alpha \oplus H_\alpha$ . On remarque que  $s_\alpha$  est une isométrie linéaire (c'est à dire que  $(s_\alpha(x), s_\alpha(y)) = (x, y)$  pour tout  $x, y$  dans  $V$ ). De plus les réflexions sont involutives,  $s_\alpha^2 = 1$ , donc  $s_\alpha$  est d'ordre deux dans le groupe  $O(V)$  des transformations orthogonales de  $V$ . On en déduit facilement la proposition suivante :

**Proposition 1.** Si  $w \in O(V)$  alors  $ws_\alpha w^{-1} = s_{w(\alpha)}$ .

Bien qu'il ne contienne pas que des réflexions, un groupe engendré par des réflexions sur un espace euclidien  $V$  est malgré tout souvent appelé *groupe de réflexions*. Dans ce mémoire, nous étudierons seulement les groupes de réflexions finis.

**Exemple 1.** Dans un premier temps, fixons nos notations pour le groupe symétrique  $S_n$ . Une permutation  $\sigma$  est une application bijective notée par  $\sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(n)$ . On note habituellement  $(i j)$  la transposition qui échange les deux éléments  $i$  et  $j$  en laissant les

autres inchangés. En particulier,

$$\tau_i = (i \ i+1)$$

est la transposition qui échange  $i$  et  $i + 1$ . La permutation  $\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \in S_3$  se dénote donc 132 ou encore  $\tau_2$ . Rappelons que  $S_n$  est munie de la loi de composition d'applications (notée  $\circ$  que nous n'écrivons que dans les cas nécessaires). D'autre part, on peut montrer que tous les éléments de  $S_n$  s'écrivent comme produits de  $\tau_i$  où  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ . Par exemple  $321 = \tau_1 \tau_2 \tau_1$ . Enfin, on note  $e$  la permutation identité.

Montrons maintenant que le groupe symétrique peut être vu comme un groupe de réflexion fini. En effet, le groupe des permutations  $S_n$  se plonge dans  $O_n(\mathbb{R})$  en associant à chaque permutation  $\sigma$  la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  de l'endomorphisme

$$e_i \mapsto e_{\sigma(i)},$$

où les vecteurs  $(e_i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$  sont les éléments de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple,

à la permutation  $\tau_1 \in S_3$  on associe la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Or on a que

$$MM^T = 1 = M^T M \text{ et } \det M = -1$$

donc  $M$  est une matrice de réflexion. On peut vérifier qu'en fait toutes les transpositions  $(i \ j)$  sont des réflexions. Comme les transpositions engendrent  $S_n$ , donc l'image de  $S_n$  dans le groupe orthogonal est un groupe de réflexions fini. Plus précisément, on voit que  $\tau_i$  envoie  $e_{i+1} - e_i$  sur  $e_i - e_{i+1} = -(e_{i+1} - e_i)$ . Donc  $\tau_i$  correspond à la réflexion  $s_{e_{i+1} - e_i}$  qui fixe  $(e_{i+1} - e_i)^\perp$ . Finalement, en posant  $\alpha_i = e_{i+1} - e_i$ , on obtient que

$$S_3 = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle = \langle s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2} \rangle.$$

Par abus de langage nous disons donc que le groupe symétrique est un groupe de réflexion fini. Ce groupe est l'exemple classique que nous garderons en tête tout au long du mémoire.

**Exemple 2.** Le groupe Diédral  $D_m$  est le groupe de transformations du polygone régulier à  $m$  cotés (c'est à dire le groupe des transformations qui préservent ce polygone). Il est constitué de  $m$  réflexions et  $m$  rotations selon les diagonales du polygone. Or les rotations peuvent se décomposer en produit de deux réflexions de  $D_m$ , donc le groupe diédral est une groupe de réflexions.

Remarquons que les groupes de réflexions peuvent être caractérisés par l'ensemble des vecteurs utilisés pour décrire les réflexions. Il en résulte un ensemble de vecteurs dans  $V$  satisfaisant quelques propriétés géométriques. Ce sont les systèmes de racines associés aux groupes de réflexions.

## 1.2 Systèmes de racines

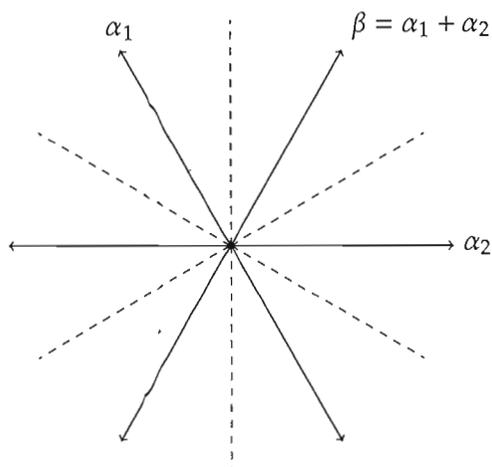
Historiquement, le concept de système de racines est né de la théorie des groupes de Lie et développé par les mathématiciens Cartan et Killing au  $XX^e$  siècle. Bourbaki en a donné une élégante présentation (Bourbaki, 1968, chap 4-6).

**Définition 1.** Un *système de racines* est un ensemble fini non vide  $\Phi$  de vecteurs de  $V$  qui satisfait les conditions suivantes :

- $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}, \forall \alpha \in \Phi$
- $s_\alpha \Phi = \Phi, \forall \alpha \in \Phi.$

Les éléments de  $\Phi$  sont appelés *racines*. Un groupe de réflexions fini  $W$  détermine un système de racines de la façon suivante. Pour chaque réflexion  $s_\alpha$  dans  $W$  tels que  $\alpha \in I$  où  $I \subseteq V$ , on peut considérer  $\|\alpha\| = 1 \forall \alpha \in I \subseteq V$ . On a alors que l'ensemble  $\Phi = \{\pm w(\alpha) \mid \alpha \in I, w \in W\}$  est un système de racines associé à  $W$ . Inversement, on associe à chaque système de racines  $\Phi$  fixé le groupe  $W$  engendré par les réflexions  $s_\alpha, \alpha \in \Phi$ . Le groupe  $W$  agit donc sur  $\Phi$  par permutations. Comme  $\Phi$  est fini,  $W$  l'est aussi. Ainsi, nous étudions chaque groupe de réflexions fini  $W$  en correspondance avec un système de racines  $\Phi \subseteq V$ . Le choix de  $\Phi$  est flexible, il peut être constitué de vecteurs unitaires ou non, il peut engendrer  $V$  ou non. L'important est que les racines de  $\Phi$

respectent les conditions de la définition ci-dessus. Les figures 1.1 et 1.2 donnent deux exemples de système de racines dans le plan.



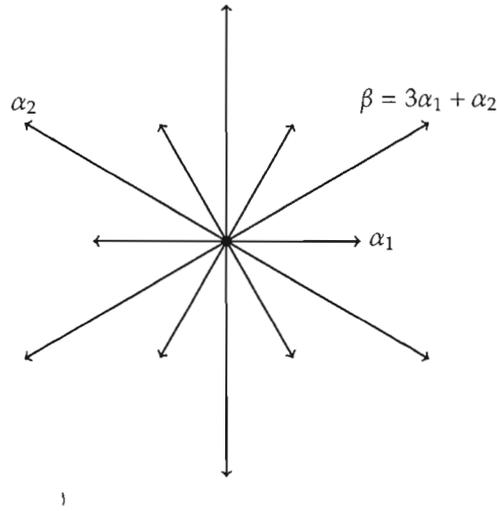
**FIGURE 1.1** Un système de racines  $\Psi$  dans le plan : on a représenté les racines par des vecteurs et en pointillé les droites fixées par les réflexions correspondantes. On vérifie sur un exemple une des propriétés d'un système de racines :  $s_{\alpha_1}(\alpha_2) = \beta \in \Psi$ .

Considérons ensuite un ordre total  $<$  sur l'espace vectoriel  $V$ . On dit tout simplement que  $\alpha \in V$  est positif si  $0 < \alpha$ . Appelons maintenant un *système positif* le sous-ensemble  $\Phi^+ \subseteq \Phi$  qui contient des racines qui sont positives selon l'ordre total de  $V$ . Comme chaque racine est dans  $\Phi$  par paire  $\{\alpha, -\alpha\}$ , alors un tel ensemble  $\Phi^+$  existe pour chaque  $\Phi$  et de plus  $\Phi$  est l'union disjointe de  $\Phi^+$  et de  $\Phi^-$  (où  $\Phi^- = -\Phi^+$ ).  $\Phi^-$  est alors appelé *système négatif*.

**Exemple 3.** Construisons un système de racines dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ . Posons

$$\Phi = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, -1, 1)\}.$$

Il est facile de vérifier que  $\Phi$  est un ensemble fini de vecteurs satisfaisant les conditions de la définition (par exemple,  $s_{(1,-1,0)}(-1,0,1) = (0,-1,1) \in \Phi$ ). Donc  $\Phi$  est bien un



**FIGURE 1.2 Un autre système de racines  $\Omega$  dans le plan :** dans cette exemple les normes des vecteurs ne sont pas toutes égales. On vérifie une des propriétés sur un exemple :  $s_{\alpha_1}(\alpha_2) = \beta \in \Omega$ .

système de racines. Il correspond en fait à un système de racines associé au groupe symétrique  $S_3$ .

**Exemple 4.** On a par exemple le système de racines suivant représenté sur la figure 1.3. L'ensemble de vecteurs  $\Omega = \{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta, \gamma, -\gamma, \delta, -\delta\}$  satisfaisant les propriétés de la définition forme bien un système de racines (par exemple,  $s_\delta(\alpha) = \gamma$ ). De plus, les réflexions correspondantes aux racines préservent le carré. Il s'agit en fait d'un système de racines associé au groupe diédral  $D_4$ . De plus, l'ensemble  $\Omega^+ = \{\delta, \gamma, \beta, \alpha\}$  est un système positif de  $\Omega$ , et le système négatif est  $\Omega^- = -\Omega^+$ .

Un système de racines positif  $\Phi^+$  détermine un système de racines  $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$ . Afin de simplifier la description des systèmes de racines, on considère un système minimal de générateurs de  $W$ . L'idée consiste à considérer  $\Delta \subseteq \Phi$  formant une base de l'espace vectoriel de l'espace engendré par  $\Phi$  et tel que chaque  $\alpha \in \Phi$  est une combinaison linéaire de  $\Delta$  ayant des coefficients tous de même signe (tous positifs ou tous négatifs). On dit que  $\Delta$  est un *système simple*.

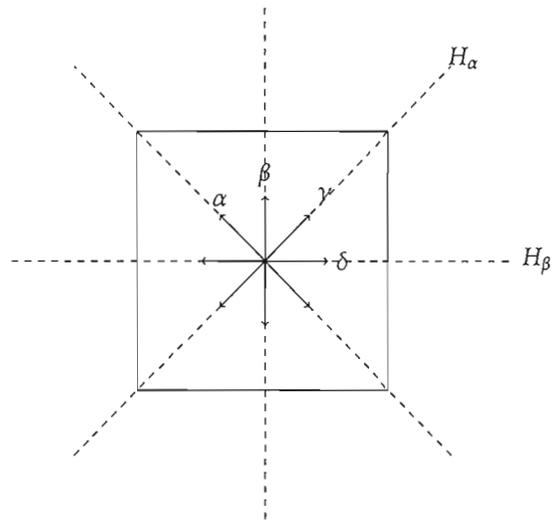


FIGURE 1.3 Système de racines de  $D_4$

**Exemple 5.** En reprenant l'exemple de  $D_4$ , soit  $\Delta = \{\alpha, \delta\}$ . Alors  $\Delta$  engendre  $\mathbb{R}^2$  et chaque racine de  $\Omega$  s'exprime comme une combinaison linéaire de  $\Delta$  ayant des coefficients de même signe (par exemple  $\beta = \delta + \sqrt{2}\alpha$ ). Donc  $\Delta$  est un système simple de  $\Omega$ .

Il n'est pas immédiatement évident qu'un tel ensemble existe pour chaque système de racines  $\Phi$ . Le théorème suivant répond à cette interrogation :

**Théorème 1.** · Si  $\Delta$  est un système simple de  $\Phi$ , alors il existe un unique système positif  $\Phi^+$  contenant  $\Delta$ .

· Pour chaque système positif  $\Phi^+$  il existe un unique système simple  $\Delta \subseteq \Phi^+$ .

En conséquence il existe un système positif pour chaque système de racines. Dans le cadre de la correspondance entre système de racines et groupe de réflexions, le système de racines simples joue un rôle important :

**Théorème 2.** Soit  $\Delta$  un système simple associé à un système de racines  $\Phi$ . Le groupe de réflexions  $W$  associé à  $\Phi$  est engendré par les réflexions  $s_\alpha$ , avec  $\alpha \in \Delta$ .

Autrement dit, les systèmes simples correspondent aux ensembles de générateurs

du groupe de réflexions.

**Remarque 1.** Finalement, le lecteur pourrait s'interroger sur la méthode de construction de racines. Nous conseillons d'aller lire la partie pertinente de (Humphreys, 1990, 2.10).

### 1.3 Groupes de Coxeter finis

Les systèmes simples sont un ingrédient important aussi utilisés pour définir la matrice de Cartan ou encore pour définir le graphe de Coxeter. N'ayant pas de lien direct avec la théorie de l'algèbre de descentes, nous laissons le lecteur libre de consulter les livres de Humphreys (Humphreys, 1990) ou de Björner et Brenti (Björner et Brenti, 2005) pour approfondir ces points. Alternativement, les systèmes de racines ont un lien direct avec les groupes de Coxeter finis que nous introduisons tout de suite.

Un *groupe de Coxeter fini* est un groupe  $W$  admettant une présentation du type

$$W = \langle r_1, r_2, \dots, r_n \mid (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle$$

où  $m_{ij} \in \mathbb{N}$  tel que  $m_{ij} = m_{ji}$ ,  $m_{ii} = 1$ , et  $m_{ij} \geq 2$  si  $i \neq j$ .

La condition  $m_{ii} = 1$  signifie que les générateurs sont d'ordre deux. Comme nous allons le voir, on peut alors penser que ce sont des réflexions. En particulier, lorsque  $m_{ij} = 2$ , les générateurs  $r_i$  et  $r_j$  commutent.

Si on note  $S$  l'ensemble des  $r_i$ , on dit que  $(W, S)$  est un *système de Coxeter*. Le *rang* de  $W$  est la cardinalité de  $S$ .

**Exemple 6.** Le groupe symétrique  $S_n$  est un groupe de Coxeter. Il est en effet possible de le présenter comme :

$$S_n = \langle \{\tau_i \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\} \rangle,$$

où  $\tau_i = (i \ i+1)$  est la transposition adjacente. On a bien que pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $m_{ij} \in \mathbb{N}$  satisfaisant les relations suivantes :  $m_{ij} = m_{ji}$ ,  $m_{ii} = 1$  et si  $i \neq j$  alors  $m_{ij} \geq 2$ . Par exemple,  $S_3 = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$  où  $(\tau_1 \tau_2)^3 = (\tau_2 \tau_1)^3 = e$  donc  $m_{12} = m_{21} = 3$  et  $\tau_1 \tau_1 = e$  donc  $m_{11} = 1$ .

**Exemple 7.** Dans le cas particulier où  $S = \{s, t\}$  est de cardinal 2, et où  $m_{st} = m$  est fini, les éléments de ce groupe de Coxeter sont tous les produits  $sts \cdots$  et  $tst \cdots$  ayant moins de  $m$  facteurs. Son ordre est donc au plus  $2m$ . Or le groupe des isométries d'un polygone régulier à  $m$  sommets d'un plan euclidien vérifie les relations si on prend comme générateurs  $s$  et  $t$  deux réflexions par rapport à deux droites faisant un angle  $\frac{\pi}{m}$ . Ceci prouve que dans ce groupe de Coxeter correspondant l'ordre de  $st$  est  $m$ . On en déduit que ce groupe de Coxeter est le groupe diédral d'ordre  $2m$  puisque le groupe diédral est un quotient du groupe de Coxeter et que l'ordre du groupe de Coxeter est au plus celui du groupe diédral. Les groupes diédraux font donc partie des groupes de Coxeter finis.

Puis, la forme de la présentation de  $W$  nous permet d'étudier la façon dont un élément  $w \in W$  s'exprime en produit de générateurs. On peut alors définir la longueur de chaque élément de  $W$  : pour  $w \in W$ , la longueur  $\ell(w) = k$  de  $w$  est le nombre minimal  $k$  tel que  $w = s_1 \cdots s_k$ , avec  $s_i \in S$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Par convention,  $\ell(e) = 0$ . Voici quelques propriétés fondamentales de cette fonction longueur dans le cadre des groupes de Coxeter :

**Proposition 2.**

- 1)  $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$ .
- 2)  $\ell(w) = 1$  si et seulement si  $w \in S$ .
- 3)  $\ell(w) - \ell(w') \leq \ell(ww') \leq \ell(w) + \ell(w')$ .
- 4)  $\ell(w) - 1 \leq \ell(ws) \leq \ell(w) + 1$ , pour  $s \in S$  et  $w \in W$ .

**Exemple 8.** Par exemple, le groupe symétrique  $S_3$  est engendré par les transpositions  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , donc  $\ell(\tau_1) = \ell(\tau_2) = 1$ . D'autre part,  $321 = \tau_1\tau_2\tau_1 = \tau_2\tau_1\tau_2$  donc  $\ell(321) = 3$ . On a aussi  $312 = \tau_2\tau_1$  donc  $\ell(312) = 2$  et  $\ell((312)^{-1}) = \ell(231) = 2$ . On peut aussi vérifier une des inégalités :

$$\ell(132) - \ell(312) = -1 \leq 1 = \ell(132 \circ 312) \leq 3 = \ell(132) + \ell(312).$$

### 1.4 Sous-groupe parabolique et classe de représentants minimal

La fonction de longueur est un ingrédient important pour la définition de la notion de l'algèbre de descentes. Elle est aussi souvent utilisée pour des preuves par récurrence. Elle nous permet aussi de caractériser les classes de représentants des sous-groupes paraboliques  $W_I$  de  $W$  que nous introduisons maintenant.

Considérons  $(W, S)$  un système de Coxeter. Pour tout sous ensemble  $I \subseteq S$  on définit le *sous-groupe parabolique standard*  $W_I$  par

$$W_I = \langle I \rangle.$$

Dans notre étude, nous parlerons uniquement de sous groupe parabolique de la forme  $W_I$  que nous appellerons alors "sous groupe parabolique" afin d'alléger le texte. On déduit de la définition que le plus petit sous-groupe parabolique est celui engendré par l'ensemble vide  $W_\emptyset = \{e\}$  et le plus grand sous-groupe parabolique est celui engendré par tous les générateurs  $W_S = W$ . D'autre part on vérifie aisément que  $(W_I, S_I)$  est aussi un système de Coxeter.

