UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉLABORATION ET ANALYSE D'UNE INTERVENTION DIDACTIQUE CO-CONSTRUITE ENTRE CHERCHEUR ET ENSEIGNANT, VISANT LE DÉVELOPPEMENT D'UN CONTRÔLE SUR L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE CHEZ LES ÉLÈVES DU SECONDAIRE

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN EDUCATION

PAR

MIREILLE SABOYA MANDICO

MAI 2010

(…) C'est souvent pour nous excuser à nous-mêmes que nous nous imaginons que les choses sont impossibles.
(La Rochefoucauld)

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à ma directrice Nadine Bednarz. Les mots me manquent pour exprimer toute la gratitude que je ressens à votre égard pour toutes les heures passées sur ce projet, pour la patience que vous avez su témoigner pendant ce long parcours, votre disponibilité, votre bonne humeur et vos remarques toujours si judicieuses. J'ai beaucoup appris à vos côtés, vous êtes une grande didacticienne que j'admire beaucoup et qui a toujours cru en moi, merci du fond du cœur.

Je tiens également à remercier Fernando Hitt, mon co-directeur. Je n'oublierai jamais avec quel aplomb vous avez cru en mes capacités pour mener à bien cette longue aventure alors que le fait de faire un doctorat ne m'avait même pas traversé l'esprit. Merci Fernando d'avoir été à mes côtés, pour tous vos commentaires, pour tout ce que j'ai appris, je suis contente de pouvoir continuer à travailler avec vous.

À Nadia, sans qui cette recherche n'aurait pu être possible. Merci pour tout le temps que tu m'as consacré, pour l'enthousiasme qui empreint ta pratique. J'ai beaucoup appris en te voyant enseigner et tu restes pour moi un exemple à suivre. Je ne peux oublier ici tous les élèves de la classe qui m'ont si bien accueillie dans leur univers, j'ai été très heureuse de partager avec eux ces quelques mois, merci de m'avoir livré vos réflexions.

Merci à Jacinthe Giroux pour vos remarques judicieuses lors du projet doctoral, qui m'ont permis d'approfondir avec profit différents aspects de ma recherche.

À Michèle Artigue, merci de m'avoir si bien aiguillée à un moment difficile où j'en étais à un certain débroussaillage. Par les références sur certaines recherches autour du contrôle, mon sujet s'est dirigé vers ce concept qui est devenu par la suite central.

Merci à tous ceux qui sont devenus mes collègues du département de didactique de l'UQAM, André Boileau, Louis Charbonneau, Caroline Lajoie, Carolyn Kieran, Fernando Hitt, Denis Tanguay, Stéphane Cyr et Philippe Jonnaert (et par la suite Jérôme Proulx et Michel Warisse) pour m'avoir donné la chance de m'épanouir dans cette belle profession et pour leurs remarques éclairées lors de la construction d'une des questions du questionnaire (le coffre à jouets).

Je tiens à remercier quatre personnes qui ont gravité autour de moi et qui m'ont insufflé l'énergie nécessaire pour continuer cette aventure. À Izabella Oliveira, mon amie, je te remercie de pouvoir compter sur toi, d'avoir supporté mes hauts et mes bas, merci pour nos discussions, nos promenades, pour ta joie de vivre et surtout pour ta grande force. À Caroline Lajoie, merci pour ton écoute, ton amitié, ta présence chaleureuse, pour tes mots d'encouragement, pour tous les moments partagés desquels je sors grandie, je suis contente de pouvoir te côtoyer quotidiennement et de travailler avec une grande didacticienne comme toi. À Bernadette Janvier un grand merci de m'avoir épaulée et cru en mes capacités, j'ai beaucoup apprécié les moments passés en ta compagnie où j'ai tellement appris, où tu as éveillé en moi l'envie de me dépasser dans la formation, j'ai beaucoup d'admiration pour tout ce que tu as accompli. Je ne peux oublier Nathalie Lacelle, mon amie que j'ai connue dans le doctorat, nous avons commencé cette grande aventure ensemble et nous la finissons main dans la main comme certains choix que nous avons faits dans la vie. Merci pour tes encouragements, t'avoir vu cheminer m'a aidé à continuer.

Un grand merci au SÉDIM (Séminaire Étudiant en Didactique des Mathématiques) et à ses membres entre autres Izabella, Kalifa, Christian, Souleymane, Jean-François, Valériane, Claudia, Lily, Alexandre et Isabelle avec qui j'ai partagé l'avancée de mon projet, vos remarques et commentaires m'ont beaucoup aidée. Un merci particulier à Christian Morasse pour m'avoir permis de faire une pré expérimentation dans son école, tu es toujours présent quand on a besoin de toi. Merci également à Valériane Passaro avec qui j'ai eu le plaisir de travailler et de partager mes nombreux questionnements.

Je ne peux oublier ma famille en Andorre qui m'a permis de m'épanouir, qui est toujours là en cas de besoin, merci de m'avoir insufflé cette importance pour les études, pour les choses bien faites. Être loin d'eux n'est pas toujours facile surtout dans de tels moments d'accomplissement. *Papa, Mama, Cesc, Carmen, Gerard, Gemma i Tomàs gràcies per el vostre suport i per creure que podria un dia acabar aquesta aventura.*

La réalisation de ma thèse n'aurait été possible sans la présence de mon conjoint Olivier. Merci d'être cette moitié inébranlable sur qui je peux compter les yeux fermés, merci de m'avoir toujours écoutée, remontée le moral, de m'avoir accordée tout ton amour et ton soutien, je me sens grandie dans ton regard. Je te suis pour tout ça à jamais reconnaissante. Je ne peux oublier dans cette aventure les deux autres amours de ma vie, Ivan et Luka, à mes deux garçons qui ont réussi à me changer les idées, à m'oxygéner dans les moments difficiles. Merci Ivan pour m'avoir fait rire quand tu prétends être occupé à travailler sur ton doctorat pendant que tu pianotes sur un de tes livres comme si c'était un ordinateur. Merci Luka pour ta bonne humeur communicative, tes gros bisous baveux, ton amour inconditionnel de tout petit garçon.

Et pour terminer, un grand merci au Fonds québécois de la recherche sur la société et la culture (FQRSC) et au Conseil de recherches en sciences humaines (CRSH) qui par l'octroi d'une bourse de doctorat m'ont permis d'apprendre le métier de chercheure dans des conditions optimales.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE V

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Certaines composantes de l'activité mathématique de l'élève telles que la vérification du résultat obtenu, la justification d'un énoncé, d'une proposition ou de la démarche adoptée dans un problème, un engagement réfléchi dans la tâche, la validation reflètent l'acquisition de ce que nous avons nommé le *contrôle*. Plusieurs études montrent l'importance de ces composantes dans l'activité mathématique chez l'élève (Balacheff, 1987; Artigue, 1993; Butlen et al., 1989), et chez les mathématiciens (Hadamard, 1975; Nimier, 1989; Smith et Hungwe, 1998), cette activité apparaissant également centrale dans le contexte scolaire (MELS, 2003, 2006). Néanmoins différentes recherches (Delorme, 1985; Richard, 1998; Coppé, 1993; Dib, 2000-01; Polya, 1945/1965; Vivier, 1998; Chalancon et al., 2002; Artigue, 2002; Cortés et Kavafian, 1999; Bednarz et Janvier, 1992; Schmidt, 1994; Richard, 1998; Butlen et Pezard, 1990-91; Schoenfeld, 1985) soulignent le peu de *contrôle* exercé par les élèves face à l'activité mathématique et ce, à tous les niveaux et dans différents domaines des mathématiques. Ce constat rejoint celui émis par les enseignants en exercice sous l'angle d'une vérification du résultat, de la démarche.

Cette double préoccupation sur le contrôle que les élèves exercent en mathématiques, provenant à la fois des travaux menés en recherche en didactique des mathématiques et de la pratique à travers ce qu'expriment les enseignants nous a poussé à investiguer les situations susceptibles de développer le contrôle chez les élèves. Pour fonder l'élaboration de ces situations didactiques, nous avons mené une analyse du concept de contrôle autour de cinq perspectives différentes : sociologique, psychologique, éducation mathématique, mathématique et didactique. Nous en avons ressorti six composantes (même si les auteurs n'utilisent pas tous le terme contrôle) : anticipation, validation / vérification, engagement réfléchi, choix éclairé / discernement, utilisation de métaconnaissances, perception des erreurs / sensibilité à la contradiction / capacité de dépasser la contradiction.

Une recherche collaborative a été menée avec une enseignante de secondaire 3 autour de l'algèbre et plus précisément sur les exposants. Nous avons cherché à cerner d'une part les situations élaborées conjointement et les stratégies d'intervention mises en place en classe et d'autre part à mieux comprendre ce qu'il advient sur le plan du développement du contrôle chez les élèves du secondaire au cours de ces situations.

L'analyse des rencontres entre l'enseignante et la chercheure a permis de cerner *sur quelle base s'est fait le choix des tâches* retenues au cours de la planification, *comment elles ont été modifiées* au cours du processus de collaboration entre chercheure et enseignante (tâches redéfinies) et quelles sont les *raisons qui ont guidé cette modification*. Nous nous sommes également attardés sur les *tâches effectives en classe, et les modifications apportées en cours de réalisation*. Cette analyse a permis d'éclairer une didactique d'intervention autour du développement du contrôle. Ainsi, les composantes du contrôle et les critères en arrière du choix des tâches retenus au cadre théorique sont redéfinies à la lumière des rencontres de planification ; de nouvelles composantes et critères sont de plus mis de l'avant.

Notre travail enrichit également les différentes stratégies d'intervention favorisant le développement du contrôle ainsi que des indicateurs de contrôle chez les élèves, catégories sur lesquelles nous n'avions pas beaucoup d'information dans notre cadre théorique.

À la suite de l'analyse des séances en classe, des productions des élèves, des questionnaires écrits qui ont été passés au début et à la fin de l'expérimentation ainsi que des entrevues faites à certains élèves, nous avons pu tracer le développement du point de vue du contrôle auprès de huit élèves judicieusement choisis. Il en ressort pour certains un développement du contrôle sur le processus de résolution de problèmes et sur l'écriture. Nous avons toutefois noté certaines difficultés de contrôle qui persistent.

Mots clés : contrôle, secondaire, mathématique, recherche collaborative.

INTRODUCTION

Certaines tâches requièrent de la part des élèves, et ce, à différents niveaux de scolarité, une activité de *contrôle* sous l'angle d'une vérification du résultat obtenu, de la justification d'un énoncé, d'une proposition ou de la démarche adoptée dans un problème. Certaines de ces composantes se retrouvent dans les travaux de chercheurs en didactique des mathématiques qui explicitent des difficultés des élèves pouvant être associées au contrôle qu'ils exercent sous l'angle d'une attitude à se vérifier, à s'engager de façon réfléchie dans une tâche et dans la capacité à choisir stratégiquement entre plusieurs possibilités. Plusieurs études montrent l'importance de ces composantes dans l'activité mathématique de l'élève (Balacheff, 1987; Artigue, 1993; Butlen et al., 1989) et chez les mathématiciens (Hadamard, 1975; Nimier, 1989; Smith et Hungwe, 1988), cette activité apparaissant également centrale dans le contexte scolaire (MELS, 2003, 2006). Chacune des composantes relevées rejoint les préoccupations des enseignants en exercice, il y a donc une double préoccupation sur cet objet, le contrôle que les élèves exercent en mathématiques, provenant à la fois des travaux menés en recherche en didactique des mathématiques et de la pratique à travers ce qu'expriment les enseignants. À la croisée de ce questionnement, un certain objet de recherche à investiguer prend forme autour de situations susceptibles de développer le contrôle chez les élèves. Nous allons ainsi chercher à caractériser les situations et les interventions élaborées conjointement visant le développement du contrôle chez les élèves et à cerner l'activité de contrôle chez les élèves du secondaire au cours de ces situations.

Le premier chapitre est consacré à la problématique où nous reprenons les éléments à la source de ce présent projet notamment sur l'origine de notre questionnement, sur l'importance que prend le contrôle dans l'activité de l'élève, la place qu'elle occupe dans le programme de formation et ce que nous savons sur cette question d'après les recherches en didactique des mathématiques et d'après les propos des enseignants en exercice.

Dans le chapitre II nous avons procédé à une analyse rigoureuse du concept de contrôle. Cette analyse se base sur cinq perspectives : sociologique, psychologique, en éducation mathématique, en mathématique et en didactique. Nous y dégageons les différentes composantes du concept de contrôle amenées par ces éclairages et une définition de ce concept qui va nous guider tout le long de notre étude.

Dans le chapitre III, nous présentons la méthodologie utilisée pour atteindre nos deux objectifs, c'est-à-dire une recherche collaborative avec une enseignante du secondaire. Nous précisons les caractéristiques globales de cette approche, de même que les choix méthodologiques qui ont été faits pour mener cette étude, et les instruments que nous avons utilisés.

