UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

COMPARAISON DE LA RÉUSSITE DES ÉLÈVES DANS LA RÉDUCTION D'EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES ET NUMÉRIQUES CONTENANT DES PUISSANCES.

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PAR
JEAN-FRÉDÉRIC LACROIX

DÉCEMBRE 2006

REMERCIEMENTS

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Mme Lesley Lee, ma directrice de mémoire, dont les réponses à mes nombreuses questions ont nourri ce travail. Je ne saurais la remercier suffisamment pour sa disponibilité, son efficacité et ses précieux conseils. Je voudrais également remercier Mme Carolyn Kieran, ma co-directrice de mémoire, ainsi que Linda Gattuso, pour leur soutien dans cette recherche.

Je remercie tout particulièrement M. Gino Colavita, statisticien, qui a contribué à l'élaboration de ce mémoire par son aide généreuse dans le traitement de mes données. Je remercie également Mme Denyse Hébert, directrice des services pédagogiques au Collège Saint-Sacrement, mes collègues enseignants, Mmes Martine Jacques et Marie-Claude Lalande, MM. François Boisclair et Roberto Deraps, ainsi que leurs élèves qui ont gentiment accepté de participer à cette recherche. Merci à Mmes Nathalie Boudrias et Dominique Charette, pour leurs qualités de réviseures. Merci également à ma famille et à mes amis pour leur soutien et leur patience ainsi qu'à M. Luc Ménard, dont les encouragements m'ont été des plus précieux.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX v

RÉSUMÉ viii

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I
PROBLÉMATIQUE 3

1.1 ORIGINE DE LA QUESTION DE RECHERCHE 3

1.2 CONTENU DES PROGRAMMES 5

1.3 ÉTUDE DE MANUELS SCOLAIRES 9

1.3.1 «*Scénarios 3*» 9
1.3.2 «*Carrousel mathématique 3*» 11
1.3.3 «*Réflexions mathématiques 436*» 13
1.3.4 Analyse des trois manuels 15

1.4 ARTICULATION ARITHMÉTIQUE/ALGÈBRE 16

1.5 D'AUTRES APPROCHES POUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ARITHMÉTIQUE ET DE L'ALGÈBRE 20

1.5.1 Le programme "*Measure Up*" 20
1.5.2 L'approche "*Theoretical Learning*" 23

1.6 RECHERCHE DE MAGGIE P. H. WONG (1997) 25

1.7 QUESTION DE RECHERCHE 27

CHAPITRE II
ÉLÉMENTS DE MÉTHODOLOGIE 29

2.1 LEÇONS MÉTHODOLOGIQUES DE LA MINI RECHERCHE 29

2.2 CHOIX DE L'OUTIL D'EXPÉRIMENTATION 31

2.3 PRÉSENTATION DES RÉPONDANTS 32

2.4 QUESTIONNAIRE 34

2.4.1 Première version du questionnaire 34
2.4.2 Banque de questions 36
2.4.3 Version finale du questionnaire 44

2.5 COLLECTE ET COMPILATION DES DONNÉES 47

2.5.1 Les tests de McNemar et Q de Cochran 48

CHAPITRE III
RÉSULTATS 53

3.1 DÉROULEMENT DE L'EXPÉRIMENTATION 53

3.2 SOMMAIRE DES RÉSULTATS 54

3.2.1 Bases numériques ou algébriques et exposants numériques 58
3.2.2 Bases numériques ou algébriques et exposants algébriques 60
3.2.3 Bases numériques, exposants numériques ou algébriques 62
3.2.4 Bases algébriques et exposants numériques ou algébriques 64
3.2.5 Expressions purement numériques et algébriques 68
3.2.6 Expressions dont certains exposants sont équivalents à 1 71
3.2.7 Questions dont l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul 73
3.2.8 Produits et quotients de puissances 76
3.2.9 Nombres positifs plus grands : exposants de la même forme 77
3.2.10 Nombres positifs plus grands : bases de la même forme 80
3.2.11 Les dix questions les mieux réussies 83
3.2.12 Les dix questions les moins biens réussies 85

3.3 SYNTHÈSE DES RÉSULTATS 93

3.4 RÉPONSE À LA QUESTION DE RECHERCHE 93

CONCLUSION 95

APPENDICE A
PREMIÈRE VERSION DU QUESTIONNAIRE 99

APPENDICE B
VERSION FINALE DU QUESTIONNAIRE 104

APPENDICE C
VERSION RÉSUMÉE DU TABLEAU DE COMPILATION 108

APPENDICE D
TABLEAUX PRÉSENTANT TOUS LES RÉSULTATS SIGNIFICATIFS OU NON-SIGNIFICATIFS 112

APPENDICE E
TABLEAUX PRÉSENTANT LES CAS POUR LESQUELS LE POURCENTAGE DE RÉUSSITE GLOBAL EST PLUS ÉLEVÉ POUR LES EXPRESSIONS PRÉSENTANT DES BASES OU DES EXPOSANTS ALGÉBRIQUES OU NUMÉRIQUES 121

RÉFÉRENCES 125

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
2.1	Catégories 1 et 2 : produit de puissances	37
2.2	Catégories 3 et 4 : quotient de puissances	39
2.3	Catégorie 5 : nombres positifs plus grands (exposants de la même forme)	41
2.4	Catégorie 5 : nombres positifs plus grands (bases de la même forme)	42
2.5	Catégorie 6 : produit et quotient de puissances	43
2.6	La statistique Z - Cas général	49
2.7	La statistique Z – Exemple	49
2.8	La statistique Q - Cas général	50
2.9	La statistique Q – Exemple	51
3.1	Comparaison des résultats avec les données de Wong	55
3.2	Comparaison des résultats avec les données de la mini recherche	56
3.3	Bases numériques ou algébriques, exposants numériques	58
3.4	Bases numériques ou algébriques, exposants algébriques	60
3.5	Exposants numériques ou algébriques, bases numériques	62
3.6	Exposants numériques ou algébriques, bases algébriques	65
3.7	Expressions purement numériques ou algébriques	68
3.8	Expressions dont certains exposants sont équivalents à 1	71
3.9	Questions dont l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul	74
3.10	Produits et quotients de puissances	76

3.11 Nombres positifs plus grands : exposants de la même forme........................78

3.12 Nombres positifs plus grands : bases de la même forme.............................81

3.13 Les dix questions les mieux réussies..84

3.14 Les dix questions les moins bien réussies...85

3.15 Couples d'expressions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants algébriques 88

3.16 Couples d'expressions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants numériques 90

C.1 Version résumée du tableau de compilation : résultats pour toutes les expressions du questionnaire...109

D.1 Bases numériques ou algébriques, exposants numériques..............................113

D.2 Bases numériques ou algébriques, exposants algébriques.............................114

D.3 Exposants numériques ou algébriques, bases numériques..............................115

D.4 Exposants numériques ou algébriques, bases algébriques.............................115

D.5 Expressions purement numériques ou algébriques.....................................116

D.6 Expressions dont certains exposants sont équivalents à 1...........................117

D.7 Expressions dont l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul...117

D.8 Produits et quotients de puissances...118

D.9 Nombres positifs plus grands : exposants de la même forme.........................119

D.10 Nombres positifs plus grands : bases de la même forme.............................120

E.1 Les expressions algébriques ayant les pourcentages de réussite globaux plus élevés que les expressions numériques correspondantes (tous les cas, particuliers ou non)...122

E.2 Les expressions numériques ayant les pourcentages de réussite globaux plus élevés que les expressions algébriques correspondantes (tous les cas, particuliers ou non)....................123

RÉSUMÉ

Plusieurs recherches ont analysé les difficultés des élèves en algèbre, ainsi que les discontinuités entre les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre. Souvent, les élèves n'ont pas une bonne compréhension des relations entre ces domaines. Cette recherche s'intéresse à ce phénomène à travers la notion de réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances. Ce mémoire tente de répondre à la question de recherche suivante : est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances ?

Un questionnaire composé d'expressions semblables à réduire a été soumis à des élèves de 3^e^ à 5^e^ secondaire. Ces expressions présentaient des produits de puissances, des quotients de puissances, ainsi que des expressions mixtes. Chaque expression numérique contenant des puissances a été associée à une expression algébrique semblable contenant des puissances. Aussi, certains triplets de questions ont été déterminés. On a comparé les pourcentages de réussite aux questions associées pour l'ensemble des répondants.

L'interprétation des résultats a montré que la réussite des élèves à réduire des expressions algébriques ou numériques contenant des puissances dépend de plusieurs facteurs. Mais, en spécifiant qu'il y a certaines exceptions, les résultats indiquent une tendance : les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des bases algébriques, plutôt que des bases numériques mais souvent, ils réussissent mieux à réduire des expressions présentant des exposants numériques plutôt que des exposants algébriques.

Mots-clefs : arithmétique et algèbre, puissances, expressions algébriques, expressions numériques, expressions avec exposants.

INTRODUCTION

Le sujet de ce mémoire est la comparaison de la réussite des élèves dans la réduction d'expressions algébriques et numériques contenant des puissances. L'élément déclencheur de ce travail a été une mini recherche sur la notion de puissance négative, que j'ai élaborée dans le cadre du cours d'initiation à la recherche du programme de la maîtrise en didactique des mathématiques. Certains résultats avaient permis de conclure que les élèves réussissaient mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances. Ce mémoire a pour but de savoir si cette observation concernant la réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances est encore vérifiée si on en fait une étude plus approfondie. Ce travail est élaboré dans le cadre du programme de la maîtrise en didactique des mathématiques.

Ce mémoire est séparé en trois chapitres. Le chapitre I présente la problématique dans laquelle ce travail se situe. On présentera un survol de l'approche scolaire en lien avec le sujet de cette recherche. Nous décrirons certaines recherches traitant de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre, ainsi que certains systèmes d'éducation qui proposent des approches non traditionnelles pour l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. Ce chapitre se termine par la présentation de la question de cette recherche.

En second lieu, au chapitre II, on retrouve une description de la méthodologie employée afin de répondre à la question de recherche et à ses sous questions. Ce chapitre débute par un retour sur une mini recherche élaborée dans le cadre du cours d'initiation à la recherche, qui est en lien avec le sujet de ce travail, afin d'en tirer des leçons méthodologiques. On présentera le questionnaire qui servira à répondre à la question de recherche ainsi que les répondants qui participeront à l'expérimentation. Ce chapitre se termine par des explications sur la collecte et la compilation des données.

Finalement, on retrouve au chapitre III, la description, l'analyse et l'interprétation des résultats. On présente tout d'abord le déroulement de l'expérimentation. Ensuite, les résultats obtenus lors de l'expérimentation seront présentés et analysés. La dernière section de ce chapitre présente une interprétation des résultats. Nous tenterons de voir si, à la lumière des résultats, nous pouvons répondre à la question de recherche, ainsi qu'à ses sous questions.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

Le premier chapitre de cette recherche présente la problématique dans laquelle ce travail se situe. Comme son titre l'indique, cette recherche comparera la réussite des élèves dans la réduction d'expressions algébriques et numériques contenant des puissances. Dans un premier temps, nous élaborerons sur l'origine de la question de recherche. Ensuite, à travers l'étude du curriculum scolaire de niveau secondaire en mathématiques et de manuels scolaires québécois, nous ferons un survol de l'approche scolaire, en lien avec la notion de réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances et, plus généralement, avec l'apprentissage de l'arithmétique et de l'algèbre.

Nous présenterons également certaines recherches traitant de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre ainsi que certains systèmes d'éducation proposant des approches non traditionnelles pour l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. Aussi, on résumera une recherche élaborée par Maggie P. H. Wong (1997), qui traite des difficultés des élèves lorsqu'ils ont à appliquer des procédures identiques à travers la manipulation d'expressions algébriques semblables.

Enfin, nous énoncerons la question de recherche, ainsi que ses sous questions.

1.1 Origine de la question de recherche

C'est bien connu, les élèves ont des difficultés en algèbre à tous les niveaux du secondaire. Au collège où j'enseigne, comme dans plusieurs écoles secondaires probablement, un accent particulier est porté en 3^{e} secondaire sur l'objectif terminal 1.3 du programme, afin de mieux préparer les élèves pour les notions d'algèbre vues en 4^{e} et 5^{e} secondaire. Cet objectif de l'ancien programme *Mathématique 314* (Québec, 1995) traite de la transformation d'expressions arithmétiques ou algébriques en expressions équivalentes. Il est à noter que le nouveau régime pédagogique n'est pas encore en application en 3^e secondaire en 2006. Le collège où j'enseigne offre même en fin d'année un supplément algébrique, un programme d'enrichissement, visant à mieux préparer les élèves aux programmes de mathématiques de 4^e secondaire. Les transformations d'expressions algébriques en des expressions équivalentes prennent donc beaucoup d'importance durant leur cheminement en cours d'année scolaire. J'ai remarqué plus particulièrement que les élèves ont beaucoup de difficulté à manipuler des expressions algébriques contenant des puissances, surtout lors de l'application des propriétés des exposants à la transformation d'expressions. Cela m'a amené à me questionner sur l'approche à privilégier lors de l'enseignement de cette notion. Pour pouvoir ajuster mon tir, j'ai voulu comprendre davantage la compréhension des élèves des transformations d'expressions algébriques contenant des puissances.

J'ai étudié ce sujet dans le cadre d'un cours d'initiation à la recherche en 2003, à la maîtrise en didactique des mathématiques à l'Université du Québec à Montréal. L'objectif général de ma mini recherche était d'identifier les raisonnements des élèves, les sources de leurs erreurs et de leurs difficultés avec la notion de puissance en calcul algébrique. J'ai remarqué que les élèves éprouvaient des difficultés avec la notion de puissance négative en particulier. Or, cette recherche était axée sur la notion de puissance négative.. Un des résultats à cette recherche a retenu mon attention. Contrairement à ce à quoi je m'attendais, l'interprétation des résultats m'avait permis de conclure que les élèves réussissaient mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances.

C'est ce constat qui est à l'origine de la question de cette présente recherche. J'ai voulu poursuivre ce que j'avais amorcé, parce que, pour moi, ce constat était surprenant. Je croyais plutôt le contraire, c'est-à-dire que les élèves réussissaient mieux à réduire des expressions numériques contenant des puissances que des expressions algébriques. Étant donné que le sujet principal de la mini recherche était la notion de puissance négative, le questionnaire qui avait été soumis aux élèves était orienté en fonction de cette notion. Ainsi, seulement certains résultats ont permis de conclure que les élèves réussissaient mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances. Or, j'aimerais vérifier si cette observation concernant la réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances est toujours pertinente si on en fait une étude plus approfondie.

Si certains résultats de ma mini recherche ont permis d'observer que les élèves réussissaient mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances, est-ce parce que l'approche scolaire priorise la manipulation d'expressions algébriques, plutôt que d'expressions numériques? Qu'en est-il de l'approche préconisée par le programme d'études de mathématiques au secondaire? Quel lien fait-on entre l'arithmétique et l'algèbre dans ces programmes? La prochaine section de ce chapitre présente une analyse du contenu du programme scolaire du secondaire, en lien avec la notion de réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances, mais aussi, plus généralement, en lien avec l'apprentissage de l'arithmétique et de l'algèbre.

1.2 Contenu des programmes

Dans le programme d'études québécois de mathématiques, l'étude de la réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances est amorcée en 3e année du secondaire. En 4e et 5e secondaire, l'élève va poursuivre son acquisition de techniques opératoires algébriques surtout à travers les programmes *Mathématique* 426, 436, 526 et 536. La clientèle visée par cette recherche sera composée d'élèves de 3e à la 5e année du secondaire. En 4e et 5e année du secondaire, ces élèves proviendront des groupes 426, 436, 526 et 536. Ce choix sera justifié plus loin dans le chapitre sur la méthodologie. Puisque ces élèves n'ont pas été touchés par la réforme actuelle des programmes d'études québécois, il ne sera pas question dans cette recherche du nouveau programme d'études du 1er cycle du secondaire. L'approche des anciens programmes de 1re et 2e secondaire ainsi que des programmes actuels de 3e, 4e (426 et 436) et 5e (526 et 536) secondaire sera analysée. Aussi, il est à noter qu'il n'est pas question des programmes d'études 416 et 514 dans ce travail puisqu'ils ne traitent pas spécifiquement des techniques opératoires en algèbre.

Le programme d'études *Mathématique 116* vise l'acquisition de préalables à l'apprentissage de l'algèbre. On prépare l'élève à cet apprentissage en favorisant «le passage de l'arithmétique à l'algèbre en assurant la maîtrise de certaines habiletés arithmétiques» (Québec, 1993, p. 23) et en lui faisant réaliser les différences entre l'algèbre et l'arithmétique. L'élève est amené à généraliser certaines situations dont le contexte est arithmétique. On veut que le contexte des nombres naturels amène l'élève à acquérir des habiletés qui seront importantes en algèbre c'est-à-dire donner du sens à la relation d'égalité et exploiter les propriétés des opérations et de l'égalité. Cet objectif général lié à l'apprentissage de l'algèbre n'est pas associé à des objectifs spécifiques (terminaux ou intermédiaires). Par contre, les objectifs qui y sont liés se retrouvent dans les objectifs portant sur les nombres et les mesures.

La manipulation algébrique ne fait donc pas partie des objectifs du programme de première secondaire. Par contre, on peut relier la notion de réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances avec la notion de notation exponentielle à l'étude en première secondaire. Plus spécifiquement, à travers l'acquisition du sens du nombre et des opérations, l'élève aura à associer une puissance d'un nombre naturel à sa notation exponentielle et vice versa.

De l'acquisition de préalables à l'apprentissage de l'algèbre du programme de la 1re secondaire, on passe en 2^{e} secondaire à l'accroissement de l'habileté à utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes. L'objectif terminal 1.2 du programme d'études *Mathématique 216* (Québec, 1994) concerne la résolution de problèmes se traduisant par une équation du premier degré. On précise que l'élève devrait voir l'importance et l'utilité de l'algèbre si on lui présente des problèmes où l'algèbre est un moyen de solution plus efficace que l'arithmétique. On souligne aussi que cet apprentissage ne devrait pas être axé sur la manipulation d'expressions algébriques, mais sur «un besoin de l'élève de résoudre des équations du premier degré qu'il aura conçues» (Québec, 1994, p. 26). À travers cet objectif, les élèves travaillent la traduction d'un énoncé de problème en une équation et vice versa, la somme et la différence d'expressions algébriques à une variable, certains produits et quotients d'expressions algébriques à une variable et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue.

L'objectif général 1 du programme d'études *Mathématique 314* (Québec, 1995) vise à favoriser chez l'élève l'utilisation de l'algèbre comme outil de généralisation. Plus spécifiquement, l'objectif terminal 1.3 concerne la transformation d'expressions arithmétiques ou algébriques en expressions équivalentes. En premier lieu, l'élève doit effectuer des opérations sur des expressions arithmétiques contenant des puissances et généraliser les propriétés de ces opérations, pour ensuite les appliquer à des expressions algébriques. On suggère de mettre l'accent sur la compréhension plutôt que sur les techniques et de réutiliser les habiletés acquises sur le sens du nombre et des opérations. En travaillant les propriétés des exposants, l'élève doit voir l'utilité de l'algèbre en tant qu'outil de généralisation.

C'est en 3^e secondaire que la notion de produit et de quotient de puissances est travaillée spécifiquement pour la première fois. À ce niveau, les élèves effectuent des opérations sur des expressions contenant des exposants et appliquent les propriétés des exposants entiers positifs aux expressions arithmétiques et algébriques. Ensuite, l'élève va poursuivre l'acquisition de techniques de manipulations algébriques. Il va calculer la somme et la différence de polynômes, le produit d'un monôme par un polynôme et d'un binôme par un binôme ainsi que le quotient d'un polynôme par un monôme. Évidemment, les propriétés des exposants seront utilisées lors de ce calcul algébrique.

De l'acquisition de préalables à l'apprentissage de l'algèbre, à l'accroissement de l'habileté à utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes, à l'utilisation de l'algèbre comme outil de généralisation, on passe en 4^e secondaire à l'accroissement de l'habileté à utiliser l'algèbre. L'élève va poursuivre son acquisition de techniques opératoires algébriques au niveau, entre autres, de la théorie des exposants et des opérations sur des expressions algébriques. Dans les programmes *Mathématique 426* (Québec, 1999) et *Mathématique 436* (Québec, 1996), le principal objectif terminal en lien avec la notion de réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances vise la transformation d'expressions algébriques en expressions équivalentes. L'élève doit appliquer les définitions et les propriétés des exposants à la transformation d'expressions algébriques. En 436, ces exposants sont rationnels. En 426, les exposants sont entiers et on ne met pas l'accent sur les exposants rationnels. Aussi, pour ces deux programmes, l'élève effectue les opérations sur des expressions algébriques, en particulier sur les polynômes, et il décompose en facteurs un polynôme donné. Évidemment, l'utilisation des propriétés des exposants sera utile à travers d'autres sujets étudiés dans les programmes 426 et 436, comme par exemple l'analyse de fonctions polynomiales de degré inférieur à trois et la résolution de problèmes à l'aide d'un système d'équations à deux variables.

Comme en 4^{e} secondaire, un des objectifs généraux des programmes *Mathématique 526* (Québec, 1999) et *Mathématique 536* (Québec, 1996), de 5^{e} secondaire, est d'accroître chez l'élève l'habileté à utiliser l'algèbre. Pour l'atteinte de l'objectif terminal 1.3 visant à transformer des expressions réelles en des expressions équivalentes, l'élève devra utiliser ses habiletés en algèbre, entre autres les techniques acquises en lien avec les propriétés des exposants rationnels. Aussi, ces techniques seront utiles pour l'étude d'autres sujets dans les programmes 526 et 536, comme par exemple l'étude des fonctions à variables réelles et des lieux géométriques.

Suite à ce survol des programmes d'études en mathématiques de la 1re à la 5^{e} année du secondaire, on remarque une évolution de l'étude de l'arithmétique et de l'algèbre à travers les niveaux. Ces programmes suggèrent que l'arithmétique est la base de la compréhension algébrique. On vise le renforcement arithmétique pour faciliter le passage à l'algèbre. En effet, en 1re secondaire, on prépare l'élève à l'apprentissage de l'algèbre par la maîtrise d'habiletés arithmétiques. À ce niveau, on présente l'algèbre comme un outil qui sert à généraliser des situations dont le contexte est arithmétique. Ensuite, en 2^{e} secondaire, en résolution de problèmes, on passe à l'algèbre en la présentant comme un moyen de solution plus efficace que l'arithmétique. Cette approche du passage de l'arithmétique à l'algèbre est encore plus évidente en 3^{e} secondaire car on travaille d'abord les opérations sur des expressions arithmétiques contenant des puissances. On utilise ce travail pour généraliser les propriétés de ces opérations, pour ensuite les appliquer à des expressions algébriques. Il est clair que l'on vise à renforcer la notion de puissance en arithmétique afin de préparer les élèves à leur présence en algèbre. Une étude plus formelle de l'algèbre se poursuit après en

4e et 5e secondaire. Dans les programmes de ces niveaux, l'étude de l'arithmétique n'est plus présente spécifiquement.

On peut donc dire que le renforcement arithmétique se produit davantage de la 1re à la 3e secondaire, pour que le passage à l'étude plus formelle de l'algèbre soit facilité en 4e et 5e secondaire. Maintenant, qu'en est-il des manuels scolaires? Suivent-ils le même raisonnement? La prochaine section de ce chapitre présente une analyse du contenu de certains manuels scolaires concernant la notion de réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances. Puisque cette notion est travaillée spécifiquement en 3e secondaire, deux manuels de ce niveau seront analysés. Aussi, puisque la théorie des exposants est retravaillée en 4e secondaire, un manuel scolaire de ce niveau sera étudié.

1.3 Étude de manuels scolaires

Les deux manuels de 3e secondaire présentés dans cette analyse ont été choisis parce qu'ils sont assez différents quant à leur approche et parce que ce sont les deux collections les plus utilisées dans les écoles secondaires du Québec. Le premier manuel présenté, des auteurs Guay et Lemay (1995), est «*Scénarios 3*». Le second manuel, «*Carrousel mathématique 3*», a pour auteurs Breton et Morand (1995). Le manuel de 4e secondaire étudié est «*Réflexions mathématiques 436*» des auteurs Breton, Deschênes et Ledoux (1996).

1.3.1 «*Scénarios 3*»

Le manuel «*Scénarios 3*» présente une approche axée sur la résolution de problèmes. Une situation problème est accompagnée de sections présentant des notions mathématiques, nécessaires pour sa résolution. Les propriétés des exposants sont traitées à travers les sections traitant des notions d'algèbre.

Le produit de puissances est amené dans une section qui a pour sujet la multiplication d'un monôme par un polynôme et d'un binôme par un binôme. Suite à un rappel suggérant qu'un exposant «indique le nombre de fois qu'un nombre apparaît comme facteur» (Guay et Lemay, 1995, p. 331), une pratique demande à l'élève d'exprimer par un produit de facteurs des expressions arithmétiques (par exemple, $8^5 \times 8^5 \times 8$) et d'indiquer le nombre de fois où les nombres apparaissent comme facteur. Les auteurs font alors le lien avec cette pratique et ces équivalences:

$$2^3 \times 2^2 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^{(3+2+4)} = 2^9 .$$

Ensuite, le même raisonnement est présenté avec une expression algébrique : $y^2 \times y \times y^3$. Finalement, on utilise le langage algébrique pour généraliser la première propriété. On montre que $m^a \times m^b$ est équivalent à m^{a+b} en expliquant que m apparaît *(a + b)* fois comme facteur. Cette section se termine par une série de huit expressions à réduire.

La partie traitant du quotient de puissances se retrouve dans une section qui a pour sujet la division d'un polynôme par un monôme. Les auteurs présentent une séquence semblable à celle du produit de puissances. Ainsi, suite à un rappel sur la notion d'exposant, on demande à l'élève d'effectuer les quatre opérations sur des expressions numériques contenant des puissances : $6^5 + 6^3$, $6^5 - 6^3$, $6^5 \times 6^3$ et $6^5 \div 6^3$. Pour calculer le quotient, on précise qu'il est utile d'exprimer l'expression à l'aide de multiplications de facteurs :

$$6^5 \div 6^3 = \frac{6^5}{6^3} = \frac{6\times6\times6\times6\times6}{6\times6\times6} = \frac{6\times6}{1} = 6^2$$

Ensuite, on fait le même raisonnement avec l'expression $5^2 \div 5^8$, sans toutefois traiter des exposants négatifs. Une pratique suit, et avec des expressions comme $\frac{8^5\times10^6}{10^2}$, on y demande d'indiquer le nombre de fois que les nombres apparaissent comme facteur au numérateur et au dénominateur et de donner ensuite une expression réduite comportant au moins une expression exponentielle.

Cette pratique est suivie par un même raisonnement avec une expression algébrique : $m^7 \div m^3$. Comme dans l'autre section, on utilise le langage algébrique pour généraliser cette propriété. On montre que $m^a \div m^b$ est équivalent à m^{a-b} en expliquant que m apparaît *(a - b)* fois comme facteur.

Les auteurs traitent ensuite brièvement des exposants négatifs en utilisant des expressions arithmétiques. On applique la deuxième propriété à l'expression $\frac{5^2}{5^8}$ et on obtient 5^{-6}. Puisqu'il avait été démontré que $\frac{5^2}{5^8} = \frac{1}{5^6}$, on conclut que $5^{-6} = \frac{1}{5^6}$. On indique que le signe négatif devant le 6 indique que 5 apparaît 6 fois comme facteur au dénominateur. Finalement, une pratique termine cette section. On y présente huit expressions à réduire.

Étant donné l'approche par résolution de problèmes du manuel «*Scénarios 3*», les auteurs n'insistent pas sur un travail d'application des propriétés des exposants à la transformation d'expressions numériques. Par contre, on remarque que les auteurs respectent l'esprit du programme d'études de 3e secondaire en introduisant des expressions numériques contenant des puissances qui servent ensuite à généraliser les propriétés des exposants. Ensuite, on les applique à des expressions algébriques. Maintenant, comment traduire ce passage entre des expressions numériques contenant des puissances et des expressions algébriques contenant des puissances, lorsque l'approche d'un manuel scolaire est plus traditionnelle? La prochaine section présente les caractéristiques d'un autre manuel scolaire de 3e secondaire.

1.3.2 «*Carrousel mathématique 3*»

Le manuel «*Carrousel mathématique 3*» propose une approche plus traditionnelle, c'est-à-dire que l'on présente des mises en situation pour amener des notions mathématiques. Ces explications sont suivies de nombreux exercices et de problèmes d'application. Les propriétés des exposants sont traitées dans un chapitre qui porte sur le calcul algébrique. Ce chapitre est divisé en deux grandes parties : les propriétés des exposants et les quatre opérations sur les polynômes.

La première partie traitant des propriétés des exposants a pour finalité l'étude du produit et du quotient de puissances au niveau algébrique. Tout d'abord, par deux activités, les auteurs font un retour sur la notion de notation exponentielle. On y traite d'expressions exponentielles dont les exposants sont positifs et dont les bases sont arithmétiques. La calculatrice est utilisée afin de traiter d'expressions dont la base est égale à 1, dont l'exposant est 1, 0 , ½ ou un nombre négatif. L'élève doit ensuite expliquer la signification à attribuer à un exposant négatif. Entre autres, on demande aussi à l'élève de trouver une expression équivalente à m^{-a}. Cette section se termine par un tableau qui résume cinq définitions à retenir ($m^a=1$, $m^1=m$, $m^0=1$, $m^{-a}=\frac{1}{m^a}$ et $\sqrt{m}=m^{\frac{1}{2}}$) et par plusieurs exercices.

Dans la section suivante, les auteurs font le lien entre la notion d'exponentiation et la notation scientifique. On présente la notation scientifique comme une notation qui utilise les puissances de 10. On y traite des puissances positives et négatives de 10. Ces explications sont suivies d'exercices.

Cette première partie se termine par l'étude de deux propriétés des exposants (produit et quotient de puissances). Cette section traite de ces propriétés presque exclusivement au niveau arithmétique. Pour la première activité sur le produit de puissances, on présente des produits de puissances de 2 et on demande d'identifier l'exposant qui manque pour leurs correspondances (par exemple, $4\times16=64$ correspond à $2^2\times2^4=2^?$). Les élèves découvrent ensuite la propriété et vérifient si elle s'applique avec des puissances de 10. Aussi, on demande de vérifier certaines égalités formées d'expressions numériques contenant des puissances et de réduire des expressions algébriques présentant des puissances. On suscite certaines réflexions sur la somme d'exposants dans le produit de bases différentes ou sur la somme d'exposants dans la somme de mêmes bases. La première propriété est ensuite énoncée pour toute base *m* différente de 0 et pour des exposants entiers : $m^a \cdot m^b = m^{a+b}$.

De la même façon qu'à la première activité, la deuxième activité présente des quotients de puissances de 2 pour lesquelles on demande d'identifier l'exposant qui manque pour leurs correspondances. Suite à la découverte de la deuxième propriété, on demande de la vérifier pour des puissances de 10. Aussi, on demande de vérifier certaines égalités formées d'expressions numériques contenant des puissances et de réduire des expressions algébriques présentant des puissances. On présente ensuite des questions de discussion semblables à la partie précédente. La deuxième propriété vient ensuite : pour toute base *m* différente de 0 et pour des exposants entiers on a que $m^a \div m^b = m^{a-b}$. De nombreux exercices suivent cette section. Ils portent en grande majorité sur des expressions numériques contenant des puissances. Quelques exercices touchent à des expressions algébriques. La seconde partie de cet itinéraire traite des opérations sur les polynômes. Les propriétés des exposants sont réutilisées dans cette section.

En résumé, on peut observer que les auteurs du manuel «*Carrousel mathématique 3*» prennent le temps de travailler l'exponentiation avant d'en arriver à la manipulation algébrique. Les deux propriétés sont introduites par un travail sur des expressions numériques. Les auteurs insistent beaucoup sur un travail d'application des propriétés des exposants à la transformation d'expressions numériques. Les propriétés sont généralisées algébriquement mais la première section s'en tient à ce travail d'application.

Tel que mentionné dans une section précédente, une étude plus formelle de l'algèbre se poursuit plus tard en 4^e et 5^e secondaire. Dans les programmes de ces niveaux, l'étude de l'arithmétique n'est plus présente spécifiquement. Mais comment sont introduites les lois des exposants dans un manuel de 4^e secondaire? Est-ce que les auteurs vont directement à des énoncés algébriques ou réactivent-ils ces notions par l'arithmétique? La prochaine section présente les caractéristiques d'un manuel scolaire de 4^e secondaire.