**Exemple 9.** Soient  $W = S_3$ ,  $S = \{\tau_1, \tau_2\}$ , alors  $(S_3, S)$  est un système de Coxeter. Soient  $\{\tau_1\}$  et  $\{\tau_2\}$  deux sous ensemble de  $S$ . Alors d'après la définition

$$W_{\tau_1} = \langle \tau_1 \rangle = \{e, \tau_1\}$$

et

$$W_{\tau_2} = \langle \tau_2 \rangle = \{e, \tau_2\}$$

sont des sous-groupes paraboliques de  $S_3$ . De même,  $W_S = S_3$  et  $W_\emptyset = \{e\}$  sont deux autres sous-groupes paraboliques de  $S_3$ . On remarque les isomorphismes suivants :

$$W_{\tau_1} \cong S_2 \times S_1$$

$$W_{\tau_2} \cong S_1 \times S_2$$

$$W_S = S_3$$

$$W_\emptyset = S_1 \times S_1 \times S_1$$

Plus généralement, dans le cas de  $W = S_n$ , chaque sous-groupe parabolique  $W_I$  de  $W$  est isomorphe à un produit direct de groupes symétriques.

Voici deux belles propriétés à propos des sous-groupes paraboliques  $W_I$  :

**Théorème 3.** Soient  $I$  et  $J$  deux sous ensembles de  $S$ , alors

$$W_{I \cup J} = \langle W_I, W_J \rangle$$

et

$$W_{I \cap J} = W_I \cap W_J.$$

**Exemple 10.** Par exemple, avec les mêmes notations que précédemment, on a bien

$$W_{\{\tau_1\} \cup \{\tau_2\}} = \langle \{\tau_1\} \cup \{\tau_2\} \rangle = S_3 = \langle W_{\tau_1}, W_{\tau_2} \rangle$$

et

$$W_{\{\tau_1\} \cap \{\tau_2\}} = W_\emptyset = \{e\} = W_{\tau_1} \cap W_{\tau_2}.$$

Nous allons maintenant étudier les classes  $W/W_I$ , en particulier les systèmes de représentants de ces classes. Définissons le sous ensemble de  $W$  suivant :

$$X_I = \{w \in W \mid \ell(ws) > \ell(w), \forall s \in I\},$$

On a alors une propriété importante qui jouera un rôle important dans la suite :

**Proposition 3.** Pour tout  $w \in W$  il existe un unique  $u \in X_I$  et un unique  $v \in W_I$  tel que  $w = uv$ . De plus, on a l'égalité

$$\ell(w) = \ell(u) + \ell(v).$$

Autrement dit,  $u$  est l'unique élément de longueur minimale dans la classe  $wW_I$ .

On a alors que  $X_I$  est un système de représentants de longueur minimale des classes à gauche du sous-groupe parabolique  $W_I$  et que pour tout  $I \subseteq S$ , l'application

$$\begin{aligned} X_I &\longrightarrow W/W_I \\ u &\longmapsto wW_I \end{aligned}$$

est une bijection. Donc en particulier  $X_I \cong W/W_I$ . Afin de se familiariser avec ce résultat, illustrons le avec le groupe symétrique  $S_3$ .

**Exemple 11.** Reprenons notre exemple du groupe symétrique  $S_3$ . Calculons  $X_{\tau_1}$  : trouvons les permutations  $w$  de  $S_3$  telle que  $\ell(w(\tau_1)) > \ell(w)$ . On a que  $(\tau_1)\tau_1 = e$ ,  $(\tau_2\tau_1)\tau_1 = \tau_2$  et  $(\tau_1\tau_2\tau_1)\tau_1 = \tau_1\tau_2$ , donc  $\tau_1, \tau_2\tau_1, \tau_1\tau_2\tau_1$  sont des permutations  $w$  de  $S_3$  tels que  $\ell(w\tau_1) \leq \ell(w)$ . Ainsi  $\tau_1, \tau_2\tau_1, \tau_1\tau_2\tau_1 \notin X_{\tau_1}$ . En revanche,  $e\tau_1 = \tau_1$ ,  $(\tau_2)\tau_1 = \tau_2\tau_1$  et  $(\tau_1\tau_2)\tau_1 = \tau_1\tau_2\tau_1$ , donc  $e, \tau_2$  et  $\tau_1\tau_2$  sont des permutations de  $S_3$  tels que leur longueur augmente quand on les multiplie avec  $\tau_1$ , donc ils appartiennent à  $X_{\tau_1}$ . Finalement :

$$X_{\tau_1} = \{e, \tau_2, \tau_1\tau_2\}.$$

De même on trouve que

$$X_{\tau_2} = \{e, \tau_1, \tau_2\tau_1\}.$$

Enfin,  $X_S = \{e\}$  et  $X_\emptyset = S_3$ . De plus on a que

$$S_3/W_{\tau_1} = \{\{e, \tau_1\}\{\tau_2, \tau_2\tau_1\}\{\tau_1\tau_2, \tau_1\tau_2\tau_1\}\}$$

- donc on a bien -

$$S_3/W_{\tau_1} \cong X_{\tau_1}.$$

On remarque que les éléments de  $X_{\tau_1}$  sont bien les représentants de longueur minimale des éléments de  $S_3/W_{\tau_1}$ . De même on trouve que

$$S_3/W_{\tau_2} \cong X_{\tau_2}$$

$$S_3/W_S \cong X_S$$

$$S_3/W_\emptyset \cong X_\emptyset.$$

On constate dans ce cas que pour chaque  $I \subseteq S$ , l'ensemble  $X_I$  est un système de représentants des classes à gauche de  $W_I$ . C'est là un phénomène général.

## 1.5 Les groupes de Coxeter sont des groupes de réflexions

Les groupes de Coxeter sont des groupes abstraits donnés par une présentation par générateurs et relations, alors que les groupes de réflexions sont des groupes

concrets, car réalisés comme sous-groupes d'un groupe linéaire. Un résultat essentiel est que les groupes de Coxeter finis sont en fait les groupes de réflexions finis.

**Théorème 4.** *Soit  $W$  un groupe de Coxeter fini. Alors  $W$  est un groupe de réflexions fini.*

Nous allons donner une idée de la preuve qui sort du contexte du mémoire mais dont la construction est très intéressante. Pour montrer qu'un groupe de Coxeter fini  $W$  est un groupe de réflexions fini, nous allons en construire une représentation géométrique.

Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter fini. On lui associe l'espace vectoriel réel de dimension fini  $V$  ayant pour base l'ensemble  $\{\alpha_s \mid s \in S\}$  qui est en bijection avec  $S$ . On introduit une forme bilinéaire symétrique  $B$  sur  $V$  dite forme de Tits, en posant :

$$B(\alpha_s, \alpha_t) = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{st}}\right).$$

Par définition  $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1$  et  $B(\alpha_s, \alpha_t) \leq 0$  si  $\alpha_s \neq \alpha_t$ . On peut alors montrer que la forme bilinéaire  $B$  est un produit scalaire. Ceci est un résultat difficile de la théorie (voir (Humphreys, 1990)). Comme de plus  $\alpha_s$  est un vecteur non-isotrope, le sous espace  $H_s$  orthogonal à  $\alpha_s$  relativement à  $B$  est complémentaire à la droite  $\mathbb{R}\alpha_s$ . Maintenant, pour tout  $s \in S$ , on considère la réflexion  $\sigma_s : V \rightarrow V$  telle que :

$$\sigma_s(v) = v - 2B(\alpha_s, v)\alpha_s.$$

On a bien que  $\sigma_s(\alpha_s) = -\alpha_s$ , et  $\sigma_s$  fixe l'hyperplan  $H_s$ . De plus, on remarque que  $\sigma_s$  est d'ordre 2 dans  $GL(V)$ . La représentation géométrique se définit alors par

$$\begin{aligned} \rho : W &\rightarrow GL(V) \\ s &\mapsto \sigma_s. \end{aligned}$$

On peut alors montrer que  $\rho$  est une représentation fidèle dont l'image est un sous-groupe de  $O(V)$  ( $\sigma_s$  préserve la forme  $B$ , c'est à dire que  $B(\sigma_s(u), \sigma_s(v)) = B(u, v)$  pour tout  $u, v \in V$ ). De plus  $\rho$  est une représentation irréductible car  $V$  et le vecteur nul sont les seuls sous espaces stables. Finalement, par cette représentation, le groupe  $W$  est isomorphe à un sous-groupe de  $O(V)$ . Donc  $W$  est un groupe de réflexions fini.

Inversement, chaque groupe de réflexions fini est un groupe de Coxeter fini. Pour montrer ce résultat il faut montrer que le groupe de réflexions est isomorphe à un quotient du groupe libre par des relations (voir les détails dans Humphreys (Humphreys, 1990, chapitre 1, section 1.9)).

**Remarque 2.** Un groupe de Coxeter fini peut toujours se voir comme un groupe de réflexions fini d'un certain espace vectoriel de dimension finie. Pour les groupes de Coxeter infinis, certains peuvent être décrits comme des groupes de réflexions d'un espace affine ou hyperbolique (voir (Humphreys, 1990)).

**Exemple 12.** Reprenons notre exemple préféré  $S_n$  depuis le début pour illustrer cette construction. On sait que  $S_n$  agit sur  $\mathbb{R}^n$  en permutant les coordonnées des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  : soient  $\sigma \in S_n$  et  $v \in \mathbb{R}^n$ , alors

$$\sigma(v) = \sigma(v_1, \dots, v_n) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}).$$

L'action intéressante ici est celle des transpositions. En effet, à chaque transposition  $(i j)$  est associé une réflexion fixant l'hyperplan

$$H_{ij} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v_i = v_j\}.$$

Nous verrons plus tard que ces hyperplans forment un "arrangement d'hyperplans".

Nous allons maintenant souligner d'autres liens entre système de Coxeter et système de racines. Soient  $(W, S)$  un système de Coxeter fini et  $\Delta$  un système de racines simples fixé tel que  $S$  soit l'ensemble des réflexions  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Alors la longueur d'un élément  $w \in W$  satisfait la propriété suivante :

$$\ell(ws_\alpha) > \ell(w) \iff w(\alpha) \in \Phi^+ \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

Observons que les sous-groupes paraboliques  $(W_I)_{I \subseteq S}$  ont pour système de racines simples correspondant

$$\Delta_I = \{\alpha \in \Delta \mid s_\alpha \in I\}$$

et pour système de racines  $\Phi_I = \Phi \cap \mathbb{R}\Delta_I$  (que l'on peut toujours décomposer en  $\Phi_I^+$  et  $\Phi_I^-$ ). Par suite, on peut montrer que pour tout élément  $w \in W_I$  :

$$w = s_1 \cdots s_k \implies s_i \in I \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Nous pouvons aussi lier le système de représentants  $X_I$  au système de racines simples en définissant  $X_I$  de la façon suivante :

$$X_I = \{w \in W \mid w(\Delta_I) \subseteq \Phi^+\}.$$

Enfin, si on choisit  $J \subseteq I \subseteq S$ , alors  $X_J \cap W_I$  est un ensemble de représentants des classes  $wW_J$  de  $W_J$  que l'on note  $X_J^I$ . On définit alors

$$x_J^I = \sum_{w \in X_J^I} w,$$

qui est un élément de l'algèbre de groupe  $QW$ .

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaire pour introduire l'algèbre de descentes et démontrer la formule de Solomon.

## 1.6 Algèbre de descentes d'un groupe de Coxeter fini

Soit  $W$  un groupe de Coxeter fini et  $QW$  l'algèbre du groupe sur le corps  $\mathbb{Q}$  (c'est à dire l'espace vectoriel engendré par les éléments du groupe). En 1976 Solomon définit une sous-algèbre  $\mathcal{D}(W)$  de l'algèbre  $QW$ , appelée *algèbre de descentes de Solomon*, (voir (Solomon, 1976)). Elle est engendrée en tant qu'espace vectoriel par les éléments  $\{x_I\}_{I \subseteq S}$  où

$$x_I = \sum_{w \in X_I} w.$$

Nous allons montrer que  $\mathcal{D}(W)$  est bien une sous-algèbre de  $QW$ . Pour ceci, nous allons montrer la célèbre formule de Solomon :

$$x_I x_J = \sum_{K \subseteq S} a_{IJK} x_K,$$

où

$$a_{IJK} = |\{d \in X_{IJ} \mid d^{-1}Id \cap J = K\}|.$$

Cette formule est un résultat puissant étant donné que les coefficients  $a_{IJK}$  sont des entiers positifs ou nuls (car ils sont le cardinal d'un ensemble). De plus, Solomon a montré que les  $x_I$  sont linéairement indépendants et forment une base de  $\mathcal{D}(W)$  (Solomon, 1976).

**Exemple 13.** Dans le cas du groupe symétrique, l'algèbre de descentes a une interprétation combinatoire simple en termes d'ensembles de descente d'une permutation. En effet, l'ensemble de descentes d'une permutation  $\sigma \in S_n$  noté  $\mathcal{Des}(\sigma)$  se définit par :

$$\mathcal{Des}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) > \sigma(i+1)\}.$$

Donc  $\mathcal{Des}(\sigma) \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ . Par exemple, l'ensemble de descente de  $\sigma = 31524$  est  $\{1, 3\}$ .

On a en fait que

$$\sigma(i) > \sigma(i+1) \iff \ell(\sigma\tau_i) < \ell(\sigma).$$

Puis, pour tout  $K \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ , on définit

$$d_K = \sum_{\sigma \in S_n \mid \mathcal{Des}(\sigma) \subseteq K} \sigma.$$

Solomon a alors prouvé que l'algèbre de descentes  $\mathcal{D}(S_n)$  est une sous-algèbre de l'algèbre  $\mathbb{Z}S_n$  ayant pour base les éléments de l'ensemble

$$\{d_K \mid K \subseteq \{1, \dots, n-1\}\}.$$

On a alors que l'algèbre de descentes du groupe symétrique  $S_n$  sont des sommes de permutations ayant un ensemble de descente en commun. Par exemple dans le cas de  $S_3$ ,  $K$  est un sous ensemble de  $\{1, 2\}$ . On a alors pour  $K = \{1\}$ ,

$$d_K = \sum_{\sigma \in S_3 \mid \mathcal{Des}(\sigma) \subseteq \{1\}} \sigma = 123 + 213 + 312.$$

De même,  $d_{\{2\}} = 123 + 132 + 231$ ,  $d_{\{1,2\}} = 123 + 213 + 312 + 132 + 231 + 321$  et  $d_{\{\emptyset\}} = 123$ .

Ainsi l'algèbre de descentes de  $S_3$  a pour base

$$\{d_{\emptyset}, d_{\{1\}}, d_{\{2\}}, d_{\{1,2\}}\}.$$

Afin de simplifier la preuve de la formule de Solomon, nous allons énoncer et démontrer 3 lemmes remarquables. Reprenons dans un premier temps certaines propriétés essentielles des groupes de Coxeter finis qui seront des arguments fréquemment utilisés dans les prochaines preuves. Soit  $I \subseteq S$  :

- ★ pour tout  $w \in W$ , il existe un unique  $u \in X_I$  et un unique  $v \in W_I$  tel que  $w = uv$ . De plus  $\ell(uv) = \ell(u) + \ell(v)$ .
- ★  $X_I \cong W/W_I$ .
- ★  $w \in X_I \iff \forall \gamma \in \Delta_I, w(\gamma) \in \Phi^+$ .
- ★ pour tout  $u \in W_I$ , si  $\alpha \in \Delta$  et  $u(\alpha) \in \Phi^-$  alors  $\alpha \in \Delta_I$ .
- ★ pour tout  $u \in W_I$ , si  $\beta \in \Phi^+$ ,  $u(\beta) \in \Phi^-$  alors  $\beta \in \Phi_I^+$ .

**Lemme 1.** Soient  $J \subseteq I \subseteq S$ . Alors  $X_J = X_I X_J^I$ .

*Démonstration.* Soient  $u \in X_I$  et  $w \in X_J^I$ . Alors en particulier  $w \in X_J$  et donc  $w(\Delta_J) \subseteq \Phi^+$ . De plus,  $\Delta_J \subseteq \Delta_I$  et  $w \in W_I$  donc  $w(\Delta_J) \subseteq \Phi_I^+$ . Donc  $uw(\Delta_J) \subseteq u(\Phi_I^+) \subseteq \Phi^+$  car  $u \in X_I$ . Donc par définition  $uw \in X_J$ . Ainsi

$$X_I X_J^I = \{uw \mid u \in X_I, w \in X_J^I\} \subseteq X_J. \quad (1.1)$$

Montrons maintenant que  $|X_I X_J^I| = |X_I| |X_J^I|$ . Il suffit de montrer que l'application suivante est bijective :

$$\begin{aligned} f: X_I \times X_J^I &\longrightarrow X_I X_J^I \\ (u, v) &\longmapsto uv. \end{aligned}$$

Premièrement,  $f$  est clairement bien définie et surjective. Soient maintenant  $(u, v), (u', v') \in X_I \times X_J^I$  tels que  $f(u, v) = f(u', v')$ . Alors  $uv = u'v' = w \in W$ . Or on sait que  $w$  a une unique décomposition  $w = u_0 v_0$  avec  $u_0 \in X_I, v_0 \in W_I$ . Comme  $u, u' \in X_I$  et  $v, v' \in W_I$  alors  $u_0 = u = u'$  et  $v_0 = v = v'$ . Donc  $f$  est injective. Ainsi,  $f$  est bijective et en particulier  $|X_I X_J^I| = |X_I| |X_J^I|$ .

Finalement on obtient que

$$|X_I X_J^I| = |X_I| |X_J^I| = |X_I| \cdot \frac{|W_I|}{|W_J|} = |W/W_I| \cdot \frac{|W_I|}{|W_J|} = \left| \frac{W}{W_J} \right| = |X_J|. \quad (1.2)$$

Ainsi, d'après les équations (1.1) et (1.2) on conclut que les ensemble sont égaux, d'où

$$X_J = X_I X_J^I.$$

□

**Remarque 3.** Ce lemme nous permet de conclure que  $x_j = x_I x_j^I$  pour tout  $x_j \in X_J$ .

Notons maintenant  $X_{IJ} = X_I^{-1} \cap X_J$  (pour tout  $I, J \subseteq S$ ).

**Lemme 2.** Pour tout  $I, J \subseteq S$ ,

$$X_J = \bigsqcup_{d \in X_{IJ}} X_{I \cap J d^{-1}}^I d,$$

et donc

$$x_j = \sum_{d \in X_{IJ}} x_{I \cap J d^{-1}}^I d.$$

*Démonstration.* Pour montrer l'égalité d'ensembles, nous allons commencer par montrer la première inclusion  $X_J \subseteq \bigcup_{d \in X_{IJ}} X_{I \cap J d^{-1}}^I d$ , puis l'autre inclusion  $X_J \supseteq \bigcup_{d \in X_{IJ}} X_{I \cap J d^{-1}}^I d$  et enfin que l'union en question est bien disjointe.

