

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

POLYNÔMES ORTHOGONAUX ET POLYNÔMES DE  
MACDONALD

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

MAGALIE PAGÉ

NOVEMBRE 2006

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier la belle équipe du LaCIM pour sa douce folie. Merci à Lise de nous organiser le café hebdomadaire qui nous permet de nous rencontrer et de laisser libre cours à cette folie.

Un merci particulier à André d'avoir fait survivre Deneb jusqu'au bout et de toujours se sacrifier pour terminer les gâteaux ! Merci de m'avoir fait découvrir tant de choses, informatiques et autres.

Je tiens évidemment à remercier tout spécialement mon directeur François qui m'a accompagnée à chaque étape. Merci pour ta patience et ton écoute, pour tes conseils mathématiques et autres. Merci de m'avoir fait faire tant de belles rencontres, de m'avoir poussée un peu plus loin. Il ne te manque que les pompons pour être une super cheerleader !

Merci également à ma famille et mes amis, qui ont enduré mes multiples remises en question et m'ont toujours appuyée.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX . . . . .	v
LISTE DES FIGURES . . . . .	vi
RÉSUMÉ . . . . .	viii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
DÉFINITIONS ET NOTATIONS . . . . .	3
1.1 Partages et diagrammes . . . . .	3
1.2 Théorie de la représentation . . . . .	5
1.3 Espaces de polynômes . . . . .	6
1.4 Combinatoire classique . . . . .	8
CHAPITRE II	
POLYNÔMES ORTHOGONAUX . . . . .	10
2.1 Définitions et concepts de base . . . . .	11
2.1.1 Famille de polynômes orthogonaux . . . . .	11
2.1.2 Critère d'existence d'une FPO et fonctionnelles définies positives et quasi-définies . . . . .	14
2.1.3 Récurrence à trois termes . . . . .	17
2.1.4 Noyaux . . . . .	20
2.2 Exemples classiques . . . . .	24
2.2.1 Polynômes de Jacobi . . . . .	24
2.2.2 Polynômes d'Hermite et de Laguerre . . . . .	27
2.2.3 Caractérisation des familles classiques de polynômes orthogonaux . . . . .	29
2.2.4 Généralisations . . . . .	30
CHAPITRE III	
POLYNÔMES DE MACDONALD . . . . .	32
3.1 Préliminaires . . . . .	33
3.1.1 Fonctions symétriques et bases usuelles . . . . .	33
3.1.2 Substitution pléthystique . . . . .	40

3.1.3	Orthogonalité et noyau de Cauchy . . . . .	41
3.2	Fonctions symétriques à deux paramètres . . . . .	43
3.2.1	Théorème d'existence . . . . .	43
3.2.2	Analogie du noyau de Cauchy . . . . .	45
3.2.3	Opérateurs auto-adjoints . . . . .	47
3.2.4	Formes intégrale et transformée . . . . .	51
3.2.5	Représentations du groupe symétrique . . . . .	52
3.3	Polynômes de Macdonald et représentations du groupe symétrique . . . . .	54
3.3.1	Formule combinatoire pour les $H_\mu$ . . . . .	57
CHAPITRE IV		
DEUX MONDES PARALLÈLES . . . . .		61
4.1	Opérateurs de création . . . . .	62
4.1.1	... et polynômes orthogonaux . . . . .	65
4.1.2	... et polynômes de Macdonald . . . . .	67
4.2	Parallèles . . . . .	69
4.2.1	Polynômes de Macdonald à deux variables . . . . .	70
4.2.2	À la recherche de la récurrence perdue . . . . .	76
4.2.3	Réinterprétation en terme de représentations du groupe symétrique . . . . .	84
4.2.4	Vers une démonstration simple de la conjecture $n!$ ? . . . . .	86
4.2.5	Ouvertures . . . . .	88
CONCLUSION . . . . .		90
BIBLIOGRAPHIE . . . . .		95

## LISTE DES TABLEAUX

4.1	Tableau comparatif entre les polynômes orthogonaux classiques et les polynômes de Macdonald. . . . .	69
4.2	Une base de l'espace $M_D$ , décomposée selon le bidegré . . . . .	78

## LISTE DES FIGURES

1.1	Un diagramme de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . . . . .	4
1.2	L'ordre de lecture des cases du partage $(5, 4, 2, 1)$ . . . . .	4
1.3	Le diagramme associé au partage $(4, 4, 2, 1)$ avec coordonnées. . . . .	4
1.4	Les coins du partage $(8, 6, 6, 3, 1, 1)$ . . . . .	5
3.1	Un tableau semi-standard de forme $\lambda = (6, 4, 2, 2, 1)$ ; on lui associe le monôme $x_1^2 x_2^4 x_5 x_6^2 x_7^2 x_8 x_9 x_{10}^2$ . . . . .	38
3.2	Un tableau semi-standard gauche de forme $(6, 4, 2, 2, 1) / (3, 2, 2)$ . . . . .	39
3.3	Un tableau semi-standard de forme $\lambda = (5, 5, 3, 2, 2, 1)$ à entrées dans l'alphabet $1 < 2 < 3 < \dots < \bar{1} < \bar{2} < \bar{3} < \dots$ . . . . .	40
3.4	Le partage $(3, 2, 1)$ avec coordonnées. . . . .	55
3.5	Les descentes de ce remplissage sont indiquées en gris. . . . .	57
3.6	La zone d'attaque de la case $u$ . . . . .	58
3.7	$u, v$ et $w$ forment un triplet. . . . .	58
3.8	Les ensembles $E_1$ (en blanc) et $E_2$ (en gris) pour ce remplissage. . . . .	60
4.1	Une (toute petite) partie du graphe $G$ . . . . .	73
4.2	Un diagramme de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . . . . .	78
4.3	L'ombre de la case $(1, 2)$ dans le partage $(8, 6, 6, 3, 1, 1)$ . . . . .	80
4.4	$(5, 4, 3, 1) / 11$ et les partages qui couvrent l'ombre de $(1, 1)$ . . . . .	83

4.5	Le cas $a = 0$ .	87
4.6	Le cas $a > 0$ .	87
4.7	$(4, 3, 2, 2, 1) / 20$ et $(4, 3, 2, 2, 1) / 11$ .	91
4.8	L'équerre trouée $(8, 1^5) / 20$ .	92

## RÉSUMÉ

Nous nous proposons d'étudier les polynômes de Macdonald en les mettant en parallèle avec les polynômes orthogonaux classiques. En effet, ces deux types d'objets apparaissent comme fonctions propres d'opérateurs à significations physiques, les polynômes orthogonaux intervenant dans des situations décrites par une seule variable et les polynômes de Macdonald dans d'autres en demandant plusieurs. En développant chacune des deux théories, nous constaterons qu'elles s'élaborent de façon analogue. Notre but est ainsi de faire ressortir ces points communs tout en dégageant les différences entre les deux contextes.

En mettant en lumière ce parallèle, nous constaterons toutefois qu'il manque un élément pour qu'il soit complet. En effet, les polynômes orthogonaux satisfont une récurrence à trois termes qui leur est caractéristique. Or rien d'analogue n'est présent dans la théorie des polynômes de Macdonald. Mais nous verrons qu'une conjecture portant sur une famille élargie de polynômes de Macdonald a été formulée qui permettrait de compléter le tableau.

Mots clés : polynômes orthogonaux, fonctions symétriques, polynômes de Macdonald, conjecture  $n!$ .

## INTRODUCTION

En 1988, Macdonald introduit une base orthogonale particulière de l'anneau des fonctions symétriques à deux paramètres (Macdonald, 1988). Pour démontrer l'existence de fonctions symétriques ayant les propriétés voulues, il les construit comme fonctions propres d'un certain opérateur. Or cet opérateur s'avérait être connu des physiciens comme l'hamiltonien relié à un certain modèle quantique. Ceci n'est pas sans rappeler la particularité des familles de polynômes orthogonaux classiques d'apparaître comme fonctions propres d'opérateurs différentiels jouant un rôle important en physique (équation de la chaleur, de Schrödinger, etc.). Cette remarque est le point de départ de notre étude, dont le but est de souligner le parallèle entre la théorie des polynômes orthogonaux classiques et celle des polynômes de Macdonald.

Nous commencerons par nous outiller en établissant les définitions et notations dont nous aurons besoin tout au long de notre parcours. Nous entrerons ensuite dans le vif du sujet en rappelant les grandes lignes de la théorie des polynômes orthogonaux. Cette théorie étant largement documentée, nous nous contenterons ici d'offrir une vue d'ensemble en omettant le plus souvent les preuves. Nous donnons les définitions de base et en présentons les propriétés usuelles, notamment la récurrence à trois termes qui leur est caractéristique. Nous rappelons ensuite le critère d'existence pour une famille de polynômes orthogonaux associée à une fonctionnelle linéaire donnée, introduisant au passage les notions de fonctionnelles définies positives et quasi-définies. L'intérêt des fonctionnelles définies positives est de permettre d'introduire des produits scalaires ; nous ferons cependant patienter le lecteur jusqu'au chapitre 3 avant de lui montrer qu'un produit scalaire n'est pas toujours obtenu de cette façon ! Nous nous attardons ensuite à décrire trois grandes familles de polynômes orthogonaux classiques, les polynômes d'Hermite, de Laguerre et de Jacobi, ainsi que les propriétés qui les caractérisent.

Notre aventure se poursuit dans l'univers des fonctions symétriques à deux paramètres, dans lequel évoluent les polynômes de Macdonald. L'exploration de ce nouveau monde nécessite

d'abord d'introduire la notion de polynôme symétrique et de construire l'anneau des fonctions symétriques. Nous présentons ensuite les bases linéaires usuelles de cet espace vectoriel et y introduisons le produit scalaire de Hall. La substitution pléthystique nous permet alors de voir le produit scalaire introduit par Macdonald (Macdonald, 1988) sur l'espace vectoriel des fonctions symétriques à coefficients dans  $\mathbb{Q}(q, t)$  comme une simple modification du produit scalaire de Hall. Macdonald donne aussi une construction des polynômes de Macdonald comme fonctions propres d'un opérateur auto-adjoint (le fameux hamiltonien). Nous nous intéressons plus particulièrement à une forme légèrement modifiée, via une renormalisation et une substitution pléthystique, des polynômes de Macdonald. Ces polynômes transformés sont particulièrement intéressants car ils admettent une interprétation en terme de représentation du groupe symétrique. De plus, une formule combinatoire en a été donnée (Haglund, Haiman et Loehr, 2005).

Pour terminer, nous faisons se rencontrer les deux théories que nous avons décrites aux chapitres 2 et 3 ; nous mettons en lumière les points communs entre ces deux histoires. Nous montrons d'abord qu'autant polynômes orthogonaux classiques que polynômes de Macdonald s'obtiennent par l'application d'opérateurs de création et s'expriment ainsi via une formule de Rodrigues. Nous donnons ensuite, tel que promis au chapitre 2, un exemple montrant que les notions d'orthogonalité par rapport à un produit scalaire et par rapport à une fonctionnelle sont bien distinctes. Nous partirons finalement à la recherche de la pièce manquante pour compléter notre analogie, une récurrence pour les polynômes de Macdonald. Nous décrirons ainsi une famille élargie de polynômes de Macdonald (Bergeron *et al.*, 1999) qui, en plus de sembler satisfaire une récurrence à quatre termes, pose un ensemble de problèmes intéressants.

## Chapitre I

### DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Nous commençons par remplir notre coffre à outils, c'est-à-dire que nous introduisons dans ce qui suit les notations et définitions de base dont nous aurons besoin tout au cours de notre périple. Le lecteur pressé d'attaquer notre sujet d'intérêt pourra passer directement au chapitre 2 et se référer aux différentes sections de ce chapitre en cas de besoin.

#### 1.1 Partages et diagrammes

Un partage de  $n \in \mathbb{N}$  est une suite d'entiers naturels  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  tels que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$$

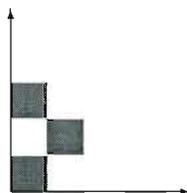
et

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n.$$

On dit que  $k$  est la longueur du partage  $\lambda$ , dénotée  $l(\lambda)$  et  $\lambda \vdash n$  signifie que  $\lambda$  est un partage de  $n$ . On note aussi  $|\lambda| = n$ . On introduit un ordre sur les partages, *l'ordre de la dominance* : pour  $\lambda, \mu \vdash n$

$$\lambda \preceq \mu \iff \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \quad i = 1, 2, \dots$$

Bien sûr,  $\lambda$  et  $\mu$  ne sont pas nécessairement de la même longueur ; on convient alors que  $\lambda_i = 0$  si  $i \geq l(\lambda)$  et  $\mu_i = 0$  si  $i \geq l(\mu)$ . Il ne s'agit bien sûr pas d'un ordre total ; par exemple, les partages de 9  $(3, 3, 1, 1, 1)$  et  $(3, 2, 2, 2)$  sont incomparables car on a l'inégalité  $3 + 3 > 3 + 2$  mais  $3 + 3 + 1 + 1 < 3 + 2 + 2 + 2$ . Une de ses extensions linéaires les plus connues est



**Figure 1.1** Un diagramme de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

1				
2	3			
4	5	6	7	
8	9	10	11	12

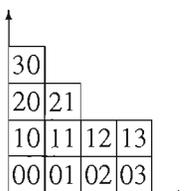
**Figure 1.2** L'ordre de lecture des cases du partage  $(5, 4, 2, 1)$

l'ordre lexicographique (ordre «du dictionnaire»). Notons cependant que pour  $n \leq 5$ , l'ordre de la dominance est un ordre total (et coïncide donc avec l'ordre lexicographique).

Un *diagramme*  $D$  est tout simplement un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Les éléments de ce sous-ensemble sont appelées les *cases* du diagramme. On convient de représenter la case  $(i, j)$  par le carré  $1 \times 1$  dont le coin inférieur gauche est le point  $(i, j)$ , tel qu'illustré à la figure 1.1.

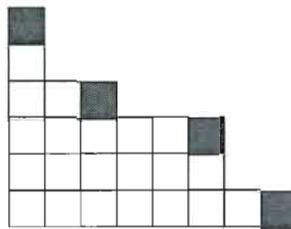
On définit l'*ordre de lecture* sur les cases d'un diagramme. Il s'agit de l'ordre total sur les cases de  $D$  obtenu en les lisant de gauche à droite, ligne par ligne, de haut en bas.

À un partage  $\mu$ , on associe de la façon habituelle un diagramme de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  (voir figure 1.3). Ainsi,



**Figure 1.3** Le diagramme associé au partage  $(4, 4, 2, 1)$  avec coordonnées.

la première coordonnée d'une case correspond à la *ligne* occupée par la case, et la seconde à la *colonne*, comme il est courant de le faire dans ce contexte. On utilise la même notation pour le partage et pour le diagramme qui lui est associé. Ainsi,  $(i, j) \in \mu$  signifie que la case  $(i, j)$  appartient au diagramme associé au partage  $\mu$ . De même,  $t : \mu \rightarrow \mathbb{N}$  désigne une fonction



**Figure 1.4** Les coins du partage  $(8, 6, 6, 3, 1, 1)$ .

associant à chaque case du diagramme  $\mu$  une valeur dans  $\mathbb{N}$  ; pour  $c \in \mu$ ,  $t(c)$  désigne la valeur prise en  $c$ .

Les *coins* d'un partage  $\mu$  sont les cases  $(\mu_i - 1, i - 1)$  telles que  $\mu_i > \mu_{i+1}$ . Les coins du partage  $(8, 6, 6, 3, 1, 1)$  sont identifiés à la figure 1.4 (notons que  $\mu_6 > \mu_7 = 0$ , en utilisant la convention que  $\mu_i = 0$  pour  $i > l(\mu)$ ).

Pour  $\lambda \vdash n$ , la notation  $\nu \rightarrow \lambda$  signifie que  $\nu \vdash n - 1$  et  $\nu \subset \lambda$ , c'est-à-dire que  $\nu$  s'obtient de  $\lambda$  en enlevant un coin.

Le *bras* d'une case  $c \in \mu$ , dénoté  $a(c)$ , est le nombre de cases de  $\mu$  se trouvant strictement à droite de  $c$  ; la *jambe* de  $c$ ,  $\ell(c)$ , est le nombre de cases de  $\mu$  se trouvant strictement au-dessus de  $c$ . Un coin est donc une case dont le bras et la jambe sont nuls.

Pour deux partages d'entiers  $\lambda$  et  $\mu$ , nous écrivons  $\mu \subset \lambda$  pour signifier que  $\lambda_i \geq \mu_i \forall i$ , c'est-à-dire que le diagramme de  $\lambda$  contient le diagramme de  $\mu$ . Pour  $\mu \subset \lambda$ , dénotons

$$\lambda/\mu = \{c \in \lambda : c \notin \mu\},$$

le *diagramme gauche*  $\lambda/\mu$ . Si  $\mu \not\subset \lambda$ , nous posons  $\lambda/\mu = \emptyset$ .

## 1.2 Théorie de la représentation

Une représentation de degré  $n$  sur  $\mathbb{C}$  d'un groupe (fini)  $G$  est un homomorphisme

$$\rho : G \rightarrow GL(V),$$

où  $V$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{C}$ . Deux représentations  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  et  $\tau : G \rightarrow GL(V)$  sont isomorphes s'il existe une matrice  $T \in GL(V)$  telle que

$$T\rho(g)T^{-1} = \tau(g)$$

pour tout  $g \in G$ . Une représentation complexe de degré  $n$  est équivalente à la donnée d'un espace vectoriel complexe de dimension  $n$  sur lequel agit  $G$ . Un tel espace vectoriel est appelé un  $G$ -module.

Un  $G$ -module  $V$  est dit *réductible* s'il s'écrit comme somme directe de sous-modules non triviaux (c'est-à-dire distincts de 0 et  $V$ ) :

$$V = U \oplus W .$$

Un sous-module  $W$  est bien sûr un sous-espace vectoriel de  $V$  laissé globalement invariant par l'action de  $G$  :  $g \cdot w \in W$  pour tout  $g \in G, w \in W$ . Le caractère d'une représentation est la fonction

$$\begin{aligned} \chi : G &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \text{trace}(\rho(g)) . \end{aligned}$$

Il est bien connu que deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère. Un caractère est dit irréductible s'il est associé à une représentation irréductible. De toute évidence, un caractère est une fonction centrale, c'est-à-dire qu'il est constant sur chaque classe de conjugaison de  $G$  ; en fait, on définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions centrales  $G \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)} .$$

On peut alors montrer que les caractères irréductibles forment une base orthogonale de l'espace des fonctions centrales. Il y en a donc précisément le même nombre que le nombre de classes de conjugaison de  $G$ . Ainsi, à isomorphisme près, il y a exactement autant de modules irréductibles pour un groupe  $G$  que de classes de conjugaison de  $G$ .

### 1.3 Espaces de polynômes

L'étude des polynômes orthogonaux à une variable (chapitre 2) nécessite de travailler dans l'espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients complexes,  $\mathbb{C}[x]$ . Une base de

cet espace est constituée des monômes  $x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Un polynôme  $P(x)$  est de *degré*  $n$  s'il s'écrit de la façon suivante :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

avec  $a_n \neq 0$ . Les constantes non nulles sont donc des polynômes de degré 0. Différentes conventions existent lorsqu'il est temps de définir le degré du polynôme nul 0 ; nous n'aurons cependant pas à nous préoccuper de cette technicalité. Lorsque  $a_n = 1$ , nous dirons que le polynôme est monique.  $a_n$  est appelé le *coefficient dominant* de  $P(x)$ . Pour  $m \in \mathbb{N}$  fixé, l'ensemble des polynômes  $P(x)$  de degré au plus  $m$  forme bien sûr un sous-espace de  $\mathbb{C}[x]$  de dimension  $m + 1$ .

Une fonctionnelle linéaire sur  $\mathbb{C}[x]$  est une fonction

$$L : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$$

linéaire :  $L[P + Q] = L[P] + L[Q]$ . Une fonctionnelle linéaire peut être définie tout simplement en en spécifiant la suite de *moments*

$$\mu_n = L[x^n] \in \mathbb{C} ;$$

la linéarité nous permet alors de connaître l'effet de  $L$  sur tout polynôme.

Nous voudrions également travailler (chapitre 3) dans l'espace vectoriel des polynômes à  $n$  variables  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ , où  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ . Une base de cet espace est donnée par l'ensemble des monômes  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  avec les  $k_i$  des entiers naturels. Si  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ , nous noterons

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} .$$

Si la longueur du vecteur  $\mathbf{k}$  est plus grande que  $n$ , on convient que  $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = 0$  ; si la longueur de  $\mathbf{k}$  est plus petite que  $n$ , on considère  $\mathbf{k}$  comme un vecteur de longueur  $n$  en lui ajoutant le nombre approprié d'entrées nulles. Le degré d'un tel monôme est donné par la somme des  $k_i$ . L'espace  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  est alors naturellement *gradué* par le degré, c'est-à-dire que

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{(d)} ,$$

où  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{(d)}$  désigne le sous-espace engendré par les monômes de degré  $d$ . Lorsque  $n = 1$ , chacun des  $\mathbb{C}[x]^{(d)}$  est de dimension 1. Ainsi, tout polynôme  $P$  s'écrit

$$P(\mathbf{x}) = P_0(\mathbf{x}) + P_1(\mathbf{x}) + \cdots + P_n(\mathbf{x}) ,$$

avec  $P_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{(i)}$  et  $P_n \neq 0$ . On dit que  $P$  est de degré  $N$  et que  $P_i(\mathbf{x})$  est sa composante homogène de degré  $i$ . On dit qu'un sous-espace  $V \subset \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  est *homogène* si, lorsque  $P$  est dans  $V$ , alors chacune des composantes homogènes de  $P$  est également dans  $V$  :

$$P = \sum P_i \in V \Rightarrow P_i \in V .$$

Lorsqu'on travaille avec deux jeux de  $n$  variables,  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots, y_n$ , nous avons les notions de *bidegré*, *bigraduation* et sous-espaces *bihomogènes*. Pour  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ ,  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ , le bidegré du monôme  $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\mathbf{y}^{\mathbf{l}}$  est le couple  $(\alpha, \beta)$  avec  $\alpha = \sum k_i, \beta = \sum l_i$ .

Dans l'anneau de polynômes  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , on désigne par  $\partial_{x_i}$  l'opérateur de dérivation formelle par rapport à la variable  $x_i$ . Plus généralement, si  $\{b_k\}$  est une base linéaire et multiplicative de l'espace  $V$ , c'est-à-dire que  $V = \mathbb{C}[b_1, b_2, \dots]$ ,  $\partial_{b_i}$  désigne l'opérateur agissant sur un élément  $v$  de  $V$  de la façon suivante : on écrit tout d'abord  $v$  comme un polynôme en les  $b_k$  puis on dérive par rapport à  $b_i$ , traité comme une variable formelle.

Pour  $P \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ , on désigne par  $\mathcal{L}_\partial[P]$  l'espace vectoriel engendré par ses dérivées partielles :

$$\mathcal{L}_\partial[P] := \{Q(\partial\mathbf{x})P(\mathbf{x}) : Q(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]\} ,$$

où  $Q(\partial\mathbf{x})$  désigne l'opérateur différentiel obtenu en substituant  $\partial_{x_i}$  à  $x_i$  dans le polynôme  $Q$ . Lorsque  $P$  est un polynôme homogène (c'est-à-dire constitué d'une seule composante homogène), alors  $\mathcal{L}_\partial[P]$  est un espace homogène.

#### 1.4 Combinatoire classique

Nous terminons par rappeler les éléments classiques de combinatoire que nous utiliserons.

Un *graphe orienté*  $G$  est la donnée de deux ensembles  $(S, A)$ ,  $S$  l'ensemble des sommets et  $A \subseteq S \times S$  l'ensemble des arêtes. Si  $(x, y) \in A$ , on dit qu'une arête relie les sommets  $x$  et  $y$

dans le graphe  $G$ . Un chemin de  $x$  à  $y$  dans  $G$  est une suite de sommets  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  telle que  $x_1 = x$ ,  $x_k = y$  et  $(x_i, x_{i+1}) \in A$  pour  $1 \leq i \leq k - 1$ . Un chemin est dit *élémentaire* si tous ses sommets sont distincts. Lorsque nous avons une fonction de poids  $w$  sur les arêtes, on définit le poids d'un chemin  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  comme le produit du poids des arêtes  $(x_i, x_{i+1})$ . On convient d'associer au chemin vide le poids 1.

Pour  $A$  un alphabet totalement ordonné,  $A^*$  désigne l'ensemble des mots  $w$  sur cet alphabet. Une *descente* d'un mot  $w = w_1 w_2 \dots w_k$  est un indice  $i$  pour lequel on a  $w_i > w_{i+1}$ . L'ensemble des descentes du mot est donc

$$Des(w) = \{i : w_i > w_{i+1}\} .$$

L'indice majeur  $\text{maj}(w)$  du mot  $w$  est alors défini de la façon suivante :

$$\text{maj}(w) = \sum_{i \in Des(w)} i .$$

## Chapitre II

### POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Nous souhaitons rappeler dans ce chapitre les notions de base concernant les polynômes orthogonaux à une variable ; ceux-ci ont été largement étudiés, entre autres parce que certains exemples de tels polynômes apparaissent comme fonctions propres d'opérateurs différentiels importants en physique. Nous nous intéressons présentement au cas d'une variable ; la situation à plusieurs variables sera abordée plus tard. Notre but étant d'ailleurs de généraliser les concepts que nous introduirons ici à la situation à plusieurs variables, nous omettrons le plus souvent les démonstrations. Le lecteur avide de détails pourra se référer à l'abondante littérature sur le sujet ; notre développement et nos notations suivront essentiellement (Chihara, 1978).

Avant d'attaquer avec rigueur les notions de base de la théorie des polynômes orthogonaux, commençons par introduire un exemple. Le lecteur sera heureux d'apprendre qu'il peut déjà construire, sans rien de plus que des notions de base de calcul et des identités trigonométriques, une suite de polynômes orthogonaux pour une fonctionnelle linéaire définie positive, même sans connaître ces concepts, qui sont introduits dans les sections 2.1.1 et 2.1.2. En effet, l'identité trigonométrique

$$2 \cos m\theta \cos n\theta = \cos (m + n)\theta + \cos (m - n)\theta \quad (2.1)$$

a pour conséquence que

$$\int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0 \quad (2.2)$$

pour  $m \neq n$ . Effectuons le changement de variable  $x = \cos \theta$  et posons

$$T_n(x) = \cos n\theta. \quad (2.3)$$

L'équation (2.2) devient alors

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = 0 \quad (2.4)$$

pour  $n \neq m$ . Les  $T_n(x)$  sont des polynômes en  $x$ . En effet, nous avons  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$  et l'identité (2.1) avec  $n = 1$  nous donne que

$$2xT_m(x) = T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x) . \quad (2.5)$$

Nous concluons donc, par récurrence, que les  $T_n(x)$  sont des polynômes. De plus, le degré de  $T_n(x)$  est  $n$ . Les  $T_n(x)$  sont appelés *polynômes de Tchebichef* de première sorte. Il s'agit d'un premier exemple de famille de polynômes orthogonaux puisque la formule (2.4) exprime qu'ils sont orthogonaux pour la *fonction de poids*  $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  sur l'intervalle  $(-1, 1)$ . La récurrence (2.5) qui nous a permis de conclure que les  $T_n(x)$  sont des polynômes est typique pour ces familles ; en effet, nous verrons (théorème 2.1) que toute famille de polynômes orthogonaux est caractérisée par une récurrence à trois termes de cette forme. Nous nous intéresserons ensuite à certains exemples particuliers.