1.3.3 «*Réflexions mathématiques 436*»

Le manuel «*Réflexions mathématiques 436*» présente une structure semblable à celle du manuel «*Carrousel mathématique 3*». Ces deux volumes sont publiés par la même maison d'édition. Les propriétés des exposants sont traitées à travers le chapitre qui porte sur le calcul algébrique.

La première partie de ce chapitre traite de la notion d'exposant réel. Les auteurs font tout d'abord un retour sur la notion d'exposant entier. Les exposants fractionnaires et réels sont ensuite étudiés. Des mises en situation faisant toujours appel à des expressions numériques introduisent ces notions. Des exercices accompagnent ces sections et ils traitent majoritairement d'expressions numériques contenant des puissances. Pour ce premier sujet, les auteurs présentent un tableau qui précise la signification particulière de chaque type d'exposants : a^m, a^1, a^0, a^{-m}, $\sqrt[n]{a}$ et $\sqrt[n]{a^m}$.

Le deuxième sujet porte sur les lois des exposants : le produit de puissances, le quotient de puissances, la puissance d'un produit, la puissance d'une puissance et la puissance d'un quotient. D'emblée, chaque loi est énoncée algébriquement dans un encadré. Il n'y a pas de justifications. Chaque loi est accompagnée de deux exemples : un premier présentant des expressions numériques et un autre présentant des expressions algébriques. Le questionnement qui suit chaque loi est sensiblement le même d'une loi à l'autre. Par exemple, la première loi est énoncée ainsi : si $a \in \mathbf{R}$ et $m, n \in \mathbf{N}$, alors $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (si a est élément des nombres réels et si m et n sont éléments des nombres naturels). On demande à l'élève d'expliquer en ses propres mots chaque loi et de dire pourquoi elle ne peut s'appliquer pour certaines expressions numériques, comme $3^4 \times 2^3$ par exemple. Aussi, l'élève doit utiliser les définitions des exposants pour vérifier que la loi s'applique dans le cas d'exposants entiers négatifs à travers des expressions numériques comme $3^{-2} \times 3^{-4}$. Finalement, on demande de faire la même chose pour des exposants fractionnaires, en utilisant la calculatrice à affichage graphique. Plusieurs exercices présentant des expressions numériques précèdent d'autres exercices présentant des expressions algébriques.

Dans la cinquième partie du chapitre, qui traite des opérations sur les polynômes, la loi du produit de puissances est réutilisée dans les explications du produit de deux monômes (le troisième sujet du chapitre concerne les radicaux et le quatrième sujet traite des polynômes). Dans un encadré, on énonce que le produit de deux monômes s'obtient en appliquant cette règle : $ax^m y^t \times bx^n y^s = abx^{m+n} y^{t+s}$. Par contre, pour le quotient de polynômes, la loi du quotient de puissances n'est pas réactivée.

En résumé, on remarque que les auteurs de cette collection proposent une étude des exposants et des lois des exposants initiée par des expressions numériques. On y ajoute de nouvelles propriétés des exposants mais toujours par un travail sur des expressions numériques. Encore là, on insiste sur un travail d'application des propriétés des exposants à la transformation d'expressions numériques par de nombreux exercices. Il est à noter que le programme d'études 436 n'insiste pas sur l'application des lois des exposants à la transformation d'expressions numériques. Malgré ce fait, les auteurs de cette collection choisissent d'insister sur ce travail. Cette manipulation numérique vient faire le lien avec la manipulation algébrique qui vient ensuite.

1.3.4 Analyse des trois manuels scolaires

Même si les explications sur les lois des exposants aux niveaux numérique et algébrique sont moins développées dans le manuel «*Scénarios 3*», on remarque que, tout comme dans le manuel «*Carrousel mathématique 3*», les auteurs du manuel «*Scénarios 3*» utilisent des expressions numériques contenant des puissances pour généraliser les propriétés des exposants, pour ensuite les appliquer à des expressions algébriques. Aussi, on remarque que les auteurs du manuel «*Carrousel mathématique 3*» visent particulièrement le renforcement des opérations portant sur des expressions numériques contenant des puissances afin d'en arriver à travailler les opérations sur des expressions algébriques contenant des puissances. Il en va de même pour les auteurs du manuel «*Réflexions mathématiques 436*», et ce, même si le programme d'études 436 n'insiste pas sur l'étude des expressions numériques.

Alors, on peut affirmer que toute l'approche scolaire en mathématique, par son programme d'études et par ses manuels scolaires, vise le renforcement des opérations portant sur des expressions numériques afin d'en arriver à travailler les opérations sur des expressions algébriques. Cette approche suggère que l'arithmétique élémentaire est la base de la compréhension algébrique et que, conséquemment, il faut respecter cet ordre.

Puisque l'approche scolaire propose de se servir des opérations sur des expressions arithmétiques contenant des puissances pour généraliser les propriétés de ces opérations, pour ensuite les appliquer à des expressions algébriques, il semblerait plus logique que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions numériques contenant des puissances que des expressions algébriques contenant des puissances. Or, un des constats de ma mini recherche soulignait «que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances». Malgré cette observation, je suis tombé dans le piège en concluant «qu'il y a un très grand travail à faire quant à la notion de puissance numérique (...) ». Je soulignais le fait qu'il fallait initialement travailler les propriétés des exposants au niveau numérique et qu'ensuite, « ce travail (permettrait) à l'élève de transférer ses habiletés aux puissances algébriques ». Pourquoi ne pas se servir des opérations sur des expressions algébriques contenant des puissances pour revenir aux opérations sur des expressions arithmétiques?

Cette confusion dans les approches nous amène à nous questionner sur l'ordre à respecter entre l'arithmétique et l'algèbre. Plusieurs chercheurs, au Québec et ailleurs, ont soulevé des questions par rapport à l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre. La prochaine section présente un survol de quelques-unes de ces recherches.

1.4 Articulation arithmétique/algèbre

Comme il a été mentionné dans la section précédente, l'approche scolaire, par son programme d'études et par ses manuels scolaires, suggère que l'arithmétique élémentaire est la base de la compréhension algébrique et qu'il faut, conséquemment, respecter cet ordre, c'est-à-dire enseigner l'arithmétique avant l'algèbre. En fait, cette approche pédagogique représente une des positions en lien avec un débat qui a eu lieu au XIX^{e} siècle en Grande-Bretagne (Pycior, 1984; Lee et Wheeler, 1989). D'un côté, certains mathématiciens considéraient l'algèbre comme une *arithmétique universelle*. Pour ces mathématiciens, les opérations sur les quantités et les règles en algèbre étaient dictées par les propriétés bien connues en arithmétique. L'approche scolaire est influencée par cette position. D'un autre côté, d'autres mathématiciens, estimaient que l'algèbre n'était qu'un *système symbolique* avec essentiellement que des règles arbitraires.

En fait, l'algèbre n'est pas si simple à définir. Par contre, ce qui est clair, c'est que les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre sont reliés. Kieran (2001), à travers une réflexion sur le développement de l'algèbre en lien avec l'arithmétique, souligne cette relation entre les deux domaines : en arithmétique, le système de numération utilisé incorpore implicitement certains concepts de base de l'algèbre et les algorithmes, en arithmétique, sont fortement reliés aux lois de l'algèbre. Kieran affirme que l'algèbre se construit par des compétences développées en arithmétique et qu'elle développe encore davantage ces compétences. Par exemple, pour ce qui est des activités algébriques de transformation, concernant la résolution d'équations et la simplification d'expressions, Kieran souligne le fait que les compétences en calcul algébrique sont profondément liées aux aptitudes en calcul numérique et tirées de celles-ci. Comme en arithmétique, les aspects de la compréhension conceptuelle et de la compétence stratégique à travers les activités algébriques de transformation sont en interaction entre eux et aussi avec des procédures.

D'autres chercheurs ont aussi souligné la relation entre les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre. Entre autres, Hiebert et Carpenter (1992) documentent cette relation à travers leur explication de la hiérarchie verticale de la structure des réseaux internes de connaissances mathématiques. Cette hiérarchie propose que les connections parmi les informations sur les lettres sont à un plus haut niveau que celles des nombres. Selon eux, un apprentissage réussi de l'algèbre implique une construction des connections à chacun de ces niveaux du réseau, ainsi qu'aux deux niveaux, mais en même temps. Ils suggèrent une sorte de symbiose entre le travail arithmétique et algébrique.

Mais les liens entre ces deux domaines sont-ils bien compris par les élèves? Lee et Wheeler (1989), dans une recherche sur la pensée algébrique, ont démontré que les élèves n'ont pas une bonne compréhension des connections entre les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre. Selon leurs résultats, les élèves ne considèrent pas l'algèbre comme une *arithmétique généralisée*. En fait, les élèves ne croient pas que l'arithmétique puisse se généraliser. Leurs données montrent que la voie menant de l'arithmétique à l'algèbre est jonchée d'obstacles. Lee et Wheeler affirment qu'une des difficultés majeures est la différence frappante entre l'écriture et la manipulation d'expressions algébriques et l'écriture et la manipulation d'expressions arithmétiques.

D'ailleurs, à travers une étude des processus cognitifs impliqués dans l'apprentissage de l'algèbre, Kieran (1990) souligne que les discontinuités entre l'arithmétique et l'algèbre constituent une des sources majeures de difficultés dans l'apprentissage de l'algèbre. Elle affirme que la pédagogie de l'algèbre n'est pas cohérente car il y a plusieurs signes implicites que l'algèbre a ses propres règles qui ne sont pas nécessairement déductibles des règles de l'arithmétique. Selon elle, cette confusion fait en sorte que plusieurs élèves sont incertains des bases qui justifient des transformations algébriques particulières. Dans cette étude et dans d'autres travaux, elle documente les discontinuités entre l'arithmétique et l'algèbre. Par exemple, elle observe que l'arithmétique à l'élémentaire est orientée vers la réponse et ne travaille pas la représentation des relations (Kieran, 2001). Le signe d'égalité est traité comme un séparateur entre un problème et sa solution, comme un signal dirigé de gauche à droite. Pour modifier cette interprétation du signe d'égalité en algèbre, il faut travailler le signe d'égalité comme une affirmation que les deux membres d'une égalité sont égaux l'un à l'autre. Ainsi, selon Kieran (2001), la transition de l'arithmétique à l'algèbre nécessite plusieurs ajustements chez l'élève.

Wong (1997) illustre aussi le fait que l'algèbre a ses propres règles. En effet, elle remarque que, parfois, les connaissances procédurales sont différentes en algèbre et en arithmétique. Par exemple, elle souligne que dans les expressions $a(b+c) = ab+ac$ et $a(3+4) = a(7) = 7a$, des transformations différentes permettent d'enlever les parenthèses. Par contre, dans certains cas, les procédures de manipulations peuvent être identiques, comme dans les deux expressions suivantes :

$$a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5 \text{ et } 4^2 \times 4^3 = 4^{2+3} = 4^5.$$

Bednarz et Janvier (1996) ont aussi étudié les discontinuités entre l'arithmétique et l'algèbre à travers plusieurs recherches. Dans une recherche sur l'émergence et le développement de l'algèbre en tant qu'outil de résolution de problèmes en lien avec les continuités et les discontinuités avec l'arithmétique, l'analyse des résultats de Bednarz et Janvier a démontré, particulièrement, «la distance qui sépare le raisonnement arithmétique du raisonnement algébrique et a remis en question les approches qui sont généralement mises de l'avant pour encourager le passage à l'algèbre.» (Bednarz et Janvier, 1996 p. 135). D'ailleurs, Bednarz et Lee (2002) ont poursuivi ces travaux, notamment avec un groupe de discussion qui s'intéressait aux implications pour l'enseignement des mathématiques, au primaire et au secondaire, de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre. Suite à leur étude de la résolution de problèmes, elles en sont arrivées à la conclusion que l'arithmétique ne devrait pas être mise de côté, dans le travail en résolution de problèmes, après que l'algèbre ait été introduit. Elles ont observé qu'encourager les solutions arithmétiques et continuer le développement de l'arithmétique chez les élèves tout au long du secondaire ne fait pas vraiment partie des expériences des participants du groupe de discussion. Elles indiquent qu'en général, le curriculum arrête l'enseignement de l'arithmétique lorsque l'algèbre est introduit.

D'autres recherches questionnent aussi les approches scolaires concernant le passage de l'arithmétique à l'algèbre. Booth (1984) a remarqué que l'enseignement de l'arithmétique, comme celui de l'algèbre, sont à l'origine des causes d'erreurs en algèbre élémentaire. Elle souligne le fait qu'il y a des différences importantes entre l'algèbre et l'arithmétique et «que ceci peut déboucher sur des difficultés pour l'élève si ces relations ne sont pas reconnues par le professeur» (Booth, 1984, p. 16). Dans la même recherche sur la pensée algébrique citée précédemment, Lee et Wheeler (1989) ont affirmé que la pédagogie traditionnelle semble n'avoir rien à offrir aux enseignants et aux élèves pour surmonter les difficultés des élèves dans leur construction des domaines de l'arithmétique et de l'algèbre ou pour aider à saisir la relation entre l'arithmétique et l'algèbre.

Kieran (2001), dans sa réflexion sur le développement de l'algèbre en lien avec l'arithmétique, décrit les différents raisonnements que les élèves appliquent en algèbre, à partir de leur bagage en arithmétique. Elle souligne le fait que ces élèves proviennent de systèmes d'éducation traditionnels, dont les approches de l'enseignement de l'algèbre tiennent compte davantage de cette pensée arithmétique. Par contre, elle indique que d'autres approches visent à bâtir les fondations de l'algèbre plus tôt à l'élémentaire. Des études ont démontré que certaines modifications dans l'enseignement des mathématiques au primaire peuvent supporter le développement du raisonnement algébrique au secondaire. Une première approche consiste à travailler des problèmes amenant l'élève à généraliser, à déterminer des valeurs de lettres ou à traiter des nombres d'une manière algébrique. Une deuxième approche consiste à mettre l'accent sur la généralisation et sur l'expression de généralités alors que la troisième approche vise à aider les enseignants à comprendre la pensée de leurs élèves lorsqu'on leur demande de généraliser des opérations et des propriétés en arithmétique. Les trois approches proposées démontrent que «les plus grandes difficultés expérimentées lors de l'introduction à l'algèbre sont symptomatiques des défis cognitifs inhérents dans le passage d'un mode de pensée à un autre, c'est-à-dire du raisonnement arithmétique au raisonnement algébrique. » (Kieran, 2001, p. 263).

La prochaine section de ce chapitre présente certains systèmes d'éducation qui proposent donc d'autres approches pour l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre.

1.5 D'autres approches pour l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre

Certains systèmes d'éducation se sont inspirés de travaux russes afin de proposer d'autres approches pour l'enseignement de l'algèbre et des mathématiques. Or en Russie, une approche particulière de l'enseignement des mathématiques est basée sur les travaux de Davydov (1975), un psychothérapeute russe de l'école de Vygotski, qui s'est intéressé à la théorie de l'apprentissage. Inspirées par les travaux de Davydov, plusieurs équipes d'enseignants et d'auteurs en Russie ont créé une série de curriculums scolaires radicalement innovateurs, non seulement en mathématiques mais en littérature, en sciences naturelles, en arts, en musique, etc. Le curriculum en mathématiques, développé par Davydov et Elkonin, est en application dans 10 % des écoles russes, soit dans 1500 écoles.

Aux États-Unis, des adaptations de ce curriculum russe en mathématiques ont été utilisées dans une école privée de Binghamton (New York), dans deux écoles publiques de Hawaii et dans cinq écoles publiques de Portland (Maine). La suite de cette section présentera une description des approches utilisées pour ces deux derniers types d'établissements scolaires.

1.5.1 Le programme "*Measure Up*"

Deux écoles à Hawaii proposent une approche différente des mathématiques. Dans un article sur cette approche, Dougherty (2003) présente le programme de mathématiques "*Measure Up*" qui a été élaboré par des chercheurs de l'Université de Hawaii. Ce programme est une adaptation américaine du curriculum en mathématiques développé par Davydov et Elkonin.

À Hawaii, des éducateurs ont observé que les élèves qui arrivaient en 7e année (notre 1re secondaire) n'avaient pas les acquis nécessaires pour travailler certains sujets mathématiques plus complexes. Au lieu de tenter d'améliorer la situation pour ces élèves à ce niveau, le programme "*Measure Up*" s'est tourné vers les options qui amélioreraient les succès des élèves avant d'arriver à ces niveaux. Dougherty souligne que ce projet a débuté par une vision non conventionnelle des mathématiques pour les plus jeunes enfants du primaire et a mené à des résultats surprenants dans les classes.

Traditionnellement, afin d'introduire les nombres naturels aux enfants, on leur montre à compter des objets discrets. Dougherty affirme que cette approche établit un rituel confus pour les enfants, à mesure qu'ils évoluent à travers les différents systèmes de nombres. Les routines et les algorithmes sont continuellement altérés pour les différents systèmes de nombres puisque les enfants ne développent pas des concepts de base consistants qui fonctionnent avec tous les systèmes de nombres. Selon elle, plus les élèves avancent vers les nombres entiers et rationnels, plus les algorithmes changent et les techniques de calcul deviennent moins claires.

Dougherty décrit les aspects des travaux de Davydov et Elkonin, qui ont inspiré le programme "*Measure Up*". Ces chercheurs estiment que les expériences mathématiques des enfants doivent débuter par des idées conceptuelles de base touchant les mathématiques. Ensuite, ils proposent de construire la notion de nombre. Ainsi, selon cette approche, les premiers contacts des jeunes enfants avec les mathématiques ne débuteront pas avec le nombre. Ils commenceront par décrire et définir les caractéristiques physiques d'objets qui peuvent être comparés. Les élèves travaillent ainsi le concept d'équivalence. À travers ce stade de l'apprentissage, qui se nomme la phase pré numérique, les élèves travaillent des situations qui leur permettent de créer des moyens de rendre égales des quantités inégales ou de rendre inégales des quantités égales. Ces jeunes enfants sont aussi capables de maintenir des relations égales ou inégales. Ces apprentissages forment une base solide permettant de développer la notion de nombre. La notion d'équivalence est un concept important, mais l'utilisation de quantités continues permet aussi aux élèves de développer des notions en lien avec les propriétés de commutativité, d'associativité, etc. Parce que ces propriétés sont développées à partir de cas généraux, et non pas à partir d'exemples arithmétiques spécifiques, les élèves peuvent plus facilement appliquer ces idées aux autres systèmes de nombres.

Dougherty explique comment cette approche mène au développement du concept de nombre. En fait, selon elle, le concept se développe naturellement, par un contexte de mesure. On présente aux élèves des situations pour lesquelles des comparaisons directes ne sont pas possibles. Par exemple, lorsque les élèves ne peuvent comparer la longueur d'objets en les juxtaposant, ils sont forcés de considérer d'autres moyens pour faire la comparaison. Ils sont alors obligés d'utiliser une unité de mesure intermédiaire, qui permettra de mesurer chacune des quantités. Ces deux mesures seront alors utilisées pour faire des déductions. Avec l'utilisation d'une unité, les élèves sont alors prêts à travailler la notion de nombre. Pour les élèves, un nombre représente maintenant une façon d'exprimer une relation entre une unité et une plus grande quantité. Selon Dougherty, cette approche pour l'introduction du concept de nombre offre une optique plus cohérente des systèmes de nombres en général.

À travers des exemples présentés par Dougherty concernant le développement de la notion d'équivalence, on peut voir comment le programme "*Measure Up*" initie les jeunes enfants du primaire aux fondations de l'algèbre. Un exemple démontre que les jeunes enfants comprennent, dès la phase pré numérique, que le signe d'égalité est une façon de montrer que deux quantités sont égales, et non pas une opération. Pour représenter la relation entre les masses Y, A et Q, où $Y = A + Q$, on utilise des diagrammes. Ces diagrammes permettent de représenter les relations entre les parties et le tout. À partir de ces diagrammes, les élèves pourront établir des équations sous une forme plus formelle : $Y = A + Q$, $Q + A = Y$, $Y - Q = A$ ou $Y - A = Q$. Cette approche est en lien avec ce que Kieran (2001) affirme : il faut travailler le signe d'égalité comme une affirmation que les deux membres d'une égalité sont égaux l'un à l'autre (*voir* sect. 1.4).

Aussi, un autre exemple présenté par Dougherty démontre que l'utilisation du concept de la partie d'un tout peut aider les jeunes élèves à organiser et à structurer leur pensée lorsqu'ils travaillent des situations en mots ou des problèmes à contexte. Ce système organisationnel aide les élèves à écrire des équations et à identifier lesquelles peuvent les aider à déterminer une quantité inconnue, sans les forcer à utiliser une méthode particulière. Elle illustre ces propos par le problème suivant :

> Le père de Jarod lui donne 14 crayons. Jarod a perdu certains de ces crayons, mais il lui en reste 9. Combien de crayons Jarod a-t-il perdus? (Dougherty *et al.*, 2003, p. 20)

Il y a au moins quatre équations qui décrivent cette relation :

$14 = 9 + x,$ $\quad 14 = x + 9,$ $\quad 14 - 9 = x$ $\quad$ et $\quad 14 - x = 9.$

La troisième équation pourrait être un choix approprié mais les élèves du programme "*Measure Up*" ont surtout choisi les deux premières équations pour résoudre le problème. Leur raisonnement suit la méthode de compensation pour résoudre une équation.

Dougherty explique que pour appliquer cette approche en classe, l'équipe du programme "*Measure Up*" s'est tournée vers les travaux de Vygotsky (1978). Ce dernier a identifié deux façons de penser à propos de l'enseignement menant aux généralisations. La première consiste à enseigner des cas particuliers pour ensuite construire les généralisations à partir des cas précis. Le programme "*Measure Up*" utilise la seconde façon proposée par Vygotsky. Elle consiste à commencer avec une approche généralisée et ensuite, d'appliquer le savoir obtenu à des cas spécifiques. En fait, si on revient à l'approche scolaire proposée par le programme d'études québécois et par ses manuels scolaires, on remarque que cette façon de penser est en opposition à cette approche scolaire qui suggère que l'arithmétique élémentaire est la base de la compréhension algébrique et que, conséquemment, il faut respecter cet ordre.

1.5.2 L'approche "*Theoretical Learning*"

Aux États-Unis, à Portland, cinq écoles publiques proposent aussi une approche adaptée du curriculum russe. L'approche "*Theoretical Learning*" (Theoretical Learning, 2006) est basée sur une approche générale du développement humain, nommée "*Activity Theory*", qui est le résultat des travaux de trois psychothérapeutes russes du XX^{e} siècle : Vygotsky, Luria, et Leontiev. Cette approche particulière de l'enseignement des mathématiques est aussi basée directement sur les travaux de Davydov. L'approche "*Activity Theory*" est aussi en application en Scandinavie, en Allemagne, au Danemark et en Finlande (Theoretical

Learning, 2006). Certains éléments de l'approche "*Theoretical Learning*" ont des points communs avec le programme "*Measure Up*". Ainsi, cette description de cette approche sera plus abrégée.

Par l'approche "*Theoretical Learning*", les élèves travaillent avec des objets réels. Cette approche diffère des exercices habituels avec des manipulations. Ces objets réels supportent une véritable recherche de la signification du nombre. Ensuite, tout comme pour le programme "*Measure Up*", l'introduction aux mathématiques ne passe pas par le nombre. Les élèves sont graduellement amenés à découvrir d'où viennent les nombres et comment ils sont utilisés, ce qui mène à une véritable maîtrise du concept du nombre (Theoretical Learning, 2006).

L'approche "*Theoretical Learning*" a pour but de développer une meilleure compréhension des mathématiques pour tous les élèves. Afin d'y arriver, on propose une approche différente du développement conceptuel, où des diagrammes en lien avec l'algèbre et des formules rendent des relations mathématiques cachées plus facilement visibles pour les élèves. Par exemple, en 1re année, les jeunes enfants mesurent des longueurs, des aires et des volumes en utilisant des unités appropriées. Ensuite, ils modélisent leurs résultats en utilisant certains diagrammes, un peu comme le programme "*Measure Up*" qui utilise des diagrammes pour représenter une relation entre des masses, comme mentionné à la section précédente. Ces diagrammes aident alors les enfants à maîtriser véritablement le concept de nombre, ce qui leur permettra de maîtriser davantage le calcul et la résolution de problèmes écrits. De plus, ces élèves seront amenés aux bases de l'algèbre. Ils vont travailler avec des nombres algébriques, c'est-à-dire avec des nombres représentés par des lettres.

Dans les écoles de Hong Kong, on vise aussi à bâtir les bases de l'algèbre plus tôt à l'élémentaire. Wong (1997) indique que, dans ces écoles, les élèves apprennent à transformer des expressions algébriques à un plus jeune âge. Dès la 4e année, les élèves de Hong Kong débutent leur apprentissage de la résolution d'équations. En 7e année, ils commencent à simplifier des expressions algébriques.

Or, ces approches différentes de l'enseignement des mathématiques au primaire peuvent soutenir le développement du raisonnement algébrique au secondaire. Pour le programme "*Measure Up*", Dougherty (2003) affirme que les résultats préliminaires de cette approche indiquent que les élèves réussissent à créer des concepts de base riches, desquels ils peuvent bâtir une pensée mathématique plus complexe.

Mais, malgré le fait que les élèves des écoles de Hong Kong manipulent des expressions algébriques à un plus jeune âge, Wong (1997) souligne le fait que les élèves peuvent échouer à faire la bonne transformation lorsque les lettres familières sont remplacées par des nombres. Ainsi, cette observation est l'hypothèse de son étude : certains élèves ont une plus grande difficulté à traiter des nombres que des lettres dans la manipulation d'expressions algébriques. La prochaine section de ce chapitre présente cette recherche de Wong, qui est en lien avec le sujet de ce mémoire.

1.6 La recherche de Maggie P. H. Wong

Le but de l'étude de Wong (1997) est de décrire les difficultés des élèves lorsqu'ils ont à appliquer des procédures identiques à travers la manipulation d'expressions algébriques semblables (certaines avec des nombres, d'autres avec des lettres), et de tenter d'expliquer pourquoi il y a de telles différences. L'étude a été menée auprès de quatre classes d'une école secondaire de Hong Kong, ayant une clientèle régulière.

Plusieurs sujets ont été touchés à travers cette recherche : la somme et le produit d'expressions algébriques, la puissance de puissances, la somme de puissances numériques, etc. Certains résultats de Wong concernent le sujet de ma recherche, c'est-à-dire la réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances. Or, dans la série de questions qui pouvaient être simplifiées avec la propriété du produit de puissances, Wong remarque qu'en comparant des expressions ayant des bases de la même forme (numériques ou algébriques), les élèves ont de moins bons résultats lorsque les exposants sont des lettres. D'autre part, elle remarque qu'en comparant des expressions ayant des exposants de la même forme (numériques ou algébriques), ils ont de meilleurs résultats lorsque les bases sont des lettres. Par l'analyse des erreurs, Wong observe que plusieurs élèves multiplient les exposants entre eux dans des expressions ayant des exposants algébriques et qu'ils multiplient souvent les bases entre elles lorsque les bases numériques sont plus petites.

En conclusion, les résultats de la recherche de Wong suggèrent que dans certaines situations, les élèves sont plus portés à faire des erreurs dans des expressions impliquant des nombres, et ce pour différentes raisons. Elle indique que lorsque des élèves sont capables de manipuler des expressions algébriques avec des lettres mais pas avec des nombres, c'est qu'ils sont incapables d'activer les informations appropriées dans leur tête, c'est-à-dire qu'ils font pas de connections entre ces deux types d'expressions algébriques. En fait, cette conclusion de Wong illustre une des observations de la recherche de Lee et Wheeler (1989), à savoir que les élèves n'ont pas une bonne compréhension des connections entre les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre.

Comme il a été mentionné au début de ce chapitre, dans le cadre du cours d'initiation à la recherche, je me suis intéressé, entre autres, à la compréhension des élèves des transformations d'expressions algébriques contenant des puissances. Contrairement à ce que je m'attendais, l'interprétation des résultats m'a permis de conclure que les élèves réussissaient mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances. Étant donné que le sujet principal de ma mini recherche était la notion de puissance négative, quelques observations seulement sur divers aspects liés à la notion de puissance négative ont permis de dégager certains constats. Or, j'aimerais vérifier si cette observation concernant la réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances est toujours valable si on en fait une étude plus approfondie.

La dernière section de ce chapitre présente le sujet de cette recherche, ses paramètres, la question de recherche, ainsi que des sous-questions en lien avec la question principale de cette recherche.

1.7 Question de recherche

Le sujet de cette recherche est la réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances. Je vais examiner des situations où les manipulations sont identiques pour l'arithmétique et pour l'algèbre. La recherche de Wong (1997) touchait ce sujet à travers son étude d'expressions présentant des produits de puissances. Par contre, puisqu'elle s'est intéressée à plusieurs autres aspects, le quotient de puissances n'a pas été touché dans sa recherche. De plus, les exposants numériques des puissances étudiées étaient uniquement positifs. Les expressions présentées étaient aussi des cas simples. L'étude ne présentait pas de cas particuliers.

La présente recherche traite de la réduction d'expressions numériques et algébriques contenant des puissances, c'est-à-dire d'expressions contenant des bases affectées d'exposants. Plus précisément, cette recherche s'intéressera au produit et au quotient de puissances. Certaines expressions présenteront donc des produits de puissances (de la forme $a^c \times b^d$), des quotients de puissances (de la forme $a^c \div b^d$), ou des expressions mixtes de la forme :

$$\frac{a^e \times b^f}{c^g \times d^h}.$$

Dans le but de faire une étude complète de cette notion, il sera pertinent de traiter de plusieurs cas possibles et de cas particuliers en lien avec les notions de produit et de quotient de puissances. Ainsi, cette recherche traitera des exposants numériques entiers (positifs ou négatifs) et algébriques, ainsi que des bases numériques positives ou algébriques. De plus, des cas particuliers seront présentés aux répondants. Par exemple, certaines expressions pourraient se réduire par une expression équivalente égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul, ou d'autres expressions pourraient présenter des exposants qui sont équivalents à 1, etc. Aussi, Wong (1997) ayant observé que, pour le produit de puissances ayant des bases numériques, les élèves avaient tendance à multiplier les bases entre elles lorsque les bases numériques sont plus petites, certaines expressions de cette recherche pourraient présenter des bases ou des exposants numériques plus grands, afin de comparer les résultats.

Or, on comparera les résultats d'expressions à réduire qui sont semblables. Ainsi, ces comparaisons permettront de répondre à la question de recherche suivante : **est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances?**

Aussi, d'autres sous-questions compléteront cette étude. Des expressions présentant des bases ou des exposants sous la forme de nombres positifs plus grands seront présentées aux répondants. Certaines de ces expressions, permettront de répondre à la sous-question suivante : **est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus grandes ou algébriques que des expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus petites?**

Aussi, il sera intéressant de faire une compilation des questions les mieux réussies et les moins bien réussies. Cette compilation permettra de répondre à la sous-question suivante : **parmi les expressions numériques et algébriques contenant des puissances données, quels types d'expressions sont plus faciles et plus difficiles à réduire pour ces élèves?**

CHAPITRE II

ÉLÉMENTS DE MÉTHODOLOGIE

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'origine de la problématique de cette recherche provient d'une mini recherche qui visait à identifier les raisonnements des élèves, les sources de leurs erreurs et de leurs difficultés avec la notion de puissance en calcul algébrique. Certains résultats de cette mini recherche ont précisé le sujet de cette présente étude : la réduction d'expressions algébriques et numériques contenant des produits et des quotients de puissances. L'étude se limite aux exposants entiers et algébriques. Ainsi, la question de cette recherche a été établie : est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances?

Dans le présent chapitre, nous élaborerons sur la stratégie employée afin de répondre à la question de cette recherche. Nous débuterons par un retour sur la mini recherche afin d'en tirer des leçons méthodologiques. Le choix d'un questionnaire comme outil servant à répondre à la question de recherche et le choix des élèves qui participeront à l'expérimentation seront expliqués. On présentera une analyse du questionnaire construit ainsi que son évolution. Des explications sur la collecte et la compilation des données complèteront ce chapitre.

2.1 Leçons méthodologiques de la mini recherche

Comme il a été mentionné au chapitre précédent, l'objectif général de ma mini recherche était d'identifier les raisonnements des élèves, les causes de leurs erreurs et de leurs difficultés avec la notion de puissance en calcul algébrique. Cette mini recherche m'a permis d'établir certaines leçons méthodologiques qui seront utiles pour cette présente étude.