Dans le chapitre IV, nous rapportons l'analyse d'une séquence d'enseignement autour des exposants. Nous tenons à souligner que nous avons opté pour une théorisation émergente, nous avons ainsi cherché à cerner *sur quelle base s'est fait le choix des tâches* retenues au cours de la planification, *comment elles ont été modifiées* au cours du processus de collaboration entre chercheure et enseignante (tâches redéfinies) et quelles sont les *raisons qui ont guidé cette modification*. Nous nous sommes également attardées sur les *tâches effectives en classe, et les modifications apportées en cours de réalisation*. Finalement, nous avons cherché à cerner le développement du contrôle chez quelques élèves judicieusement choisis.

Au dernier chapitre, une lecture transversale permet de confronter le cadre théorique à la théorisation émergente à la suite de l'expérimentation. Il en ressort un éclairage de l'intervention didactique menée autour des différentes composantes du contrôle, autour des stratégies d'intervention qui favorisent le développement du contrôle, des indicateurs de contrôle chez les élèves ainsi que des critères en arrière des tâches du point de vue du contrôle.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 Origine du questionnement

Notre questionnement part d'un constat provenant de notre expérience en enseignement auprès d'élèves au secondaire et de futurs enseignants au primaire et au secondaire. Les élèves, à différents niveaux de scolarité, *« contrôlent »*[1] peu leur activité mathématique, et ce, en lien avec différents types de contenus et de tâches à produire. Pour éclairer nos propos, nous allons rapporter quelques-unes de nos observations issues de notre expérience auprès de futurs enseignants au primaire et au secondaire et d'élèves du secondaire, et nous allons mettre en évidence, à mesure, le questionnement suscité.

1.1.1 Quelques données nous questionnant issues de notre expérience d'enseignement

Lors d'une formation dispensée aux futurs enseignants au secondaire, nous leur avions demandé de résoudre l'équation suivante :

Peux-tu trouver la valeur ou les valeurs de x qui vérifie(nt) l'équation suivante?[2]

$$\sqrt{x} + 4 = 2\sqrt{x}$$

---

[1] Le sens donné au concept de « contrôle » va s'éclairer tout au long de la problématique et sera défini dans le cadre théorique. Il est pris, à ce stade, dans le sens commun, vu comme la personne qui possède une maîtrise sur ce qu'elle fait.

[2] Ce problème a été posé dans le cours MAT 2028 : Didactique de l'algèbre, à l'UQÀM (sessions automne 2004 et 2005).

Nous avons recueilli deux exemples parmi un ensemble de solutions d'étudiants pour illustrer nos propos :

Premier exemple	Deuxième exemple
$\sqrt{x}+4=2\sqrt{x}$	$\sqrt{x}+4=2\sqrt{x}$
$4=2\sqrt{x}-\sqrt{x}$	$4=2\sqrt{x}-\sqrt{x}$
$4^2=(2\sqrt{x}-\sqrt{x})^2$	$4=\sqrt{x}$
$16=4x-4x+x$	$2=x$
$16=x$	

Dans ces deux résolutions, nous pouvons remarquer que les étudiants mobilisent des connaissances propres à la résolution d'une équation rentrant dans le processus de résolution. Dans le premier exemple, ce processus est guidé par l'idée qu'en présence de racines carrées, il faut élever au carré pour faire disparaître les racines. Les étudiants ne prennent pas en compte le fait que la résolution d'une équation repose sur des transformations équivalentes, les équations $4=2\sqrt{x}-\sqrt{x}$ et $4^2=(2\sqrt{x}-\sqrt{x})^2$ n'étant pas équivalentes. Dans le deuxième exemple, les étudiants ne semblent pas remettre en question que le résultat obtenu, 2, ne vérifie pas la première égalité. Il en ressort ainsi une difficulté à parler $\sqrt{x}=4$, ce que cela signifie.

Lors de la résolution de l'équation $\frac{x}{2}+6-3x=2x+2-\frac{9x}{2}+4$, voici différents exemples de résultats donnés par les futurs enseignants au secondaire :

Exemple 1	Exemple 2
$\frac{x}{2}+6-3x=2x+2-\frac{9x}{2}+4$ $x+12-6x=4x+4-9x+8$ $x-6x-4x+9x=4+8-12$ $0.x=0$ Impossible, on ne peut pas diviser par 0.	$x-6x-4x+9x=4+8-12$ $x=0$
Exemple 3	**Exemple 4**
$x-6x-4x+9x=4+8-12$ $0.x=0$	$x-6x-4x+9x=4+8-12$ $0=0$
Exemple 5	
$\frac{x}{2}+6-3x=2x+2-\frac{9x}{2}+4$ $x+12-6x=4x+4-9x+8$ $-5x+12=-5x+12$ $-5x=-5x$ $x=x$	

Dans ces exemples, les étudiants mobilisent également des connaissances propres à la résolution d'une équation. Le type de tâche est toutefois différent ici puisqu'il s'agit d'interpréter une équation qui a une infinité de solutions dans les réels, ce qui pose certaines difficultés aux étudiants. Dans le premier exemple, nous pouvons constater que les étudiants, arrivés à l'égalité $0.x=0$, veulent diviser par 0 les deux membres de l'égalité, concluant alors par l'impossibilité d'une telle opération. Le sens donné à l'égalité $0.x=0$ est ici à questionner, n'étant pas vu comme la recherche de valeur(s) de x, si elles existent, telles que si on multiplie x par 0, on obtient 0, une infinité de valeurs étant dans ce cas-ci solution. Dans le deuxième exemple, les étudiants donnent une seule valeur comme solution, 0, cherchant à se ramener à une forme connue sous la forme « *x = a, où a est un réel* ». Dans les autres exemples relevés (exemples 3, 4 et 5), les étudiants répondent en donnant la forme la plus simple de l'équation à laquelle ils peuvent arriver, s'arrêtant là, sans conclure. Le sens de résoudre une équation, comme le fait de trouver le ou les valeurs de x, si elles existent, qui vérifient l'égalité, est ici à questionner. Ainsi, les connaissances requises pour résoudre une équation sont mobilisées, mais les étudiants bloquent dans l'interprétation de l'écriture d'une équation qui possède une infinité de solutions, motivés par l'idée qu'il y a toujours une solution dans une équation.

Chez les futurs enseignants au primaire, nous avons pu relever certaines difficultés chez les étudiants en lien cette fois-ci avec la résolution de problèmes, comme illustré dans le problème[3] ci-dessous :

> Roger collectionne des lézards, des scarabées et des vers de terre. Il possède plus de vers de terre que de lézards et de scarabées ensemble. Ces bestioles ont au total 12 têtes et 26 pattes. Combien de lézards Roger a-t-il?

<u>Exemple 1</u>	<u>Exemple 2</u>
On a 1 scarabée qui a 6 pattes, il reste alors 20 pattes à distribuer (26 – 6 = 20). Comme chaque lézard a 4 pattes, on aura alors 5 lézards ($20 \div 4 = 5$). Résultat : 5 lézards.	Si 5 vers de terre, alors 4 lézards et 3 scarabées *(pour avoir 12 têtes)*. Pas bon, on a plus de lézards et de scarabées ensemble que de vers de terre. Si 6 vers de terre alors on a 6 scarabées et lézards ensemble. Pas bon. Si 7 vers de terre, alors 3 lézards et 2 scarabées *(on a bien 12 têtes et plus de vers de terre que de lézards et scarabées ensemble)*, mais on obtient 24 pattes. Pas bon. Si 7 vers de terre, alors 2 lézards et 3 scarabées. C'est bon. <u>Réponse</u> : 7 vers de terre, 2 lézards et 3 scarabées.

[3] Ce problème fait partie du cours MAT1011 : l'activité mathématique donné à l'UQÀM (session automne 2003 et hiver 2004).

Ce type de problème, qui peut être modélisé par un système d'équations si on le résoud algébriquement, requiert une prise en compte simultanée des contraintes imposées. Nous pouvons remarquer que les étudiants rentrent dans la résolution de ce problème en utilisant les données présentes dans l'énoncé et prennent en compte un certain nombre de contraintes. Cependant, comme nous pouvons le constater dans le premier exemple, certains étudiants ne respectent pas toutes les contraintes du problème, obtenant le même nombre de vers de terre que de scarabées et de lézards, 6 animaux dans les deux cas. Ces étudiants ne considèrent pas deux contraintes du problème, le fait qu'il y a plus de vers de terre que de lézards et de scarabées ensemble et le nombre total de têtes. Dans le deuxième exemple, les étudiants arrivent au bon résultat par essais, contrôlant bien dans le processus de résolution, et, dans ce cas, toutes les contraintes du problème : ils fixent le nombre de vers de terre, ajustant alors le nombre de scarabées et de lézards. Nous pouvons toutefois remarquer que ces étudiants donnent comme réponse le nombre de chacun de ces trois animaux alors qu'il ne leur était demandé que le nombre de lézards. Cet exemple illustre le contrôle exercé par certains élèves dans la résolution de problèmes.

En secondaire 2, en raisonnement proportionnel, le problème suivant a été proposé aux élèves :

À partir de la recette de *Punch Kiwi* pour 24 personnes ci-après : 750 ml de Kiwi 1,44 litres de jus d'orange non sucré 375 ml de Club Soda 960 ml de Vodka Donne la recette pour 14 personnes.

Plusieurs élèves résolvent le problème de la façon suivante :

<u>Pour le Kiwi</u> : $750 \div 24 = 31{,}25$ ml pour 1 personne donc $31{,}25 \times 14 = 437{,}5$ ml pour 14 personnes.

<u>Pour le jus d'orange</u> : $24 \div 1{,}44 = 16{,}66$ litres pour 1 personne donc $16{,}66 \times 14 = 233{,}33$ litres pour 14 personnes

<u>Pour le Club Soda</u> : $375 \div 24 = 15{,}625$ ml pour 1 personne donc $15{,}625 \times 14 = 218{,}75$ ml pour 14 personnes.

<u>Pour la Vodka</u> : $960 \div 24 = 40$ ml pour 1 personne donc $40 \times 14 = 560$ ml pour 14 personnes.

Nous pouvons remarquer que ces élèves mobilisent un raisonnement proportionnel reposant sur un retour à l'unité, ils se ramènent à la quantité pour une personne, générant ensuite celle requise pour les 14 personnes. Au moment du calcul de la quantité de jus d'orange nécessaire, une conception de la division sous-jacente à l'inversion des nombres dans le calcul rentre certainement en jeu dans la résolution proposée. Les élèves obtiennent alors une quantité de jus d'orange pour 14 personnes (233,33 litres) qui est beaucoup plus grande que celle pour 24 personnes (1,44 litres), résultat que ces élèves ne remettent pas en question, ne retournant pas au problème pour vérifier la réponse obtenue, la sensibilité à la contradiction (entre les données obtenues et celles fournies au départ dans le problème) étant ici à questionner.

Ainsi, notre questionnement repose sur le constat que certaines tâches requièrent de la part des élèves, et ce, à différents niveaux de scolarité, l'utilisation de connaissances qui ne sont pas toujours mobilisées. Dans la résolution d'équations contenant des racines carrées, les élèves perdent de vue que la résolution d'équations repose sur des transformations équivalentes. L'interprétation d'équations ayant une infinité de solutions pose également des difficultés, les élèves contrôlant peu ce type d'écriture. Dans le contexte de la résolution de certains problèmes, le retour au problème, à la question, le respect de toutes les contraintes est à questionner. Cette préoccupation, sur le peu de vérification de la réponse, de la démarche utilisée en contexte de résolution de problèmes rejoint les observations des enseignants en exercice.

1.1.2 Un constat partagé par les enseignants

Notre travail avec des enseignants en exercice, lors de sessions de perfectionnement ou de congrès, nous a amenée souvent à entendre des propos de ce type de leur part « les élèves ne se vérifient pas; quand ils résolvent un problème, ils trouvent une réponse mais ils ne reviennent pas sur leur réponse, c'est fini… ». Dans une recherche collaborative en cours[4] portant sur l'arrimage en mathématiques entre le primaire et le secondaire, et réunissant des enseignants des deux niveaux scolaires, les difficultés en lien avec la résolution de problèmes ont été au cœur de la démarche. Leurs propos font part entre autres d'un non retour au problème. Ainsi, pour le problème suivant :

> Un chandail se vend 24 dollars, le profit du commerçant est un tiers du prix de vente. Quel est le profit du commerçant sur 10 chandails?

