C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 1-4, 1987

Logique/*Logic*

Spectres p-adiques en rang fini

Luc Bélair

Résumé — Nous prolongeons les résultats de Robinson [14] sur le spectre p-adique en introduisant un « spectre » adapté à la géométrie algébrique p-adique sur les extensions finies de $\mathbf{Q}_p$.

p-adic spectra in finite p-rank

Abstract — *Extending the results of Robinson* [14] *on the p-adic spectrum we introduce a "spectrum" suited to p-adic algebraic geometry over finite extensions of* $\mathbf{Q}_p$.

1. Introduction. — On s'intéresse ici à l'étude des variétés algébriques affines munies de la topologie induite par un corps topologique de base. Il s'agit d'introduire un objet qui jouerait un rôle analogue à celui du spectre premier d'un anneau en géométrie algébrique. Le spectre réel d'un anneau introduit par Coste et Coste-Roy [4] est un exemple d'un tel objet pour les nombres réels, $\mathbf{R}$, munis de la topologie de l'ordre. Dans le cas des nombres p-adiques $\mathbf{Q}_p$, munis de la topologie p-adique, Robinson introduit le spectre p-adique d'un anneau [14]. Dans le cadre de [14] nous donnons ici les ingrédients pour prolonger ces résultats aux extensions finies de $\mathbf{Q}_p$ [1]. Le spectre que nous introduisons a été étudié indépendamment par Bröcker et Schinke ([15], [3]) à la main comme dans [4].

Dans cette Note, topos sera synonyme de topos de Grothendieck (faisceaux sur un site, *voir* [10]), et anneau, d'anneau unitaire commutatif. On note Ens la catégorie des ensembles, v_p la valuation p-adique, et $\mathbf{x}$ le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$. Si A (resp. A_i) est un anneau local, k_A (resp. k_i) désigne son corps résiduel et $^-$ l'application canonique. On utilise les prédicats auxiliaires $R_n(x)$, $n \geqq 1$, avec l'interprétation $R_n(x) \leftrightarrow \exists y\,(xy^n = 1)$.

Notre point de vue est celui de la logique catégorique. La logique cohérente joue ici un rôle central. Une formule cohérente est une formule du fragment $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\perp$, $\top$ de la logique du premier ordre. Une théorie cohérente est une théorie qui admet une axiomatisation par des séquents $\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi(\mathbf{x})$ où φ, ψ sont cohérentes, ce qui équivaut à ce que sa classe des modèles soit close par limites inductives filtrantes. Le spectre introduit l'est en tant qu'espace annelé, $(X, \mathcal{O}_X)$ (*voir* [7]). On s'intéresse à $(X, \mathcal{O}_X)$ à travers le treillis des ouverts de X comme exemple particulier de site, $\mathscr{C}$, et la théorie cohérente que la catégorie Faisc$(\mathscr{C})$ des faisceaux sur ce site classifie, $\mathcal{O}_X$ en étant le « modèle générique » (*voir* [10]). Ainsi, le spectre premier d'un anneau A avec son faisceau structural, (Spec A, $\mathcal{O}_A$), classifie la théorie des localisés de A, qui s'axiomatise en une théorie cohérente à deux sortes, avec une « constante » pour A; (Spec A, $\mathcal{O}_A$) est « classifiant » dans un sens analogue à sa propriété universelle dans les espaces annelés en anneaux locaux (*voir* [7], Exercice II.2.4).

2. Corps p-adiquement clos. — Dans notre contexte la théorie élémentaire du corps de base prends le pas sur le corps lui-même. Soit p premier. La théorie des modèles des extensions finies de $\mathbf{Q}_p$, comme corps valués, a été étudiée par Prestel et Roquette [11]. Pour $d \in \mathbf{N}$ la théorie élémentaire des extensions de degré d est axiomatisée par la théorie CpC_d des corps p-adiquement clos de rang d. Un corps p-valué de rang d est un corps valué de caractéristique 0 dont le corps de restes est de caractéristique p, et dont l'anneau

---

Note présentée par Jacques Tits.