## 2.1 Définitions et concepts de base

### 2.1.1 Famille de polynômes orthogonaux

Commençons par introduire l'objet qui nous intéresse, les familles de polynômes orthogonaux. L'orthogonalité dans ce contexte est donnée par rapport à une fonctionnelle linéaire  $L$ .

Nous dirons que la famille de polynômes  $\{P_n(x)\}$ ,  $P_n \in \mathbb{C}[x]$  de degré  $n$ , est une famille de polynôme orthogonaux, que l'on abrège par FPO, si  $L[P_n(x)P_m(x)] = h_n\delta_{nm}$  pour  $h_n \neq 0$ , où

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est le delta de Kronecker. Lorsqu'en plus nous avons  $L[P_n(x)^2] = 1$  pour tout  $n$ , nous disons que la FPO est *orthonormale*. Lorsque chacun des  $P_n(x)$  est monique, nous disons que la FPO est monique.

Bien que, en général, la notion d'orthogonalité par rapport à une fonctionnelle diffère du concept d'orthogonalité par rapport à un produit scalaire, ces deux notions coïncident lorsque certaines conditions sont satisfaites, comme nous le verrons plus tard. Lorsque ces conditions sont vérifiées, nous pouvons définir un produit scalaire à l'aide de notre fonctionnelle en posant  $\langle P, Q \rangle = L [P\overline{Q}]$ .

Classiquement, la fonctionnelle linéaire est souvent donnée sous la forme

$$L[f] = \int_a^b f(x) w(x) dx, \quad (2.6)$$

pour  $w(x)$  une fonction intégrable sur l'intervalle  $(a, b)$ . L'orthogonalité est alors donnée par une formule de type (2.4). La fonction  $w(x)$  est appelée *fonction de poids* et on parle alors d'orthogonalité par rapport à une fonctionnelle linéaire de poids  $w(x)$ .

Il est intéressant de constater que, souvent, les moments  $\mu_n = L[x^n]$  sont des entiers positifs qui *comptent* des objets combinatoires. Par exemple nous verrons à la section 2.2.2 une famille de polynômes  $\{\overline{H}_n(x)\}$  orthogonaux pour la fonctionnelle  $\nu$  donnée par les moments

$$\nu(x^{2n}) = (2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$$

et  $\nu(x^{2n+1}) = 0$ ; nous constatons alors que  $\nu(x^n)$  compte le nombre d'involutions sur  $n$  éléments sans point fixe. Pour une approche combinatoire des moments, nous référons le lecteur à (Viennot, 1983).

En fonction du contexte, il peut être très utile d'utiliser une de ces trois définitions équivalentes :

- (i)  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est orthogonale par rapport à  $L$ ;
- (ii)  $L[\pi(x)P_n(x)] = 0$  pour tout polynôme  $\pi(x)$  de degré  $m < n$ ;
- (iii)  $L[x^m P_n(x)] = k_n \delta_{nm}$  avec  $k_n \neq 0$  et  $m$  entre 0 et  $n$ .

Il est clair que si  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une FPO pour la fonctionnelle  $L$ , alors  $\{c_n P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  en est également une, pour toutes valeurs de  $c_n$  non nulles. Réciproquement, deux FPO pour la même fonctionnelle ne diffèrent que par une constante non nulle. En effet, soient  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$  deux telles familles. Le fait que chaque  $P_n$  soit exactement de degré  $n$  entraîne que l'ensemble

$\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$  forme une base de l'espace des polynômes de degré au plus  $m$ . Ainsi, pour chaque  $m$ , nous avons

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x) .$$

En multipliant chaque côté de l'équation par  $P_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$  et en appliquant  $L$ , nous obtenons

$$L[P_k(x) Q_m(x)] = c_k L[P_k^2] ,$$

et puisque  $L[P_k^2] \neq 0$ , nous avons

$$c_k = \frac{L[P_k(x) Q_m(x)]}{L[P_k^2]} .$$

Mais les  $Q_n$  sont également une FPO pour  $L$ ; en utilisant la caractérisation (ii) de l'orthogonalité et le fait que  $Q_m$  et  $P_k$  soient respectivement de degrés  $m$  et  $k$ , nous obtenons que  $c_k = 0$  pour  $k < m$ . Donc, tel qu'annoncé,  $Q_n(x) = c_n P_n(x)$ .

Ceci signifie que de trouver une famille de polynômes orthogonaux ayant des coefficients dominants fixés pour une fonctionnelle donnée est un problème dont la solution, si elle existe, est unique; par exemple, il ne peut y avoir qu'une seule FPO monique pour une fonctionnelle donnée. Mais une solution existe-t-elle toujours? Considérons l'exemple suivant :

Soit la fonctionnelle linéaire donnée par les moments  $\mu_n = a^n$  pour  $a$  un réel. Supposons que  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une FPO monique pour  $L$ . Nous avons donc  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x + \alpha$ , avec  $\alpha$  que nous pouvons déterminer par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} L[P_0(x) P_1(x)] &= L[1 \cdot (x + \alpha)] \\ &= L[x + \alpha] \\ &= L[x] + L[\alpha] \\ &= a + \alpha \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Donc  $\alpha = -a$ . Mais alors

$$\begin{aligned}
 L \left[ P_1(x)^2 \right] &= L \left[ (x-a)^2 \right] \\
 &= L \left[ x^2 - 2ax + a^2 \right] \\
 &= L \left[ x^2 \right] - 2aL \left[ x \right] + a^2L \left[ 1 \right] \\
 &= a^2 - 2a^2 + a^2 \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

ce qui est bien évidemment une contradiction (nous exigeons, pour avoir une FPO, que  $L \left[ P_n^2 \right]$  soit non nul). Il n'existe donc pas de FPO pour cette fonctionnelle. Nous aimerions donc avoir un critère pour l'existence d'une FPO pour une fonctionnelle donnée.

### 2.1.2 Critère d'existence d'une FPO et fonctionnelles définies positives et quasi-définies

Soit  $L$  une fonctionnelle linéaire définie par la suite de moments  $\{\mu_n\}$ .

Soit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{nk} x^k. \quad (2.7)$$

Pour que les  $P_n(x)$  forment une FPO, ils doivent satisfaire la condition d'orthogonalité (iii) :

$$L \left[ x^m P_n(x) \right] = k_n \delta_{nm},$$

pour  $m \leq n$  avec les  $k_n$  non nuls. En terme des moments, cette équation se traduit par

$$\sum_{k=0}^n c_{nk} \mu_{k+m} = k_n \delta_{nm},$$

c'est-à-dire que nous avons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Dénotons par  $\Delta_n$  le déterminant de cette matrice de moments :

$$\Delta_n = \det (\mu_{i+j})_{i,j=0}^n . \quad (2.9)$$

Tel que remarqué précédemment, si une solution aux systèmes (2.8) existe, alors elle est unique-  
ment déterminée par les valeurs  $k_n$  ; par conséquent, l'existence d'une FPO implique que (2.8)  
possède une unique solution et donc  $\Delta_n \neq 0$ . Réciproquement, si  $\Delta_n \neq 0$ , alors (2.8) possède  
une unique solution. Pour que les polynômes définis par l'équation (2.7) forment une FPO pour  
 $L$ , il suffit de vérifier que  $P_n(x)$  est de degré  $n$ . Pour  $n \geq 1$ , nous avons, en solutionnant (2.8),

$$c_{nn} = \frac{k_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0 . \quad (2.10)$$

Pour  $n = 0$ , on a

$$c_{00} = \frac{k_0}{\mu_0} \neq 0 .$$

Notons que l'égalité (2.10) demeure donc valide pour  $n = 0$  si nous posons  $\Delta_{-1} = 1$ , ce que  
nous convenons de faire pour la suite des choses. Ainsi, les  $P_n(x)$  sont de degré  $n$  (puisque le  
coefficient de  $x^n$ ,  $c_{nn}$ , est non nul) et satisfont la condition d'orthogonalité : ils forment donc  
une FPO pour  $L$ .

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une FPO pour  $L$  est que tous  
les déterminants  $\Delta_n$  soient non nuls. Nous appellerons les fonctionnelles  $L$  satisfaisant cette  
propriété les fonctionnelles *quasi-définie*.

Notons que nous avons obtenu, en cours de route, une description explicite d'une FPO, lors-  
qu'elle existe :

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} . \quad (2.11)$$

Les  $Q_n(x) = \Delta_{n-1}^{-1} P_n(x)$  forment alors une FPO monique pour la fonctionnelle donnée par  
les moments  $\mu_n$ . La formule (2.10) nous permet également d'obtenir une formule bien utile :

pour  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une FPO pour la fonctionnelle  $L$  et  $\pi_n(x)$  un polynôme de degré  $n$ , nous avons

$$L[\pi_n(x)P_n(x)] = \frac{a_n c_{nn} \Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad (2.12)$$

où  $a_n$  et  $c_{nn}$  dénotent les coefficients dominants de  $\pi_n(x)$  et  $P_n(x)$  respectivement. En effet, écrivons  $\pi_n(x) = a_n x^n + \pi_{n-1}(x)$ , avec  $\pi_{n-1}(x)$  de degré au plus  $n-1$ . Alors

$$\begin{aligned} L[\pi_n(x)P_n(x)] &= a_n L[x^n P_n(x)] + L[\pi_{n-1}(x)P_n(x)] \\ &= a_n L[x^n P_n(x)] \\ &= a_n k_n. \end{aligned}$$

Le résultat découle ainsi de (2.10).

Les déterminants  $\Delta_n$  nous permettent ainsi de déterminer s'il existe une FPO pour une fonctionnelle donnée. Mais ce n'est pas la seule information qu'ils renferment sur notre fonctionnelle !

**Définition 2.1.** On dit qu'une fonctionnelle linéaire  $L$  est définie positive si  $L[P(x)] > 0$  pour tout polynôme  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$  non nul tel que  $P(x_0) \geq 0$  pour tout  $x_0$  réel.

Remarquons immédiatement qu'alors tous les moments de  $L$  sont réels. En effet, nous avons déjà par hypothèse que les moments pairs,  $\mu_{2n}$ , sont réels positifs ; il faut voir ce qui arrive aux moments impairs. Nous savons que  $L[(x+1)^{2n}] > 0$ ,  $L$  étant définie positive. Or

$$0 < L[(x+1)^{2n}] = \sum_k^{2n} \binom{2n}{k} \mu_{2n-k}.$$

Un raisonnement par récurrence nous permet de conclure que tous les moments sont réels. Une fonctionnelle linéaire définie positive nous permet de définir un produit scalaire sur l'espace des polynômes en posant :

$$\langle P(x), Q(x) \rangle = L[P(x)\overline{Q(x)}]. \quad (2.13)$$

La notion d'orthogonalité pour une fonctionnelle  $L$  définie positive coïncide alors avec la notion d'orthogonalité pour le produit scalaire (2.13). Nous pouvons ainsi utiliser le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une famille de polynômes orthonormaux ; ces polynômes seront même à coefficients réels ! En multipliant par un scalaire approprié, nous

trouvons également que la FPO monique pour une telle fonctionnelle linéaire est une famille de polynômes à coefficients réels.

Le théorème de représentation de Riesz (il s'agit d'un théorème classique en analyse ; voir par exemple (Chihara, 1978)) nous dit que les fonctionnelles définies positives sont précisément celles pouvant être réalisées sous la forme (2.6).

Les  $\Delta_n$  nous permettent de savoir si notre fonctionnelle possède cette belle qualité, puisque nous pouvons vérifier qu'une fonctionnelle est définie positive si et seulement si tous ses moments sont réels et  $\Delta_n > 0$  pour tout  $n$  (entre autres, une fonctionnelle linéaire définie positive est quasi-définie ; nous parlerons alors de FPO définie positive ou quasi-définie, selon le cas). C'est d'ailleurs ce qui justifie la terminologie. En effet, en supposant que tous les moments  $\mu_k$  sont réels, les conditions  $\Delta_n > 0$  sont équivalentes à

$$\sum_{i,j=0}^n \mu_{i+j} x_i x_j > 0$$

pour tout  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$  (il s'agit là d'un résultat classique de la théorie des matrices symétriques à coefficients réels). Or les formes quadratiques satisfaisant cette condition étant déjà appelées *définies positives*, on a conservé la terminologie pour la fonctionnelle  $L$  de moments  $\mu_k$ .

Ainsi, à une fonctionnelle définie positive nous associons un produit scalaire. Mais donné un produit scalaire  $\langle -, - \rangle$  sur l'espace des polynômes en  $x$ , peut-on lui associer une fonctionnelle définie positive ? Pour que ce soit le cas, nous devons avoir que  $\langle x^n, x^m \rangle$  ne dépend que de la somme  $n + m$ . Nous verrons à la section 4.2.1 un exemple où ce n'est pas le cas, montrant qu'il n'y a pas de correspondance entre produit scalaire et fonctionnelle linéaire définie positive.

### 2.1.3 Récurrence à trois termes

Les familles de polynômes orthogonaux pour les fonctionnelles quasi-définies possèdent une propriété exceptionnelle : elle satisfont une récurrence à trois termes d'une forme très simple :

**Théorème 2.1** (Récurrence à trois termes). *Soit  $L$  une fonctionnelle linéaire quasi-définie et soit  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  la FPO monique correspondante. Il existe des constantes  $c_n$  et  $\lambda_n \neq 0$  telles*

que :

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \quad (2.14)$$

pour  $n = 1, 2, \dots$  et où nous avons posé  $P_{-1}(x) = 0$ .

Lorsque  $L$  est définie positive, alors les  $c_n$  sont réels et  $\lambda_n > 0$  pour  $n = 2, 3, \dots$

**Démonstration**  $xP_n(x)$  étant un polynôme de degré  $n + 1$ , nous avons l'écriture suivante :

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk}P_k(x),$$

avec

$$a_{nk} = \frac{L[xP_n(x)P_k(x)]}{L[P_k^2(x)]}.$$

Mais  $xP_k(x)$  est de degré  $k + 1$ , donc  $a_{nk}$  est nul pour  $k$  entre 0 et  $n - 2$ . Également,  $xP_n(x)$  est monique, donc  $a_{n,n+1} = 1$ . Nous obtenons ainsi

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{nn}P_n(x) + a_{n,n-1}P_{n-1}(x),$$

pour  $n \geq 1$ , ou encore

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) + \lambda_n P_{n-2}(x),$$

pour  $n \geq 2$ . Cette équation est également vérifiée pour  $n = 1$  si nous posons  $P_{-1} = 0$  et choisissons  $c_1 = -P_1(0)$  ( $\lambda_1$  peut être choisi arbitrairement). Nous obtenons ainsi (2.14). Maintenant, en multipliant chaque membre de (2.14) par  $x^{n-2}$  et en appliquant ensuite  $L$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= L[x^{n-2}P_n(x)] \\ &= L[x^{n-1}P_{n-1}] - c_n L[x^{n-2}P_{n-1}] - \lambda_n L[x^{n-2}P_{n-2}(x)] \\ &= L[x^{n-1}P_{n-1}(x)] - \lambda_n L[x^{n-2}P_{n-2}(x)]. \end{aligned}$$

À l'aide de la formule (2.12), nous obtenons alors

$$\lambda_{n+1} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}.$$

Par conséquent,  $\lambda_n$  est toujours non nul lorsque  $L$  est quasi-définie et est un réel strictement positif lorsque  $L$  est définie positive. Dans ce dernier cas, les  $c_n$  sont des réels puisque les  $P_k(x)$  sont à coefficients réels, tel que nous l'avons fait remarqué à la fin de la section 2.1.2.  $\square$

Nous avons obtenu une formule explicite pour les  $\lambda_n$  ; il est possible d'en faire autant pour les  $c_n$ . En multipliant (2.14) par  $P_{n-1}(x)$  puis en appliquant la fonctionnelle  $L$ , nous obtenons

$$c_n = \frac{L[xP_{n-1}^2(x)]}{L[P_{n-1}^2(x)]} .$$

Lorsque notre FPO  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas monique, elle satisfait plutôt une récurrence de la forme

$$P_{n+1}(x) = (\alpha_n x + \beta_n) P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x) . \quad (2.15)$$

Si nous écrivons  $P_n(x) = a_n \hat{P}_n(x)$  avec  $\hat{P}_n(x)$  FPO monique, nous avons

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} , \quad \beta_n = -\frac{a_{n+1}c_{n+1}}{a_n} , \quad \gamma_n = \frac{a_{n+1}\lambda_{n+1}}{a_{n-1}} , \quad (2.16)$$

pour  $n \geq 0$ , avec  $a_{-1} = 1$  et où les  $c_n$  et les  $\lambda_n$  sont les constantes données par (2.14) pour la FPO monique  $\{\hat{P}_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Par exemple, nous avons obtenu, pour les polynômes de Tchebichef de première sorte (2.3), la récurrence (2.5)

$$2xT_m(x) = T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x) ,$$

qui se réécrit sous la forme (2.15)

$$T_m(x) = 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x) .$$

Ceci montre que le coefficient dominant de  $T_n(x)$  est  $2^{n-1}$  pour  $n \geq 1$  ; la famille de polynômes donnée par  $\hat{T}_0(x) = T_0(x) = 1$  et  $\hat{T}(x) = 2^{-(n-1)}T_n(x)$  pour  $n \geq 1$  satisfait la récurrence de type (2.14)

$$\hat{T}_n(x) = x\hat{T}_{n-1}(x) - \frac{1}{4}\hat{T}_{n-2}(x)$$

pour  $n \geq 3$  et

$$\hat{T}_2(x) = x\hat{T}_1(x) - \frac{1}{2}\hat{T}_0(x) .$$

Nous avons également la réciproque :

**Théorème 2.2** (de Favard). *Pour deux suites de complexes  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , soit  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de polynômes définies par la récurrence (2.14) avec les conditions initiales*

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1.$$

*Alors il existe une unique fonctionnelle linéaire  $L : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $L[1] = \lambda_1$  et  $L[P_n(x)P_m(x)] = 0$  si  $n \neq m$ .  $L$  est quasi-définie si et seulement si  $\lambda_n \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ;  $P_n(x)$  est alors la FPO monique associée à  $L$ .  $L$  est définie positive si et seulement si tous les  $c_n$  sont réels et tous les  $\lambda_n$  sont réels strictement positifs.*

Ainsi, on peut définir une famille de polynômes orthogonaux soit en spécifiant la fonctionnelle ou la suite de ses moments, ou encore en donnant la récurrence (2.14) qu'elle satisfait. En fait, à partir des suites  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , nous pouvons calculer les moments de la fonctionnelle pour laquelle les polynômes donnés par (2.14) sont orthogonaux ; voir à ce sujet (Viennot, 1983).

#### 2.1.4 Noyaux

Nous allons maintenant construire une suite de polynômes à deux variables, la suite des noyaux  $K_n(x, y)$ , rendant compte de l'orthogonalité par rapport à notre fonctionnelle. Bien que cette suite de polynômes ait un intérêt en elle-même (entre autres de permettre de construire de nouvelles FPO, comme nous le verrons), nous la présentons d'abord et avant tout dans le but de la mettre plus tard en parallèle avec une construction semblable dans le contexte des fonctions symétriques (et qui, par un heureux hasard et pour des raisons tout à fait différentes, est également appelé noyau !) Nous n'explorerons donc pas le sujet en profondeur ici mais nous nous contenterons plutôt d'en esquisser les grandes lignes.

Nous nous restreignons au cas où notre fonctionnelle linéaire  $L$  est définie positive.  $L$  est donc donnée, d'après le théorème de Riesz, par

$$L[f] = \int_a^b f(x) w(x) dx.$$

Soit  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  la FPO *orthonormale* pour  $L$ . Nous définissons la *suite des noyaux*  $K_n(x, y)$  par

$$K_n(x, y) = \sum_{j=0}^n P_j(x) P_j(y), \quad (2.17)$$

pour  $n \geq 0$ . Cette suite de polynômes possède certaines propriétés remarquables ; entre autres, pour  $f(x)$  un polynôme de degré au plus  $n$ ,

$$f(x) = L_t[f(t) K_n(t, x)] , \quad (2.18)$$

où  $L_t$  signifie que la fonctionnelle s'applique aux polynômes en la variable  $t$ .

Il suffit pour voir cela d'écrire  $f(x) = \sum_{k=0}^n f_k P_k(x)$ , de multiplier chaque membre de cette équation par  $P_j(x)$ ,  $0 \leq j \leq n$  et d'appliquer  $L_t$ . Nous obtenons

$$L_t[f(t) P_j(t)] = f_j ,$$

puisque les  $P_j(x)$  sont orthogonaux pour la fonctionnelle  $L$ . Par conséquent,

$$L_t[f(t) P_j(t) P_j(x)] = f_j P_j(x) ,$$

et le résultat est obtenu en sommant sur  $j$ .

Ce résultat nous permet de conclure que la suite des noyaux  $K_n(x_0, x)$  est orthogonale pour la fonction de poids  $(x - x_0) w(x)$ . En effet, si  $Q_{n-1}(x)$  est un polynôme quelconque de degré au plus  $n-1$ , la formule (2.18) appliquée à  $Q(x) = (x - x_0) Q_{n-1}(x)$  nous donne l'orthogonalité (d'après le critère (ii)). Certains exemples classiques de FPO apparaissent d'ailleurs de cette façon ; en effet, les FPO qu'on appelle les polynômes de Tchebichef de troisième et quatrième sortes sont les polynômes orthogonaux obtenus (à un facteur près) en évaluant le noyau de la FPO orthonormale associée aux polynômes de Tchebichef de première sorte en  $x_0 = 1$  et en  $x_0 = -1$ , respectivement. Ils sont par conséquent orthogonaux pour les fonctions de poids  $w_3(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  et  $w_4(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$  respectivement.

De plus, la formule (2.18) nous permet d'obtenir une expression analogue de (2.11) pour les  $K_n(x, t)$ . En effet, prenons  $f(x) = x^\nu$  pour  $\nu = 0, 1, \dots, n$  et écrivons

$$K_n(x, t) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i t^j .$$

Remarquons que  $K_n(x, t) = K_n(t, x)$ , ce qui implique que  $a_{i,j} = a_{j,i}$  pour tous les  $i, j$ . Nous

avons alors

$$\begin{aligned} x^\nu &= L_t [t^\nu K_n(t, x)] \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \mu_{\nu+i} x^j, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\sum_i a_{il} \mu_{\nu+i} = \delta_{l\nu}.$$

Or  $\sum_i a_{il} \mu_{\nu+i} = \sum_i a_{li} \mu_{i+\nu}$  est l'entrée  $(l, \nu)$  de  $AM$ , où  $A = (a_{ij})$  et  $M = (\mu_{i+j})$ . Par conséquent, nous avons que  $AM$  est la matrice identité et donc que  $A = M^{-1}$ . C'est précisément ce qu'exprime l'équation

$$K_n(x, t) = \frac{-1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} & t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} & t^n \\ 1 & x & \cdots & x^n & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous avons également une façon de calculer la suite des noyaux en termes de la FPO orthonormale pour  $L$  :

**Théorème 2.3** (Identité de Christoffel-Darboux). *Soit  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  la FPO orthonormale pour la fonctionnelle  $L$  et  $a_n$  le coefficient dominant de  $P_n(x)$ . Alors*

$$\sum_{k=0}^n P_k(x) P_k(y) = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x - y}. \quad (2.19)$$

**Démonstration** Nous savons que les polynômes  $P_n(x)$  satisfont une récurrence de la forme (2.15) ; observons immédiatement que, pour une FPO orthonormale, les constantes  $\alpha_n$  et  $\gamma_n$  sont liées par la relation

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}.$$

En effet, en multipliant (2.15) par  $P_{n-1}$  et en appliquant  $L$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_n L [P_n(x) x P_{n-1}(x)] - \gamma_n L [P_{n-1}(x)^2] \\ &= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} L [P_n(x) (P_n(x) - \beta_{n-1} P_{n-1}(x) + \gamma_{n-1} P_{n-2}(x))] - \gamma_n \\ &= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} - \gamma_n . \end{aligned}$$

De la récurrence, nous tirons les deux équations suivantes :

$$P_n(y) P_{n+1}(x) = (\alpha_n x + B_n) P_n(x) P_n(y) - \gamma_n P_{n-1}(x) ,$$

et

$$P_n(x) P_{n+1}(y) = (\alpha_n y + B_n) P_n(y) P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(y) .$$

En soustrayant la deuxième équation de la première et en divisant par  $\alpha_n (x - y)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_n} \frac{P_n(y) P_{n+1}(x) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x - y} = \\ P_n(x) P_n(y) + \frac{\gamma_n P_{n-1}(y) P_n(x) - P_{n-1}(x) P_n(y)}{\alpha_n (x - y)} . \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à exploiter le fait que  $\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$  et que  $\gamma_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$  pour pouvoir appliquer récursivement la dernière équation et obtenir le résultat.  $\square$

**Remarque :** Pour la démonstration, nous n'avons pas utilisé le fait que  $L$  était définie positive. L'égalité (2.19) est ainsi vérifiée pour toute fonctionnelle  $L$ , mais le membre de gauche ne correspond pas aux noyaux dans le cas quasi-définie. Dans le cas où  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est plutôt la FPO monique pour  $L$ , (2.19) s'écrit

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x) P_k(y)}{L[P_k^2(x)]} = \frac{1}{L[P_n^2(x)]} \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x - y} . \quad (2.20)$$

Notons que lorsqu'une FPO définie positive forme un système complet de l'espace des fonctions de carré intégrable (généralement dénoté  $L^2(a, b)$ ), il devient intéressant de considérer le développement en série de Fourier de fonctions  $f \in L^2(a, b)$  :

$$f = f_0 p_0(x) + f_1 p_1(x) + f_2 p_2(x) + \dots ,$$

avec  $f_k = \int_a^b f(t) p_k(t) w(t) dt$ . Le noyau nous permet alors de connaître les sommes partielles  $S_n(x)$  :

$$S_n(x) = \int_a^b f(t) K_n(x, t) w(t) dt .$$

## 2.2 Exemples classiques

Certaines familles de polynômes orthogonaux revêtent une importance particulière puisqu'elles apparaissent dans de nombreuses applications, entre autres comme solutions d'équations différentielles ayant une signification physique. C'est le cas de notre premier exemple.

### 2.2.1 Polynômes de Jacobi

Soient  $\alpha, \beta > -1$ . Nous définissons les *polynômes de Jacobi* (nommés ainsi car c'est Jacobi qui les a introduits en 1859) par l'équation suivante :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left( (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right) . \quad (2.21)$$

En effectuant la dérivée du produit, nous obtenons une formule explicite pour les  $P_m^{(\alpha, \beta)}(x)$  :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k} . \quad (2.22)$$

Cette équation met en lumière le fait que  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  est un polynôme de degré  $n$  et de coefficient dominant

$$k_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2^n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} . \quad (2.23)$$

Les polynômes de Jacobi sont orthogonaux pour la fonction de poids  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  sur l'intervalle  $(-1, 1)$  ; il suffit pour cela de vérifier (condition (ii)) que, pour  $m < n$ ,

$$\int_{-1}^1 x^m P_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = 0 .$$

Une fois que nous constatons que

$$\frac{d^k}{dx^k} \left( (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right) \Big|_{-1}^1 = 0$$

pour tout  $0 \leq k < n$ , l'intégration par parties nous donne

$$\int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n} \left( (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right) dx = -m \int_{-1}^1 x^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right) dx ,$$

et donc, en itérant, que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^m P_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx &= \\ (-1)^m m! \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \left( (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right) dx &= \\ = (-1)^m m! \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} \left( (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right) \Big|_{-1}^1 = 0 . \end{aligned}$$

Remarquons que les dérivées des polynômes de Jacobi  $\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}$  forment également une famille de polynômes orthogonaux puisque nous calculons directement à partir de (2.22) que

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2} (n + \beta + \alpha + 1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) . \quad (2.24)$$

La famille  $Q_n = \frac{d}{dx} P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}$  est donc orthogonale par rapport à la fonction de poids  $(1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1}$ .