Soient  $a \in X_J$ . Alors on sait qu'il existe un unique  $d \in X_I^{-1}$  et un unique  $u \in W_I$  tel que  $a^{-1} = d^{-1} u^{-1}$ . Montrons que  $d \in X_{IJ}$ , puis que  $u \in X_{I \cap J d^{-1}}^I$ .

Soit  $\gamma \in \Delta_J$ , pour montrer que  $d \in X_J$  il suffit de montrer que  $d(\gamma) \in \Phi^+$ . Or on sait que  $a(\gamma) \in \Phi^+$  car  $a \in X_J$ . Donc  $(u(d(\gamma))) \in \Phi^+$ . Supposons maintenant que  $d(\gamma) < 0$ , alors  $\ell(as_\gamma) = \ell(a) + 1$  (car  $\gamma \in \Delta$ ) et donc

$$\begin{aligned} \ell(a) + 1 &= \ell(as_\gamma) \\ &= \ell(uds_\gamma) && \text{car } a = ud \\ &\leq \ell(u) + \ell(ds_\gamma) && \text{d'après la propriété de la longueur} \\ &\leq \ell(u) + \ell(d) - 1 = \ell(a) - 1 && \text{car } d(\gamma) < 0. \end{aligned}$$

On arrive donc à une contradiction. On a donc que  $d(\gamma) \geq 0$ , donc  $d(\gamma) \in \Phi^+$ . Ainsi  $d \in X_J$ . Or on sait que  $d \in X_I^{-1}$  donc on a bien  $d \in X_{IJ}$ .

Montrons maintenant que  $u \in X_{I \cap dJd^{-1}}^I$ . Supposons qu'il existe un  $s \in I \cap dJd^{-1}$  tel que  $\ell(us) < \ell(u)$ . Posons  $r = d^{-1}sd \in J$ . Comme  $a \in X_J, r \in J$ , alors  $\ell(ar) = \ell(a) + 1$  et donc

$$\begin{aligned} \ell(a) + 1 &= \ell(ar) \\ &= \ell(ud(d^{-1}sd)) \quad \text{car } a = ud \text{ et } r = d^{-1}sd \\ &= \ell(USD) \\ &\leq \ell(us) + \ell(d) \\ &< \ell(u) + \ell(d) \quad \text{par hypothèse} \\ &< \ell(a) \end{aligned}$$

qui est une contradiction. Donc pour tout  $s \in I \cap dJd^{-1}$  on a  $\ell(us) > \ell(u)$ . Donc on conclut que  $u \in X_{I \cap dJd^{-1}}$ . De plus  $u \in W_I$  donc on a bien  $u \in X_{I \cap dJd^{-1}}^I$ .

Montrons maintenant la deuxième inclusion. On suppose que  $u \in X_{I \cap dJd^{-1}}^I$  et que  $d \in X_{IJ}$ . On pose  $a = ud$  et on veut montrer que  $a \in X_J$ . Soit  $\eta \in \Delta_J$ . Montrons que  $a(\eta) \in \Phi^+$ . Posons  $\lambda = d(\eta)$ . Alors  $\lambda \in \Phi^+$  car  $d \in X_J$ . On a alors deux cas possible :

- soit  $\lambda \notin \Phi_I^+$  : alors  $ud(\eta) = u(\lambda) \in \Phi^+$  (car sinon  $u(\lambda) < 0 \implies \lambda \in \Phi_I^+$  qui est une contradiction avec l'hypothèse). Ainsi on a que  $a(\eta) \in \Phi^+$ .
- soit  $\lambda \in \Phi_I^+$  : alors  $\gamma \in \Phi_I^+ \cap d(\Delta_J)$  (car  $\gamma = d(\eta)$  avec  $\eta \in \Delta_J$ ). Or

$$\Phi_I^+ \cap d(\Delta_J) \subseteq \Phi_I^+ \cap d(\Phi_I^+) = \Phi_{I \cap dJd^{-1}}^+$$

Comme de plus  $u \in X_{I \cap dJd^{-1}}^I$  alors  $ud(\eta) = u(\lambda) \in \Phi_I^+$ . Ainsi on a que  $a(\eta) \in \Phi^+$ . On a donc bien dans les deux cas que  $a(\eta) \in \Phi^+$  pour tout  $\eta \in \Delta_J$ , donc  $a \in X_J$ .

Finalement, on a montré deux inclusions entre les deux ensembles. On peut donc conclure qu'ils sont égaux :

$$X_J = \bigcup_{d \in X_{IJ}} X_{I \cap dJd^{-1}}^I d.$$

Enfin, montrons que l'union  $\bigcup_{d \in X_{IJ}} X_{I \cap dJd^{-1}}^I d$  est disjointe : soient  $a, a' \in W_I$  et  $d, d' \in X_I^{-1}$  tels que  $ad = a'd' = w \in W$ . Comme tout élément  $w$  possède une unique décomposition  $uv$  avec  $u \in W_I, v \in X_I$ , alors  $a = a'$  et  $d = d'$ . Donc en particulier les ensembles  $X_{I \cap dJd^{-1}}^I d$  sont tous disjoints. Ainsi,

$$X_J = \bigsqcup_{d \in X_{IJ}} X_{I \cap dJd^{-1}}^I d.$$

Finalement, l'union étant disjointe et comme  $x_I^J = \sum_{w \in X_I^J} w$ , alors en passant à la somme on en déduit que pour tout  $x_J \in X_J$  :

$$x_J = \sum_{d \in X_{IJ}} x_{I \cap d}^I d.$$

□

**Lemme 3.** Soit  $I \subseteq S$  et  $d \in X_{IJ}$  tel que  $d^{-1}Id \subseteq S$ , alors

$$X_I d = X_{d^{-1}Id}.$$

*Démonstration.* Montrons dans un premier temps que  $X_I d \subseteq X_{d^{-1}Id}$ . Soient  $x \in X_I$  et  $\alpha \in \Delta_{d^{-1}Id}$ . Alors  $\alpha = d^{-1}(\beta)$  où  $\beta \in \Delta_I$ . D'où

$$xd(\alpha) = xdd^{-1}(\beta) = x(\beta) \in \Phi^+.$$

Donc  $xd \in X_{d^{-1}Id}$ . Ainsi on a bien que  $X_I d \subseteq X_{d^{-1}Id}$ . Puis, on a que  $|X_I d| = |X_I|$ . De plus, comme  $W_I$  et  $W_{d^{-1}Id} = d^{-1}W_I d$  sont conjugués, alors  $W/W_I$  et  $W/W_{d^{-1}Id}$  ont même cardinal et donc  $|X_I| = |X_{d^{-1}Id}|$ . Finalement on obtient que  $|X_I d| = |X_{d^{-1}Id}|$  et ainsi

$$X_I d = X_{d^{-1}Id}.$$

□

Nous sommes maintenant prêt à énoncer et démontrer d'une très belle manière le théorème de Solomon. Cette démonstration est due à Bergeron, Bergeron, Howlett et Taylor (Bergeron et al., 1992).

**Théorème 5.**

$$x_I x_J = \sum_{K \subseteq S} a_{IJK} x_K,$$

où

$$a_{IJK} = |\{d \in X_{IJ} \mid d^{-1}Id \cap J = K\}|.$$

*Démonstration.* Les égalités suivantes découlent des 3 lemmes précédents :

$$\begin{aligned}
 x_I x_J &= x_I \sum_{d \in X_{IJ}} x_{I \cap d}^{I \cap d^{-1}} d && \text{d'après le lemme 2} \\
 &= \sum_{d \in X_{IJ}} x_{I \cap d}^{I \cap d^{-1}} d && \text{d'après le lemme 1} \\
 &= \sum_{d \in X_{IJ}} x_{d^{-1} I \cap J} && \text{d'après le lemme 3} \\
 &= \sum_{K \subseteq S} a_{IJK} x_K
 \end{aligned}$$

où  $a_{IJK} = |\{d \in X_{IJ} \mid d^{-1} I \cap J = K\}|$ . De plus on a bien  $a_{IJK} = 0$  quand  $K \not\subseteq J$ .

□



## CHAPITRE II

### ÉVENTAIL DE COXETER

Nous avons présenté les groupes de Coxeter finis et leurs algèbres de descentes d'un point de vue algébrique. Nous avons aussi décrit explicitement les constantes de structure de cette algèbre pour la base constituée des classe de descentes. Or n'oublions pas que ces résultats dépendent du choix des représentants  $X_I$ . Nous allons maintenant retrouver cette algèbre d'une manière plus naturelle n'incluant pas le choix des  $X_I$ . Nous allons pour cela approfondir l'aspect géométrique des groupes de Coxeter, étudier leurs arrangements d'hyperplans et explorer l'univers fascinant du complexe de Coxeter.

Dans ce chapitre nous allons étudier l'aspect géométrique des groupes de Coxeter finis. C'est une approche due à Tits qui a écrit un appendice dans l'article de Solomon (Solomon, 1976) décrivant les grandes lignes de cette approche. Nous allons tout d'abord introduire la notion d'arrangements d'hyperplans, qui joue un rôle dual à celui des systèmes de racines. Nous définirons les principes généraux sur ces arrangements d'hyperplans tels que les faces, la chambre fondamentale, les sous-groupes stabilisateurs, en mettant en valeur leur rôle géométrique. Puis, nous associerons un arrangement d'hyperplans à tout système de Coxeter. L'intérêt est de pouvoir étiqueter l'éventail de Coxeter (aussi appelé complexe de Coxeter) en donnant une paramétrisation des faces et d'en tirer les principales propriétés qui vivent dans ce complexe. On travaillera avec un groupe de Coxeter fini quelconque en expliquant tout au long de l'étude le cas concret du groupe symétrique.

## 2.1 Cône et éventail d'un espace vectoriel

Afin de définir d'une manière géométrique les faces d'un arrangement d'hyperplans, nous allons commencer par introduire les notions de cône et d'éventail. Pour les détails de cette section, nous renvoyons le lecteur au livre de Ziegler (Ziegler, 2006).

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Un *cône* est un sous ensemble  $C \subseteq V$  tel que

$$\forall u_1, u_2, \dots, u_k \in C, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k \in C, \forall \alpha_i \in \mathbb{R}^+.$$

C'est à dire que pour tous les vecteurs du cône, toutes les combinaisons linéaires positives de ces vecteurs sont des vecteurs inclus dans le cône. Un cône est donc un ensemble convexe. Dans notre cas, nous nous intéressons à un certain type de cône dit *cône polyédral* qui est un cône ayant des faces planes. Par exemple la figure 2.1 représente un cône polyédral dans l'espace. Le cône polyédral n'a pas de surface courbée. À partir

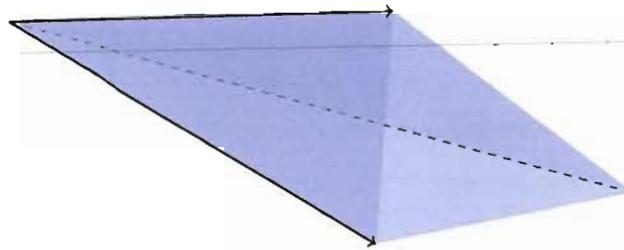


FIGURE 2.1 Cône polyédral : on a représenté dans l'espace un cône polyédral.

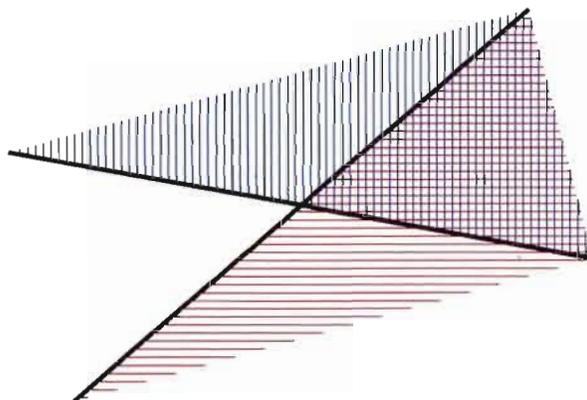
de maintenant nous travaillerons uniquement avec des cônes polyédraux.

Un des principaux résultats de ce sujet affirme qu'il existe toujours un sous ensemble libre  $u_1, \dots, u_k \in C$  (où  $k \leq \dim V$ ) tel que

$$C = \mathbb{R}^+[u_1, \dots, u_k],$$

et donc on pose par définition  $\dim C = \dim_{\mathbb{L}\mathbb{R}}\{u_1, \dots, u_k\} = k$ .

Une autre façon de définir un cône polyédral est de le voir comme l'intersection de plusieurs demi-espaces déterminés par des hyperplans  $H_i$  s'intersectant en un point (voir figure 2.2).



**FIGURE 2.2 Cône polyédral vu comme l'intersection de demi-espaces :** les deux droites sécantes représentées en noires déterminent chacune deux demi-plans. On a hachuré en bleu un des demi-plans défini par une des droites et en rouge un des demi-plans défini par l'autre droite. L'intersection de ces demi-plans hachurée en bleu et rouge est un cône polyédral. On a au total quatre cônes polyédraux.

Or on sait qu'un hyperplan  $H_i$  peut être vu comme le noyau d'une forme linéaire  $\varphi_i$  :

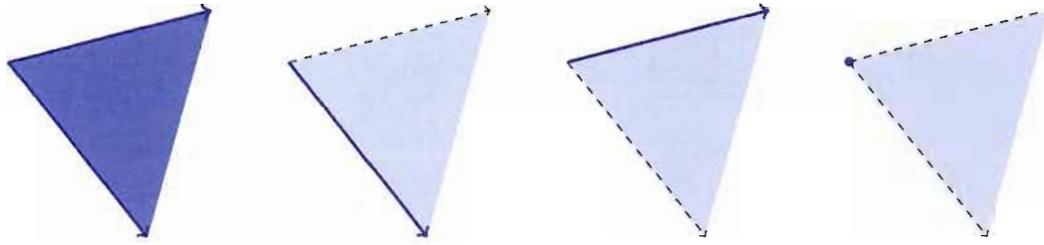
$$H_i = \ker \varphi_i, \quad \varphi_i : V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ainsi, nous pouvons définir une *face* d'un cône de la façon suivante : pour tout  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,

$$F_J = \{x \in C \mid \varphi_i(x) = 0, \forall i \in J\}.$$

Par exemple, la figure 2.3 représente certaines des faces du cône polyédral précédent (figure 2.2).

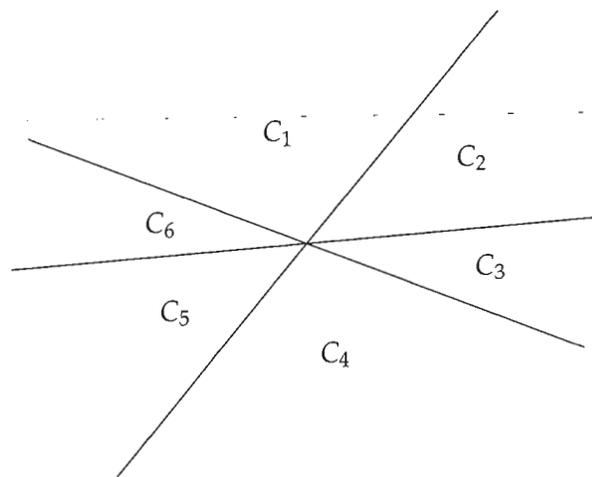
Nous allons maintenant nous intéresser à un ensemble de cônes polyédraux. Dans un espace vectoriel  $V$ , on appelle *éventail* une collection non vide de cônes, noté  $\mathbb{F} = \{C_1, \dots, C_N\}$ , telle que :



**FIGURE 2.3 Certaines faces du cône polyédral :** on a représenté en bleu quatre faces du cône polyédral précédent. Elles sont de dimension 2, 1, 1 et 0 respectivement.

- i) toute face non vide d'un cône de  $\mathbb{F}$  est aussi dans  $\mathbb{F}$ ,
- ii)  $C_i \cap C_j$  est une face de  $C_i$  et de  $C_j$ .

Nous avons représenté sur la figure 2.4 un éventail dans la plan.



**FIGURE 2.4 Un éventail :** on a représenté cinq cônes polyédraux dans le plan. Cette collection de cônes vérifie bien les conditions de la définition, il s'agit d'un éventail.

Dans notre cas, nous allons nous intéresser aux éventails associés à des arrangements d'hyperplans.

## 2.2 Arrangement d'hyperplans vectoriel et éventail associé

On appelle *arrangement d'hyperplans* un ensemble fini d'hyperplans dans un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . On le note  $\mathcal{A}$ . Dans notre étude, les hyperplans s'intersectent toujours en un point (l'origine). Ce cas particulier d'arrangement d'hyperplans est généralement appelé *arrangement d'hyperplans central* (que nous nous contenterons d'appeler arrangement d'hyperplans afin de ne pas alourdir le texte).

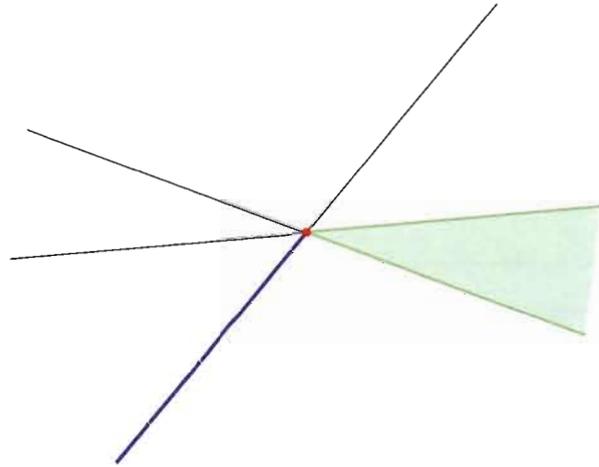
Puis, chaque hyperplan de  $\mathcal{A}$  détermine deux demi-espaces. On peut alors définir les cônes polyédraux associés à  $\mathcal{A}$  comme les intersections fermées non vides de ces demi-espaces (comme vu précédemment). Par suite, l'ensemble de ces cônes forme un éventail : l'éventail associé à  $\mathcal{A}$ .

On peut ensuite définir simplement les *faces*  $F$  de  $\mathcal{A}$  comme les faces de son éventail associé. Les faces sont de dimension comprise entre 0 et  $n$ . De plus, comme  $\mathcal{A}$  est fini alors l'ensemble des faces, notée  $\mathcal{F}$ , est fini. La figure 2.5 est un exemple d'arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$  et de faces de  $\mathcal{A}$ . Les faces sont des sous ensembles fermés de  $V$ . Par ailleurs, on remarque que l'intérieur des faces partitionnent le plan vectoriel  $V$ .