0249-6291/87/03050001 $ 2.00

de valuation modulo (p) est de dimension linéaire d sur le corps premier F_p. Un corps p-adiquement clos de rang d est un corps p-valué de rang d hensélien, valué dans un $\mathbb{Z}$-groupe. Fixons une extension finie K/Q_p de degré d. La théorie élémentaire de K, Th(K), est axiomatisée par $CpC_d + \exists y (\chi(y)=0)$, où $\chi \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme irréductible qui engendre l'extension K/Q_p; Th(K) fixe un degré de ramification absolue e et un degré résiduel absolu f, et $d=ef$. Soit ε le plus petit entier plus grand que e et premier avec p. La structure valuée de (K, v_p) est définissable algébriquement : $v_p(x) \leqq v_p(y) \Leftrightarrow \exists z (x^\varepsilon + p y^\varepsilon = z^\varepsilon)$. La théorie Th(K) est modèle-complète dans le langage des corps. Soit A_p la clôture algébrique relative de Q dans Q_p, alors A_p se plonge de façon unique dans tout corps p-valué hensélien [c'est le hensélisé de (Q, v_p)].

LEMME 1. — *Soient* M *un modèle de* Th(K), A *la clôture algébrique relative de* Q *dans* M, $q \in \mathbb{N}$ *premier. Supposons que* A *contienne une racine primitive q-ième de* 1. *Soient* $y \in M$ *et* $b = y^q$. *Alors il existe* $n(j) \in \mathbb{N}$, $e_j \in A$, $1 \leqq j \leqq k$, *tel que les racines q-ièmes de b sont isolées par des ensembles de la forme* $\{x : \wedge R_{n(j)}(e_j x)\}$.

3. THÉORIE DES SPECTRES. — Nous nous insérons dans la théorie des spectres de Cole (*voir* [14]). Dans ce contexte les spectres sont d'abord obtenus comme topos. Il s'agit ensuite de voir si ce topos est spatial, i. e. équivalent à la catégorie des faisceaux sur un espace topologique. Cet espace topologique constitue alors le « spectre ». Suivant Robinson, il s'agit de trouver un système de factorisation dans les anneaux qui soit adéquat pour (la topologie dans) Th(K) et la théorie des spectres, et de trouver la stabilisation de Th(K) pour ce système en une théorie cohérente d'anneau.

DÉFINITION 2 [6]. — Un système de factorisation (Λ, Λ^*) dans une catégorie consiste en deux classes de morphismes Λ, Λ^* chacune contenant les isomorphismes et close par composition, et telles que tout morphisme $A \to C$ se factorise en $A \to B \to C$ avec $A \to B \in \Lambda$ et $B \to C \in \Lambda^*$, de façon unique à unique isomorphisme près.

Le système de factorisation, dans les anneaux, lié au spectre p-adique (réel) est celui où Λ est formé des morphismes ind-étales et Λ^* des morphismes séparablement clos : le « système étale » (*voir* [14]). Par analogie nous considérons aussi ce système. Une théorie T est dite stable pour (Λ, Λ^*) si $A \to C \in \Lambda^*$ et $C \models T$ entraînent $A \models T$.

4. LE SPECTRE. — Pour $n \geqq 1$, m, $k(1), \ldots, k(m)$ des entiers non négatifs posons $S_n = \{r \in \mathbb{N} : 0 \leqq r < n\}$, $S_n^* = S_n \cup \{*\}$, $x^k = (x^{k(1)}, \ldots, x^{k(m)})$, $x^* = 0$, $\beta(n) = 2 d v_p(n)$, $g_n(x, y) = \sum_{i=0}^{\beta(n)} x_i y^i$, et soit $\mu = p^f - 1$. Soit CpC_χ la théorie suivante.