Un enseignant de secondaire 1 explique que plusieurs de ses élèves multiplient 24 par 10 ce qui donne 240$ pour le prix de 10 chandails. Pour trouver le profit, ils font alors $240 \div \frac{1}{3} = 720\,\$$. L'enseignant souligne le peu de réaction des élèves devant cette réponse, il relève le fait que les élèves se sont aperçus qu'il fallait faire soit une multiplication soit une division, ils ont alors choisi une de ces deux opérations, obtenant pour certains un résultat de 720 dollars supérieur au prix de vente des chandails. Les autres enseignants du primaire et du secondaire confirment ces propos en s'appuyant sur leur expérience. Ils ont également observé chez leurs élèves ce peu de vérification de la réponse obtenue et ce peu de sensibilité à percevoir

[4] Recherche CRSH-INÉ (2003-2007) conduite sous la responsabilité de Nadine Bednarz.

les éventuelles contradictions et erreurs, déplorant ainsi le manque de réflexion de la part de leurs élèves qui ne reviennent pas sur la réponse pour vérifier si elle a du sens.

Ce constat des enseignants autour des difficultés des élèves, qui s'exprime ici en termes de vérification, de la sensibilité éventuelle à la contradiction avec les données du problème, d'un questionnement sur la pertinence de la réponse et nos observations auprès des futurs enseignants au primaire et au secondaire et d'élèves du secondaire rejoignent certains constats formulés par plusieurs chercheurs, comme nous le verrons dans le point 1.3. Dans la prochaine partie, nous avons cherché à éclairer, avant d'aller plus loin, d'après les définitions tirées de quelques dictionnaires et lexiques mathématiques, le concept de contrôle, central dans notre travail. Une réflexion plus approfondie sur ce concept fera l'objet du cadre théorique.

1.2 Une première caractérisation de ce qu'on entend par contrôle sur l'activité mathématique

Une première caractérisation du concept de contrôle s'appuie sur des définitions tirées de dictionnaires[5] (Le Robert, 1996; Larousse, 1997; Lalande, 1960) et de lexiques mathématiques (Côté, Gagnon, Perreault et Roegiers, 2002[6]; De Champlain, Mathieu, Tessier, 1999[7]). On peut remarquer que le mot « contrôle » y renvoie à trois significations.

Il est associé, en premier lieu, à une activité de vérification, on se questionne pour savoir si la « solution » obtenue est adéquate ou pas. Cette vérification apparaît en lien avec différents types de productions, tels un acte, une pièce dont on veut s'assurer du caractère valide (Larousse, 1997) :

[5] Dans ce cas, la définition porte sur le sens du mot contrôle en général, pas nécessairement attaché aux mathématiques.

[6] Le lexique produit par ces auteurs s'appelle Leximath (Lexique mathématique de base).

[7] Ces auteurs ont écrit le Petit lexique mathématique.

> « Vérification, inspection attentive de la régularité d'un acte, de la validité d'une pièce. » (p.1370)

Cette idée de vérification, ce qu'elle recouvre, ce qu'elle demande se précise à travers ce qu'en disent les auteurs. Ainsi, une citation de Goblot (Logique, p.264) reprise par Lalande nous semble ici intéressante, elle suggère un moyen de vérification :

> « La vérification consiste à constater que le même résultat est obtenu par deux opérations différentes. » (Lalande, 1960, p.1195)

En mathématiques, on pourrait transposer cela au calcul, une façon de vérifier le résultat obtenu serait de refaire le calcul d'une autre façon par exemple en posant l'opération inverse. Dans l'exemple du calcul de la multiplication 126×24, on vérifierait le résultat obtenu, 3 024, en calculant $3024 \div 24$ et on regarderait si la solution obtenue est 126.

Lalande (1960) souligne, de plus, que la vérification suppose une certaine anticipation préalable, le verbe « vérifier » renvoyant à l'anticipation d'une hypothèse :

> « Prouver, reconnaître ou faire reconnaître quelque chose pour vrai par l'expérience. L'emploi du mot vérifier suppose la conception de l'hypothèse comme anticipation de l'expérience. » (p.1195)

Si on reprend l'exemple précédent, 126×24, on peut anticiper le résultat en donnant un ordre de grandeur de la solution avant tout calcul. Dans ce cas ci, on peut remarquer que le résultat de cette multiplication est proche de celui de la multiplication 125×25 qui peut se calculer mentalement en utilisant certaines stratégies de calcul. Une de ces stratégies serait de remarquer que 125×25 revient à calculer $125 \times 20 + 125 \times 5$, ce qui donne $125 \times 20 = (125 \times 10) \times 2 = 2500$ et $125 \times 5 = 125 \times 10 \div 2 = 625$. L'ordre de grandeur du résultat de l'opération 126×24 est alors de $2500 + 625 = 2500 + (500 + 125) = 3125$. Une autre stratégie serait de voir que $125 \times 25 = 125 \times 100 \div 4 = 12500 \div 4 = (12400 + 100) \div 4$ et alors

$(12400+100)\div 4=(12400\div 4)+(100\div 4)=3100+25=3125$. Une autre estimation possible de l'ordre de grandeur serait de se pencher sur le résultat de la multiplication 120×25 comme approximation de la multiplication de départ. On a alors $120\times 25=120\times 100\div 4=120\div 4\times 100$ et $120\div 4=30$, $30\times 100=3000$. On peut conclure que le résultat est proche de 3000.

Dans le dictionnaire philosophique (Lalande, 1960), il s'agit également de vérifier l'exactitude, l'authenticité d'une assertion, le caractère vrai d'une proposition, d'« examiner, par une confrontation avec les faits, si une proposition donnée est vraie ou fausse.» (p.1195). On se base ici sur l'expérience pour confirmer ou réfuter une proposition.

Dans les lexiques mathématiques (Côté et al., 2002) on retrouve l'idée d'une vérification reliée à un questionnement sur la justesse de la solution :

> « Vérifier la solution d'un problème consiste à s'assurer de la justesse et de l'exactitude de cette solution. » (p.179).

Il est intéressant de remarquer que la solution désigne à la fois la démarche adoptée et le résultat obtenu :

> « La **solution** d'un problème, c'est la démarche qui permet de résoudre ce problème. On emploie parfois le terme solution pour désigner la réponse à un problème. » (p.161)

Le Petit lexique mathématique (De Champlain et al., 1999) complète cette définition en spécifiant différentes actions décrivant l'habileté à vérifier :

> « L'habileté à **vérifier** consiste à faire la preuve que les opérations effectuées sont exactes, à analyser les démarches effectuées, à élaborer les démonstrations nécessaires, à juger de la pertinence des résultats obtenus. » (p.371)

Ainsi, l'une des habiletés à vérifier repose, entre autres, sur une interrogation sur la réponse, sur la démarche, on se demande si la réponse a du sens. Deux exemples viennent illustrer l'habileté à vérifier :

EXEMPLE-1

Vérifie l'exactitude de chacune des opérations ci-dessous.
Lesquelles sont incorrectes?

a) $126 \times 24 = 3\,024$

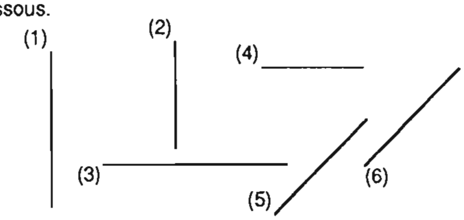
b) $347 \times 36 = 12\,495$

c) $253 \times 28 = 7\,090$

Réponse : b, c

EXEMPLE-2

Vérifie le parallélisme ou la perpendicularité des dix segments de droites tracés ci-dessous.



Lesquels sont perpendiculaires entre eux?
Lesquels sont parallèles entre eux?

Réponse : $1 \perp 3$, $2 \perp 3$, $1 \perp 4$, $2 \perp 4$, $1 // 2$, $3 // 4$, $5 // 6$

Figure 1.1 Exemples de tâches qui requièrent une vérification
(source : De Champlain, Mathieu, Tessier, 1997, p. 371)

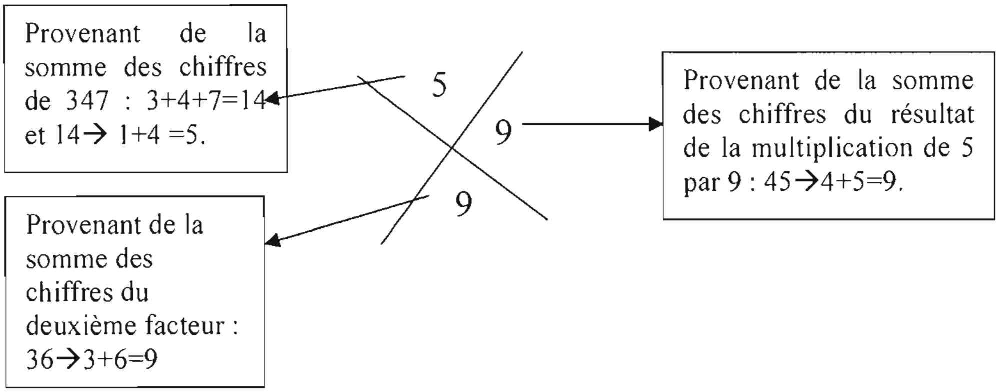
Nous pouvons remarquer que les auteurs ne commentent pas ces deux exemples, ils ne mettent pas en lumière comment s'exprime l'habileté à vérifier dans chacune de ces tâches. Dans le deuxième exemple[8], il nous semble que la vérification se résume à utiliser des instruments de mesure (règle, équerre...). On formule d'abord des propositions sur la perpendicularité ou le parallélisme des différents segments de

[8] Il y a certainement une erreur dans l'énoncé de l'exemple, il y a six segments et non dix.

droite, assertions que l'on valide ensuite par l'expérience[9]. Nous retrouvons dans cet exemple, l'idée de Lalande (1960) d'« examiner, par une confrontation avec les faits, si une proposition donnée est vraie ou fausse.» (p.1195).

Dans le premier exemple, il est demandé de vérifier l'exactitude de trois opérations données. La lecture de cet exemple nous amène à penser que l'habileté à vérifier revient dans ce cas ci à « faire la preuve que les opérations effectuées sont exactes », et à « juger de la pertinence des résultats ». En effet, il existe plusieurs moyens de prouver ou de réfuter les opérations données, on peut utiliser la calculatrice, effectuer la multiplication en la posant, effectuer l'opération inverse. Un autre moyen serait de remarquer que la multiplication 347×36 n'est pas correcte car le dernier chiffre du résultat de cette opération devrait être un 2, issu du produit de 7 par 6, qui donne 42. De la même façon, pour la multiplication 253×28, le dernier chiffre du résultat de cette opération devrait être un 4 provenant de $3 \times 8 = 24$. Par contre, l'utilisation de cette stratégie dans le premier calcul nous informe simplement que l'opération semble juste, mais on n'est pas sûr de la véracité de cette solution. Il faut alors aller chercher un autre moyen de vérification pour s'assurer de l'exactitude de ce résultat. Un autre moyen de vérification serait la preuve par 9. Par exemple, pour la multiplication 347×36, la preuve par 9 nous renseignerait sur le fait que le résultat n'est pas exact :

[9] Cette vérification par l'expérience risque fort par la suite d'être un obstacle à l'élaboration de l'idée de preuve en géométrie.



Il s'agit alors de vérifier si la somme des chiffres composant le résultat, 12 495, donne comme chiffre 9 ($1+2+4+9+5=21$ et 21 → 2+1 =3). On obtient ici un chiffre différent de 9, ce qui indique que le résultat obtenu n'est pas valide, remettant en question la démarche effectuée dans laquelle des erreurs se sont glissées.