Dans un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$ , on définit une *chambre* comme l'intersection non vide des demi-espaces ouverts déterminés par les hyperplans  $H \in \mathcal{A}$ . La figure 2.6 représente une chambre de  $\mathcal{A}$ .

On remarque que les chambres sont des sous ensembles convexes ouverts de  $V$ . Topologiquement, on peut les voir comme les composantes connexes du complément  $V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ . Par abus de langage nous dirons que les chambres sont des faces de  $\mathcal{A}$  (rigoureusement c'est l'adhérence d'une chambre, c'est à dire un cône de l'éventail associé, qui est une face de  $\mathcal{A}$ ) et les faces d'une chambre sont les faces dû cône associé.

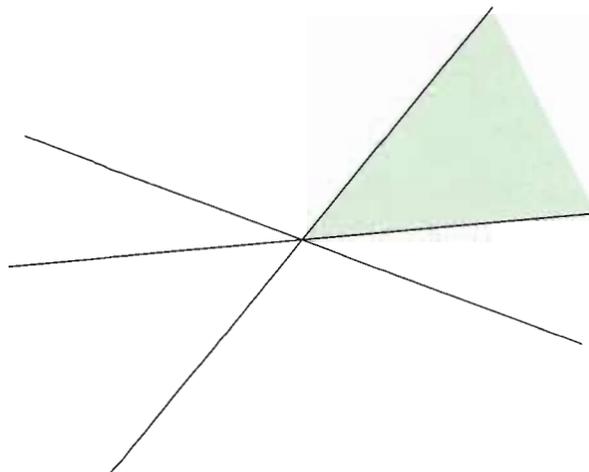
Puis, on appelle un *mur* une face de dimension  $n - 1$  appartenant à un unique hyperplan  $H \in \mathcal{A}$ . La figure 2.7 est un exemple d'un mur. De manière générale, toute face de dimension  $n - k$  est dans l'intersection de  $k$  murs (pour  $1 \leq k \leq n$ ).



**FIGURE 2.5 Trois faces d'un arrangement d'hyperplans** : dans cet arrangement d'hyperplans, on a sept cônes polyédraux associés qui forment bien un éventail. Puis, il y a quinze faces qui partitionnent le plan : le point d'origine est une face de dimension 0, les sept demi-droites sont les faces de dimension 1 et les sept aires sont les faces de dimensions 2. Nous avons représenté en rouge une face de dimension 0, en bleu une face de dimension 1 et en vert une face de dimension 2.

Ensuite, nous dirons que deux chambres  $C$  et  $C'$  sont *adjacentes* si elles ont un mur en commun. On remarque qu'une chambre est toujours adjacente à elle même. On définit alors une *galerie* comme une séquence de chambres  $C = C_0, C_1, \dots, C_\ell = C'$  telles que  $C_i$  et  $C_{i-1}$  sont adjacentes pour tout  $i = 1, \dots, \ell$ . On appelle le nombre  $\ell$  la *longueur* de la galerie. Cette longueur est aussi égale au nombre d'hyperplans de  $\mathcal{A}$  qui séparent  $C$  de  $C'$  (quand  $C \neq C'$ ). On verra plus tard que la longueur minimale entre la chambre fondamentale  $E$  et une chambre quelconque  $C$  correspond également à la longueur de l'élément  $w \in W$  qui étiquète la chambre  $C$ .

Dans notre étude, nous nous intéressons à l'arrangement d'hyperplans associé à un groupe de réflexions fini  $W$ .



**FIGURE 2.6** Une chambre d'un arrangement d'hyperplans : on a représenté en vert une chambre de l'arrangement d'hyperplans. On a au total sept chambres dans cet arrangement d'hyperplans qui sont de dimension 2.

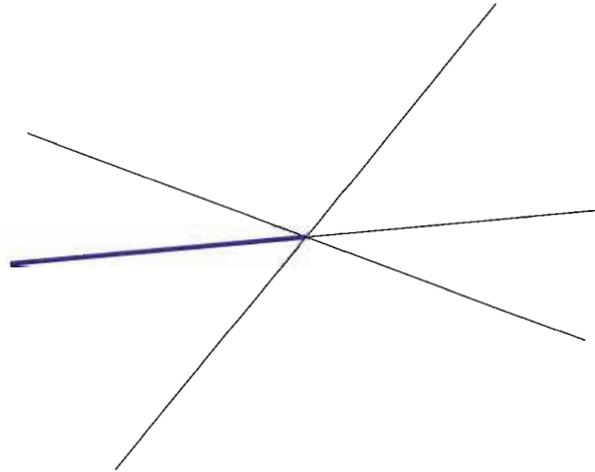
### 2.3 Éventail de Coxeter

À chaque système de Coxeter fini  $(W, S)$  on peut associer un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$ . Cette correspondance se fait simplement de la façon suivante : on a vu que chaque réflexion  $s_\alpha$  de  $W$  (où  $\alpha$  appartient à un système de racines  $\Phi$ ) fixe un hyperplan  $H_\alpha$  et détermine ainsi une droite  $L_\alpha = \mathbb{R}\alpha$  qui lui est orthogonale. L'ensemble de ces hyperplans  $H_\alpha$  étant fini forme un arrangement d'hyperplans que l'on associe à  $W$ . On appelle *éventail de Coxeter* l'éventail associé à cet arrangement d'hyperplans. On le note  $\mathcal{W}$ . On a alors que  $W$  agit sur  $\mathcal{W}$  par permutation.

**Exemple 14.** L'exemple le plus classique pour illustrer la notion d'hyperplans associé à un groupe de réflexions est l'exemple du groupe symétrique  $S_n$ . On sait que  $S_n$  agit sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  en permutant les coordonnées des vecteurs, donc chaque transposition  $(i j)$  est vue comme une réflexion fixant l'hyperplan

$$H_{ij} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v_i = v_j\}.$$

Ces hyperplans étant en nombre fini forment un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$  : l'arran-

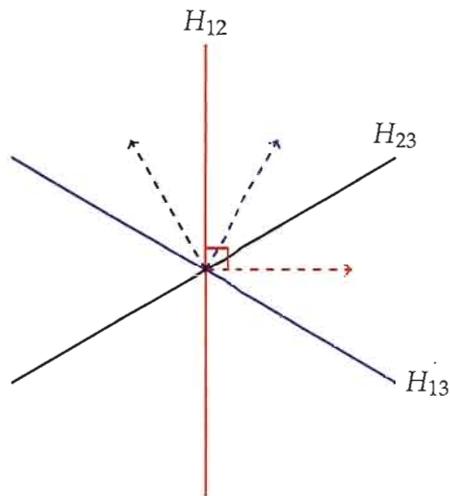


**FIGURE 2.7 Un mur d'un arrangement d'hyperplans :** on a représenté en bleu un mur de l'arrangement d'hyperplans. Au total on a six murs dans cet arrangement d'hyperplans qui sont tous de dimension 1.

gement d'hyperplans associé à  $S_n$ . Notons que ces hyperplans  $H_{ij}$  s'intersectent bien tous à l'origine et que  $W$  agit par permutation sur ces hyperplans : en effet, pour tout  $w \in S_n$ ,  $wH_{ij} = H_{w(i)w(j)}$  qui est un autre hyperplans de  $\mathcal{A}$ .

Quant à la représentation de  $\mathcal{A}$ , comme tous ses hyperplans  $H_{ij}$  s'intersectent dans le sous espace à une dimension  $v_1 = v_2 = \dots = v_n$ , alors l'arrangement d'hyperplans se représente dans l'espace vectoriel de dimension  $n - 1$  en intersectant tous les hyperplans  $H_{ij}$  avec l'hyperplan  $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$ . Par exemple, pour  $n = 3$ , l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$  contient les hyperplans  $H_{12}$ ,  $H_{23}$ ,  $H_{13}$  et se représente sur un plan tel que le montre la figure 2.8.

Sur cet arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$  de  $S_3$  on vérifie les notions précédentes : les intersections des demi-espaces déterminés par les hyperplans  $H_{ij}$  sont bien des cônes polyédraux. La collection de ces cônes est un éventail associé à l'arrangement d'hyperplans : l'éventail de  $S_3$ . Enfin, les faces de  $\mathcal{A}$  sont les faces de l'éventail. Cet arrangement d'hyperplans contient alors treize faces que nous détaillons : tout d'abord,



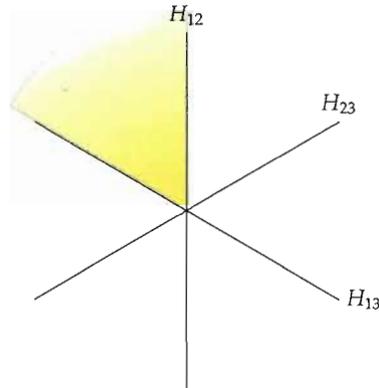
**FIGURE 2.8** Représentation de l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$  : on a représenté les hyperplans  $H_{12}$ ,  $H_{23}$  et  $H_{13}$  avec leurs racines positives associées, intersectés avec l'hyperplan  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ . On obtient alors trois droites s'intersectant à l'origine.

la figure 2.9 représente une des six chambres de l'arrangement  $S_3$ . Puis, rappelons qu'un mur de  $\mathcal{A}$  est une face uniquement déterminée par un hyperplan. La figure 2.10 représente un des six murs. Enfin, l'origine est une face de  $\mathcal{A}$  de dimension 0. On a donc au total treize faces dans l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$ .

Dans le cas où  $n = 4$ , l'arrangement d'hyperplans de  $S_4$  se représente dans l'espace. La figure 2.11 présente l'arrangement d'hyperplans de  $S_4$  intersecté avec un hémisphère de la sphère unité.

Revenons maintenant à l'action de  $W$  sur son éventail associé  $\mathcal{W}$ . Rappelons que  $\mathcal{W}$  est une collection de cônes où chaque cône est associé à une chambre de  $\mathcal{A}$ . Le résultat suivant est une propriété des plus importantes sur l'éventail de Coxeter :

**Théorème 6.** *L'action du groupe  $W$  sur son éventail  $\mathcal{W}$  est simplement transitive, c'est à dire*

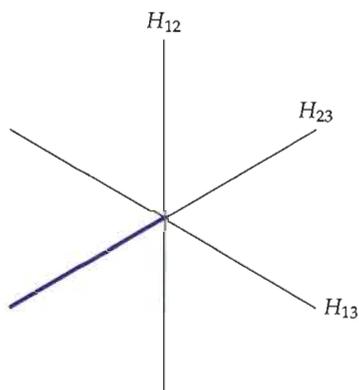


**FIGURE 2.9** Une chambre de l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$  : on a représenté en jaune une des six chambres de  $\mathcal{A}$ . Notons que les chambres sont bien les compléments  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{H_{ij} \in \mathcal{A}} H_{ij}$ .

que pour toutes chambres  $C$  et  $D$  de  $\mathcal{W}$  il existe un unique élément  $w \in W$  tel que  $D = wC$ .

Contrairement à la simplicité du résultat, la preuve elle est difficile. Nous renvoyons le lecteur au livre de Humphreys (Humphreys, 1990) pour une preuve claire et complète de ce résultat. Cette action transitive est importante car elle va nous permettre, une fois une chambre fixée (la chambre fondamentale), d'identifier toutes les autres chambres  $C$  de  $\mathcal{W}$ .

Reprenons l'essentiel de cette partie en soulignant le lien avec le premier chapitre : à chaque système de Coxeter  $(W, S)$  on associe un système de racines  $\Phi$ . On peut alors faire correspondre un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$  où ses hyperplans sont ceux fixés par les réflexions  $\alpha$  tels que  $s_\alpha \in \Phi^+$  (c'est à dire les hyperplans orthogonaux aux racines de  $\Phi^+$ ). On définit des faces sur cet arrangement d'hyperplans, comme par exemple les chambres et les murs. Néanmoins, une des chambres est particulièrement intéressante : la chambre fondamentale. Elle va en effet nous permettre de paramétriser naturellement toutes les faces de l'arrangement d'hyperplans d'un groupe de Coxeter.



**FIGURE 2.10** Un mur de l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$  : on a représenté en bleu un mur de  $\mathcal{A}$ . Au total, l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$  contient six murs.

## 2.4 Chambre fondamentale

Soient  $(W, S)$  un système de Coxeter,  $\Phi$  le système de racines associé et  $\mathcal{A}$  l'arrangement d'hyperplans associé. On sait qu'un hyperplan  $H_\alpha$  correspondant à une racine  $\alpha$  coupe l'espace vectoriel  $V$  en deux demi-espaces ouverts. On peut décrire plus précisément ce fait en définissant ces demi-espaces de la façon suivante :

$$V_\alpha^+ = \{\beta \in V \mid (\beta, \alpha) > 0\}$$

et

$$V_\alpha^- = \{\beta \in V \mid (\beta, \alpha) < 0\}.$$

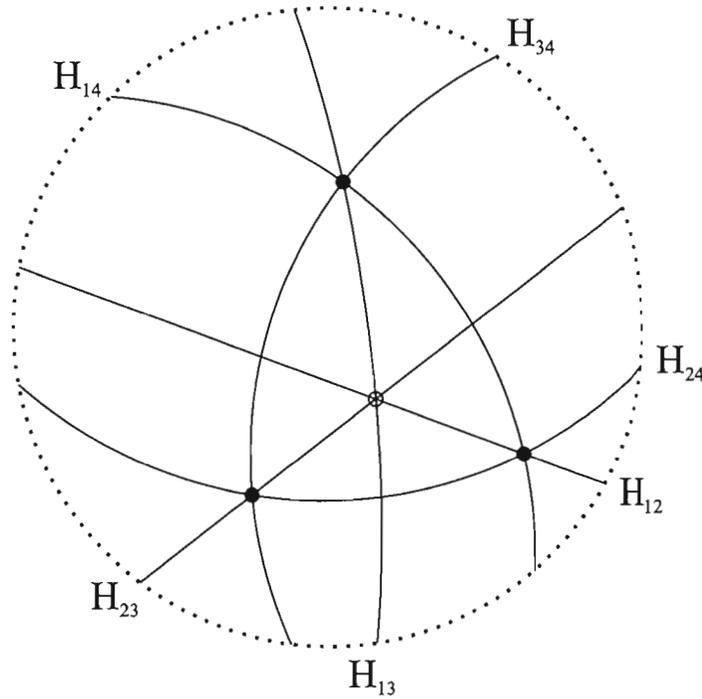
**Exemple 15.** Par exemple, la figure 2.12 présente dans le plan l'hyperplan  $H_{12}$  comme une droite déterminant deux demi-plans de  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $\Delta$  est un système simple du système de racines  $\Phi$ , alors la chambre

$$E = \bigcap_{\alpha \in \Delta} V_\alpha^+$$

est la *chambre fondamentale*. Ainsi,

$$E = \{\beta \in V \mid (\beta, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta\}.$$



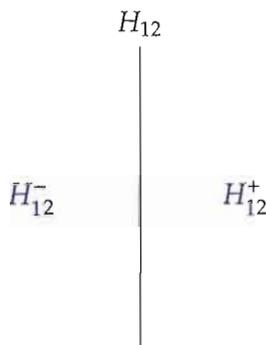
**FIGURE 2.11** Arrangement d'hyperplans de  $S_4$  : on a représenté les six hyperplans de l'arrangement d'hyperplans de  $S_4$  intersectés avec un hémisphère de la sphère unité. L'équateur ne correspondant à aucun des hyperplans de l'arrangement est représenté en pointillé.

**Exemple 16.** En reprenant l'exemple de  $S_3$  avec son système de racines (voir figure 2.8), la chambre fondamentale est celle représentée sur la figure 2.13.

L'outil principal de la chambre fondamentale est l'étude de ses faces.

**Exemple 17.** La figure 2.14 représente les quatre faces de la chambre fondamentale de  $S_3$ .

Les faces de la chambre fondamentale ont une propriété essentielle : nous allons montrer qu'à chaque faces de  $E$  on peut associer un unique sous ensemble  $I \subseteq S$ . Tout d'abord rappelons que  $E = \bigcap_{\alpha \in \Delta} V_{\alpha}^+$ . Soit  $D$  l'adhérence de  $E$ , c'est à dire que  $D = \bar{E} =$



**FIGURE 2.12** Demi-plans ouverts  $H_{12}^+, H_{12}^-$  de  $\mathbb{R}^2$  déterminés par la droite  $H_{12}$  : on peut voir  $H_{12}$  comme le noyau de l'application  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui envoie  $x = (x_1, x_2)$  sur  $x_1$ . On a alors que  $H_{12}^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x) > 0\}$  et  $H_{12}^- = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x) < 0\}$ .

$\bigcap_{\alpha \in \Delta} \bar{V}_\alpha^+$  est un cône polyédral contenant  $E$ , appelé parfois *domaine fondamental*. On sait alors que chaque face propre de  $E$  est contenue dans un ou plusieurs murs de  $D$  qui eux sont contenus dans les hyperplans  $H_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Autrement dit, si  $F$  est une face de  $E$ , alors il existe un  $I \subseteq S$  tel que

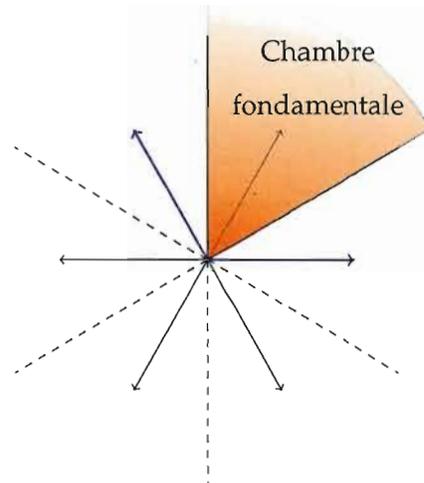
$$F \subseteq \bigcap_{s \in I} H_{\alpha_s} \text{ et } F \not\subseteq H_{\alpha_r} \text{ si } r \in S \setminus I.$$

Ceci est équivalent à dire que  $F = \{v \in V \mid (v, \alpha_s) = 0, \forall s \in I \text{ et } (v, \alpha_s) \geq 0, \forall s \in S \setminus I\}$ . On note cette face  $F_I$ .

Réciproquement, si on pose  $F_I = \{v \in V \mid (v, \alpha_s) = 0, \forall s \in I \text{ et } (v, \alpha_s) \geq 0, \forall s \in S \setminus I\}$ , alors forcément  $F_I = D \cap \bigcap_{s \in I} H_{\alpha_s} = \bigcap_{s \in I} (D \cap H_{\alpha_s})$ . Or  $D \cap H_{\alpha_s}$  est un mur de  $D$  et  $D = \bar{E}$  est un cône polyédral donc  $F_I$  est une face de  $E$ . Ainsi les faces de  $E$  s'écrivent de la façon suivante :

$$F_I = \{v \in V \mid (v, \alpha_s) = 0, \forall s \in I \text{ et } (v, \alpha_s) \geq 0, \forall s \in S \setminus I\},$$

pour un certain  $I \subseteq S$ . Par exemple  $F_\emptyset = E$  et  $F_S = \{e\}$ . De plus on a que  $\dim F_I = |S \setminus I|$ .