Un premier constat suite à ma mini recherche est qu'il faut établir des paramètres précis quant au sujet de l'étude. Les questions posées aux élèves étaient toujours reliées à la notion de puissance négative mais, lors de l'analyse des résultats, je me suis rendu compte que les nombreuses questions du test allaient dans plusieurs sens. Par exemple, cette étude traitait, entre autres, de la verbalisation de la notion de puissance, de la transformation d'une puissance négative en une expression équivalente présentant une puissance positive, du signe d'une puissance, de la notion de notation scientifique, du sens donné aux propriétés des exposants, de la réduction d'expressions à plusieurs variables, etc. Plusieurs conclusions ont été identifiées mais celles-ci n'étaient toutefois pas appuyées par des données nombreuses. Ainsi, pour cette recherche, je devrai m'assurer d'établir des paramètres précis, de limiter la recherche à des notions particulières. Un des constats de cette mini recherche était que les élèves réussissaient mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances. Étant donné que mon but est de vérifier si ce constat est toujours valide si j'en fais une étude approfondie, le questionnaire que je vais soumettre devra s'en tenir à ce sujet. Cette étude se limitera donc aux exposants entiers et algébriques, ainsi qu'au produit et au quotient de puissances.

Ensuite, l'expérience acquise à travers ma mini recherche m'a démontré l'importance du choix des questions. Avant l'expérimentation officielle, j'ai testé mon questionnaire auprès d'un nombre réduit d'élèves. Pendant le test, plusieurs élèves ont demandé des précisions relatives à certaines questions. J'ai noté quelques difficultés liées à la formulation de certaines questions. Le constat le plus évident fut que le questionnaire était beaucoup trop long. Ainsi, le questionnaire a été remanié en profondeur : certaines questions ont été annulées, précisées ou écourtées. Or, pour cette recherche, je devrai établir des questions précises et efficaces. Aussi, j'ai remarqué l'efficacité de certaines questions qui avaient été créées en tenant compte d'éléments observés lors de l'étude de la problématique. Je tiendrai compte de cet aspect lors du choix de l'outil qui servira à l'expérimentation.

Finalement, je me suis rendu compte à travers la mini recherche que le choix des répondants est important dans une étude. J'avais alors administré le questionnaire dans trois groupes d'élèves de troisième secondaire, à l'école Marguerite-De Lajemmerais, une école publique de la Commission scolaire de Montréal, à la clientèle exclusivement féminine. L'étude était donc à petite échelle. Afin de tirer de meilleures conclusions, le nombre de répondants participant à l'étude devrait être plus significatif. Aussi, il aurait été intéressant d'élargir cette participation à d'autres niveaux, en 4e et 5e secondaire, par exemple. Une autre perspective de comparaison des résultats aurait pu être intéressante : celle des résultats d'un niveau à un autre.

Ces leçons méthodologiques de ma mini recherche m'ont guidé dans le choix de l'outil qui sera privilégié lors de l'expérimentation. La section qui suit présente les justifications quant au choix méthodologique de procéder par un questionnaire.

2.2 Choix de l'outil d'expérimentation

Puisque l'on veut voir si les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances, l'outil d'expérimentation devra être constitué d'expressions à réduire. Ensuite, il s'agira de comparer les résultats des expressions qui sont semblables. Pour deux expressions présentant des bases numériques, on considère l'expression algébrique comme étant celle qui présente des exposants algébriques. Si deux expressions présentent des bases algébriques, l'expression algébrique sera celle qui présente des exposants algébriques. Pour deux expressions présentant des exposants numériques, on considère l'expression algébrique comme étant celle qui présente des bases algébriques. Finalement, si deux expressions présentent des exposants algébriques, l'expression algébrique sera celle qui présente des bases algébriques. Par exemple, les expressions $2^5 \times 2^7$ et $x^5 \times x^2$ traitent du produit de puissances. Leurs exposants sont numériques, la réponse attendue est une puissance dont l'exposant est numérique. La différence entre les deux expressions se trouve dans les bases des puissances, qui sont numériques ou algébriques. Pour cette comparaison, on considère la première expression comme une expression numérique, et la deuxième comme une expression algébrique. En fait, c'est ce que l'on veut comparer : est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances ou des expressions numériques contenant des puissances?

Comme il y a un grand nombre de possibilités de combinaisons de bases (numériques et algébriques) et d'exposants (entiers et algébriques) avec les deux opérations (produit et quotient de puissances), plusieurs expressions seront présentées aux élèves. Un questionnaire écrit permettra de présenter ces expressions. Ainsi, la majeure partie du questionnaire sera composée d'une première série d'expressions simples à réduire. Cette série présentera des expressions formées d'une seule opération (produit ou quotient). Il y aura un grand nombre d'expressions simples à réduire, mais ces questions devraient se faire rapidement. Aussi, une deuxième série présentera des expressions présentant des produits et des quotients de puissances. Par exemple, les élèves auront à réduire le plus possible les expressions suivantes :

$$\frac{5^3 \times 5^{10}}{5^4 \times 5^3}, \frac{a^7 \times a^3}{a^2 \times a^4} \text{ ou } \frac{7^a \times 7^b}{7^c \times 7^a}.$$

Puisque ces questions demandent davantage de manipulations, elles seront moins nombreuses.

Afin d'appuyer le choix de certaines questions de l'outil d'expérimentation sur des observations obtenues à travers des études d'autres chercheurs, certaines expressions à réduire du questionnaire de cette recherche seront empruntées à ma propre mini recherche ainsi qu'à la recherche de Wong (1997), telle que présentée dans le chapitre précédent. Il sera intéressant de comparer les résultats obtenus à ces recherches et à ceux de cette présente recherche.

Les leçons méthodologiques de ma mini recherche m'ont aidé à construire le questionnaire de cette recherche. Ces leçons m'ont aussi guidé dans le choix des répondants à ce questionnaire. La section qui suit présente les justifications quant au choix méthodologique des groupes qui participeront à cette recherche.

2.3 Présentation des répondants

Dans le chapitre précédent, j'ai précisé l'origine de mon intérêt pour la problématique de cette recherche. En effet, mon expérience d'enseignement en troisième secondaire m'a permis d'observer que les élèves ont beaucoup de difficultés à manipuler des expressions algébriques contenant des puissances, surtout lors de l'application des propriétés des exposants à la transformation d'expressions. En tout premier lieu, pour voir si les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances, il sera pertinent de soumettre mon questionnaire à des élèves de 3ᵉ secondaire, après qu'ils aient étudié la transformation d'expressions arithmétiques ou algébriques en expressions équivalentes. Puisque les propriétés des exposants sont retravaillées et réutilisées en 4ᵉ et 5ᵉ secondaire, et pour avoir un nombre significatif de répondants, je vais administrer le même questionnaire à des élèves de ces deux niveaux. En fait, même si ce n'est pas le but de cette recherche, je pourrai aussi observer l'évolution des résultats des élèves d'un niveau à l'autre. De plus, comme il a été mentionné précédemment, afin d'observer des résultats plus justes, les répondants à cette étude proviendront de groupes mixtes.

Ces critères m'ont mené à choisir les répondants à cette étude. Tout d'abord pour des raisons pratiques, puisque j'y enseigne, j'ai choisi de faire passer mon questionnaire à des élèves du Collège Saint-Sacrement. Évidemment, cette raison pratique est appuyée par le respect des critères de sélection que j'ai énumérés au paragraphe précédent. Le Collège Saint-Sacrement est une institution privée située à Terrebonne, à la clientèle mixte. Ses élèves doivent présenter un bulletin dont la moyenne générale est supérieure à 68 %. J'ai choisi d'administrer le questionnaire à douze groupes d'élèves de 3ᵉ secondaire à 5ᵉ secondaire. Quatre groupes par niveau seront sélectionnés.

Au Collège Saint-Sacrement, les élèves de 3ᵉ secondaire en mathématiques sont classés selon deux catégories de groupes : A et B. La note globale de 2ᵉ secondaire en mathématiques détermine le classement de l'élève pour la 3ᵉ secondaire. Les élèves des trois premiers rangs cinquième formeront les cinq groupes A et les élèves des quatrième et cinquième rangs cinquième constitueront les 3 groupes B. En 4ᵉ et 5ᵉ secondaire, seules les voies d'enrichissement en mathématiques sont offertes : 426, 436, 526 et 536. Globalement, les élèves des groupes B suivront les cours 426 et 526 alors que les élèves des groupes A constitueront les groupes de 436 et 536.

Les élèves de 3^e secondaire du Collège Saint-Sacrement ont terminé d'étudier le contenu algébrique du programme 314 en décembre 2005. Ainsi, deux groupes de 3e secondaire testeront le questionnaire au mois de janvier 2006. J'ai choisi de soumettre le questionnaire officiel à quatre groupes par niveau. En 3e secondaire, afin d'équilibrer le niveau des élèves, deux groupes A et deux groupes B participeront à la recherche. Afin de conserver cet équilibre en 4e et 5e secondaire, deux groupes de 426, deux groupes de 436, deux groupes de 526 et deux groupes de 536 vont participer à cette recherche. Le questionnaire officiel sera administré à la mi-février 2006, juste avant la semaine de relâche scolaire.

La durée d'une période au Collège Saint-Sacrement est de cinquante minutes. Le temps alloué pour l'expérimentation devra tenir compte de ce détail. Aussi, la durée sera déterminée en fonction du contenu du questionnaire. Or, la prochaine section explicite le contenu de ce questionnaire.

2.4 Questionnaire

Cette section présente la première version du questionnaire, qui sera testée auprès de deux groupes. La banque de questions sera présentée et ces questions seront analysées. Cette section analysera cette première version du questionnaire, suite à son expérimentation. Ensuite, les changements à apporter au questionnaire seront énumérés, ce qui mènera à la version finale du questionnaire.

Or, le questionnaire est divisé en deux parties. Dans la première partie, un petit espace blanc est destiné pour chaque réponse de la soixantaine d'expressions simples à réduire. Un espace plus grand, laissant place à des étapes intermédiaires, permet de réduire les expressions plus complexes de la deuxième partie.

2.4.1 Première version du questionnaire

Tout d'abord, six grandes catégories de questions se sont imposées. La première traite du produit de puissances ayant des bases numériques alors que la deuxième catégorie touche le produit de puissances ayant des bases algébriques. Ensuite, la troisième catégorie de questions concerne cette fois-ci le quotient de puissances ayant des bases numériques alors que la quatrième catégorie traite aussi du quotient de puissances, mais présentant des bases algébriques. La cinquième catégorie de questions présente des produits et des quotients de puissances, présentant des bases algébriques ou numériques. Finalement, la sixième catégorie de questions présente des expressions dont les bases ou les exposants sont des nombres plus grands.

Tout d'abord, une première série de questions vérifiera la compréhension du produit de puissances ayant des bases numériques positives avec des exposants positifs, négatifs ou algébriques. Cette première série sera comparée avec une deuxième qui traite aussi du produit de puissances avec des exposants positifs, négatifs ou algébriques, mais avec des puissances ayant des bases algébriques. Les réponses obtenues pour chaque question de la première série seront comparées aux réponses obtenues pour la question correspondante de la deuxième série. Par exemple, les résultats aux deux questions suivantes seront mises en relation :

$$10^{-3} \times 10^{-4} \text{ et } b^{-10} \times b^{-4}.$$

Ensuite, une troisième série de questions traite de la compréhension du quotient de puissances ayant des bases numériques positives avec des exposants positifs, négatifs ou algébriques. Encore là, cette série sera comparée avec une quatrième série de questions qui traite aussi du quotient de puissances avec des exposants positifs, négatifs ou algébriques, mais dont les bases sont sous forme algébrique. Les réponses obtenues pour chaque question de la troisième série seront comparées aux réponses obtenues pour la question correspondante de la quatrième série. Par exemple, il y a une comparaison des réponses obtenues aux questions $6^5 \div 6^{-2}$ et $s^5 \div s^{-4}$. Les questions concernant ces quatre séries constituent la première partie du questionnaire.

On sait que les élèves font beaucoup d'erreurs en appliquant les propriétés des exposants à des expressions qui ne le permettent pas. Ainsi, à travers cette première partie du questionnaire, certaines expressions qui ne se réduisent pas seront présentées aux élèves. Les bases de ces expressions ne seront pas les mêmes (par exemple, les expressions $d^5 \times e^8$ et

$3^3 \times 5^8$). Ces questions permettront de voir si les élèves appliquent aveuglément les propriétés des exposants sans réfléchir aux conditions nécessaires pour le faire.

Finalement, une cinquième série de questions vise à vérifier la compréhension de la réduction d'expressions présentant des produits et des quotients de puissances, que les bases soient algébriques ou numériques, avec des exposants positifs, négatifs ou algébriques. Dans cette même série, les réponses obtenues pour chaque question seront comparées avec les réponses obtenues à une autre question de la même série. Par exemple, les questions suivantes sont associées :

$$\frac{5^3 \times 5^{10}}{5^4 \times 5^3} \text{ et } \frac{a^7 \times a^3}{a^2 \times a^4}.$$

Les questions de cette série se retrouvent dans la deuxième partie du questionnaire.

La consigne principale pour les questions des parties 1 et 2 est la suivante : réduis chaque expression en une expression équivalente. Ensuite, on précise que si ce n'est pas possible de réduire l'expression, il faut en expliquer la cause. Aussi, on ajoute que ce n'est pas nécessaire de transformer une expression réduite présentant un exposant négatif en une expression équivalente ne présentant pas d'exposant négatif. Cette dernière consigne s'ajoute car ces élèves sont habitués en classe à jamais laisser une expression présentant un exposant négatif comme réponse. Souvent, les élèves ont de la difficulté à effectuer ces transformations. Pour ne pas fausser les résultats et puisque cette notion ne fait pas l'objet de cette recherche, je précise ce détail dans la question. Maintenant, la prochaine section présente en détails chacune des questions de ce questionnaire.

2.4.2 Banque de questions

Comme il a été mentionné précédemment, quelques questions utilisées dans le questionnaire sont empruntées à Wong (1997) ou à ma mini-recherche. Dans la majorité des cas, les questions sont créées en lien avec chacune des six catégories mentionnées précédemment.

Les questions en lien avec les deux premières catégories vérifient la compréhension du produit de puissances ayant des exposants positifs, négatifs ou algébriques avec d'une part, une base numérique positive et d'autre part, une base algébrique. Treize couples de questions sont associées pour le produit de puissances. Ces questions traitent de plusieurs cas possibles. Par exemple, on retrouve des expressions dont les exposants sont positifs dans l'expression donnée et pour laquelle l'expression réduite attendue présente un exposant positif, des expressions dont les exposants sont positif et négatif dans l'expression donnée et pour laquelle l'expression réduite attendue présente un exposant négatif, etc. Le tableau suivant présente les différentes questions de ces deux premières catégories.

Tableau 2.1
Catégories 1 et 2 : produit de puissances

Couple #	Expression	Réponse attendue	Caractéristiques des exposants de l'expression donnée	Caractéristiques de l'exposant de l'expression réduite attendue
1	$2^5 \times 2^7$ $x^5 \times x^2$	2^{12} x^7	Numériques (positifs)	Numérique (positif)
2	$10^{-3} \times 10^{-4}$ $b^{-10} \times b^{-4}$	10^{-7} ou $1/10^7$ b^{-14} ou $1/b^{14}$	Numériques (négatifs)	Numérique (positif ou négatif, selon l'expression réduite choisie)
3	$2^{-5} \times 2^8$ $a^8 \times a^{-5}$	2^3 a^3	Numériques (un est positif, un est négatif)	Numérique (positif)
4	$7^{15} \times 7^{-22}$ $a^{-12} \times a^3$	7^{-7} ou $1/7^7$ a^{-9} ou $1/a^9$	Numériques (un est positif, un est négatif)	Numérique (positif ou négatif, selon l'expression réduite choisie)
5	$5^4 \times 5^{-5}$ $a^8 \times a^{-9}$	5^{-1} ou 1/5 a^{-1} ou $1/a$	Numériques (un est positif, un est négatif)	Numérique (équivalent à -1 ou à 1, selon l'expression réduite choisie)
6	$6^4 \times 6$ $c^4 \times c$	6^5 c^5	Numériques (positifs, un est équivalent à 1)	Numérique (positif)
7	$12^0 \times 12^5$ $s^0 \times s^9$	12^5 s^9	Numériques (un est positif, un est nul)	Numérique (positif)
8	$2^{-5} \times 2^5$ $c^{-9} \times c^9$	2^0 ou 1 c^0 ou 1	Numériques (opposés)	Numérique (nul) ou une expression réduite égale à 1
9	$2^a \times 2^b$ $m^a \times m^b$	2^{a+b} m^{a+b}	Algébriques	Expression algébrique

Couple #	Expression	Réponse attendue	Caractéristiques des exposants de l'expression donnée	Caractéristiques de l'exposant de l'expression réduite attendue
10	$2^{a} \times 2^{-b}$ $t^{b} \times t^{-c}$	2^{a-b} t^{b-c}	Algébriques (dont un est précédé d'un signe négatif)	Expression algébrique
11	$9^{m} \times 9$ $x^{m} \times x$	9^{m+1} x^{m+1}	Un est algébrique, un est équivalent à 1	Expression algébrique
12	$6^{-a} \times 6^{a}$ $b^{-a} \times b^{a}$	6^{0} ou 1 b^{0} ou 1	Algébriques (opposés)	Expression algébrique
13	$3^{3} \times 5^{8}$ $d^{5} \times e^{8}$	Ne se réduisent pas	Numériques (positifs)	X

Il est à noter que certaines expressions de cette série sont puisées dans les travaux de Wong :

$$2^{5} \times 2^{7},\ x^{5} \times x^{2},\ 2^{a} \times 2^{b} \text{ et } m^{a} \times m^{b}.$$

Aussi, d'autres questions proviennent de ma mini recherche :

$$10^{-3} \times 10^{-4},\ 2^{-5} \times 2^{8},\ a^{8} \times a^{-5},\ a^{-12} \times a^{3} \text{ et } 2^{-5} \times 2^{5}.$$

Il est à noter que les deux expressions du dernier couple de cette série ne se réduisent pas. Ainsi, on veut voir si les élèves tiennent compte des bases lors de la réduction des expressions.

La troisième et la quatrième catégorie de questions concernent cette fois-ci le quotient de puissances. Elles vérifient la compréhension du quotient de puissances ayant des exposants positifs, négatifs ou algébriques avec, d'une part, une base numérique positive, et d'autre part, une base algébrique. Quatorze couples de questions sont associées pour le quotient de puissances. Ces questions traitent de plusieurs cas possibles. Par exemple, on retrouve des expressions dont les exposants sont positifs dans l'expression donnée et pour laquelle l'expression réduite attendue présente un exposant positif, des expressions dont les exposants sont positif et négatif dans l'expression donnée et pour laquelle l'expression réduite attendue présente un exposant négatif, etc. Le tableau suivant présente les différentes questions de ces catégories.

Tableau 2.2
Catégories 3 et 4 : quotient de puissances

Couple #	Expression	Réponse attendue	Caractéristiques des exposants de l'expression donnée	Caractéristiques de l'exposant de l'expression réduite attendue
1	$10^3 \div 10^5$ $a^5 \div a^{12}$	10^{-2} ou $1/10^2$ a^{-7} ou $1/a^7$	Numériques (positifs)	Numérique (positif ou négatif, selon l'expression réduite choisie)
2	$7^{15} \div 7^{13}$ $a^{10} \div a^8$	7^2 a^2	Numériques (positifs)	Numérique (positif)
3	$6^5 \div 6^{-2}$ $s^5 \div s^{-4}$	6^7 s^9	Numériques (un est positif, un est négatif)	Numérique (positif)
4	$7^{15} \div 7^{-22}$ $s^6 \div s^{-12}$	7^{37} s^{18}	Numériques (un est positif, un est négatif)	Numérique (positif)
5	$10^{-2} \div 10^{-5}$ $a^{-8} \div a^{-11}$	10^3 a^3	Numériques (négatifs)	Numérique (positif)
6	$10^{-15} \div 10^{-7}$ $s^{-13} \div s^{-5}$	10^{-8} ou $1/10^8$ s^{-8} ou $1/s^8$	Numériques (négatifs)	Numérique (positif ou négatif, selon l'expression réduite choisie)
7	$6^{-8} \div 6^{-8}$ $a^{-5} \div a^{-5}$	6^0 ou 1 a^0 ou 1	Numériques (opposés)	Numérique (nul) ou une expression réduite égale à 1
8	$12^0 \div 12^5$ $b^0 \div b^5$	12^{-5} ou $1/12^5$ b^{-5} ou $1/b^5$	Numériques (un est positif, un est nul)	Numérique (positif ou négatif, selon l'expression réduite choisie)
9	$3^{15} \div 3^{15}$ $i^{12} \div i^{12}$	3^0 ou 1 i^0 ou 1	Numériques (positifs et égaux)	Numérique (nul) ou une expression réduite égale à 1
10	$10^9 \div 10$ $b^5 \div b$	10^8 b^4	Numériques (positifs, un est équivalent à 1)	Numérique (positif)
11	$13^a \div 13^b$ $x^c \div x^d$	13^{a-b} x^{c-d}	Algébriques	Expression algébrique
12	$21^a \div 21^{-b}$ $x^m \div x^{-n}$	21^{a+b} x^{m+n}	Algébriques (un est précédé d'un signe négatif)	Expression algébrique

Couple #	Expression	Réponse attendue	Caractéristiques des exposants de l'expression donnée	Caractéristiques de l'exposant de l'expression réduite attendue
13	$10^m \div 10$ $y^a \div y$	10^{m-1} y^{a-1}	Un est algébrique, un est équivalent à 1	Expression algébrique
14	$6^a \div 6^a$ $a^b \div a^b$	6^0 ou 1 a^0 ou 1	Algébriques (égaux)	Numérique (nul) ou une expression réduite égale à 1
15	$5^{10} \div 2^5$	Ne se réduit pas	Numériques (positifs)	X

Parmi cette série, aucune question ne provient de la recherche de Wong (1997) car le quotient de puissances ne faisait pas l'objet de son étude. Par contre, quelques questions sont puisées dans ma mini recherche :

$$10^3 \div 10^5,\ a^5 \div a^{12},\ 7^{15} \div 7^{13},\ a^{10} \div a^8,\ 6^5 \div 6^{-2},$$
$$s^6 \div s^{-12}, 10^{-2} \div 10^{-5},\ 10^{-15} \div 10^{-7},\ a^{-5} \div a^{-5} \text{ et } b^5 \div b\ .$$

Aussi, une autre question présente une expression ($5^{10} \div 2^5$) qui ne peut se réduire.

Wong (1997) a observé que les expressions pour lesquelles les bases numériques sont des nombres premiers plus grands, sont mieux réussies que les expressions dont les bases sont plus petites. En entrevue, un élève avait donné ces réponses :

$$3^a \times 3^b = 9^{a+b} \text{ et } 53^4 \times 53^3 = 53^7\ .$$

Cet élève avait justifié sa démarche en disant que dès qu'il avait vu 3×3, il avait indiqué 9, mais pas pour la deuxième expression, comme si des bases numériques plus grandes se comportaient comme des bases algébriques, davantage que les bases numériques plus petites. Afin de vérifier si la grandeur des bases ou des exposants a un effet sur la réussite des élèves dans la réduction d'expressions numériques ou algébriques contenant des puissances, des expressions présentant des bases numériques ou des exposants numériques plus grands seront ajoutées.

Il est à noter qu'il n'est pas utile ici de quantifier la grandeur des bases ou des exposants. On se contentera seulement de qualifier une base ou un exposant comme étant plus grande qu'une autre base ou qu'un autre exposant, puisqu'on comparera en tout temps des expressions. Ainsi, une certaine expression présentera une base numérique plus grande, comparée à une autre expression dont la base numérique sera plus petite, par exemple.

L'expression $53^4 \times 53^3$, puisée dans les travaux de Wong, sera utilisée pour comparer des triplets d'expressions. Cette question a inspiré les autres questions qui s'ajoutent à cette cinquième catégorie. Chaque nouvelle expression sera comparée à d'autres nouvelles expressions ou à des expressions déjà créées pour les quatre premières catégories. Les tableaux 2.3 et 2.4 présentent les différentes questions de cette catégorie qui seront intégrées avec les questions des quatre premières catégories. Les expressions des quatre premières catégories sont entourées de parenthèses. Le tableau 2.3 présente des triplets pour lesquels les exposants des expressions sont sous une même forme.

Tableau 2.3

Catégorie 5 : nombres positifs plus grands (exposants de la même forme)[1]

Triplet #	Expression	Réponse attendue	Caractéristiques des exposants de l'expression donnée	Caractéristiques de l'exposant de l'expression réduite attendue
1	$(2^5 \times 2^7)$ $53^4 \times 53^3$ $(x^5 \times x^2)$	2^{12} 53^7 x^7	Numériques	Numérique
2	$(7^{15} \div 7^{13})$ $61^8 \div 61^3$ $(a^{10} \div a^8)$	7^2 61^5 a^2	Numériques	Numérique
3	$3^{42} \times 3^{53}$ $47^{42} \times 47^{53}$ $a^{25} \times a^{32}$	3^{95} 47^{95} a^{57}	Numériques (plus grands)	Numérique (plus grand)
4	$(2^a \times 2^b)$ $41^a \times 41^b$ $(m^a \times m^b)$	2^{a+b} 41^{a+b} m^{a+b}	Algébriques	Expression algébrique

[1] Il est à noter que les expressions entre parenthèses des tableaux 2.3 et 2.4 se retrouvent également dans les catégories précédentes

Triplet #	Expression	Réponse attendue	Caractéristiques des exposants de l'expression donnée	Caractéristiques de l'exposant de l'expression réduite attendue
5	$(13^a \div 13^b)$ $67^a \div 67^b$ $(x^c \div x^d)$	13^{a-b} 67^{a-b} x^{c-d}	Algébriques	Expression algébrique
6	$3^{62} \div 3^{42}$ $47^{63} \div 47^{51}$ $a^{67} \div a^{42}$	3^{20} 47^{12} a^{25}	Numériques (plus grands)	Numérique

Quant au tableau 2.4, il présente des triplets pour lesquels les bases des expressions sont sous une même forme.

Tableau 2.4

Catégorie 5 : nombres positifs plus grands (bases de la même forme)

Triplet #	Expression	Réponse attendue	Caractéristiques des bases de l'expression donnée	Caractéristiques de la base de l'expression réduite attendue
1	$(2^5 \times 2^7)$ $3^{42} \times 3^{53}$ $(2^a \times 2^b)$	2^{12} 3^{95} 2^{a+b}	Numériques	Numérique
2	$(7^{15} \div 7^{13})$ $3^{62} \div 3^{42}$ $(13^a \div 13^b)$	7^2 3^{20} 13^{a-b}	Numériques	Numérique
3	$53^4 \times 53^3$ $47^{42} \times 47^{53}$ $41^a \times 41^b$	53^7 47^{95} 41^{a+b}	Numériques (plus grandes)	Numérique (plus grande)
4	$61^8 \div 61^3$ $47^{63} \div 47^{51}$ $67^a \div 67^b$	61^5 47^{12} 67^{a-b}	Numériques (plus grandes)	Numérique (plus grande)
5	$(x^5 \times x^2)$ $a^{25} \times a^{32}$ $(m^a \times m^b)$	x^7 a^{57} m^{a+b}	Algébriques	Algébrique
6	$(a^{10} \div a^8)$ $a^{67} \div a^{42}$ $(x^c \div x^d)$	a^2 a^{25} x^{c-d}	Algébriques	Algébrique

La sixième catégorie de questions propose des expressions composées de produits et de quotients de puissances. Les expressions présentent des exposants positifs, négatifs ou algébriques et des bases numériques positives ou algébriques. Ces expressions ont la forme suivante :

$$\frac{a^e \times b^f}{c^g \times d^h}.$$

Certaines expressions ont toutes la même base, numérique ou algébrique. D'autres expressions ont deux bases différentes, numériques ou algébriques aussi. Le tableau suivant présente les différentes questions de cette dernière catégorie.

Tableau 2.5
Catégorie 6 : produit et quotient de puissances

Couple #	Expression	Réponse attendue	Caractéristiques des exposants de l'expression donnée	Caractéristiques de l'exposant de l'expression réduite attendue
1	$\frac{5^3 \times 5^{10}}{5^4 \times 5^3}$ $\frac{a^7 \times a^3}{a^2 \times a^4}$	5^6 a^4	Numériques (positifs)	Numérique (positif)
2	$\frac{3^{-2} \times 3^{10}}{3^{-12} \times 3^3}$ $\frac{x^{-10} \times x^{13}}{x^{-9} \times x^5}$	3^{17} x^7	Numériques (deux sont positifs et deux sont négatifs)	Numérique (positif)
3	$\frac{7^9 \times 3^{10}}{3^4 \times 7^6}$ $\frac{m^4 \times n^{10}}{n^6 \times m^2}$	$3^6 \times 7^3$ $m^2 \times n^4$	Numériques (positifs)	Numériques (positifs)
4	$\frac{7^5 \times 3^4}{3^9 \times 7^3}$ $\frac{a^9 \times b^{10}}{b^{13} \times a^2}$	$3^{-5} \times 7^2$ ou $\frac{7^2}{3^5}$ $a^7 \times b^{-3}$ ou $\frac{a^7}{b^3}$	Numériques (positifs)	Numériques(un est positif,un est négatif ou les deux sont positifs, selon l'expression réduite choisie)

Couple #	Expression	Réponse attendue	Caractéristiques des exposants de l'expression donnée	Caractéristiques de l'exposant de l'expression réduite attendue
5	$\frac{7^a \times 7^b}{7^a \times 7^c}$ $\frac{a^x \times a^y}{a^y \times a^z}$	7^{b-c} a^{x-z}	Algébriques	Expression algébrique
6	$\frac{37^6 \times 37^{12}}{37^4 \times 37^3}$ $\frac{47^a \times 47^a}{47^b \times 47^a}$	37^{11} 47^{a-b}	Numériques (positifs) dans une expression, algébriques dans une autre expression	Numérique (positif) dans une expression, expression algébrique dans une autre expression

Toutes les questions des cinq premières catégories ont été mêlées aléatoirement pour former la première partie du questionnaire à tester. Ces questions ont été numérotées de 1 à 65. Ensuite, les questions de la cinquième catégorie ont aussi été mêlées. Ces douze questions constituent la deuxième partie du même questionnaire. Cette première version du questionnaire se trouve à l'appendice A.

Suite à la constitution de cette première version du questionnaire, j'ai testé ce dernier dans deux groupes de 3e secondaire. La prochaine section présente ce que j'ai observé lors du test ainsi que les changements à apporter à cette version préliminaire du questionnaire.

2.4.3 Version finale du questionnaire

Avant d'administrer cette première version du questionnaire, j'ai décidé de permettre aux élèves d'utiliser leur calculatrice sans trop me questionner sur la pertinence de son utilisation lors du test. J'ai permis son utilisation pour le premier groupe qui a testé le questionnaire. Pendant que j'observais les élèves faire leur test, je me suis rendu compte que plusieurs d'entre eux vérifiaient à l'occasion leurs réponses, surtout pour les expressions ayant des bases numériques. Par exemple, un élève a trouvé la valeur de l'expression $2^5 \times 2^7$ à l'aide de sa calculatrice : 4 096. Ensuite, il a vérifié si l'expression 2^{12} était bien égale à 4 096. Aussi, les élèves effectuaient beaucoup d'opérations de sommes et de différences d'exposants à la calculatrice. Comme cette étude s'attarde aussi sur ces opérations, la calculatrice vient fausser les résultats. Or, lors de la passation du test dans le deuxième groupe, j'ai interdit l'utilisation de la calculatrice afin d'en observer les conséquences. En réalité, les élèves m'ont mentionné que son utilisation n'était pas nécessaire. Pour ces raisons, j'ai décidé d'interdire l'utilisation de la calculatrice lors de l'expérimentation officielle.

Pour cette expérimentation de la première version du questionnaire, je n'avais pas prévu de temps limite pour faire le questionnaire. Je comptais m'ajuster suite à cette expérimentation. Dans le groupe B (qui a pu utiliser la calculatrice), huit élèves ont pris plus de 20 minutes pour répondre au questionnaire, comparativement à seulement quatre élèves du groupe A. Par contre, plusieurs élèves ont terminé le questionnaire assez rapidement, soit en 15 minutes pour la majorité. Un élève performant a même terminé en 11 minutes. Suite à ces observations, j'ai décidé d'allouer un temps maximum de 25 minutes pour répondre au questionnaire. Par contre, je vais aviser les élèves que ce temps alloué est suffisant, qu'il n'est pas nécessaire de répondre à toute vitesse aux questions et qu'il est tout à fait possible qu'ils terminent avant le temps limite. Ces précisions ont pour but de rassurer les élèves afin que le stress ne vienne pas influencer leur performance, ce qui risquerait de fausser les résultats.