Des lexiques mathématiques se dégage donc une deuxième signification du mot contrôle, reliée à un regard sur l'activité elle-même, sur la démarche et pas seulement sur le résultat. À des fins de vérification, on aborde alors l'activité d'une autre façon, dans le cas du calcul, on exerce un autre regard sur la première opération. Cette signification rejoint l'origine du mot contrôle (contre-rôle), qui désignait un second registre servant à la vérification du premier registre :

> « Le *contrôle* (contre-rôle) est primitivement un second registre, tenu à part pour la vérification du premier. D'où, par extension, s'assurer qu'une assertion est exacte, ou qu'un travail a été exécuté comme il devait l'être. » (Lalande, 1960, p.186)

Une troisième signification du contrôle provient du verbe anglais « to control » qui traduit que la personne est en contrôle, possède une maîtrise sur ce qu'elle fait. Ce sens a été amené par les traductions de l'anglais vers le français (dans les textes « to control » a été traduit par contrôler au lieu de maîtriser) :

> « Mais souvent la difficulté de rendre l'anglais to control [10], ou même l'ignorance du sens exact de cette expression, ont conduit des traducteurs français à se servir de contrôler et même de contrôle, dans des phrases qui ne comportaient pas l'emploi de ce mot. (...) Cette méprise s'est généralisée dans la langue des affaires, de l'administration, du journalisme (« le contrôle d'une entreprise industrielle », « le contrôle des changes », etc.) » (Lalande, 1960, p.186)

Ainsi, le contrôle renvoie, dans ce sens, non plus à une vérification de quelque chose, mais à une maîtrise d'une activité par le sujet :

> « Le fait de maîtriser, perdre le contrôle de soi-même. » (Le Robert, 1996, p.326)
>
> « Action, fait de contrôler quelque chose, quelqu'un ; examen minutieux (...) Avoir la maîtrise de la situation dans un secteur. » (Larousse, 1997, p.1370)

Ainsi, une première caractérisation du concept de contrôle prend forme à travers les dictionnaires et les lexiques mathématiques. L'activité de contrôle se traduit par une vérification, une inspection attentive de quelque chose pour en déceler le caractère adéquat ou non, ce qui suppose une anticipation préalable, une entrée sur l'activité elle-même pour être bien convaincu qu'il n'y a pas d'erreur. Le contrôle est vu également sous l'angle du sujet qui est en contrôle sur l'activité. Certaines de ces composantes se retrouvent dans les travaux de plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques, qui explicitent des difficultés des élèves en mathématiques pouvant être associées au contrôle qu'ils exercent sur l'activité mathématique. D'autres composantes du contrôle se dégagent de ces recherches comme nous allons le voir dans le prochain point.

---

[10] « Qui veut dire non seulement contrôler, mais commander à, diriger, avoir la haute main sur une affaire; contenir, réprimer, maîtriser. Cf. les expressions *Self-control,* maîtrise de soi; *birth-control*, limitation volontaire des naissances, etc.» (Lalande, p.186, note de bas de page.)

1.3 Contrôle sur l'activité mathématique : quelques données issues de recherches

Une revue de recherches en didactique nous a amenée à considérer trois composantes du contrôle qui sont peu présentes chez les élèves : *a)* l'attitude à se vérifier; *b)* l'attitude à s'engager de façon réfléchie dans une tâche, et ce, à différents niveaux; et *c)* la capacité à choisir stratégiquement entre plusieurs possibilités[11]. Il est important de remarquer, comme nous le verrons dans ce qui suit, que chacune de ces composantes rejoint les préoccupations des enseignants en exercice. Il y a donc une double préoccupation sur cet objet, le contrôle que les élèves exercent en mathématiques, provenant à la fois des travaux menés en recherche en didactique des mathématiques et de la pratique à travers ce qu'expriment les enseignants en mathématiques.

1.3.1 La vérification exercée sur l'activité mathématique par les élèves

1.3.1.1 Éclairage amené par les recherches

Plusieurs chercheurs (Delorme, 1985; Richard, 1998; Coppé, 1993; Dib, 2000-01; Polya, 1945/1965; Vivier, 1998; Chalancon, Coppé et Pascal, 2002; Artigue, 2002; Cortés et Kavafian, 1999) se sont intéressés à la composante capacité de vérification chez les élèves, et ce, à différentes niveaux de scolarité.

En psychologie cognitive, Delorme (1985) et Richard (1998) font état d'une absence de vérification chez les élèves, en résolution de problèmes, de la solution trouvée. Ainsi dans le problème:

> « Il y a 108 élèves dans l'école, il y a 57 filles, combien y a-t-il de garçons? » (Richard, 1998, p.306).

[11] Nous reprendrons ces différentes dimensions dans le cadre théorique.

L'auteur a constaté que certains élèves ne s'aperçoivent pas quand leur solution les conduit à une incompatibilité avec d'autres données. Ils ne voient pas, par exemple, qu'il ne peut y avoir plus de garçons que d'enfants. Coppé (1993) fait le même constat, les élèves en première scientifique[12] (16-17 ans) se contentant de fournir le résultat sans pouvoir porter une appréciation sur celui-ci. Dib (2000-2001), Polya (1965) et Vivier (1988) vont dans le même sens. Dès lors qu'il a une réponse, l'élève s'arrête de chercher. L'élève instaure sa réponse comme la vérité, il ne se questionne pas sur sa réalisation.

Dans la typologie des processus de vérifications élaborée par Coppé (1993), on peut constater que les élèves possèdent un répertoire réduit d'outils de vérifications. Les vérifications, qualifiées par la chercheure de *vérifications de type référence à la mémoire du savoir enseigné, à l'histoire de la classe* (p.41) ne nous semblent pas relever d'une activité de contrôle[13] sur l'activité mathématique. C'est le cas lorsque les élèves expliquent ce qu'ils ont fait dans un problème, un exercice donné, en se rapportant au professeur : « le prof a fait comme ça », « on fait toujours comme ça », ou « je suis sûr de moi car on avait fait le même exercice en classe », ce sont des vérifications basées sur le souvenir des exercices déjà faits, avec le risque que les critères d'appariement ne soient pas corrects. On sent une volonté dans ce cas en effet chez les élèves de vouloir rentrer dans le modèle fait en classe, de répondre aux exigences de l'enseignant. C'est le cas également des *vérifications qui renvoient à une certaine « norme », à un certain « allant de soi »*, par exemple :

> « - pour les problèmes numériques, toutes les considérations sur les solutions (auxquelles renvoient les élèves) qui doivent être des nombres simples ce qui signifie entiers, pas trop grands, des fractions simples, etc...
> - en géométrie, le fait que les ensembles de points que l'on trouve sont en général des cercles ou des droites.
> - enfin, pour les problèmes en général, l'unicité de la solution. » (p.41)

[12] Équivalent dans le système québécois de la première année du CÉGEP.
[13] Nous préciserons ce concept par la suite (chapitre 2).

Un autre type de vérifications de type *techniques*, « refaire un même calcul », « reprendre une à une les étapes d'une démonstration, d'un calcul, d'un dessin » (p.42) mettent de l'avant que les élèves n'abordent pas la tâche différemment :

> « Il s'agit de vérifier un résultat en refaisant la même chose, en faisant d'une autre façon assez proche (en tout cas sans changer de cadre) ou en reprenant chaque étape du procédé de résolution. » (p. 42).

Même si la relecture n'est pas forcément vide de sens, les élèves pensent la tâche de la même façon, ils ne semblent pas posséder d'outils pour l'aborder autrement. Ils mobilisent des connaissances, mais qui sont du même ordre, ne semblant pas avoir une autre entrée possible sur la résolution.

De plus, la prise en main de la vérification est remise entre les mains de l'enseignant, qui doit statuer sur le caractère valide ou non de la solution. Chalancon, Coppé et Pascal (2002) ont remarqué que de nombreux élèves demandent à l'enseignant de se prononcer sur le caractère vrai ou faux de leur résultat, alors que, d'après ces chercheurs, les élèves ont la possibilité de le faire eux-mêmes.

Dans le contexte de la résolution d'équations, Cortés et Kavafian (1999) décrivent également le non recours à des vérifications par les élèves de 4$^{\text{ième}}$ et 5$^{\text{ième}}$ (13 à 15 ans) :

> « Le contrôle algébrique comprend aussi la validation de la solution trouvée par la substitution dans l'équation initiale. Or, les tests effectués dans plusieurs classes montrent que ce type de contrôle n'est pas utilisé par les élèves dans la résolution d'équations mathématiques. » (p.69)

Margolinas (1989) souligne, de plus, que les élèves ne sont pas sensibles aux erreurs commises durant la démarche. Elle a remarqué que dans la résolution d'une équation ou d'un système d'équations, les élèves font de nombreuses erreurs qu'ils rectifient rarement.

Dans un tout autre contexte, celui de l'utilisation de la calculatrice, Artigue (2002) met de l'avant le peu de contrôle des élèves sur les résultats obtenus par eux via cet outil, ces derniers ne se questionnant pas sur la justesse des résultats :

> « Ils savent les utiliser quand d'emblée ils fournissent la réponse demandée, ils sont peu capables de s'adapter si ce n'est pas le cas, encore moins de contrôler les résultats obtenus, que ce soit au niveau numérique ou graphique. » (p.211)

On peut donc noter que les élèves, à différents niveaux du secondaire, se vérifient peu, ont peu tendance à s'interroger sur le caractère vrai ou faux de ce qu'ils viennent de faire, n'entrant pas spontanément dans une validation de leur démarche, dans un retour sur la réponse, ils sont également peu sensibles aux erreurs. De plus, les types de vérifications, quand elles existent, sont limitées (de nature technique, par exemple, reprise d'un calcul, d'une démarche…). La réponse est souvent retournée à l'enseignant (référence aux attentes implicites, à la mémoire du savoir enseigné,…). Ce constat des chercheurs sur les difficultés des élèves à se vérifier rejoint une des préoccupations des enseignants en exercice.

1.3.1.2 Constat des enseignants en exercice

Dans la recherche collaborative menée avec des enseignants du primaire et du secondaire en mathématiques et dont nous avons fait mention au point 1.2, les enseignants vont dans le même sens qu'Artigue (2002), les élèves maîtrisant peu les résultats fournis par la calculatrice, ne s'interrogeant pas sur la pertinence du résultat obtenu. Un enseignant fait ainsi part d'une situation dans laquelle il avait demandé aux élèves de calculer x au carré, la valeur de x étant moins deux. Il a remarqué que les élèves donnaient majoritairement comme réponse moins quatre alors que le résultat attendu était quatre. En utilisant la calculatrice, les élèves ne se questionnaient plus sur la justesse, l'exactitude du résultat obtenu, il n'y avait pas de retour sur le résultat pour s'assurer de sa pertinence, peu d'élèves ayant au préalable une idée du signe du résultat.

Face à la non vérification du résultat, au non retour sur la réponse de la part de leurs élèves devant une tâche mathématique, les enseignants se sentent démunis et découragés, se questionnant sur la façon de procéder pour arriver à développer un tel contrôle chez ces derniers. Quelques études (Chevallard, 1989; Coppé, 1993) viennent appuyer nos observations, en rapportant le constat fait par une majorité d'enseignants sur le peu de vérification des résultats par leurs élèves, et ce, même en situation de devoirs surveillés. Pourtant, dans ces devoirs faits en classe et sanctionnés par une note, on pourrait penser *a priori* que l'enjeu d'avoir une bonne note inciterait les élèves à vérifier leurs réponses. Coppé (1993) rapporte à ce propos le discours des enseignants : « les élèves ne vérifient pas », « ils font n'importe quoi », « ils écrivent des choses aberrantes » (p.28). Chevallard (1989) va dans le même sens, en soulignant l'étonnement et l'irritation de certains enseignants à propos de ce peu de vérifications des élèves.

D'autres recherches (Bednarz et Janvier, 1992; Schmidt, 1994; Chalancon et al., 2002; Richard, 1998; Cortés et Kavafian, 1998-99; Margolinas, 1989; Landry, 1999) mettent en évidence d'autres composantes du contrôle, problématiques chez les élèves, en lien avec un engagement réfléchi.

1.3.2 L'engagement réfléchi dans la tâche en mathématique chez les élèves

Plusieurs chercheurs (Bednarz et Janvier, 1992; Schmidt, 1994; Chalancon et al., 2002, Richard, 1998) ont relevé chez l'élève un engagement dans certains types de tâche sans jugement critique a priori (avant résolution), rejoignant les observations d'enseignants en exercice. Plus spécifiquement dans la manipulation algébrique d'équations, d'autres chercheurs (Cortes et Kavafian, 1998-99; Schmidt, 1994) ont observé que les élèves avaient <u>recours à des règles dont ils ne voyaient pas la pertinence</u>. Margolinas (1989) et Chevallard (1989) nous informent quand à eux du peu de jugement exercé par l'élève sur certains énoncés qui font appel à une justification.

1.3.2.1 Un engagement dans la tâche sans jugement a priori

Bednarz et Janvier (1992) et Schmidt (1994) observent un manque d'engagement réfléchi des élèves au secondaire en contexte de résolution d'un certain type d'équations et en contexte de résolution de problèmes à données contradictoires.

Bednarz et Janvier (1992) ont confronté des élèves de secondaire 3 (14-15 ans) à la résolution de l'équation $x+\frac{x}{4} = 6 + \frac{x}{4}$. Elles ont relevé, entre autres, les deux exemples de résolution suivants :

<u>Exemple 1</u>	<u>Exemple 2</u>
$x+\frac{x}{4}=6+\frac{x}{4}$	$x+\frac{x}{4}=6+\frac{x}{4}$
$\frac{4x}{4}+\frac{x}{4}=\frac{24}{4}+\frac{x}{4}$	$x+\frac{4x}{4}=6+\frac{4x}{4}$
$4x+x=24+x$	$5x=6+4x$
$5x-x=24$	$5x-4x=6$
$4x=24$	$x=6$
$x=6$	

Nous pouvons remarquer que dans ces deux exemples les élèves mobilisent des connaissances propres à la résolution d'équation. Cependant, cette stratégie n'est pas optimale puisque l'engagement dans cette résolution n'est pas ici nécessaire, un regard sur l'équation permettant de voir vite que $x = 6$ est solution. Le jugement ne précède donc pas l'entrée dans cette tâche pour plusieurs élèves. Dans le deuxième exemple plus précisément, nous notons que cet engagement est source de nombreuses erreurs non détectées par les élèves, ces derniers ne s'apercevant pas que les équations obtenues ne sont pas équivalentes d'autant plus qu'ils arrivent dans ce cas à une réponse qui est bonne.