**FIGURE 2.13** Chambre fondamentale de  $S_3$  : on a représenté en bleu les racines simples du système de racines associé à  $S_3$  et en rouge la chambre fondamentale.

Cette remarquable construction va nous permettre de définir une bijection entre les sous-groupes paraboliques  $W_I$  de  $W$  et les faces  $F_I$  de  $E$ .

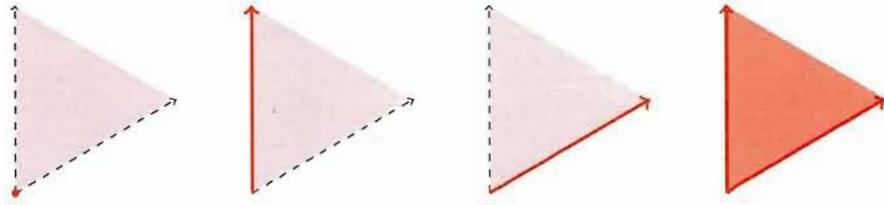
## 2.5 Sous-groupes paraboliques

Soient  $(W, S)$  un système de Coxeter,  $\Phi$  un système de racines associé et  $\Delta$  le système simple du système de racines  $\Phi$ . On a vu que pour tout sous ensemble  $I \subseteq S$  on définit le sous-groupe parabolique  $W_I$  par

$$W_I = \langle I \rangle.$$

Or on a vu dans la section précédente qu'à chaque  $I \subseteq S$  on peut associer une unique face  $F_I$  de  $E$ . On obtient alors le théorème suivant :

**Théorème 7.** Soit  $\mathcal{F}_E$  l'ensemble des faces de la chambre fondamentale  $E$ . Alors l'application



**FIGURE 2.14** Faces de la chambre fondamentale de  $S_3$ , de dimension 0, 1, 1 et 2 respectivement.

suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_E &\longrightarrow \{W_I \mid I \subseteq S\} \\ F_I &\mapsto W_I\end{aligned}$$

est une bijection.

C'est à dire qu'à chaque face  $F_I$  de  $E$  on peut associer un unique sous-groupe parabolique  $W_I$ ,  $I \subseteq S$ . Par exemple, pour  $F_S = \{e\}$  le sous-groupe parabolique associé est  $W_S = W$ . De même, pour  $F_\emptyset = E$  on associe le sous-groupe parabolique  $W_\emptyset = \{e\}$ . Ce résultat important établit une première étape dans la paramétrisation des faces de  $\mathcal{A}$  puisqu'il paramètre les faces de  $E$  avec des ensembles d'éléments de  $W$ . Il fait ainsi un premier lien entre les aspects géométriques et algébriques d'un groupe de Coxeter. La proposition suivante fait clairement le lien entre les faces de  $E$  et les sous-groupes paraboliques :

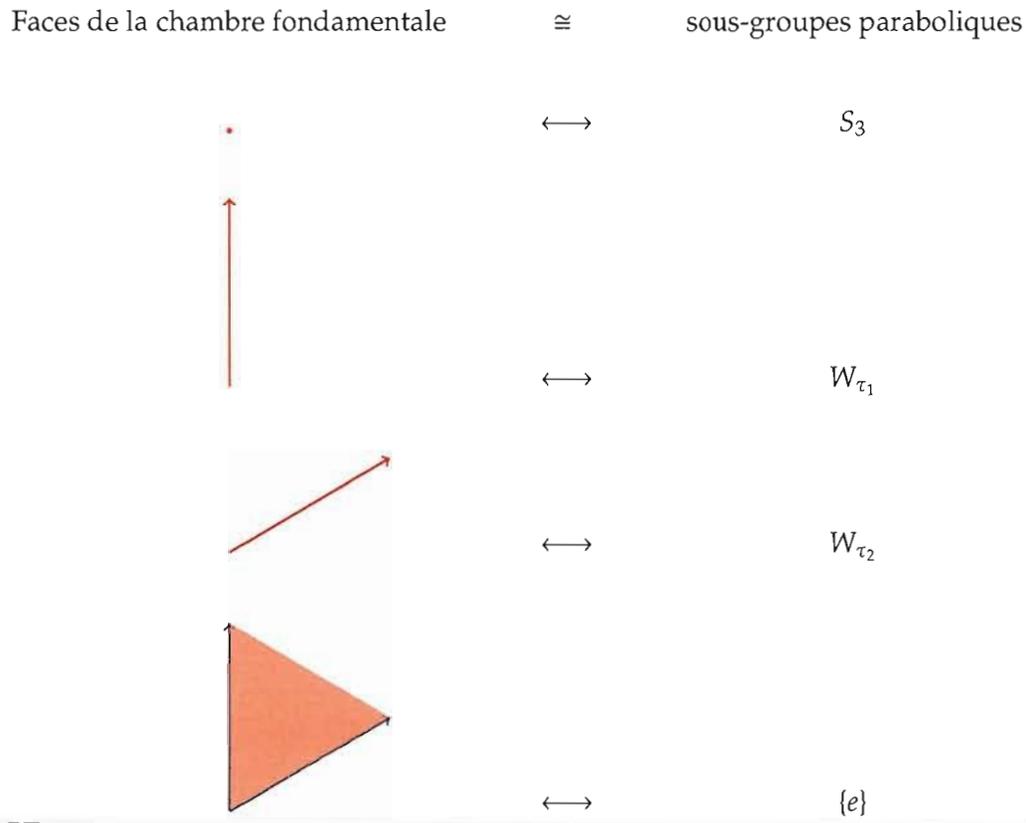
**Proposition 4.** Soit  $I \subseteq S$ , alors

$$\text{Stab}(F_I) = W_I,$$

où  $\text{Stab}(F_I) = \{w \in W \mid w(F_I) = F_I\}$ .

La preuve de ce résultat est très technique. Nous renvoyons le lecteur à la preuve de Humphreys (Humphreys, 1990).

**Exemple 18.** Dans le cas du groupe symétrique  $S_3$ , reprenons ses quatre sous-groupes paraboliques :  $\{e\}$ ,  $W_{\tau_1}$ ,  $W_{\tau_2}$  et  $S_3$ . Nous pouvons alors leur associer les quatre faces de la chambre fondamentale de façon bijective comme le montre par exemple la figure 2.15.



**FIGURE 2.15** Bijection entre les faces de la chambre fondamentale et les sous-groupes paraboliques de  $S_3$  : nous avons associé de manière bijective les quatre faces de la chambre fondamentale de  $S_3$  avec les 4 sous-groupes paraboliques de  $S_3$ .

Cette bijection entre les faces de la chambre fondamentale et les sous-groupes paraboliques est la clé de la paramétrisation des faces de l'arrangement d'hyperplans. Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour étiqueter l'éventail de Coxeter.

## 2.6 Étiquetage de l'éventail de Coxeter

Nous allons utiliser l'action simplement transitive du groupe de Coxeter fini  $W$  sur son éventail  $\mathcal{W}$  pour nommer chaque faces de l'arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$  associé à  $\mathcal{W}$ .

**Théorème 8.** Soit  $E$  la chambre fondamentale de l'éventail de Coxeter  $\mathcal{W}$  d'un groupe de Coxeter fini  $W$ . L'application

$$\begin{aligned} g: W &\longrightarrow \mathcal{W} \\ w &\longmapsto wE \end{aligned}$$

est une bijection entre les éléments de  $W$  et les chambres de  $\mathcal{W}$ .

*Démonstration.* La preuve est immédiate avec l'argument de l'action simplement transitive : soit  $C$  une chambre de  $\mathcal{W}$ , alors d'après l'action simplement transitive de  $W$  sur  $\mathcal{W}$  il existe un unique  $w \in W$  tel que  $g(w) = wE = C$ . Donc  $g$  est bijective.  $\square$

Ainsi, nous étiquetons la chambre fondamentale  $E$  par la réflexion identité de  $W$  ainsi que chaque face de  $E$  par le sous-groupe parabolique correspondant. Puis nous étiquetons chaque chambre  $C$  de  $\mathcal{W}$  avec  $w \in W$  tel que  $wE = C$ . Ensuite, pour étiqueter les autres faces de  $\mathcal{A}$ , montrons d'abord que si  $F$  est une face d'une chambre  $C$  (où  $wE = C$ ), alors  $w^{-1}(F)$  est une face de  $E$ . On sait que  $F$  est contenu dans certains hyperplans  $H_i, i \in I \subseteq S$  de  $\mathcal{A}$ . Comme  $W$  agit sur  $\mathcal{A}$  alors l'image par  $w^{-1}$  de ces hyperplans  $H_i$  sont dans  $\mathcal{A}$  et plus précisément dans  $D = \bar{E}$ . Donc  $w^{-1}(F) \subseteq w^{-1}(\cap_{i \in I} H_i) \subseteq D$ . Or on a que  $w^{-1}(\cap_{i \in I} H_i) = \cap_{i \in I} w^{-1}(H_i)$ . De plus,  $w^{-1}(H_i) \in \mathcal{A}$  et  $w^{-1}(H_i) \cap D \neq \emptyset$  donc  $w^{-1}(H_i) = H_\alpha$  pour un certain  $\alpha \in \Delta$ . Finalement,  $w^{-1}(F)$  est contenu dans l'intersection de certains hyperplans  $H_\alpha$  avec  $\alpha \in \Delta$ , donc  $w^{-1}(F)$  est une face de  $E$ , notons la  $F_I$ . On étiquette alors  $F$  par  $wW_I$ .

L'observation suivante est immédiate :

**Proposition 5.** L'action du groupe  $W$  préserve l'étiquetage des faces de l'éventail de Coxeter  $\mathcal{W}$ .

Finalement, on a que chaque face de l'arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$  est l'image d'une face de la chambre fondamentale  $E$  par un élément  $w$  de  $W$ . Donc chaque face de  $\mathcal{A}$  appartient à une orbite d'une unique face de  $E$ . De plus, chaque face  $F$  de  $E$  s'identifie de façon bijective avec un sous-groupe parabolique  $W_I$  de  $W$  où  $I \subseteq S$ . Notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble

des faces de  $\mathcal{A}$  et rappelons que  $F_I$  est la face de  $E$  en correspondance bijective avec  $W_I$ , on peut alors définir la bijection suivante :

**Théorème 9.** *L'application*

$$\begin{aligned} f : \mathcal{F} &\longrightarrow \bigcup_{I \subseteq S} W/W_I \\ w(F_I) &\longmapsto wW_I \end{aligned}$$

est une bijection entre l'ensemble des faces de l'arrangement d'hyperplans et l'ensemble des classes à gauche des sous-groupes paraboliques  $W_I$  avec  $I \subseteq S$ .

*Démonstration.* Commençons par montrer que cette application est bien définie, c'est à dire que nous supposons que  $w(F_I) = g(F_J)$  et nous devons montrer qu'alors  $wW_I = gW_J$  (pour  $w, g \in W, I, J \subseteq S$  et  $F_I, F_J$  des faces de la chambre fondamentale  $E$ ). Soient  $w, g \in W$  et  $I, J \subseteq S$  tels que  $w(F_I) = g(F_J)$ , alors  $g^{-1}wF_I = F_J$ . Or chaque face de l'arrangement d'hyperplans appartient à une orbite d'une unique face de  $E$ . Comme  $F_I$  et  $F_J$  sont deux faces de  $E$  telle que l'une est contenue dans l'orbite de l'autre ( $g^{-1}wF_I = F_J$  où  $g^{-1}w \in W$ ), alors forcément

$$F_I = F_J.$$

Donc d'après la proposition 4 on a que  $W_I = \text{stab}(F_I) = \text{stab}(F_J) = W_J$  et comme  $g^{-1}w \in \text{Stab}(F_I) = W_I$  alors

$$wW_I = gW_J.$$

Donc on en déduit que  $f$  est bien définie. Puis, pour montrer que  $f$  est une bijection, il suffit de montrer que son application inverse

$$\begin{aligned} f^{-1} : \bigcup_{I \subseteq S} W/W_I &\longrightarrow \mathcal{F} \\ wW_I &\longmapsto w(F_I) \end{aligned}$$

est bien définie. Supposons que  $wW_I = gW_J$  et montrons qu'alors  $w(F_I) = g(F_J)$ . Si  $wW_I = gW_J$  alors on a que

$$wW_I = gW_J \implies g^{-1}wW_I = W_J \implies g^{-1}w \in W_J \implies w^{-1}g \in W_J \implies W_I = W_J \implies I = J.$$

Ainsi on a que  $W_I = \text{Stab}(F_I) = \text{Stab}(F_J) = W_J$  et  $g^{-1}w \in \text{Stab}(F_I)$  donc  $g^{-1}wF_I = F_J$  et donc

$$wF_I = gF_J.$$

Finalement on peut conclure que  $f$  est bijective.  $\square$

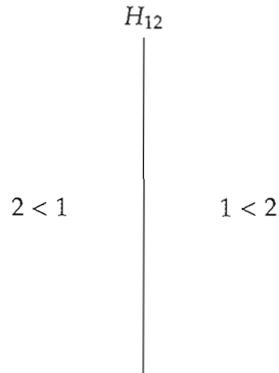
Afin de conclure cette partie, nous allons étudier en détail le cas du groupe symétrique  $S_n$ , plus particulièrement le groupe  $S_3$ . Le groupe symétrique est en effet intéressant puisqu'il existe deux méthodes d'étiquetage de son arrangement d'hyperplans. Tout d'abord, rappelons que les transpositions  $(i j)$  qui engendrent  $S_n$  agissent sur les hyperplans  $H_{ij}$  par réflexions. Par exemple, soit  $H_{13} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = v_3\}$  un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\omega = \tau_1$  alors

$$\tau_1 H_{13} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_2 = v_3\} = H_{23}.$$

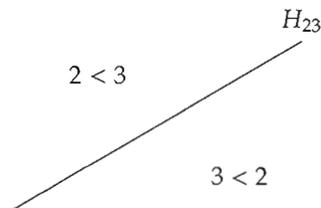
Supposons maintenant que  $v \in \mathbb{R}^3$  n'est dans aucun des hyperplans  $H_{ij}$ . On a alors que toutes les coordonnées de  $v$  sont distinctes. Ainsi, il existe  $\omega \in S_n$  telle que

$$v_{\omega(1)} < v_{\omega(2)} < \dots < v_{\omega(n)}.$$

De plus, tous les vecteurs de la chambre vont satisfaire cette identité. C'est ainsi que nous pouvons associer à chaque chambre de l'arrangement d'hyperplans une permutation de  $S_n$ . Par exemple, étiquetons l'éventail de Coxeter du groupe  $S_3$ . On sait que l'on peut représenter l'arrangement d'hyperplans associé à  $S_3$  par trois droites dans le plan (voir figure 2.8). Toutes les figures suivantes représentent donc les hyperplans de  $S_3$  intersectés avec le plan  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ . Commençons par choisir arbitrairement l'ordre des coordonnées sur les deux demi-plans que sépare un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$  (comme le montre par exemple la figure 2.16). De même, choisissons arbitrairement l'ordre des coordonnées par rapport à un autre hyperplan (voir figure 2.17). On obtient donc la représentation donnée par la figure 2.18. On en déduit ensuite la séparation du dernier hyperplan (figure 2.19). On combine alors ces figures et on se rappelle que les hyperplans  $H_{ij} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_i = v_j\}$  pour finalement obtenir la représentation complète (voir figure 2.20).



**FIGURE 2.16** 1ère étape de l'étiquetage :  $1 < 2$  signifie que tous les vecteurs de ce demi-plan ont la propriété que  $v_1 < v_2$ .

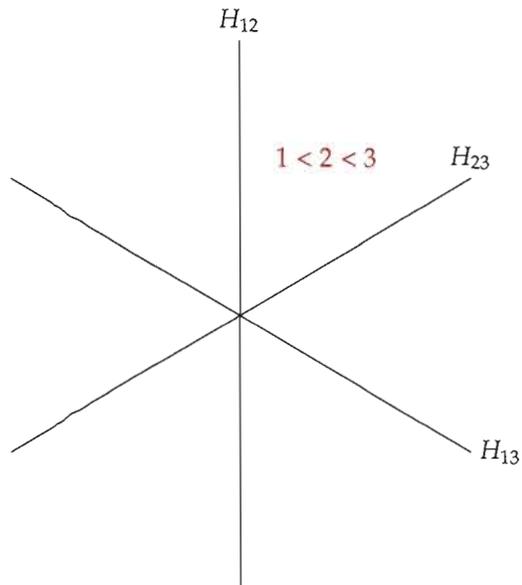


**FIGURE 2.17** 2ème étape de l'étiquetage : de même,  $2 < 3$  signifie que les vecteurs de ce demi-plan satisfont  $v_2 < v_3$ .

Avant d'identifier chaque face de  $\mathcal{A}$  avec des éléments de  $S_3$ , nous introduisons une notation : pour l'ensemble  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , la notation  $(\{i, j\}, \{k\})$  désigne les permutations qui envoient  $\{1, 2\}$  sur  $\{i, j\}$  et 3 sur  $k$ . Dans la même idée,  $(\{i\}, \{j, k\})$  désigne les permutations qui envoient 1 sur  $i$  et  $\{1, 2\}$  sur  $\{j, k\}$  et de même, l'ensemble  $(\{i\}, \{j\}, \{k\})$  contient la seule permutation  $ijk$ . Ces ensembles correspondent en fait aux sous-groupes de Young de  $S_3$ . Afin d'alléger la notation, nous omettons d'écrire les accolades et les virgules qu'elles contiennent. Par exemple,

$$\{132, 312\} = (\{1, 3\}, \{2\}) \longleftrightarrow (13, 2).$$

Nous allons maintenant procéder à l'étiquetage des faces de  $\mathcal{A}$  de la façon sui-



**FIGURE 2.18 3ème étape de l'étiquetage** : d'après les figures précédentes, la chambre  $1 < 2 < 3$  est maintenant fixée. Tous les vecteurs de cette chambre satisfont la propriété  $v_1 < v_2 < v_3$ .

vante : rappelons qu'à chaque inégalité de la figure 2.20, on associe un vecteur  $v$  dont les coordonnées vérifient cette même inégalité. Nous allons alors associer à cette face la ou les permutations  $w \in S_3$  qui satisfait (ou satisfont)  $v_{w(1)} \leq v_{w(2)} \leq v_{w(3)}$ . Par exemple,

$$2 < 1 = 3 \longleftrightarrow v_2 < v_1 = v_3 \longleftrightarrow (2, 13)$$

où  $(2, 13)$  est l'écriture simplifiée de l'ensemble  $(\{2\}, \{13\})$ . De cette façon, on associe

$$2 = 3 < 1 \longleftrightarrow (23, 1)$$

et

$$3 < 2 < 1 \longleftrightarrow (3, 2, 1)$$

qui est en fait la permutation 321. On obtient ainsi l'étiquetage représenté sur la figure 2.21. On remarque alors que cet étiquetage peut aussi être interprété comme un étiquetage par les compositions de  $[3]$ .