À cette étape, une seule élève a posé une question. Cette question concernait la présentation des questions de la partie 2. L'élève a demandé si on retrouvait entre les puissances un signe de multiplication ou une variable x. Effectivement, les expressions n'étaient pas claires car, entre autres, il n'y avait pas d'espaces entre le signe de multiplication et les bases. Cette présentation sera corrigée dans la version officielle du questionnaire. Par exemple, cette première expression sera remplacée par la suivante :

$$\frac{7^a{\times}7^b}{7^a{\times}7^c} \text{ et } \frac{7^a \times 7^b}{7^a \times 7^c}$$

Pour cette expérimentation préliminaire, la curiosité m'a amené à corriger tous les questionnaires et à établir les pourcentages de réussite pour toutes les questions. Aussi, j'ai comparé sommairement les résultats entre les questions correspondantes. Je ne présenterai pas ces résultats à cette étape mais ils m'ont permis d'observer certaines anomalies dans le choix des questions. Tout d'abord, j'ai remarqué que j'avais oublié une question de type quotient de puissance dont les bases sont numériques et différentes et dont les exposants sont numériques. En fait, les résultats à cette question seraient comparés à ceux de l'expression $5^{10} \div 2^{5}$ (la question 59). Ainsi, l'expression $a^{12} \div b^{2}$ formera la question 66.

Aussi, j'ai observé que les questions 4 ($\frac{37^{6} \times 37^{12}}{37^{4} \times 37^{3}}$) et 7 ($\frac{47^{a} \times 47^{a}}{47^{b} \times 47^{a}}$) de la partie 2 ne sont pas semblables et conséquemment, leurs résultats ne seront pas comparables. En effet, l'expression de la question 7 présente le même exposant pour 3 de ses puissances, contrairement à l'autre expression. Ce dernier détail étant intéressant, il serait plus pertinent de comparer les résultats à cette question à une autre expression semblable avec des exposants numériques différents mais avec une base plus petite. Or, il aurait fallu remplacer la question 4 par l'expression $\frac{7^{6} \times 7^{6}}{7^{4} \times 7^{6}}$.

Malheureusement, cette correction n'a pas été effectuée car elle a été oubliée lors des changements apportés à la présentation des questions de cette série 2, qui faisait défaut. Par contre, les résultats aux questions 4 et 5 ($\frac{5^{3} \times 5^{10}}{5^{4} \times 5^{3}}$) pourront aussi être comparés car ces expressions présentent des bases numériques et des exposants numériques, mais à la question 5, les bases sont petites, alors que les bases de la question 4 sont plus grandes.

Suite aux réponses de certains élèves, je me suis rendu compte que la consigne principale devait être précisée. En effet, on demandait à l'élève de réduire chaque expression en une expression équivalente. Par exemple, à la question 3 ($\frac{3^{-2} \times 3^{10}}{3^{-12} \times 3^{3}}$) de la partie 2, certains élèves ont réduit l'expression ainsi : $3^{8}/3^{-9}$ (au lieu de 3^{17}). Conséquemment, pour la partie 1, la nouvelle consigne demandera à l'élève de transformer chaque expression en une expression réduite. Pour la partie 2, on demandera à l'élève de réduire le plus possible chaque expression. Aussi, suite à des commentaires de mes collègues, je me suis rendu compte que la dernière consigne concernant les exposants négatifs pouvait se simplifier ainsi : il est possible de laisser une réponse réduite présentant un exposant négatif.

Finalement, d'autres détails viendront modifier le questionnaire. Pour simplifier l'analyse, les questions de la partie 2 seront numérotées de 67 à 78. De plus, pour toutes les questions, les encadrés prévus pour inscrire l'expression réduite étaient trop grands. Dans le questionnaire officiel, ces encadrés seront réduits. Ainsi, le questionnaire sera présenté sur trois pages. La version finale du questionnaire de cette recherche se trouve à l'appendice B.

La prochaine étape sera celle de la présentation de cette version finale du questionnaire. Suite à cette étape, viendra la collecte et la compilation des données. La prochaine section explique comment seront corrigés les questionnaires et comment les résultats seront compilés.

2.5 Collecte et compilation des données

Les réponses aux différentes questions de ce questionnaire seront compilées selon deux catégories : réussite ou échec. Les questions non répondues seront considérées comme de mauvaises réponses.

Tous les résultats pour chacune des questions et pour chaque répondant, seront compilés dans un tableau détaillé, à l'aide d'un chiffrier Excel. Un support électronique présentant cette compilation sera disponible sur demande. Le nom de l'élève, de même que son sexe, ne sera pas pris en considération, les informations recueillies se limitant aux réponses obtenues. Par contre, chaque questionnaire devra être numéroté afin de faciliter le repérage des données et l'identification des répondants. Il est à noter que les copies des répondants seront disponibles sur demande.

Des pourcentages de réussite seront calculés pour chaque question, pour l'ensemble des répondants. Ces pourcentages de réussite globaux seront la principale source d'information pour l'analyse des résultats. De plus, afin d'apporter d'autres éléments à l'analyse des résultats, des pourcentages de réussite seront calculés pour chaque question, mais pour les répondants d'un même niveau.

Maintenant, puisque les résultats seront comparés pour des couples de questions ainsi que pour des triplets de questions, il sera important de déterminer si ces résultats sont significatifs à l'aide de tests statistiques. Par exemple, s'il y a un écart de 2 % entre deux pourcentages de réussite globaux, sera-t-il possible de conclure qu'un type de question est mieux réussi qu'un autre ? Afin de déterminer si des résultats sont significatifs, deux types de tests statistiques seront utilisés : le test de McNemar pour comparer les questions deux à deux et le test Q de Cochran, qui est une version généralisée du test de McNemar, pour comparer les questions trois à la fois.

2.5.1 Les tests de McNemar et Q de Cochran

Les tests de McNemar (Sheskin, 2000a) et Q de Cochran (Sheskin, 2000b) sont des tests non paramétriques, pour des échantillons dépendants (ou appariés). Un test non paramétrique est indiqué pour cette recherche car c'est un type d'étude statistique utilisé lorsque les variables impliquées sont nominales, c'est-à-dire que les réponses ne peuvent être que de deux types. Pour cette recherche, les variables sont dichotomiques car leurs réponses sont opposées: réussite ou échec. Chacune des réponses sera notée 1 (échec) ou 0 (réussite). Cette recherche implique des échantillons dépendants car les mêmes sujets sont appelés à répondre successivement à toutes les questions. La réponse d'un sujet à la question X n'est donc pas indépendante de sa réponse à une autre question.

Le test de McNemar évalue si la différence est significative entre deux échantillons dépendants, lorsque les variables sont dichotomiques. Le test Q de Cochran, quant à lui, est une extension du test de McNemar à une situation à *k* échantillons. Pour cette recherche, le test Q de Cochran servira lorsque des triplets de questions seront comparés. Ces deux types de tests vérifient l'hypothèse (hypothèse nulle) que les chances de succès sont les mêmes pour les questions impliquées. Si le résultat du test est significatif (c'est-à-dire qu'on rejette l'hypothèse nulle car la probabilité qu'elle s'avère vraie est plus petite que 0,05), on peut conclure que les chances de succès aux questions qui sont comparées sont différentes. Le rejet de l'hypothèse nulle ainsi que l'analyse des résultats (en pourcentages de réussite) permettront d'affirmer que tel type de question est mieux réussi qu'un autre, ce qui est l'objectif de la démonstration visée par cette démarche de comparaison.

Dans le cas des comparaisons deux par deux, pour chaque couple de questions, on détermine le nombre de répondants pour les quatre cas possibles : réussites aux questions X et Y, échecs aux questions X et Y, réussite à la question X et échec à la question Y, et finalement, échec à la question X et réussite à la question Y. On compile ces résultats, pour chaque couple de questions associées, dans un tableau croisé. Les tableaux suivants présentent un cas général ainsi qu'un exemple précis.

Tableau 2.6
La statistique Z - Cas général

	Résultats à la question X		
Résultats à la question Y	0 (réussite)	1 (échec)	Somme des rangées
0 (réussite)	a	b	$a + b = n_1$
1 (échec)	c	d	$c + d = n_2$
Somme des colonnes	$a + c$	$b + d$	$n = n_1 + n_2$

Tableau 2.7
La statistique Z - Exemple

	Résultats à la question 1		
Résultats à la question 2	0 (réussite)	1 (échec)	Somme des rangées
0 (réussite)	282	7	289
1 (échec)	3	26	29
Somme des colonnes	285	33	318

Ensuite, on calcule la statistique Z ainsi :

$$Z = \frac{(b-c)}{\sqrt{b+c}}$$

Par exemple, la cote Z concernant les questions 1 et 2 se calcule ainsi :

$$Z = \frac{(7-3)}{\sqrt{7+3}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = 1{,}264911\ldots$$

La statistique Z suit une loi Normale (0,1). Or, le seuil à atteindre pour que la différence entre deux résultats soit significative (test bilatéral à 95%) est de 1,96. Conséquemment, la différence entre les résultats aux questions 1 et 2 n'est pas statistiquement significative.

Dans le cas des comparaisons trois par trois, pour chaque triplet de questions, on détermine la statistique Q de Cochran. On compile les résultats, pour chaque triplet de questions associées, dans un tableau croisé. Les tableaux suivants présentent un cas général ainsi qu'un exemple précis.

Tableau 2.8
La statistique Q - Cas général

(0 : réussite) (1 : échec)	Question 1 C_1	Question 2 C_2	Question 3 C_3	R_i**	R_i^2****
Sujet 1	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1	n_1	$(n_1)^2$
Sujet 2	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1	n_2	$(n_2)^2$
...	...	...	...	...	...
Sujet i	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1	n_i	$(n_i)^2$
	$\sum C_1$ *	$\sum C_2$ *	$\sum C_3$ *	$\sum R_i$ ***	$\sum R_i^2$ *****

où * $\sum C_j$: somme totale des réussites pour la j^e question

** R_i : nombre total de réussites du i^e sujet

*** $\sum R_i$: somme totale des résultats R_i

**** R_i^2 : carré du nombre total de réussites du i^e sujet

***** $\sum R_i^2$: somme totale des résultats R_i^2

Tableau 2.9
La statistique Q - Exemple

(0 : réussite) (1 : échec)	Question 1 C_1	Question 2 C_2	Question 3 C_3	R_i	R_i^2
Sujet 1	1	1	0	1	1
Sujet 2	0	0	0	3	9
...					
Sujet 318	0	0	0	3	9
	$\sum C_1 = 285$	$\sum C_2 = 289$	$\sum C_3 = 257$	$\sum R_i = 831$	$\sum R_i^2 =$ 2353

Ensuite, on calcule la statistique Q ainsi :

$$Q = \frac{(k-1)\left[(k)(C)-(T)^2\right]}{(k)(T)-R}$$

Où k = 3 (nombre d'échantillons) $C = \sum\left(\sum C_j\right)^2$ $T = \sum R_i$

et $R = \sum R_i^2$

Par exemple, la statistique Q concernant les questions 1, 2 et 3 se calcule ainsi :

$$Q = \frac{(3-1)\left[3 \times 230795 - 831^2\right]}{3 \times 831 - 2353} = 26{,}057\ 142\ 86\ldots \approx 26{,}1$$

où $$C = \sum\left(\sum C_j\right)^2 = \left(\sum C_1\right)^2 + \left(\sum C_2\right)^2 + \left(\sum C_3\right)^2$$

$$= 285^2 + 289^2 + 257^2$$

$$= 230\ 795$$

La statistique Q suit une loi Chi-Carré à (k-1) degrés de liberté. Ici, le seuil à atteindre pour que la différence entre k résultats soit significative (test unilatéral à 95%) est de 5,991. Conséquemment, la différence entre les résultats aux questions 1, 2 et 3 est statistiquement significative.

Ces statistiques se retrouveront dans les tableaux sommaires, qui présenteront les résultats des questions qui sont comparées. On retrouvera, en parallèle, les résultats à une question demandant de réduire une expression numérique contenant des puissances et à sa question correspondante demandant de réduire une expression algébrique contenant des puissances.

Ces tableaux sommaires présenteront les expressions associées devant être réduites. On y retrouvera les pourcentages de réussite pour les répondants d'un même niveau (3^e, 4^e et 5^e secondaires) ainsi que les pourcentages de réussite globaux (pour tous les répondants). Les écarts entre ces pourcentages de réussite globaux des questions associées seront indiqués dans ces tableaux. Pour les couples de questions associées, ces écarts entre ces pourcentages de réussite globaux des questions associées vont correspondre à la différence entre le pourcentage de réussite global pour une expression algébrique et le pourcentage de réussite global pour une expression numérique. Pour chaque triplet de questions associées, deux écarts entre les pourcentages de réussite globaux seront calculés : les écarts entre les pourcentages de réussite globaux des deux premières expressions du triplet ainsi que des deux dernières expressions du triplet. Ensuite, ces tableaux présenteront la statistique Z associée à chaque couple de questions, ou la statistique Q associée à chaque triplet de questions. De plus, selon les statistiques Z ou Q obtenues, ces tableaux sommaires indiqueront si les résultats obtenus sont significatifs. Le prochain chapitre présentera des versions simplifiées de ces tableaux. On n'y retrouvera que les couples ou les triplets de questions qui présenteront des résultats significatifs. Afin de faciliter l'analyse, les résultats non significatifs seront retirés de ces tableaux.

Les résultats significatifs recueillis lors de cette expérimentation sont présentés au chapitre suivant. Ce dernier chapitre tentera de tirer des conclusions quant à la question de recherche : est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances?

CHAPITRE III

RÉSULTATS

Dans le chapitre précédent, nous avons élaboré sur la stratégie employée afin de répondre à la question de recherche établie au premier chapitre. Le questionnaire qui a été utilisé lors de l'expérimentation a été analysé. On a expliqué comment il a été développé, auprès de quels répondants il sera expérimenté et comment les résultats seront analysés.

La première partie de ce chapitre présentera le déroulement de l'expérimentation. Ensuite, les résultats obtenus lors de l'expérimentation seront présentés. Comme il a été mentionné au chapitre précédent, l'essentiel des résultats portera sur la comparaison des pourcentages de réussite aux questions associées. La section suivante présentera une synthèse des résultats.

Dans la dernière partie du chapitre, nous tenterons de voir si, à la lumière des résultats, nous pouvons répondre à la question de recherche : est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances?

3.1 Déroulement de l'expérimentation

En 3^{e} secondaire, deux groupes A et deux groupes B de 314 ont participé à cette recherche. En 4^{e} secondaire, le questionnaire a été administré auprès de deux groupes de 426 et de deux groupes de 436. Pour ce qui est de la 5^{e} secondaire, seulement deux groupes de 526 ont participé à cette étude. Pour diverses raisons hors de mon contrôle, les deux groupes de 536 n'ont pas répondu au questionnaire. Au total, 318 élèves de 3^{e} à 5^{e} secondaire ont participé à cette recherche, dont 138 élèves de 3^{e} secondaire, 124 élèves de 4^{e} secondaire et 55 élèves de 5^{e} secondaire.

L'expérimentation s'est déroulée à la mi-février 2006, durant les périodes de cours. Pour chaque groupe, l'objectif de ma recherche a été brièvement présenté. Les élèves ont eu à lire les consignes indiquées sur le questionnaire. Il n'y a pas eu de questions dans aucun des groupes. Les consignes semblaient claires. Le temps alloué pour répondre aux 78 questions fut de 25 minutes. Les élèves ont été avisés que cette durée était suffisante, qu'il n'était pas nécessaire de répondre à toute vitesse aux questions et qu'il était tout à fait possible qu'ils terminent avant le temps requis.

3.2 Sommaire des résultats

Les résultats à chaque question, pour chacun des répondants, ont été compilés dans un tableau. Ce tableau de compilation présente les pourcentages de réussite pour chaque question, chaque groupe, chaque niveau et pour l'ensemble des répondants. Aussi, il indique le pourcentage de réussite au test, pour chaque élève, chaque groupe, chaque niveau et pour l'ensemble des répondants. Ce tableau de compilation, effectué à l'aide d'un chiffrier Excel, se retrouve sur un support électronique, qui est disponible sur demande. Une version résumée de ce tableau de compilation se retrouve à l'appendice C. Le tableau C.1 présente les pourcentages de réussite pour chacune des questions, par niveau et pour l'ensemble des répondants.

Parmi ces résultats, on s'intéresse à la comparaison des pourcentages de réussite aux questions associées, pour l'ensemble des répondants et pour les répondants d'un même niveau. Ces résultats sont présentés sous forme de tableaux, que l'on retrouve aux sections 3.2.1 à 3.2.12. Ces tableaux présentent les questions qui sont associées, les pourcentages de réussite à ces questions pour les répondants d'un même niveau, ainsi que pour l'ensemble des répondants. Chaque tableau présente l'écart entre les pourcentages de réussite globaux ainsi que les statistiques Q ou Z, présentées au chapitre précédent, qui ont été calculées en fonction des données associées. Tous les résultats exposés dans les tableaux des sections 3.2.1 à 3.2.12 sont significatifs. Tous les résultats, significatifs ou non significatifs, se retrouvent dans des tableaux plus détaillés, à l'appendice D. Le chiffrier Excel ayant servi à calculer les statistiques Q et Z est aussi disponible sur demande.

Il faut spécifier que les pourcentages de réussite globaux présentés dans ces tableaux ont été calculés en fonction du nombre de répondants ayant réussi à réduire correctement l'expression donnée et du nombre total d'élèves ayant répondu au questionnaire, qui est de 318 élèves. À la question 60, par exemple, 208 répondants sur 318 ont réussi à réduire correctement l'expression donnée. Le pourcentage de réussite global pour cette question est alors de 65,4 %. Ce pourcentage de réussite global n'est pas une moyenne des pourcentages de réussite pour chaque niveau. Par contre, il faut noter que ces pourcentages de réussite globaux ont été calculés tout en sachant que le nombre de répondants à chaque niveau n'est pas le même. Afin de préciser les résultats de ces pourcentages de réussite globaux, les pourcentages de réussite pour chaque niveau ont été ajoutés dans les tableaux. À titre indicatif, le pourcentage de réussite global moyen pour l'ensemble des questions, pour tous les niveaux, est de 78,2 %.

Au chapitre précédent, je soulignais le fait qu'il serait intéressant de comparer les résultats de cette présente recherche à ceux des travaux de Wong (1997) et de ma mini recherche. Or, certaines expressions à réduire du questionnaire de cette recherche ont été empruntées à ces recherches. Le tableau suivant présente une comparaison des résultats de Wong à ceux de cette recherche. Étant donné que l'étude de Wong avait été menée auprès d'élèves de 4[e] secondaire à Hong Kong, ces résultats sont comparés avec les résultats obtenus pour les répondants de 4[e] secondaire ayant participé à ma recherche. Il est à noter que les élèves ayant participé à la recherche de Wong ont débuté, dès la 4[e] année, leur apprentissage de la résolution d'équations. En 1[re] secondaire, ils ont commencé à simplifier des expressions algébriques. Ainsi, les élèves qui ont participé à la recherche de Wong ont été initiés à l'algèbre plus tôt dans leur cheminement scolaire que les élèves qui ont participé à la présente recherche.

Tableau 3.1

Comparaison des résultats avec les données de Wong

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite (données de Wong)	Pourcentage de réussite (données de cette recherche)	Écart
5	$2^5 \times 2^7$	78,8 %	79,0 %	+ 0,2
17	$2^a \times 2^b$	73,0 %	74,2 %	+ 1,2

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite (données de Wong)	Pourcentage de réussite (données de cette recherche)	Écart
19	$x^5 \times x^2$	94,9 %	96,0 %	+ 1,1
23	$53^4 \times 53^3$	92,5 %	91,1 %	- 1,4
34	$m^a \times m^b$	79,5 %	81,5 %	+ 2,0

Ce tableau permet d'observer que les écarts entre les pourcentages de réussite sont faibles. Ainsi, cette recherche confirme certains résultats obtenus par Wong. Ses travaux s'avèrent donc une source pertinente de comparaison pour cette recherche.

Le tableau ci-dessous présente une comparaison des résultats de ma mini recherche à ceux de cette recherche. Étant donné que ma mini recherche a été menée auprès d'élèves de 3^e secondaire, le tableau présente les pourcentages de réussite à cette présente recherche pour la 3^e secondaire.

Tableau 3.2

Comparaison des résultats avec les données de la mini recherche

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite (données de la mini recherche)	Pourcentage de réussite en 3^e sec. (données de cette recherche)	Écart
4	$a^{-5} \div a^{-5}$	29,9 %	67,4 %	+ 37,5
8	$a^{10} \div a^8$	91,0 %	96,2 %	+ 5,2
10	$a^8 \times a^{-5}$	85,1 %	89,9 %	+ 4,8
15	$10^3 \div 10^5$	64,2 %	89,9 %	+ 25,7
20	$7^{15} \div 7^{13}$	67,2 %	92,8 %	+ 25,6
21	$a^5 \div a^{12}$	80,6 %	89,9 %	+ 9,3
25	$s^6 \div s^{-12}$	64,2 %	72,5 %	+ 8,3
26	$a^{-12} \times a^3$	71,6 %	89,9 %	+ 18,3
32	$s^5 \div s^{-4}$	56,7 %	78,3 %	+ 21,6
41	$2^{-5} \times 2^5$	19,4 %	70,3 %	+ 50,9
45	$10^{-3} \times 10^{-4}$	51,6 %	84,8 %	+ 33,2
47	$10^{-2} \div 10^{-5}$	44,8 %	85,5 %	+ 40,7
51	$10^{-15} \div 10^{-7}$	32,8 %	76,8 %	+ 44,0
52	$b^5 \div b$	79,1 %	86,2 %	+ 7,1
53	$2^{-5} \times 2^8$	55,2 %	87,7 %	+ 32,5

Les écarts élevés indiquent clairement que les résultats à ces deux recherches ne sont pas comparables. Mais ces écarts étaient prévisibles car les répondants des deux recherches n'avaient pas le même profil. Pour la mini recherche, le questionnaire a été administré dans trois groupes d'élèves de 3^{e} secondaire, à l'école Marguerite-De Lajemmerais, une école publique de la Commission scolaire de Montréal à la clientèle exclusivement féminine. Deux des groupes suivaient un cheminement régulier alors que le troisième groupe était en voie enrichie. Or, tel que mentionné au chapitre précédent, le questionnaire de cette recherche a été administré au Collège Saint-Sacrement, une institution privée située à Terrebonne, à la clientèle mixte. Les élèves de ce collège sont plus performants car ils doivent présenter un bulletin dont la moyenne générale est supérieure à 68 %. Le questionnaire a été administré auprès de quatre groupes de 3^{e} secondaire, dont deux groupes réguliers et deux groupes enrichis. Il est à noter que les groupes A du Collège Saint-Sacrement et les groupes enrichis de l'école Marguerite-De Lajemmerais performent sensiblement de la même manière mais que les groupes B du Collège Saint-Sacrement sont beaucoup plus performants que les groupes réguliers de l'école Marguerite-De Lajemmerais. Or, dû à ces différences, il n'est pas surprenant de voir des écarts entre les résultats des deux recherches.

Ce chapitre se poursuit avec les sections 3.2.1 à 3.2.12, qui présentent les résultats de cette recherche. Les tableaux 3.3 à 3.7 sont constitués de couples de questions associées présentant des produits ou des quotients de puissances. Dans chaque tableau, les expressions ont une caractéristique commune. Dans le tableau 3.3, les expressions ont des exposants numériques. Les expressions du tableau 3.4 présentent des exposants algébriques. Au tableau 3.5, les expressions possèdent des bases numériques. On retrouve dans le tableau 3.6 des expressions qui sont constituées de bases algébriques. Ensuite, le tableau 3.7 propose des expressions purement numériques ou purement algébriques.

Les tableaux 3.8 et 3.9 viennent préciser certains résultats reliés à des cas particuliers d'expressions qui se retrouvent à travers les cinq premiers tableaux. Dans ces cinq premiers tableaux, les cas particuliers sont placés à la fin des tableaux (suite aux lignes triples). Ces cas particuliers sont formés d'expressions dont certains exposants sont équivalents à 1, d'expressions dont l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul. Le tableau 3.10, quant à lui, présente des expressions composées à la fois de produits et de quotients de puissances.

Ensuite, les tableaux 3.11 et 3.12 sont constitués de triplets de questions associées dont les expressions présentent des bases ou des exposants sous la forme de nombres positifs plus petits, plus grands ou sous la forme algébrique. Dans le tableau 3.11, chaque expression d'un même triplet de questions associées a des exposants de la même forme alors que dans le tableau 3.12, ces expressions ont des bases de la même forme.

Finalement, on retrouve dans les tableaux 3.13 et 3.14, la liste des questions les mieux ou les moins bien réussies de ce questionnaire.

3.2.1 Bases numériques ou algébriques et exposants numériques

Dans le tableau 3.3, chaque expression présentant des bases numériques est associée à une autre expression dont les bases sont algébriques. Dans les deux cas, les exposants de ces puissances sont numériques.

Tableau 3.3
Bases numériques ou algébriques, exposants numériques

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3^e sec.	4^e sec.	5^e sec.	Global	Écart	
5 19	$2^5 \times 2^7$ $x^5 \times x^2$	81,9 % 94,9 %	79,0 % 96,0 %	87,5 % 96,4 %	81,8 % 95,6 %	+ 13,8	5,99
9 26	$7^{15} \times 7^{-22}$ $a^{-12} \times a^3$	71,7 % 89,9 %	67,7 % 87,9 %	69,6 % 89,3 %	69,8 % 89,0 %	+ 19,2	6,19
20 8	$7^{15} \div 7^{13}$ $a^{10} \div a^8$	92,8% 95,7%	89,5% 96,0 %	96,4% 98,2 %	92,1 % 96,2 %	+ 4,1	2,84
59 66	$5^{10} \div 2^5$ $a^{12} \div b^2$	71,7% 82,6%	71,0 % 76,6%	65,1% 71,4%	70,4 % 78,3 %	+ 7,9	3,25
61 30	$3^3 \times 5^8$ $d^5 \times e^8$	73,9 % 92,0 %	67,7 % 85,5 %	66,1 % 80,4 %	70,1 % 87,4 %	+ 17,3	6,04
43 16	$3^{15} \div 3^{15}$ $i^{12} \div i^{12}$	76,8% 72,5%	83,1% 77,4%	96,4% 92,9%	82,7 % 78,0 %	- 4,7	2,14

Sur les six écarts entre les pourcentages de réussite globaux de ce tableau, cinq sont positifs. Pour les cinq premiers couples de questions présentant des expressions dont les exposants sont numériques, on remarque que les pourcentages de réussite sont supérieurs lorsque ces expressions présentent des bases algébriques plutôt que numériques.

D'ailleurs, les deux questions les mieux réussies de cette série (les questions 8 et 19) sont des expressions qui présentent des bases algébriques plutôt que numériques. Aussi, la question la moins bien réussie de cette série (la question 9) présente des bases numériques. Il est aussi intéressant de noter que l'expression réduite équivalente qui est attendue à cette question est une puissance ayant une base numérique et un exposant numérique négatif. Cette question est associée à la question 26. On remarque que l'écart entre les pourcentages de réussite de ces questions est le plus élevé de ce tableau (+ 19,2 %). Si on compare les résultats de la question 9 aux résultats de la question 5, on remarque que pour des produits de puissances dont les exposants sont numériques, les élèves éprouvent davantage de difficultés lorsque des expressions présentent des exposants négatifs. Pour la réduction de l'expression $7^{15} \times 7^{-22}$ de la question 9, la réponse erronée la plus fréquente a été 7^{7} (36 % des répondants n'ayant pas bien réduit cette expression ont obtenu cette réponse). Ensuite, 30 % des répondants n'ayant pas bien réduit l'expression ont répondu 7^{37}. Ici, il semble que les erreurs soient reliées à l'opération d'addition des exposants, étant donné que les exposants de cette expression sont des nombres plus grands, et qu'un de ceux-ci est négatif.

De plus, on remarque qu'aux questions associées 59 et 66, les expressions ne se réduisent pas puisqu'elles ne présentent pas des bases identiques. Ainsi, pour ces quotients de puissances dont les exposants sont numériques, les élèves ont plus facilement identifié qu'ils ne se réduisaient pas lorsque les bases sont algébriques plutôt que numériques.

Les questions associées 16 et 43 présentent des cas particuliers d'expressions : leurs exposants sont identiques. Les résultats à ces questions associées démontrent que pour des quotients de puissances dont les exposants numériques sont identiques, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les bases sont numériques plutôt qu'algébriques.

L'expression réduite attendue présente alors une base affectée d'un exposant égal à 0. La section 3.2.7 de ce chapitre présente une analyse plus approfondie de ces cas particuliers.

Le cinquième couple de questions associées (les questions 30 et 61) présente des expressions ne se réduisant pas puisqu'elles ne présentent pas des bases identiques. Pour ces produits de puissances dont les exposants sont algébriques, les élèves ont plus facilement identifié qu'ils ne se réduisaient pas lorsque les bases sont algébriques plutôt que numériques.

Or, si on ne tient pas compte du dernier couple de questions qui présente des cas particuliers d'expressions, les résultats présentés au tableau 3.3 démontrent que **pour les produits ou les quotients de puissances dont les exposants sont numériques, les résultats démontrent que les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les bases sont algébriques plutôt que numériques**.

Par contre, pour le cas particulier qui présente des quotients de puissances dont les exposants numériques sont identiques, un résultat indique que les élèves réussissent mieux à réduire cette expression lorsque les bases sont numériques plutôt qu'algébriques.

3.2.2 Bases numériques ou algébriques et exposants algébriques

Le tableau 3.4 compare les résultats de questions présentant des expressions dont les exposants sont sous forme algébrique. Les résultats aux expressions ayant des bases numériques sont comparés aux expressions présentant des bases algébriques.

Tableau 3.4
Bases numériques ou algébriques, exposants algébriques

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3$3^e$ sec.	4^e sec.	5^e sec.	Global	Écart	
17 34	$2^a \times 2^b$ $m^a \times m^b$	65,2 % 65,9 %	74,2 % 81,5 %	89,3 % 89,3 %	73,0 % 76,1 %	+ 3,1	2,36
27 57	$13^a \div 13^b$ $x^c \div x^d$	79,0 % 83,3 %	81,5 % 83,1 %	94,6 % 100 %	82,7 % 86,2 %	+ 3,5	2,20
14 40	$21^a \div 21^{-b}$ $x^m \div x^{-n}$	65,9 % 72,5 %	71,8 % 79,0 %	91,1 % 92,9 %	72,6 % 79,6 %	+ 7,0	3,04

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart	
55 60	$10^m \div 10$ $y^a \div y$	47,1 % 53,6 %	62,9 % 67,7 %	89,3 % 89,3 %	60,7 % 65,4 %	+ 4,7	3,27
31 63	$6^a \div 6^a$ $a^b \div a^b$	64,5 % 60,1 %	78,2 % 70,2 %	92,9 % 87,5 %	74,8 % 68,9 %	- 5,9	2,39

Sur les cinq écarts entre les pourcentages de réussite globaux de ce tableau, quatre sont positifs. Pour les quatre premiers couples de questions présentant des exposants algébriques, on remarque que les pourcentages de réussite sont supérieurs lorsque les expressions présentent des bases algébriques plutôt que numériques.

Aussi, les deux questions les mieux réussies de cette série (les questions 40 et 57) sont des expressions qui ont des bases algébriques plutôt que numériques. La question 55, qui est la question la moins bien réussie de cette série, présente d'ailleurs des bases numériques. De plus, cette question, ainsi que sa question associée (la question 60), sont les moins bien réussies de cette série. Ces expressions présentent des cas particuliers d'expressions. Une certaine base de l'expression est affectée d'un exposant équivalent à 1, mais qui n'est pas indiqué. La section 3.2.6 de ce chapitre présente une analyse plus approfondie de ces cas particuliers.

Les questions associées 31 et 63 de cette série présentent aussi des cas particuliers d'expressions : leurs exposants sont identiques. Les résultats à ces questions associées démontrent que lorsqu'il s'agit de questions présentant des exposants identiques, les élèves réussissent mieux à réduire une expression présentant des quotients de puissances dont les exposants sont algébriques, lorsque les bases sont numériques plutôt qu'algébriques. Or, ces résultats appuient ceux observés aux questions associées 16 et 43 du tableau 3.3 .

Or, si on ne tient pas compte des deux derniers couples de questions qui présentent des cas particuliers d'expressions, les résultats présentés au tableau 3.4 démontrent que **pour les produits ou les quotients de puissances dont les exposants sont algébriques, les résultats**

démontrent que les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les bases sont algébriques plutôt que numériques.