Ces exemples mettent en évidence des difficultés chez les élèves en lien avec le fait de s'engager de façon réfléchie dans la résolution d'un certain type d'équations et d'être sensibles aux erreurs commises (dans le deuxième cas, même si l'élève arrive à la bonne réponse, sa démarche est fausse).

D'autres difficultés apparaissent dans la résolution de problèmes à données contradictoires, les élèves s'engageant a priori dans le problème. Schmidt (1994) a proposé à des futurs enseignants au primaire et au secondaire le problème suivant :

> « Au restaurant, un café et trois croissants coûtent 2,70\$. Deux tasses de café et deux croissants coûtent 3\$. Trois tasses de café et un croissant coûtent 3,50\$. Trouve le prix d'une tasse de café et d'un croissant. »

Les deux résolutions ci-dessous ont été obtenues :

<u>Résolution algébrique</u>	<u>Résolution arithmétique</u>
x : prix d'un croissant y : prix d'une tasse de café. On a : $\begin{cases} y + 3x = 2{,}70 \\ 2y + 2x = 3 \\ 3y + x = 3{,}50 \end{cases}$ D'où : $2y + 6x = 5{,}40$ (en doublant la 1ère équation) $2y + 2x = 3$ On obtient : $4x = 2{,}40$ donc $x = 0{,}60\$$ (prix d'un croissant) et $y = 0{,}90\$$ (prix d'un café). Vérifions dans la troisième équation : $3\ (0{,}90) + 0{,}60 = 2{,}70 + 0{,}60 = 3{,}30\$$. Ça ne marche pas, on aurait dû obtenir 3,50\$! Les étudiants reprennent alors la résolution.	C'est impossible! Pour 1 café et 3 croissants, le prix est de 2,70\$. Pour 2 cafés et 2 croissants, le prix est de 3\$, donc si on achète un café de plus et qu'on prend un croissant de moins, on a une différence de prix de 0,30\$. Si pour 2 cafés et 2 croissants le prix est de 3\$ et pour 3 cafés et un croissant, il est de 3,50\$, le même écart devrait se retrouver puisqu'on ajoute un café et qu'on a un croissant de moins. Or on retrouve ici un écart différent, de 0,50\$!

Dans la résolution algébrique, les étudiants écrivent les trois équations relatives au problème, ils opèrent sur deux des équations, arrivent à un résultat, dans ce cas-ci, 60 cents pour un croissant et 90 cents pour un café. À des fins de vérification, ils remplacent les valeurs obtenues dans la troisième équation, constatant que l'égalité n'est pas vérifiée, les étudiants reviennent alors sur leurs calculs algébriques, et ce, plusieurs fois de suite. Dans certains cas, les élèves recommencent la résolution, pensant qu'ils se sont trompés dans les calculs. Contrôlant mal la résolution algébrique, les étudiants ne perçoivent pas que les trois équations sont incompatibles. Ils mobilisent ainsi les connaissances nécessaires pour résoudre un système, mais ils sont bloqués lors de la prise en compte de la troisième équation. Dans le raisonnement de type arithmétique, on peut noter que le raisonnement sur les écarts permet, dans ce cas vite, avant tout engagement dans la résolution de déceler la contradiction (on a ici un contrôle exercé sur le processus de résolution).

Un engagement dans certains types de tâches sans jugement a priori rejoint les préoccupations des enseignants du secondaire (Landry, 1999).

1.3.2.2 Constat chez les enseignants en exercice

Dans sa thèse de doctorat, Landry (1999) fait part de sa préoccupation en tant qu'enseignante de mathématiques au secondaire. Elle a été interpellée par les difficultés que rencontrent les élèves, notamment les élèves faibles, face à la résolution de problèmes en mathématiques. Son questionnement part de l'observation que les élèves ne s'engagent pas dans la résolution de problèmes de façon efficace, réfléchie :

> « Nos observations montrent que les élèves faibles en mathématiques éprouvent, en général, des difficultés en résolution de problèmes. La plupart ne savent pas comment aborder un problème : ils sont à la recherche d'algorithmes, ils ont des difficultés langagières, se lassent très vite d'une situation, etc. Ainsi le travail en classe est souvent difficile à gérer parce que beaucoup d'élèves ne peuvent s'engager dans la résolution de problèmes de façon efficace. » (p.8)

Landry déplore le peu de réflexion qu'utilisent les élèves pour la résolution d'un problème, les élèves faibles associant avant tout à « problème » l'obligation de fournir une réponse. Face à un problème, ils cherchent ainsi à fournir une réponse en utilisant les nombres du texte sans même se soucier de la question posée. Pour la chercheure et enseignante, un engagement réfléchi dans la résolution de problème est lié à une bonne compréhension du problème :

> « Comprendre un problème exige d'aller plus loin que l'énoncé lui-même : il faut avoir une vue d'ensemble des données du problème, de leurs relations, de leur enchaînement, permettant un premier engagement dans la résolution » (p.5)

Dans le cas de la manipulation algébrique, des chercheurs (Cortés et Kavafian, 1998-99; Schmidt, 1994) soulignent le recours de la part de certains élèves à des règles qu'ils contrôlent peu.

1.3.3 Dans la manipulation algébrique d'équations, les élèves ont recours à des règles dont ils ne voient pas la pertinence

Une étude (Cortés et Kavafian, 1998-99) s'est intéressée aux erreurs commises par les élèves des classes de 4[ième] et de 5[ième] (13 à 15 ans) dans la résolution d'équations. Ils ont remarqué que la plupart des élèves mobilisant des règles qu'ils ont retenues pour la manipulation algébrique, sans associer une signification à celles-ci. Ainsi, être en contrôle sur ce processus de résolution en algèbre se traduirait pour ces chercheurs par un recours à des règles dont on verrait la provenance et la pertinence. Par exemple, pour résoudre une équation :

> « pour chaque transformation le sujet utilise souvent des règles « économiques » du type :
> « Le terme passe de l'autre côté en changeant de signe »
> « Le coefficient de l'inconnue passe de l'autre côté en changeant de signe »
> « Le comptage des x pour réduire des termes » (p.68)

La résolution algébrique devient alors un automatisme dénué de tout sens, ce qui amène certains élèves à produire certaines erreurs comme $-3 \cdot x = 86$, $x = \frac{86}{3}$ justifiée par la règle *« le coefficient passe de l'autre côté de l'équation en changeant de signe »* (p.65). Les chercheurs soulignent ainsi le manque d'engagement réfléchi des élèves du secondaire dans la manipulation algébrique provenant d'une utilisation de règles qu'ils se sont construites, qui ne sont pas contrôlées sur un plan sémantique, les élèves n'étant pas conscients de la justification qui accompagne ces règles, des justifications en lien avec la conservation de l'égalité, qui se traduiraient par :

1. On additionne ou on soustrait le même nombre à chaque membre de l'équation et on obtient une nouvelle équation équivalente.
2. On multiplie (ou on divise) par le même nombre chaque membre de l'équation et une nouvelle équation équivalente est obtenue. (p.69)

Schmidt (1994) va dans le même sens. Elle a fait le constat que les futurs enseignants au primaire et au secondaire ne procèdent pas à un choix éclairé, à un engagement réfléchi dans la résolution algébrique. Celle-ci semble guidée par la recherche d'un certain pattern de résolution : placer les « x » d'un côté du signe égal et les nombres de l'autre côté de ce signe, de façon à pouvoir isoler « x ». Toute cette démarche s'appuie sur des règles dont les étudiants avouent ne pas trop comprendre pourquoi elles fonctionnent, comme nous pouvons le voir dans l'extrait suivant d'une entrevue entre une étudiante, Josée (J), et la chercheure (C) :

> « C : OK… Pourquoi tu dis ici... le 16 on l'envoie de l'autre bord?
> J : Bien, c'est toujours afin d'isoler le fameux x.
> C : Qu'est-ce qui permet de faire ça?
> J : … Bien ça c'est des règles que j'ai appris à l'école. Si tu l'envoies de l'autre côté, tu fais juste changer, si c'est moins, tu fais un plus… Qu'est-ce qui me permet de faire ça? C'est parce que je l'ai appris comme ça… Je n'ai pas de réponse, je ne le sais pas. Quand j'allais à l'école, on m'a appris que si tu veux isoler… envoyer tous tes chiffres ensemble, bien quand tu le changes du côté du égal il fallait que tu changes le signe qu'il y a devant. » (p.267)

La grande majorité des futurs enseignants du primaire interviewés sont incapables de fournir une explication aux règles de transformation utilisées dans la résolution d'équations, elles sont vues comme des normes. La chercheure note que ces étudiants exercent peu de contrôle sur les transformations algébriques, les justifiant par « mais c'est la loi. » (p.269) De cette incompréhension découlent certaines erreurs comme le montre l'extrait suivant dans lequel une étudiante Caroline (Ca) explique comment elle a procédé pour résoudre l'équation $7x + x = 40000$ mathématisant un problème d'argent :

« Ca : J'ai fait $7x$ plus x égalent 40 000. Ça veut dire que x c'est l'avoir de.... Chantal.
C : OK.
Ca : Puis, si je veux enlever mon 7, il faut que je divise 40 000 par 7. Ça m'a donné 5 714,29 mais c'est parce que je l'ai arrondi...
(Remarque : Quand elle enlève son 7, elle reste avec $x + x$)
$x + x$, ça me donnerait $2x$. Puis x me donnerait, $2x$ divisé... C'est-à-dire que je ferais 5 714 divisé par deux pour que mon x me donne 2 857. » (p.231)

Margolinas (1989) s'est intéressée à une tâche particulière, des énoncés qui font appel à une justification, remettant en question le sens de l'écriture algébrique accordé par certains élèves.

1.3.4 Jugement sur certains énoncés faisant appel à un contrôle sur le sens de l'écriture algébrique

Dans le domaine algébrique, Margolinas (1989) constate l'utilisation de pauvres décisions stratégiques des élèves en première scientifique (16-17 ans). Confrontés à la tâche de se prononcer sur trois réponses proposées, sur celle qui est solution de l'équation ou du système d'équations donné, les élèves utilisent toujours le remplacement de la réponse dans l'équation ou dans le système d'équations pour conclure. Cependant, dans le cas d'une infinité de solutions, ou dans le cas où il n'y a pas de solution, cette procédure présente des limites. Par exemple, pour la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y + \frac{5}{4} = 0 \\ -\frac{1}{10}x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

les réponses proposées à l'élève sont : « il y a une infinité de solutions » (qui est la bonne réponse), la réponse { $x = \frac{-5}{2}$; y = 0} (qui est une réponse partiellement vraie, le couple ($\frac{-5}{2}$;0) étant une solution du système) et la réponse fausse « il n'y a pas de solution. » Une majorité d'élèves proposent comme réponse ($\frac{-5}{2}$; 0) sans s'assurer de l'unicité de cette solution[14]. Margolinas a observé que les élèves n'ont pas recours à d'autres « techniques » de validation que le remplacement de l'inconnue par une valeur numérique pour conclure sur la validité ou non d'une solution, montrant les limites du contrôle qu'ils exercent dans ce cas sur cette tâche de validation.

À la lumière de toutes ces recherches, nous pouvons noter que l'engagement réfléchi se manifeste de plusieurs façons suivant la tâche proposée. Avant le processus de résolution, plusieurs chercheurs (Bednarz et Janvier, 1992; Schmidt, 1994; Chalancon et al., 2002, Richard, 1998) et une enseignante chercheur (Landry, 1999) ont noté que les élèves portent un regard peu réflexif sur la tâche à effectuer. En algèbre, d'autres chercheurs (Cortés et Kavafian, 1998-99; Schmidt, 1994) soulignent un travail syntaxique dont on perçoit mal le sens et la pertinence, un contrôle limité sur l'écriture algébrique, traduisant un savoir non fonctionnel. Finalement, dans ce même domaine, Margolinas (1989) relève l'utilisation de pauvres décisions stratégiques.

Dans d'autres études (Artigue, 2002; Butlen et Pezard, 1990-91; Schoenfeld, 1985), nous avons relevé les limites du contrôle exercé par les élèves, cette fois-ci relié à la capacité à choisir stratégiquement la stratégie la plus appropriée parmi plusieurs possibilités.