Ainsi, nous venons de voir que les polynômes de Jacobi peuvent être définis comme la FPO pour la fonctionnelle définie positive donnée par (2.6) avec la fonction de poids  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  sur l'intervalle  $(-1, 1)$  ayant les  $k_n^{(\alpha, \beta)}$  (voir (2.23)) pour coefficients dominants. Par conséquent, les polynômes de Tchebichef de première sorte ne diffèrent que par une constante des polynômes de Jacobi avec  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  :

$$T_n(x) = 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1} P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) .$$

Les polynômes de Tchebichef de *seconde sorte*  $U_n(x)$  s'obtiennent de façon similaire :

$$U_n(x) = 2^{2n} \binom{2n+1}{n+1}^{-1} P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) . \quad (2.25)$$

Ces polynômes se définissent également à l'aide des fonctions trigonométriques, de façon analogue à ceux de première sorte :

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} ,$$

où  $x = \cos \theta$ . Ils satisfont la récurrence à trois termes

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) .$$

Lorsque  $\alpha = \beta > -1$ , le polynôme de Jacobi  $P_n^{(\alpha,\beta)}$  est appelé un *polynôme ultrasphérique* (ou encore *polynôme de Gegenbauer*). On considère généralement la renormalisation

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \binom{2\alpha}{\alpha}^{-1} \binom{n+2\alpha}{\alpha} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) , \quad (2.26)$$

avec  $\alpha = \lambda - \frac{1}{2} > -1$ . Les polynômes ultrasphériques sont orthogonaux pour la fonction de poids  $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$  et satisfont la récurrence

$$nP_n^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda-1)xP_{n-1}^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-2)P_{n-2}^{(\lambda)}(x)$$

pour  $n = 2, 3, \dots$  avec conditions initiales  $P_0^{(\lambda)}(x) = 1$ ,  $P_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x$ . Dans le cas particulier  $\alpha = \beta = 0$ , les  $P_n^{(0,0)}(x) = P_n^{(\frac{1}{2})}(x)$  sont appelés les *polynômes de Legendre* car Legendre les a étudiés dès 1785, donc avant l'introduction des polynômes de Jacobi.

L'équation (2.21) avec  $\alpha = \beta = 0$  est appelée *formule de Rodrigues* et (2.21) en général est un exemple de *formule de type Rodrigues*; une telle formule exprime, comme nous le verrons au chapitre 4, que le polynôme s'obtient par applications successives d'opérateurs de création à une solution triviale.

La récurrence à trois termes satisfaite par les polynômes de Jacobi de paramètres  $\alpha, \beta$  est de la forme générale (2.15) avec les paramètres  $A_n, B_n$  et  $C_n$  se calculant par (2.16). Dans ce cas, nous utilisons (2.16) pour trouver  $A_n$ , puis nous posons successivement  $x = 1$  et  $x = -1$  dans (2.15) pour obtenir  $B_n$  et  $C_n$ . La récurrence trouvée est :

$$\begin{aligned} 2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \\ (2n+\alpha+\beta-1) \cdot ((2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x + \alpha^2 - \beta^2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ - 2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x) \end{aligned}$$

Ces polynômes ont une importance en physique en raison, entre autres, du fait qu'ils sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 , \quad (2.27)$$

et que toute solution polynomiale de cette équation est un multiple de  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ .

### 2.2.2 Polynômes d'Hermite et de Laguerre

Deux autres grandes familles de polynômes orthogonaux possèdent des propriétés semblables aux polynômes de Jacobi ; ceci s'explique par le fait qu'elles peuvent être introduites via une formule de type Rodrigues. On les appelle les *polynômes d'Hermite*,  $H_n(x)$ , et les *polynômes de Laguerre*,  $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$ , avec  $\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$  :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}). \quad (2.29)$$

Un raisonnement similaire à celui fait à la section précédente nous permet de conclure aux relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad (2.30)$$

et

$$\int_0^{\infty} \mathcal{L}_n^\alpha(x) \mathcal{L}_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx = 0 \quad (2.31)$$

pour  $n \neq m$ .

Les polynômes de Laguerre sont alors solutions d'une équation différentielle semblable à celle satisfaite par les Jacobi (équation (2.27) ; en effet, l'équation

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + \lambda y = 0 \quad (2.32)$$

possède une solution polynomiale si et seulement si  $\lambda = n$  et alors la seule solution polynomiale est, à une constante près,  $\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$ . Comme pour les polynômes de Jacobi, effectuer la dérivée dans (2.29) nous permet d'obtenir une expression explicite pour  $\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$  :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

Nous calculons, à l'aide de cette formule explicite, que

$$\frac{d}{dx} \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) = -\mathcal{L}_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \quad (2.33)$$

Ceci implique que les dérivées des polynômes de Laguerre forment une famille de polynômes orthogonaux.

Les polynômes d'Hermite peuvent être introduits via la *fonction génératrice* suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{w^n}{n!} = e^{2xw-w^2} , \quad (2.34)$$

ce qui nous permet d'obtenir une formule explicite pour les  $H_n(x)$ . Attardons-nous à une certaine renormalisation des polynômes d'Hermite  $\bar{H}_n(x)$ , donnée par  $H_n(x) = 2^{n/2} \bar{H}_n(\sqrt{2}x)$ , de fonction génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{H}_n(x) \frac{w^n}{n!} = e^{xw - \frac{1}{2}w^2} .$$

Le lecteur familier avec la théorie des espèces de structures reconnaîtra là la série génératrice de l'espèce des involutions où les cycles de longueur 2 reçoivent le poids  $-1$  et les points fixes ont poids  $x$ . Ceci signifie que, si nous dénotons par  $w(\varphi)$  le poids de l'involution

$$\varphi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} ,$$

alors  $\bar{H}_n(x) = \sum_{\varphi \in \text{Inv}[n]} w(\varphi)$ , où  $\text{Inv}[n]$  dénote l'ensemble des involutions sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Sans exposer ici toute cette théorie (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994), notons simplement que ce modèle nous permet de déduire, à l'aide d'arguments purement combinatoires, les propriétés suivantes sur ces polynômes :

$$\bar{H}_n''(x) - x\bar{H}_n'(x) + n\bar{H}_n(x) = 0 ,$$

$$\bar{H}_{n+1}(x) - x\bar{H}_n(x) + n\bar{H}_{n-1}(x) = 0 ,$$

et

$$\nu(\bar{H}_n(x) \bar{H}_m(x)) = n! \delta_{nm} ,$$

où  $\nu$  est la fonctionnelle linéaire donnée par les moments  $\nu(x^{2n}) = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1$  et  $\nu(x^{2n-1}) = 0$  pour  $n \geq 1$ . Nous trouvons alors la récurrence

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) , \quad (2.35)$$

et l'équation différentielle

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 . \quad (2.36)$$

De plus, la fonction génératrice nous permet de voir que

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H'_{n-1}(x) . \quad (2.37)$$

### 2.2.3 Caractérisation des familles classiques de polynômes orthogonaux

Les polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite sont connus comme les familles *classiques* de polynômes orthogonaux. Les équations (2.24), (2.33) et (2.37) montrent que ces trois familles partagent la propriété que leurs dérivées forment également une FPO. En fait, cette propriété caractérise les familles classiques de polynômes orthogonaux ; en effet, il a été montré (Krall, 1936) que si  $\{P_n(x)\}$  est une FPO définie positive telle que la famille de ses dérivées  $\{P'_n(x)\}$  est également une FPO définie positive, alors  $\{P_n(x)\}$  se ramène à une des trois familles classiques de polynômes orthogonaux par un changement de variable linéaire. Une autre caractéristique commune des familles classiques de polynômes orthogonaux permet de les caractériser. En effet, elles satisfont (voir (2.27), (2.32) et (2.36)) une équation différentielle de la forme :

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + \lambda y = 0 \quad (2.38)$$

avec  $a_i(x)$  un polynôme de degré au plus  $i$ ,  $i = 1, 2$  et  $\lambda \neq 0$ . Une étude détaillée de cette équation permet de conclure que les seules solutions polynomiales  $P_n(x)$ ,  $P_n$  de degré  $n$ , se ramènent, par un changement linéaire de variables et multiplication par une constante non nulle, à l'un des cas suivants :

- (a)  $y = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , avec  $\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 \geq 0$  ;
- (b)  $y = \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$  avec  $\alpha \neq -1, -2, \dots$  ;
- (c)  $y = H_n(x)$  ;
- (d)  $y = x^n$  ;
- (e)  $y = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (\alpha + n)_k x^k$  avec  $\alpha \neq -1, -2, \dots$   
et où  $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$  et  $(a)_0 = 1$ .

Il est clair que le cas (d) ne nous donne pas une FPO. En effet, si  $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  constituait une FPO pour la fonctionnelle  $L$ , alors  $0 \neq L[x^m x^m] = L[x^{m-1} x^{m+1}] = 0$ , ce qui est bien sûr

contradictoire. Les solutions données par (e) sont connues sous le nom de *polynômes de Bessel*. Ces polynômes forment bien une FPO, mais celle-ci n'est pas définie positive. L'équation différentielle qu'elle satisfait est reliée à l'équation d'une onde en coordonnées sphériques. Les trois familles classiques de polynômes orthogonaux sont donc les seules FPO définies positives satisfaisant une équation différentielle de forme (2.38). Notons de plus que les conditions sur les degrés des  $a_i(x)$  de l'équation (2.38) apparaissent naturellement ; de plus grands degrés empêchent d'obtenir que le degré de  $P_n$  soit exactement  $n$ .

Ces FPO (Jacobi, Hermite, Laguerre et Bessel) sont également caractérisées par le fait qu'elles sont les seules à pouvoir être définies par une équation de type Rodrigues :

$$P_n(x) = K_n^{-1} (w(x))^{-1} \frac{d^n}{dx^n} (\rho^n(x) w(x)) , \quad (2.39)$$

où  $\rho(x)$  est un polynôme ; l'étude de (2.39) montre que son degré doit être inférieur à deux pour que les  $P_n(x)$  forment une FPO. Lorsque  $\rho(x)$  a des zéros réels tous distincts, alors  $P_n(x)$  peut être ramenés via un changement de variables linéaire à un polynôme d'Hermite, de Laguerre ou de Jacobi (suivant le degré de  $\rho(x)$ ). Si  $\rho(x)$  a des zéros non réels, alors nous obtenons des polynômes de Jacobi de paramètres non réels et si  $\rho(x)$  a des zéros de multiplicité plus grande que 1, alors nous obtenons les polynômes de Bessel. Pour terminer, notons que les FPO classiques forment toutes trois des systèmes complets de  $L^2(a, b)$ . Elles permettent ainsi d'obtenir des développements en séries.

## 2.2.4 Généralisations

Nous venons de voir que les FPO classiques sont les seules FPO, avec les polynômes de Bessel, à s'exprimer par une formule de type Rodrigues (2.39), de même que les seules à satisfaire une équation différentielle de la forme (2.38) ou à avoir la propriété que la famille  $\{P'_n(x)\}$  forme également une FPO. Toutes ces conditions font intervenir des opérateurs différentiels ; on peut ainsi se demander quelles FPO satisfont des conditions semblables pour d'autres types d'opérateurs. Par exemple, considérons l'opérateur de différences finies

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) . \quad (2.40)$$

Nous pouvons alors chercher à caractériser (Weber et Erdelyi, 1952) les FPO pouvant être définies par une formule de type Rodrigues *aux différences finies*

$$P_n(x) = K_n^{-1}(w(x))^{-1} \Delta^n (\rho(x) \rho(x-1) \cdots \rho(x-n+1) w(x-n)) , \quad (2.41)$$

où  $w(x)$  est une fonction,  $\rho(x)$  est un polynôme (ne dépendant pas de  $n$ ) et  $K_n$  est une constante (dépendant de  $n$ ). Comme avec les opérateurs différentiels, toutes les FPO définies via (2.41) peuvent être énumérées;  $\rho(x)$  doit être de degré inférieur à 2, ce qui permet une étude par cas.

De façon plus générale, considérons l'opérateur

$$\mathbf{L}f(x) = \frac{f(qx + \omega) - f(x)}{(q-1)x + \omega} ; \quad (2.42)$$

en particulier, l'opérateur  $\frac{d}{dx}$  correspond au cas  $\omega = 0$  et  $q \rightarrow 1$  et  $\Delta$  correspond au cas  $\omega = 1, q = 1$ . Les FPO satisfaisant une des trois conditions équivalentes suivantes peuvent être caractérisées :

- (a)  $\{\mathbf{L}P_n(x)\}$  forme également une FPO;
- (b)  $\{P_n(x)\}$  satisfait une équation de la forme

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \mathbf{L}^2 P_n(x) + (\delta x + \epsilon) \mathbf{L} P_n(x) + \zeta P_n(x) = 0 ;$$

- (c)  $P_n(x)$  peut être défini via une équation de type Rodrigues

$$P_n(x) = K_n^{-1}(w(x))^{-1} \mathbf{L}^n (X_0(x) X_1(x) \cdots X_n(x) w(x)) , \quad (2.43)$$

où  $X_0(x)$  est un polynôme indépendant de  $n$ ,  $X_i(x) = X_{i+1}(qx + \omega)$  et  $w(x)$  est une fonction ne dépendant pas de  $n$ .

## Chapitre III

### POLYNÔMES DE MACDONALD

Nous quittons maintenant le monde connu des polynômes à une variable pour entrer dans l'univers des polynômes à plusieurs variables. Plus précisément, nous nous pencherons d'abord sur les polynômes symétriques à  $n$  variables,  $x_1, \dots, x_n$ , avant de passer aux fonctions symétriques à une infinité de variables  $x_1, x_2, \dots$ . Nous exhiberons différentes bases de l'espace vectoriel des fonctions symétriques (fonctions monomiales, sommes de puissances, fonctions de Schur...) avant d'y introduire un produit scalaire, le produit scalaire de Hall. Nous utiliserons la substitution pléthystique afin de modifier ce produit scalaire pour obtenir le produit scalaire de Macdonald. Nous démontrerons l'existence et l'unicité d'une famille de fonctions symétriques orthogonales pour ce produit scalaire et unitriangulaires, selon l'ordre de la dominance, dans la base des fonctions monomiales. Ces fonctions symétriques, introduites par Macdonald en 1988 (Macdonald, 1988), apparaissent, tels les polynômes orthogonaux, dans l'étude de modèles physiques (voir section 4.1.2), sont reliées à la géométrie de certaines variétés algébriques (Haiman, 1999) en plus d'admettre comme spécialisations différentes familles de fonctions symétriques connues (Schur, Hall-Littlewood, Jack). Il ne s'agit là que de quelques unes des raisons qui motivent l'intérêt porté aux polynômes de Macdonald depuis leur introduction. Des recherches récentes (Haglund, Haiman et Loehr, 2005) ont menées à la découverte d'une formule combinatoire pour les polynômes de Macdonald. Nous suivrons la notation de Macdonald (Macdonald, 1995b), à l'exception de la notation pléthystique, pour laquelle nous suivrons plutôt (Haiman, 1999).

### 3.1 Préliminaires

#### 3.1.1 Fonctions symétriques et bases usuelles

Nous nous intéressons à des polynômes *symétriques*, c'est-à-dire des polynômes

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

laissés invariants par l'action naturelle de  $\mathcal{S}_n$ , donnée par

$$\sigma \cdot P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

pour  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Notons  $\Lambda_n := \mathbb{Q}[x]^{\mathcal{S}_n}$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  des polynômes symétriques à  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ . Cet espace est naturellement gradué par le degré :

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_n^{(k)},$$

où  $\Lambda_n^{(k)}$  est la composante homogène de  $\Lambda_n$  de degré  $k$ . Une base  $\{m_\lambda\}_{\lambda \vdash k, l(\lambda) \leq n, k \geq 0}$  de  $\Lambda_n$  est alors donnée par le symétrisé des monômes  $x^\lambda$  pour  $\lambda$  un partage  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  où les dernières parts sont peut-être nulles ( $\lambda$  doit avoir au plus  $n$  parts, sinon  $x^\lambda = 0$ ) :

$$m_\lambda = \sum x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \dots x_{i_n}^{\lambda_n}$$

où la somme se fait sur tous les choix d'indices distincts  $i_1, i_2, \dots, i_n$ . L'ensemble des  $m_\lambda$ , appelés les polynômes symétriques monomiaux, avec  $\lambda \vdash k$  et  $l(\lambda) \leq n$  forme une base de  $\Lambda_n^{(k)}$ . En particulier, si  $n \geq k$ , les  $m_\lambda$ ,  $\lambda \vdash k$  forment une base de  $\Lambda_n^{(k)}$ . Ainsi, l'écriture d'un polynôme symétrique en terme des polynômes monomiaux ne dépend pas du nombre de variables en autant que ce nombre soit plus grand que le degré du polynôme. Pour cette raison, il est intéressant de travailler avec une infinité de variables ; formellement, cela revient à faire la construction suivante :

Pour  $n \leq m$ , considérons l'homomorphisme de projection

$$\pi_{m,n} : \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_m]$$

qui envoie  $x_{n+1}, \dots, x_m$  sur zéro et laisse inchangées les  $m$  premières variables. En restreignant le domaine aux polynômes symétriques, nous obtenons la projection  $\pi_{m,n} : \Lambda_m \rightarrow \Lambda_n$  telle que

$$\pi_{m,n}(m_\lambda(\mathbf{x})) = \begin{cases} m_\lambda(\mathbf{x}) & \text{si } l(\lambda) \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent,  $\pi_{m,n}$  est surjectif. Nous pouvons également nous restreindre à une composante homogène pour avoir la projection

$$\pi_{m,n}^k : \Lambda_m^{(k)} \rightarrow \Lambda_n^{(k)}$$

surjective pour tout  $k \geq 0$ ,  $m \geq n$  et bijective si  $m \geq n \geq k$ . Nous construisons alors la limite projective des  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels  $\Lambda_n^{(k)}$  par rapport aux homomorphismes  $\pi_{m,n}^k$  :

$$\Lambda^{(k)} := \varprojlim \Lambda_n^{(k)}.$$

La projection

$$\pi_n^k : \Lambda^{(k)} \rightarrow \Lambda_n^{(k)}$$

est un isomorphisme pour tout  $n \geq k$  et on peut ainsi définir une base  $\{m_\lambda\}_{\lambda \vdash k}$  de  $\Lambda^{(k)}$  par

$$\pi_n^k(m_\lambda) = m_\lambda(x_1, \dots, x_n) \quad \forall n \geq k.$$

Explicitement,

$$m_\lambda = \sum x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \cdots x_{i_n}^{\lambda_n} \quad (3.1)$$

pour  $\lambda \vdash n$  et où la somme est faite sur tous les sous-ensembles  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \mathbb{N}$  de cardinalité  $n$ . Considérons maintenant

$$\Lambda := \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{(k)},$$

l'espace vectoriel gradué des *fonctions* symétriques en les variables  $x_1, x_2, \dots$ . Le terme *fonction* symétrique est utilisé pour mettre en lumière qu'un élément de  $\Lambda$  n'est pas à proprement parler un polynôme,  $\Lambda$  étant obtenu par une somme de limites projectives. Ainsi, un élément  $f \in \Lambda^{(r)}$  est en fait une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$ ,  $f_n \in \Lambda_n^{(r)}$ , satisfaisant les conditions de compatibilité

$$f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = f_n(x_1, \dots, x_n).$$

Ainsi, les  $f_n$  apparaissent comme les sommes partielles de la série  $f$  en l'infinité de variables  $x_1, x_2, \dots$ . L'utilisation du terme *fonction* symétrique plutôt que polynôme symétrique résume toutes ces technicalités qui nous permettent de passer à une infinité de variables.

$\Lambda$  admet bien sûr pour base l'ensemble des fonctions monomiales  $\{m_\lambda\}_{\lambda \vdash n, n \in \mathbb{N}}$ . Mais différentes propriétés sont mises en lumière lorsque nous passons d'une base à une autre ; c'est pourquoi nous prenons le temps d'introduire d'autres bases usuelles de  $\Lambda$ .

### Fonctions symétriques élémentaires

Pour  $r \geq 0$ , la  $r$ -ième fonction symétrique élémentaire  $e_r$  est la somme de tous les produits de  $r$  variables distinctes ; c'est-à-dire que

$$e_r = m_{(1^r)}.$$

En particulier,  $e_0 = 1$  et  $e_1 = m_1$ . Nous avons alors

$$E(t) = \sum_{r \geq 0} e_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t) \quad (3.2)$$

où  $t$  est une variable formelle. Pour un partage  $\lambda$ , posons

$$e_\lambda := e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots.$$

L'ensemble  $\{e_\lambda\}_{\lambda \vdash n, n \in \mathbb{N}}$  forme une base de  $\Lambda$ , puisque la matrice de passage entre les  $e_\mu$  et les  $m_\lambda$  est triangulaire pour l'ordre lexicographique, le terme dominant de  $e_\mu$  étant  $x^\mu$ .

### Fonctions symétriques homogènes

Pour  $r \geq 0$ , la  $r$ -ième fonction symétrique homogène  $h_r$  est définie par

$$h_r = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda.$$

En particulier,  $h_0 = 1$  et  $h_1 = e_1$ . La fonction génératrice est alors donnée par

$$H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - x_i t)}. \quad (3.3)$$

Comme avec les  $e_\lambda$ , nous définissons , pour un partage  $\lambda$ ,

$$h_\lambda := h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots .$$

$\{h_\lambda\}_{\lambda \vdash n, n \in \mathbb{N}}$  est également une base de  $\Lambda$ , puisque nous pouvons exprimer les fonctions homogènes en terme des élémentaires et vice-versa (voir l'identité (3.9)).

### Fonctions symétriques sommes de puissances

Pour  $r \geq 1$ , la  $r$ -ième somme de puissance est donnée par

$$p_r = m_{(r)} = \sum_{i \geq 1} x_i^r .$$

Encore une fois, posons, pour  $\lambda$  un partage,

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots ;$$

alors  $\{p_\lambda\}_{\lambda \vdash n, n \in \mathbb{N}}$  est une base de l'espace des fonctions symétriques, ce que nous mettrons en lumière à l'instant.

En posant

$$P(t) := \sum_{k \geq 1} p_k \frac{t^k}{k} ,$$

nous avons alors les identités suivantes :

$$H(t) = \exp(P(t)) , \tag{3.4}$$

c'est-à-dire que

$$h_k = \sum_{\lambda \vdash k} \frac{p_\lambda}{z_\lambda} \tag{3.5}$$

où, si  $m_i$  est le nombre de parts  $i$  dans  $\lambda$  et si  $r$  est la plus grande part apparaissant dans  $\lambda$ ,

$$z_\lambda = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \cdots r^{m_r} m_r! .$$

Aussi,

$$E(t) = \exp(-P(-t)) ; \tag{3.6}$$

autrement dit,

$$e_k = \sum_{\lambda \vdash k} (-1)^{k-l(\lambda)} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}. \quad (3.7)$$

Alors, avec les identités (3.2) et (3.3), nous trouvons

$$H(t) E(-t) = 1, \quad (3.8)$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i e_i h_{n-i} = 0 \quad (3.9)$$

pour tout  $n \geq 1$ .

Une remarquable similarité apparaît entre les expressions pour  $E$ ,  $e_k$  et  $H$ ,  $h_k$ . Le lien qui unit les deux bases s'explique en définissant l'involution linéaire et multiplicative

$$\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$$

par

$$\omega(p_r) = (-1)^{r-1} p_r.$$

Nous avons alors  $\omega(P(t)) = -P(-t)$ , ce qui implique, avec les équations (3.4) et (3.6), que  $\omega(H(t)) = E(t)$ , c'est-à-dire

$$\omega(h_r) = e_r, \quad \omega(e_r) = h_r$$

pour tout  $r \geq 0$ .

## Fonctions de Schur

Pour  $\lambda \vdash n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction de Schur  $s_\lambda$  est donnée par

$$s_\lambda = \sum_t \mathbf{x}_t, \quad (3.10)$$

où la somme est faite sur tous les tableaux semi-standard (c'est-à-dire strictement croissant le long des lignes et croissant le long des colonnes, voir figure 3.1) de forme  $\lambda$  et  $\mathbf{x}_t$  est le monôme

associé à  $t$  défini par  $\mathbf{x}_t = \prod_{c \in \lambda} x_{t(c)}$ .

10					
9	10				
6	8				
2	2	5	7		
1	1	2	2	6	7

**Figure 3.1** Un tableau semi-standard de forme  $\lambda = (6, 4, 2, 2, 1)$  ; on lui associe le monôme  $x_1^2 x_2^4 x_5 x_6^2 x_7^2 x_8 x_9 x_{10}^2$ .

De façon équivalente, on peut définir les fonctions de Schur à  $n$  variables (et c'est ainsi que Schur les a introduites) par

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\det \left( x_i^{\lambda_j + n - j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}}{\det \left( x_i^{n - j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}}$$

où  $l(\lambda) \leq n$ . Tel que nous l'avons fait avec les fonctions monomiales, on passe ensuite à une infinité de variables en posant, pour  $\lambda \vdash k$ ,  $\pi_n^k(s_\lambda) = s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pour tout  $n \geq 0$ . L'équivalence de la définition combinatoire (3.10) et de la définition donnée par Schur n'est pas immédiate ; mais notons que la symétrie de  $s_\lambda$  s'observe simplement dans le cas de la dernière définition mais doit se démontrer dans le cas de la première ! Les  $s_\lambda$  s'expriment en fonction des  $e_k$  et des  $h_k$  via les formules (dites de Jacobi-Trudi) suivantes :

$$s_\lambda = \det \left( h_{\lambda_i - i + j} \right)_{1 \leq i, j \leq l(\lambda)} \quad (3.11)$$

$$s_\lambda = \det \left( e_{\lambda'_i - i + j} \right)_{1 \leq i, j \leq l(\lambda)} \quad (3.12)$$

où  $h_i, e_i = 0$  si  $i < 0$ . Il en découle alors que

$$\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$$

Les fonctions de Schur s'expriment de la façon suivante en terme des monomiales :

$$s_\lambda = \sum_{\mu \preceq \lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu \quad (3.13)$$

où les  $K_{\lambda\mu}$  sont les nombres de Kostka, qui donnent le nombre de tableaux semi-standards de forme  $\lambda$  et de contenu  $\mu$ . En particulier,  $K_{\lambda\lambda} = 1$ .

10					
9	10				
		5	7		
		2	6	7	

**Figure 3.2** Un tableau semi-standard gauche de forme  $(6, 4, 2, 2, 1) / (3, 2, 2)$ .

La formule (3.13) signifie que si on ordonne les partages en ordre lexicographique (ou en tout autre ordre total étendant l'ordre de la dominance), alors la matrice de passage de la base  $s_\lambda$  à la base  $m_\lambda$  est triangulaire avec des 1 sur la diagonale.