(0) Axiomes de corps;

(i) $R_1(k)$, $k = 2, 3, \ldots$;

(ii. 1) $D(x, y) \leftrightarrow R_1(x) \wedge R_\varepsilon(x^\varepsilon + p y^\varepsilon)$

(ii. 2) $U(x) \leftrightarrow D(1, x) \wedge D(x, 1)$

(ii. 3) $R_1(x) \to D(x, y) \vee D(y, x)$

(ii. 4) $D(x, y) \wedge D(y, z) \to D(x, z)$

(ii. 5) $D(x, y) \wedge D(x', y') \to D(xx', yy')$

(ii. 6) $D(x, y) \wedge D(x, y') \to D(x, y+y')$;

(iii. 1) $D(p, 1) \to \perp$;

(iii. 2) $U(x) \wedge D(x^\mu - 1, 1) \to \perp$;

(iii. 3) $D(x, 1) \vee D(p, x^e)$;

(iii. 4_n) $R_1(x) \wedge D(y^e, p) \wedge D(p, y^e) \wedge (z^\mu = 1)$

$$\rightarrow [\vee \{z^i = 1 : 1 < i < p^f - 1\} \vee \vee \{R_n(g_n(z^{\mathrm{k}}, y) y^r x) \wedge U(g_n(z^{\mathrm{k}}, y)) : r \in S_n, \mathrm{k} \in (S_\mu^*)^{\beta(n)+1}\}];$$

(iv_n) $\wedge \{U(x_1), D(p, x_j^e) : 1 < j < n\} \rightarrow \exists y (y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_n = 0) \wedge U(y)$;

(v) $\exists y (\chi(y) = 0)$.

PROPOSITION 3. — *La théorie* CpC_χ *constitue une axiomatisation cohérente de* $\mathrm{Th}(K)$.

Nous identifions la stabilisation de CpC_χ pour le système étale. On appelle anneau local p-adiquement clos de type χ un anneau local hensélien dont le corps résiduel est un modèle de CpC_χ. Avec la même interprétation des R_n, soit ALpC_χ la théorie d'anneau obtenue de CpC_χ en remplaçant les axiomes de corps par ceux d'anneau local, i. e. $(0 = 1 \rightarrow \perp) + (R_1(x+y) \rightarrow R_1(x) \vee R_1(y))$, et en ajoutant (i') $R_n(x) \rightarrow R_1(x-y) \vee R_n(y)$. Il est commode de noter $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ les hypothèses de (iv_n).

PROPOSITION 4. — *La théorie* ALpC_χ *constitue une axiomatisation cohérente de la classe des anneaux locaux p-adiquement clos de type* χ.

LEMME 5. — *Soit* $A \models \mathrm{ALpC}_\chi$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ *tels que* $A \models \delta(\mathbf{a})$. *Alors il existe un seul et unique* $x \in A$ *tel que* $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ *et* $A \models U(x)$.

On dira qu'un morphisme ind-étale d'un anneau A dans un modèle de ALpC_χ est une « localisation χ-adique stricte de A ». Grâce à l'axiomatisation cohérente des morphismes plats formellement nets entre anneaux locaux donnée par Wraith (*voir* [16]), la notion de localisation χ-adique stricte de A s'axiomatise en une théorie cohérente à deux sortes avec une « constante » pour A. La spatialité du spectre p-adique d'un anneau A, $\mathrm{Spec}_p A$, est liée à la rigidité de la clôture p-adique dans le langage d'élimination des quantificateurs de Macintyre pour $\mathrm{Th}(\mathbf{Q}_p)$. Nous choisissons un contexte qui assure des hypothèses semblables pour $\mathrm{Th}(K)$. Nous passons de la catégorie des anneaux à celle des $\mathbf{Z}[\alpha]$-algèbres où α est une constante telle que $\chi(\alpha) = 0$. L'axiome (v) devient $\chi(\alpha) = 0$. Comme en [14], on montre que la théorie ALpC_χ est stable pour le système étale dans ces algèbres. Par la théorie générale des spectres (*voir* [14]), il s'ensuit alors l'existence d'un adjoint à droite au foncteur d'oubli de la catégorie des topos en $\mathbf{Z}[\alpha]$-algèbres modèles de ALpC_χ et morphismes séparablement-clos, dans la catégorie des topos annelés en $\mathbf{Z}[\alpha]$-algèbres. On le note Spec_χ : c'est le spectre p-adique associé à $\mathrm{Th}(K)$. Pour une $\mathbf{Z}[\alpha]$-algèbre A, $\mathrm{Spec}_\chi A$ est l'image de (Ens, A) par cet adjoint; c'est le topos classifiant de la théorie des localisations χ-adiques strictes de A.