---

[14] Il faut pour cela soit reconnaître que les deux équations sont équivalentes, que les solutions de l'une sont aussi solutions de l'autre soit avoir recours à d'autres techniques de validation, par exemple à un cadre graphique.

1.3.5 Choix stratégique parmi plusieurs possibilités

1.3.5.1 Éclairage amené par les recherches

Dans un rapport provenant d'une réflexion sur l'enseignement du calcul, Artigue (2002) fait une distinction entre le calcul qui est systématiquement routinier, automatisé et celui qui est associé à des stratégies de calcul diverses, qui relève d'une réflexion. Le contrôle est, à notre avis, attaché à cette deuxième dimension du calcul. Il s'agit pour l'élève, comme le souligne Artigue (2002), d'arriver à comparer les stratégies de résolution du point de vue du coût et de l'efficacité pour que le calcul soit le plus économique possible :

> « Il s'agit d'utiliser les caractéristiques du calcul mental :
> - pour susciter une réflexion sur le calcul, les techniques opératoires usuelles étant trop coûteuses en mémoire pour se prêter à une exécution mentale.
> - Pour mettre en évidence la diversité des façons possibles d'aborder généralement un calcul, comparer leurs coûts, les connaissances qui les fondent. » (p.203-204)

Or, quelques études tendent à montrer que ce n'est pas le cas. Butlen et Pezard (1990-91) ont constaté que seuls quelques élèves du primaire sont capables de choisir entre différentes procédures de calcul mental celles qui conviennent le mieux :

> « Une fois encore, on constate que ce sont les meilleurs élèves qui proposent plusieurs procédures et qui sont capables d'en changer « comme ça les arrange » selon les données numériques. » (p.45)

À un tout autre niveau, celui du calcul différentiel et intégral, Schoenfeld (1985) note, dans le même sens, que les étudiants (17-19 ans) arrivent à effectuer des « intégrations » mais que ces derniers ne peuvent éviter des approches difficiles ou coûteuses en temps, ne prenant pas en compte de façon adéquate les caractéristiques de l'intégrale donnée dans le choix qu'ils font pour déterminer la stratégie appropriée. Ils se lancent dès le début dans l'application d'une technique de résolution, sans tester s'il en existe d'autres plus simples et moins coûteuses en temps. Dans un cours de calcul élémentaire, le chercheur a proposé aux étudiants de calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{xdx}{x^2-9}$. Cette intégrale peut être calculée rapidement en utilisant le changement de variable $u = x^2 - 9$. Schoenfeld a observé que 44 de ces 178 étudiants (24%) ont décidé plutôt de factoriser le dénominateur $x^2 - 9$. Cette technique amène vers la bonne solution, mais elle est plus coûteuse en temps, pour effectuer les calculs. 17 d'entre eux ont également décidé d'utiliser la substitution par une fonction trigonométrique en posant $x = 3\sin\theta$, technique qui demande encore plus de temps pour trouver la solution.

Cette limite de l'utilisation du contrôle de la part des élèves, vu ici comme la capacité à poser un choix entre plusieurs possibilités est également un constat des enseignants en exercice.

1.3.5.2 Constat chez les enseignants

Dans la recherche collaborative sur l'arrimage entre le primaire et le secondaire citée précédemment (voir points 1.2 et 1.3.2.2), les enseignants expriment également cette difficulté à faire un choix approprié de la part des élèves en ce qui a trait au calcul mental. Le calcul 26 + 12 + 34 a été demandé à des élèves de secondaire 1, un enseignant explique que la stratégie la plus efficace repose sur l'utilisation d'une des propriétés de l'addition, la commutativité (26 + 12 + 34 = 12 + 26 + 34). En effet, il est plus efficace de calculer d'abord 34 + 26 car l'addition de 4 unités et 6 unités donne un nombre « rond », 10, auquel on ajoute 3 dizaines et 2 dizaines provenant de 34 et 26 ; il suffit ensuite d'ajouter 12 au résultat obtenu. L'enseignant rapporte que la majorité des élèves arrivent au bon résultat, mais en utilisant des stratégies moins efficaces. Certains d'entre eux posent le calcul écrit dans leur tête, ils effectuent l'addition de gauche à droite : 26 + 12, et ensuite rajoutent le troisième terme, utilisant mentalement l'algorithme écrit. D'autres élèves utilisent des décompositions, par exemple, pour 26 + 12, ils font 26 + 10 + 2 = 38 et additionnent le troisième 34, en décomposant de la même façon 38 ou 34, stratégie qui est plus coûteuse en temps et moins efficace que celle mise en évidence par l'enseignant.

On note ainsi de la part d'une majorité d'élèves, de tous les niveaux de scolarité, un manque de réflexion sur le choix de la stratégie la plus efficace, celle qui mène vers le résultat le plus rapidement et avec le moins de risque d'erreurs.

Toutes ces recherches pointent donc un problème central en lien avec les limites du contrôle exercé par les élèves dans différentes activités mathématiques. À la lumière de ce constat, partagé par les chercheurs en didactique des mathématiques et par plusieurs enseignants, une certaine situation problématique partagée peut donc être mise de l'avant. À ce stade de notre réflexion, nous voudrions montrer l'importance de s'attarder à cette question, et au problème ici soulevé.

1.4 L'importance de l'élaboration d'un contrôle sur l'activité mathématique

Plusieurs études montrent l'importance de s'attarder à cette question, le contrôle ayant un rôle central à jouer dans l'activité mathématique (Balacheff, 1987; Artigue, 1993; Hadamard, 1945/1975; Nimier, 1989; Smith et Hungwe, 1998) et dans le développement de la pensée mathématique (Butlen, Lagrange et Perrin, 1989; Margolinas, 1989; Balacheff, 1987; Mary, 1999; Dib, 2000-01; Chalancon et al., 2002). L'activité de contrôle fait également partie des orientations du programme de formation au secondaire (MELS, 2003, 2006).

1.4.1 Importance du contrôle dans les recherches en didactique des mathématiques et en mathématiques

En didactique des mathématiques, nous rattachons l'acquisition d'une certaine rationalité[15] mathématique présentée par Balacheff (1987) à la capacité d'exercer un contrôle sur l'activité mathématique, l'élève y faisant appel à la raison. Pour ce chercheur, l'importance d'une conduite rationnelle chez l'élève devrait occuper, dans l'enseignement, le même statut que la construction de savoirs :

> « Très tôt, disons dès la sixième[16], doit être posé le problème de l'évolution des fondements rationnels de l'activité mathématique des élèves en même temps, et avec le même statut, que celui de la construction des savoirs. » (p. 170).

D'après Balacheff, on devrait ainsi, dans l'enseignement, accorder la même place au processus de construction des connaissances mathématiques qu'au développement de la rationalité de l'élève, ce que nous pouvons associer au développement d'une activité de contrôle. Artigue (1993) va dans le même sens à travers ce qu'elle nomme les métaconnaissances et qui traduisent une activité réflexive de l'élève. La chercheure distingue les connaissances des métaconnaissances en s'appuyant sur un exemple[17] sur les nombres complexes :

> E1 : Un nombre complexe peut s'exprimer algébriquement dans plusieurs registres : le registre cartésien qui met en évidence la décomposition en partie réelle et imaginaire : z = a+ib, les registres trigonométrique et exponentiel qui mettent tous deux en évidence le module et l'argument mais avec des caractéristiques sémiotiques différentes : $\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $\rho e^{i\alpha}$

---

[15] La rationalité mathématique n'est réductible ni à la démonstration ni à la logique. Comme présenté par Ourahay, Houdement et Hitt (2007) dans la présentation du thème 8 (Le développement de la rationalité au fil de la scolarité) lors du Colloque *EMF2006* à Sherbrooke (Québec) : il n'existe pas qu'une rationalité, pur produit du raisonnement, mais « la rationalité s'applique à des procédures aussi bien de pensée que de raisonnement. (...) La rationalité semble être un objet soit explicite, soit implicite de l'enseignement des mathématiques. » (p. 1)

[16] Dans le système français, la sixième correspond à la première année du secondaire.

[17] Dans son article, Artigue (1993) présente cinq énoncés sur les nombres complexes, nous n'en avons repris que deux ici.

E2 : Quand on résout un problème portant sur des complexes, on a intérêt à se poser la question du choix d'un registre adapté au traitement et à changer éventuellement de registre en fonction de l'avancée du traitement.

Artigue souligne que E1 est une connaissance élémentaire, partagée par tous les étudiants de terminale (17-18 ans), cette connaissance est raccrochée à un savoir officiellement enseigné, que l'on trouve dans les manuels, dans les cahiers d'élèves. Par contre, E2 est à un autre niveau, elle constitue une métaconnaissance, une connaissance sur des connaissances permettant d'utiliser des connaissances comme E1, celles-ci servant « à la prise de décision et au contrôle » (p.38) et traduisant une activité réflexive chez l'élève. La chercheure remarque que les élèves se différencient au niveau des métaconnaissances, elle constate ainsi que pratiquement aucun élève ne met en jeu dans son fonctionnement la métaconnaissance E2 et elle souligne l'importance de proposer à des élèves de terminale des énoncés dans lesquels ils ont la charge du choix du registre et les changements éventuels de registres. Le contrôle, se traduisant ici par les métaconnaissances, permet une réflexion sur les stratégies de résolution possibles, un choix explicite. Son analyse rejoint les propos de Balacheff (1987), en montrant l'importance du développement du contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves en parallèle avec la construction des savoirs.

En mathématiques, le même enjeu central peut être mis en évidence. Hadamard (1945/1975), s'intéressant à définir les conditions qui permettent les découvertes en mathématiques, à travers les témoignages de plusieurs chercheurs en mathématiques, montre que l'activité de contrôle est centrale dans le processus d'invention. Celle-ci se manifeste à travers une vision d'ensemble du problème; l'énonciation d'une hypothèse, d'une conjecture par le mathématicien étant animée par un engagement réfléchi, un choix éclairé entre plusieurs possibilités. De plus, les mathématiciens vérifient à chacune des étapes de leur invention leur résultat, leur démarche, ce qui sert à limiter le doute en procurant au chercheur un sentiment d'absolue certitude indispensable à la poursuite du travail d'invention, le mathématicien n'accordant pas une confiance aveugle aux résultats des règles qu'il utilise. Cette idée est reprise par Nimier (1989) qui a effectué des entretiens auprès de mathématiciens. D'autres chercheurs (Smith et Hungwe, 1988) vont dans ce même sens, ils soulignent que les mathématiciens utilisent des essais numériques « disciplinés », provenant d'un choix éclairé de nombres pour valider ou réfuter des conjectures qu'ils ont émises.

Butlen, Lagrange et Perrin (1989) précisent que se donner les moyens de vérifier, de savoir si ce qu'on dit est vrai, si c'est juste ou non sans demander au professeur est à la base de la réussite des élèves. L'activité de contrôle apparaît donc centrale dans l'invention mathématique, elle a cours tout au long du processus et dans l'apprentissage des mathématiques.

Dans le contexte scolaire du Québec, cette question apparaît également centrale même si le programme ne l'énonce pas de façon explicite (MELS, 2003, 2006).

1.4.2 Place du contrôle sur l'activité mathématique dans le programme de formation au secondaire

Dans les programmes de formation du premier et du second cycle du secondaire (MELS, 2003, 2006), l'activité de contrôle est mobilisée nous allons le voir dans les trois compétences[18], *Résoudre une situation problème*, *Déployer un raisonnement mathématique* et *Communiquer à l'aide du langage mathématique*.

Dans la première compétence *Résoudre une situation problème,* la composante *Valider la solution* fait appel à un retour sur la solution par l'élève pour

[18] C'est nous qui dégageons ceci de l'analyse, le programme ne parle pas explicitement de contrôle sur l'activité mathématique.

juger du caractère vrai ou faux de celle-ci. Nous avons relevé deux types de validation, celle qui porte sur le résultat et celle qui porte sur la démarche.

Un des énoncés qui caractérise cette composante est en effet « Confronter le résultat obtenu avec le résultat attendu » (MELS, 2003, p.241; MELS, 2006, p.25). On s'attend ici à ce que l'élève valide le résultat qu'il a obtenu ; pour cela, on travaille entre autres un travail d'anticipation préalable de manière à pouvoir ensuite confronter les deux résultats. La validation du résultat repose donc sur une anticipation préalable. C'est dans la composante *Élaborer une solution mathématique* que le programme présente par ailleurs des moyens possibles pour anticiper ce résultat :

> « Décrire le résultat attendu en tenant compte de la nature des données liées à la situation • Estimer, s'il y a lieu, l'ordre de grandeur du résultat. » (MELS, 2003, p.241; MELS, 2006, p.25)

Dans le cas par exemple du calcul, l'anticipation consiste à estimer un ordre de grandeur du résultat. Dans certains problèmes, on peut aussi anticiper au préalable la nature de la solution, par exemple si on cherche un nombre de personnes, on sait que le résultat cherché doit être un entier. Ces éléments devraient selon nous se retrouver dans la composante *Valider une solution* comme des moyens d'anticiper un résultat au préalable, et de valider celui-ci (en revenant sur cette anticipation et en la confrontant avec le résultat obtenu).