La notion de tableau semi-standard de forme  $\lambda \vdash n$  se généralise de façon évidente à la notion de *tableau gauche semi-standard*, de forme  $\lambda/\mu$ ,  $\mu \subset \lambda$ ; les *fonctions de Schur gauches* peuvent ainsi être définies :

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_t \mathbf{x}^t,$$

où la somme est faite sur tous les tableaux gauches semi-standards de forme  $\lambda/\mu$ .

Nous avons alors :

$$s_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mu \subset \lambda} s_\mu(\mathbf{x}) s_{\lambda/\mu}(\mathbf{y}) \quad (3.14)$$

où  $s_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s_\lambda(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots)$ .

En effet,  $s_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  énumère les tableaux semi-standards de forme  $\lambda$  à entrées dans l'ensemble ordonné

$$1 < 2 < 3 < \dots < \bar{1} < \bar{2} < \bar{3} < \dots,$$

les variables  $x_i$  rendant compte des entrées  $i$  et les variables  $y_j$  des entrées  $\bar{j}$ . Dans un tel tableau, les entrées  $i$  forment un sous-tableau semi-standard de forme  $\mu \subset \lambda$  et les entrées  $\bar{j}$  remplissent par conséquent les cases restantes, c'est-à-dire un tableau gauche de forme  $\lambda/\mu$ , tel qu'illustré à la figure 3.3. D'où l'égalité (3.14).

Les  $s_{\lambda/\mu}$  sont symétriques homogènes de degré  $|\lambda/\mu| = |\lambda| - |\mu|$  et

$$\omega(s_{\lambda/\mu}) = s_{\lambda'/\mu'} \quad (3.15)$$

$\bar{1}$				
7	$\bar{5}$			
6	$\bar{4}$			
4	$\bar{2}$	$\bar{6}$		
3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
1	1	2	$\bar{3}$	$\bar{3}$

**Figure 3.3** Un tableau semi-standard de forme  $\lambda = (5, 5, 3, 2, 2, 1)$  à entrées dans l'alphabet  $1 < 2 < 3 < \dots < \bar{1} < \bar{2} < \bar{3} < \dots$ .

### 3.1.2 Substitution pléthystique

Afin de mieux manipuler et comprendre les identités sur les fonctions symétriques, il est intéressant de considérer les fonctions symétriques comme des *opérateurs* sur les expressions rationnelles en un jeu de variables. Plus précisément, considérons  $p_k$  comme l'opérateur qui élève à la puissance  $k$  toutes les variables d'une expression. Pour  $\mathbf{x} = x_1 + x_2 + \dots$ ,

$$p_k[\mathbf{x}] = x_1^k + x_2^k + \dots, \quad (3.16)$$

où  $p_k[-]$  désigne la *substitution pléthystique* de  $\mathbf{x}$  dans la fonction symétrique  $p_k$ . Autrement dit,  $p_k$  agit comme opérateur sur l'expression  $\mathbf{x}$ . Ensuite, nous étendons la substitution pléthystique linéairement et multiplicativement pour obtenir, pour chaque fonction symétrique  $f = \sum a_\lambda p_\lambda \in \Lambda$  un opérateur  $f[-] = \sum a_\lambda \prod p_{\lambda_i}[-]$ . L'égalité (3.16) implique que pour toute fonction symétrique  $f$ , on a  $f[\mathbf{x}] = f(x_1, x_2, \dots)$ ; nous noterons  $f[\mathbf{x}] = f(\mathbf{x})$ . De façon semblable, si l'expression  $A$  admet un développement en somme de monômes, alors  $f[A]$  est tout simplement  $f$  évaluée en ces monômes. Par exemple,

$$f\left[\frac{\mathbf{x}}{(1-t)}\right] = f(x_1, x_2, \dots, tx_1, tx_2, \dots, t^2x_1, t^2x_2, \dots).$$

On vérifie directement que l'inverse de la substitution pléthystique de  $\frac{\mathbf{x}}{(1-t)}$  pour  $\mathbf{x}$  est la substitution pléthystique de  $\mathbf{x}(1-t)$  pour  $\mathbf{x}$ . À cet égard, la substitution pléthystique se comporte donc comme une véritable substitution. Il faut cependant faire attention de toujours traiter les variables formelles comme telles, jamais comme des quantités numériques. Pour illustrer cette subtilité, considérons  $p_k[t\mathbf{x}]$  et  $p_k[-\mathbf{x}]$ ; nous allons voir que la deuxième expression ne s'ob-

tient pas de la première en posant  $t = -1$ . En effet,

$$p_k [t\mathbf{x}] = t^k p_k (\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

et

$$p_k [-\mathbf{x}] = -p_k (\mathbf{x}) . \quad (3.18)$$

Ainsi, pour  $k$  pair, l'expression (3.17) évaluée en  $t = -1$  ne correspond pas à (3.18). Remarquons que cette dernière expression correspond à  $(-1)^k \omega (p_k (\mathbf{x}))$ . En effet, pour toute fonction symétrique  $f$  de degré  $d$ , on a

$$f [-\mathbf{x}] = (-1)^d \omega (f (\mathbf{x})) . \quad (3.19)$$

Par exemple, puisque

$$p_k [\mathbf{x} + \mathbf{y}] = p_k (\mathbf{x}) + p_k (\mathbf{y}) = p_k (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ,$$

la formule (3.14) se traduit en notation pléthystique par

$$s_\lambda [\mathbf{x} + \mathbf{y}] = \sum_{\mu \subset \lambda} s_\mu (\mathbf{x}) s_{\lambda/\mu} (\mathbf{y}) \quad (3.20)$$

et on en déduit, par les égalités (3.19) et (3.15),

$$s_\lambda [\mathbf{x} - \mathbf{y}] = \sum_{\mu \subset \lambda} (-1)^{|\lambda/\mu|} s_\mu (\mathbf{x}) s_{\lambda'/\mu'} (\mathbf{y}) . \quad (3.21)$$

### 3.1.3 Orthogonalité et noyau de Cauchy

Nous introduisons maintenant un produit scalaire sur  $\Lambda$ , le produit scalaire de Hall, en exigeant que les bases  $\{m_\lambda\}$  et  $\{h_\lambda\}$  soient duales, c'est-à-dire :

$$\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} . \quad (3.22)$$

Ces deux bases satisfont une égalité remarquable :

$$\sum_{\lambda} h_\lambda (\mathbf{x}) m_\lambda (\mathbf{y}) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} . \quad (3.23)$$

Ceci se calcule en se rappelant que la fonction génératrice des  $h_n$  est :

$$H(t) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} &= \prod_j H(y_j) \\ &= \prod_j \sum_k h_k y_j^k \\ &= \sum_{\lambda} h_{\lambda}(\mathbf{x}) m_{\lambda}(\mathbf{y}) . \end{aligned}$$

Nous appelons *noyau de Cauchy* le membre de droite de l'égalité (3.23). Il joue un rôle très particulier, puisqu'il rend compte de la dualité par rapport au produit scalaire de Hall.

En effet, soient  $\{u_{\lambda}\}$  et  $\{v_{\lambda}\}$  deux bases homogènes de  $\Lambda$ . Les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i)  $\langle u_{\lambda}, v_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ , c'est-à-dire que  $\{u_{\lambda}\}$  et  $\{v_{\lambda}\}$  sont deux bases duales ;

(ii)  $\sum_{\lambda} u_{\lambda}(\mathbf{x}) v_{\lambda}(\mathbf{y}) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} .$

Ceci se vérifie directement en exprimant les bases  $\{u_{\lambda}\}$  et  $\{v_{\lambda}\}$  en terme des bases duales  $\{h_{\lambda}\}$  et  $\{m_{\lambda}\}$  respectivement et en traduisant les énoncés (i) et (ii) en terme des matrices de passage.

Nous calculons aussi que

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}(\mathbf{x}) p_{\lambda}(\mathbf{y})$$

et

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{x}) s_{\lambda}(\mathbf{y}) ;$$

ceci est équivalent à

$$\langle z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda\mu} \tag{3.24}$$

et

$$\langle s_{\lambda}, s_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda\mu} . \tag{3.25}$$

Autant (3.24) que (3.24) se vérifient par calcul direct (voir (Macdonald, 1995b)), mais la deuxième égalité s'obtient combinatoirement comme conséquence de la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth (voir (Sagan, 2001)).

À des fins de généralisation, il est intéressant d'exprimer le noyau de Cauchy à l'aide de la substitution pléthystique. Posons

$$\Omega(\mathbf{x}) = \exp\left(\sum_k \frac{p_k(\mathbf{x})}{k}\right).$$

Alors  $\Omega[\mathbf{x} + \mathbf{y}] = \Omega[\mathbf{x}] \Omega[\mathbf{y}]$  et  $\Omega[-\mathbf{x}] = \Omega[\mathbf{x}]^{-1}$ .

En spécialisant au cas à une seule variable  $x$ , nous avons l'expression

$$\Omega[x] = \exp\left(\sum_k \frac{x^k}{k}\right) = \frac{1}{1-x}.$$

De ces dernières observations, nous obtenons que

$$\Omega[\mathbf{x}] = \prod_i \frac{1}{1-x_i}.$$

Par conséquent, nous pouvons reformuler notre condition de dualité par

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \text{ ssi } \sum_\lambda u_\lambda(\mathbf{x}) v_\lambda(\mathbf{y}) = \Omega[\mathbf{xy}]. \quad (3.26)$$

## 3.2 Fonctions symétriques à deux paramètres

### 3.2.1 Théorème d'existence

Considérons maintenant l'anneau  $\Lambda_{\mathcal{K}}$  des fonctions symétriques à coefficients dans le corps  $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(q, t)$ . Nous définissons sur  $\Lambda_{\mathcal{K}}$  un produit scalaire  $\langle -, - \rangle_{q,t}$  par :

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} := \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}}. \quad (3.27)$$

Ou encore, en posant  $z_\lambda(q, t) = z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}}$ , le produit scalaire (3.27) s'écrit sous la forme

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} := \delta_{\lambda\mu} z_\lambda(q, t) \quad (3.28)$$

Puisque  $p_k \left[ \mathbf{x} \left( \frac{1-q}{1-t} \right) \right] = \frac{1-q^k}{1-t^k} p_k(\mathbf{x})$ , ceci s'exprime en notation pléthystique par

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \left\langle p_\lambda, p_\mu \left[ \mathbf{x} \left( \frac{1-q}{1-t} \right) \right] \right\rangle, \quad (3.29)$$

où  $\langle -, - \rangle$  est le produit scalaire de Hall donné par (3.22).

Remarquons immédiatement que, lorsque  $q = t$ , nous retrouvons ce produit scalaire :

$$\langle -, - \rangle_{q,q} = \langle -, - \rangle. \quad (3.30)$$

Rappelons également que les fonctions de Schur  $s_\lambda$  satisfont :

$$(a) \langle s_\lambda, s_\mu \rangle_{q,q} = \langle s_\lambda, s_\mu \rangle = 0 \text{ si } \lambda \neq \mu;$$

$$(b) s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu;$$

c'est-à-dire que les fonctions de Schur sont orthogonales pour le produit scalaire  $\langle -, - \rangle$  et que la matrice de passage exprimant les fonctions de Schur en terme des fonctions monomiales est unitriangulaire supérieure (par rapport à tout ordre total étendant l'ordre de la dominance  $\prec$ ). Nous allons démontrer l'existence et l'unicité d'une famille de fonctions symétriques à coefficients dans  $\mathcal{K}$  satisfaisant des propriétés analogues aux propriétés (a) et (b) pour le produit scalaire  $\langle -, - \rangle_{q,t}$  :

**Théorème 3.1** (Macdonald, 1988). *Il existe une unique famille de fonctions symétriques  $P_\lambda \in \Lambda_{\mathcal{K}}$  indexée par les partages d'entiers  $\lambda \vdash n, n \in \mathbb{N}$  satisfaisant :*

$$(i) \langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} = 0 \text{ si } \lambda \neq \mu;$$

$$(ii) P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} u_{\lambda\mu}(q, t) m_\mu, \text{ où } u_{\lambda\mu}(q, t) \in \mathcal{K}.$$

L'unicité d'une telle famille est immédiate ; en effet, supposons que  $P_\mu$  est construit pour tout  $\mu$  tel que  $\mu \prec \lambda$ . Alors, par (ii),  $P_\lambda$  est de la forme

$$P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} u_{\lambda\mu}(q, t) m_\mu \quad (3.31)$$

pour certains  $u_{\lambda\mu}(q, t) \in \mathcal{K}$ . En effectuant le produit scalaire avec  $P_\mu, \mu \prec \lambda$ , de part et d'autre de l'équation (3.31) et en utilisant (i), nous obtenons :

$$u_{\lambda\mu} = \frac{-\langle m_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t}}{\langle P_\mu, P_\mu \rangle_{q,t}}. \quad (3.32)$$

Ainsi,  $P_\lambda$  est uniquement déterminé par les conditions (i) et (ii).

Par conséquent, il ne nous reste plus qu'à construire une famille  $\{P_\lambda\}_{\lambda \vdash n, n \in \mathbb{N}}$  satisfaisant ces conditions. Pour ce faire, nous allons définir un opérateur linéaire  $\Lambda_{\mathcal{K}} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{K}}$  auto-adjoint pour le produit scalaire donné par la formule (3.28) ayant des valeurs propres toutes distinctes ; ces fonctions propres seront alors orthogonales. L'opérateur que nous construirons étant triangulaire dans la base des fonctions monomiales, il ne restera plus qu'à s'assurer qu'elles vérifient (ii) en multipliant par un facteur approprié pour obtenir le résultat.

### 3.2.2 Analogue du noyau de Cauchy

Pour débiter notre étude, nous allons tout d'abord étudier le produit scalaire de Macdonald (voir la formule (3.28)). Le lien entre le produit scalaire de Macdonald et le produit scalaire de Hall donné par l'égalité (3.29) nous permet d'obtenir immédiatement un analogue du noyau de Cauchy : pour  $\{u_\lambda\}$  et  $\{v_\lambda\}$  deux bases homogènes de  $\Lambda_{\mathcal{K}}$ , les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (i)  $\langle u_\lambda, v_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu}$  ;
- (ii)  $\sum_{\lambda} u_\lambda(\mathbf{x}) v_\lambda(\mathbf{y}) = \Omega \left[ \mathbf{xy} \left( \frac{1-t}{1-q} \right) \right]$ .

Nous avons (voir (3.29))

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu} \Leftrightarrow \left\langle u_\lambda, v_\mu \left[ \mathbf{x} \left( \frac{1-q}{1-t} \right) \right] \right\rangle = \delta_{\lambda\mu} .$$

Or ceci est équivalent à

$$\sum_{\lambda} u_\lambda(\mathbf{x}) v_\lambda \left[ \mathbf{y} \left( \frac{1-q}{1-t} \right) \right] = \Omega[\mathbf{xy}] ,$$

et, en substituant  $\frac{1-t}{1-q}\mathbf{y}$  pour  $\mathbf{y}$ , nous obtenons l'équivalence voulue.

Remarquons que  $\langle p_\lambda, z_\mu(q, t)^{-1} p_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ , c'est-à-dire que les  $p_\lambda$  et  $q_\lambda := z_\lambda(q, t)^{-1} p_\lambda$  sont deux bases duales de  $\Lambda_{\mathcal{K}}$  par rapport au produit scalaire de Macdonald et donc

$$\sum_{\lambda} z_\lambda(q, t)^{-1} p_\lambda(\mathbf{x}) p_\lambda(\mathbf{y}) = \Omega \left[ \mathbf{xy} \left( \frac{1-t}{1-q} \right) \right] . \quad (3.33)$$

Ainsi, la base duale  $\{g_\lambda\}$  des fonctions monomiales  $\{m_\lambda\}$  pour le produit scalaire de Macdonald est donnée par  $g_\lambda \left[ \mathbf{x} \left( \frac{1-q}{1-t} \right) \right] = h_\lambda$  et donc

$$g_\lambda(\mathbf{x}; q, t) = h_\lambda \left[ \mathbf{x} \left( \frac{1-t}{1-q} \right) \right].$$

Nous trouvons ainsi

$$g_n(\mathbf{x}; q, t) = \sum_{|\lambda|=n} \frac{1}{z_\lambda(q, t)} p_\lambda(\mathbf{x})$$

et  $g_\lambda = \prod_{i \geq 1} g_{\lambda_i}$ .

Lorsque nous nous restreignons à un nombre fini de variables, les  $p_\lambda$  ne sont plus linéairement indépendants ; la définition (3.28) du produit scalaire n'est donc plus valide pour  $\Lambda_{\mathcal{K}, n}$ . Cependant,  $\{m_\lambda\}_{l(\lambda) \leq n}$  et  $\{g_\lambda\}_{l(\lambda) \leq n}$  forment tous deux des bases de  $\Lambda_{\mathcal{K}, n}$ . Par conséquent, nous pouvons définir sans ambiguïté un produit scalaire sur  $\Lambda_{\mathcal{K}, n}$  en exigeant que

$$\langle g_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \quad (3.34)$$

$\forall \lambda, \mu$ , avec  $l(\lambda), l(\mu) \leq n$ . La condition de dualité, avec les modifications évidentes, demeure valide pour un nombre fini de variables ; en particulier, on a :

$$\sum_{l(\lambda) \leq n} m_\lambda(x) g_\lambda(y) = \Omega \left[ \mathbf{xy} \left( \frac{1-t}{1-q} \right) \right] \quad (3.35)$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ .

**Remarque :** Macdonald n'utilisait pas la notation pléthystique ; il a donc calculé

$$\sum_{\lambda} z_\lambda(q, t)^{-1} p_\lambda(\mathbf{x}) p_\lambda(\mathbf{y}) = \prod_{i,j} \frac{(tx_i y_j; q)_\infty}{(x_i y_j; q)_\infty}, \quad (3.36)$$

où

$$(a; q)_\infty = \prod_{r \geq 0} (1 - aq^r). \quad (3.37)$$

Le membre de droite de l'équation (3.36) est dénoté  $\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$  et est bien sûr égal à  $\Omega[\mathbf{xy}]$ .

### 3.2.3 Opérateurs auto-adjoints

Nous commençons par donner une condition équivalente pour l'auto-adjonction d'un opérateur linéaire ; bien que nous l'énonçons pour  $\Lambda_{\mathcal{K}}$  avec le produit scalaire donné par (3.28), le résultat et la démonstration demeurent valides pour  $\Lambda_{\mathcal{K},n}$  et le produit scalaire défini par la formule (3.34).

**Proposition 3.2** (Macdonald, 1988). *Soit  $E : \Lambda_{\mathcal{K}} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{K}}$  un opérateur linéaire. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$E$  est auto-adjoint ;*
- (ii)  *$E_x \Omega \left[ \mathbf{xy} \left( \frac{1-t}{1-q} \right) \right] = E_y \Omega \left[ \mathbf{xy} \left( \frac{1-t}{1-q} \right) \right]$ , où le suffixe indique sur quel jeu de variables l'opérateur agit.*

**Démonstration** Posons  $e_{\lambda\mu} = \langle Em_{\lambda}, m_{\mu} \rangle$ . La condition (i) est alors équivalente à

$$e_{\lambda\mu} = e_{\mu\lambda} . \quad (3.38)$$

Écrivons  $Em_{\lambda}$  en la base  $g_{\mu}$  ; nous trouvons l'expression  $Em_{\lambda} = \sum_{\mu} e_{\lambda\mu} g_{\mu}$ . Nous avons

$$\Omega \left[ \mathbf{xy} \left( \frac{1-t}{1-q} \right) \right] = \sum_{\lambda} m_{\lambda}(\mathbf{x}) g_{\lambda}(\mathbf{y}) = \sum_{\lambda} m_{\lambda}(\mathbf{y}) g_{\lambda}(\mathbf{x}) ,$$

donc (ii) est équivalent à

$$\sum_{\lambda, \mu} e_{\lambda\mu} g_{\mu}(\mathbf{x}) g_{\lambda}(\mathbf{y}) = \sum_{\lambda, \mu} e_{\lambda\mu} g_{\mu}(\mathbf{y}) g_{\lambda}(\mathbf{x}) ,$$

qui est évidemment équivalent à (3.38). □

Nous allons maintenant construire l'opérateur  $E : \Lambda_{\mathcal{K}} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{K}}$  ayant les propriétés voulues. Pour commencer, construisons, pour chaque  $n \geq 0$ , un opérateur  $\Lambda_{\mathcal{K},n} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{K},n}$ .

Pour  $p \in \mathcal{K}$ , on définit l'opérateur de translation  $T_{p,x_i}$  par

$$(T_{p,x_i} f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, px_i, \dots, x_n)$$

pour tout  $f \in \mathcal{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

Prenons  $z$ , une variable formelle, et posons

$$D_n(z; q, t) = \Delta_n(\mathbf{x})^{-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \mathbf{x}^{\sigma \cdot \delta} \prod_{i=1}^n \left(1 + zt^{(\sigma \cdot \delta)_i} T_{q, x_i}\right), \quad (3.39)$$

où  $\text{sgn}(\sigma)$  dénote le signe de la permutation  $\sigma$ ,  $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ ,  $\Delta_n(\mathbf{x})$  est le déterminant de Vandermonde et  $(\sigma \cdot \delta)_i$  dénote la  $i$ -ème entrée de  $\sigma \cdot \delta$  (où  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  agit naturellement en permutant les entrées d'un vecteur). Les  $D_n(z; q, t)$  sont appelés les opérateurs de Macdonald. Pour  $r = 0, 1, \dots, n$ , dénotons par  $D_n^r$  le coefficient de  $z^r$  dans  $D_n(z; q, t)$ :

$$D_n(z; q, t) = \sum_{r=0}^n D_n^r z^r.$$

En posant, pour  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $|I| = r$ ,

$$A_I(\mathbf{x}; t) = t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}, \quad (3.40)$$

nous obtenons une description explicite de  $D_n^r$ :

$$D_n^r = \sum_I A_I(\mathbf{x}; t) \prod_{i \in I} T_{q, x_i}, \quad (3.41)$$

où la somme est faite sur tous les sous-ensembles  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  de cardinalité  $r$ .

On vérifie alors par calcul direct (voir (Macdonald, 1995b)) que la matrice des opérateurs  $D_n^r$  dans la base des fonctions monomiales est triangulaire supérieure pour tout ordre étendant l'ordre de la dominance; par conséquent, ses valeurs propres sont les entrées de sa diagonale.

En particulier :

$$D_n^1 = \sum_{\mu \prec \lambda} c_{\lambda\mu}(q, t) m_\mu \quad (3.42)$$

avec  $c_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}[q, t]$  et ses valeurs propres sont

$$c_{\lambda\lambda}(q, t) = \sum_{i=1}^n q^{\lambda_i} t^{n-i} \quad (3.43)$$

qui sont visiblement toutes distinctes.

Aussi, les opérateurs  $D_n^r$  ( $0 \leq r \leq n$ ) sont auto-adjoints pour le produit scalaire donné par (3.34). La démonstration de ce fait se base bien sûr sur la proposition 3.2 et sur l'observation que

$$\Omega \left[ \mathbf{xy} \left( \frac{1-t}{1-q} \right) \right]^{-1} T_{q,x_i} \Omega \left[ \mathbf{xy} \left( \frac{1-t}{1-q} \right) \right] = \prod_{j=1}^n \frac{1-x_i y_j}{1-t x_i y_j}.$$

Cette égalité étant vérifiée pour toutes valeurs de  $q$  et  $t$  et le membre de droite étant indépendant de  $q$ , on peut donc supposer sans perte de généralité que  $q = t$ ; le produit scalaire est alors le produit scalaire de Hall (voir la formule (3.22)) pour un nombre fini de variables.

Ainsi, pour chaque  $n \geq 0$ , on a un opérateur  $D_n^1 : \Lambda_{\mathcal{K},n} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{K},n}$  auto-adjoint et ayant des valeurs propres distinctes. Par contre, les  $D_n^1$  ne sont pas compatibles avec les homomorphismes de restriction  $\pi_{n,m} : \Lambda_{\mathcal{K},n} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{K},m}$  ( $n \geq m$ ) :

$$\pi_{n,m} \circ D_n^1 \neq D_m^1 \circ \pi_{n,m}.$$

Par conséquent, les  $D_n^1$  ne nous permettent pas de définir un opérateur  $\Lambda_{\mathcal{K}} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{K}}$ ; cependant, il est possible de les modifier, tout en conservant leurs propriétés, afin de les rendre compatibles avec les  $\pi_{n,m}$ , en posant :

$$E_n = t^{-n} D_n^1 - \sum_{i=1}^n t^{-i}.$$

On vérifie alors que

$$\pi_{n,n-1} \circ E_n = E_{n-1} \circ \pi_{n,n-1}.$$

Ainsi, il nous est possible de définir

$$E = \varprojlim E_n : \Lambda_{\mathcal{K}} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{K}} \quad (3.44)$$

pour lequel

$$E m_\lambda = \sum_{\mu < \lambda} e_{\lambda\mu}(q, t) m_\mu$$

avec les coefficients  $e_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}[q, t^{-1}]$ . Les valeurs propres des  $E$  sont ainsi

$$e_{\lambda\lambda}(q, t) = \sum_{i \geq 1} (q^{\lambda_i} - 1) t^{-i}$$

qui sont encore une fois toutes distinctes. De plus, les  $E_n$  sont auto-adjoints pour le produit scalaire donné par (3.34) (puisque les  $D_n^1$  le sont) et donc  $E : \Lambda_{\mathcal{K}} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{K}}$  est auto-adjoint pour le produit scalaire de Macdonald (voir (3.28)).

Tel qu'annoncé à la fin de la section 3.2.1, les fonctions propres de  $E$  forment alors une famille de polynômes indicées par les partages d'entiers et satisfaisant les conditions (i) et (ii) du théorème 3.1, et il s'agit de l'unique famille les satisfaisant. Nous voyons ainsi comment obtenir une preuve de ce théorème d'existence et d'unicité.

Les  $P_{\lambda}(\mathbf{x}; q, t)$  que nous avons construits sont des fonctions symétriques à une infinité de variables :  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ ; pour se restreindre à un nombre fini  $n$  de variables, il suffit de poser  $x_j = 0$  pour  $j > n$ . On obtient ainsi une famille de polynômes symétriques satisfaisant les conditions (i) et (ii) du théorème 3.1, où les fonctions monomiales dans (i) sont des polynômes en les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et le produit scalaire dans (ii) est celui donné par la formule (3.34).