Pour ce qui est des cas particuliers, pour les quotients de puissances dont une certaine base de l'expression est affectée d'un exposant équivalent à 1, un résultat indique que les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les bases sont algébriques plutôt que numériques. Par contre, pour les quotients de puissances dont les exposants algébriques sont identiques, un résultat indique que les élèves réussissent mieux à réduire cette expression lorsque les bases sont numériques plutôt qu'algébriques.

3.2.3 Bases numériques, exposants numériques ou algébriques

Dans le tableau 3.5, on compare les résultats pour des questions présentant des bases numériques. Chaque expression dont les exposants des puissances sont numériques est associée à une autre expression dont les exposants des puissances sont algébriques.

Tableau 3.5

Exposants numériques ou algébriques, bases numériques

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3^e sec.	4^e sec.	5^e sec.	Global	Écart	
5 17	$2^5 \times 2^7$ $2^a \times 2^b$	81,9 % 65,2 %	79,0 % 74,2 %	87,5 % 89,3 %	81,8 % 73,0 %	- 8,8	2,92
20 27	$7^{15} \div 7^{13}$ $13^a \div 13^b$	92,8 % 79,0 %	89,5 % 81,5 %	96,4 % 94,6 %	92,1 % 82,7 %	- 9,4	4,16
3 14	$6^5 \div 6^{-2}$ $21^a \div 21^{-b}$	81,9 % 65,9 %	75,8 % 71,8 %	89,3 % 91,1 %	80,8 % 72,6 %	- 8,2	2,84
9 37	$7^{15} \times 7^{-22}$ $2^a \times 2^{-b}$	71,7 % 80,4 %	67,7 % 78,2 %	69,6 % 89,3 %	69,8 % 81,1 %	+ 11,3	3,60
29 58	$6^4 \times 6$ $9^m \times 9$	89,9 % 47,1 %	89,5 % 60,5 %	96,4 % 78,6 %	90,9 % 57,9 %	- 33,0	9,79
41 12	$2^{-5} \times 2^5$ $6^{-a} \times 6^a$	70,3 % 53,6 %	72,6 % 60,5 %	92,3 % 85,7 %	75,2 % 61,9 %	- 13,3	5,25
35 55	$10^9 \div 10$ $10^m \div 10$	84,8 % 47,1 %	87,1 % 62,9 %	96,4 % 89,3 %	87,7 % 65,4 %	- 22,3	8,28

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3^e sec.	4^e sec.	5^e sec.	Global	Écart	
43	$3^{15} \div 3^{15}$	76,8 %	83,1 %	96,4 %	82,7 %		
31	$6^a \div 6^a$	64,5 %	78,2 %	92,9 %	74,8 %	- 7,9	3,37

Sur les huit écarts entre les pourcentages de réussite globaux de ce tableau, sept sont négatifs. Pour sept couples de questions qui présentent des bases numériques, on remarque que les pourcentages de réussite sont supérieurs lorsque ces expressions présentent des exposants numériques plutôt qu'algébriques.

Aussi, les deux questions les mieux réussies de cette série (les questions 20 et 29) sont des expressions qui ont des exposants numériques plutôt qu'algébriques. Les questions 12, 55 (la même qu'au tableau 3.4) et 58 sont les questions les moins bien réussies de cette série. Ces cas particuliers présentent d'ailleurs des exposants algébriques. Il est à remarquer que les questions 55 et 58 sont du même type. En effet, ces questions présentent un produit ou un quotient de puissances, dont les bases sont numériques et dont une certaine base est affectée d'un exposant équivalent à 1, mais qui n'est pas indiqué. De plus, l'écart entre les pourcentages de réussite des questions 29 et 58 est le plus élevé de ce tableau (- 33,0 %). Pour ce qui est de la question 12, on remarque que les bases sont affectées d'exposants algébriques opposés.

Également, il est à noter que les questions associées 31 et 43 présentent des cas particuliers d'expressions. Les résultats à ces questions sont en lien avec ceux observés aux tableaux 3.3 et 3.4. Les résultats à ces expressions indiquent que pour des quotients de puissances ayant des bases numériques et des exposants identiques, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les exposants sont numériques plutôt qu'algébriques (voir la section 3.2.7).

Par contre, dans cette série, les résultats aux questions associées 9 et 37 indiquent que lorsqu'il s'agit de produits de puissances dont un des exposants numériques est positif et l'autre est négatif ou dont un des exposants algébriques est précédé d'un signe négatif et l'autre ne l'est pas, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les exposants sont algébriques plutôt que numériques. On a vu à la section 3.2.1 que pour la réduction de l'expression $7^{15} \times 7^{-22}$ de la question 9, les réponses erronées les plus fréquentes ont été les expressions 7^{7} et 7^{37}. Il est intéressant de voir que pour la réduction de l'expression $2^{a} \times 2^{-b}$ de la question 37, la réponse erronée la plus fréquente a été 2^{a+b} (27 % des répondants n'ayant pas bien réduit cette expression ont obtenu cette réponse). Ensuite, 25 % de ces répondants ont répondu que cette expression ne se réduisait pas, certains en expliquant que c'était impossible de le faire puisque les exposants algébriques étaient différents.

Or, si on ne tient pas compte des quatre couples de questions qui présentent des cas particuliers d'expressions, les résultats aux trois premiers couples de questions, présentés au tableau 3.5, indiquent que **pour les produits ou les quotients de puissances dont les bases sont numériques, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les exposants sont numériques plutôt qu'algébriques**.

Par contre, pour le produit de puissances dont un exposant est précédé d'un signe positif, l'autre exposant est précédé d'un signe négatif et dont l'expression réduite équivalente attendue pour l'expression ayant des exposants numériques est une puissance ayant un exposant numérique négatif, un résultat indique que les élèves réussissent mieux à réduire cette expression lorsque les exposants sont algébriques plutôt que numériques.

Maintenant, si on tient compte des quatre couples de questions qui présentent des cas particuliers d'expressions, on se rend compte que le constat reste le même : la majorité des résultats présentés au tableau 3.5 indique que pour les produits ou les quotients de puissances dont les bases sont numériques, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les exposants sont numériques plutôt qu'algébriques.

3.2.4 Bases algébriques et exposants numériques ou algébriques

Les expressions du tableau 3.6 présentent toutes des bases algébriques. Dans ce tableau, on compare les résultats pour des expressions montrant des puissances ayant des exposants numériques et pour des expressions présentant des puissances ayant des exposants algébriques.

Tableau 3.6
Exposants numériques ou algébriques, bases algébriques

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart	
19 34	$x^5 \times x^2$ $m^a \times m^b$	94,9 % 65,9 %	96,0 % 81,5 %	96,4 % 89,3 %	95,6 % 76,1 %	- 19,5	7,31
10 13	$a^8 \times a^{-5}$ $t^b \times t^{-c}$	89,9 % 75,4 %	91,9 % 78,2 %	87,5 % 87,5 %	90,3 % 78,6 %	- 11,7	4,45
8 57	$a^{10} \div a^8$ $x^c \div x^d$	95,7 % 83,3 %	96,0 % 83,1 %	98,2 % 100 %	96,2 % 86,2 %	- 10	4,72
50 6	$c^{-9} \times c^9$ $b^{-a} \times b^a$	64,7 % 51,4 %	72,6 % 59,7 %	91,1 % 83,9 %	73,6 % 60,4 %	- 13,2	5,33
54 42	$c^4 \times c$ $x^m \times x$	89,9 % 44,9 %	93,5 % 63,7 %	98,2 % 78,6 %	92,8 % 58,2 %	- 34,6	10,39
52 60	$b^5 \div b$ $y^a \div y$	86,2 % 53,6 %	87,1 % 67,7 %	94,6 % 89,3 %	88,1 % 65,4 %	- 22,7	7,43
16 63	$i^{12} \div i^{12}$ $a^b \div a^b$	72,5 % 60,1 %	77,4 % 70,2 %	92,9 % 87,5 %	78,0 % 68,9 %	- 9,1	3,44

Les sept écarts entre les pourcentages de réussite globaux de ce tableau sont négatifs. Pour tous ces couples de questions qui présentent des bases algébriques, on remarque que tous les pourcentages de réussite sont supérieurs lorsque ces expressions présentent des exposants numériques plutôt qu'algébriques.

Les trois questions les mieux réussies de cette série (les questions 8, 19 et 54) sont des expressions qui ont des exposants numériques plutôt qu'algébriques. Les questions 6 et 42 sont les moins bien réussies de cette série. Elles présentent des exposants algébriques et sont des cas particuliers d'expressions. D'ailleurs, l'écart entre les pourcentages de réussite des questions 42 et 54 (une des moins bien réussie et une des mieux réussie) est le plus élevé de ce tableau (- 34,6 %). Aussi, les questions associées 6 et 50 sont les moins bien réussies de cette série. Ces expressions présentent aussi des cas particuliers : des bases algébriques affectées d'exposants opposés (-9 et 9 ainsi que $-a$ et a). Or, les résultats à ces questions montrent que, pour des produits de puissances dont les bases sont algébriques, les élèves éprouvent des difficultés à réduire ces expressions lorsque les exposants sont opposés. Par exemple, pour la question 6, la réponse erronée la plus fréquente a été b (52 % des répondants n'ayant pas bien réduit cette expression ont obtenu cette réponse). Ensuite, 12 % des répondants n'ayant pas bien réduit l'expression ont répondu b^{-2a}, alors que 10 % de ces répondants ont donné 0 comme réponse.

Il est intéressant de noter que le deuxième écart le plus élevé entre les pourcentages de réussite globaux revient aussi à des cas particuliers d'expressions : il s'agit des questions associées 52 et 60 (- 22,7 %). Celles-ci présentent des expressions dont certains exposants sont équivalents à 1. Ces questions, ainsi que les cas particuliers des questions 6, 16, 42, 50, 54 et 63 de cette série, seront analysées plus en profondeur dans les sections traitant des expressions dont certains exposants sont équivalents à 1 et des expressions dont la puissance réduite équivalente présente un exposant équivalent à 0 (sections 3.2.6 et 3.2.7).

Que l'on tienne compte ou pas des quatre couples de questions qui présentent des cas particuliers d'expressions, les résultats du tableau 3.6 permettent ainsi de tirer cette conclusion : **pour les produits ou les quotients de puissances dont les bases sont algébriques, TOUS les résultats démontrent que les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les exposants sont numériques plutôt qu'algébriques.**

Maintenant, à la lumière des résultats présentés aux tableaux 3.3 à 3.6, est-ce qu'on peut apporter un élément de réponse à la question de cette recherche? Est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances? On se rend compte, par la compilation de ces résultats, qu'on ne peut pas répondre directement à cette question car il faut y apporter certaines nuances, étant donné les divers cas possibles. Ces divers types d'expressions permettront d'apporter certaines conclusions.

Plusieurs des résultats du tableau 3.3 ont démontré que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions ayant des bases algébriques affectées d'exposants numériques que des expressions ayant des bases et des exposants numériques. Au tableau 3.5, plusieurs des résultats ont démontré que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions ayant des bases et des exposants numériques que des expressions ayant des bases numériques affectées d'exposants algébriques. Ces conclusions permettent d'affirmer **que dans plusieurs cas, les élèves réussissent mieux à réduire des expressions ayant des bases algébriques affectées d'exposants numériques que des expressions ayant des bases et des exposants numériques et qu'en plusieurs cas, ils réussissent mieux à réduire ces dernières expressions que des expressions ayant des bases numériques affectées d'exposants algébriques**.

Plusieurs des résultats du tableau 3.4, quant à eux, ont démontré que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions ayant des bases et des exposants algébriques que des expressions ayant des bases numériques affectées d'exposants algébriques. Tandis que tous les résultats du tableau 3.6 ont établi que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions ayant des bases algébriques affectées d'exposants numériques que des expressions ayant des bases et des exposants algébriques. Ainsi, les constats associés aux résultats des tableaux 3.4 et 3.6 permettent d'affirmer **que dans plusieurs cas, les élèves réussissent mieux à réduire des expressions ayant des bases algébriques plutôt que des bases numériques, affectées d'exposants algébriques et que dans tous les cas, ils réussissent mieux à réduire des expressions ayant des bases algébriques affectées d'exposants numériques, plutôt que d'exposants algébriques**.

Maintenant, il serait intéressant de déterminer si les élèves réussissent mieux à réduire des expressions dont les bases et les exposants sont numériques plutôt que des expressions ayant des bases et des exposants algébriques. Si tel est le cas, on pourrait combiner les deux dernières affirmations des paragraphes précédents et affirmer que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions ayant des bases algébriques affectées d'exposants numériques que des expressions ayant des bases et des exposants numériques, qu'ils réussissent mieux à réduire ces expressions ayant des bases et des exposants numériques que des expressions ayant des bases et des exposants algébriques et, finalement, qu'ils réussissent mieux à réduire ces expressions ayant des bases et des exposants algébriques que des expressions ayant des bases numériques et des exposants algébriques.

Aussi, il est à noter que les constats qui découlent des résultats des tableaux 3.3 et 3.5 ainsi que des tableaux 3.4 et 3.6, s'appliquent pour plusieurs cas et non pas tous les cas. Les sections 3.2.6 et 3.2.7 de ce chapitre analyseront les cas particuliers d'expressions.

Le prochain tableau 3.7 n'était pas prévu dans la méthodologie. Des couples de questions associées ont été créés afin de répondre à cette question : est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des produits ou des quotients de puissances présentant des bases et des exposants numériques que des produits ou des quotients de puissances présentant des bases et des exposants algébriques?

3.2.5 Expressions purement numériques et algébriques

Au tableau 3.7, chaque expression ayant des bases et des exposants numériques est associée à une autre expression ayant des bases et des exposants algébriques. On dira que ces expressions sont purement numériques ou purement algébriques.

Tableau 3.7
Expressions purement numériques ou algébriques

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3^e sec.	4^e sec.	5^e sec.	Global	Écart	
9 13	$7^{15} \times 7^{-22}$ $t^b \times t^{-c}$	71,7 % 75,4 %	67,7 % 78,2 %	69,6 % 87,5 %	69,8 % 78,6 %	+ 8,8	2,69
53 13	$2^{-5} \times 2^8$ $t^b \times t^{-c}$	87,7 % 75,4 %	94,4 % 78,2 %	98,2 % 87,5 %	92,1 % 78,6 %	- 13,5	5,25
15 57	$10^3 \div 10^5$ $x^c \div x^d$	89,9 % 83,3 %	89,5% 83,1 %	100 % 100 %	91,5 % 86,2 %	- 5,3	2,48
20 57	$7^{15} \div 7^{13}$ $x^c \div x^d$	92,8 % 83,3 %	89,5 % 83,1 %	96,4 % 100 %	92,1 % 86,2 %	- 5,9	2,90
29 42	$6^4 \times 6$ $x^m \times x$	89,9 % 44,9 %	89,5 % 63,7 %	96,4 % 78,6 %	90,9 % 58,2 %	- 32,7	9,74

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3^e^ sec.	4^e^ sec.	5^e^ sec.	Global	Écart	
41 6	$2^{-5}\times 2^{5}$ $b^{-a}\times b^{a}$	70,3 % 51,4 %	72,6 % 59,7 %	92,9 % 83,9 %	75,2 % 60,4 %	- 14,8	5,83
43 63	$3^{15}\div 3^{15}$ $a^{b}\div a^{b}$	76,8 % 60,1 %	83,1 % 70,2 %	96,4 % 87,5 %	82,7 % 68,9 %	- 13,8	3,81
35 60	$10^{9}\div 10$ $y^{a}\div y$	84,8 % 53,6 %	87,1 % 67,7 %	96,4 % 89,3 %	87,7 % 65,4 %	- 22,3	7,06

Pour ces huit écarts entre les pourcentages de réussite globaux de ce tableau, sept sont négatifs. Seul le premier couple de cette série présente un écart positif. Pour ce couple de produits de puissances, on remarque que le pourcentage de réussite global est inférieur lorsque l'expression est purement numérique plutôt que purement algébrique. Pour ce qui est des autres expressions de cette série, les pourcentages de réussite sont supérieurs lorsque ces expressions sont purement numériques plutôt que purement algébriques.

Il est intéressant de remarquer que les produits de puissances associés du premier couple de questions présentent chacun un exposant qui est précédé d'un signe positif et au autre exposant qui est précédé d'un signe négatif. Les questions associées 13 et 53 possèdent aussi cette caractéristique. Par contre, l'expression réduite équivalente attendue pour l'expression de la question 9 est une puissance ayant un exposant numérique négatif, contrairement à la question 53 où l'expression réduite équivalente attendue pour cette expression est une puissance ayant un exposant numérique positif. Ainsi, on remarque que pour le produit de puissances dont un exposant est précédé d'un signe positif, l'autre exposant est précédé d'un signe négatif et dont l'expression réduite équivalente attendue pour l'expression ayant des exposants numériques est une puissance ayant un exposant numérique négatif, le pourcentage de réussite global est inférieur lorsque l'expression est purement numérique plutôt que purement algébrique. Et si l'expression réduite équivalente attendue est une puissance ayant un exposant numérique positif, le contraire se produit, c'est-à-dire que le pourcentage de réussite global est supérieur lorsque l'expression est purement numérique plutôt que purement algébrique.

D'ailleurs, les deux questions les mieux réussies de cette série (les questions 20 et 53) sont des expressions purement numériques plutôt que purement algébriques, et dont l'expression réduite équivalente attendue est une puissance ayant un exposant numérique positif. Les questions 6, 42 et 60, quant à elles, sont les moins bien réussies de cette série. Ces cas particuliers d'expressions sont purement algébriques. Pour la question 6, les bases algébriques sont affectées d'exposants algébriques opposés. Pour les questions 42 et 60, une des bases algébriques est affectée d'un exposant égal à 1, qui est sous-entendu. D'ailleurs, les écarts entre les pourcentages de réussite globaux des questions 29 et 42, 6 et 41 ainsi que 35 et 60 sont les plus élevés de ce tableau (- 32,7 %, - 14,8 % et - 22,3 %). Ces cas particuliers sont traités aux sections 3.2.6 et 3.2.7.

Or, si on ne tient pas compte des quatre couples de questions qui présentent des cas particuliers d'expressions, les résultats des deuxième, troisième et quatrième couples de questions, présentés au tableau 3.6, indiquent que **pour les produits ou les quotients de puissances, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsqu'elles sont purement numériques plutôt que purement algébriques.**

Par contre, pour le produit de puissances purement numériques ou purement algébriques dont un exposant est précédé d'un signe positif, l'autre exposant est précédé d'un signe négatif et dont l'expression réduite équivalente attendue pour l'expression ayant des exposants numériques est une puissance ayant un exposant numérique négatif, un résultat indique que les élèves réussissent mieux à réduire cette expression lorsqu'elle est purement algébrique plutôt que purement numérique.

Maintenant, si on tient compte des quatre couples de questions qui présentent des cas particuliers d'expressions, les résultats présentés au tableau 3.6, indiquent que dans plusieurs cas, pour les produits ou les quotients de puissances, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsqu'elles sont purement numériques plutôt que purement algébriques.

Qu'en est-il de la question de cette recherche? Est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances? Selon les résultats des tableaux 3.3 à 3.7, on peut affirmer que dans plusieurs cas, les élèves réussissent mieux à réduire des expressions ayant des bases algébriques affectées d'exposants numériques que des expressions ayant des bases et des exposants numériques. Dans certains cas, ils semblent mieux réussir à réduire ces expressions ayant des bases et des exposants numériques que des expressions ayant des bases et des exposants algébriques. Finalement, dans plusieurs cas, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions ayant des bases et des exposants algébriques que des expressions ayant des bases numériques et des exposants algébriques.

Par contre, il faut noter que ces conclusions ne s'appliquent pas pour certains cas particuliers mentionnés précédemment. Pour en faire une synthèse, ces cas particuliers sont regroupés aux tableaux 3.8 et 3.9.

3.2.6 Expressions dont certains exposants sont équivalents à 1

Pour le tableau 3.8, on retrouve une comparaison des résultats pour des questions présentant des expressions composées de certains exposants équivalents à 1. On y compare des expressions ayant des bases numériques ou algébriques et des exposants numériques ou mixtes. Pour le tableau 3.8, on dira d'une expression à réduire qu'elle présente des exposants mixtes lorsque cette expression présente une base affectée d'un exposant algébrique et une autre base affectée d'un exposant numérique équivalent à 1, comme par exemple, l'expression $9^m \times 9$.

Tableau 3.8
Expressions dont certains exposants sont équivalents à 1

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3^e sec.	4^e sec.	5^e sec.	Global	Écart	
29 58	$6^4 \times 6$ $9^m \times 9$	89,9 % 47,1 %	89,5 % 60,5 %	96,4 % 78,6 %	90,9 % 57,9 %	- 33,0	9,79
35 55	$10^9 \div 10$ $10^m \div 10$	84,8 % 47,1 %	87,1 % 62,9 %	96,4 % 89,3 %	87,7 % 65,4 %	- 22,3	8,28

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3^e sec.	4^e sec.	5^e sec.	Global	Écart	
54 42	$c^4 \times c$ $x^m \times x$	89,9 % 44,9 %	93,5 % 63,7 %	98,2 % 78,6 %	92,8 % 58,2 %	- 34,6	10,39
52 60	$b^5 \div b$ $y^a \div y$	86,2 % 53,6 %	87,1 % 67,7 %	94,6 % 89,3 %	88,1 % 65,4 %	- 22,7	7,43
55 60	$10^m \div 10$ $y^a \div y$	47,1 % 53,6 %	62,9 % 67,7 %	89,3 % 89,3 %	60,7 % 65,4 %	+ 4,7	3,27

Pour les quatre premiers écarts entre les pourcentages de réussite globaux de ce tableau, tous sont négatifs. Pour ces quatre premiers couples de questions présentant des expressions dont certains exposants sont équivalents à 1, on remarque que les pourcentages de réussite sont supérieurs lorsque ces expressions présentent des exposants numériques plutôt que mixtes.

Les deux premiers couples de questions de ce tableau sont des expressions qui présentent des bases numériques. Les deux autres couples suivants ont des bases algébriques. Pour toutes ces expressions, les pourcentages de réussite sont supérieurs lorsque les exposants sont numériques plutôt que mixtes. D'ailleurs, les résultats sont beaucoup plus faibles pour les quatre expressions dont les exposants sont mixtes. En effet, tous les pourcentages de réussite globaux à ces questions sont inférieurs à 66 %. Or, les élèves ont beaucoup de difficultés à réduire des expressions présentant des produits ou des quotients de puissances dont certains exposants sont équivalents à 1, lorsque les exposants sont mixtes plutôt que numériques, et ce, peu importe si les bases sont algébriques ou numériques. Par exemple, pour l'expression $9^m \times 9$ de la question 58, la réponse erronée la plus fréquente a été 9^m. 32 % des répondants n'ayant pas bien réduit cette expression ont obtenu cette réponse. Ensuite, 15 % de ces répondants ont répondu que cette expression ne se réduisait pas. Encore là, certains élèves ont répondu que l'expression ne se réduisait pas parce que les exposants étaient différents. La troisième erreur la plus fréquente a été de multiplier les bases : 14 % de ces répondants ont donné comme réponse l'expression 81^m.

Pour les quatre expressions dont les exposants sont numériques, tous les pourcentages de réussite globaux sont supérieurs à 87 %. Ces résultats expliquent les écarts entre les pourcentages de réussite globaux qui sont tous supérieurs à 22 %.

Ensuite, pour les questions associées 55 et 60 de cette série, on remarque que pour le quotient de puissances pour lesquels les expressions présentent un exposant équivalent à 1 et un autre sous forme algébrique, les pourcentages de réussite sont supérieurs lorsque les bases sont algébriques plutôt que numériques

Ainsi, les résultats des quatre premiers couples de questions associées du tableau 3.8 démontrent que, **pour les produits ou les quotients de puissances dont certains exposants sont équivalents à 1, les résultats démontrent que les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les exposants sont numériques plutôt que mixtes, et ce, peu importe si les bases sont algébriques ou numériques.**

Aussi, pour le quotient de puissances pour lesquels les expressions présentent un exposant équivalent à 1 et un autre sous forme algébrique (le cinquième couple de questions associées de ce tableau), un résultat indique que les élèves réussissent mieux à réduire cette expression lorsque les bases sont algébriques plutôt que numériques.

3.2.7 Questions où l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul

On retrouve dans le tableau 3.9 une comparaison des résultats pour des questions dont l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul. On y compare des expressions ayant des bases numériques ou algébriques et des exposants numériques ou algébriques. Il est à noter que pour ces expressions, deux types de réponses ont été acceptées : 1 ou la base affectée d'un exposant nul.

Tableau 3.9
Questions où l'expression équivalente réduite est égale à 1
ou à une puissance dont l'exposant est nul

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3^e sec.	4^e sec.	5^e sec.	Global	Écart	
41 12	$2^{-5} \times 2^5$ $6^{-a} \times 6^a$	70,3 % 53,6 %	72,6 % 60,5 %	92,9 % 85,7 %	75,2 % 61,9 %	- 13,3	5,25
43 31	$3^{15} \div 3^{15}$ $6^a \div 6^a$	76,8 % 64,5 %	83,1 % 78,2 %	96,4 % 92,9 %	82,7 % 74,8 %	- 7,9	3,37
50 6	$c^{-9} \times c^9$ $b^{-a} \times b^a$	64,7 % 51,4 %	72,6 % 59,7 %	91,1 % 83,9 %	73,6 % 60,4 %	- 13,2	5,33
16 63	$i^{12} \div i^{12}$ $a^b \div a^b$	72,5 % 60,1 %	77,4 % 70,2 %	92,9 % 87,5 %	78,0 % 68,9 %	- 9,1	3,44
43 16	$3^{15} \div 3^{15}$ $i^{12} \div i^{12}$	76,8 % 72,5 %	83,1 % 77,4 %	96,4 % 92,9 %	82,7 % 78,0 %	- 4,7	2,14
31 63	$6^a \div 6^a$ $a^b \div a^b$	64,5 % 60,1 %	78,2 % 70,2 %	92,9 % 87,5 %	74,8 % 68,9 %	- 5,9	2,39

Sur les quatre premiers écarts entre les pourcentages de réussite globaux de ce tableau, tous sont négatifs. Pour ces quatre premiers couples de questions, dont les expressions équivalentes réduites sont égales à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul, on remarque que les pourcentages de réussite globaux sont supérieurs lorsque ces expressions présentent des exposants numériques plutôt qu'algébriques.

Les deux premiers couples de questions de ce tableau sont des expressions qui présentent des bases numériques. Les deux couples suivants ont des bases algébriques. Pour toutes ces expressions, les pourcentages de réussite sont supérieurs lorsque les exposants sont numériques plutôt qu'algébriques.

Dans cette série, deux couples de questions associées présentent des écarts entre les pourcentages de réussite globaux supérieurs aux autres écarts (- 13,2 % et - 13,3 %): les questions associées 12 et 41 ainsi que 6 et 50. D'ailleurs, ces couples de questions présentent les pourcentages de réussite les plus faibles de cette série : les questions 6 et 12. Ces deux questions présentent des produits de puissances ayant des bases numériques ou algébriques mais dont les exposants algébriques sont opposés ($-a$ et a dans les deux cas). Ainsi, ces résultats permettent d'observer que les élèves ont beaucoup de difficulté à réduire des expressions présentant des produits de puissances dont les exposants sont algébriques, mais de signes opposés, et ce, peu importe si les bases sont algébriques ou numériques.

Ensuite, dans cette série, les résultats aux deux derniers couples de questions associées (16 et 43 ainsi que 31 et 63) montrent que pour le quotient de puissances identiques, les pourcentages de réussite globaux sont supérieurs lorsque ces expressions présentent des bases numériques plutôt qu'algébriques. Il est intéressant de faire le parallèle entre les réponses erronées les plus fréquentes aux questions 43 et 63. En effet, pour la réduction de l'expression $3^{15} \div 3^{15}$ de la question 43, la réponse erronée la plus fréquente a été 3, pour 46 % des répondants n'ayant pas bien réduit cette expression. Ensuite, 34 % de ces répondants ont réduit cette expression par le nombre 0. Ensuite, pour ce qui est de la réduction de l'expression $a^b \div a^b$ de la question 63, 38 % des répondants n'ayant pas bien réduit cette expression ont donné comme réponse l'expression a. Ensuite, 18 % de ces répondants ont réduit cette expression par le nombre 0. Il est intéressant de remarquer que, dans les deux cas, la réponse erronée la plus fréquente correspond à la base impliquée dans l'expression et la deuxième erreur la plus fréquente correspond au nombre 0.

À la lumière des résultats des quatre premiers couples de questions associées présentés dans le tableau 3.9, on peut affirmer que **pour les produits ou les quotients de puissances pour lesquels l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul, les résultats démontrent que les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les exposants sont numériques plutôt qu'algébriques, et ce, peu importe si les bases sont algébriques ou numériques.**

Aussi, pour le quotient de puissances identiques (que les exposants soient numériques ou algébriques), les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les bases sont numériques plutôt qu'algébriques.

Maintenant, à la lumière des résultats présentés aux tableaux 3.8 et 3.9, est-ce qu'on peut ajouter un élément de réponse à la question de cette recherche? Est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances? En fait, pour plusieurs cas particuliers de produits ou de quotients de puissances, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les exposants sont numériques plutôt qu'algébriques ou mixtes, et ce, peu importe si les bases sont algébriques ou numériques.

3.2.8 Produits et quotients de puissances

Dans le questionnaire, les élèves devaient réduire certaines expressions composées de produits et de quotients de puissances, de la forme suivante:

$$\frac{a^e \times b^f}{c^g \times d^h}.$$

Au tableau 3.10, on retrouve une comparaison des résultats pour ces questions. Chaque expression ayant des bases numériques est associée à une autre expression ayant des bases algébriques. Dans les deux cas, les exposants de ces puissances sont numériques.

Tableau 3.10
Produits et quotients de puissances

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3ᵉ sec.	4ᵉ sec.	5ᵉ sec.	Global	Écart	
71	$\frac{5^3 \times 5^{10}}{5^4 \times 5^3}$	76,8 %	71,0 %	80,4 %	75,2 %		
78	$\frac{a^7 \times a^3}{a^2 \times a^4}$	79,7 %	83,1%	83,9%	81,8%	+ 6,6	2,69
69	$\frac{3^{-2} \times 3^{10}}{3^{-12} \times 3^3}$	50,0 %	52,4 %	60,7 %	52,8 %		
75	$\frac{x^{-10} \times x^{13}}{x^{-9} \times x^5}$	54,3 %	58,9 %	75,0 %	59,7 %	+ 6,9	2,32
72	$\frac{7^9 \times 3^{10}}{3^4 \times 7^6}$	79,7 %	67,7 %	69,6 %	73,3 %		
67	$\frac{m^4 \times n^{10}}{n^6 \times m^2}$	80,4 %	74,2 %	82,1 %	78,3 %	+ 5,0	2,41

Tous les écarts entre les pourcentages de réussite globaux de ce tableau sont positifs. Pour tous ces couples de questions, qui sont composées de produits et de quotients de puissances dont les exposants sont numériques, on remarque que les pourcentages de réussite sont supérieurs lorsque ces expressions présentent des bases algébriques plutôt que numériques.

D'ailleurs, la question la mieux réussie de cette série (la question 78) est une expression qui a des bases algébriques plutôt que numériques. La question la moins bien réussie de cette série est la question 69. Elle présente d'ailleurs des bases numériques. Cette question est associée à la question 75. Ces questions sont les moins bien réussies de cette série avec chacune un taux de réussite inférieur à 60 %. Contrairement aux autres expressions de cette série, ces expressions présentent certains exposants négatifs. Si on compare les résultats aux questions 69 et 75 avec ces autres questions, on peut affirmer que pour des expressions composées de produits et de quotients de puissances dont les exposants sont numériques, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque ces exposants sont tous positifs.

Or, les résultats du tableau 3.10 permettent d'affirmer que **pour les expressions composées de produits et de quotients de puissances dont les exposants sont numériques, TOUS les résultats démontrent que les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les bases sont algébriques plutôt que numériques**.

3.2.9 Nombres positifs plus grands : exposants de la même forme

Comme il a été mentionné au chapitre précédent, des expressions présentant des bases ou des exposants sous la forme de nombres positifs plus grands ont été présentées aux répondants. Certaines de ces expressions, qui présentaient des bases numériques plus grandes, permettraient de vérifier si les élèves réussissent mieux à réduire des expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus grandes ou algébriques que des expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus petites. D'autres expressions, présentant des exposants numériques plus grands, ont été ajoutées afin d'enrichir les résultats.

Les tableaux 3.11 et 3.12 sont constitués de triplets de questions associées. Chaque comparaison se fait entre trois expressions : une des expressions présente des plus petits nombres comme bases ou comme exposants, une seconde expression présente de plus grands nombres comme bases ou comme exposants et une troisième expression présente des bases ou des exposants algébriques. Dans le tableau 3.11, chaque expression d'un même triplet de questions associées a des exposants de la même forme alors que dans le tableau 3.12, ces expressions ont des bases de la même forme.