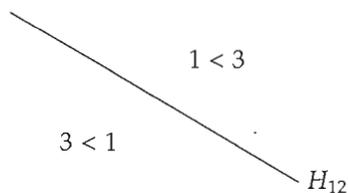


FIGURE 2.19 4ème étape de l'étiquetage : le choix de l'ordre des coordonnées de ces demi-plans se déduit de la figure précédente.

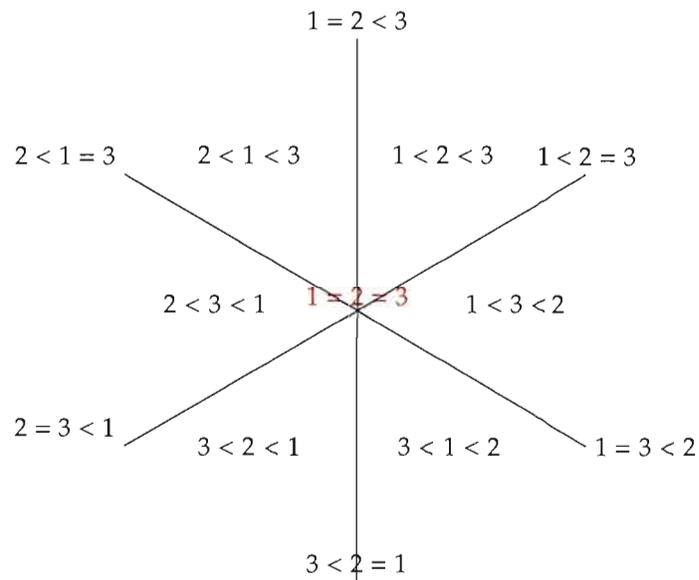
**Remarque 4.** Cette notation nous permet de voir les faces de l'arrangement de  $S_n$  comme les compositions de  $[n]$ . On remarque qu'alors les chambres sont les compositions de  $[n]$  en singletons. Ces résultats seront repris lors de notre prochain chapitre.

L'autre construction consiste à appliquer la méthode décrite au début de cette section : on définit la chambre fondamentale  $E$  par la permutation  $e$ , puis on étiquette les faces de  $E$  par les sous groupes paraboliques. Puis, comme chaque face de  $\mathcal{A}$  appartient à une orbite d'une unique face de  $E$  on peut alors étiqueter toutes les faces de  $\mathcal{A}$ . On peut ainsi étiqueter l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$  comme le montre la figure 2.22.

Nous avons ainsi étiqueté l'éventail de Coxeter de  $S_3$  et nous voyons clairement la bijection entre les faces de l'arrangement et les ensemble  $\{wW_I \mid w \in S_3, I \subseteq S\}$ .

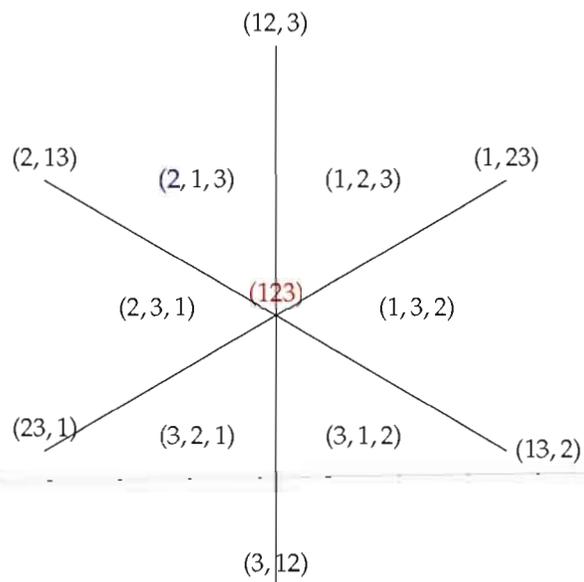
**Exemple 19.** Regardons maintenant le cas de  $S_4$  : la figure 2.23 montre l'arrangement d'hyperplans de  $S_4$  intersecté avec un hémisphère de la sphère unité que l'on a étiqueté de la même façon que l'arrangement de  $S_3$  à la figure 2.21. Encore une fois, on peut voir cet étiquetage comme les compositions de  $[4]$ .

En conclusion de ce chapitre, nous avons paramétré les faces de l'arrangement d'hyperplans avec des éléments du groupes de Coxeter fini  $W$ . Rappelons toutefois que nous voulons retrouver l'algèbre de descentes de  $W$ . C'est pourquoi nous allons maintenant approfondir l'étude de ses faces associées et construire une algèbre de faces. Cette algèbre de faces nous permettra de construire un isomorphisme d'algèbre faisant

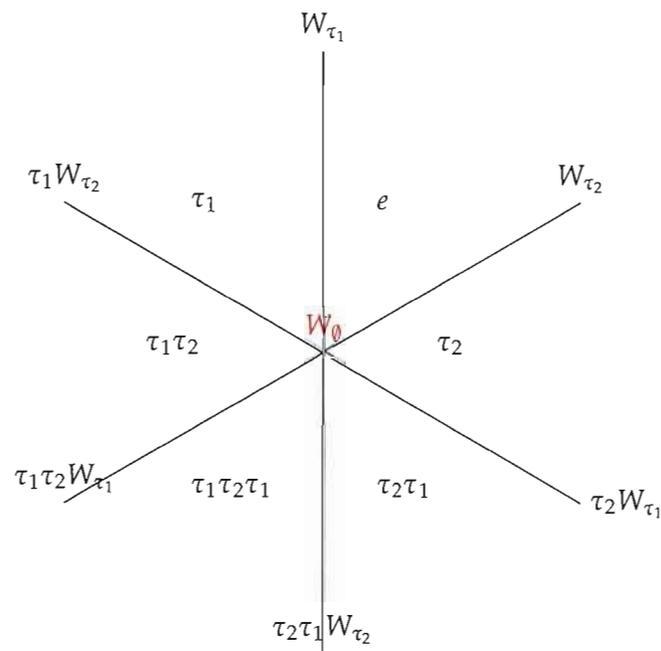


**FIGURE 2.20** 5ème étape de l'étiquetage : on obtient l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$  étiqueté par des inégalités.

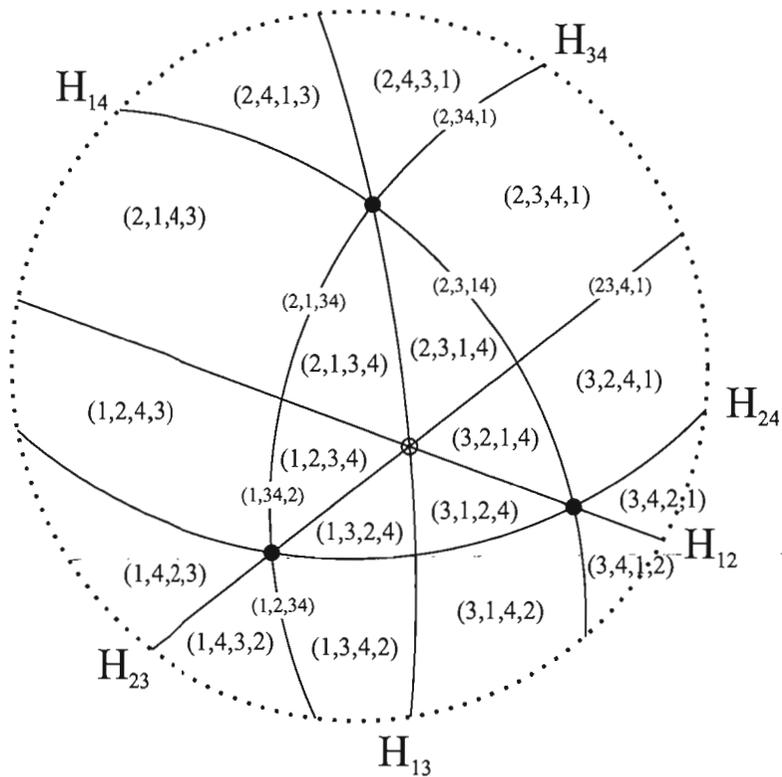
intervenir l'algèbre de descentes.



**FIGURE 2.21** Représentation finale de l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$  étiqueté : on a étiqueté l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$  avec des ensembles d'éléments de  $S_3$  (par les classes à gauche des sous-groupes de Young de  $S_3$ .) Cet étiquetage peut aussi être vu comme un étiquetage par les compositions de  $[3]$ .



**FIGURE 2.22** Étiquetage de l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$  : nous avons étiqueté l'éventail de  $S_3$  avec la méthode décrite au début de cette section. On voit bien que la longueur de la galerie minimale entre la chambre fondamentale  $E$  et une chambre  $C$  est égale à la longueur de  $w \in S_3$  qui satisfait  $wE = C$ .



**FIGURE 2.23** Arrangement d'hyperplans de  $S_4$  étiqueté : on a représenté une partie de l'arrangement de  $S_4$  étiqueté. Cet étiquetage est constitué d'ensemble d'éléments de  $S_4$  mais on peut aussi l'interpréter comme un étiquetage par les compositions de  $[4]$ .

## CHAPITRE III

### ALGÈBRE DE FACES

Dans ce chapitre nous allons définir l'algèbre de faces d'un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$  et étudier sa structure. Notre but est de construire un anti-isomorphisme d'algèbres entre l'algèbre de descentes d'un groupe de Coxeter fini  $W$  et sa sous-algèbre de faces invariante. Tout d'abord, afin de construire un produit sur l'ensemble des faces  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$ , nous allons commencer par introduire la notion de vecteur signe. Puis nous développerons un poset sur l'ensemble des faces que nous approfondirons pour finalement obtenir un monoïde de face. C'est ainsi que nous pourrons parler d'algèbre de faces  $k\mathcal{F}$  (où  $k$  est un corps) et plus particulièrement de la sous-algèbre invariante  $(k\mathcal{F})^W$ . Le groupe symétrique, ayant été notre appui principal, fera l'objet de notre première démonstration de l'anti-isomorphisme désiré. Puis nous généraliserons le résultat aux groupes de Coxeter finis. Dans ce chapitre, les faces seront notées en minuscules (souvent par  $x$  ou  $y$ ) car elles vont être utilisées comme des éléments d'un ensemble (contrairement au chapitre précédent où les faces étaient regardés comme un ensemble géométrique). Dans ce chapitre, nous nous sommes appuyés sur la thèse de Franco Saliola (Saliola, 2006).

#### 3.1 Vecteur signe et relation de faces

Dans cette section, nous allons associer à chaque face d'un arrangement d'hyperplans un vecteur signe et construire une relation de faces. Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter et  $\mathcal{A}$  l'arrangement d'hyperplans associé. Rappelons que chaque hyperplan  $H$

d'un espace vectoriel  $V$  est associé à une forme linéaire  $\varphi_H : V \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$H = \{\beta \in V \mid \varphi_H(\beta) = 0\}.$$

Ainsi chaque hyperplan  $H \in \mathcal{A}$  détermine deux demi-espaces de  $\mathbb{R}^n$  que l'on peut noter  $H^+$  et  $H^-$  (par exemple,  $H^+ = \{x \in V \mid \phi(x) \geq 0\}$  et réciproquement  $H^- = \{x \in V \mid \phi(x) \leq 0\}$ ). À partir de ce résultat, on peut définir (de façon équivalente à notre première définition) une face  $x$  de  $\mathcal{A}$  comme l'adhérence de l'intersection non vide suivante :

$$x = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H^{\sigma_H(x)}$$

où  $\sigma(x) \in \{+, -, \circ\}$  et  $H^\circ = H$ . Pour toute face  $x$  de  $\mathcal{A}$ , on associe le vecteur  $\sigma(x) = (\sigma_H(x))_{H \in \mathcal{A}}$ , appelé *vecteur signe* de  $x$ . D'après cette définition, les faces sont des ensembles fermés. Or on aimerait regarder une chambre comme une face malgré qu'elle soit un ensemble ouvert. Rigoureusement une chambre est en fait l'intérieur d'une face. On peut alors construire une bijection entre les deux ensembles donnée par l'intérieur et l'adhérence des faces. On peut donc regarder l'ensemble  $\mathcal{C}$  comme un sous ensemble de  $\mathcal{F}$ .

**Exemple 20.** On a illustré cette nouvelle approche des faces sur la figure 3.1.

Avec cette nouvelle notion, on a la propriété que

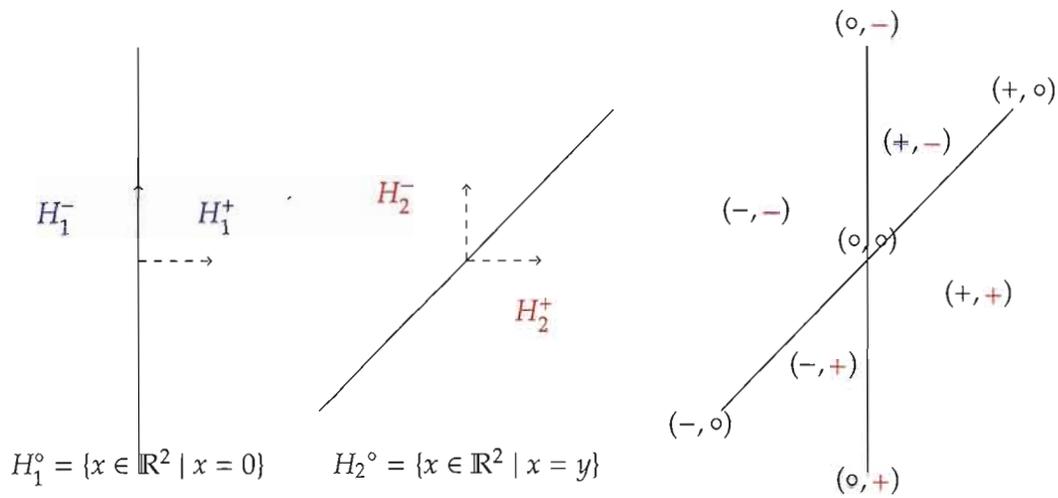
$$c \text{ est une chambre} \iff \sigma_H(c) \neq \circ \forall H \in \mathcal{A}.$$

De même, on peut définir les murs comme les faces  $x$  telles que  $\sigma_H(x) = \circ$  pour un seul hyperplan  $H$  de  $\mathcal{A}$ .

**Exemple 21.** La figure 3.2 est une représentation des vecteurs signes sur les faces de l'arrangement de  $S_3$ .

Dans le but de montrer l'existence du poset qui vit dans l'arrangement d'hyperplans, nous définissons maintenant un ordre partiel sur les faces de la façon suivante :

$$x \leq y \iff \forall H \in \mathcal{A} \quad \sigma_H(x) = \circ \text{ ou } \sigma_H(x) = \sigma_H(y).$$



**FIGURE 3.1 Vecteur signe :** l'hyperplan  $H_1^0$  est le noyau de l'application  $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\varphi_1(x, y) = x$ . Il sépare le plan en deux demi-plans  $H_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x, y) \geq 0\}$  et  $H_1^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x, y) \leq 0\}$ . Puis, on a fait de même pour  $H_2^0$  (où  $\varphi_2(x, y) = x - y$ ). Enfin, on a représenté l'arrangement d'hyperplans qui contient les droites  $H_1^0$  et  $H_2^0$  et on a associé à chaque face de l'arrangement d'hyperplans son vecteur signe.

On nomme cette relation la **relation de face**, et on dit que  $x$  est une face de  $y$ . Cette terminologie vient du fait que le fermé d'une chambre  $c$  est un polyèdre et que l'on sait que les faces de  $c$  sont les faces du polyèdre. Ainsi on a de façon équivalente

$$x \leq y \iff x \subseteq y.$$

**Exemple 22.** Dans le cas de l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$ , si  $x$  est le mur  $(0, -, -)$  et  $y$  est la chambre  $(+, -, -)$ , alors d'après la définition  $x \leq y$  et on a bien que  $x \subset y$  (voir figure 3.2).

**Remarque 5.** Quelques remarques bien qu'évidentes sont intéressantes à mentionner :

- cette relation est bien réflexive, anti-symétrique et transitive.
- deux éléments de l'ensemble des faces ne sont pas toujours comparables pour l'ordre. Il s'agit donc d'un ordre partiel.
- pour cet ordre, les chambres sont les éléments maximaux.

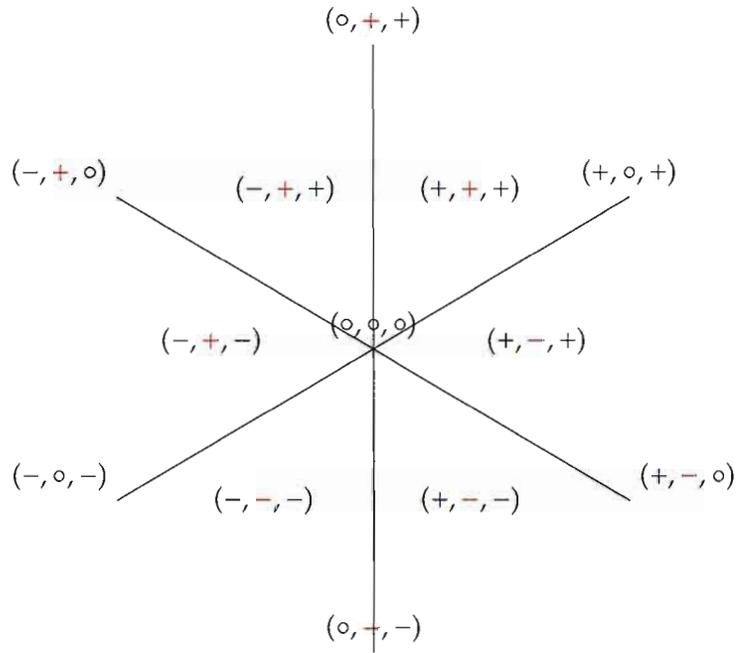


FIGURE 3.2 Représentation des vecteurs signes dans l'arrangement d'hyperplans de  $S_3$

Finalement, l'ensemble des faces de  $\mathcal{A}$  muni de l'ordre partiel  $\leq$  est un poset de face. Ceci est une première étape vers l'algèbre de faces.