5. SPATIALITÉ. — Pour A une $\mathbf{Z}[\alpha]$-algèbre, $\mathrm{Spec}_\chi A$ est un topos cohérent puisque topos classifiant d'une théorie cohérente (*voir* [10]).

PROPOSITION 6 [5]. — *Soit* $\mathscr{E}$ *un topos cohérent. Alors* $\mathscr{E}$ *est spatial si et seulement si la catégorie de ses points est équivalente à un ensemble partiellement ordonné, un point étant un morphisme géométrique* $\mathrm{Ens} \rightarrow \mathscr{E}$.

Du point de vue de la théorie classifiée par $\mathrm{Spec}_\chi A$ ses points sont précisément les modèles de cette théorie dans Ens, à savoir les localisations χ-adiques strictes de A. Ils s'organisent en catégorie (de A-algèbres) de la façon naturelle. On peut vérifier qu'il s'agit des A-algèbres modèles de ALpC_χ dont le corps résiduel est algébrique sur A. La proposition 6 nous ramène à montrer le théorème suivant. Notre démonstration est dans l'esprit de [12] où Joyal et Reyes suggèrent une preuve analogue pour le spectre réel.

THÉORÈME 7 (Spec_χ est spatial). — *Soit* A *une* $\mathbb{Z}[\alpha]$*-algèbre et* $\varphi_i : A \to A_i$ *deux localisations* χ*-adiques strictes de* A. *Soit* $g, h : A_1 \to A_2$ *deux morphismes de* A*-algèbres. Alors* $g=h$.

Démonstration. — Le corps A_p se plonge de façon unique dans A_i, d'où $g|A_p=h|A_p$. Soit $A_0 \subseteq A_1$ un sous-anneau maximal tel que $A_p[\alpha]$, $\varphi_1[A] \subseteq A_0$ et $g|A_0=h|A_0$. Il suffit de montrer que $A_0 \models \mathrm{ALpC}_\chi$. En effet soit i l'inclusion $A_0 \subseteq A_1$. Par maximalité, i est un morphisme local et induit une inclusion $k_0 \subseteq k_1$. Comme CpC_χ est modèle-complète et l'extension k_1/k_0 algébrique, cette inclusion est une égalité. Soit (Λ, Λ^*) le système étale et $\pi_i = {}^-$. On sait que $\pi_i \in \Lambda^*$ (*voir* [14]). En utilisant l'unicité essentielle de la factorisation pour (Λ, Λ^*) il s'ensuit que $i \in \Lambda^*$ et $A_0=A_1$. Montrons que $A_0 \models \mathrm{ALpC}_\chi$. On sait que A_0 est local et une Q-algèbre. Voyons d'abord que si $a \in A_0$ alors $A_0 \models R_n(a)$ si $A_1 \models R_n(a)$. Soit $y \in A_1$ inversible tel que $y^n=a$. Il suffit de montrer que $g(y)=h(y)$. Par récurrence il suffit de considérer $n=q$ premier. S'il n'y a qu'une seule racine q-ième de 1 dans Th(K) alors c'est fini. Soit donc $\zeta \in A_p[\alpha]$ une racine primitive q-ième de 1. Notons $\mathcal{U}$ les ensembles donnés par le lemme 1 pour $\bar{a} \in k_1$, avec $e_j \in A_p[\alpha]$. Comme $A_i \models R_n(x) \Leftrightarrow k_i \models R_n(\bar{x})$, $i=1, 2$, ces $\mathcal{U}$ isolent aussi les racines q-ièmes de a dans A_1. Par la nature multiplicative des R_n les $\mathcal{U}$ isolent aussi les racines q-ièmes de l'unité. Par modèle-complétude de CpC_χ (*via* $A_p[\alpha]$) il en est de même dans k_2 et donc dans A_2. Ces mêmes $\mathcal{U}$ isolent donc aussi les racines q-ièmes de $g(a)=h(a)$. Comme les R_n sont préservés par g, h les $\mathcal{U}$ le sont aussi et les racines q-ièmes de $g(a)$ doivent s'y distribuer comme celles de a ; d'où $g(y)=h(y)$. A ce stade-ci on vérifie que les axiomes (ii), (iii), passent de A_1 à A_0. Pour (iv$_n$), on utilise le lemme 5. □