Un autre énoncé de la composante *Valider une solution* fait appel à une validation de la démarche de résolution, on se situe ici au cœur de l'activité :

> « Apprécier la pertinence et l'efficacité des stratégies employées en comparant sa solution avec celle de ses pairs, de son enseignant ou d'autres sources. » (MELS, 2003, p.241)

Il s'agit pour l'élève de s'attarder aux stratégies qu'il a utilisées en les confrontant à d'autres stratégies possibles, ce dernier devant juger de la pertinence et de l'efficacité de celles-ci. On pourrait penser que cet énoncé est décrit, d'une certaine façon, dans la composante *Élaborer une solution mathématique*, à travers la nécessité de mobiliser des connaissances appropriées, l'utilisation de stratégies efficaces, appropriées y étant reprise :

> « Utiliser des stratégies appropriées en s'appuyant sur des réseaux de concepts et de processus. » (MELS, 2003, p.241; MELS, 2006, p.25)

Une autre dimension du contrôle présente dans la composante *Valider la solution* est celle d'un retour sur cette solution conduisant à une modification de celle-ci, « Rectifier sa solution, au besoin » (MELS, 2003, p.241; MELS, 2006, p.25), ce qui demande une certaine sensibilité aux erreurs, un questionnement sur la solution élaborée.

Dans le dernier énoncé de la composante *Valider la solution,* le programme demande que l'élève soit capable de « Justifier les étapes de sa démarche » (MELS, 2003, p.241), ce qui se retrouve dans le programme du deuxième cycle sous la composante *Élaborer une solution mathématique.* Cette dimension qui fait appel à l'idée de justification, d'argumentation pour convaincre de la justesse de la démarche est reprise dans la troisième compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique,* sous l'angle cette fois-ci d'une communication à autrui, d'un message à transmettre :

> « Dans tous les cas, la communication est nécessaire lorsque l'élève formule des conjectures à partir des réseaux de concepts et de processus mathématiques, puisqu'il lui faut <u>présenter ses arguments et ses choix et justifier sa solution.</u> » (*c'est nous qui soulignons*, MELS, 2003, p.246)

Il s'agit d'une communication à autrui basée sur une compréhension par l'autre, par un retour sur le message produit pour s'assurer qu'il est complet, adéquat, comme l'exprime l'énoncé suivant dans la composante *Interpréter ou transmettre des messages à caractère mathématique* :

> « Valider un message pour en améliorer la compréhension, s'il y a lieu. » (MELS, 2003, p.247)

La validation est ainsi requise dans la résolution d'une situation problème, pour communiquer des messages mathématiques, mais aussi dans un autre type de tâche dans laquelle il faut affirmer ou réfuter des conjectures, ce type de tâche se situe dans la deuxième compétence *Déployer un raisonnement mathématique* :

> « Apprécier la pertinence des conjectures retenues. » (dans la composante *Établir des conjectures,* MELS (2003), p.245).
>
> « Jauger la pertinence des conjectures émises et retenir les meilleures, au besoin. » (dans la composante *Établir des conjectures,* MELS, 2006, p.25).

Un des moyens pour apprécier cette pertinence de conjectures, l'utilisation de contre-exemples, est présenté dans une autre composante de cette deuxième compétence, *Réaliser des démonstrations ou des preuves* :

> « Recourir, au besoin, à des contre-exemples, pour préciser, réajuster ou réfuter des conjectures. » (MELS, 2003, p.245)

Il y a donc l'idée d'un engagement réfléchi sur la tâche pour valider ou invalider un énoncé, un raisonnement sur le vrai et le faux. Dans la compétence *Résoudre une situation problème*, l'engagement réfléchi est également présent, mais cette fois-ci c'est un engagement réfléchi avant la résolution qui se dégage de la composante *Décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique* :

> « <u>Dégager l'information</u> contenue dans divers modes de représentation : linguistique, numérique, symbolique, graphique • <u>Déterminer les données manquantes, supplémentaires ou superflues</u>, si nécessaire • <u>Cerner</u> et décrire <u>la tâche à accomplir</u> en ciblant la question posée ou en formulant une ou plusieurs questions. » (*c'est nous qui soulignons*, MELS, 2003, p.241; MELS, 2006. p.25).

Notre analyse des programmes de mathématiques du secondaire (MELS, 2003, 2006) met ainsi en évidence plusieurs composantes du contrôle. Dans la première compétence *Résoudre une situation problème,* l'accent est mis à la fois sur la validation du résultat (par une anticipation) et du processus de résolution (par un retour sur l'efficacité, la pertinence des stratégies utilisées). Cette dimension est présente dans les deux composantes *Valider la solution* et *Élaborer une solution mathématique.* On demande également à ce que l'élève rectifie ses erreurs, qu'il soit donc sensible aux possibles contradictions pour pouvoir rectifier sa solution. Une autre dimension du contrôle est celle qui touche à un engagement réfléchi, à la fois au début de la résolution de situations problèmes pour décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique, en justifiant la démarche de résolution entreprise, une justification, une argumentation à l'appui étant requise.

Un autre engagement réfléchi est requis dans un autre type de tâche, celle où l'élève doit se prononcer sur le caractère vrai ou faux d'un énoncé, que l'on retrouve dans la deuxième compétence *Déployer un raisonnement mathématique.* Là aussi la justification, l'argumentation est requise. Dans la troisième compétence, l'activité de contrôle se traduit par une communication à autrui de messages mathématiques compréhensibles, et par un retour sur les messages produits (valider un message produit).

Nous avons ainsi souligné l'importance d'une activité de contrôle, très présente selon notre analyse dans le nouveau programme du secondaire. Plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques (Balacheff, 1987; Artigue, 1993) ont souligné par ailleurs l'importance d'une telle activité chez l'élève en lien avec le développement d'une rationalité mathématique, le développement de la pensée mathématique chez l'élève, faisant appel à l'utilisation de métaconnaisssances. Pourtant, même si plusieurs chercheurs mettent en évidence le rôle que le contrôle joue, force est de constater que les élèves, à différents niveaux et dans différents domaines, s'engagent dans la tâche en mobilisant des connaissances mais font montre d'un contrôle limité en ce qui concerne la vérification, l'engagement réfléchi et les choix parmi plusieurs possibilités sur leur activité mathématique. Selon notre examen de la recherche et notre expérience sur le terrain, ce constat est partagé par plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques et par plusieurs enseignants en exercice.

1.5 Problème de recherche

Il émerge de ce constat partagé, de la pratique et de la recherche, un objet de recherche autour du nécessaire développement d'une activité de contrôle chez les élèves sous les différentes composantes relevées. Il s'agit là d'un enjeu important si l'on en croit plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques et qui rejoint les préoccupations de plusieurs enseignants (Landry, 1999; Chevallard, 1989; Coppé, 1993). Cette préoccupation va se traduire pour les enseignants dans leurs propos dans des termes pratiques sous forme de moyens, de stratégies à mettre en place en ce sens pour aider les élèves. Sur un plan didactique, elle va se refléter pour le chercheur, pour aller plus loin par rapport à l'analyse reprise précédemment, en termes d'un questionnement sur des situations didactiques susceptibles de développer un tel contrôle. Une telle visée s'appuie sur des analyses préalables de ce que recouvre le contrôle en mathématiques. À la croisée de ce questionnement, un certain objet de recherche à investiguer prend forme autour de situations susceptibles de développer le contrôle chez les élèves.

GÉNÉRAUX DE LA RECHERCHE :

À ce stade, nous nous intéressons donc à cerner des situations qui visent le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique des élèves, et ce, en prenant en compte dans cette élaboration la double préoccupation qui en est le point de départ : le point de vue des enseignants et des chercheurs. Nous cherchons aussi à identifier le potentiel de ces situations pour le développement du contrôle chez les élèves. Les deux objectifs de la recherche peuvent s'énoncer ainsi :

- Caractériser les situations et les interventions élaborées conjointement visant le développement d'une activité de contrôle chez les élèves.
- Caractériser l'activité de contrôle chez les élèves du secondaire au cours de ces situations.

Dans ce chapitre, nous avons vu apparaître différentes composantes du contrôle, à travers les travaux de recherche, les propos des enseignants ou encore l'analyse du programme. Pour fonder davantage à cette étape l'élaboration de ces situations didactiques, une analyse préalable rigoureuse du concept de contrôle s'impose.

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

L'analyse des recherches que nous avons menée confirme que dans une certaine mesure le concept de contrôle a été étudié sous plusieurs angles, même si tous les auteurs n'utilisent pas explicitement dans leurs écrits le mot « contrôle ». Cette analyse reprend cinq perspectives différentes : sociologique (Giddens, 1987), psychologique (Richard, 1998; Piaget, 1974; Tiberghien, Le Taillanter, Friemel, Gruner, Julo et Verdier, 1974; Perkins et Simmons, 1988), en éducation mathématique (Polya, 1945/1965; Mashiach Eizenberg et Zaslavsky, 2003; Cipra, 1985), mathématique (Hadamard, 1945/1975) et didactique (Coppé, 1993; Margolinas, 1989; Chevalier, 1985; Robert et Tenaud, 1988; Balacheff, 1987; Lee et Wheeler, 1989; Schmidt, 1994; Brousseau, 1986; Bednarz et Saboya, 2007; Kouki, 2007; Artigue, 1993; Robert, 1993; Lenfant, 2002; Jullien, 1989-90; Kargiotakis, 1996; Schoenfeld, 1985).

Dans une première partie, nous dégagerons les différentes composantes du concept de contrôle amenées par ces différents éclairages. Nous avons procédé à une construction et à une interprétation de ce concept, en nous plaçant dans le cadre de référence de chacun des chercheurs. Ces différents points de vue, amenés par les études citées, nous ont permis dans une deuxième partie, de préciser une définition du concept de contrôle qui va nous guider tout au long de notre étude. Dans une troisième partie, nous reprendrons quelques éléments relatifs à l'enseignement permettant de nous éclairer sur le développement d'un contrôle chez les élèves. Dans cette dernière partie, nous nous positionnerons en tant que chercheurs sur les possibles stratégies d'intervention en classe. Des caractéristiques sur les situations, sur l'aménagement de ces situations, sur les occasions et les conditions susceptibles de développer un contrôle vont être ensuite cernés. Finalement, nous nous attarderons sur le rôle de l'enseignant en lien avec le développement d'un contrôle chez les élèves.

2.1 Différents éclairages sur le concept de contrôle

Dans une perspective sociologique (Giddens, 1987), l'activité de contrôle apparaît reliée à la rationalité de l'acteur social, aux intentions et aux raisons, au fondement de ses actions.