Tel que nous l'avons remarqué (voir l'égalité (3.30)), lorsque nous posons  $q = t$ , le produit scalaire de Macdonald devient le produit scalaire de Hall; ainsi, par unicité, les polynômes de Macdonald deviennent les fonctions de Schur :

$$P_{\lambda}(\mathbf{x}; q, q) = s_{\lambda}(\mathbf{x}) .$$

Lorsque  $q = 0$ , le produit scalaire de Macdonald devient

$$\langle p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle_t = z_{\lambda}(t) \delta_{\lambda\mu} \tag{3.45}$$

avec  $z_{\lambda}(t) = z_{\lambda} \prod \frac{1}{(1-t^{\lambda_i})}$ . Or ce produit scalaire est également connu : il s'agit du produit scalaire rendant orthogonales les *fonctions de Hall-Littlewood*  $P_{\lambda}(\mathbf{x}; t)$ , unitriangulaires dans la base des  $m_{\lambda}(\mathbf{x})$ . Par unicité, nous avons  $P_{\lambda}(\mathbf{x}; 0, t) = P_{\lambda}(\mathbf{x}; t)$ . Ces fonctions ont d'abord été introduites indirectement par Hall (en lien avec l'algèbre de Hall), puis explicitement par Littlewood. La définition (avec  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ )

$$P_{\lambda}(\mathbf{x}; t) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n / \mathcal{S}_n^{\lambda}} \sigma \left( \mathbf{x}^{\lambda} \prod_{\lambda_1 > \lambda_j} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right) , \tag{3.46}$$

où  $\mathcal{S}_n^\lambda$  est le sous-groupe de  $\mathcal{S}_n$  qui laisse fixe  $\lambda$  ( $\mathcal{S}_n$  agissant sur les partages par permutation des parts), montre que les  $P_\lambda(\mathbf{x}; t)$  interpolent entre les fonctions de Schur et les monomiales. En effet, si  $t = 0$ , nous sommes dans le cas  $q = t = 0$  et donc  $P_\lambda(\mathbf{x}; 0) = s_\lambda(\mathbf{x})$ . Si  $t = 1$ , l'équation (3.46) montre que  $P_\lambda(\mathbf{x}; 1) = m_\lambda(\mathbf{x})$ . Notons cependant que pour  $t = 1$ , le produit scalaire donné par (3.45) est dégénéré : les  $P_\lambda(\mathbf{x}; 1)$  sont de norme nulle.

Également, si nous posons  $q = t^\alpha$  et laissons tendre  $t$  vers 1, de telle sorte que  $\frac{1-q^r}{1-t^r}$  tende vers  $\alpha$ , alors le produit scalaire de Macdonald devient

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\alpha = \alpha^{l(\lambda)} z_\lambda \delta_{\lambda\mu} \quad (3.47)$$

Encore une fois, ce produit scalaire était connu comme étant celui rendant les *fonctions de Jack*  $P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = m_\lambda(\mathbf{x}) + \sum_{\mu \prec \lambda} u_{\lambda\mu}^{(\alpha)} m_\mu$  orthogonales. Encore une fois par unicité, nous avons donc que  $\lim_{t \rightarrow 1} P_\lambda(\mathbf{x}; t^\alpha, t) = P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ . Les fonctions de Jack ont été introduites par le statisticien Henry Jack en 1969 (Jack, 1970), qui avait alors remarqué que lorsque  $\alpha = 1$ , les fonctions de Jack coïncident avec les fonctions de Schur. Ceci amena Stanley (Stanley, 1989) à développer une approche combinatoire des fonctions de Jack ; c'est lui qui introduit le produit scalaire donné par (3.47).

Ainsi, les polynômes de Macdonald unissent trois familles de fonctions symétriques différentes, introduites dans des contextes tout à fait distincts, mais ayant des propriétés similaires d'orthogonalité et d'unitriangularité. Puisqu'il s'agit en quelque sorte d'une généralisation des fonctions de Schur, qui admettent une définition purement combinatoire (voir l'égalité (3.10)), nous pouvions espérer en obtenir une formule combinatoire. . . Ceci a été accompli (Haglund, Haiman et Loehr, 2005), après que les propriétés de formes légèrement modifiées des  $P_\lambda(\mathbf{x}; q, t)$  aient été étudiées.

### 3.2.4 Formes intégrale et transformée

On a ainsi les polynômes  $P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} u_{\lambda\mu}(q, t) m_\mu$ , où  $u_{\lambda\mu}(q, t) \in \mathbb{Q}(q, t)$ . Macdonald conjectura en 1988 (Macdonald, 1988) que la renormalisation

$$J_\mu = \prod_{s \in \mu} (1 - q^{\alpha(s)} t^{1+\ell(s)}) P_\mu, \quad (3.48)$$

lorsqu'exprimé en terme des fonctions symétriques monomiales, aurait des coefficients polynomiaux, les  $q, t$ -Kostka  $K_{\lambda, \mu}(q, t)$ . Ainsi, le produit  $\prod_{s \in \mu} (1 - q^{a(s)} t^{1+l(s)})$  simplifierait tous les dénominateurs des coefficients  $u_{\mu\lambda}(q, t)$  de la formule (3.32). Cette conjecture a depuis été démontrée ((Garsia et Tesler, 1996), (Knop, 1997), (Lapointe et Vinet, 1998)) et est maintenant conséquence de la formule combinatoire (Haglund, Haiman et Loehr, 2005), comme nous le verrons à la section 3.3.1.  $J_\lambda$  est appelée la *forme intégrale* des polynômes de Macdonald. Nous avons également la forme transformée des polynômes de Macdonald :

$$H_\mu = t^{n(\mu)} J_\mu \left[ \frac{\mathbf{x}}{1 - t^{-1}}; q, t^{-1} \right] \quad (3.49)$$

$$\text{où } n(\mu) = \sum_i (i - 1) \mu_i = \sum_{c \in \mu} \ell(c).$$

Les polynômes de Macdonald transformés satisfont et sont uniquement déterminés par les conditions suivantes (Haiman, 1999) :

- (a)  $H_\mu[\mathbf{x}(1 - q); q, t] = \sum_{\lambda \succeq \mu} a_{\lambda\mu}(q, t) s_\lambda$ , où  $a_{\lambda\mu} \in \mathbb{Q}(q, t)$ ;
- (b)  $H_\mu[\mathbf{x}(1 - t); q, t] = \sum_{\lambda \succeq \mu'} b_{\lambda\mu}(q, t) s_\lambda$ , où  $b_{\lambda\mu} \in \mathbb{Q}(q, t)$ ;
- (c)  $\langle H_\mu, s_{(n)} \rangle = 1$ , c'est-à-dire que le coefficient de  $s_{(n)}$  dans  $H_\mu$  est 1.

L'existence et l'unicité d'une famille de fonctions symétriques indicée par les partages d'entiers satisfaisant ces trois conditions est équivalente au théorème 3.1. Tout comme la formule (3.49) donne les  $H_\mu$  en fonction des  $J_\mu$ , on a les expressions suivantes des  $J_\mu$  en terme des  $H_\mu$  :

$$\begin{aligned} J_\mu(\mathbf{x}; q, t) &= t^{n(\mu)} H_\mu[\mathbf{x}(1 - t); q, t^{-1}] \\ &= t^{n(\mu)+n} H_\mu[\mathbf{x}(t^{-1} - 1); q, t^{-1}] \\ &= t^{n(\mu)+n} H_{\mu'}[\mathbf{x}(t^{-1} - 1); t^{-1}, q]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Sous leur forme transformée, les polynômes de Macdonald sont reliés à la géométrie de certaines variétés algébriques (Haiman, 1999) en plus d'admettre une interprétation en termes de représentations du groupe symétrique.

### 3.2.5 Représentations du groupe symétrique

Spécialisons maintenant les notions de la théorie de la représentation au cas du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$ . Il est facile de voir que les classes de conjugaison de  $\mathcal{S}_n$  sont indexées par les partages de

$n$ . Cependant, il y a une particularité remarquable dans le cas du groupe symétrique. En effet, on a une indexation naturelle des représentations irréductibles en terme des partages. Ainsi, on peut naturellement (voir par exemple (Sagan, 2001)) associer à  $\lambda \vdash n$  une représentation irréductible  $S^\lambda$  de caractère  $\chi^\lambda$  avec la superbe propriété (3.53) que nous exposerons bientôt. Afin d'énoncer cette condition de naturalité, suivons Frobenius (Frobenius, 1900) et associons à chaque fonction centrale  $\psi$  une fonction symétrique de la façon suivante :

$$\mathcal{F}(\psi) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \psi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}, \quad (3.51)$$

où  $\lambda(\sigma)$  est le partage correspondant à la décomposition cyclique de  $\sigma$ .  $\mathcal{F}(V)$  est la *transformée de Frobenius* du  $S_n$ -module  $V$ . De façon équivalente, on a

$$\mathcal{F}(\psi) = \sum_{\lambda \vdash n} \psi(\lambda) \frac{p_\lambda}{z_\lambda}, \quad (3.52)$$

où  $\psi(\lambda)$  désigne la valeur prise par  $\psi$  sur la classe de conjugaison des permutations ayant une décomposition cyclique donnant lieu au partage  $\lambda$ . L'indépendance des  $p_\lambda$  permet de récupérer les valeurs de  $\psi(\lambda)$  à partir de  $\mathcal{F}(\psi)$ . La correspondance linéaire

$$\psi \longleftrightarrow \mathcal{F}(\psi)$$

est donc bijective. La transformée de Frobenius possède de plus de nombreuses propriétés qui permettent de traduire les questions fondamentales concernant les représentations de  $S_n$  en terme de fonctions symétriques. Ces propriétés les plus remarquables sont certainement que  $\mathcal{F}$  est une isométrie telle que

$$\mathcal{F}(\chi^\lambda) = s_\lambda. \quad (3.53)$$

Autrement dit, au caractère irréductible  $\chi^\lambda$  correspond la fonction de Schur  $s_\lambda$  et le coefficient de  $s_\lambda$  dans le développement de  $\mathcal{F}(\chi)$  en terme des fonctions de Schur est précisément la multiplicité de la représentation irréductible  $S^\lambda$  dans le module  $V$  auquel correspond le caractère  $\chi$ .

Rappelons qu'on peut plonger  $S_n$  dans  $S_{n+1}$  en ajoutant à chaque permutation le point fixe  $n + 1$ . Ainsi, chaque  $S_{n+1}$ -module  $V$  peut-être considéré comme un  $S_n$ -module par restriction.

Dénotons ce  $\mathcal{S}_n$ -module  $V|_{\mathcal{S}_n}$ . Les transformées de Frobenius de  $\chi^V$  et  $\chi^{V|_{\mathcal{S}_n}}$  sont alors en relation de la façon suivante :

$$\partial_{p_1} \mathcal{F}^{(n+1)}(\chi^V) = \mathcal{F}^{(n)}(\chi^{V|_{\mathcal{S}_n}}), \quad (3.54)$$

où  $\mathcal{F}^{(k)}(\chi^W)$  signifie la transformée de Frobenius du caractère associé au  $\mathcal{S}_k$ -module  $W$ . En effet, notons  $d_i$  la multiplicité de la part  $i$  dans le partage  $\mu$ . Alors

$$\mathcal{F}^{(n+1)}(\chi^V) = \sum_{\mu \vdash n+1} \chi^V(\mu) \frac{p_1^{d_1}}{d_1!} \frac{p_2^{d_2}}{2^{d_2} d_2!} \dots$$

et donc

$$\begin{aligned} \partial_{p_1} \mathcal{F}^{(n+1)}(\chi^V) &= \sum_{\substack{\mu \vdash n+1 \\ \text{tel que } d_1 \geq 1}} \chi^V(\mu) \frac{d_1 p_1^{d_1-1}}{d_1!} \frac{p_2^{d_2}}{2^{d_2} d_2!} \dots \\ &= \sum_{\mu \vdash n} \chi^V(\mu \cdot 1) \frac{p_1^{d_1}}{d_1!} \frac{p_2^{d_2}}{2^{d_2} d_2!} \dots \\ &= \mathcal{F}(\chi^{V|_{\mathcal{S}_n}}). \end{aligned}$$

Ici,  $\mu \cdot 1$  signifie que nous ajoutons une part 1 au partage  $\mu$ . Ainsi, un simple calcul sur les transformées de Frobenius nous permet de connaître une représentation obtenue par restriction.

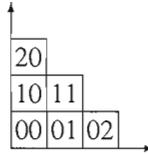
### 3.3 Polynômes de Macdonald et représentations du groupe symétrique

Considérons maintenant l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[\mathbf{x}; \mathbf{y}]$  des polynômes à deux jeux de  $n$  variables,  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots, y_n$ . Le groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  agit diagonalement sur cet espace en permutant simultanément les deux jeux de variables :

$$\sigma P(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}; y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}) . \quad (3.55)$$

Pour chaque  $\mu \vdash n$ , on construit un sous-module de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}; \mathbf{y}]$  de la façon suivante. On pose

$$\Delta_{\mu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \det \left( x_i^a y_i^b \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (a,b) \in \mu}} \quad (3.56)$$



**Figure 3.4** Le partage  $(3, 2, 1)$  avec coordonnées.

Pour illustrer, le déterminant associé au partage  $(3, 2, 1)$  est

$$\Delta_{(3,2,1)} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & x_1 y_1 & 1 & y_1 & y_1^2 \\ x_2^2 & x_2 & x_2 y_2 & 1 & y_2 & y_2^2 \\ x_3^2 & x_3 & x_3 y_3 & 1 & y_3 & y_3^2 \\ x_4^2 & x_4 & x_4 y_4 & 1 & y_4 & y_4^2 \\ x_5^2 & x_5 & x_5 y_5 & 1 & y_5 & y_5^2 \\ x_6^2 & x_6 & x_6 y_6 & 1 & y_6 & y_6^2 \end{pmatrix} .$$

$\Delta_\mu(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  est défini au signe près; on peut éviter cette ambiguïté en donnant un ordre aux cases de  $\mu$ ; dans l'exemple, nous avons utilisé l'ordre de lecture. Le signe de  $\Delta_\mu(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  n'a cependant aucune influence sur la définition de l'espace  $M_\mu$  (voir (3.57)), qui est l'objet qui nous intéresse. Observons que lorsque  $\mu = (1^n)$ , le déterminant  $\Delta_\mu(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  n'est autre que le déterminant de Vandermonde en les variables  $\mathbf{x}$ , alors que lorsque  $\mu = (n)$ , il s'agit du déterminant de Vandermonde en les variables  $\mathbf{y}$ .

Clairement,  $\Delta_\mu(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  est un alternant pour l'action diagonale de  $S_n$  :

$$\sigma \Delta_\mu(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \pm \Delta_\mu(\mathbf{x}; \mathbf{y}) .$$

Puisque  $\sigma(P(\partial \mathbf{x}; \partial \mathbf{y}) \Delta_\mu(\mathbf{x}; \mathbf{y})) = (\sigma P)(\partial \mathbf{x}; \partial \mathbf{y}) \Delta_\mu(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ , il en résulte que l'espace vectoriel des dérivées partielles de  $\Delta_\mu$ ,

$$L_\partial[\Delta_\mu(\mathbf{x}; \mathbf{y})] = \{P(\partial \mathbf{x}; \partial \mathbf{y}) \Delta_\mu(\mathbf{x}; \mathbf{y}) : P(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}; \mathbf{y}]\}$$

est un  $S_n$ -module. On pose

$$M_\mu = L_\partial[\Delta_\mu(\mathbf{x}; \mathbf{y})] . \tag{3.57}$$

$\mathbb{C}[x; y]$  étant naturellement bigradué par le bidegré, chacun de ses sous-modules  $V$  bihomogènes est également bigradué :

$$V = \bigoplus_{k,l \in \mathbb{N}} V_{k,l},$$

où  $V_{k,l}$  dénote la composante homogène de degré  $k$  en  $x$  et  $l$  en  $y$  de  $V$ . En particulier,

$$M_\mu = \bigoplus_{k,l \in \mathbb{N}} M_\mu^{(k,l)}.$$

L'action de  $\mathcal{S}_n$  préservant le bidegré, chaque  $V_{k,l}$  est un  $\mathcal{S}_n$ -module de dimension finie ; on peut donc lui associer une fonction symétrique  $\mathcal{F}(V_{k,l})$  via la transformée de Frobenius. La transformée de Frobenius *bigraduée* de  $V$  est alors la fonction symétrique à deux paramètres donnée par

$$\mathcal{F}_{q,t}(M_\mu) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} t^k q^l \mathcal{F}(V_{k,l}), \quad (3.58)$$

où  $q, t$  sont des paramètres formels. Un des intérêts des espaces  $M_\mu$  vient du fait qu'on a :

**Théorème 3.3** (Haiman, 2003).

$$\mathcal{F}_{q,t}(M_\mu) = H_\mu[x; q, t]. \quad (3.59)$$

En particulier, ce résultat implique que le coefficient  $\tilde{K}_{\lambda\mu}(q, t)$  du développement

$$H_\mu = \sum_{\lambda} \tilde{K}_{\lambda\mu}(q, t) s_\lambda \quad (3.60)$$

est la  $q, t$ -multiplicité de la représentation irréductible indexée par  $\lambda$  dans le  $\mathcal{S}_n$ -module bigradué  $M_\mu = \mathcal{L}_\partial[\Delta_\mu]$  ; par conséquent,  $\tilde{K}_{\lambda\mu}(q, t) \in \mathbb{N}[q, t]$ . En fait, il a d'abord été démontré (Haiman, 1999) que l'égalité (3.59) est équivalente au fait que la dimension de  $M_\mu$ , en tant qu'espace vectoriel, est  $n!$ . C'est pour cette raison que, au cours des années précédant la démonstration du théorème 3.3 on parlait de la *conjecture  $n!$* . Cette équivalence est loin d'être triviale, l'information contenue dans la transformée de Frobenius d'un module étant en général beaucoup plus riche que la seule dimension. Bien que le problème ait alors été ramené à un simple calcul de dimension, la seule démonstration connue à ce jour demande des outils sophistiqués de géométrie algébrique. Ainsi, elle ne nous permet pas d'avoir une description *simple* des polynômes de Macdonald. . . Mais heureusement, nous avons pour cela une très élégante formule combinatoire.

6				
3	2			
1	4	2	12	
1	5	6	1	3

**Figure 3.5** Les descentes de ce remplissage sont indiquées en gris.

### 3.3.1 Formule combinatoire pour les $H_\mu$

Pour  $\mu$  un partage de  $n \in \mathbb{N}$ , on dit qu'un remplissage de  $\mu$  est une fonction  $\sigma : \mu \rightarrow \mathbb{N}$ . Ainsi,  $\sigma$  est une fonction qui assigne à chaque case de  $\mu$  un entier naturel. Nous allons compter les remplissages d'un partage avec une fonction de poids. Afin d'introduire celle-ci, on commence par associer à un remplissage un monôme de la façon suivante. Le monôme d'un remplissage  $\sigma$  est

$$\mathbf{x}_\sigma := \prod_{u \in \mu} x_{\sigma(u)} .$$

En introduisant le poids

$$w(\sigma) := q^{\text{inv}(\sigma)} t^{\text{maj}(\sigma)} \mathbf{x}^\sigma ,$$

où  $\text{inv}(\sigma)$  et  $\text{maj}(\sigma)$  sont des statistiques combinatoires reliées au remplissage  $\sigma$  que nous allons définir ci-dessous, les  $H_\mu$  s'expriment simplement comme

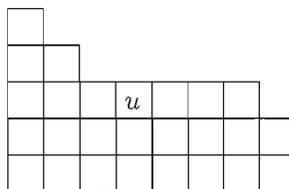
$$H_\mu = \sum w(\sigma) .$$

Pour définir les statistiques  $\text{maj}$  et  $\text{inv}$ , nous devons tout d'abord généraliser la notion classique de descente. Une descente d'un remplissage  $\sigma$  de  $\mu$  est une paire d'entrées  $\sigma(u), \sigma(v)$ ,  $u, v \in \mu$  avec  $\sigma(u) > \sigma(v)$  et  $u$  est placée juste au-dessus de  $v$ , c'est-à-dire  $u = (i+1, j)$  et  $v = (i, j)$ . On pose

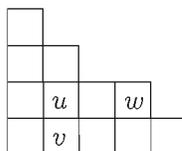
$$\text{Des}(\sigma) := \{u \in \mu : \sigma(u) > \sigma(v) \text{ est une descente}\} .$$

Pour chaque case  $u \in \mu$ , définissons sa *zone d'attaque* : il s'agit de toutes les cases situées sur la même ligne de  $\mu$  que  $u$  et de toutes les cases situées sur la ligne juste au-dessous de  $u$  et se trouvant à sa gauche. La zone d'attaque de la case  $(i, j)$  est donc l'ensemble de cases

$$\{v \in \mu : v = (i', j) \text{ ou } v = (k, i-1) \text{ avec } k < i\} .$$



**Figure 3.6** La zone d'attaque de la case  $u$ .



**Figure 3.7**  $u, v$  et  $w$  forment un triplet.

On dit que  $u$  et  $v$  s'attaquent si  $v$  se trouve dans la zone d'attaque de  $u$  ou vice-versa.

Une inversion d'un remplissage  $\sigma$  de  $\mu$  est une paire d'entrées  $\sigma(u), \sigma(v)$ ,  $u, v \in \mu$  avec  $\sigma(u) > \sigma(v)$ , où  $u$  et  $v$  s'attaquent et  $u$  précède  $v$  dans l'ordre de lecture. On pose

$$\text{Inv}(\sigma) := \{\{u, v\} : \sigma(u) > \sigma(v) \text{ est une inversion}\}.$$

Par exemple, le remplissage de la figure 3.5 compte 9 inversions.

Nous sommes maintenant en mesure de définir les statistiques combinatoires maj et inv :

$$\text{maj}(\sigma) := \sum_{u \in \text{Des}(\sigma)} (\ell(u) + 1) \quad (3.61)$$

$$\text{inv}(\sigma) := |\text{Inv}(\sigma)| - \sum_{u \in \text{Des}(\sigma)} a(u) \quad (3.62)$$

Remarquons tout d'abord que  $\text{inv}(\sigma)$  est positif pour tout remplissage  $\sigma : \mu \rightarrow \mathbb{N}$ ; en effet : on dit que trois cases  $(u, v, w) \in \mu$  forment un triplet si  $v$  est directement sous  $u$  et que  $w$  se trouve sur la même ligne que  $u$ , à sa droite.

Pour  $a, b \in \mathbb{N}$ , posons

$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.63)$$

Pour un triplet  $(u, v, w)$ , dénotons  $x = \sigma(u)$ ,  $y = \sigma(v)$  et  $z = \sigma(w)$ ; nous avons que  $u \in \text{Des}(\sigma)$  si et seulement si  $I(x, y) = 1$  et la contribution des deux paires *violentes* (c'est-à-dire qui s'attaquent)  $\{u, w\}$  et  $\{v, w\}$  à  $|\text{Inv}(\sigma)|$  est  $I(x, z) + I(z, y)$ . Il ne nous reste plus qu'à observer que chaque paire violente fait soit partie d'un unique triplet soit se trouve sur la ligne du bas et qu'il y a  $a(u)$  triplets ayant  $u$  comme case gauche supérieure. Par conséquent, on obtient

$$\text{inv}(\sigma) = |\text{Inv}(\sigma)| - \sum_{u \in \text{Des}(\sigma)} a(u) = J + \sum_{(u,v,w)} (I(x, z) + I(z, y) - I(x, y))$$

où  $J$  dénote le nombre d'inversions dans la ligne du bas. De la définition de  $I(x, y)$  (3.63) il découle que  $I(x, z) + I(z, y) - I(x, y) \in \{0, 1\}$ . Ainsi,  $\text{inv}(\sigma) \geq 0$  pour tout  $\sigma : \mu \rightarrow \mathbb{N}$ .

Remarquons également que la statistique *maj* que nous venons de définir pour un remplissage d'un partage quelconque généralise la notion d'indice majeur sur les mots. En effet, lorsque le partage  $\lambda$  est une colonne,  $\tau : \lambda \rightarrow \mathbb{N}$  un remplissage, alors  $\text{maj}(\tau)$  correspond à  $\text{maj}(w)$ , où  $w$  est le mot de lecture de  $\tau$ .

Tel qu'annoncé, on a

**Théorème 3.4** (Haglund, Haiman et Loehr, 2005). *Pour tout partage d'entier  $\mu$ ,*

$$H_\mu(\mathbf{x}; q, t) = \sum_{\sigma : \mu \rightarrow \mathbb{N}} q^{\text{inv}(\sigma)} t^{\text{maj}(\sigma)} \mathbf{x}^\sigma \quad (3.64)$$

Ce résultat implique que le membre de droite de l'égalité (3.64) est une fonction symétrique; on peut donc l'écrire en terme des fonctions monomiales. Le coefficient de la fonction monomiale  $m_\lambda$  dans  $H_\mu$  est alors donné par la somme des poids des remplissages de  $\mu$  avec  $\lambda_1$  1,  $\lambda_2$  2, etc.

Nous dirons qu'un remplissage  $\sigma : \mu \rightarrow \mathbb{N}$  est *non violent* si, lorsque  $u, v \in \mu$  s'attaquent, alors  $\sigma(u) \neq \sigma(v)$ . De l'égalité (3.64) il vient la formule suivante pour la forme intégrale des polynômes de Macdonald (Haglund, Haiman et Loehr, 2005) :

$$J_\mu(\mathbf{x}; q, t) = \sum_{\substack{\tau : \mu' \rightarrow \mathbb{N} \\ \tau \text{ non violent}}} q^{\text{maj}(\tau)} t^{n(\mu) - \text{inv}(\tau)} \mathbf{x}^\tau \prod_{u \in E_1(\tau)} (1 - q^{\ell(u)+1} t^{a(u)+1}) (1-t)^{|E_2(\tau)|} \quad (3.65)$$

1				
2	2			
1	2	1	1	
1	2	2	1	2

**Figure 3.8** Les ensembles  $E_1$  (en blanc) et  $E_2$  (en gris) pour ce remplissage.

où  $E_1(\tau) = \{u \in \mu' : u, d(u) \in \mu', \tau(u) = \tau(d(u))\}$ ,  $E_2(\tau) = \{u \in \mu' : \tau(u) \neq \tau(d(u))\}$  avec  $d(u)$  dénotant la case directement sous  $u$  et où les cases de la première ligne de  $\mu'$  sont incluses dans  $E_2(\tau)$ .

Évidemment, nous pouvons nous ramener à un nombre fini de variables via la projection

$$\pi_n : \Lambda \rightarrow \Lambda_n$$

$$f(x_1, x_2, \dots) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) .$$

Des formules combinatoires pour les polynômes de Macdonald à  $n$  variables s'obtiennent des formules (3.64) et (3.65) en limitant la somme aux remplissages  $\sigma : \mu \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  et  $\tau : \mu' \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  respectivement.

## Chapitre IV

### DEUX MONDES PARALLÈLES

Nous avons jusqu'à maintenant présenté deux types de fonctions : les familles de polynômes orthogonaux (à une variable) au chapitre 2, puis les polynômes de Macdonald à plusieurs variables, voire une infinité au chapitre 3. Dans les deux cas, il s'agit de bases de l'espace de fonctions dans lequel ils vivent. Ces bases satisfont toutes deux une condition d'orthogonalité, cette notion étant bien sûr différente dans les deux contextes. Elles sont d'ailleurs les uniques bases, à une constante près, à satisfaire la condition d'orthogonalité et une autre de triangularité. Malgré la différence entre les notions d'orthogonalité, nous avons construit de façon analogue un noyau rendant compte de l'orthonormalité.

Nous allons maintenant souligner comment polynômes orthogonaux et polynômes de Macdonald apparaissent de façon similaire comme fonctions propres d'opérateurs ayant des significations physiques. Bien sûr les polynômes orthogonaux classiques sont impliqués dans des situations à une seule variable, tandis que les polynômes de Macdonald font surface dans des situations demandant un plus grand nombre de variables. Nous verrons ensuite comment de nombreuses formules classiques pour les familles de polynômes orthogonaux classiques ont des pendants dans le contexte des polynômes de Macdonald. En particulier, des formules de Rodrigues s'obtiennent en étudiant certaines algèbres d'opérateurs particulièrement intéressantes.