La description et les propriétés de base de l'espace topologique associé à $\mathrm{Spec}_\chi A$, aussi noté $\mathrm{Spec}_\chi A$, et du « faisceau structural » l'accompagnant (dans l'adjonction), sont analogues à $\mathrm{Spec}_p A$ (*voir* [14], [3]). Pour une description des points de cet espace (les mêmes qu'au théorème 7) en termes de parties de A, il s'agit de relever dans A une axiomatisation de $(\mathrm{CpC}_\chi)_\forall$ avec les prédicats R_n. Nous en donnons une dans [2]. On peut alors procéder comme en [4] pour montrer que $\mathrm{Spec}_\chi A$ est un espace spectral et aussi décrire le treillis des ouverts quasi compacts en termes de support à la Joyal (*cf.* [9]) et $\mathrm{Spec}_\chi A$ en termes de « locale » (*voir* [8]).

Reçue le 16 mars 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] L. BÉLAIR, Topics in the model theory of p-adic fields and spectra, *Thèse*, Yale University, 1985.
[2] L. BÉLAIR, Substructures and uniform elimination for p-adic fields, *Ann. Pure Appl. Logic* (à paraître).
[3] L. BRÖCKER et J. H. SCHINKE, On the L-adic spectrum, *Schriften Math. Inqv. Univ. Münster*, z. Ser., 40, 1986.
[4] M. COSTE et M.-F. COSTE-ROY, La topologie du spectre réel, in *Ordered Fields and Real Algebraic Geometry*, A.M.S. (Cont. Math., 8), 1982.
[5] M. COSTE et M.-F. COSTE-ROY, *Topologies for real algebraic geometry*, in *Topos Theoretic Methods in Geometry*, Univ. de Aarhus, *Var. Publ. Ser.*, 30, mai 1979.
[6] P. J. FREYD et G. M. KELLY, Categories of continuous functors, I, *J. Pure Appl. Alg.*, 2, 1972, p. 169-191.
[7] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag; *G.T.M.*, 52, 1977.
[8] P. T. JOHNSTONE, *Stone spaces*, Cambridge Univ. Press, 1983.
[9] A. JOYAL, Les théorèmes de Chevalley-Tarski et remarques sur l'algèbre constructive, *Cah. Top. Géom. Diff.*, 16, 1975, p. 256-258.
[10] M. MAKKAI et G. E. REYES, *First-order categorical logic*, Springer-Verlag; *L.N.M.*, 611, 1977.
[11] A. PRESTEL et P. ROQUETTE, *Formally p-adic fields*, Springer-Verlag; *L.N.M.*, 1050, 1984.
[12] G. E. REYES, Separably real closed local rings, *J. Symb. Logic*, 48, 1983, p. 889, Abstracts.
[13] E. ROBINSON, Affine schemes and p-adic geometry, *Thèse*, Cambridge, 1983.
[14] E. ROBINSON, The P-adic spectrum, *J. Pure. Appl. Alg.*, 40, 1986, p. 281-297.
[15] J. H. SCHINKE, Das (p, d)-adische Spektrum, *Thèse*, Munster, 1985.
[16] G. WRAITH, Generic Galois theory of local rings, in *Applications of sheaves*, M. P. FOURMAN, C. J. MULVEY et D. S. SCOTT éd., Springer-Verlag; *L.N.M.*, 753, 1979.

Équipe de Logique, C.N.R.S., U.E.R. de Mathématiques, Université de Paris-VII, 2, place Jussieu, 75251 Paris.