Pour le tableau 3.11, pour chaque triplet d'expressions, les bases de chacune des expressions sont différentes : elles sont numériques positives (plus petites ou plus grandes) ou algébriques. Les exposants sont alors sous une même forme pour ces trois expressions : ils sont numériques positifs (plus petits ou plus grands) ou algébriques.

Tableau 3.11

Nombres positifs plus grands : exposants de la même forme

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Q de Cochran
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart	
5	$2^5 \times 2^7$	81,9 %	79,0 %	87,5 %	81,8 %		
23	$53^4 \times 53^3$	92,8 %	91,1 %	94,6 %	92,5 %	+ 10,7	
19	$x^5 \times x^2$	94,9 %	96,0 %	96,4 %	95,6 %	+ 3,1	49,875
20	$7^{15} \div 7^{13}$	92,8 %	89,5 %	96,4 %	92,1 %		
62	$61^8 \div 61^3$	96,4 %	93,5 %	100 %	95,2 %	+ 3,1	
8	$a^{10} \div a^8$	95,7 %	96,0 %	98,2 %	96,2 %	+ 1	10,828
64	$3^{42} \times 3^{53}$	84,8 %	86,3 %	91,1 %	86,5 %		
49	$47^{42} \times 47^{53}$	94,2 %	93,5 %	96,4 %	94,3 %	+ 7,8	
22	$a^{25} \times a^{32}$	89,1 %	87,1 %	87,5 %	88,1 %	- 6,2	16,667
17	$2^a \times 2^b$	65,2 %	74,2 %	89,3 %	73,0 %		
18	$41^a \times 41^b$	66,7 %	74,2 %	85,7 %	73,0 %	+ 0	
34	$m^a \times m^b$	65,9 %	81,5 %	89,3 %	76,1 %	+ 3,1	9,524
27	$13^a \div 13^b$	79,0 %	81,5 %	94,6 %	82,7 %		
7	$67^a \div 67^b$	73,9 %	72,6 %	98,2 %	77,7 %	- 5	
57	$x^c \div x^d$	83,3 %	83,1 %	100 %	86,2 %	+ 8,5	21,686

Dans ce tableau, on remarque trois catégories d'expressions. Les deux premiers triplets sont constitués d'expressions dont les exposants sont des nombres plus petits. Le troisième triplet de questions présente aussi des expressions ayant des exposants numériques, mais ceux-ci sont des nombres plus grands. Les expressions des deux derniers triplets présentent des exposants, quant à eux, algébriques. Dans chacun des triplets, les expressions présentent des bases sous trois formes différentes : des bases numériques, plus petites ou plus grandes, ou des bases algébriques.

Pour les deux premiers triplets, on remarque une progression croissante des pourcentages de réussite globaux. Ainsi, pour des expressions dont les exposants sont des nombres plus petits, le pourcentage de réussite global est plus élevé lorsque les bases sont des nombres plus grands, comparativement à des expressions dont les bases sont des nombres plus petits. Aussi, le pourcentage de réussite global est encore plus élevé lorsque les bases sont algébriques, comparativement à des expressions dont les bases sont des nombres plus grands. Il est à noter que, pour les expressions dont les exposants numériques sont plus petits, les pourcentages de réussite globaux des expressions présentant des bases numériques plus grandes et des bases algébriques sont semblables (les écarts entre ces pourcentages de réussite sont de + 3,1 % et de + 1%). Ainsi, pour ces questions, les élèves semblent avoir plus de facilité à réduire les expressions présentant des bases numériques plus grandes ou algébriques, comme si une base numérique plus grande se comportait davantage comme une base algébrique plutôt que comme une base numérique plus petite.

Par contre, il n'en va pas de même pour le troisième triplet. Ainsi, on remarque que, pour ce produit de puissances dont les exposants sont des nombres plus grands, le pourcentage de réussite global est plus élevé lorsque les bases sont des nombres plus grands, plutôt que des nombres plus petits. Par contre, le pourcentage de réussite global est plus faible lorsque les bases sont algébriques, comparativement à des expressions dont les bases sont des nombres plus grands. Tout de même, il est à noter que le pourcentage de réussite global demeure plus élevé pour le produit de puissances dont les exposants numériques sont plus grands, lorsque ces expressions présentent des bases algébriques, plutôt que lorsque les bases sont des nombres plus petits.

Finalement, on remarque que, pour les deux derniers triplets de ce tableau qui présentent des expressions dont les exposants sont sous forme algébrique, le pourcentage de réussite global est identique ou plus faible lorsque les bases sont des nombres plus grands, comparativement à des expressions dont les bases sont des nombres plus petits. Par contre, le pourcentage de réussite global est plus élevé lorsque les bases sont algébriques, comparativement à des expressions dont les bases sont des nombres plus grands. Encore là, on remarque que le pourcentage de réussite global demeure plus élevé pour le produit ou le quotient de puissances présentant des exposants algébriques lorsque ces expressions montrent des bases algébriques, plutôt que lorsque les bases sont des nombres plus petits.

À la lumière des résultats présentés dans le tableau 3.11, les résultats des deux premiers triplets permettent d'affirmer que, pour les produits ou les quotients de puissances dont les exposants sont des nombres positifs plus petits, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les bases sont des nombres plus grands ou sous la forme algébrique, plutôt que des nombres plus petits. Par contre, les résultats aux trois derniers triplets de cette série indiquent que ce dernier constat ne tient plus, lorsque les exposants d'un produit de puissances sont des nombres positifs plus grands ou lorsque les exposants d'un produit ou d'un quotient de puissances sont sous forme algébrique.

Or, les résultats du tableau 3.11 indiquent que, **pour des triplets d'expressions dont les exposants sont de la même forme et dont certaines bases ou certains exposants sont sous la forme de nombres positifs plus grands, on ne peut déterminer si les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsqu'elles présentent des bases numériques plus grandes ou algébriques, plutôt que des bases numériques plus petites.**

3.2.10 Nombres positifs plus grands : bases de la même forme

La comparaison des résultats pour des questions présentant des nombres positifs plus grands se poursuit avec le tableau 3.12. Ce tableau est constitué de triplets d'expressions dont les exposants de chacune des expressions sont différents : ils sont numériques (plus petits ou plus grands) ou algébriques. Les bases sont sous une même forme pour ces trois expressions : elles sont numériques positives (plus petites ou plus grandes) ou algébriques.

Tableau 3.12

Nombres positifs plus grands : bases de la même forme

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Q de Cochran
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart	
5	$2^5 \times 2^7$	81,9 %	79,0 %	87,5 %	81,8 %		
64	$3^{42} \times 3^{53}$	84,8 %	86,3 %	91,1 %	86,5 %	+ 4,7	
17	$2^a \times 2^b$	65,2 %	74,2 %	89,3 %	73,0 %	- 13,5	22,683
20	$7^{15} \div 7^{13}$	92,8 %	89,5 %	96,4 %	92,1 %		
56	$3^{62} \div 3^{42}$	90,6 %	92,7 %	98,2 %	92,8 %	+ 0,7	
27	$13^a \div 13^b$	79,0 %	81,5 %	94,6 %	82,7 %	- 10,1	30,125
23	$53^4 \times 53^3$	92,8 %	91,1 %	94,6 %	92,5 %		
49	$47^{42} \times 47^{53}$	94,2 %	93,5 %	96,4 %	94,3 %	+ 1,8	
18	$41^a \times 41^b$	66,7 %	74,2 %	85,7 %	73,0 %	- 21,3	97,747
62	$61^8 \div 61^3$	96,4 %	93,5 %	100 %	95,2 %		
65	$47^{63} \div 47^{51}$	92,0 %	91,1 %	98,2 %	92,8 %	- 2,4	
7	$67^a \div 67^b$	73,9 %	72,6 %	98,2 %	77,7 %	- 15,1	80,111
19	$x^5 \times x^2$	94,9 %	96,0 %	96,4 %	95,6 %		
22	$a^{25} \times a^{32}$	89,1 %	87,1 %	87,5 %	88,1 %	- 7,5	
34	$m^a \times m^b$	65,9 %	81,5 %	89,3 %	76,1 %	- 12	64,440
8	$a^{10} \div a^8$	95,7 %	96,0 %	98,2 %	96,2 %		
36	$a^{67} \div a^{42}$	86,2 %	81,5 %	96,4 %	89,3 %	- 6,9	
57	$x^c \div x^d$	83,3 %	83,1 %	100 %	86,2 %	- 3,1	25,125

Le tableau 3.12, tout comme le tableau 3.11, présente aussi trois catégories d'expressions. Tout d'abord, les deux premiers triplets sont constitués d'expressions dont les bases sont des nombres plus petits. Les deux triplets suivants possèdent des bases numériques dont les nombres sont plus grands. Quant aux bases des expressions des deux derniers triplets, elles sont algébriques. Dans chacun des triplets, les expressions présentent des exposants sous trois formes différentes : des bases numériques, petites ou grandes, ou des bases algébriques.

Pour les deux premiers triplets, on remarque que, pour le produit ou le quotient de puissances dont les bases sont des nombres plus petits, le pourcentage de réussite global est plus élevé lorsque les exposants sont des nombres plus grands, comparativement à des expressions dont les exposants sont des nombres plus petits. Par contre, le pourcentage de réussite global diminue pour les expressions dont les bases sont algébriques. Ainsi, pour le produit ou le quotient de puissances dont les bases sont des nombres plus petits, le pourcentage de réussite global est plus faible lorsque les exposants sont sous forme algébrique, comparativement à des expressions dont les exposants sont des nombres plus grands. Ces résultats sont en lien avec les résultats observés aux sections 3.2.2, 3.2.4 et 3.2.5 : les expressions présentant des exposants algébriques sont beaucoup moins bien réussies. Or, il est à noter que, pour le produit ou le quotient de puissances dont les bases numériques sont plus petites, le pourcentage de réussite global demeure plus élevé lorsque ces expressions présentent des exposants numériques plus petits, plutôt que des exposants sous la forme algébrique.

Ensuite, pour les deux triplets suivants, on remarque que, pour le produit de puissances dont les bases sont des nombres plus grands, le pourcentage de réussite global est plus élevé lorsque les exposants sont des nombres plus grands, comparativement à des expressions dont les exposants sont des nombres plus petits. Au contraire, pour le quotient de puissances dont les bases sont des nombres plus grands, le pourcentage de réussite global est plus faible lorsque les exposants sont des nombres plus grands, comparativement à des expressions dont les exposants sont des nombres plus petits. Maintenant, tout comme les deux premiers triplets de ce tableau, le pourcentage de réussite global est plus faible lorsque les exposants sont sous la forme algébrique, comparativement à des expressions dont les exposants sont des nombres plus grands. Encore là, le pourcentage de réussite global reste plus élevé lorsque ces expressions présentent des exposants numériques plus petits, plutôt que des exposants sous la forme algébrique.

Finalement, les deux derniers triplets de ce tableau présentent des produits ou des quotients de puissances ayant des bases algébriques. Pour le produit ou le quotient de puissances ayant des bases algébriques, le pourcentage de réussite global est plus faible lorsque les exposants sont des nombres plus grands, comparativement à des expressions dont les exposants sont des nombres plus petits. Aussi, le pourcentage de réussite global est encore plus faible lorsque les exposants sont algébriques, comparativement à des expressions dont les exposants sont des nombres plus grands.

Or, au tableau 3.12, les résultats indiquent que, pour des triplets d'expressions dont les bases sont de la même forme et dont certaines bases ou certains exposants sont sous la forme de nombres positifs plus grands, il n'est pas possible d'identifier des caractéristiques communes quant aux exposants de ces expressions. Par contre, certains constats, énoncés précédemment, permettent d'enrichir l'analyse des résultats.

Les résultats présentés aux tableaux 3.11 et 3.12 ne répondent pas directement à la question de recherche. Par contre, afin d'enrichir les résultats, certaines expressions de ces séries avaient pour but de répondre à une autre question : est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus grandes ou algébriques que des expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus petites? En fait, les résultats ne permettent pas d'affirmer que les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsqu'elles présentent des bases numériques plus grandes ou algébriques, plutôt que des bases numériques plus petites. Par contre, certains résultats confirment cette affirmation. Aussi, les autres expressions de ces séries qui présentent des exposants numériques plus grands, n'ont pas permis d'identifier des caractéristiques communes quant aux exposants de ces expressions. Le nombre peu élevé de cas de comparaisons ne permet pas de pousser l'étude plus loin.

Maintenant, à travers la compilation des résultats aux sections 3.3 à 3.7 et 3.10 à 3.12, on remarque que des questions présentent des pourcentages de réussite globaux plus élevés ou plus faibles. Afin d'identifier les types de problèmes qui sont plus faciles et plus difficiles pour les élèves, les tableaux 3.13 et 3.14 regroupent les questions les mieux réussies et les moins bien réussies par les élèves.

3.2.11 Les dix questions les mieux réussies

Le tableau 3.13 présente les dix questions les mieux réussies par les répondants. Dans ce tableau, tous les pourcentages de réussite globaux sont supérieurs à 92 %.

Tableau 3.13
Les dix questions les mieux réussies

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite			
		3^e sec.	4^e sec.	5^e sec.	Global
8	$a^{10} \div a^{8}$	95,7%	96,0 %	98,2%	96,2 %
62	$61^{8} \div 61^{3}$	96,4 %	93,5 %	100 %	95,9 %
19	$x^{5} \times x^{2}$	94,9 %	96,0 %	96,4 %	95,6 %
49	$47^{42} \times 47^{53}$	94,2 %	93,5 %	96,4 %	94,3 %
56	$3^{62} \div 3^{42}$	90,6 %	92,7 %	98,2 %	92,8 %
65	$47^{63} \div 47^{51}$	92,0 %	91,1 %	98,2 %	92,8 %
54	$c^{4} \times c$	89,9 %	93,5 %	98,2 %	92,8 %
23	$53^{4} \times 53^{3}$	92,8 %	91,1 %	94,6 %	92,5 %
20	$7^{15} \div 7^{13}$	92,8%	89,5%	96,4%	92,1 %
53	$2^{-5} \times 2^{8}$	87,7 %	94,4 %	98,2 %	92,1 %

Tout d'abord, on remarque que, pour toutes les questions obtenant des pourcentages de réussite globaux très élevés, toutes les expressions présentent des exposants numériques. Seulement un des exposants de ces expressions est négatif (question 53). Trois de ces expressions présentent des exposants plus grands (aux questions 49, 56 et 65). D'ailleurs cinq expressions de cette série sont associées à des bases numériques ou des exposants numériques plus grands.

Ensuite, on remarque que ces expressions sont constituées autant de produits que de quotients de puissances. Il est à noter que les expressions équivalentes réduites qui sont attendues pour ces questions présentent toutes des puissances dont l'exposant est positif, ainsi que différent de 0 ou de 1.

Sept des dix expressions de cette série qui présentent des produits ou des quotients de puissances ayant des exposants numériques, ont des bases algébriques (les questions 8, 19 et 54) ou des bases numériques plus grandes (les questions 23, 49, 62 et 65). Aussi, il est à noter que sept des dix expressions de cette série sont purement numériques (les questions 20, 23, 53, 49, 56, 62 et 65). En effet, ces sept questions présentent des produits ou des quotients de puissances ayant des bases et des exposants numériques.

En résumé, les résultats de cette série permettent d'affirmer que **les expressions à réduire les mieux réussies par les élèves sont des expressions qui présentent des produits ou des quotients de puissances ayant des exposants numériques, exposants qui sont en fait majoritairement des nombres positifs. Ces expressions présentent souvent des bases algébriques ou des bases numériques positives plus grandes. Aussi, ces expressions sont souvent purement numériques.**

3.2.12 Les dix questions les moins biens réussies

On retrouve dans le tableau 3.14 les dix questions présentant les pourcentages de réussite globaux les plus bas. Tous ces pourcentages de réussite globaux sont inférieurs à 62 %.

Tableau 3.14
Les dix questions les moins bien réussies

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite			
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global
68	$\dfrac{7^a \times 7^b}{7^c \times 7^a}$	27,5 %	29,8 %	37,5 %	30,2 %
76	$\dfrac{a^x \times a^y}{a^y \times a^z}$	29,7 %	33,9 %	37,5 %	32,7 %
73	$\dfrac{47^a \times 47^a}{47^b \times 47^a}$	34,1 %	41,1 %	48,2 %	39,3 %
69	$\dfrac{3^{-2} \times 3^{10}}{3^{-12} \times 3^3}$	50,0 %	52,4 %	60,7 %	52,8 %
58	$9^m \times 9$	47,1 %	60,5 %	78,6 %	57,9 %
42	$x^m \times x$	44,9 %	63,7 %	78,6 %	58,2 %
75	$\dfrac{x^{-10} \times x^{13}}{x^{-9} \times x^5}$	54,3 %	58,9 %	75,0 %	59,7 %
6	$b^{-a} \times b^a$	51,4 %	59,7 %	83,9 %	60,4 %
55	$10^m \div 10$	47,1 %	62,9 %	89,3 %	60,7 %
12	$6^{-a} \times 6^a$	53,6 %	60,5 %	85,7 %	61,9 %

Tout d'abord, pour huit des dix questions qui obtiennent des pourcentages de réussite globaux très bas, les expressions présentent des exposants algébriques ou mixtes. D'ailleurs, quatre expressions de cette série sont purement algébriques (les questions 6, 42, 60 et 73).

Cette caractéristique (les exposants algébriques ou mixtes) est différente de celle du tableau 3.13, qui présente uniquement des expressions ayant des exposants numériques.

Cinq expressions de cette série sont constituées de produits et de quotients de puissances (les questions 68, 69, 73, 75 et 76). D'ailleurs, les quatre questions les moins bien réussies de ce questionnaire sont composées de produits et de quotients de puissances. Aussi, parmi les cinq autres expressions, quatre présentent des produits de puissances (les questions 6, 12, 42 et 58) alors qu'une autre question est constituée d'un quotient de puissances (la question 55). Parmi ces cinq questions, deux d'entre elles sont des produits de puissances dont les exposants algébriques sont opposés (les questions 6 et 12). Ces questions, dont l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul, font partie d'une série de questions qui ont été moins bien réussies par les élèves (voir la section 3.2.7). Ensuite, toujours parmi ces cinq questions présentant des produits ou des quotients de puissances, les trois autres sont des expressions dont certains exposants sont équivalents à 1 (les questions 42, 55 et 58). Ce type d'expression a aussi été moins bien réussi par les élèves (voir la section 3.2.6).

On remarque aussi qu'une seule question de cette série présente des nombres plus grands : la question 73 présente, en effet, des bases numériques plus grandes. De plus, la question 69 montre la seule expression purement numérique.

En résumé, les résultats de cette série permettent d'affirmer que **les expressions à réduire les moins bien réussies par les élèves présentent souvent des produits ou des quotients de puissances ayant des exposants algébriques. Aussi, ces expressions sont souvent composées de produits et de quotients de puissances (dans une même expression).**

La prochaine section de ce chapitre propose la synthèse des résultats présentés précédemment.

3.3 Synthèse des résultats

L'analyse des résultats présentée aux sections précédentes a permis d'apporter des éléments de réponse à la question de recherche et à ses sous questions. Maintenant, on reviendra sur certains éléments élaborés à la section 3.2 et on tentera d'aller plus loin, toujours en lien avec la question de recherche : est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances?

Dans les tableaux 3.3 à 3.7, si on ne tient pas compte des cas particuliers, des résultats permettent d'affirmer **que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions ayant des bases algébriques affectées d'exposants numériques que des expressions ayant des bases et des exposants numériques.** Ensuite, certains résultats démontrent **que les élèves semblent mieux réussir à réduire des expressions ayant des bases et des exposants numériques que des expressions ayant des bases et des exposants algébriques.** Finalement, d'autres résultats permettent d'observer **que dans plusieurs cas, les élèves réussissent mieux à réduire des expressions ayant des bases et des exposants algébriques que des expressions ayant des bases numériques et des exposants algébriques**.

Évidemment, les cas particuliers viennent brouiller les pistes. Les résultats présentés aux tableaux 3.8 et 3.9, pour ces cas particuliers d'expressions présentant certains exposants équivalents à 1 ou pour lesquelles l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul, ne sont pas toujours semblables aux cas plus simples correspondants. Or, que peuvent apporter ces résultats à la question de recherche? Est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances, même pour les cas particuliers? En fait, les cas particuliers démontrent que, finalement, la réponse n'est pas si claire. La réussite des élèves pour réduire des expressions algébriques ou numériques contenant des puissances est liée à l'expression elle-même. En effet, cette réussite dépend, par exemple, de la présence de nombres négatifs dans ces expressions, de la grandeur des nombres des ces expressions, de la présence de pièges comme des expressions présentant certains exposants équivalents à 1 ou des expressions pour lesquelles l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul, etc. D'ailleurs, ces cas particuliers faisaient en sorte qu'on retrouvait souvent de grands écarts entre les pourcentages de réussite globaux pour des questions associées.

Mais, mettons de côté ces cas particuliers et regardons tous les couples d'expressions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants numériques, ainsi que tous les couples d'expressions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants algébriques. Les tableaux 3.15 et 3.16 présentent ces cas. À l'appendice E, on retrouve tous les couples d'expressions (particuliers ou non) pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants numériques, ainsi que tous les cas pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants algébriques.

Le tableau 3.15 présente les treize couples de questions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions algébriques contenant des puissances que pour les expressions numériques correspondantes. Le tableau 3.16, quant à lui, présente les neuf couples de questions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions numériques contenant des puissances que pour les expressions algébriques correspondantes.

Tableau 3.15

Couples d'expressions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants algébriques

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3^e^ sec.	4^e^ sec.	5^e^ sec.	Global	Écart	
5 19	$2^5 \times 2^7$ $x^5 \times x^2$	81,9 % 94,9 %	79,0 % 96,0 %	87,5 % 96,4 %	81,8 % 95,6 %	+ 13,8	5,99
9 26	$7^{15} \times 7^{-22}$ $a^{-12} \times a^3$	71,7 % 89,9 %	67,7 % 87,9 %	69,6 % 89,3 %	69,8 % 89,0 %	+ 19,2	6,19

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3[e] sec.	4[e] sec.	5[e] sec.	Global	Écart	
20 8	$7^{15} \div 7^{13}$ $a^{10} \div a^{8}$	92,8% 95,7%	89,5% 96,0 %	96,4% 98,2 %	92,1 % 96,2 %	+ 4,1	2,84
59 66	$5^{10} \div 2^{5}$ $a^{12} \div b^{2}$	71,7% 82,6%	71,0 % 76,6%	65,1% 71,4%	70,4 % 78,3 %	+ 7,9	3,25
61 30	$3^{3} \times 5^{8}$ $d^{5} \times e^{8}$	73,9 % 92,0 %	67,7 % 85,5 %	66,1 % 80,4 %	70,1 % 87,4 %	+ 17,3	6,04
71 78	$\frac{5^{3} \times 5^{10}}{5^{4} \times 5^{3}}$ $\frac{a^{7} \times a^{3}}{a^{2} \times a^{4}}$	76,8 % 79,7 %	71,0 % 83,1%	80,4 % 83,9%	75,2 % 81,8%	+ 6,6	2,69
69 75	$\frac{3^{-2} \times 3^{10}}{3^{-12} \times 3^{3}}$ $\frac{x^{-10} \times x^{13}}{x^{-9} \times x^{5}}$	50,0 % 54,3 %	52,4 % 58,9 %	60,7 % 75,0 %	52,8 % 59,7 %	+ 6,9	2,32
72 67	$\frac{7^{9} \times 3^{10}}{3^{4} \times 7^{6}}$ $\frac{m^{4} \times n^{10}}{n^{6} \times m^{2}}$	79,7 % 80,4 %	67,7 % 74,2 %	69,6 % 82,1 %	73,3 % 78,3 %	+ 5,0	2,41
14 40	$21^{a} \div 21^{-b}$ $x^{m} \div x^{-n}$	65,9 % 72,5 %	71,8 % 79,0 %	91,1 % 92,9 %	72,6 % 79,6 %	+ 7,0	3,04
17 34	$2^{a} \times 2^{b}$ $m^{a} \times m^{b}$	65,2 % 65,9 %	74,2 % 81,5 %	89,3 % 89,3 %	73,0 % 76,1 %	+ 3,1	2,36
27 57	$13^{a} \div 13^{b}$ $x^{c} \div x^{d}$	79,0 % 83,3 %	81,5 % 83,1 %	94,6 % 100 %	82,7 % 86,2 %	+ 3,5	2,20
9 37	$7^{15} \times 7^{-22}$ $2^{a} \times 2^{-b}$	71,7 % 80,4 %	67,7 % 78,2 %	69,6 % 89,3 %	69,8 % 81,1 %	+ 11,3	3,60
9 13	$7^{15} \times 7^{-22}$ $t^{b} \times t^{-c}$	71,7 % 75,4 %	67,7 % 78,2 %	69,6 % 87,5 %	69,8 % 78,6 %	+ 8,8	2,69

Tableau 3.16
Couples d'expressions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants numériques

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3^e^ sec.	4^e^ sec.	5^e^ sec.	Global	Écart	
5 17	$2^5 \times 2^7$ $2^a \times 2^b$	81,9 % 65,2 %	79,0 % 74,2 %	87,5 % 89,3 %	81,8 % 73,0 %	- 8,8	2,92
20 27	$7^{15} \div 7^{13}$ $13^a \div 13^b$	92,8 % 79,0 %	89,5 % 81,5 %	96,4 % 94,6 %	92,1 % 82,7 %	- 9,4	4,16
3 14	$6^5 \div 6^{-2}$ $21^a \div 21^{-b}$	81,9 % 65,9 %	75,8 % 71,8 %	89,3 % 91,1 %	80,8 % 72,6 %	- 8,2	2,84
19 34	$x^5 \times x^2$ $m^a \times m^b$	94,9 % 65,9 %	96,0 % 81,5 %	96,4 % 89,3 %	95,6 % 76,1 %	- 19,5	7,31
10 13	$a^8 \times a^{-5}$ $t^b \times t^{-c}$	89,9 % 75,4 %	91,9 % 78,2 %	87,5 % 87,5 %	90,3 % 78,6 %	- 11,7	4,45
8 57	$a^{10} \div a^8$ $x^c \div x^d$	95,7 % 83,3 %	96,0 % 83,1 %	98,2 % 100 %	96,2 % 86,2 %	- 10	4,72
53 13	$2^{-5} \times 2^8$ $t^b \times t^{-c}$	87,7 % 75,4 %	94,4 % 78,2 %	98,2 % 87,5 %	92,1 % 78,6 %	- 13,5	5,25
15 57	$10^3 \div 10^5$ $x^c \div x^d$	89,9 % 83,3 %	89,5% 83,1 %	100 % 100 %	91,5 % 86,2 %	- 5,3	2,48
20 57	$7^{15} \div 7^{13}$ $x^c \div x^d$	92,8 % 83,3 %	89,5 % 83,1 %	96,4 % 100 %	92,1 % 86,2 %	- 5,9	2,90

Pour les huit premiers couples d'expressions associées du tableau 3.15, les résultats indiquent que, pour les expressions ayant des exposants numériques, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les bases sont algébriques, plutôt que numériques. Il est à noter qu'il n'y pas d'exception dans le tableau 3.16 qui contredit cette observation. Les résultats aux trois prochains couples d'expressions associées du même tableau 3.15 indiquent que pour des expressions ayant des exposants algébriques, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les bases sont algébriques, plutôt que numériques. Encore là, il n'y a pas d'exception dans le tableau 3.16 qui est en opposition avec cette affirmation.

Ainsi, les résultats au tableau 3.15 permettent d'affirmer que, **pour des couples de questions présentant des exposants numériques dans les deux expressions ou des exposants**

algébriques dans les deux expressions, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les bases sont algébriques plutôt que numériques.

Maintenant, pour le tableau 3.16, les résultats aux trois premiers couples d'expressions associées indiquent que, pour les expressions ayant des bases numériques, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les exposants sont numériques, plutôt qu'algébriques. Par contre, l'avant dernier couple de questions associées du tableau 3.15 contredit cette observation. Mais il est à noter que ce couple de questions présente une expression moins bien réussie étant donné la grandeur de ses exposants (voir la section 3.2.1). Les quatrième, cinquième et sixième couples d'expressions du même tableau 3.16 indiquent que pour des expressions ayant des bases algébriques, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les exposants sont numériques, plutôt qu'algébriques. Pour cette affirmation, il n'y a pas d'exception dans le tableau 3.15. Finalement, les résultats aux trois derniers couples de questions du tableau 3.16 indiquent que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions purement numériques (les bases et les exposants sont numériques), plutôt que des expressions purement algébriques (les bases et les exposants sont algébriques). Mais, il faut remarquer que le dernier couple de questions associées du tableau 3.15 contredit cette nouvelle observation.

Ainsi, les résultats au tableau 3.16 permettent de conclure que, **pour des couples de questions présentant des bases numériques dans les deux expressions ou des bases algébriques dans les deux expressions, les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsque les exposants sont numériques plutôt que algébriques.**

Alors, est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances? En fait, les constats amenés par les résultats aux tableaux 3.15 et 3.16 permettent de conclure **que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des bases algébriques, plutôt que des bases numériques et que, souvent, ils réussissent mieux à réduire des expressions présentant des exposants numériques, plutôt que des exposants algébriques.**

D'ailleurs, ces conclusions sont en lien avec les résultats observés pour les questions les mieux réussies et les moins bien réussies. Cette compilation a permis de répondre à une sous question de cette recherche : parmi les expressions numériques et algébriques contenant des puissances qui sont données, quels types d'expressions sont plus faciles et plus difficiles à réduire pour les élèves? Au paragraphe précédent, on souligne que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des bases algébriques, plutôt que des bases numériques. À la section 3.2.11, les résultats indiquaient que les expressions à réduire les mieux réussies par les élèves sont celles qui présentent des exposants numériques, surtout si ces exposants sont des nombres positifs. Mais surtout, on soulignait le fait que ces expressions présentent souvent des bases algébriques ou des bases numériques positives plus grandes. Or, cette dernière affirmation confirme le fait que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des bases algébriques, plutôt que des bases numériques. Aussi, au paragraphe précédent, on souligne que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des exposants numériques, plutôt que des exposants algébriques. Or, cela confirme les résultats de la section 3.2.12 qui indiquaient que ce sont les expressions à réduire présentant des exposants algébriques qui sont les moins réussies par les élèves.

Les séries présentées aux sections 3.2.9 et 3.2.10 tentaient de répondre à une autre sous question de recherche : est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus grandes ou algébriques que des expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus petites? Comme il est mentionné précédemment, à la section 3.2.11, les résultats indiquaient que les expressions à réduire les mieux réussies par les élèves présentent souvent des bases algébriques ou des bases numériques positives plus grandes. Or, on mentionnait aussi précédemment que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des bases algébriques, plutôt que des bases numériques. En regardant les résultats du tableau 3.11 de la section 3.2.9, on remarque que, pour quatre triplets sur cinq, les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des bases numériques plus grandes ou algébriques, plutôt que des bases numériques. Pour les résultats du tableau 3.12 de la section 3.2.10, on remarque que, pour la moitié des triplets, les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des exposants numériques plus petits, plutôt que des exposants numériques plus grands ou algébriques. Sur ces trois triplets d'expressions, un triplet présente des expressions ayant des bases numériques plus grandes, alors que deux autres triplets présentent des bases algébriques. Or, seulement la moitié des triplets d'expressions est en lien avec l'affirmation énoncée précédemment qui disait que, souvent, ils réussissent mieux à réduire des expressions présentant des exposants numériques, plutôt que des exposants algébriques. Il faut aussi ajouter que ce dernier constat ne s'appliquait pas pour tous les cas, mais bien pour plusieurs cas étudiés à travers cette recherche.

La dernière section de ce chapitre présente un résumé des éléments présentés dans les sections précédentes, en lien avec la question de recherche.

3.4 Réponse à la question de recherche

L'objectif de cette recherche était de répondre à la question suivante : est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances? **L'interprétation des résultats a montré qu'il n'était pas possible de répondre à cette question clairement. La réussite des élèves à réduire des expressions algébriques ou numériques contenant des puissances dépend de plusieurs facteurs.**

On l'a vu précédemment, cette réussite dépend, par exemple, de la présence de nombres négatifs dans ces expressions, de la grandeur des nombres des ces expressions, de la présence de pièges comme des expressions présentant certains exposants équivalents à 1 ou des expressions pour lesquelles l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul, etc. Aussi, cette réussite dépend des éléments qui sont sous une forme algébrique et des éléments qui sont sous une forme numérique. On a vu également que les résultats diffèrent si ce sont les bases ou les exposants qui sont sous une forme algébrique ou numérique. L'analyse des résultats montre les nuances qu'il faut apporter en répondant à la question de cette recherche.