Pour souligner que nous n'établissons ici qu'un parallèle entre les deux contextes, nous montrons (section 4.2.1) que le cas à une variable ne s'obtient pas simplement du cas à plusieurs variables, du moins pas directement. Pour compléter le tableau et avoir une analogie complète, il ne nous manquera qu'une récurrence pour les polynômes de Macdonald, dont on est toujours

à la recherche (voir section 4.2.2) . . .

#### 4.1 Opérateurs de création. . .

Dans plusieurs contextes, notamment en physique, on cherche à trouver les solutions d'une équation

$$Q\psi = 0 \quad , \quad (4.1)$$

pour  $Q$  un opérateur linéaire sur un espace de fonctions  $\mathcal{F}$ . Typiquement,  $Q$  est un opérateur différentiel (ou un opérateur de différences finies) et  $\mathcal{F}$  est un espace de polynômes, fonctions symétriques, fonctions analytiques sur un certain domaine, etc. Notre objectif est de rappeler comment l'utilisation d'algèbres d'opérateurs permet d'approcher algébriquement ce type de problèmes. Plutôt que de donner des détails ou des démonstrations, nous chercherons à dégager les grandes lignes de ce point de vue.

Bien entendu, l'ensemble des solutions de (4.1) forme un espace vectoriel. Cette simple observation est entre autres exploitée dans le procédé de séparation des variables pour une équation aux dérivés partielles. Rappelons que ce processus consiste à trouver une famille de solutions  $\{\psi_\iota\}_{\iota \in I}$  linéairement indépendante, de la forme particulière

$$\psi_\iota(x, y) = X_\iota(x) Y_\iota(y) \quad ,$$

avec  $X_\iota$  fonction de  $x$  et  $Y_\iota$  fonction de  $y$  (incluant le cas où  $x$  et  $y$  sont deux jeux de variables disjoints). Une fois trouvées ces solutions aux variables séparées, on peut facilement construire un vaste répertoire de solutions par combinaisons linéaires :

$$\sum_\iota a_\iota X_\iota(x) Y_\iota(y) \quad .$$

Les coefficients  $a_\iota$  d'une solution particulière sont habituellement déterminés de façon à satisfaire des conditions initiales prescrites par le contexte physique.

Malheureusement, la méthode de séparation de variables ne s'applique pas toujours directement. Mais un changement de coordonnées permet parfois de tout arranger. Un changement de

coordonnées

$$x = g(s, t)$$

$$y = h(s, t)$$

correspond exactement à la donnée d'un opérateur inversible

$$L : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

tel que

$$L(f)(s, t) = f(h(s, t), g(s, t)) .$$

Le changement de coordonnées donné par  $L$  transforme l'équation en

$$LQL^{-1}\phi = 0 ,$$

ce qui revient simplement à résoudre

$$QL^{-1}\phi = 0 ,$$

$L$  étant un isomorphisme linéaire. Certains opérateurs permettent d'engendrer des solutions ou des fonctions propres pour un  $Q$  donné. Considérons la famille des opérateurs  $L$  qui commutent avec  $Q$  :

$$[Q, L] = QL - LQ = 0 , \tag{4.2}$$

où 0 désigne l'opérateur dont le résultat est toujours la fonction nulle. La composition de deux opérateurs  $L, M$  satisfaisant (4.2) satisfait également (4.2) ; en effet,

$$\begin{aligned} [LM, Q] &= LMQ - QLM \\ &= LQM - QLM \\ &= QLM - QLM \\ &= 0 . \end{aligned}$$

De plus, une combinaison linéaire d'opérateurs qui commutent avec  $Q$  commute avec  $Q$ . Ainsi, nous pouvons parler de *l'algèbre* des opérateurs qui commutent avec  $Q$ . L'intérêt de

cette algèbre est de permettre la construction de solutions de l'équation (4.1). En fait, chacun des opérateurs considéré envoie une fonction propre pour la valeur propre  $\lambda$  sur une fonction propre pour la même valeur. Ainsi, si  $Q\psi = \lambda\psi$ , alors

$$\begin{aligned} Q(L\psi) &= LQ\psi \\ &= L(\lambda\psi) \\ &= \lambda L\psi . \end{aligned}$$

Partant d'une solution particulière  $\psi_0$  de (4.1), on peut donc construire la solution  $L\psi_0$ . Pour illustrer l'intérêt d'une telle méthode, supposons que l'opérateur  $Q$  soit un opérateur différentiel sans terme constant. Une solution évidente est la fonction  $\psi_0 \equiv 1$ . Il suffit donc d'appliquer un opérateur  $L$  qui commute avec  $Q$  à cette fonction pour *créer* une nouvelle solution. De façon étonnante, cette solution est non triviale en général ! C'est pourquoi nous parlons d'opérateurs de création.

Exiger que l'opérateur  $L$  commute avec  $Q$  est cependant parfois trop rigide ; on peut considérer la situation plus générale dans laquelle le commutateur de  $Q$  et de  $L$  est un multiple de  $Q$  :  $[L, Q] = RQ$ , avec  $R \in \mathcal{F}$ . Ceci implique en effet que

$$\begin{aligned} Q(L\psi) &= L(Q\psi) + RQ\psi \\ &= L(0) + R \cdot 0 \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Par exemple, dans le cas de l'équation de Schrödinger donnée par l'opérateur

$$Q = i\partial_t + \partial_{xx} ,$$

l'opérateur

$$L = x\partial_x + 2t\partial_t + \frac{1}{2}$$

est tel que  $[L, Q] = 2Q$ . Il ne commute donc pas avec l'opérateur  $Q$  mais permet tout de même d'envoyer des solutions sur des solutions. Par exemple, on calcule, par séparation de variables, la solution

$$\phi_0 = e^{-it} \cos(x) ,$$

ce qui permet de trouver, par l'application de l'opérateur  $L$ , la solution

$$\phi = e^{-it} \left( -x \sin(x) + \left( \frac{1}{2} - 2it \right) \cos(x) \right).$$

Nous allons maintenant voir comment appliquer de telles méthodes aux objets qui nous intéressent particulièrement, les polynômes orthogonaux et les polynômes de Macdonald.

#### 4.1.1 ... et polynômes orthogonaux

En modifiant de façon appropriée les conditions sur le commutateur  $[Q, L]$ , nous pouvons aussi trouver de nouvelles fonctions propres de l'opérateur  $Q$ . Pour illustrer cette idée, reprenons l'équation différentielle (2.36) caractérisant les polynômes d'Hermite :

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Autrement dit, le polynôme  $H_n(x)$  est une fonction propre de l'opérateur différentiel

$$Q = \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx}$$

pour la valeur propre  $-2n$ . L'équation  $Q\psi = 0$  admet bien sûr la solution triviale  $\psi_0 \equiv 1$ . Voyons comment, à partir de cette solution, nous pouvons retrouver nos polynômes d'Hermite au moyen d'opérateurs bien choisis. En effet, posons  $L = -e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2}$ ; on a bien

$$[Q, L] = -2L + Q_1 \tag{4.3}$$

où  $Q_1$  est un opérateur différentiel sans terme constant. De plus, la famille d'opérateurs  $M$  tels que

$$[Q, M] = \alpha M + R$$

pour  $\alpha$  une constante et  $R$  opérateur différentiel sans terme constant est additive et multiplicative. En particulier,

$$L^n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

est tel que

$$[Q, L^n] = -2nL^n + R.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} QL^n(1) &= L^n Q(1) - 2nL^n(1) + R(1) \\ &= -2nL^n(1) . \end{aligned}$$

C'est donc dire que  $L^n(1)$  est une fonction propre de  $Q$  pour la valeur propre  $-2n$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} L(1) &= -e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} \\ &= 2x \\ &= H_1(x) \\ L^2(1) &= -e^{x^2} \frac{d}{dx} 2xe^{-x^2} \\ &= 4x^2 - 2 \\ &= H_2(x) \\ L^3(1) &= -e^{-x^2} \frac{d}{dx} (-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}) \\ &= 8x^3 - 12x \\ &= H_3(x) . \end{aligned}$$

Il est intéressant de souligner que  $L^n(1)$  correspond exactement à la formule de Rodrigues (2.28) que nous avons donnée pour les polynômes d'Hermite. Ainsi, on obtient les polynômes d'Hermite par application successive de l'opérateur  $L$  :

$$1 \xrightarrow{L} H_1(x) \xrightarrow{L} H_2(x) \xrightarrow{L} H_3(x) \xrightarrow{L} \dots$$

Dans le cas des polynômes de Laguerre, fonctions propres de l'opérateur

$$Q = x \frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{d}{dx}$$

pour les valeurs propres  $-n$ , l'opérateur  $L = x^{-\alpha} e^x \frac{d}{dx} x^{\alpha+1} e^{-x}$  satisfait une propriété analogue.

Comme nous l'avons illustré précédemment, les polynômes orthogonaux classiques apparaissent tous comme fonctions propres d'opérateurs différentiels ayant des significations physiques (en lien avec les équations de Schrödinger ou de la chaleur par exemple). Nous pouvons ainsi

les obtenir par l'application d'opérateurs de création (c'est ce qu'expriment les formules de type Rodrigues (2.21), (2.28) et (2.29)). Ces opérateurs satisfont des équations de type (4.3). Bien sûr, une telle discussion peut être faite avec d'autres types d'opérateurs, des opérateurs de différences finies par exemple.

#### 4.1.2 ... et polynômes de Macdonald

Nous pouvons également exprimer les polynômes de Macdonald  $J_\lambda(\mathbf{x}; q, t)$  (forme intégrale (3.48)) par le biais d'une formule de type Rodrigues. En effet, rappelons que nous avons construit les polynômes de Macdonald (à  $n$  variables) comme fonctions propres de l'opérateur  $D_n^1$  (voir (3.42)) avec valeurs propres  $\sum_{i=1}^n q^{\lambda_i} t^{n-i}$  (voir (3.43)), où  $\lambda$  est un partage de  $n$ . Or les opérateurs de Macdonald (voir (3.39))

$$D_n(z; q, t) = \sum_{r=0}^n D_n^r z^r$$

apparaissent dans l'étude du modèle quantique dit de Calogero-Sutherland (Sutherland, 1971), décrivant les interactions entre  $n$  particules placées autour d'un cercle. En fait,  $D_n$  est l'opérateur hamiltonien relié à ce modèle physique ! Les physiciens ont donc pu conclure que les fonctions propres de cet hamiltonien sont les polynômes de Macdonald à  $n$  variables  $P_\lambda(\mathbf{x}; q, t)$ . Également, la version non quantique de ce modèle est reliée à une spécialisation connue des polynômes de Macdonald : les polynômes de Jack, orthogonaux pour le produit scalaire donné par la formule (3.47) ! Dans ce cas, l'opérateur hamiltonien du système est donné par (voir par exemple (Lapointe et Vinet, 1996))

$$H := \sum_{j=1}^n \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{j < k} \left( \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k} \right) \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \quad (4.4)$$

où  $n$  est bien sûr le nombre de variables. Cet opérateur est symétrique ; il envoie donc une fonction symétrique sur une fonction symétrique. On vérifie facilement que  $H$  est auto-adjoint pour le produit scalaire (3.47), avec paramètre  $\alpha$ , et qu'il est triangulaire dans la base des monomiales. Ainsi, ses fonctions propres doivent être les polynômes de Jack  $P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ .

Ceci suggère que, tout comme pour les polynômes orthogonaux classiques, il soit possible d'obtenir les polynômes de Macdonald et les polynômes de Jack par l'application d'opérateurs de

création à la solution triviale  $\psi_0 \equiv 1$ . Des opérateurs  $B_m$  ont justement été introduits (Lapointe et Vinet, 1997) avec la propriété

$$B_m J_\lambda = J_{\lambda+(1^m)} \quad (4.5)$$

pour  $m \geq l(\lambda)$ . Autrement dit,  $B_m$  ajoute une colonne de hauteur  $m$  au partage indiquant le polynôme de Macdonald. L'équation (4.5) entraîne la formule de type Rodrigues suivante :

$$J_\lambda(\mathbf{x}; q, t) = B_N^{\lambda_N} \circ B_{N-1}^{(\lambda_{N-1} - \lambda_N)} \dots \circ B_2^{(\lambda_3 - \lambda_2)} \circ B_1^{(\lambda_2 - \lambda_1)}(1) \quad , \quad (4.6)$$

où  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N > 0)$ . Notons que la condition (4.5) ne détermine pas entièrement les opérateurs : l'effet de  $B_m$  sur  $J_\lambda$  avec  $m < l(\lambda)$  n'est pas spécifié. Voilà pourquoi différentes expressions pour des opérateurs satisfaisant la propriété (4.5) ont été proposées (voir par exemple (Kirillov et Noumi, 1999)).

Par exemple, une famille d'opérateurs de création pour les polynômes de Macdonald est obtenue par une généralisation des opérateurs  $D_n^r$  (voir (3.41)). Pour  $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , on pose

$$D_J^r := \sum_{\substack{I \subseteq J \\ |I|=r}} A_I(\mathbf{x}; t) \prod_{i \in I} T_{q, x_i} \quad , \quad (4.7)$$

où  $A_I(\mathbf{x}; t)$  est tel que décrit en (3.40). Si de plus on pose

$$D_J(z; q, t) := \sum_{r=0}^n z^r D_J^r \quad ,$$

alors on peut définir

$$B_m := \sum_{|I|=m} \sum_{r=0}^m t^{-r} x_I \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{x_i - x_j/t}{x_i - x_j} D_I^r(-t; q, t) \quad , \quad (4.8)$$

avec  $x_I := \prod_{i \in I} x_i$ , de façon à satisfaire (4.5). Il en résulte que les polynômes de Macdonald  $J_\lambda(\mathbf{x}; q, t)$  s'obtiennent via la formule (4.6). Cette expression a permis de donner une première démonstration de la polynomialité des coefficients  $K_{\lambda\mu}(q, t)$  (Lapointe et Vinet, 1998). En effet, une fois obtenue la formule (4.8), il suffit d'observer que les opérateurs  $B_m$  n'introduisent pas de dénominateurs pour obtenir  $K_{\lambda\mu}(q, t) \in \mathbb{Q}[q, t]$ . L'étude de tels opérateurs de création est un sujet vaste et fascinant que nous n'avons ici qu'effleuré. Un rapide survol bibliographique

((Knop, 1997), (Kirillov, 1997), (Lapointe et Vinet, 1998), (Kirillov et Noumi, 1999) entre autres) semble indiquer qu'une étude plus approfondie demanderait de se familiariser avec la théorie des algèbres de Hecke affines doubles introduites par Cherednik (voir par exemple (Cherednik, 1995)).

## 4.2 Parallèles

L'apparition des polynômes de Macdonald dans un contexte physique et l'obtention d'une formule de Rodrigues montre que ceux-ci peuvent se voir comme un analogue des polynômes orthogonaux dans un contexte à plusieurs variables. Observons que nous avons intentionnellement, tout au long de notre discussion, mis en parallèle deux théories fort semblables... c'est ce que nous illustrons de façon plus synthétique avec le tableau 4.1. Presque tous les éléments clés

**Tableau 4.1** Tableau comparatif entre les polynômes orthogonaux classiques et les polynômes de Macdonald.

Caractéristiques	Polynômes orthogonaux classiques	Polynômes de Macdonald
base	✓	✓
orthogonalité	✓	✓
unitriangularité	✓	✓
formules de Rodrigues	✓	✓
fonctions propres d'opérateurs à signification physique	✓	✓
noyaux rendant compte de l'orthonormalité	✓	✓
réurrence	✓	???

de la théorie des polynômes orthogonaux classiques ont un reflet dans le contexte des fonctions symétriques à deux paramètres. Tous, sauf pour ce qui est de la récurrence à trois termes !

Dans ce qui suit, nous allons explorer plus à fond ce parallèle en tentant d'abord d'obtenir

des familles de polynômes orthogonaux classiques à partir des polynômes de Macdonald. Ceci nous amènera à construire un exemple de produit scalaire sur l'espace des polynômes qui ne correspond pas à une fonctionnelle linéaire, tel que nous l'avions annoncé au chapitre 2. Ainsi, nous verrons que la différence entre les deux notions nous empêche d'obtenir directement le cas à une seule variable comme spécialisation du cas à plusieurs variables. Sur une note plus positive, nous partirons ensuite à la recherche de la récurrence perdue, en suivant la piste donnée par (Bergeron *et al.*, 1999).

#### 4.2.1 Polynômes de Macdonald à deux variables

En pensant que les polynômes de Macdonald sont analogues aux polynômes orthogonaux, mais avec plusieurs variables, il semble naturel de tenter de retrouver directement ces derniers à partir des premiers. Autrement dit, serait-il possible, après s'être ramené à une seule variable, de spécialiser les paramètres  $q$  et  $t$  apparaissant dans les coefficients des polynômes de Macdonald de façon à obtenir une famille classique de polynômes orthogonaux ?

Observons tout d'abord que le fait de se limiter à une seule variable est trop limitatif. En effet, la formule combinatoire (3.65) entraîne immédiatement

$$P_{\lambda}(x, 0, 0, \dots) \begin{cases} 0 & \text{si } l(\lambda) > 1 ; \\ x^n & \text{si } \lambda = (n) . \end{cases}$$

Le résultat obtenu est donc tout simplement la famille des polynômes  $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui, nous l'avons fait remarquer à la section 2.2.3, n'est pas une famille de polynômes orthogonaux. Il faut donc procéder autrement pour nous ramener à des polynômes à une seule variable ! En fait, comme les  $P_{\lambda}$  sont homogènes, il est naturel de considérer la spécialisation à deux variables. Rappelons qu'on obtient naturellement un polynôme à une seule variable  $f(x)$  en posant  $y = 1$  dans un polynôme  $F(x, y)$  homogène. On observe que le polynôme  $F(x, y)$  se retrouve facilement à partir de  $f(x)$  par un simple processus d'homogénéisation :

$$F(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}\right) ,$$

avec  $f$  de degré  $n$ . Posons

$$g_n(x; q, t) := P_{(n)}(x, 1, 0, 0, \dots) . \quad (4.9)$$

Le degré de  $g_n$  est alors  $n$  ; l'ensemble  $\{g_n\}_{n \geq 0}$ , où nous posons  $g_0 = 1$ , forme ainsi une base de l'espace  $\mathbb{Q}[x]$ . C'est cette famille de polynômes que nous étudierons.

Afin d'introduire naturellement sur cet espace un produit scalaire  $\langle -, - \rangle$ , posons :

$$\langle g_n, g_m \rangle = \langle P_n, P_m \rangle_{q,t} . \quad (4.10)$$

Ainsi, nous avons que  $\langle g_n, g_m \rangle = 0$  si  $n \neq m$  ; pour décrire entièrement notre produit scalaire, il faut calculer la valeur de  $\langle g_n, g_n \rangle$ . Or Macdonald (Macdonald, 1995b) a calculé que

$$\langle P_\lambda, P_\lambda \rangle_{q,t} = \prod_{c \in \lambda} \frac{1 - q^{a(c)+1} t^{\ell(c)}}{1 - q^{a(c)} t^{\ell(c)+1}} . \quad (4.11)$$

En particulier, si  $\lambda = (n)$ , nous obtenons :

$$\langle g_n, g_n \rangle = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1 - q^{i+1}}{1 - q^i t} . \quad (4.12)$$

Ainsi, notre produit scalaire est donné explicitement par

$$\langle g_n, g_m \rangle = \delta_{nm} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1 - q^{i+1}}{1 - q^i t} . \quad (4.13)$$

De façon plus compacte, en utilisant la notation

$$(a; q)_n = \prod_{r=0}^{n-1} (1 - aq^r) , \quad (4.14)$$

nous avons

$$\langle g_n, g_m \rangle = \delta_{nm} \frac{(q; q)_n}{(t; q)_n} \quad (4.15)$$

En introduisant les polynômes

$$f_n(x; q, t) = \frac{(t; q)_n}{(q; q)_n} g_n(x; q, t) ,$$

nous obtenons deux bases de  $\mathbb{Q}[x]$ ,  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{f_n\}_{n \geq 0}$ , qui sont duales pour le produit scalaire (4.10). L'obtention des matrices de passage de la base des monômes  $\{x^n\}_{n \geq 0}$  à ces bases permettra alors de calculer  $\langle x^n, x^m \rangle$  en exploitant cette dualité.

Soit  $A = (A_{i,j})_{i,j \geq 0}$  la matrice de passage de la base des monômes à celle des  $g_n$ . Ainsi,  $A_{i,j} \in \mathbb{Q}(q, t)$  est le coefficient de  $x^i$  dans le polynôme  $g_j$ . Nous avons immédiatement, par le

théorème 3.1, (ii), que  $A_{i,i} = 1$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et que  $A_{i+k,i} = 0$  pour tout  $k \geq 0$ . Ainsi, la matrice  $A$  est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Les premières entrées de cette matrice sont :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & \frac{(1-t)(1+q)}{1-qt} & \frac{(1-t)(q^2+q+1)}{1-q^2t} & \frac{(1-t)(q^3+q^2+q+1)}{1-q^3t} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1-t)(q^2+q+1)}{1-q^2t} & \frac{(1-t)(q^5t-q^4+q^4t+2q^3t-q^3+q^2t-2q^2-q+qt-1)}{-(1-q^3t)(1-q^2t)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(1-t)(q^3+q^2+q+1)}{1-q^3t} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

L'équation (3.65) nous permet d'avoir une description explicite des autres coefficients. Notons cependant que la symétrie des  $P_{(n)}$  entraîne que  $A_{i,n} = A_{n-i,n}$  pour tout  $i \leq n \in \mathbb{N}$ . Rappelons que, pour  $i \leq j$ , la formule combinatoire (3.65) donne, tous les remplissages de  $(n)' = (1^n)$  étant non violents :

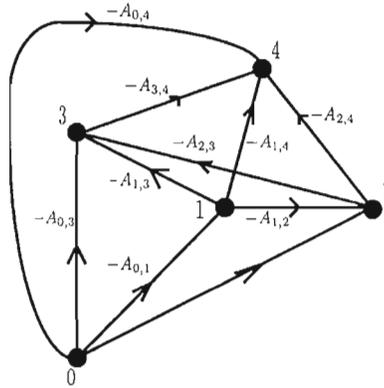
$$A_{i,j} = \left( \sum q^{\text{maj}(\tau)} \prod_{u \in E_1(\tau)} (1 - q^{l(u)+1}t) (1-t)^{|E_2(\tau)|} \right) \frac{1}{(t; q)_j}. \quad (4.16)$$

On peut simplifier cette écriture. En effet, pour une colonne  $\gamma$ , un remplissage  $\tau : \gamma \rightarrow \mathbb{N}$  est associé naturellement à son mot de lecture  $w(\tau)$ , obtenu en lisant les entrées de  $\tau$  selon l'ordre de lecture (dans le cas d'une colonne, de haut en bas). Ainsi, (4.16) devient

$$A_{i,j} = \sum_{w \in E(i, j-i)} q^{\text{maj}(w)} \prod_{w_i = w_{i+1}} (1 - q^{i+1}t) \prod_{w_i \neq w_{i+1}} (1-t) \frac{1}{(t; q)_j} \quad (4.17)$$

où  $E(n, m)$  dénote l'ensemble des mots sur l'alphabet  $\{1, 2\}$  ayant  $n$  copies de la lettre 1 et  $m$  copies de la lettre 2 et où  $\text{maj}(w)$  dénote l'indice majeur du mot  $w$ . Décomposons la somme (4.17) en deux parties, selon la dernière lettre des mots considérés. Dans une première partie, on considère la somme  $A_{i,j}^{(1)}$  sur l'ensemble  $E(i, j-i)^{(1)}$  des mots  $w$  de longueur  $j$  avec  $i$  occurrences de la lettre 1 se terminant par la lettre 1. La seconde partie, dénotée  $A_{i,j}^{(2)}$ , est la somme analogue sur l'ensemble  $E(i, j-i)^{(2)}$  des mots se terminant par la lettre 2. Évidemment,

$$A_{i,j} = A_{i,j}^{(1)} + A_{i,j}^{(2)}$$



**Figure 4.1** Une (toute petite) partie du graphe  $G$ .

et nous avons les récurrences

$$\begin{aligned} (1 - q^{(n-1)}t) A_{i,n}^{(1)} &= (1 - q^{(n-1)}t) A_{i-1,n-1}^{(1)} + (1-t) q^{(n-1)} A_{i-1,n-1}^{(2)} \\ (1 - q^{(n-1)}t) A_{i,n}^{(2)} &= (1-t) A_{i,n-1}^{(1)} + (1 - q^{(n-1)}t) A_{i,n-1}^{(2)}, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales  $A_{n,n}^{(1)} = 1$ ,  $A_{n,n}^{(2)} = 0$ ,  $A_{0,n}^{(1)} = 0$  et  $A_{0,n}^{(2)} = 1$ , pour tout  $n \geq 1$ . Bien entendu,  $A_{m,n}^{(i)} = 0$  pour  $i = 1, 2$  et  $m > n$ . Pour illustrer, calculons  $A_{1,3}$  :

$$\begin{aligned} (1 - q^2t) A_{1,3} &= (1-t) A_{1,2}^{(1)} + (1 - q^2t) A_{1,2}^{(2)} + (1 - q^2t) A_{0,2}^{(1)} + q^2 (1-t) A_{0,2}^{(2)} \\ &= (1-t) \left( A_{0,1}^{(1)} + \frac{1}{1-qt} q (1-t) A_{0,1}^{(2)} \right) \\ &\quad + \frac{1 - q^2t}{1-qt} \left( (1-t) A_{1,1}^{(1)} + (1-qt) A_{1,1}^{(2)} \right) \\ &\quad + q^2 (1-t) \\ &= \frac{q(1-t)^2}{1-qt} + \frac{(1-t)(1-q^2t)}{1-qt} + q^2 (1-t) \end{aligned}$$

On peut ainsi construire récursivement, en ajoutant une lettre à la fois à la fin du mot, les statistiques associées aux trois mots de longueur 3 ayant une seule lettre 1 (212, 122 et 221 respectivement).