Avant de passer à l'étude du monoïde de faces, permettons-nous une petite parenthèse pour mentionner l'existence d'un treillis sur les faces. On appelle **support** d'une face  $x \in \mathcal{F}$  l'intersection des hyperplans de  $\mathcal{A}$  contenant  $x$ ,

$$\text{supp}(x) = \bigcap_{H \in \mathcal{A} | \sigma_H(x) = 0} H.$$

L'ensemble  $\mathcal{L} = \text{supp}(\mathcal{F})$  des supports des faces de  $\mathcal{A}$  est un treillis ordonné par l'inclusion, appelé **treillis d'intersection**. Pour tout  $X, Y \in \mathcal{L}$ , la borne inférieure  $X \wedge Y$  est l'intersection  $X \cap Y$  et  $X \vee Y$  est le plus petit sous espace de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $X$  et  $Y$ , c'est à dire  $X + Y$ . On a alors par définition que l'élément maximal  $\hat{1}$  de  $\mathcal{L}$  est l'espace vectoriel

$\mathbb{R}^n$  et l'élément minimal  $\hat{0}$  est l'intersection de tous les hyperplans de  $\mathcal{A}$ ,  $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$ .

**Remarque 6.** Les chambres sont les faces de support  $\hat{1}$ .

### 3.2 L'algèbre de faces

Rappelons que l'ensemble des faces de l'arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$  muni de l'ordre partiel  $\leq$  est un poset de face. Nous allons maintenant le munir d'un produit de la façon suivante : soient  $x, y \in \mathcal{F}$ , le produit  $xy$  est la face de  $\mathcal{A}$  ayant pour vecteur signe

$$\sigma_H(xy) = \begin{cases} \sigma_H(x) & \text{si } \sigma_H(x) \neq 0; \\ \sigma_H(y) & \text{si } \sigma_H(x) = 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que ce produit est associatif et non-commutatif. De plus, il possède un élément neutre qui est l'intersection de tous les hyperplans de l'arrangement :  $1 = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$ .

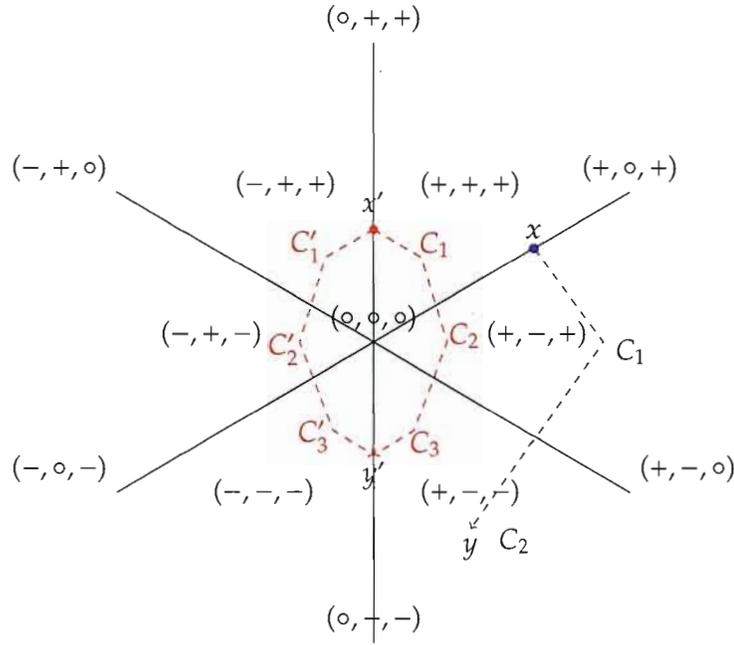
**Remarque 7.** Il existe une interprétation géométrique de ce produit. On généralise la notion de galerie à toutes faces : pour toutes faces  $x, y \in \mathcal{F}$ , une galerie de  $x$  vers  $y$  est une séquence de chambres adjacentes  $C_1, C_2, \dots, C_\ell$  telles que  $x \subseteq C_0$  et  $y \subseteq C_\ell$ . On a alors que la face  $xy$  est l'intersection des chambres qui commencent les galeries les plus courtes de  $x$  vers  $y$ .

**Exemple 23.** Soient  $x, y \in \mathcal{F}$  deux faces de l'arrangement de  $S_3$  tels que  $\sigma(x) = (+, 0, +)$  et  $\sigma(y) = (+, -, -)$ . Alors le produit  $xy$  est la face correspondant au vecteur signe

$$\sigma(xy) = (+, -, +).$$

Sur la figure 3.3 suivante on retrouve ce résultat en raisonnant avec la notion de galerie. De plus, on a que  $\sigma(yx) = (+, -, -)$ , donc  $xy \neq yx$ , ce qui prouve que ce produit n'est pas commutatif.

Voici un remarquable résultat sur les chambres de  $\mathcal{A}$  que nous utiliserons dans la preuve finale :



**FIGURE 3.3** Galerie d'une face vers l'autre : la galerie la plus courte de  $x$  vers  $y$  est  $(C_1, C_2)$ . La première chambre de la séquence est la chambre ayant pour vecteur signe  $(+, -, +)$  correspondant au produit  $xy$ . Lorsque que  $x'$  et  $y'$  sont deux faces opposées, le produit  $x'y'$  donne  $x'$ , qui est bien l'intersection des deux chambres qui commencent les galeries les plus courtes de  $x'$  vers  $y'$  ( $C_1 \cap C_1'$ ).

**Proposition 6.** *L'ensemble des chambres  $C$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* Montrons que si  $x$  est une chambre, alors pour toute face  $y$  de  $\mathcal{F}$ ,  $xy$  et  $yx$  sont des chambres. On a vu que  $x$  est une chambre si et seulement si  $\sigma_H(x) \neq 0 \forall H \in \mathcal{A}$ . Donc d'après la définition du produit de faces,  $\sigma_H(xy) = \sigma_H(x) \neq 0$  donc  $xy$  est la chambre  $x$ . De même, d'après la définition on sait que  $\sigma_H(yx) = \sigma_H(y)$  si  $\sigma_H(y) \neq 0$  ou  $\sigma_H(yx) = \sigma_H(x)$  si  $\sigma_H(y) = 0$ . Or  $\sigma_H(x) \neq 0$  donc dans tous les cas  $\sigma_H(yx) \neq 0$  donc  $yx$  est une chambre. Donc l'ensemble des chambres  $C$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{F}$ . □

Énonçons maintenant quelques propriétés essentielles sur ce produit de faces :

**Proposition 7.** Pour tout  $x, y, \in \mathcal{F}$ ,

1.  $x^2 = x$
2.  $xyx = xy$
3.  $xy = y$  si et seulement si  $x \leq y$
4.  $xy = x$  si et seulement si  $\text{supp}(y) \leq \text{supp}(x)$
5.  $\text{supp}(xy) = \text{supp}(x) \vee \text{supp}(y)$ .

*Démonstration.* La première égalité découle de la définition :

$$\forall H \in \mathcal{A}, \sigma_H(xx) = \sigma_H(x).$$

Donc  $x^2$  et  $x$  ayant le même vecteur signe sont égaux. La seconde propriété se déduit aussi de la définition :

$$\sigma_H(xyx) = \sigma_H((xy)x) = \begin{cases} \sigma_H(xy) & \text{si } \sigma_H(xy) \neq \circ \\ \sigma_H(x) & \text{si } \sigma_H(xy) = \circ \end{cases}$$

Donc si  $\sigma_H(xy) \neq \circ$  alors  $\sigma_H(xyx) = \sigma_H(xy)$ . Sinon,  $\sigma_H(xy) = \circ$  implique que  $\sigma_H(x) = \circ = \sigma_H(y)$  et dans ce cas,

$$\sigma_H(xyx) = \sigma_H(x) = \circ = \sigma_H(xy).$$

Ainsi on conclut que dans tous les cas  $\sigma_H(xyx) = \sigma_H(xy)$ . Donc on a bien  $xyx = xy$ . La 3ème propriété vient du fait que

$$xy = y \iff \sigma_H(x) = \sigma_H(y) \text{ ou } \sigma_H(x) = \circ \iff x \leq y.$$

Les propriétés 4 et 5 n'étant pas l'objet principal de notre étude sont laissées au lecteur. □

Finalement, on a muni l'ensemble des faces d'une loi de composition interne binaire associative, on parle alors du demi-groupe de face. Or cette structure algébrique

possède un élément neutre qui est l'intersection de tous les hyperplans. On peut donc parler du **monoïde de face**.

**Remarque 8.** Les propriétés 1 et 2 ci-dessus impliquent que le demi-groupe de faces est appelé en anglais un "left-regular band". Ces derniers sont très utilisés dans la théorie de la marche aléatoire (voir (Brown et Diaconis, 1998)).

Intéressons-nous au cas du groupe symétrique dont le produit à une interprétation intéressante, faisant un lien avec les probabilités. Rappelons que dans le cas du groupe symétrique, les faces de l'arrangement d'hyperplans sont des compositions de  $[n]$ . Soient  $B = (B_1, \dots, B_l)$  et  $C = (C_1, \dots, C_m)$  deux compositions de  $[n]$ , alors le produit de ces deux faces peut aussi se définir de la façon suivante :

$$(B_1, \dots, B_l)(C_1, \dots, C_m) = (B_1 \cap C_1, \dots, B_1 \cap C_m, \dots, B_l \cap C_m)^\star$$

où  $\star$  signifie qu'on enlève les intersections vides.

**Exemple 24.** On a par exemple  $(254, 71, 3, 6)(715, 36, 24) = (5, 24, 71, 3, 6)$ .

- **Exemple 25.** Ou encore  $(4, 123567)(2, 1, 4, 3, 5, 7, 6) = (4, 2, 1, 3, 5, 7, 6)$ . Dans cet exemple, on a multiplié la chambre  $(2, 1, 4, 3, 5, 7, 6)$  par la gauche par une composition de la forme  $(i, [n] - i)$ . Le résultat obtenu est équivalent à prendre  $i$  de la chambre et à le déplacer en première position. Ce processus est appelé en anglais "random-to-top shuffle", qui exprime le fait de prendre une carte dans un jeu de carte et de la placer sur le dessus du paquet. Lorsque l'on remplace  $i$  par un ensemble de plusieurs éléments  $J \subset \{1, \dots, n\}$ , comme par exemple

$$(245, 1367)(2, 1, 4, 3, 5, 7, 6) = (2, 4, 5, 1, 3, 7, 6),$$

alors on voit que ce sont tous les éléments de  $J$  qui sont déplacés au début de la composition. C'est exactement l'action inverse d'un mélange de jeu de carte dit "riffle shuffle" en anglais (voir (Bayer et Diaconis, 1992)).

On a alors une proposition intéressante à propos des compositions et de l'ensemble de descentes :

**Proposition 8.** Soit  $(B_1, \dots, B_l)$  une composition de  $[n]$ . Alors le produit  $(B_1, \dots, B_l)(1, 2, \dots, n)$  est la composition en singletons formée des éléments de  $B_1$  placé en ordre numérique, puis ceux de  $B_2$ , ect . . . . En fait,

$$(B_1, \dots, B_l)(1, 2, \dots, n) = (b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_{|B_1|}^{(1)}, \dots, b_1^{(l)}, \dots, b_{|B_l|}^{(l)})$$

où  $b_1^{(i)} < b_2^{(i)} < \dots < b_{|B_i|}^{(i)}$  sont les éléments du bloc  $B_i$ . De plus, si  $w$  est le produit  $(B_1, \dots, B_l)(1, 2, \dots, n)$ , alors l'ensemble de descentes de  $w$  a la propriété suivante :

$$\mathcal{D}(w) = \{i : w(i) > w(i+1)\} \subseteq \{|B_1|, |B_1| + |B_2|, \dots, |B_1| + \dots + |B_{l-1}|\}.$$

*Démonstration.* Le premier résultat de la proposition est évident lorsque l'on raisonne avec la définition précédente du produit de deux compositions.

Puis, comme  $(B_1, \dots, B_l)(1, 2, \dots, n)$  est la composition en singletons formée des éléments de  $B_1$  placé en ordre numérique, puis ceux de  $B_2$ , etc... alors il ne peut y avoir de  $i$  tel que  $w(i) > w(i+1)$  que si  $i$  est à la dernière position d'un bloc. Ceci explique le fait que  $\{i : w(i) > w(i+1)\} \subseteq \{|B_1|, |B_1| + |B_2|, \dots, |B_1| + \dots + |B_{l-1}|\}$  car les sommes  $(|B_1| + \dots + |B_k|)_{1 \leq k \leq l-1}$  correspondent aux dernières positions de chaque bloc. Ces résultats seront repris dans notre prochaine section (dans la preuve du théorème 10).  $\square$

Finalement, nous avons jusqu'ici construit un monoïde de face. Nous allons maintenant nous intéresser à l'algèbre de ce monoïde avec coefficient dans un corps  $k$  qui consiste en les combinaisons linéaires des éléments de  $\mathcal{F}$  avec le produit induit par celui de  $\mathcal{F}$ . On le note  $k\mathcal{F}$ . C'est une algèbre associative de dimension finie ayant  $1 = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$  pour identité. En s'intéressant plus précisément à une sous-algèbre de cette algèbre  $k\mathcal{F}$ , nous allons pouvoir construire un anti-isomorphisme avec l'algèbre de descentes du groupe de Coxeter concerné. Étudions dans un premier temps le cas du groupe symétrique.

### 3.3 Anti-isomorphisme d'algèbres dans le cas de $S_n$

Dans cette partie nous voulons présenter un anti-isomorphisme entre la sous-algèbre invariante  $(k\mathcal{F})^{S_n}$  et l'algèbre de descentes de  $S_n$ .

Pour commencer, rappelons la notion d'algèbre invariante. Soient  $A$  une algèbre et  $G$  un groupe. Rappelons que  $G$  agit sur  $A$  si il existe un homomorphisme de  $G$  vers le groupe des endomorphisme de  $A$ . On note cette action de  $g \in G$  sur  $a \in A$  par  $g(a)$ . Notons  $A^G$  l'ensemble

$$A^G = \{a \in A \mid g(a) = a \ \forall g \in G\}.$$

On a alors que  $A^G$  est une sous-algèbre de  $A$  appelée la  $G$ -sous-algèbre *invariante* de  $A$ .

Nous arrivons au résultat tant attendu liant l'algèbre de faces et l'algèbre de descentes :

**Théorème 10.** ([Bidigare, 1997]). *L'algèbre de descentes  $\mathcal{D}(S_n)$  de  $S_n$  est anti-isomorphe à la sous-algèbre invariante  $(k\mathcal{F})^{S_n}$ .*

Avant de nous lancer dans la preuve du théorème, nous aimerions donner une idée de la correspondance bijective entre un élément de la base de la sous-algèbre invariante  $(k\mathcal{F})^{S_n}$  avec un élément de la base de l'algèbre de descentes  $\mathcal{D}(S_n)$ . Expliquons les faits dans  $S_3$  : prenons par exemple la face  $x$  étiqueté par la composition  $(13, 2)$  (voir figure 2.21). En additionnant toutes les compositions de  $[3]$  qui sont dans la  $S_3$ -orbite de  $(13, 2)$  (c'est à dire toutes les compositions de type  $2, 1 \models 3$ ), on trouve

$$(13, 2) + (12, 3) + (23, 1)$$

qui est invariant sous l'action de  $S_3$ . C'est précisément un élément de la base de l'algèbre  $(k\mathcal{F})^{S_3}$ . Puis, on multiplie par la droite par la composition associée à la chambre fondamentale  $123 \longleftrightarrow (1, 2, 3)$  :

$$((13, 2) + (12, 3) + (23, 1)) (1, 2, 3) = (1, 3, 2) + (1, 2, 3) + (2, 3, 1)$$

d'après la règle du produit de compositions de  $[n]$  vue au chapitre précédent. Or  $(1, 3, 2) + (1, 2, 3) + (2, 3, 1)$  correspond à la somme des permutations de  $S_3$  qui ont leur ensemble de descente inclu dans  $\{2\}$  (voir l'exemple 13 du premier chapitre) :

$$132 + 123 + 231 = \sum_{des(\sigma) \subseteq \{2\}} \sigma.$$

Donc cette somme est un élément de la base de l'algèbre de descentes. C'est ainsi qu'à chaque élément de la base de  $(k\mathcal{F})^{S_3}$  on associe un élément de la base de l'algèbre de descentes  $\mathcal{D}(S_3)$ . Donnons maintenant la preuve complète et rigoureuse. Cette preuve est due à F. Saliola (Saliola, 2006).

*Démonstration.* Dans un premier temps, notre but est de construire un morphisme d'algèbre entre la sous-algèbre invariante  $(k\mathcal{F})^{S_n}$  et l'algèbre de descentes opposée  $(\mathcal{D}(S_n))^{op}$ . Puis nous montrerons qu'il s'agit bien d'un isomorphisme d'algèbres.

Rappelons que  $C$  est l'ensemble des chambres et  $kC$  le  $k$ -espace vectoriel engendré par les chambres. On a vu que  $kC$  est un idéal bilatère de  $k\mathcal{F}$  (car le produit d'une face et d'une chambre est toujours une chambre).

Ainsi, pour tout  $x \in (k\mathcal{F})^{S_n}$ , on peut associer un endomorphisme  $f_x$  sur  $kC$  en utilisant le produit de  $k\mathcal{F}$  :

$$\begin{aligned} f_x : kC &\longrightarrow kC \\ z &\longmapsto xz. \end{aligned}$$

On remarque alors que  $f_x$  commute avec l'action de  $S_n$  : en effet, pour toute permutation  $\sigma \in S_n$  :

$$\sigma(f_x(z)) = \sigma(xz) = \sigma(x)\sigma(z) = x\sigma(z) = f_x(\sigma(z)),$$

car  $x$  est dans l'algèbre invariante sous l'action de  $S_n$ . On obtient ainsi un homomorphisme d'algèbre entre la sous-algèbre  $(k\mathcal{F})^{S_n}$  et la  $k$ -algèbre du  $kS_n$ -endomorphisme de  $kC$  notée  $End_{kS_n}(kC)$  :

$$\begin{aligned} (k\mathcal{F})^{S_n} &\longrightarrow End_{kS_n}(kC) \\ x &\longmapsto f_x. \end{aligned}$$

Or on sait que l'ensemble  $C$  est l'ensemble des compositions de  $[n]$  en singletons. On peut donc associer à toute permutation  $w$  de  $S_n$  la chambre  $(w(1), \dots, w(n))$ . On a donc un isomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : kS_n &\longrightarrow kC \\ w &\mapsto (w(1), \dots, w(n)) \end{aligned}$$

et donc  $kS_n \cong kC$ . De plus, il est facile de vérifier que l'application  $\varphi^{-1} \circ f_x \circ \varphi$  est bien définie de  $kS_n$  vers  $kS_n$  et est un morphisme d'algèbre commutant avec l'action de  $S_n$ . Ainsi, on a l'isomorphisme d'algèbres suivant :

$$\begin{aligned} \zeta : \text{End}_{kS_n}(kC) &\longrightarrow \text{End}_{kS_n}(kS_n) \\ f_x &\mapsto \varphi^{-1} \circ f_x \circ \varphi \end{aligned}$$

où  $\text{End}_{kS_n}(kS_n)$  est l'ensemble des homomorphismes d'algèbres  $g : kS_n \rightarrow kS_n$  qui commutent avec l'action de  $S_n$ . Donc on a un isomorphisme d'algèbres :

$$\text{End}_{kS_n}(kC) \cong \text{End}_{kS_n}(kS_n).$$

Montrons maintenant que

$$\text{End}_{kS_n}(kS_n) \cong (kS_n)^{op}.$$

Pour tout  $\tau \in S_n$  et tout  $g \in \text{End}_{kS_n}(kS_n)$ , on a

$$g(\tau) = g(\tau(1)) = \tau(g(1)).$$

C'est à dire que pour tout endomorphisme  $g$  de  $kS_n$  commutant avec l'action de  $S_n$  et pour toute permutation  $\tau \in S_n$ ,  $g(\tau)$  revient à multiplier  $\tau$  par la droite par un élément de  $kS_n$  (par  $g(1)$ ). On peut donc construire un isomorphisme de  $\text{End}_{kS_n}(kS_n)$  vers l'algèbre opposée de  $kS_n$  :

$$\begin{aligned} \rho : \text{End}_{kS_n}(kS_n) &\longrightarrow (kS_n)^{op} \\ g &\mapsto g(1), \end{aligned}$$

où  $(kS_n)^{op}$  est l'algèbre  $(kS_n)$  dont le produit est inversé. L'application inverse envoie un élément  $h \in kS_n$  vers l'endomorphisme  $g$  tel que  $g(a) = ah$ .