Mais, en spécifiant que des résultats pour plusieurs cas particuliers et pour certaines exceptions ne sont pas semblables aux résultats de cas plus simples, on peut quand même affirmer que plusieurs résultats indiquent **que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des bases algébriques, plutôt que des bases numériques et que, souvent, ils réussissent mieux à réduire des expressions présentant des exposants numériques, plutôt que des exposants algébriques.**

CONCLUSION

Ce mémoire a pris naissance lors d'une mini recherche, élaborée dans le cadre du cours d'initiation à la recherche du programme de la maîtrise en didactique des mathématiques, où les résultats sur la notion de puissance négative avaient permis de constater que les élèves réussissaient mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances. Cette recherche visait à vérifier la véracité de cette observation. Ce mémoire avait pour but de répondre à la question de recherche suivante : **est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances?**

Un questionnaire composé d'expressions semblables à réduire a été présenté à des élèves de 3^e à 5^e secondaire. Ces expressions présentaient des produits de puissances, des quotients de puissances, ainsi que des expressions mixtes. Chaque expression numérique contenant des puissances a été associée à une expression algébrique semblable contenant des puissances. On a proposé des expressions où les manipulations sont identiques pour l'arithmétique et pour l'algèbre. On a traité de plusieurs cas possibles ainsi que de cas particuliers en lien avec les notions de produit et de quotient de puissances. Les expressions proposées aux élèves présentaient des exposants numériques entiers (positifs ou négatifs) et algébriques ainsi que des bases numériques positives ou algébriques. Certaines expressions de cette recherche présentaient des bases et des exposants numériques plus grands.

Une première sous question s'est greffée à ce travail. Est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus grandes ou algébriques que des expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus petites? Les résultats n'ont pas permis d'affirmer que les élèves réussissent mieux à réduire ces expressions lorsqu'elles présentent des bases numériques plus grandes ou algébriques, plutôt que des bases numériques plus petites. Seulement certains résultats confirmaient cette affirmation. Étant donné que cet aspect n'était pas le sujet principal de cette recherche, le nombre peu élevé de cas de comparaison n'a pas permis d'obtenir des constats précis. Il y aurait place pour une plus grande investigation quant à la notion de réduction d'expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus grandes.

La seconde sous question concernait les questions les mieux et les moins bien réussies : parmi les expressions numériques et algébriques contenant des puissances données, quels types d'expressions sont plus faciles et plus difficiles à réduire pour ces élèves? Les expressions à réduire les plus réussies par les élèves ont été celles qui présentent des produits ou des quotients de puissances ayant des exposants numériques, surtout si ces exposants sont des nombres positifs. Ces expressions présentent souvent des bases algébriques ou des bases numériques positives plus grandes. Aussi, ces expressions sont souvent purement numériques. De plus, les résultats ont démontré que les expressions à réduire les moins bien réussies par les élèves sont souvent celles qui présentent des produits ou des quotients de puissances ayant des exposants algébriques. Aussi, les expressions à réduire les moins bien réussies sont souvent composées de produits et de quotients de puissances (dans une même expression).

Maintenant, qu'en est-il de la réponse à la question principale de cette recherche? **Est-ce que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances?** En fait, l'interprétation des résultats a montré que la réussite des élèves à réduire des expressions algébriques ou numériques contenant des puissances dépend de plusieurs facteurs. Mais, en spécifiant qu'il y a certaines exceptions, les résultats ont indiqué une tendance : **les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des bases algébriques, plutôt que des bases numériques et souvent, ils réussissent mieux à réduire des expressions présentant des exposants numériques, plutôt que des exposants algébriques.**

Or, on se retrouve face à des résultats mixtes. Si on s'attarde aux bases, les élèves réussissent mieux à réduire les expressions présentant des bases algébriques, alors que si on examine les exposants, ils réussissent mieux à réduire les expressions présentant des exposants numériques. Mais, ce constat est plutôt surprenant puisqu'on remarque souvent que les élèves éprouvent des difficultés en calcul algébrique. Ainsi, on aurait cru que les élèves réussiraient mieux à réduire des expressions numériques contenant des puissances que des expressions algébriques contenant des puissances. D'ailleurs, lorsqu'un élève éprouve des difficultés avec un problème algébrique, on a souvent tendance à retourner à l'arithmétique afin d'expliquer le problème, en remplaçant les lettres par des nombres et en refaisant le problème de la même façon.

Bednarz et Janvier (1996) ont observé «la distance qui sépare le raisonnement arithmétique du raisonnement algébrique» (*voir* sect. 1.4). Les résultats de cette recherche montrent une certaine indépendance entre le raisonnement arithmétique et le raisonnement algébrique. À certains moments, le raisonnement arithmétique est mieux réussi, alors qu'à d'autres, c'est le raisonnement algébrique qui est le mieux réussi. Un raisonnement ne prépare pas l'autre. Ainsi, afin d'expliquer un problème arithmétique à un élève qui éprouve des difficultés, on pourrait utiliser un problème algébrique semblable. L'inverse serait également vrai.

Booth (1984) a remarqué que l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre sont à l'origine des causes d'erreurs en algèbre élémentaire. Ainsi, une autre question se pose: comment enseigner l'arithmétique et l'algèbre de façon à diminuer les difficultés en algèbre? Certaines approches non traditionnelles favorisent une initiation à l'algèbre plus tôt à l'élémentaire. Le programme de mathématiques "*Measure Up*", élaboré par des chercheurs de l'Université de Hawaii, en est un exemple. Dougherty (2003) affirme que les résultats préliminaires de cette approche indiquent que les élèves réussissent à créer des concepts de base riches, desquels ils peuvent bâtir une pensée mathématique plus complexe (*voir* sect. 1.5.1). Il est à noter qu'avec l'entrée en vigueur du nouveau programme de formation de l'école québécoise au primaire, on remarque un certain effort visant à initier les enfants à l'algèbre. Il sera intéressant de voir si ces changements auront des effets au secondaire.

D'ailleurs, pour cette recherche, les résultats aux questions qui ont été puisées dans les travaux de Wong (1997) sont semblables aux résultats obtenus par la chercheuse (*voir* sect. 3.2). Les résultats de Wong démontraient, tout comme dans cette recherche, que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des bases algébriques, plutôt que des bases numériques et qu'ils réussissent mieux à réduire des expressions présentant des exposants numériques, plutôt que des exposants algébriques. Par contre, le cheminement scolaire des élèves ayant participé à ces deux recherches diffère. En fait, les élèves ayant participé à la recherche de Wong ont été initiés à l'algèbre plus tôt dans leur cheminement scolaire que les élèves qui ont participé à la présente recherche. Alors, est-ce qu'initier les élèves à l'algèbre plus tôt à l'élémentaire permet de diminuer les difficultés en algèbre au secondaire? Il serait intéressant de pousser plus loin cette réflexion.

Ce mémoire amène également d'autres pistes de recherche qu'on pourrait explorer. Il serait intéressant de vérifier si le comportement des élèves plus faibles au niveau arithmétique est différent de celui des élèves plus forts au même niveau. Une analyse additionnelle portant sur les différences, si elles existent, entre ces deux sous groupes pourrait être enrichissante. Une conjecture possible serait que les élèves moins forts numériquement réussissent mieux à réduire des expressions algébriques contenant des puissances que des expressions numériques contenant des puissances. Aussi, comme il a été mentionné précédemment, les résultats de cette recherche n'ont pas permis d'affirmer que les élèves réussissent mieux à réduire des expressions présentant des bases numériques plus grandes ou algébriques, plutôt que des bases numériques plus petites. Puisque certains résultats confirmaient cette affirmation et qu'un nombre peu élevé de cas de comparaison ont été observés dans ce travail, il serait intéressant d'approfondir davantage la notion de réduction d'expressions contenant des puissances ayant des bases numériques plus grandes. Finalement, il serait intéressant de se pencher à nouveau sur le sujet de ce mémoire afin de vérifier si l'approche véhiculée par le nouveau programme de formation de l'école québécoise au primaire, visant à initier les enfants à l'algèbre, aura des effets au secondaire.

APPENDICE A

PREMIÈRE VERSION DU QUESTIONNAIRE

Nom :____________________________________**Niveau :**_____**Groupe :**_____

Partie 1

Réduis chaque expression en une expression équivalente. Si ce n'est pas possible de réduire l'expression, explique pourquoi. Il n'est pas nécessaire de transformer une expression réduite présentant un exposant négatif en une expression équivalente ne présentant pas d'exposant négatif.

1) $12^0 \times 12^5$	2) $s^0 \times s^9$	3) $6^5 \div 6^{-2}$	4) $a^{-5} \div a^{-5}$
5) $2^5 \times 2^7$	6) $b^{-a} \times b^a$	7) $67^a \div 67^b$	8) $a^{10} \div a^8$
9) $7^{15} \times 7^{-22}$	10) $a^8 \times a^{-5}$	11) $6^{-8} \div 6^{-8}$	12) $6^{-a} \times 6^a$
13) $t^b \times t^{-c}$	14) $21^a \div 21^{-b}$	15) $10^3 \div 10^5$	16) $i^{12} \div i^{12}$
17) $2^a \times 2^b$	18) $41^a \times 41^b$	19) $x^5 \times x^2$	20) $7^{15} \div 7^{13}$

21) $a^5 \div a^{12}$

22) $a^{25} \times a^{32}$

23) $53^4 \times 53^3$

24) $12^0 \div 12^5$

25) $s^6 \div s^{-12}$

26) $a^{-12} \times a^3$

27) $13^a \div 13^b$

28) $s^{-13} \div s^{-5}$

29) $6^4 \times 6$

30) $d^5 \times e^8$

31) $6^a \div 6^a$

32) $s^5 \div s^{-4}$

33) $5^4 \times 5^{-5}$

34) $m^a \times m^b$

35) $10^9 \div 10$

36) $a^{67} \div a^{42}$

37) $2^a \times 2^{-b}$

38) $b^{-10} \times b^{-4}$

39) $7^{15} \div 7^{-22}$

40) $x^m \div x^{-n}$

41) $2^{-5} \times 2^5$

42) $x^m \times x$

43) $3^{15} \div 3^{15}$

44) $b^0 \div b^{55}$

45) $10^{-3} \times 10^{-4}$

46) $a^{8} \times a^{-9}$

47) $10^{-2} \div 10^{-5}$

48) $a^{-8} \div a^{-11}$

49) $47^{42} \times 47^{53}$

50) $c^{-9} \times c^{9}$

51) $10^{-15} \div 10^{-7}$

52) $b^{5} \div b$

53) $2^{-5} \times 2^{8}$

54) $c^{4} \times c$

55) $10^{m} \div 10$

56) $3^{62} \div 3^{42}$

57) $x^{c} \div x^{d}$

58) $9^{m} \times 9$

59) $5^{10} \div 2^{5}$

60) $y^{a} \div y$

61) $3^{3} \times 5^{8}$

62) $61^{8} \div 61^{3}$

63) $a^{b} \div a^{b}$

64) $3^{42} \times 3^{53}$

65) $47^{63} \div 47^{51}$

N'oublie pas la partie 2 au verso de cette page!

Partie 2

Même question qu'à la partie 1 : réduis chaque expression en une expression équivalente. Si ce n'est pas possible de réduire l'expression, explique pourquoi. Il n'est pas nécessaire de transformer une expression réduite présentant un exposant négatif en une expression équivalente ne présentant pas d'exposant négatif.

1) $\dfrac{m^{4}\times n^{10}}{n^{6}\times m^{2}}$

2) $\dfrac{7^{a}\times 7^{b}}{7^{a}\times 7^{c}}$

3) $\dfrac{3^{-2}\times 3^{10}}{3^{-12}\times 3^{3}}$

4) $\dfrac{37^{6}\times 37^{12}}{37^{4}\times 37^{3}}$

5) $\dfrac{5^{3}\times 5^{10}}{5^{4}\times 5^{3}}$

6) $\dfrac{7^{9}\times 3^{10}}{3^{4}\times 7^{6}}$

7) $\dfrac{47^{a}\times 47^{a}}{47^{b}\times 47^{a}}$

8) $\dfrac{7^{5}\times 3^{4}}{3^{9}\times 7^{3}}$

9) $\dfrac{x^{-10}\times x^{13}}{x^{-9}\times x^{5}}$

10) $\dfrac{a^{x}\times a^{y}}{a^{y}\times a^{z}}$

11) $\dfrac{a^{9}\times b^{10}}{b^{13}\times a^{2}}$

12) $\dfrac{a^{7}\times a^{3}}{a^{2}\times a^{4}}$

APPENDICE B

VERSION FINALE DU QUESTIONNAIRE

Nom :____________________________________**Niveau :**______**Groupe :**_____

Partie 1

Transforme chaque expression en une expression réduite. Si ce n'est pas possible de réduire l'expression, explique pourquoi. Il est possible de laisser une réponse réduite présentant un exposant négatif. **L'usage de la calculatrice n'est pas permis.**

1) $12^0 \times 12^5$	2) $s^0 \times s^9$	3) $6^5 \div 6^{-2}$	4) $a^{-5} \div a^{-5}$
5) $2^5 \times 2^7$	6) $b^{-a} \times b^a$	7) $67^a \div 67^b$	8) $a^{10} \div a^8$
9) $7^{15} \times 7^{-22}$	10) $a^8 \times a^{-5}$	11) $6^{-8} \div 6^{-8}$	12) $6^{-a} \times 6^a$
13) $t^b \times t^{-c}$	14) $21^a \div 21^{-b}$	15) $10^3 \div 10^5$	16) $i^{12} \div i^{12}$
17) $2^a \times 2^b$	18) $41^a \times 41^b$	19) $x^5 \times x^2$	20) $7^{15} \div 7^{13}$
21) $a^5 \div a^{12}$	22) $a^{25} \times a^{32}$	23) $53^4 \times 53^3$	24) $12^0 \div 12^5$
25) $s^6 \div s^{-12}$	26) $a^{-12} \times a^3$	27) $13^a \div 13^b$	28) $s^{-13} \div s^{-5}$
29) $6^4 \times 6$	30) $d^5 \times e^8$	31) $6^a \div 6^a$	32) $s^5 \div s^{-4}$

33) $5^4 \times 5^{-5}$

34) $m^a \times m^b$

35) $10^9 \div 10$

36) $a^{67} \div a^{42}$

37) $2^a \times 2^{-b}$

38) $b^{-10} \times b^{-4}$

39) $7^{15} \div 7^{-22}$

40) $x^m \div x^{-n}$

41) $2^{-5} \times 2^5$

42) $x^m \times x$

43) $3^{15} \div 3^{15}$

44) $b^0 \div b^{55}$

45) $10^{-3} \times 10^{-4}$

46) $a^8 \times a^{-9}$

47) $10^{-2} \div 10^{-5}$

48) $a^{-8} \div a^{-11}$

49) $47^{42} \times 47^{53}$

50) $c^{-9} \times c^9$

51) $10^{-15} \div 10^{-7}$

52) $b^5 \div b$

53) $2^{-5} \times 2^8$

54) $c^4 \times c$

55) $10^m \div 10$

56) $3^{62} \div 3^{42}$

57) $x^c \div x^d$

58) $9^m \times 9$

59) $5^{10} \div 2^5$

60) $y^a \div y$

61) $3^3 \times 5^8$

62) $61^8 \div 61^3$

63) $a^b \div a^b$

64) $3^{42} \times 3^{53}$

65) $47^{63} \div 47^{51}$

66) $a^{12} \div b^2$

Partie 2

Réduis le plus possible chaque expression. Il est possible de laisser une réponse réduite présentant un exposant négatif. **L'usage de la calculatrice n'est pas permis.**

67) $\dfrac{m^4 \times n^{10}}{n^6 \times m^2}$

68) $\dfrac{7^a \times 7^b}{7^c \times 7^a}$

69) $\dfrac{3^{-2} \times 3^{10}}{3^{-12} \times 3^3}$

70) $\dfrac{37^6 \times 37^{12}}{37^4 \times 37^3}$

71) $\dfrac{5^3 \times 5^{10}}{5^4 \times 5^3}$

72) $\dfrac{7^9 \times 3^{10}}{3^4 \times 7^6}$

73) $\dfrac{47^a \times 47^a}{47^b \times 47^a}$

74) $\dfrac{7^5 \times 3^4}{3^9 \times 7^3}$

75) $\dfrac{x^{-10} \times x^{13}}{x^{-9} \times x^5}$

76) $\dfrac{a^x \times a^y}{a^y \times a^z}$

77) $\dfrac{a^9 \times b^{10}}{b^{13} \times a^2}$

78) $\dfrac{a^7 \times a^3}{a^2 \times a^4}$

APPENDICE C

VERSION RÉSUMÉE DU TABLEAU DE COMPILATION

C.1 Version résumée du tableau de compilation : résultats pour toutes les expressions du questionnaire.......109

Tableau C.1
Version résumée du tableau de compilation :
résultats pour toutes les expressions du questionnaire

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite			
		3[e] sec.	4[e] sec.	5[e] sec.	Global
1	$12^0 \times 12^5$	91,3 %	83,9 %	98,2 %	89,6 %
2	$s^0 \times s^9$	91,3 %	87,1 %	98,2 %	90,9 %
3	$6^5 \div 6^{-2}$	81,9 %	75,8 %	89,3 %	80,8 %
4	$a^{-5} \div a^{-5}$	67,4 %	70,2 %	80,4 %	70,8 %
5	$2^5 \times 2^7$	81,9 %	79,0 %	87,5 %	81,8 %
6	$b^{-a} \times b^a$	51,4 %	59,7 %	83,9 %	60,4 %
7	$67^a \div 67^b$	73,9 %	72,6 %	98,2 %	77,7 %
8	$a^{10} \div a^8$	95,7 %	96,0 %	98,2 %	96,2 %
9	$7^{15} \times 7^{-22}$	71,7 %	67,7 %	69,6 %	69,8 %
10	$a^8 \times a^{-5}$	89,9 %	91,9 %	87,5 %	90,3 %
11	$6^{-8} \div 6^{-8}$	68,8 %	70,2 %	91,1 %	73,3 %
12	$6^{-a} \times 6^a$	53,6 %	60,5 %	85,7 %	61,9 %
13	$t^b \times t^{-c}$	75,4 %	78,2 %	87,5 %	78,6 %
14	$21^a \div 21^{-b}$	65,9 %	71,8 %	91,1 %	72,6 %
15	$10^3 \div 10^5$	89,9 %	89,5%	100 %	91,5 %
16	$i^{12} \div i^{12}$	72,5 %	77,4 %	92,9 %	78,0 %
17	$2^a \times 2^b$	65,2 %	74,2 %	89,3 %	73,0 %
18	$41^a \times 41^b$	66,7 %	74,2 %	85,7 %	73,0 %
19	$x^5 \times x^2$	94,9 %	96,0 %	96,4 %	95,6 %
20	$7^{15} \div 7^{13}$	92,8%	89,5%	96,4%	92,1 %
21	$a^5 \div a^{12}$	89,9 %	86,3 %	92,9 %	89,0 %
22	$a^{25} \times a^{32}$	89,1 %	87,1 %	87,5 %	88,1 %
23	$53^4 \times 53^3$	92,8 %	91,1 %	94,6 %	92,5 %
24	$12^0 \div 12^5$	79,0 %	77,4 %	91,1 %	80,5 %
25	$s^6 \div s^{-12}$	72,5 %	79,0 %	85,7 %	77,4 %
26	$a^{-12} \times a^3$	89,9 %	87,9 %	89,3 %	89,0 %
27	$13^a \div 13^b$	79,0 %	81,5 %	94,6 %	82,7 %
28	$s^{-13} \div s^{-5}$	72,5 %	77,4 %	78,6 %	75,5 %
29	$6^4 \times 6$	89,9 %	89,5 %	96,4 %	90,9 %
30	$d^5 \times e^8$	92,0 %	85,5 %	80,4 %	87,4 %
31	$6^a \div 6^a$	64,5 %	78,2 %	92,9 %	74,8 %
32	$s^5 \div s^{-4}$	78,3 %	85,5 %	91,1 %	83,3 %

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite			
		3^e sec.	4^e sec.	5^e sec.	Global
33	$5^4 \times 5^{-5}$	82,6 %	81,5 %	85,7 %	82,7 %
34	$m^a \times m^b$	65,9 %	81,5 %	89,3 %	76,1 %
35	$10^9 \div 10$	84,8 %	87,1 %	96,4 %	87,7 %
36	$a^{67} \div a^{42}$	86,2 %	81,5 %	96,4 %	89,3 %
37	$2^a \times 2^{-b}$	80,4 %	78,2 %	89,3 %	81,1 %
38	$b^{-10} \times b^{-4}$	84,8 %	86,3 %	76,8 %	84,0 %
39	$7^{15} \div 7^{-22}$	81,2 %	79,0 %	89,3 %	81,8 %
40	$x^m \div x^{-n}$	72,5 %	79,0 %	92,9 %	79,6 %
41	$2^{-5} \times 2^5$	70,3 %	72,6 %	92,3 %	75,2 %
42	$x^m \times x$	44,9 %	63,7 %	78,6 %	58,2 %
43	$3^{15} \div 3^{15}$	76,8%	83,1%	96,4%	82,7 %
44	$b^0 \div b^{55}$	82,6 %	81,5 %	91,1 %	83,6 %
45	$10^{-3} \times 10^{-4}$	84,8 %	80,6 %	75,0 %	81,4 %
46	$a^8 \times a^{-9}$	84,1 %	86,3 %	91,1 %	86,2 %
47	$10^{-2} \div 10^{-5}$	85,5 %	87,1 %	94,6 %	87,7 %
48	$a^{-8} \div a^{-11}$	84,1 %	84,7 %	91,1 %	85,5 %
49	$47^{42} \times 47^{53}$	94,2 %	93,5 %	96,4 %	94,3 %
50	$c^{-9} \times c^9$	64,7 %	72,6 %	91,1 %	73,6 %
51	$10^{-15} \div 10^{-7}$	76,8 %	78,2 %	87,5 %	79,2 %
52	$b^5 \div b$	86,2 %	87,1 %	94,6 %	88,1 %
53	$2^{-5} \times 2^8$	87,7 %	94,4 %	98,2 %	92,1 %
54	$c^4 \times c$	89,9 %	93,5 %	98,2 %	92,8 %
55	$10^m \div 10$	47,1 %	62,9 %	89,3 %	60,7 %
56	$3^{62} \div 3^{42}$	90,6 %	92,7 %	98,2 %	92,8 %
57	$x^c \div x^d$	83,3 %	83,1 %	100 %	86,2 %
58	$9^m \times 9$	47,1 %	60,5 %	78,6 %	57,9 %
59	$5^{10} \div 2^5$	71,7%	71,0 %	65,1%	70,4 %
60	$y^a \div y$	53,6 %	67,7 %	89,3 %	65,4 %
61	$3^3 \times 5^8$	73,9 %	67,7 %	66,1 %	70,1 %
62	$61^8 \div 61^3$	96,4 %	93,5 %	100 %	95,2 %
63	$a^b \div a^b$	60,1 %	70,2 %	87,5 %	68,9 %
64	$3^{42} \times 3^{53}$	84,8 %	86,3 %	91,1 %	86,5 %
65	$47^{63} \div 47^{51}$	92,0 %	91,1 %	98,2 %	92,8 %
66	$a^{12} \div b^2$	82,6%	76,6%	71,4%	78,3 %

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite			
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global
67	$\frac{m^4 \times n^{10}}{n^6 \times m^2}$	80,4 %	74,2 %	82,1 %	78,3 %
68	$\frac{7^a \times 7^b}{7^c \times 7^a}$	27,5 %	29,8 %	37,5 %	30,2 %
69	$\frac{3^{-2} \times 3^{10}}{3^{-12} \times 3^3}$	50,0 %	52,4 %	60,7 %	52,8 %
70	$\frac{37^6 \times 37^{12}}{37^4 \times 37^3}$	79,0 %	65,3 %	80,4 %	73,9 %
71	$\frac{5^3 \times 5^{10}}{5^4 \times 5^3}$	76,8 %	71,0 %	80,4 %	75,2 %
72	$\frac{7^9 \times 3^{10}}{3^4 \times 7^6}$	79,7 %	67,7 %	69,6 %	73,3 %
73	$\frac{47^a \times 47^a}{47^b \times 47^a}$	34,1 %	41,1 %	48,2 %	39,3 %
74	$\frac{7^5 \times 3^4}{3^9 \times 7^3}$	71,7 %	69,4 %	82,1 %	72,6 %
75	$\frac{x^{-10} \times x^{13}}{x^{-9} \times x^5}$	54,3 %	58,9 %	75,0 %	59,7 %
76	$\frac{a^x \times a^y}{a^y \times a^z}$	29,7 %	33,9 %	37,5 %	32,7 %
77	$\frac{a^9 \times b^{10}}{b^{13} \times a^2}$	78,3 %	71,0 %	82,1 %	76,1 %
78	$\frac{a^7 \times a^3}{a^2 \times a^4}$	79,7 %	83,1%	83,9%	81,8%

APPENDICE D

TABLEAUX PRÉSENTANT TOUS LES RÉSULTATS SIGNIFICATIFS OU NON-SIGNIFICATIFS

D.1 Bases numériques ou algébriques, exposants numériques 113

D.2 Bases numériques ou algébriques, exposants algébriques 114

D.3 Exposants numériques ou algébriques, bases numériques 115

D.4 Exposants numériques ou algébriques, bases algébriques 115

D.5 Expressions purement numériques ou algébriques 116

D.6 Expressions dont certains exposants sont équivalents à 1 117

D.7 Expressions dont l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul 117

D.8 Produits et quotients de puissances 118

D.9 Nombres positifs plus grands : exposants de la même forme 119

D.10 Nombres positifs plus grands : bases de la même forme 120

Tableau D.1 (en lien avec le tableau 3.3)
Bases numériques ou algébriques, exposants numériques

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Significatif?
		3^e sec.	4^e sec.	5^e sec.	Global	Écart		
5 19	$2^5 \times 2^7$ $x^5 \times x^2$	81,9 % 94,9 %	79,0 % 96,0 %	87,5 % 96,4 %	81,8 % 95,6 %	+ 13,8	5,99	Oui
9 26	$7^{15} \times 7^{-22}$ $a^{-12} \times a^3$	71,7 % 89,9 %	67,7 % 87,9 %	69,6 % 89,3 %	69,8 % 89,0 %	+ 19,2	6,19	Oui
20 8	$7^{15} \div 7^{13}$ $a^{10} \div a^8$	92,8 % 95,7 %	89,5 % 96,0 %	96,4 % 98,2 %	92,1 % 96,2 %	+ 4,1	2,84	Oui
43 16	$3^{15} \div 3^{15}$ $i^{12} \div i^{12}$	76,8 % 72,5 %	83,1 % 77,4 %	96,4 % 92,9 %	82,7 % 78,0 %	- 4,7	2,14	Oui
59 66	$5^{10} \div 2^5$ $a^{12} \div b^2$	71,7 % 82,6 %	71,0 % 76,6 %	65,1 % 71,4 %	70,4 % 78,3 %	+ 7,9	3,25	Oui
61 30	$3^3 \times 5^8$ $d^5 \times e^8$	73,9 % 92,0 %	67,7 % 85,5 %	66,1 % 80,4 %	70,1 % 87,4 %	+ 17,3	6,04	Oui
45 38	$10^{-3} \times 10^{-4}$ $b^{-10} \times b^{-4}$	84,8 % 84,8 %	80,6 % 86,3 %	75,0 % 76,8 %	81,4 % 84,0 %	+ 2,6	1,45	Non
53 10	$2^{-5} \times 2^8$ $a^8 \times a^{-5}$	87,7 % 89,9 %	94,4 % 91,9 %	98,2 % 87,5 %	92,1 % 90,3 %	- 1,8	0,97	Non
33 46	$5^4 \times 5^{-5}$ $a^8 \times a^{-9}$	82,6 % 84,1 %	81,5 % 86,3 %	85,7 % 91,1 %	82,7 % 86,2 %	+ 3,5	1,68	Non
29 54	$6^4 \times 6$ $c^4 \times c$	89,9 % 89,9 %	89,5 % 93,5 %	96,4 % 98,2 %	90,9 % 92,8 %	+ 1,9	1,60	Non
1 2	$12^0 \times 12^5$ $s^0 \times s^9$	91,3 % 91,3 %	83,9 % 87,1 %	98,2 % 98,2 %	89,6 % 90,9 %	+ 1,3	1,26	Non
41 50	$2^{-5} \times 2^5$ $c^{-9} \times c^9$	70,3 % 67,4 %	72,6 % 72,6 %	92,3 % 91,1 %	75,2 % 73,6 %	- 1,6	1,15	Non
15 21	$10^3 \div 10^5$ $a^5 \div a^{12}$	89,9 % 89,9 %	89,5 % 86,3 %	100 % 92,9%	91,5 % 89,0 %	- 2,5	1,30	Non
3 32	$6^5 \div 6^{-2}$ $s^5 \div s^{-4}$	81,9 % 78,3 %	75,8 % 85,5 %	89,3 % 91,1 %	80,8 % 83,3 %	+ 2,5	1,02	Non
39 25	$7^{15} \div 7^{-22}$ $s^6 \div s^{-12}$	81,2 % 72,5 %	79,0 % 79,0 %	89,3 % 85,7 %	81,8 % 77,4 %	- 4,4	1,75	Non
47 48	$10^{-2} \div 10^{-5}$ $a^{-8} \div a^{-11}$	85,5 % 84,1 %	87,1 % 84,7 %	94,6 % 91,1 %	87,7 % 85,5 %	- 2,2	1,35	Non

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Significatif?
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart		
51 28	$10^{-15} \div 10^{-7}$ $s^{-13} \div s^{-5}$	76,8 % 72,5 %	78,2 % 77,4 %	87,5 % 78,6 %	79,2 % 75,5 %	- 3,7	1,41	Non
11 4	$6^{-8} \div 6^{-8}$ $a^{-5} \div a^{-5}$	68,8 % 67,4 %	70,2 % 70,2 %	91,1 % 80,4 %	73,3 % 70,8 %	- 2,5	1,21	Non
24 44	$12^{0} \div 12^{5}$ $b^{0} \div b^{55}$	79,0 % 82,6 %	77,4 % 81,5 %	91,1 % 91,1 %	80,5 % 83,6 %	+ 3,1	1,51	Non
35 52	$10^{9} \div 10$ $b^{5} \div b$	84,8 % 86,2 %	87,1 % 87,1 %	96,4 % 94,6 %	87,7 % 88,1 %	+ 0,4	0,16	Non

Tableau D.2 (en lien avec le tableau 3.4)
Bases numériques ou algébriques, exposants algébriques

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Significatif?
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart		
17 34	$2^{a} \times 2^{b}$ $m^{a} \times m^{b}$	65,2 % 65,9 %	74,2 % 81,5 %	89,3 % 89,3 %	73,0 % 76,1 %	+ 3,1	2,36	Oui
27 57	$13^{a} \div 13^{b}$ $x^{c} \div x^{d}$	79,0 % 83,3 %	81,5 % 83,1 %	94,6 % 100 %	82,7 % 86,2 %	+ 3,5	2,20	Oui
14 40	$21^{a} \div 21^{-b}$ $x^{m} \div x^{-n}$	65,9 % 72,5 %	71,8 % 79,0 %	91,1 % 92,9 %	72,6 % 79,6 %	+ 7,0	3,04	Oui
55 60	$10^{m} \div 10$ $y^{a} \div y$	47,1 % 53,6 %	62,9 % 67,7 %	89,3 % 89,3 %	60,7 % 65,4 %	+ 4,7	3,27	Oui
31 63	$6^{a} \div 6^{a}$ $a^{b} \div a^{b}$	64,5 % 60,1 %	78,2 % 70,2 %	92,9 % 87,5 %	74,8 % 68,9 %	- 5,9	2,39	Oui
37 13	$2^{a} \times 2^{-b}$ $t^{b} \times t^{-c}$	80,4 % 75,4 %	78,2 % 78,2 %	89,3 % 87,5 %	81,1 % 78,6 %	- 2,5	1,05	Non
58 42	$9^{m} \times 9$ $x^{m} \times x$	47,1 % 44,9 %	60,5 % 63,7 %	78,6 % 78,6 %	57,9 % 58,2 %	+ 0,3	0,16	Non
12 6	$6^{-a} \times 6^{a}$ $b^{-a} \times b^{a}$	53,6 % 51,4 %	60,5 % 59,7 %	85,7 % 83,9 %	61,9 % 60,4 %	- 1,5	0,82	Non