La triangularité de la matrice  $A$  permet de calculer combinatoirement son inverse  $A^{-1}$ . Il s'agit en fait d'une construction très classique. Ainsi, on définit le graphe orienté  $G$  ayant  $\mathbb{N}$  comme ensemble de sommets et ayant une arête  $a_{i,j}$  de  $i$  vers  $j$  si et seulement si  $i < j$ . On attribue à l'arête  $a_{i,j}$  le poids  $-A_{i,j}$ . Alors l'entrée  $(i, j)$  de la matrice  $A^{-1} = (B_{i,j})_{i,j \geq 0}$  est donnée par

la somme des poids des chemins élémentaires du sommet  $i$  au sommet  $j$  dans le graphe  $G$  :

$$B_{i,j} = \sum_{c \text{ chemin élémentaire de } i \text{ à } j} w(c) . \quad (4.18)$$

En particulier,  $A^{-1}$  est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

Les premières entrées de cette matrice sont

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{q-t}{1-qt} & \frac{q^2t-q^3+qt-t^2}{(1-qt)(1-q^2t)} & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{(1+q)(t-1)}{1-qt} & \frac{(t-1)(q^2+q+q)(t-q)}{(1-qt)(1-q^2t)} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(t-1)(q^2+q+1)}{1-q^2t} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} .$$

De même, définissons la matrice  $C = (C_{i,j})_{i,j \geq 0}$  comme étant la matrice de passage des monômes à la base constituée des polynômes  $f_n$ . Clairement, nous avons

$$C_{i,j} = \frac{(t; q)_j}{(q; q)_j} A_{i,j} .$$

Nous obtenons ainsi la matrice  $C^{-1} = (D_{i,j})_{i,j \geq 0}$  par  $D_{i,j} = \frac{(q; q)_j}{(t; q)_j} B_{i,j}$ . Nous sommes alors en mesure de calculer le produit scalaire de deux monômes :

$$\langle x^n, x^m \rangle = \sum_{i=0}^{\min(n,m)} B_{i,n} D_{i,m} \quad (4.19)$$

Nous calculons, par exemple,

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \frac{q+t-2}{t-1} ; \\ \langle x^2, 1 \rangle &= \frac{q-t}{1-qt} ; \\ \langle x^2, x \rangle &= \frac{q^2-q+t-1}{1-qt} , \\ \langle x^3, 1 \rangle &= \frac{(q^2-t)(t-q)}{(1-qt)(1-q^2t)} . \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer qu'on ne peut obtenir ce produit scalaire par le biais d'une fonctionnelle linéaire, et ce quelle que soit la spécialisation des paramètres  $q$  et  $t$ . À cette fin, nous aimerions poser

$$L[x^n] = \langle x^{n-i}, x^i \rangle_{q=q_0, t=t_0} , \quad (4.20)$$

avec  $0 \leq i < n$  quelconque et certaines valeurs  $q_0, t_0$  pour nos paramètres  $q$  et  $t$ . Bien entendu, pour que cette définition ait un sens, il faut s'assurer que

$$\langle x^n, x^m \rangle_{q=q_0, t=t_0} = \langle x^i, x^j \rangle_{q=q_0, t=t_0} \quad (4.21)$$

chaque fois que  $n + m = i + j$ . Supposons que nous ayons trouvé des valeurs  $q_0, t_0 \in \mathbb{C}$  pour lesquelles les équations (4.21) sont satisfaites. Alors, par unicité,  $\{g_n(x)\}$  est la famille de polynômes orthogonaux moniques pour la fonctionnelle ainsi définie, où

$$g_n(x) = g_n(x; q_0, t_0) .$$

Par le théorème 2.1, on a une récurrence de la forme

$$g_{n+1}(x) = (x - b_n) g_n(x) - \lambda_n g_{n-1}(x) , \quad (4.22)$$

avec conditions initiales  $g_0(x) = 1, g_1(x) = 1 + x$  et pour certains paramètres  $b_n$  et  $\lambda_n \neq 0$ . Exploitions ce que nous savons des  $g_n(x)$  pour obtenir plus d'information sur ces paramètres. Nous savons que  $A_{i,n} = A_{n-i,n}$ , où  $A_{j,k}$  désigne le coefficient de  $x^j$  dans  $g_k(x)$ . En particulier,  $1 = A_{n,n} = A_{0,n}$  pour tout  $n$ . Ainsi, en considérant le terme constant de chaque côté de l'égalité (4.22), nous obtenons la relation

$$1 = -b_n - \lambda_n . \quad (4.23)$$

La récurrence (4.22) se réécrit donc

$$g_{n+1}(x) = (x - b_n) g_n(x) + (1 + b_n) g_{n-1}(x) . \quad (4.24)$$

Calculons quelques termes :

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 1 ; \\ g_1(x) &= 1 + x ; \\ g_2(x) &= 1 + (1 - b_1) x + x^2 ; \\ g_3(x) &= 1 + (b_1 b_2 + 2) x + (-b_1 - b_2 + 1) x^2 + x^3 ; \\ g_4(x) &= 1 + (-b_3 b_2 b_1 - b_3 b_1 - b_1 - b_3 + 2) x + (b_3 b_2 + b_3 b_1 + b_2 b_1 + 3) x^2 \\ &\quad + (-b_3 - b_2 - b_1 + 1) x^3 + x^4 . \end{aligned}$$

En utilisant la condition  $A_{i,n} = A_{n-i,n}$ , nous obtenons les égalités suivantes :

$$b_1 b_2 + 2 = -b_1 - b_2 + 1 ; \quad (4.25)$$

$$-b_3 b_2 b_1 - b_3 b_1 - b_1 - b_3 + 2 = -b_3 - b_2 - b_1 + 1 . \quad (4.26)$$

Ainsi, les équations (4.25) et (4.26) nous donnent que  $b_3 = -1$  ou  $b_2 = -1$ , et on a donc, d'après la relation (4.23), que  $\lambda_3 = 0$  ou  $\lambda_2 = 0$ . Ceci contredit l'hypothèse que  $\lambda_n \neq 0$ . Ainsi, les  $g_n(x)$  ne peuvent former une famille de polynômes orthogonaux, au sens classique des définitions que nous avons présentées à la section 2.1.1. Ceci illustre que la notion de produit scalaire associé à une fonctionnelle linéaire sur un espace de polynômes et celle de produit scalaire général sur ce même espace ne sont pas équivalentes.

Il est intéressant d'observer aussi que nous avons montré qu'il n'y a pas de récurrence à trois termes de la forme (2.14) pour les  $P_\lambda(x; q, t)$ . En fait, il se dégage d'une lecture attentive de notre argument que c'est la symétrie des  $P_\lambda(x; q, t)$  qui est ici en cause. Dans le cas à une variable nous n'avons aucune contrainte quant au type de polynôme admissible ; la richesse obtenue en passant à un nombre infini de variables se paie de cette restriction très rigide. Il en résulte que, bien que les polynômes de Macdonald apparaissent de façon semblable aux polynômes orthogonaux, chacun des deux demande un traitement distinct.

Pour terminer sur une note positive, nous aimerions maintenant mettre en lumière un analogue pour les polynômes de Macdonald de la récurrence à trois termes des polynômes orthogonaux, introduit par (Bergeron *et al.*, 1999).

#### 4.2.2 À la recherche de la récurrence perdue...

Où se cache le côté récursif des polynômes de Macdonald ? Pour tenter de répondre à cette question, nous allons commencer par utiliser l'interprétation des polynômes de Macdonald transformés  $H_\mu$  dans le contexte de la théorie de la représentation (section 3.3) pour construire une famille de fonctions symétriques plus large. Nous obtiendrons ainsi un ensemble de générateurs de l'espace des fonctions symétriques, mais bien sûr cet ensemble ne formera plus une base. Nous allons voir qu'un analogue d'une formule de Pieri est équivalent à une récurrence pour

cette famille élargie. Plus précisément, il s'agit d'une récurrence à quatre termes. Serait-ce notre récurrence perdue ?

Rappelons que nous avons vu (théorème 3.3) que le polynôme de Macdonald transformé,  $H_\mu [\mathbf{x}; q, t]$ , est la transformée de Frobenius bigraduée d'un certain  $S_n$ -module  $M_\mu$  :

$$H_\mu [\mathbf{x}; q, t] = \mathcal{F}_{q,t} (M_\mu) .$$

La construction de  $M_\mu$  se faisait à l'aide du diagramme de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  associé au partage  $\mu \vdash n$ . Or cette construction n'utilisait en aucun cas que  $\mu$  était un partage : nous aurions en effet pu faire la même chose pour n'importe quel diagramme  $D = \{(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  en posant

$$M_D = \mathcal{L}_\partial [\Delta_D (\mathbf{x}; \mathbf{y})] ,$$

où

$$\Delta_D (\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \det (x_i^{q_j} y_i^{p_j})_{1 \leq i, j \leq n} .$$

(Notons qu'encore une fois  $\Delta_D$  est défini au signe près ; il suffit de fixer un ordre sur les cases pour éviter cette ambiguïté.)  $M_D \subseteq \mathbb{C} [\mathbf{x}; \mathbf{y}]$  est naturellement bigradué :

$$M_D = \bigoplus_{r, s \in \mathbb{N}} V_{r, s} , \quad (4.27)$$

où  $V_{r, s}$  est la composante homogène de  $M_D$  de degré  $r$  en  $\mathbf{x}$  et  $s$  en  $\mathbf{y}$ . Rappelons qu'on définit la transformée de Frobenius bigraduée comme :

$$\mathcal{F}_{q,t} (M_D) = \sum_{r, s \in \mathbb{N}} t^r q^s \mathcal{F} (V_{r, s}) .$$

Nous pouvons ainsi poser, pour  $D$  un diagramme quelconque

$$H_D = \mathcal{F}_{q,t} (M_D) . \quad (4.28)$$

Par exemple, pour le diagramme  $D$  illustré à la figure 4.2,

$$\Delta_D (\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \det \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & 1 \end{pmatrix} .$$

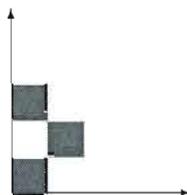


Figure 4.2 Un diagramme de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Tableau 4.2 Une base de l'espace  $M_D$ , décomposée selon le bidegré

Bidegré	Éléments de base
(0, 0)	1
(1, 0)	$x_1, x_2, x_3$
(0, 1)	$y_1, y_2, y_3$
(1, 1)	$x_1y_2 - x_2y_1, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_1 - x_3y_3,$ $x_2y_3 - x_3y_2, x_1y_1 - x_2y_2$
(2, 0)	$x_1^2 - x_2^2, x_1^2 - x_3^2,$ $x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3$
(2, 1)	$x_3^2y_1 - x_2^2y_1 - 2x_1x_3y_3 + 2x_1x_2y_2,$ $x_3^2y_2 - x_1^2y_2 - 2x_3x_2y_3 + 2x_1x_2y_1,$ $x_1^2y_3 - x_2^2y_3 - 2x_1x_3y_1 + 2x_2x_3y_2$
(3, 0)	$x_1x_2^2 - x_1x_3^2, x_1^2x_3 - x_3x_2^2, x_1^2x_2 - x_2x_3^2$
(3, 1)	$\Delta_D$

Une base de l'espace  $M_D$  est décrite au tableau 4.2, où l'espace est décomposé en composantes bihomogènes. Cette décomposition nous permet de calculer la transformée de Frobenius sur chacune des composantes bihomogènes à l'aide de la formule 3.52 puis d'obtenir  $H_D$  :

$$\begin{aligned}
 H_D(x; q, t) &= \left( \frac{1}{6} + \frac{t}{2} + \frac{q}{2} + \frac{5qt}{6} + \frac{5t^2}{6} + \frac{qt^2}{2} + \frac{t^3}{2} + \frac{qt^3}{6} \right) p_1^3 \\
 &\quad + (1 + t + q - qt + t^2 + qt^2 + t^3 + qt^3) \frac{p_1 p_2}{2} \\
 &\quad + (1 + qt^3) \frac{p_3}{3}
 \end{aligned}$$

Il apparaît cependant que cette famille est trop large ; nous voulons en effet construire une famille de fonctions symétriques partageant des propriétés analogues. Or la conjecture  $n!$  a pour

conséquence que  $H_\mu [x; 1, 1] = h_1^n$  et on a calculé différentes transformées de Frobenius pour des diagrammes de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , montrant qu'en général,  $H_D [x; 1, 1] \neq \alpha h_1^n$  pour  $\alpha$  une constante. Le diagramme de la figure 4.2 est un exemple de diagramme pour lequel  $H_D (x; 1, 1) \neq \alpha h_1^n$ . En effet,

$$H_D (x; 1, 1) = 4p_1^3 + 3p_2p_1 + \frac{2p_3}{3},$$

ce qui n'est pas un multiple de  $h_1^3$ .

Il apparaît ainsi nécessaire de se restreindre à un certain type de diagramme dans notre recherche de la récurrence perdue. Heureusement, il semble que de «faire un trou» dans le diagramme d'un partage préserve cette propriété... Soyons précis :

Soient  $\mu \vdash n + 1$  et  $(i, j)$  une case de  $\mu$ . On dénote par  $\mu/ij$  le diagramme obtenu en retirant la case  $(i, j)$  de  $\mu$ , et on considère la famille des  $H_{\mu/ij}$  :

$$H_{\mu/ij} [x; q, t] = \mathcal{F}_{q,t} (M_{\mu/ij}) . \quad (4.29)$$

Bien sûr, lorsque  $\mu/ij = \lambda \vdash n$  (c'est-à-dire que  $(i, j)$  est un coin de  $\mu$ ), nous avons

$$H_{\mu/ij} [x; q, t] = H_\lambda [x; q, t] .$$

On conjecture alors <sup>1</sup> que  $H_{\mu/ij} [x; 1, 1] = \alpha h_1^n$ . Nous pouvons mieux comprendre ce qui se produit lorsque des opérateurs différentiels symétriques sont appliqués aux  $\Delta_{\mu/ij}$ . Ceci nous donnera une valeur précise pour la constante  $\alpha$  :

**Lemme 4.1** (Bergeron *et al.*, 1999).

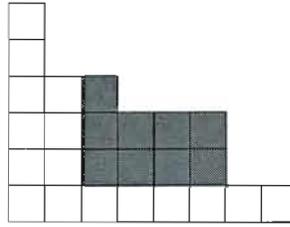
$$\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^h \partial_{y_i}^j \Delta_{\mu/ij} (x; y) = \begin{cases} \pm \Delta_{\mu/i+h, j+k} (x; y) & \text{si } (i+h, j+k) \in \mu ; \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Il est conséquence du lemme 4.1 que

$$D_x = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} : M_{\mu/ij} \rightarrow M_{\mu/i+1, j}$$

---

<sup>1</sup>c'est en fait une conséquence directe des conjectures plus fines présentées plus loin



**Figure 4.3** L'ombre de la case  $(1, 2)$  dans le partage  $(8, 6, 6, 3, 1, 1)$ .

est surjectif, de même que

$$D_y : M_{\mu/ij} \rightarrow M_{\mu/i, j+1} ,$$

où  $D_y$  est défini de façon analogue à  $D_x$ . Ainsi, il est naturel de considérer l'ombre de la case  $(i, j) \in \mu$  c'est-à-dire l'ensemble des cases de  $\mu$  se trouvant à droite et au-dessus de  $(i, j)$  :

$$\{(i', j') \in \mu : i \leq i' \text{ et } j \leq j'\} .$$

Pour toute case  $(i', j')$  dans l'ombre de  $(i, j)$ , nous avons ainsi l'inclusion de modules

$$M_{\mu/i'j'} \subseteq M_{\mu/ij} .$$

On peut alors démontrer le résultat suivant :

**Proposition 4.2** (Bergeron *et al.*, 1999). *Si on suppose que  $H_{\mu/ij}[\mathbf{x}; 1, 1] = \alpha h_1^n$ , alors la constante  $\alpha$  est égale au nombre de cases dans l'ombre de  $(i, j)$ .*

Dans le cas particulier où  $(i, j) = (0, 0)$ , nous avons

**Proposition 4.3** (Bergeron *et al.*, 1999).

$$H_{\mu/00} = \partial_{p_1} H_{\mu} .$$

La démonstration de la proposition 4.3 passe par le fait que  $M_{\mu/00}$  et  $M_{\mu}$  sont isomorphes en tant que  $\mathcal{S}_n$ -modules (en considérant  $\mathcal{S}_n$  comme un sous-groupe de  $\mathcal{S}_{n+1}$ ). On obtient un isomorphisme explicite en posant  $x_{n+1} = y_{n+1} = 0$ . En particulier, en évaluant en  $q = t = 1$ , nous obtenons que

$$H_{\mu/00}(\mathbf{x}; 1, 1) = \partial_{p_1} h_1^{n+1} = (n+1) h_1^n .$$

Notons au passage que  $n + 1$  correspond bien au nombre de cases dans l'ombre de la case  $(0, 0)$ .

Dans le cas des fonctions de Schur, nous avons une expression donnant la dérivée par rapport à  $p_1$ , connue sous le nom de *formule de Pieri* :

$$\partial_{p_1} s_\lambda = \sum_{\nu \rightarrow \lambda} s_\nu . \quad (4.30)$$

Des formules analogues ont également été établies pour les fonctions de Hall-Littlewood et les fonctions de Jack. Ces formules apparaissent comme des spécialisations d'une formule de Pieri encore plus générale donnée par Macdonald (Macdonald, 1995b) pour les  $P_\lambda$ . Nous nous intéressons ici à une version de cette formule de Pieri pour les polynômes de Macdonald transformés (Garsia et Tesler, 1996) :

$$\partial_{p_1} H_\mu = \sum_{\nu \rightarrow \mu} c_{\mu\nu}(q, t) H_\nu . \quad (4.31)$$

Les coefficients  $c_{\mu\nu}(q, t)$  sont donnés par

$$c_{\mu\nu}(q, t) = \prod_{s \in \mathcal{R}_{\mu/\nu}} \frac{t^{\ell_\mu(s)} - q^{a_\mu(s)+1}}{t^{\ell_\mu(s)} - q^{a_\mu(s)}} \prod_{s \in \mathcal{C}_{\mu/\nu}} \frac{q^{a_\mu(s)} - t^{\ell_\mu(s)+1}}{q^{a_\mu(s)} - t^{\ell_\mu(s)}} , \quad (4.32)$$

où  $\mathcal{R}_{\mu/\nu}$  (respectivement  $\mathcal{C}_{\mu/\nu}$ ) désigne l'ensemble des cases de  $\nu$  se trouvant dans la même ligne (respectivement colonne) que la case retranchée de  $\mu$  pour obtenir  $\nu$  et  $a_\mu(s)$  et  $\ell_\mu(s)$  désignent respectivement le bras et la jambe de la case  $s$  dans le partage  $\mu$ .

À la lumière de cette formule de Pieri, réécrivons la proposition 4.3 sous la forme suivante :

$$H_{\mu/00}[\mathbf{x}; q, t] = \sum_{\nu \rightarrow \mu} c_{\mu\nu}(q, t) H_\nu[\mathbf{x}; q, t] . \quad (4.33)$$

Cette égalité a pour conséquence surprenante que le membre de droite de (4.33) est *Schur-positif*, c'est-à-dire que, lorsqu'exprimé dans la base des fonctions de Schur, tous ses coefficients sont des polynômes en  $q, t$  à coefficients entiers positifs ; le coefficient de  $s_\lambda$  correspond par définition à la  $q, t$ -multiplicité de la représentation irréductible indicée par  $\lambda$  dans le  $\mathcal{S}_n$ -module  $M_{\mu/00}$ . Par exemple, nous calculons que pour  $\mu = (2, 2, 1, 1)$ , le coefficient de  $s_{(4,1)}$

dans  $\partial_{p_1} H_\mu$  est

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{(q^2 - t^2)(1+t)}{(q-t^2)} H_{(2,1,1,1)} + \frac{(1+t)}{(q-t^4)} H_{(2,2,1), s_{(4,1)}} \right\rangle = \\ & \frac{(q^2 - t^2)(1+t)}{(q-t^2)} (t^3 + t^2 + q + t) + \frac{(1+t)}{(q-t^4)} (qt + t^2 + q + t) \\ & = (1+t)(q + t^3 + 2t^2 + t + 1)(q+t) . \end{aligned}$$

Rappelons qu'en raison de l'auto-dualité de la base des fonctions de Schur, le résultat du produit scalaire  $\langle H_\mu, s_\lambda \rangle$  est le coefficient de  $s_\lambda$  dans le développement de  $H_\mu$  en terme des fonctions de Schur. Ainsi, le théorème 4.3 nous assure que de telles simplifications ne sont pas le fruit du hasard et qu'elles se produiront pour chaque calcul de coefficient  $\langle s_\lambda, H_{\mu/00} \rangle$ .

Il semble que la formule (4.33) se généralise pour  $(i, j) \in \mu$  quelconque :

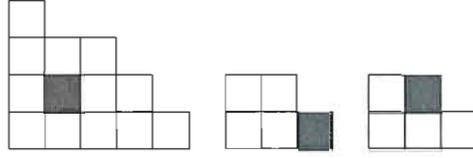
**Conjecture 1** (Bergeron *et al.*, 1999). Soit  $(i, j) \in \mu$ ; désignons par  $\tau$  le partage contenu dans l'ombre de  $(i, j)$  et, pour  $\rho \rightarrow \tau$ , dénotons par  $\mu - \tau + \rho$  le partage obtenu en remplaçant  $\tau$  par  $\rho$  dans l'ombre de  $(i, j)$ . Alors

$$H_{\mu/ij}[\mathbf{x}; q, t] = \sum_{\rho \rightarrow \tau} c_{\tau\rho}(q, t) H_{\mu - \tau + \rho}[\mathbf{x}; q, t] . \quad (4.34)$$

Cette conjecture donne une forme locale de la formule de Pieri (4.31); on ne considère ici que ce qui se passe dans l'ombre de la case  $(i, j)$ . Cette conjecture implique, de façon toujours aussi surprenante, que le membre de droite est Schur-positif. Lorsque  $(i, j) = (0, 0)$ , nous retrouvons la formule de Pieri usuelle. Par exemple, pour le partage  $\mu = (5, 4, 3, 1)$ , on calcule par cette règle

$$\begin{aligned} H_{\mu/11} &= \frac{t - q^3}{t - q^2} \frac{t - q^2}{t - q} H_{(5,3,3,1)} + \frac{1 - q^2}{1 - q} \frac{q - t^2}{q - t} H_{(5,4,2,1)} \\ &= \frac{t - q^3}{t - q} H_{(5,3,3,1)} + \frac{(1+q)(q-t^2)}{q-t} H_{(5,4,2,1)} . \end{aligned}$$

Nous avons illustré à la figure 4.4 le diagramme  $\mu/11$  et les partages qui couvrent l'ombre de  $(1, 1)$ ; les cases retirées des partages sont en noir, l'ombre de  $(1, 1)$  et les cases se trouvant dans  $\mathcal{R}_{\mu/\nu}$  ou  $\mathcal{C}_{\mu/\nu}$  sont en gris.



**Figure 4.4**  $(5, 4, 3, 1) / 11$  et les partages qui couvrent l'ombre de  $(1, 1)$ .

La récurrence que nous cherchons pourrait bien se cacher derrière cette formule de Pieri généralisée, la conjecture 1 étant équivalente à la conjecture suivante :

Si on définit la famille  $C_{\mu/ij}$  par la récurrence

$$C_{\mu/ij} = \frac{t^\ell - q^{a+1}}{t^\ell - q^a} C_{\mu/i,j+1} + \frac{t^{\ell+1} - q^a}{t^\ell - q^a} C_{\mu/i+1,j} - \frac{t^{\ell+1} - q^{a+1}}{t^\ell - q^a} C_{\mu/i+1,j+1}, \quad (4.35)$$

où  $a$  et  $\ell$  désignent respectivement le bras et la jambe de la case  $(i, j)$  dans le partage  $\mu$ , avec les condition suivantes : on considère que  $C_{\mu/ij}$  est nul si  $(i, j) \notin \mu$  et on pose  $C_{\mu/ij} = H_\lambda$  lorsque  $\mu/ij = \lambda$ . Alors on a :

**Conjecture 2** (Bergeron *et al.*, 1999). Pour tout partage  $\mu$  et  $(i, j)$  case de  $\mu$ ,

$$C_{\mu/ij} = H_{\mu/ij}.$$

Bien qu'il soit évident, à la lumière de la récurrence à quatre termes, que l'on obtienne  $H_{\mu/ij}$  comme somme de  $H_{\mu-\tau+\rho}$  pour  $\rho \rightarrow \tau$ , il est loin d'être clair que les coefficients obtenus soient précisément ceux donnés par la règle de Pieri.

Pour illustrer, reprenons  $\mu = (5, 4, 3, 1)$  et la case  $(1, 1)$ . La récurrence à quatre termes nous donne alors :

$$H_{\mu/11} = \frac{t - q^3}{t - q^2} H_{\mu/12} + \frac{t^2 - q^2}{t - q^2} H_{\mu/21} + \frac{t^2 - q^3}{t - q^2} H_{\mu/22}. \quad (4.36)$$

En appliquant de nouveau la récurrence, on trouve

$$\begin{aligned} H_{\mu/11} &= \frac{t - q^3}{t - q^2} \left( \frac{t - q^2}{t - q} H_{(5,3,3,1)} + \frac{t^2 - q}{t - q} H_{(5,4,2,1)} \right) \\ &\quad + \frac{t^2 - q^2}{t - q^2} \frac{1 - q^2}{1 - q} H_{(5,4,2,1)} - \frac{t^2 - q^3}{t - q^2} H_{(5,4,2,1)} \\ &= \frac{t - q^3}{t - q} H_{(5,3,3,1)} + \frac{(1 + q)(q - t^2)}{q - t} H_{(5,4,2,1)}, \end{aligned}$$

ce qui coïncide avec ce que nous avons calculé plus tôt avec la règle de Pieri.

Bien que la conjecture 2 ne soit toujours pas démontrée, la récurrence à quatre termes est vérifiée pour la transformée de Frobenius de la composante sans  $y$  de  $M_{\mu/ij}$  (Aval, Bergeron et Bergeron, 2002). En effet, posons

$$M_{\mu/ij}^0 = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} V_{r,0}, \quad (4.37)$$

où nous utilisons la notation (4.27), et dénotons

$$H_{\mu/ij}^0 = \mathcal{F}_{q,t} \left( M_{\mu/ij}^0 \right). \quad (4.38)$$

Par définition,  $H_{\mu/ij}^0$  s'obtient de  $H_{\mu/ij}$  en posant  $q = 0$ . Une base explicite du module  $M_{\mu/ij}^0$  a été construite (voir (Aval, Bergeron et Bergeron, 2002)), permettant de mettre en lumière les relations suivantes :

**Théorème 4.4** (Aval, Bergeron et Bergeron, 2002). *Soient  $a, \ell$  le bras et la jambe de la case  $(i, j)$  dans le partage  $\mu$ . Alors :*

- si  $a = 0$  et  $\ell > 0$ , nous avons  $H_{\mu/ij}^0 = \frac{t^{\ell+1}-1}{t^\ell-1} H_{\mu/i,j+1}^0$  ;
- si  $a > 0$ ,  $H_{\mu/ij}^0 = H_{\mu/i,j+1}^0 + t H_{\mu/i+1,j}^0 - t H_{\mu/i+1,j+1}^0$  ;
- si  $a = 0$  et  $\ell = 0$ , c'est-à-dire que  $\mu/ij = \nu \vdash n$ ,  $H_{\mu/ij}^0$  est la transformée de Frobenius du module  $M_{\nu/ij}^0$ .

Si  $(i, j)$  n'est pas une case de  $\mu$ , nous posons  $H_{\mu/ij}^0 = 0$ .

Remarquons que ce résultat concorde exactement avec ce qui est prévu par la conjecture 2.