Finalement, en regroupant toutes ces applications, on obtient l'homomorphisme suivant :

$$\begin{aligned}\Psi : (k\mathcal{F})^{S_n} &\longrightarrow (kS_n)^{op} \\ x &\longmapsto (\varphi^{-1} \circ f_x \circ \varphi)(1).\end{aligned}$$

Il reste maintenant à montrer que l'image de  $\Psi$  est bien l'algèbre de descentes. Soit  $B = (B_1, \dots, B_m)$  une composition de  $[n]$ . Notons  $x_B$  la somme de toutes les compositions de  $[n]$  dans la  $S_n$ -orbite de  $B$ . Alors  $x_B$  est un élément de l'algèbre de faces  $k\mathcal{F}$  invariant sous l'action de  $S_n$ , donc

$$x_B \in (k\mathcal{F})^{S_n}.$$

De plus, tous les éléments de  $(k\mathcal{F})^{S_n}$  sont des combinaisons d'éléments de cette forme  $x_B$  pour toutes combinaisons  $B$  de  $[n]$ . Ainsi, d'après les définitions des fonctions précédentes on a que,

$$\begin{aligned}\Psi(x_B) &= (\varphi^{-1} \circ f_{x_B} \circ \varphi)(1) \\ &= (\varphi^{-1} \circ f_{x_B})(1, 2, \dots, n) \\ &= \varphi^{-1}(x_B(1, 2, \dots, n)).\end{aligned}$$

Or d'après la proposition 8, chaque élément de la somme de  $x_B(1, 2, \dots, n)$  est une composition de  $[n]$  en singletons dont la permutation correspondante a son ensemble de descentes contenue dans  $J := \{|B_1|, |B_1| + |B_2|, \dots, |B_1| + \dots + |B_{m-1}|\}$ . Donc on obtient que  $\Psi(x_B)$  est la somme de toutes les permutations de  $S_n$  dont l'ensemble de descente est contenue dans  $J$ . Alors on a que

$$\Psi(x_B) = \sum_{des(\sigma) \subseteq J} \sigma = x_J.$$

Or les éléments  $x_B$  engendrent  $(k\mathcal{F})^{S_n}$  et s'envoient par  $\Psi$  sur les éléments de la base de l'algèbre de descentes  $\mathcal{D}(S_n)$ . Donc l'image de  $\Psi$  est finalement l'algèbre de descentes. On a donc aussi montré que  $\mathcal{D}(S_n)$  étant l'image d'un morphisme d'algèbre est bien une sous-algèbre.

On a donc prouvé qu'il existe un homomorphisme entre la sous-algèbre invariante  $(k\mathcal{F})^{S_n}$  et l'algèbre opposé de l'algèbre de descentes  $\mathcal{D}(S_n)$ . Pour finir la preuve il suffit maintenant de s'assurer que les deux algèbres sont de même dimension.

D'une part, l'algèbre de descentes est de dimension  $2^{n-1}$  : en effet, Solomon a montré que tous les éléments  $x_J$  sont linéairement indépendants. Comme il y a un  $x_J$  pour chaque  $J \subseteq \{1, \dots, n-1\}$  alors il y a  $2^{n-1}$  éléments  $x_J$ . D'autre part, il y a  $2^{n-1}$  faces de la chambre  $(1, 2, \dots, n)$ , et l'ensemble des sommes des éléments de l'orbite de chacune de ces faces forment une base de  $(k\mathcal{F})^{S_n}$ . Donc les deux algèbres sont de même dimensions.

En conclusion, on a construit un isomorphisme d'algèbre entre  $(k\mathcal{F})^{S_n}$  et  $(kS_n)^{op}$ .  
Donc finalement

$$(k\mathcal{F})^{S_n} \cong (\mathcal{D}(S_n))^{op}.$$

□

### 3.4 Généralisation aux groupes de Coxeter finis

Soient  $W$  un groupe de Coxeter fini et  $\mathcal{A}$  son arrangement d'hyperplans associé. On a vu que  $W$  permute les hyperplans de  $\mathcal{A}$  et agit sur l'ensemble des faces  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$ . Cette action s'étend linéairement à l'action de  $W$  sur le monoïde de faces  $k\mathcal{F}$ . On peut alors énoncer le résultat final de notre étude qui est un résultat profond liant l'algèbre de descentes des groupes de Coxeter finis et l'algèbre de faces.

**Théorème 11.** ([Brown, 2000]). *Soient  $W$  un groupe de Coxeter fini,  $\mathcal{A}$  son arrangement d'hyperplans associé et  $\mathcal{F}$  l'ensemble des faces de  $\mathcal{A}$ . Alors la sous-algèbre invariante de l'algèbre de faces est anti-isomorphe à l'algèbre de descentes de  $W$  :*

$$(k\mathcal{F})^W \cong (\mathcal{D}(W))^{op}$$

*Démonstration.* L'idée de la preuve est la même que dans le cas précédent pour les groupes symétriques. Cette démonstration est due à F. Saliola (Saliola, 2006).

Vérifions dans un premier temps que pour tout  $w \in W$  et  $x, y \in \mathcal{F}$ ,  $w(x)w(y) = w(xy)$ . Soient  $(C_1^1, C_1^2, \dots, C_1^l), \dots, (C_k^1, C_k^2, \dots, C_k^l)$  les galeries les plus courtes de  $x$  vers

$y$ . Alors par isométrie de  $w \in W$ ,  $(w(C_1^1), w(C_1^2), \dots, w(C_1^l)), \dots, (w(C_k^1), w(C_k^2), \dots, w(C_k^l))$  sont les galeries les plus courtes de  $w(x)$  vers  $w(y)$ . Ainsi

$$w(x)w(y) = \bigcap_{i=1}^k w(C_i) = w\left(\bigcap_{i=1}^k C_i\right) = w(xy).$$

Puis, on sait que le  $k$ -espace vectoriel  $kC$  qui est engendré par les chambres est un idéal de  $k\mathcal{F}$ . De plus l'action de  $W$  sur  $kC$  commute avec l'action de  $(k\mathcal{F})^W$  : en effet, soient  $w \in W$ ,  $x \in (k\mathcal{F})^W$  et  $z \in k\mathcal{F}$ , alors

$$w(x(z)) = w(xz) = w(x)w(z) = xw(z).$$

Donc il existe un morphisme d'algèbre entre  $(k\mathcal{F})^W$  et la  $k$ -algèbre du  $kW$ -endomorphismes de  $kC$  :

$$\begin{aligned} (k\mathcal{F})^W &\longrightarrow \text{End}_{kW}(kC) \\ x &\longmapsto f_x \end{aligned}$$

où  $f_x : kC \rightarrow kC$  telle que  $f_x(z) = xz$  pour tout  $z \in kC$ . De plus on sait qu'en fixant la chambre fondamentale  $E$ , on peut alors construire l'isomorphisme d'algèbre suivant :

$$\begin{aligned} \theta : kW &\longrightarrow kC \\ w &\longmapsto w(E) \end{aligned}$$

et donc

$$kC \cong kW.$$

Tout comme dans la preuve précédente, on obtient alors un isomorphisme d'algèbre

$$\text{End}_{kW}(kC) \cong \text{End}_{kW}(kW).$$

En suivant le même raisonnement que précédemment, on a que chaque  $kW$ -endomorphisme commutant avec l'action de  $W$  s'écrit comme une multiplication par un élément de  $kW$  et donc on a l'isomorphisme suivant :

$$\text{End}_{kW}(kW) \cong (kW)^{op},$$

où  $(kW)^{op}$  est la  $k$ -algèbre obtenue de  $kW$  en inversant la multiplication de  $kW$ .

Or rappelons que chaque face  $x \in \mathcal{F}$  de l'arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$  est dans la  $W$ -orbite d'une unique face  $y$  de la chambre fondamentale  $E$ . De plus, on sait que le stabilisateur de  $y \leq E$  est  $W_I$  (pour un certain  $I \subseteq S$ ). Nous allons montrer qu'alors les éléments  $\sum_{w \in X_I} w(y)$  pour  $y \leq E$  forment une base de  $(k\mathcal{F})^W$ . Soit  $z$  un élément de la sous-algèbre invariante du monoïde de faces. Alors  $z$  est une combinaison linéaire des faces :

$$z = \sum_{x \in \mathcal{F}} c_x x$$

où  $c_x$  est le coefficient de  $x$ . Or  $z \in (k\mathcal{F}(W))^W$ , donc pour tout  $w \in W$ ,  $w(z) = z$ , donc

$$w(z) = w\left(\sum_{x \in \mathcal{F}} c_x x\right) = \sum_{x \in \mathcal{F}} c_x w(x) = z = \sum_{x \in \mathcal{F}} c_x x.$$

Donc les coefficients des faces qui sont dans la même orbite sont tous égaux. On a donc

$$w(z) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \sum_{x \in \omega} x$$

où  $\Omega$  est l'ensemble des orbites et  $c_\omega$  est le coefficient des faces qui sont dans l'orbite  $\omega$ . Ainsi, les éléments  $\sum_{w \in X_I} w(y)$  sont la somme des faces de l'orbite de  $y$ , ils sont invariants sous l'action de  $W$  et forment donc une famille génératrice de l'algèbre  $(k\mathcal{F})^W$ . De plus, ces éléments sont indépendants car ils n'ont pas de faces en commun, ils forment donc une base de l'algèbre.

Finalement, l'application

$$\begin{aligned} \Lambda : (k\mathcal{F})^W &\longrightarrow (kW)^{op} \\ x &\longmapsto (\theta^{-1} \circ f_x \circ \theta)(1) \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbre. Montrons que cette application envoie les éléments  $\sum_{w \in X_I} w(y)$  de la base de  $(k\mathcal{F})^W$  vers les éléments  $\sum_{w \in X_I} w$  de la base de l'algèbre de descentes. Soit  $\bar{x}_I = \sum_{w \in X_I} w(y)$  un élément de la base de  $(k\mathcal{F})^W$ . Alors

$$\Lambda(\bar{x}_I) = (\theta^{-1} \circ f_{\bar{x}_I} \circ \theta)(1) = (\theta^{-1} \circ f_{\bar{x}_I})(E) = \theta^{-1}(\bar{x}_I E) = \theta^{-1}\left(\sum_{w \in X_I} w(y)E\right) = \sum_{w \in X_I} \theta^{-1}(w(y)E).$$

Montrons maintenant que  $w(y)E = w(E)$ . Soit  $(w'(E), \dots, E)$  une galerie la plus courte de  $w(y)$  à  $E$ . On sait alors que  $w(y) \leq w'(E)$ . Donc il existe une face  $z$  de  $E$  telle que

$w'(z) = w(y)$ . On a alors que  $w^{-1}w'(z) = y$ , et donc  $w^{-1}w' \in \text{Stab}(z) = W_I$  (pour un  $I \subseteq S$ ) et  $z = y$ . Ainsi on peut conclure que  $w' \in WW_I$  et  $w'(y) = w(y)$ . Comme de plus  $w \in X_I$ , alors  $\ell(w') \geq \ell(w)$  et donc  $\ell(w') = \ell(w)$ . Ainsi, par unicité de  $w' \in WW_I$  comme élément minimal,  $w = w'$ . On a donc que  $(w(E), \dots, E)$  est l'unique galerie la plus courte de  $w(y)$  à  $E$  et donc

$$w(y)E = \cap w(E) = w(E).$$

Donc finalement on obtient que  $\theta^{-1}(w(y)E) = \theta^{-1}(w(E))$  et donc

$$\Lambda(\bar{x}_I) = \sum_{w \in X_I} \theta^{-1}(w(E)) = \sum_{w \in X_I} w.$$

Ainsi, l'anti-isomorphisme se définit par :

$$\begin{aligned} (k\mathcal{F})^W &\longrightarrow (\mathcal{D}(W))^{op} \\ \sum_{w \in X_I} w(y) &\mapsto \sum_{w \in X_I} w. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que

$$(k\mathcal{F})^W \cong (\mathcal{D}(W))^{op}.$$

□

En conclusion, nous avons dans ce chapitre construit l'algèbre de faces de l'arrangement d'hyperplans associé à un groupe de Coxeter fini  $W$ . Nous avons ainsi retrouvé l'algèbre de descentes par le biais de cette algèbre. Nous avons donc présenté et lié deux algèbres d'un groupe de Coxeter fini.

- - - - -

## CONCLUSION

Les groupes de Coxeter finis sont des groupes très intéressants à étudier et permettent de tisser beaucoup de liens avec différents domaines de mathématiques. Dans ce mémoire, nous avons exploré les aspects algébriques puis géométriques de ces groupes dans le but de construire un anti-isomorphisme liant l'algèbre de descentes et l'algèbre de faces des groupes de Coxeter finis. Notre étude a fait appel à l'étude des systèmes de racines, des sous-groupes paraboliques, de leurs représentants minimaux. Puis nous avons découvert le monde du complexe de Coxeter en approfondissant l'étude des arrangements d'hyperplans et des faces. Nous avons ainsi construit une algèbre de faces qui nous a permis de retrouver de manière géométrique l'algèbre de descentes.

Dans ce mémoire, nous avons mis en évidence l'interaction entre l'algèbre, la combinatoire et la géométrie liées aux groupes de Coxeter. Mais cette théorie a une étendue mathématique encore plus large puisqu'elle a aussi un rôle dans les probabilités. En effet, l'algèbre de faces et son produit sont utilisés dans l'étude des mélanges de cartes. Mieux encore, les mathématiciens Bidigare et Brown ont élaborés une marche aléatoire sur les faces des arrangements d'hyperplans et ont étudié les chaînes de Markov des arrangements d'hyperplans (voir (Bidigare, 1997), (Brown et Diaconis, 1998)). Nous avons été captivés par ce sujet aux nombreuses répercussions mathématiques.

Remarquons enfin que notre mémoire se restreint à l'étude des groupes de Coxeter finis. Nous pouvons ainsi nous demander à quoi s'apparente la théorie sur les groupes de Coxeter infinis ? Comme par exemple les groupes de Weyl qui forment une autre série importante de groupes de Coxeter. En effet, il est intéressant de mentionner que l'importance des groupes de Coxeter vient en partie du fait que les groupes de Weyl des algèbres de Lie semi-simples sont des groupes de Coxeter dont les géné-

rateurs correspondent aux racines simples du système de racines. C'est d'ailleurs de ces groupes de Weyl que provient la notation  $W$  pour désigner un groupe de Coxeter. Beaucoup d'auteurs se sont intéressés à ces groupes exceptionnels, nous conseillons particulièrement le lecteur de lire le livre de Humphreys (Humphreys, 1990) ou encore celui de Björner et Brenti (Björner et Brenti, 2005).

## BIBLIOGRAPHIE

- Bayer D. et P. Diaconis , *Trailing the Dovetail Shuffle to Its Lair* , Annals of Applied Probability, volume 2, 1992
- Bergeron F., A. Garcia, C. Reutenauer , *Homomorphisms Between Solomon's Descent Algebra*, 1992
- Bergeron F., N. Bergeron, R. B. Howlett et D. E. Taylor , *A decomposition of the Descent Algebra of a finite Coxeter Group* , Journal of Algebraic Combinatorics, 1992
- Bidigare T.P., *Hyperplane arrangements, face algebras, and their associated Markov chains*, Ph.D thesis, University of Michigan, 1997
- Billera L.J., K.S. Brown, P. Diaconis , *Random walks and plane arrangements in three dimension*, Mathematical Association of America, 1999
- Björner A. et F. Brenti , *Combinatorics of Coxeter Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 2005
- Björner A., M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White et G. Ziegler, *Oriented Matroids*, Cambridge University Press, 1993
- Borovik A.V., I.M. Gelfand et N. White, *Coxeter Matroids*, Birkhäuser, 2003
- Borovik A.V. et A. Borovik, *Mirrors and Reflections : The Geometry of Finite Reflection Groups*, Springer New York, 2009
- Bourbaki N., *Groupes et algèbres de Lie*, Herman, 1968
- Brown K.S., *Buildings* , Springer-Verlag New York, 1989
- Brown K.S. et P. Diaconis , *Random walks and hyperplane arrangements*, Ann. Probab, 1998
- Carter R.W., *Simple groups of Lie type*, Wiley, 1989
- Cartier P., *Les arrangements d'hyperplans : un chapitre de géométrie combinatoire*, Numdam, 1981
- Garcia A. et C. Reutenauer, *A Decomposition of Solomon's descent algebra*, Advances in Maths 77, 1989
- Grove L.C et C.T. Benson, *Finite reflections groups*, Springer-Verlag, 1985
- Humphreys J.E., *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1990

- James G.D. et A. Kerber, *Theory of the Symetric Group*, Addison Wesley, Encycl. of Maths, 1981
- Klein F., *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint : Geometry*, Dover, New York, 1939
- Macdonald I.G., *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford mathematical monographs , 1979
- Orlik P. et H. Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992
- Reutenauer C., *Free Lie algebras* , Oxford University Press, 1993
- Saliola F. V., *The face semigroup algebra of a hyperplane arrangement*, Ph.D. Cornell University, 2006
- Saliola F. V., *Hyperplane arrangements and descent algebras*, note de cours
- Serre J.P., *Représentation linéaires des groupes finis*, Hermann, 1968
- Solomon L., *A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group*, J. Algebra, 1976
- Tits J., *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer-Verlag Berlin, 1974
- Ziegler G.M., *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag New York, 2006
-