Tableau D.3 (en lien avec le tableau 3.5)
Exposants numériques ou algébriques, bases numériques

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Signi-ficatif?
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart		
5 17	$2^5 \times 2^7$ $2^a \times 2^b$	81,9 % 65,2 %	79,0 % 74,2 %	87,5 % 89,3 %	81,8 % 73,0 %	- 8,8	2,92	Oui
29 58	$6^4 \times 6$ $9^m \times 9$	89,9 % 47,1 %	89,5 % 60,5 %	96,4 % 78,6 %	90,9 % 57,9 %	- 33,0	9,79	Oui
41 12	$2^{-5} \times 2^5$ $6^{-a} \times 6^a$	70,3 % 53,6 %	72,6 % 60,5 %	92,3 % 85,7 %	75,2 % 61,9 %	- 13,3	5,25	Oui
20 27	$7^{15} \div 7^{13}$ $13^a \div 13^b$	92,8 % 79,0 %	89,5 % 81,5 %	96,4 % 94,6 %	92,1 % 82,7 %	- 9,4	4,16	Oui
3 14	$6^5 \div 6^{-2}$ $21^a \div 21^{-b}$	81,9 % 65,9 %	75,8 % 71,8 %	89,3 % 91,1 %	80,8 % 72,6 %	- 8,2	2,84	Oui
35 55	$10^9 \div 10$ $10^m \div 10$	84,8 % 47,1 %	87,1 % 62,9 %	96,4 % 89,3 %	87,7 % 65,4 %	- 22,3	8,28	Oui
43 31	$3^{15} \div 3^{15}$ $6^a \div 6^a$	76,8 % 64,5 %	83,1 % 78,2 %	96,4 % 92,9 %	82,7 % 74,8 %	- 7,9	3,37	Oui
9 37	$7^{15} \times 7^{-22}$ $2^a \times 2^{-b}$	71,7 % 80,4 %	67,7 % 78,2 %	69,6 % 89,3 %	69,8 % 81,1 %	+ 11,3	3,60	Oui

Tableau D.4 (en lien avec le tableau 3.6)
Exposants numériques ou algébriques, bases algébriques

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Signi-ficatif?
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart		
19 34	$x^5 \times x^2$ $m^a \times m^b$	94,9 % 65,9 %	96,0 % 81,5 %	96,4 % 89,3 %	95,6 % 76,1 %	- 19,5	7,31	Oui
10 13	$a^8 \times a^{-5}$ $t^b \times t^{-c}$	89,9 % 75,4 %	91,9 % 78,2 %	87,5 % 87,5 %	90,3 % 78,6 %	- 11,7	4,45	Oui
8 57	$a^{10} \div a^8$ $x^c \div x^d$	95,7 % 83,3 %	96,0 % 83,1 %	98,2 % 100 %	96,2 % 86,2 %	- 10	4,72	Oui
50 6	$c^{-9} \times c^9$ $b^{-a} \times b^a$	64,7 % 51,4 %	72,6 % 59,7 %	91,1 % 83,9 %	73,6 % 60,4 %	- 13,2	5,33	Oui
54 42	$c^4 \times c$ $x^m \times x$	89,9 % 44,9 %	93,5 % 63,7 %	98,2 % 78,6 %	92,8 % 58,2 %	- 34,6	10,39	Oui
52 60	$b^5 \div b$ $y^a \div y$	86,2 % 53,6 %	87,1 % 67,7 %	94,6 % 89,3 %	88,1 % 65,4 %	- 22,7	7,43	Oui

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Signi-ficatif?
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart		
16 63	$i^{12} \div i^{12}$ $a^b \div a^b$	72,5 % 60,1 %	77,4 % 70,2 %	92,9 % 87,5 %	78,0 % 68,9 %	- 9,1	3,44	Oui
32 40	$s^5 \div s^{-4}$ $x^m \div x^{-n}$	78,3 % 72,5 %	85,5 % 79,0 %	91,1 % 92,9 %	83,3 % 79,6 %	- 3,7	1,81	Non

Tableau D.5 (en lien avec le tableau 3.7)
Expressions purement numériques ou algébriques

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Signi-ficatif?
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart		
9 13	$7^{15} \times 7^{-22}$ $t^b \times t^{-c}$	71,7 % 75,4 %	67,7 % 78,2 %	69,6 % 87,5 %	69,8 % 78,6 %	+ 8,8	2,69	Oui
53 13	$2^{-5} \times 2^8$ $t^b \times t^{-c}$	87,7 % 75,4 %	94,4 % 78,2 %	98,2 % 87,5 %	92,1 % 78,6 %	- 13,5	5,25	Oui
29 42	$6^4 \times 6$ $x^m \times x$	89,9 % 44,9 %	89,5 % 63,7 %	96,4 % 78,6 %	90,9 % 58,2 %	- 32,7	9,74	Oui
41 6	$2^{-5} \times 2^5$ $b^{-a} \times b^a$	70,3 % 51,4 %	72,6 % 59,7 %	92,9 % 83,9 %	75,2 % 60,4 %	- 14,8	5,83	Oui
15 57	$10^3 \div 10^5$ $x^c \div x^d$	89,9 % 83,3 %	89,5 % 83,1 %	100 % 100 %	91,5 % 86,2 %	- 5,3	2,48	Oui
20 57	$7^{15} \div 7^{13}$ $x^c \div x^d$	92,8 % 83,3 %	89,5 % 83,1 %	96,4 % 100 %	92,1 % 86,2 %	- 5,9	2,90	Oui
43 63	$3^{15} \div 3^{15}$ $a^b \div a^b$	76,8 % 60,1 %	83,1 % 70,2 %	96,4 % 87,5 %	82,7 % 68,9 %	- 13,8	3,81	Oui
35 60	$10^9 \div 10$ $y^a \div y$	84,8 % 53,6 %	87,1 % 67,7 %	96,4 % 89,3 %	87,7 % 65,4 %	- 22,3	7,06	Oui
3 40	$6^5 \div 6^{-2}$ $x^m \div x^{-n}$	81,9 % 72,5 %	75,8 % 79,0 %	89,3 % 92,9 %	80,8 % 79,6 %	- 1,2	0,81	Non
5 34	$2^5 \times 2^7$ $m^a \times m^b$	81,9 % 65,9 %	79,0 % 81,5 %	87,5 % 89,3 %	81,8 % 76,1%	+ 1,8	1,92	Non
11 63	$6^{-8} \div 6^{-8}$ $a^b \div a^b$	68,8 % 60,1 %	70,2 % 70,2 %	91,1 % 87,5 %	73,3% 68,9 %	- 3,6	1,51	Non
33 13	$5^4 \times 5^{-5}$ $t^b \times t^{-c}$	82,6 % 75,4 %	81,5 % 78,2 %	85,7 % 87,5 %	82,7% 78,6 %	+ 1,8	1,46	Non

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Signi-ficatif?
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart		
39 40	$7^{15} \div 7^{-22}$ $x^m \div x^{-n}$	81,2 % 72,5 %	79,0 % 79,0 %	89,1 % 92,9 %	81,8 % 79,6 %	+ 3,8	1,21	Non

Tableau D.6 (en lien avec le tableau 3.8)
Expressions dont certains exposants sont équivalents à 1

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Signi-ficatif?
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart		
29 58	$6^4 \times 6$ $9^m \times 9$	89,9 % 47,1 %	89,5 % 60,5 %	96,4 % 78,6 %	90,9 % 57,9 %	- 33,0	9,79	Oui
35 55	$10^9 \div 10$ $10^m \div 10$	84,8 % 47,1 %	87,1 % 62,9 %	96,4 % 89,3 %	87,7 % 65,4 %	- 22,3	8,28	Oui
54 42	$c^4 \times c$ $x^m \times x$	89,9 % 44,9 %	93,5 % 63,7 %	98,2 % 78,6 %	92,8 % 58,2 %	- 34,6	10,39	Oui
52 60	$b^5 \div b$ $y^a \div y$	86,2 % 53,6 %	87,1 % 67,7 %	94,6 % 89,3 %	88,1 % 65,4 %	- 22,7	7,43	Oui
55 60	$10^m \div 10$ $y^a \div y$	47,1 % 53,6 %	62,9 % 67,7 %	89,3 % 89,3 %	60,7 % 65,4 %	+ 4,7	3,27	Oui
58 42	$9^m \times 9$ $x^m \times x$	47,1 % 44,9 %	60,5 % 63,7 %	78,6 % 78,6 %	57,9 % 58,2 %	+0,3	0,16	Non
29 54	$6^4 \times 6$ $c^4 \times c$	89,9 % 89,9 %	89,5 % 93,5 %	96,4 % 98,2 %	90,9 % 92,8 %	+ 1,9	1,60	Non
35 52	$10^9 \div 10$ $b^5 \div b$	84,8 % 86,2 %	87,1 % 87,1 %	96,4 % 94,6 %	87,7 % 88,1 %	+0,4	0,16	Non

Tableau D.7 (en lien avec le tableau 3.9)
Questions dont l'expression équivalente réduite est égale à 1
ou à une puissance dont l'exposant est nul

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Signi-ficatif?
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart		
41 12	$2^{-5} \times 2^5$ $6^{-a} \times 6^a$	70,3 % 53,6 %	72,6 % 60,5 %	92,9 % 85,7 %	75,2 % 61,9 %	- 13,3	5,25	Oui
43 31	$3^{15} \div 3^{15}$ $6^a \div 6^a$	76,8 % 64,5 %	83,1 % 78,2 %	96,4 % 92,9 %	82,7 % 74,8 %	- 7,9	3,37	Oui
50 6	$c^{-9} \times c^9$ $b^{-a} \times b^a$	64,7 % 51,4 %	72,6 % 59,7 %	91,1 % 83,9 %	73,6 % 60,4 %	- 13,2	5,33	Oui

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Signi-ficatif?
		3^e^ sec.	4^e^ sec.	5^e^ sec.	Global	Écart		
16	$i^{12} \div i^{12}$	72,5 %	77,4 %	92,9 %	78,0 %			
63	$a^b \div a^b$	60,1 %	70,2 %	87,5 %	68,9 %	- 9,1	3,44	Oui
43	$3^{15} \div 3^{15}$	76,8 %	83,1 %	96,4 %	82,7 %			
16	$i^{12} \div i^{12}$	72,5 %	77,4 %	92,9 %	78,0 %	- 4,7	2,14	Oui
31	$6^a \div 6^a$	64,5 %	78,2 %	92,9 %	74,8 %			
63	$a^b \div a^b$	60,1 %	70,2 %	87,5 %	68,9 %	- 5,9	2,39	Oui
1	$12^0 \times 12^5$	91,3 %	83,9 %	98,2 %	89,6 %			
2	$s^0 \times s^9$	91,3 %	87,1 %	98,2 %	90,9 %	+ 1,3	1,26	Non
41	$2^{-5} \times 2^5$	70,3 %	72,6 %	92,3 %	75,2 %			
50	$c^{-9} \times c^9$	67,4 %	72,6 %	91,1 %	73,6 %	- 1,6	1,15	Non
12	$6^{-a} \times 6^a$	53,6 %	60,5 %	85,7 %	61,9 %			
6	$b^{-a} \times b^a$	51,4 %	59,7 %	83,9 %	60,4 %	- 1,5	0,82	Non
11	$6^{-8} \div 6^{-8}$	68,8 %	70,2 %	91,1 %	73,3 %			
4	$a^{-5} \div a^{-5}$	67,4 %	70,2 %	80,4 %	70,8 %	- 2,5	1,21	Non
24	$12^0 \div 12^5$	79,0 %	77,4 %	91,1 %	80,5 %			
44	$b^0 \div b^{55}$	82,6 %	81,5 %	91,1 %	83,6 %	+ 3,1	1,51	Non
32	$s^5 \div s^{-4}$	78,3 %	85,5 %	91,1 %	83,3 %			
40	$x^m \div x^{-n}$	72,5 %	79,0 %	92,9 %	79,6 %	- 3,7	1,81	Non

Tableau D.8 (en lien avec le tableau 3.10)
Produits et quotients de puissances

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Signi-ficatif?
		3^e^ sec.	4^e^ sec.	5^e^ sec.	Global	Écart		
71	$\frac{5^3 \times 5^{10}}{5^4 \times 5^3}$	76,8 %	71,0 %	80,4 %	75,2 %			
78	$\frac{a^7 \times a^3}{a^2 \times a^4}$	79,7 %	83,1 %	83,9 %	81,8%	+ 6,6	2,69	Oui
69	$\frac{3^{-2} \times 3^{10}}{3^{-12} \times 3^3}$	50,0 %	52,4 %	60,7 %	52,8 %			
75	$\frac{x^{-10} \times x^{13}}{x^{-9} \times x^5}$	54,3 %	58,9 %	75,0 %	59,7 %	+ 6,9	2,32	Oui
72	$\frac{7^9 \times 3^{10}}{3^4 \times 7^6}$	79,7 %	67,7 %	69,6 %	73,3 %			
67	$\frac{m^4 \times n^{10}}{n^6 \times m^2}$	80,4 %	74,2 %	82,1 %	78,3 %	+ 5,0	2,41	Oui

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Significatif?
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart		
74	$\frac{7^5 \times 3^4}{3^9 \times 7^3}$	71,7 %	69,4 %	82,1 %	72,6 %			
77	$\frac{a^9 \times b^{10}}{b^{13} \times a^2}$	78,3 %	71,0 %	82,1 %	76,1 %	+3,5	1,81	Non

Tableau D.9 (en lien avec le tableau 3.11)
Nombres positifs plus grands : exposants de la même forme

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Significatif?
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart		
5	$2^5 \times 2^7$	81,9 %	79,0 %	87,5 %	81,8 %			
23	$53^4 \times 53^3$	92,8 %	91,1 %	94,6 %	92,5 %	+ 10,7		
19	$x^5 \times x^2$	94,9 %	96,0 %	96,4 %	95,6 %	+ 3,1	49,875	Oui
20	$7^{15} \div 7^{13}$	92,8 %	89,5 %	96,4 %	92,1 %			
62	$61^8 \div 61^3$	96,4 %	93,5 %	100 %	95,2 %	+ 3,1		
8	$a^{10} \div a^8$	95,7 %	96,0 %	98,2 %	96,2 %	+ 1	10,828	Oui
64	$3^{42} \times 3^{53}$	84,8 %	86,3 %	91,1 %	86,5 %			
49	$47^{42} \times 47^{53}$	94,2 %	93,5 %	96,4 %	94,3 %	+ 7,8		
22	$a^{25} \times a^{32}$	89,1 %	87,1 %	87,5 %	88,1 %	- 6,2	16,667	Oui
17	$2^a \times 2^b$	65,2 %	74,2 %	89,3 %	73,0 %			
18	$41^a \times 41^b$	66,7 %	74,2 %	85,7 %	73,0 %	+ 0		
34	$m^a \times m^b$	65,9 %	81,5 %	89,3 %	76,1 %	+ 3,1	9,524	Oui
27	$13^a \div 13^b$	79,0 %	81,5 %	94,6 %	82,7 %			
7	$67^a \div 67^b$	73,9 %	72,6 %	98,2 %	77,7 %	- 5		
57	$x^c \div x^d$	83,3 %	83,1 %	100 %	86,2 %	+ 8,5	21,686	Oui
56	$3^{62} \div 3^{42}$	90,6 %	92,7 %	98,2 %	92,8 %			
65	$47^{63} \div 47^{51}$	92 %	91,1 %	98,2 %	92,8 %	+0		
36	$a^{67} \div a^{42}$	86,2 %	81,5 %	96,4 %	89,3 %	- 3,5	4,745	Non

Tableau D.10 (en lien avec le tableau 3.12)
Nombres positifs plus grands : bases de la même forme

#	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z	Signi-ficatif?
		3^e^ sec.	4^e^ sec.	5^e^ sec.	Global	Écart		
5 64 17	$2^5 \times 2^7$ $3^{42} \times 3^{53}$ $2^a \times 2^b$	81,9 % 84,8 % 65,2 %	79,0 % 86,3 % 74,2 %	87,5 % 91,1 % 89,3 %	81,8 % 86,5 % 73,0 %	 + 4,7 - 13,5	22,683	Oui
20 56 27	$7^{15} \div 7^{13}$ $3^{62} \div 3^{42}$ $13^a \div 13^b$	92,8 % 90,6 % 79,0 %	89,5 % 92,7 % 81,5 %	96,4 % 98,2 % 94,6 %	92,1 % 92,8 % 82,7 %	 + 0,7 - 10,1	30,125	Oui
23 49 18	$53^4 \times 53^3$ $47^{42} \times 47^{53}$ $41^a \times 41^b$	92,8 % 94,2 % 66,7 %	91,1 % 93,5 % 74,2 %	94,6 % 96,4 % 85,7 %	92,5 % 94,3 % 73,0 %	 + 1,8 - 21,3	97,747	Oui
62 65 7	$61^8 \div 61^3$ $47^{63} \div 47^{51}$ $67^a \div 67^b$	96,4 % 92,0 % 73,9 %	93,5 % 91,1 % 72,6 %	100 % 98,2 % 98,2 %	95,2 % 92,8 % 77,7 %	 - 2,4 - 15,1	80,111	Oui
19 22 34	$x^5 \times x^2$ $a^{25} \times a^{32}$ $m^a \times m^b$	94,9 % 89,1 % 65,9 %	96,0 % 87,1 % 81,5 %	96,4 % 87,5 % 89,3 %	95,6 % 88,1 % 76,1 %	 - 7,5 - 12	64,440	Oui
8 36 57	$a^{10} \div a^8$ $a^{67} \div a^{42}$ $x^c \div x^d$	95,7 % 86,2 % 83,3 %	96,0 % 81,5 % 83,1 %	98,2 % 96,4 % 100 %	96,2 % 89,3 % 86,2 %	 - 6,9 - 3,1	25,125	Oui

APPENDICE E

TABLEAUX PRÉSENTANT LES CAS POUR LESQUELS LE POURCENTAGE DE RÉUSSITE GLOBAL EST PLUS ÉLEVÉ POUR LES EXPRESSIONS PRÉSENTANT DES BASES OU DES EXPOSANTS ALGÉBRIQUES OU NUMÉRIQUES

E.1 Couples d'expressions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants algébriques (tous les cas, particuliers ou non)..122

E.2 Couples d'expressions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants numériques (tous les cas, particuliers ou non)..123

Tableau E.1 (en lien avec le tableau 3.15)
Couples d'expressions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants algébriques
(tous les cas, particuliers* ou non)

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3^{e} sec.	4^{e} sec.	5^{e} sec.	Global	Écart	
5	$2^5 \times 2^7$	81,9 %	79,0 %	87,5 %	81,8 %		
19	$x^5 \times x^2$	94,9 %	96,0 %	96,4 %	95,6 %	+ 13,8	5,99
9	$7^{15} \times 7^{-22}$	71,7 %	67,7 %	69,6 %	69,8 %		
26	$a^{-12} \times a^3$	89,9 %	87,9 %	89,3 %	89,0 %	+ 19,2	6,19
20	$7^{15} \div 7^{13}$	92,8%	89,5%	96,4%	92,1 %		
8	$a^{10} \div a^8$	95,7%	96,0 %	98,2 %	96,2 %	+ 4,1	2,84
59	$5^{10} \div 2^5$	71,7%	71,0 %	65,1%	70,4 %		
66	$a^{12} \div b^2$	82,6%	76,6%	71,4%	78,3 %	+ 7,9	3,25
61	$3^3 \times 5^8$	73,9 %	67,7 %	66,1 %	70,1 %		
30	$d^5 \times e^8$	92,0 %	85,5 %	80,4 %	87,4 %	+ 17,3	6,04
9	$7^{15} \times 7^{-22}$	71,7 %	67,7 %	69,6 %	69,8 %		
37	$2^a \times 2^{-b}$	80,4 %	78,2 %	89,3 %	81,1 %	+ 11,3	3,60
9	$7^{15} \times 7^{-22}$	71,7 %	67,7 %	69,6 %	69,8 %		
13	$t^b \times t^{-c}$	75,4 %	78,2 %	87,5 %	78,6 %	+ 8,8	2,69
17	$2^a \times 2^b$	65,2 %	74,2 %	89,3 %	73,0 %		
34	$m^a \times m^b$	65,9 %	81,5 %	89,3 %	76,1 %	+ 3,1	2,36
27	$13^a \div 13^b$	79,0 %	81,5 %	94,6 %	82,7 %		
57	$x^c \div x^d$	83,3 %	83,1 %	100 %	86,2 %	+ 3,5	2,20
14	$21^a \div 21^{-b}$	65,9 %	71,8 %	91,1 %	72,6 %		
40	$x^m \div x^{-n}$	72,5 %	79,0 %	92,9 %	79,6 %	+ 7,0	3,04
55	$10^m \div 10$	47,1 %	62,9 %	89,3 %	60,7 %		
60	$y^a \div y$	53,6 %	67,7 %	89,3 %	65,4 %	+ 4,7	3,27
71	$\frac{5^3 \times 5^{10}}{5^4 \times 5^3}$	76,8 %	71,0 %	80,4 %	75,2 %		
78	$\frac{a^7 \times a^3}{a^2 \times a^4}$	79,7 %	83,1%	83,9%	81,8%	+ 6,6	2,69
69	$\frac{3^{-2} \times 3^{10}}{3^{-12} \times 3^3}$	50,0 %	52,4 %	60,7 %	52,8 %		
75	$\frac{x^{-10} \times x^{13}}{x^{-9} \times x^5}$	54,3 %	58,9 %	75,0 %	59,7 %	+ 6,9	2,32

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart	
72 67	$\frac{7^9 \times 3^{10}}{3^4 \times 7^6}$ $\frac{m^4 \times n^{10}}{n^6 \times m^2}$	79,7 % 80,4 %	67,7 % 74,2 %	69,6 % 82,1 %	73,3 % 78,3 %	+ 5,0	2,41

*Dans les tableaux E.1 et E.2, les cas particuliers se retrouvent après la ligne triple. Ces cas particuliers sont formés d'expressions dont certains exposants sont équivalents à 1, d'expressions dont l'expression équivalente réduite est égale à 1 ou à une puissance dont l'exposant est nul ou d'expressions présentant des produits et des quotients de puissances.

Tableau E.2 (en lien avec le tableau 3.16)
Couples d'expressions pour lesquels le pourcentage de réussite global est plus élevé pour les expressions dont les puissances présentent des bases ou des exposants numériques
(tous les cas, particuliers ou non)

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart	
5 17	$2^5 \times 2^7$ $2^a \times 2^b$	81,9 % 65,2 %	79,0 % 74,2 %	87,5 % 89,3 %	81,8 % 73,0 %	- 8,8	2,92
20 27	$7^{15} \div 7^{13}$ $13^a \div 13^b$	92,8 % 79,0 %	89,5 % 81,5 %	96,4 % 94,6 %	92,1 % 82,7 %	- 9,4	4,16
3 14	$6^5 \div 6^{-2}$ $21^a \div 21^{-b}$	81,9 % 65,9 %	75,8 % 71,8 %	89,3 % 91,1 %	80,8 % 72,6 %	- 8,2	2,84
19 34	$x^5 \times x^2$ $m^a \times m^b$	94,9 % 65,9 %	96,0 % 81,5 %	96,4 % 89,3 %	95,6 % 76,1 %	- 19,5	7,31
10 13	$a^8 \times a^{-5}$ $t^b \times t^{-c}$	89,9 % 75,4 %	91,9 % 78,2 %	87,5 % 87,5 %	90,3 % 78,6 %	- 11,7	4,45
8 57	$a^{10} \div a^8$ $x^c \div x^d$	95,7 % 83,3 %	96,0 % 83,1 %	98,2 % 100 %	96,2 % 86,2 %	- 10	4,72
53 13	$2^{-5} \times 2^8$ $t^b \times t^{-c}$	87,7 % 75,4 %	94,4 % 78,2 %	98,2 % 87,5 %	92,1 % 78,6 %	- 13,5	5,25
15 57	$10^3 \div 10^5$ $x^c \div x^d$	89,9 % 83,3 %	89,5% 83,1 %	100 % 100 %	91,5 % 86,2 %	- 5,3	2,48
20 57	$7^{15} \div 7^{13}$ $x^c \div x^d$	92,8 % 83,3 %	89,5 % 83,1 %	96,4 % 100 %	92,1 % 86,2 %	- 5,9	2,90

Question	Expression à réduire	Pourcentage de réussite					Statistique Z de McNemar
		3e sec.	4e sec.	5e sec.	Global	Écart	
43 16	$3^{15} \div 3^{15}$ $i^{12} \div i^{12}$	76,8% 72,5%	83,1% 77,4%	96,4% 92,9%	82,7 % 78,0 %	- 4,7	2,14
29 58	$6^4 \times 6$ $9^m \times 9$	89,9 % 47,1 %	89,5 % 60,5 %	96,4 % 78,6 %	90,9 % 57,9 %	- 33,0	9,79
41 12	$2^{-5} \times 2^5$ $6^{-a} \times 6^a$	70,3 % 53,6 %	72,6 % 60,5 %	92,3 % 85,7 %	75,2 % 61,9 %	- 13,3	5,25
35 55	$10^9 \div 10$ $10^m \div 10$	84,8 % 47,1 %	87,1 % 62,9 %	96,4 % 89,3 %	87,7 % 65,4 %	- 22,3	8,28
43 31	$3^{15} \div 3^{15}$ $6^a \div 6^a$	76,8 % 64,5 %	83,1 % 78,2 %	96,4 % 92,9 %	82,7 % 74,8 %	- 7,9	3,37
29 42	$6^4 \times 6$ $x^m \times x$	89,9 % 44,9 %	89,5 % 63,7 %	96,4 % 78,6 %	90,9 % 58,2 %	- 32,7	9,74
41 6	$2^{-5} \times 2^5$ $b^{-a} \times b^a$	70,3 % 51,4 %	72,6 % 59,7 %	92,9 % 83,9 %	75,2 % 60,4 %	- 14,8	5,83
43 63	$3^{15} \div 3^{15}$ $a^b \div a^b$	76,8 % 60,1 %	83,1 % 70,2 %	96,4 % 87,5 %	82,7 % 68,9 %	- 13,8	3,81
35 60	$10^9 \div 10$ $y^a \div y$	84,8 % 53,6 %	87,1 % 67,7 %	96,4 % 89,3 %	87,7 % 65,4 %	- 22,3	7,06
31 63	$6^a \div 6^a$ $a^b \div a^b$	64,5 % 60,1 %	78,2 % 70,2 %	92,9 % 87,5 %	74,8 % 68,9 %	- 5,9	2,39
50 6	$c^{-9} \times c^9$ $b^{-a} \times b^a$	64,7 % 51,4 %	72,6 % 59,7 %	91,1 % 83,9 %	73,6 % 60,4 %	- 13,2	5,33
54 42	$c^4 \times c$ $x^m \times x$	89,9 % 44,9 %	93,5 % 63,7 %	98,2 % 78,6 %	92,8 % 58,2 %	- 34,6	10,39
52 60	$b^5 \div b$ $y^a \div y$	86,2 % 53,6 %	87,1 % 67,7 %	94,6 % 89,3 %	88,1 % 65,4 %	- 22,7	7,43
16 63	$i^{12} \div i^{12}$ $a^b \div a^b$	72,5 % 60,1 %	77,4 % 70,2 %	92,9 % 87,5 %	78,0 % 68,9 %	- 9,1	3,44

RÉFÉRENCES

Bednarz, Nadine et Bernadette Janvier. 1996. «Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic». In *Approaches to Algebra*, sous la dir. de Nadine Bednarz, Carolyn Kieran et Lesley Lee, p. 115-136. Dordrecht: Kluwer Academic.

Bednarz, Nadine et Lesley Lee. 2002. «Articulation arithmétique/algèbre: implications pour l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire» In *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (Kinston, Ontario, 24-28 mai 2002), sous la dir. de Elaine Simmt et Brent Davis, p. 59-69. Edmonton: CMESG / GCEDM.

Booth, Lesley. 1984. «Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire». *Petit x*, no 5, p. 5-17.

Breton, Guy, et Jean-Charles Morand. 1995. *Carrousel mathématique 3.* 2 t. Montréal : Centre Éducatif et Culturel Inc.

Breton, Guy, André Deschênes et Antoine Ledoux. 1996. *Réflexions mathématiques 436.* 2 t. Montréal : Centre Éducatif et Culturel Inc.

Davydov, Vasily V. 1975. «Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject» In *Children's capacity for learning mathematics, Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, sous la dir. de L. P. Steffe, vol. 7, p. 55-107. Chicago: University of Chicago.

Dougherty, Barbara J., Fay Zenigami et Claire Okazaki. 2003. *Mesure Up, Grade 1.* Honolulu, University of Hawaii: Curriculum Research and Development Group.

Dougherty, Barbara J. 2003. «Voyaging from theory to practice in learning: Measure Up». In *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (Honolulu, 13-18 juillet 2003), sous la dir. de N. A. Pateman, Barbara J. Dougherty et Joseph Zilliox, vol. 1, p. 17-23. Honolulu: University of Hawaii

Guay, Sylvio, et Steeve Lemay. 1995. *Scénarios 3.* 2 t. Laval : Les Éditions HRW.

Hiebert, James et Thomas P. Carpenter. 1992. «Learning and Teaching with Understanding» In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, sous la dir. de Douglas A. Grouws, p. 65-100. New York: MacMillan.

Kieran, Carolyn. 1990. «Cognitive processes involved in learning school algebra». In *Mathematics and Cognition: a Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, sous la dir. de Pearla Nesher et Jeremy Kilpatrick, p. 96-112. Cambridge: Cambridge University Press.

Kieran, Carolyn. 2001. «Developing mathematical proficiency beyond number». In *Adding it up : helping children learn mathematics*, sous la dir. de Jeremy Kilpatrick, Jane Swafford et Bradford Findell, p. 255-312. Washington: National Academy Press.

Lee, Lesley et David Wheeler, 1989. «The arithmetic connection». *Educational Studies in Mathematics*, vol. 20, no 1, p. 41-54.

Pycior, Helena M. 1984. «Internalism, externalism and beyond: 19th century British algebra». *Historia Mathematica*, vol. 11, p. 424-441.

Québec, Ministère de l'Éducation, Direction de la formation générale des jeunes. 1993. *Programme d'études : mathématique 116 (068-116), enseignement secondaire.* Québec.

Québec, Ministère de l'Éducation, Direction de la formation générale des jeunes. 1994. *Programme d'études : Mathématique 216 (068-216), enseignement secondaire.* Québec.

Québec, Ministère de l'Éducation, Direction de la formation générale des jeunes. 1995. *Programme d'études : Mathématique 314, enseignement secondaire.* Québec.

Québec, Ministère de l'Éducation, Direction de la formation générale des jeunes. 1996. *Programme d'études : Mathématique 436, enseignement secondaire.* Québec.

Québec, Ministère de l'Éducation, Direction de la formation générale des jeunes. 1996. *Programme d'études : Mathématique 536, enseignement secondaire.* Québec.

Québec, Ministère de l'Éducation, Direction de la formation générale des jeunes. 1999. *Programme d'études : Mathématique 426 Transitoire, enseignement secondaire.* Québec.

Québec, Ministère de l'Éducation, Direction de la formation générale des jeunes. 1999. *Programme d'études : Mathématique 526 Transitoire, enseignement secondaire.* Québec.

Québec, Ministère de l'Éducation, Direction de la formation générale des jeunes. 2006. *Programme de formation de l'école québécoise, Éducation préscolaire, Enseignement primaire.* Québec.

Sheskin, David J. 2000a. «Test 20, the McNemar Test». Chap. in *Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures, 2^{nd} Edition*, p. 491-508. États-Unis : Chapman and Hall/CRC.

Sheskin, David J. 2000b. «Test 26, the Cochran Q Test». Chap. in *Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures, 2^{nd} Edition*, p. 685-701. États-Unis : Chapman and Hall/CRC.

Theoretical Learning, (26 juillet 2006). *About Theoretical Learning*, [en ligne]. Adresse URL:http://www.theoreticallearning.net/about_theoretical_learning.html

Vygotsky, Lev. 1978. *Mind in society : The development of higher psychological processes*. Cambridge : Harvard Press.

Wong, Maggie P. H. 1997. «Numbers versus letters in algebraic manipulation: which is more difficult?» In *Proceedings of the 21^{st} Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Lahti, 14-19 juillet 1997), sous la dir. de Erkki Pehkonen, p. 4-285-4-290. Lahti, Finlande: PME Program Committee.

Disponible sur demande :

Lacroix, Jean-Frédéric. 2003. «La compréhension des élèves de troisième secondaire de la notion de puissance négative en calcul algébrique». Mini recherche non publiée, Montréal, Université du Québec à Montréal, 82 p.