### 4.2.3 Réinterprétation en terme de représentations du groupe symétrique

Une avenue prometteuse pour obtenir une démonstration de la récurrence à quatre termes est la réinterprétation que nous allons présenter ci-dessous. Cette démarche permet de synthétiser le contenu de la récurrence à quatre termes en une seule égalité entre transformées de Frobenius (voir 4.39). Malgré la simplicité de cette égalité, en obtenir une preuve aurait de nombreuses implications dans la théorie des polynômes de Macdonald. Permettez-nous de vous la présenter. Pour un  $\mu$  fixé, notons  $M_{ij}$  le module  $M_{\mu/ij}$ ,  $\mathbf{K}_{ij}^x$  le noyau de l'opérateur  $D_x : M_{ij} \rightarrow M_{i+1,j}$

et  $\mathbf{K}_{ij}^y$  le noyau de l'opérateur  $D_y : M_{ij} \rightarrow M_{i,j+1}$ . Rappelons que nous avons vu que  $D_x$  et  $D_y$  sont surjectifs et qu'ils ont pour effet de faire descendre de 1 le degré en  $x$  et en  $y$  respectivement. De plus, les inclusions  $M_{i,j+1} \subseteq M_{ij}$  et  $M_{i+1,j} \subseteq M_{ij}$  impliquent les inclusions suivantes pour les noyaux :

$$\mathbf{K}_{i,j+1}^x \subseteq \mathbf{K}_{ij}^x \text{ et } \mathbf{K}_{i+1,j}^y \subseteq \mathbf{K}_{ij}^y .$$

Définissons  $\mathbf{A}_{ij}^x := \mathbf{K}_{ij}^x / \mathbf{K}_{i,j+1}^x$  de même que  $\mathbf{A}_{ij}^y := \mathbf{K}_{ij}^y / \mathbf{K}_{i+1,j}^y$ . Tous ces nouveaux espaces ont bien sûr une structure de  $\mathcal{S}_n$ -modules bien définie (provenant de celles des  $M_{ij}$ ). Soient donc  $K_{ij}^x, K_{ij}^y, A_{ij}^x$  et  $A_{ij}^y$  leurs transformées de Frobenius bigraduées respectives. L'opérateur  $D_x$  étant surjectif, nous avons l'isomorphisme

$$M_{ij} \cong M_{i+1,j} \oplus K_{ij}^x ,$$

ce qui nous donne, en passant aux transformées de Frobenius et en se rappelant que  $D_x$  diminue de 1 le degré en  $x$ , l'identité

$$K_{ij}^x = H_{\mu/ij} - tH_{\mu/i+1,j} .$$

De même, on obtient

$$K_{ij}^y = H_{\mu/ij} - qH_{\mu/i,j+1} .$$

De plus, nous avons

$$A_{ij}^x = K_{ij}^x - K_{i,j+1}^x \text{ et } A_{ij}^y = K_{ij}^y - K_{i+1,j}^y .$$

À la lumière de ces relations, la récurrence à quatre termes se réécrit

$$t^\ell A_{ij}^x = q^\alpha A_{ij}^y . \tag{4.39}$$

La validité de l'identité (4.39) implique, entre autres, les conjectures 1 et 2. Démontrer cette identité (ce qui n'a été fait que pour quelques cas spéciaux, les équerres  $(n - k, 1^k)$  notamment) et en comprendre la signification en terme de théorie de la représentation pourrait ainsi permettre de donner une preuve de la récurrence à quatre termes.

#### 4.2.4 Vers une démonstration simple de la conjecture $n!$ ?

La récurrence à quatre termes ne permet pas seulement de compléter notre analogie entre les polynômes orthogonaux classiques et les polynômes de Macdonald. Elle a aussi un impact important sur la théorie des polynômes de Macdonald. Rappelons qu'un des résultats fondamentaux de cette théorie est le théorème 3.3, pour lequel nous n'avons toujours pas de preuve combinatoire. Nous allons maintenant voir comment la récurrence à quatre termes nous permettrait d'avoir une preuve que

$$H_{\mu/ij}(\mathbf{x}; q, t) = \alpha h_1^n$$

avec  $\alpha$  le nombre de cases dans l'ombre de la case  $(i, j)$ . Nous allons aussi voir qu'il en résulterait une preuve récursive de la conjecture  $n!$ . Rappelons qu'il a été montré (Haiman, 1999) qu'il suffit d'établir que  $M_\mu$  est un espace vectoriel de dimension  $(n+1)!$  pour  $\mu \vdash n+1$ .

Fixons une case  $(i, j) \in \mu$  (qui n'est pas un coin) et supposons que pour toutes les cases  $(i', j') \neq (i, j)$  dans son ombre,  $H_{\mu/i'j'}(\mathbf{x}; 1, 1) = \alpha h_1^n$  avec  $\alpha$  le nombre de cases dans l'ombre de  $(i', j')$ . Nous distinguons alors deux cas, selon que  $a = a_\mu(i, j) = 0$  ou non. Ces deux cas sont illustrés aux figures 4.5 et 4.6; nous avons indiqué le nombre de cases dans l'ombre à l'intérieur des cases.

Si  $a = 0$ , la récurrence à quatre termes donne alors

$$H_{\mu/ij} = \frac{t^{\ell+1} - 1}{t^\ell - 1} H_{\mu/i+1,j},$$

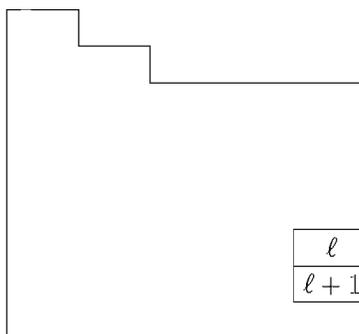
et, en posant  $q = 1$  et en faisant la limite  $t \rightarrow 1$ , on obtient bien

$$H_{\mu/ij}(\mathbf{x}; 1, 1) = \frac{\ell + 1}{\ell} \ell h_1^n = (\ell + 1) h_1^n$$

puisque, par hypothèse,  $H_{\mu/i+1,j} = \ell h_1^n$ , l'ombre de la case  $(i+1, j)$  comptant précisément  $\ell$  cases.

Si  $a > 0$ , on peut poser  $q = 1$  et obtenir

$$\begin{aligned} H_{\mu/ij}(\mathbf{x}; 1, t) &= \frac{t^\ell - 1}{t^\ell - 1} H_{\mu/i,j+1}(\mathbf{x}; 1, t) + \frac{t^{\ell+1} - 1}{t^\ell - 1} H_{\mu/i+1,j}(\mathbf{x}; 1, t) \\ &\quad - \frac{t^{\ell+1} - 1}{t^\ell - 1} H_{\mu/i+1,j+1}(\mathbf{x}; 1, t). \end{aligned}$$

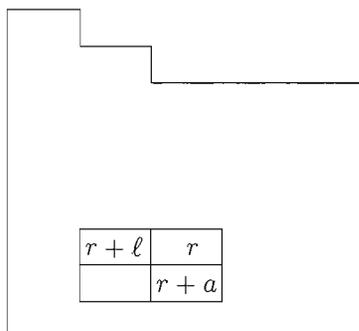


**Figure 4.5** Le cas  $a = 0$ .

Soit  $r$  le nombre de case dans l'ombre de  $(i + 1, j + 1)$ ; si  $(i + 1, j + 1) \notin \mu$ , nous prendrons évidemment  $r = 0$ . Alors le nombre de cases dans l'ombre de  $(i, j)$  (respectivement  $(i, j + 1), (i + 1, j)$ ) est  $r + a + \ell + 1$  (respectivement  $r + a, r + \ell$ ). Alors, en prenant la limite  $t \rightarrow 1$ , nous trouvons

$$H_{\mu/ij}(\mathbf{x}; 1, 1) = (r + a)h_1^n + \frac{\ell + 1}{l}(r + \ell)h_1^n - \frac{\ell + 1}{\ell}rh_1^n = (r + a + \ell + 1)h_1^n,$$

qui est exactement le résultat voulu.



**Figure 4.6** Le cas  $a > 0$ .

Supposant la récurrence à quatre termes vérifiée, nous obtenons donc que

$$H_{\mu/ij}(\mathbf{x}; 1, 1) = \alpha h_1^n$$

où  $\mu \vdash n + 1$  et  $\alpha$  est le nombre de cases dans l'ombre de  $(i, j)$ . En particulier, si  $(i, j) = (0, 0)$ , alors  $H_{\mu/00}(\mathbf{x}; 1, 1) = (n + 1)h_1^n$ , et donc  $\dim(M_{\mu/00}) = (n + 1)!$  et, en se rappelant que  $M_{\mu/00} \cong M_{\mu}$ , nous obtenons une démonstration de la conjecture  $n!$ .

### 4.2.5 Ouvertures

Obtenir une formule combinatoire analogue à (3.64) pour les  $H_{\mu/ij}$  nous aiderait probablement à démontrer la récurrence à quatre termes. Il faudrait pour cela trouver comment adapter les statistiques maj (voir (3.61)) et inv (voir (3.62)) au cas d'un remplissage d'un partage avec un trou. En fait, de nombreuses questions sont soulevées par rapport à la généralisation de ce que nous avons fait «au contexte avec trou». Par exemple, posons, en calquant (3.50),

$$J_{\mu/ij}(\mathbf{x}; q, t) = t^{n(\mu/ij)+n} C_{\mu'/ji}[\mathbf{x}(t^{-1}-1); t^{-1}, q], \quad (4.40)$$

où  $n(\mu/ij) = \sum_{c \in \mu/ij} l_{\mu/ij}(c)$  et posons également, en calquant cette fois (3.48),

$$P_{\mu/ij}(\mathbf{x}; q, t) = \frac{1}{\prod_{s \in \mu/ij} (1 - q^{a_{\mu/ij}(s)} t^{1+l_{\mu/ij}(s)})} J_{\mu/ij}(\mathbf{x}; q, t). \quad (4.41)$$

Nous avons utilisé les statistiques

$$a_{\mu/ij}(s) = \begin{cases} a_{\mu}(s) - 1 & \text{si } s = (i, k) \text{ avec } k < j; \\ a_{\mu}(s) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.42)$$

et

$$l_{\mu/ij}(s) = \begin{cases} l_{\mu}(s) - 1 & \text{si } s = (k, j) \text{ avec } k < i; \\ l_{\mu}(s) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.43)$$

c'est-à-dire que  $l_{\mu/ij}$  et  $a_{\mu/ij}$  correspondent bien au nombre de cases à l'est (respectivement nord) de la case considérée, en accord avec les cas particulier des partages (sans trou). Nous avons bien sûr pris soin d'avoir  $P_{\mu/ij} = P_{\nu}$  si  $\mu/ij = \nu \vdash n$ . Nous définissons ici les  $J_{\mu/ij}$  à partir de  $C_{\mu'/ji}$  de sorte que leur définition ne dépende pas de la validité de la conjecture 2 ; nous n'obtenons cependant de réels analogues des  $J_{\mu}$  qu'en supposant que cette dernière est vérifiée.

Nous calculons alors que les  $J_{\mu/ij}$  satisfont la récurrence suivante :

$$J_{\mu/ij} = t^{n(\mu/ij)} \left( \frac{1 - q^a t^{l+1}}{1 - q^a t^l} \frac{1}{t^{n(\mu/i+1,j)+1}} J_{\mu/i+1,j} + \frac{1 - q^{a+1} t^l}{1 - q^a t^l} \frac{1}{t^{n(\mu/i+1,j)}} J_{\mu/i,j+1} - \frac{1 - q^{a+1} t^{l+1}}{1 - q^a t^l} \frac{1}{t^{n(\mu/i+1,j+1)+1}} J_{\mu/i+1,j+1} \right),$$

Nous savons (voir (4.11)) que  $\langle P_{\lambda}, P_{\mu} \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu} \prod_{c \in \lambda} \frac{1 - q^{a(c)+1} t^{l(c)}}{1 - q^{a(c)} t^{l(c)+1}}$  ; qu'en est-il pour les  $P_{\lambda/ij}$  ? Nous avons des opérateurs de création (4.6) pour les  $J_{\lambda}$  ; peut-on trouver un analogue pour les  $J_{\lambda/ij}$  ?

Calculons quelques valeurs explicites de  $P_{\mu/ij}$ . Prenons  $\mu = 43221$  et calculons tout d'abord  $J_{\mu/20}$ . Par définition, nous avons

$$J_{43221/20}(\mathbf{x}; q, t) = t^{24} C_{5421/02}[\mathbf{x}(t^{-1} - 1); t^{-1}, q]$$

et nous calculons alors

$$J_{43221/20}(\mathbf{x}; q, t) = \frac{1 - qt^3}{(1 - qt)t^2} J_{4322}(\mathbf{x}; q, t) + \frac{(1 - q^2t)(1 - t)}{(1 - qt)t^2} J_{43211}(\mathbf{x}; q, t) .$$

Nous trouvons alors

$$\begin{aligned} P_{\mu/20} &= \frac{1}{(1 - qt^2)^2 (1 - q^3t^4) (1 - q^2t^4) (1 - q^2t^3) (1 - qt^3) (1 - t^2) (1 - t)^4} J_{\mu/20} \\ &= \frac{1}{(1 - t)t^2} P_{4322} + \frac{(1 - q^3t^5)(1 - t)}{(1 - q^3t^4)t^2} P_{43211} . \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une famille élargie de polynômes de Macdonald pour laquelle de nombreuses questions se posent.

## CONCLUSION

Ainsi, après avoir étudié les polynômes orthogonaux classiques et les polynômes de Macdonald, nous voyons que les deux théories partagent un grand nombre de points communs : les deux types de polynômes forment une base de leur espace et satisfont des conditions d'orthogonalité, de triangularité, d'unicité ; ils s'obtiennent par l'application d'opérateurs de création, ils apparaissent comme fonctions propres d'opérateurs ayant une importance en physique. La symétrie des polynômes de Macdonald s'explique par la symétrie de l'opérateur différentiel associé au modèle de Calogero-Sutherland (qui est bien sûr exigée par le contexte physique).

Les polynômes orthogonaux classiques satisfont toutefois une récurrence à trois termes de la forme (2.14), pour laquelle nous n'avons pas trouvé d'analogue direct pour les polynômes de Macdonald. . . Nous avons d'ailleurs illustré la différence entre les notions d'orthogonalité par rapport à une fonctionnelle et par rapport à un produit scalaire général en montrant que la famille  $\{g_n(x)\}$  obtenue des polynômes de Macdonald par la formule (4.9) ne saurait satisfaire une récurrence à trois termes.

Des recherches récentes (Bergeron *et al.*, 1999) suggèrent cependant que la famille élargie des  $H_{\mu/ij}$  (donnés par l'équation (4.29)) satisfont la récurrence (4.35). Les  $H_{\mu/ij}$  généralisent la construction des polynômes de Macdonald transformés  $H_{\mu}$  comme transformée de Frobenius bigraduée de certains  $\mathcal{S}_n$ -modules. Cette récurrence admet d'ailleurs une interprétation en termes de théorie de la représentation du groupe symétrique. En obtenir une démonstration permettrait d'obtenir une preuve simple de la conjecture  $n!$  pour laquelle la seule démonstration connue demande des arguments sophistiqués de géométrie algébrique (Haiman, 2003). De plus, elle permettrait de compléter notre analogie entre polynômes orthogonaux et polynômes de Macdonald. . .

La récurrence à quatre termes (4.35) s'exprime en terme d'une généralisation des polynômes de Macdonald transformés  $H_{\mu}$ . Notre étude s'étant plutôt intéressée aux  $P_{\lambda}$  et à leur renor-

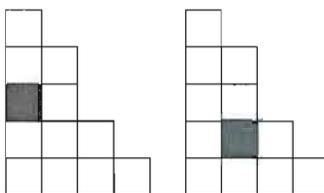


Figure 4.7  $(4, 3, 2, 2, 1) / 20$  et  $(4, 3, 2, 2, 1) / 11$ .

malisation  $J_\lambda$ , nous avons voulu en définir une généralisation à l'aide des  $H_{\mu/ij}$  (voir (4.40)). En supposant la récurrence à quatre termes vérifiée pour les  $H_{\mu/ij}$ , nous avons obtenu une récurrence pour ces  $J_{\mu/ij}$ . Cependant, des calculs explicites de valeurs des  $J_{\mu/ij}$  montrent que leurs coefficients ne sont pas, en général, des polynômes, ce qui est embêtant pour un analogue d'une forme *intégrale* ! Par exemple, nous avons calculé, pour  $\mu = (4, 3, 2, 2, 1)$  et la case  $(2, 0)$ , de bras  $a = 1$  et jambe  $\ell = 2$  que

$$J_{(\mu/20)} = \frac{1 - qt^3}{(1 - qt)t^2} J_{4322}(\mathbf{x}; q, t) + \frac{(1 - q^2t)(1 - t)}{(1 - qt)t^2} J_{43211}(\mathbf{x}; q, t) ;$$

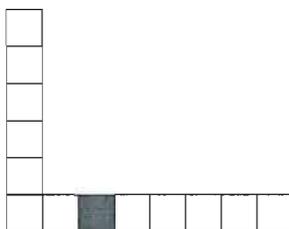
Pour le même partage mais pour la case  $(1, 1)$  qui a les mêmes valeurs de bras et jambe, on trouve

$$J_{\mu/11} = \frac{(1 - qt^3)(1 + t)}{(1 - qt^2)t} J_{(4,2,2,2,1)} + \frac{1 - q^2t^2}{(1 - qt^2)t^2} J_{(4,2,2,2,1)} .$$

Peut-on identifier le « plus petit » polynôme qui permettrait de simplifier tous les dénominateurs ? Nos exemples montrent que celui-ci ne saurait s'exprimer seulement en fonction des bras et jambes de la case retirée du partage.

La formule de Pieri généralisée (4.34) prend une forme particulièrement simple pour certaines formes particulières de partages. Prenons par exemple un rectangle  $\mu = (k^d)$  ; le partage ne comptant qu'un seul coin,  $H_{\mu/ij}$  doit être un multiple de  $H_{(k^{d-1}, k-1)}$  pour toute case  $(i, j) \in \mu$ . La règle de Pieri prévoit que ce multiple est  $[a + 1]_q [l + 1]_t$ , où  $[\alpha]_z = 1 + z + \dots + z^{\alpha-1}$ . Le cas d'un équerre est également particulièrement facile à décrire pour une case  $(i, j) \neq (0, 0)$ . En effet, soit  $\mu = (n - k + 1, 1^k)$  et  $(i, j) = (0, j)$  avec  $1 \leq j \leq n - k - 1$ . La règle de Pieri donne alors que

$$H_{(n-k+1, 1^k)/0j} = [n - k - j]_q H_{(n-k, 1^k)} .$$



**Figure 4.8** L'équerre trouée  $(8, 1^5) / 20$ .

De même, pour  $(i, 0)$  avec  $1 \leq i \leq k - 1$ , on doit avoir

$$H_{(n-k+1, 1^k) / i0} = [k - i]_t H_{(n-k+1, 1^{k-1})}.$$

En raison de leur simplicité, ces deux cas (rectangle et équerre) fournissent un bon point de départ pour une étude plus approfondie. Entre autres, les coefficients de leur développement en termes des fonctions monomiales s'expriment directement à partir de ceux donnés par la formule combinatoire (3.64) pour les polynômes de Macdonald. Une étude de ces deux cas pourrait donc suggérer des pistes sur la façon d'adapter les statistiques inv et maj aux remplissages de partage avec trou. . .

Rappelons que nous avons tenté d'obtenir des familles de polynômes orthogonaux par spécialisation des paramètres des polynômes de Macdonald, mais la symétrie de ces derniers nous en a empêché (voir la section 4.2.1). Or Macdonald a défini des *polynômes de Macdonald non symétriques* (Macdonald, 1995a) formant une base de l'espace des polynômes à  $n$  variables et satisfaisant des conditions d'orthogonalité, de triangularité, d'unicité. . . De plus, des opérateurs de création ont été trouvés pour ces polynômes (Knop, 1997). Une prochaine étape serait naturellement d'explorer plus avant cette théorie, qui demande de travailler dans le contexte des algèbres de Hecke affines doubles.

## INDEX

- inv, 58
- maj, 9, 58, 72
- $\mathcal{L}_\partial[P]$ , 8
- Bras, 5, 51, 81, 88
- Conjecture  $n$  factoriel, 56, 78, 86
- Descente, 9, 57
- Diagramme, 4, 77
  - gauche, 5
- Espace gradué, 7
- fonction de poids, 12
- Fonction génératrice, 28
- Fonctionnelle linéaire, 7, 11, 74
- Fonctionnelle linéaire
  - définie positive, 16
- Fonctions de Hall-Littlewood, 50
- Fonctions de Jack, 51, 67
- Fonctions symétriques, 34
- Fonctions symétriques
  - élémentaires, 35
  - fonctions de Schur, 37
  - fonctions de Schur gauches, 39, 41
  - homogènes, 35
  - monomiales, 33, 34
  - sommes de puissances, 36
- Formule combinatoire
  - pour les  $H_\mu$ , 59
  - pour les  $J_\mu$ , 59
- Formule de Pieri, 81
  - pour les  $H_\mu$ , 81
  - pour les  $H_{\mu/ij}$ , 82
- Formule de Rodrigues, 26, 30, 66, 68
- FPO, 11
- FPO classiques, 29
  - Polynômes d'Hermite, 12, 27, 65
  - Polynômes de Jacobi, 24
  - Polynômes de Laguerre, 27, 66
- Identité de Christoffel-Darboux, 22
- Inversion, 58
- Involution  $\omega$ , 37, 39, 41
- Jambe, 5, 51, 81, 88
- Modèle de Calogero-Sutherland, 67
- Moments, 7, 12, 16
- Mot de lecture, 72
- Nombres de Kostka, 38
- Noyau, 20
- Noyau de Cauchy, 42, 45
- Ombre, 80
- Opérateur de Macdonald, 48, 67, 68

Opérateurs de création, 64, 68

Ordre

de la dominance, 3, 39, 44

de lecture, 4, 72

lexicographique, 4

Polynômes de Macdonald, 44

forme intégrale, 52

forme transformée, 52, 76

non symétriques, 92

Polynômes de Tchebichef

de quatrième sorte, 21

de troisième sorte, 21

de deuxième sorte, 25

de première sorte, 11

Produit scalaire

de Hall, 41

de Macdonald, 43, 46

Récurrence

à quatre termes, 83

à trois termes, 17, 75

Remplissage, 57

non violent, 59

Représentation, 5

du groupe symétrique, 52

Schur-positif, 81

Sous-espace homogène, 8

Substitution pléthystique, 40, 43

Tableau semi-standard, 37

gauche, 39

Théorème

d'existence de Macdonald, 44, 52

de Favard, 20

Transformée de Frobenius, 53

bigraduée, 56, 77, 84

Zone d'attaque, 57

## BIBLIOGRAPHIE

- Andrews, Georges E., Richard Askey et Ranjan Roy. 1999. *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 71. New York : Cambridge University Press.
- Aval, Jean-Christophe, François Bergeron, Nantel Bergeron. 2002. «Lattice Diagram Polynomials in One Set of Variables». Numéro spécial de *Advances Applied Mathematics*, dédié à la mémoire de Rodica Simion, Volume 28, Issues 3-4, p. 343-359.
- Bergeron, François, 2001. *Combinatoire algébrique*. Recueil de notes, Montréal :LACIM.
- Bergeron, François, Gilbert Labelle et Pierre Leroux. 1994. *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*. Publications du Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique, vol. 19. Montréal : LACIM.
- Bergeron, François, Nantel Bergeron, Adriano Garsia, Mark Haiman et Glenn Tesler. 1999. «Lattice Diagram Polynomials and Extended Pieri Rules». *Advances in Mathematics*, Volume 142, p. 244-321.
- Cherednik, Ivan, 1995. «Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures», *Annals of Mathematics*, no 141, p. 191–216.
- Chihara, T.S. 1978. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. New York : Gordon and Breach.
- Frobenius, Ferdinand Georges. 1900. «Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe». *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, p. 516-534.
- Garsia, Adriano et Glenn Tesler, 1996. «Plethystic Formulas fo Macdonald  $q, t$ -Kostka Coefficients». *Advances in Mathematics*, vol. 123, p. 144-222.
- Haglund, Jim, Mark Haiman et Nick Loehr, 2005. «A Combinatorial Formula for Macdonald Polynomials». *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 18, no 3, p. 735-761.
- Haiman, Mark, 1999. «Macdonald Polynomials and Geometry». *New Perspectives in Geometric Combinatorics*, vol. 38, p.207-254.
- Haiman, Mark, 2003. «Combinatorics, Symmetric Functions and Hilbert Schemes». In *Current Developments in Mathematics in Honor of Wilfried Schmid and George Lusztig* (Université Harvard, Cambridge, 15-17 novembre 2002). p. 39-112. Boston : International Press Books.
- Jack, Henry, 1970. «A Class of Symmetric Functions with a Parameter». *Proceedings of the Royal society of Edinburgh (A)*, vol. 69, p. 1-18.

- James, Gordon et Martin Liebeck. 2001. *Representations and Characters of Groups*. 2<sup>e</sup> éd. Cambridge : Cambridge University Press.
- Kirillov, Alexandre A. Jr. 1997. «Lectures on Affine Hecke Algebras and Macdonald's Conjectures ». *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, vol. 34, no 3, p.251-292.
- Kirillov, Anatole N. and Masatoshi Noumi, 1999. «q-Difference raising operators for Macdonald polynomials and the integrality of transition coefficients ». *Algebraic Methods and q-Special Functions*, CRM Proceedings and Lecture Notes no 22, p. 227-243.
- Knop, Friedrich, 1997. «Integrality of Two Variable Kostka Functions ». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 482, p. 177-189.
- Krall, H.L. 1936. «On Derivatives of Orthogonal Polynomials». *American Mathematical Society Bulletin*, vol. 42, p. 423-428.
- Lapointe, Luc et Luc Vinet, 1996. «Exact operator solution of the Calogero-Sutherland model». *Communications in Mathematical Physics*, vol. 178, no 2, p. 425-452.
- Lapointe, Luc et Luc Vinet, 1997. «Rodrigues Formulas for the Macdonald Polynomials». *Advances in Mathematics*, vol. 130, no 2, p. 261-279.
- Lapointe, Luc et Luc Vinet, 1998. «A short proof of the integrality of the Macdonald  $(q, t)$ -Kostka coefficients». *Duke Mathematical Journal*, vol. 91, no 1, p. 205-214
- Macdonald, Ian Grant. 1988. «A New Class of Symmetric Functions». In *Actes 20<sup>e</sup> Séminaire Lotharingien*, p. 131-171.
- Macdonald, Ian Grant. 1995. «Affine Hecke Algebra and Orthogonal Polynomials». Séminaire Bourbaki, 47<sup>e</sup> année, exposé no 797. p. 189-207.
- Macdonald, Ian Grant. 1995. *Symmetric Functions and Hall polynomials*, 2<sup>e</sup> éd. New York : Oxford Science Publications.
- Miller, Willard Jr. 1977. *Symmetry and Separation of Variables*, éd. de Gian-Carlo Rota. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 4. Reading : Addison-Wesley Publishing Company.
- Sagan, Bruce E. 2001. *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, 2<sup>e</sup> éd. Graduate Texts in Mathematics, no. 203. New York : Springer-Verlag.
- Sansone, Giovanni, 1959. *Orthogonal Functions*, trad. de l'italien par Ainsley H. Diamond, préf. d'Einar Hille. Éd. rév. angl. Pure and Applied Mathematics, vol. 9. New York : Interscience Publishers.
- Sutherland, Bill. 1971. «Quantum Many-Body Problem in One Dimension ». *Journal of Ma-*

- thematical Physics*, vol. 12. p. 246-250.
- Stanley, Richard P., 1989. «Some Combinatorial Properties of Jack Symmetric Functions». *Advances in Mathematics*, vol. 77, p.76-115.
- Szego, Gabor. 1967. *Orthogonal polynomials*. 3<sup>e</sup> éd. Providence : American Mathematical Society.
- Viennot, Gérard, 1983. *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, Notes de conférences données au Département de mathématiques et d'informatique, UQÀM, Montréal.
- Weber, Maria et A. Erdelyi. 1952. «On the Finite Difference Analogue of Rodrigues' Formula». *The American Mathematical Monthly*, Vol. 59, No. 3, p. 163-168.
- Zabrocki, Mike, 2005. «Notes on Creation Operators ». In *American Institute of Mathematics Workshop on Generalized Kostka polynomials*, Août 2005.