2.1.1 Éclairage sociologique sur le concept de contrôle

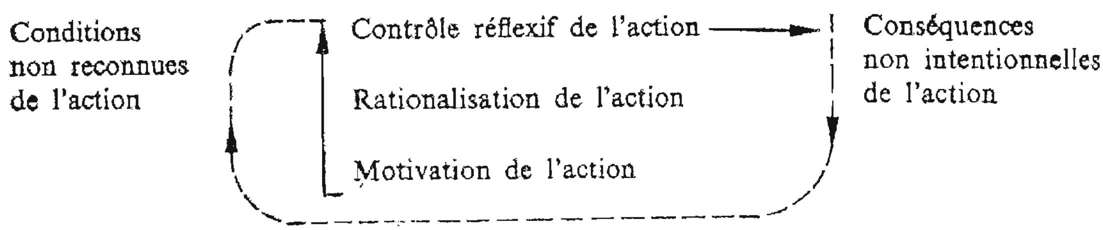
Dans son livre, « La constitution de la société : éléments de la théorie de la structuration», Giddens (1987) caractérise l'acteur social comme étant une personne exerçant un « contrôle réflexif sur l'action », ce contrôle ayant un :

> « Caractère orienté, ou intentionnel,... (qui peut-être) examiné à partir du cours des activités de l'agent. » (p.441)

L'être humain contrôle ainsi de façon réfléchie son action. Ce dernier est entouré de pratiques sociales et cherche à contrôler le flot continu de cette vie sociale. Pour cela, il exerce un contrôle continu sur son action qui se traduit par une réflexivité sur sa propre pratique sociale. L'action humaine est vue par Giddens comme s'accomplissant dans la durée, dans un flot continu de conduites, et est composée d'intentions, de raisons et de motifs inter reliés les uns aux autres, mettant en évidence une certaine cohérence d'un soi agissant. Ainsi, une personne est un agent qui se donne des buts, qui a des raisons de faire ce qu'il fait et qui est capable, si on le lui demande, d'exprimer ces raisons de façon discursive. Dans le modèle de stratification conçu par Giddens, le contrôle réflexif est relié à la rationalisation de l'action et à sa motivation sous-jacente :

> « Ce que j'appelle le **modèle de stratification** du soi agissant exige de considérer le contrôle réflexif, la rationalisation et la motivation de l'action

comme trois ensembles de procès qui s'enchâssent les uns dans les autres. »



(p.52)

Figure 2.1.1 Modèle de stratification du soi agissant (source : Giddens, 1987, p.52)

Ainsi, le contrôle réflexif est un trait caractéristique de toute action. Le contrôle réflexif repose sur la rationalisation, les raisons sous-jacentes de l'action qui renvoient à une compréhension de la part du sujet des fondements de ses actions, la rationalisation de l'action étant définie par Giddens comme la :

> « Capacité qu'ont les acteurs compétents de « rester en contact » avec les fondements de ce qu'ils font pendant qu'ils le font, de sorte que si d'autres leur demandent les raisons de leurs actions, ils peuvent les fournir. » (p.443)

Le contrôle réflexif de l'action et la rationalisation de celles-ci sont ainsi intimement reliés. La motivation diffère légèrement de ces deux derniers « procès ». Les motifs renvoient aux désirs qui inspirent l'action, mais nombre de nos conduites de tous les jours ne sont pas directement motivées. Nous pouvons donner l'exemple en mathématiques où, quelquefois, la réalisation d'une tâche par les élèves relève uniquement du contrat institué en classe et non de la motivation intellectuelle à vouloir résoudre le problème.

Tel qu'illustré dans la figure précédente, dans le modèle de stratification du soi agissant, il y a dans la vie de tous les jours, des actions intentionnelles qui ont des conséquences non intentionnelles. Ces dernières peuvent rétroagir de manière systématique et devenir des conditions non reconnues d'actions ultérieures. Pour expliquer ses propos, Giddens donne l'exemple d'une personne qui actionne un commutateur pour éclairer une pièce. La lumière soudaine alerte un cambrioleur qui se trouvait là. Éclairer la pièce est intentionnel alors que donner l'alerte ne l'est pas, car la personne ne savait pas qu'un voleur se trouvait dans la pièce. Dans cet exemple, nous pouvons imaginer que cette conséquence non intentionnelle peut à son tour rétroagir et devenir une condition non reconnue d'une action ultérieure, telle une légère hésitation lors d'une prochain allumage de la lumière. En mathématiques, nous pouvons imaginer un élève résolvant un problème, une conséquence non intentionnelle de cette action peut être, dans le cas d'un problème à données contradictoires, l'impossibilité de trouver une solution, ce à quoi l'élève ne s'attendait pas. Cette conséquence non intentionnelle peut amener, lors de la résolution d'un autre problème, vers une condition non reconnue de l'action qui amène élève à se poser des questions à sa lecture quant à la vraisemblance de ce problème, un signe d'alarme s'allumant dans son esprit.

Pour Giddens, tous les êtres humains sont des agents compétents, la compétence étant définie comme :

> « Tout ce que les acteurs connaissent (ou croient), de façon tacite ou discursive, sur les circonstances de leur action et de celle des autres, et qu'ils utilisent dans la production et la reproduction de l'action. » (p.440)

Il est intéressant de noter que quelquefois l'agent n'est pas capable d'expliquer les raisons de ses activités, le contrôle réflexif utilisé n'est pas toujours verbalisable, il est de l'ordre de l'implicite, du tacite :

> « La plus grande partie de l'énorme « réservoir de connaissances », selon l'expression de Schutz, ou de ce que je préfère appeler le **savoir commun** mis en jeu dans les rencontres, n'est pas directement accessible à la conscience des acteurs. » (p.52)

Mais en général, les acteurs sont capables de donner un compte rendu discursif de ce qu'ils font et des raisons pour lesquelles ils le font. C'est dans le cas où des acteurs demandent à d'autres d'expliquer pourquoi ils ont agi comme ils l'ont fait, que ces acteurs sont en mesure de rationaliser leurs conduites en explicitant verbalement les raisons sous-jacentes.

Dans cette perspective sociologique, le contrôle est donc relié à la rationalité qui fonde l'action de l'acteur social. Le contrôle a un caractère intentionnel et réfléchi, il renvoie aux fondements de ce que les acteurs font, à leur « théorie implicite », aux raisons sous-jacentes qui guident cette action, et qui deviennent accessibles lorsqu'on demande à la personne de les expliciter. Nous nous intéresserons de notre côté à l'activité en mathématiques et à l'acteur social qu'est l'élève. Le contrôle renvoie ici à ce qui fonde les actions entreprises par l'élève en regard d'une activité donnée (résolution d'un problème, d'un exercice...) À cette étape, cette caractérisation demeure très générale, et nécessite d'aller plus loin.

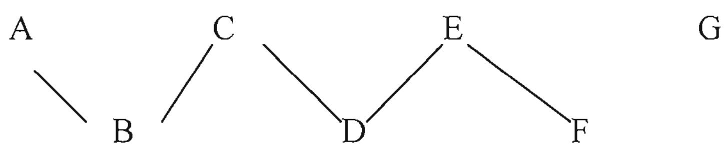
En psychologie, notre interprétation des travaux de Piaget (1974) nous amène un nouvel éclairage sur la notion de contrôle sous l'angle d'une sensibilité aux contradictions.

2.1.2 Éclairage amené par les travaux en psychologie cognitive sur le concept de contrôle

Dans ses recherches sur la contradiction, Piaget (1974) s'est intéressé à l'instabilité des résultats d'une action causant un déséquilibre chez le sujet. L'auteur ne mentionne pas le terme « contrôle », c'est notre interprétation des propos de Piaget qui nous a amenée à considérer l'activité de contrôle comme une prise de conscience de la contradiction et un dépassement de celle-ci.

2.1.2.1 La prise de conscience, le dépassement de la contradiction : un indicateur de contrôle sur l'activité

Pour mieux comprendre les propos de Piaget, nous allons rendre compte d'une expérience dans le domaine logico-mathématique qu'il a menée auprès d'enfants de 5 à 12 ans. Dans l'expérience, une planchette rectangulaire percée de sept trous occupés chacun par un disque est fournie aux enfants : tous les disques ont la même épaisseur et leur diamètre croît de proche en proche, du premier au septième, de 0,2 mm entre chaque disque. Les disques vont être nommés *A, B, C, D, E, F* et *G*, ils sont disposés en deux rangées de la façon suivante:



Le cercle *A* a ainsi 58,8 mm de diamètre et *G* 60 mm. Les disques de *A* à *F* sont retenus par une chaînette permettant la comparaison de chacun uniquement avec son successeur : *B* avec *A*, *C* avec *B*, *D* avec *C*, *E* avec *D* et *F* avec *E*. Le dernier disque *G* est par contre libre, ce qui permet sa comparaison avec chacun des autres disques. Comme les différences entre les diamètres des disques qui se suivent est infime, qu'elles sont imperceptibles visuellement, on a (en apparence) une égalité entre les diamètres des disques de *A* à *G* : $A = B$, $B = C$, $C = D$, $D = E$, $E = F$, $F = G$. Mais si on compare les diamètres des disques aux extrémités, on remarque une différence, $A < G$ (c'est pour des fins de comparaison des diamètres des disques *A* et *G* que le disque *G* est libre, sans chaîne). Les expérimentateurs laissent les enfants explorer le matériel, en ayant recours à une simple perception visuelle. Les enfants disent souvent être certains de l'égalité des diamètres des disques. Les expérimentateurs les questionnent alors sur la relation entre *G* et *A*, qu'ils doivent d'abord anticiper, puis vérifier en plaçant les disques l'un sur l'autre. Si les mesures des enfants ont suivi un ordre relevant de la transitivité, ils prennent en général conscience de la contradiction (ils arrivent d'une part à deux disques qui ont des diamètres égaux, et d'autre part à A < G).

C'est dans le dépassement de cette contradiction que nous voyons qu'un certain contrôle s'exerce. Dans ce cas-ci, il s'agit de faire intervenir des opérations logico-mathématiques, il s'agit de prendre conscience des différences infiniment petites, imperceptibles entre *A* et *B*, *B* et *C*, *C* et *D*, *D* et *E*, *E* et *F*, *F* et *G* et de comprendre que la somme de ces différences apparemment nulles devient une différence constatable entre *A* et *G*. Piaget remarque que le dépassement de cette contradiction ne va pas de soi.

Certains enfants affirment qu'il y a égalité de tous les éléments de *A* à *G*, puis ils découvrent que *G* est plus grand que *A*, ils concluent alors que *G* est alors supérieur à tous les autres, y compris *F*. Ces enfants ne voient pas de contradiction avec les données qu'ils ont admises antérieurement, ils oublient aussitôt qu'ils avaient dit que *F* = *G*, ils nient donc l'égalité apparente. Ce résultat permet à Piaget de relever qu'une étape importante est la prise de conscience de cette contradiction, qui se traduit par le souvenir des données, une prise en compte des constatations antérieures. C'est dans la prise de conscience d'une contradiction qu'une activité de contrôle prend, pour nous, place.

D'autres enfants constatent une suite d'égalités de *A* à *G*, puis l'inégalité imprévue entre *A* et *G*. Ils prennent alors conscience de la contradiction, mais ils n'arrivent pas à dépasser cette contradiction. Piaget rapporte plusieurs comportements allant dans ce sens comme le fait que certains d'entre eux expriment des doutes sur leurs mesures, d'autres renoncent à comprendre, d'autres admettent que la grandeur de *G* varie. Finalement certains déforment l'observable : ils disent et vérifient que *B* est plus grand que *A*. On peut remarquer que ces enfants sont conscients de la contradiction, mais ne possèdent pas un contrôle leur permettant de dépasser cette contradiction.

Un autre groupe d'enfants fera l'hypothèse de différences conçues comme imperceptibles, pour lever la contradiction entre les égalités apparentes et l'inégalité finale ($A < G$), mais ils ne sont pas encore en état de déduire que cette inégalité finale constitue la somme des différences imperceptibles. Piaget fait l'hypothèse que l'imperceptible n'apparaît pas aux enfants être une grandeur « rationnelle », comme nous pouvons le constater dans les propos de cet enfant appelé Roc :

> « Peut-être que ça devient toujours plus petit, mais on n'arrive pas à voir. – Comment peux-tu le savoir? – Parce qu'on a tout essayé! » (p. 27)

Ils ne peuvent pas affirmer avec certitude que cet imperceptible existe :

> « Je vous ai dit, conclut ainsi Roc, que je ne savais pas exactement. » (p. 26)

Ce ne sont que les enfants les plus âgés qui constatent l'inégalité $G < A$, après avoir cru à une équivalence générale, et qui lèvent la contradiction en admettant l'existence de différences non perceptibles, qui sont susceptibles de s'additionner jusqu'à donner lieu à cette inégalité visible.

L'étude de Piaget nous a amène un éclairage intéressant sur l'activité de contrôle sur un plan cognitif, sous l'angle d'une prise de conscience de la contradiction et d'un dépassement de celle-ci dans des situations qui provoquent un déséquilibre chez l'enfant. Cette activité de contrôle est un processus dynamique, qui se développe dans le temps.

La contradiction naît de la difficulté pour les enfants à mettre en lien les affirmations (égalité des disques) et les négations (A < G contredisant cette égalité). Piaget remarque, dans l'expérience décrite ci-dessus que les enfants vivent des déséquilibres, mais que les enfants plus jeunes (moins de 11 ans) ne peuvent dépasser cette contradiction. Il explique ces difficultés par le fait que :

> « (...) la tendance spontanée de toute action, perception ou cognition en général est de viser l'affirmation et les caractères positifs du réel, tandis que la négation, sous ses formes nécessaires, n'est le produit que d'élaborations secondaires, et sous ses formes contingentes, de perturbations occasionnelles. L'action consiste à modifier le réel, donc à tendre vers un but positif, et il faut un effort supplémentaire de réflexion rétroactive pour apercevoir que se rapprocher de ce but implique un éloignement par rapport aux points de départ et une négation de ces états initiaux. Percevoir consiste à saisir des propriétés positives données, et il faut une attente ou une anticipation déçues pour constater qu'une présence escomptée ne se vérifie pas (ce qui dépasse d'ailleurs le champ de la perception). Il y a un manque de compensations entre les affirmations et les négations car les affirmations sont beaucoup plus prégnantes et l'emportent systématiquement sur les négations. » (p.11-12)

Ainsi le contrôle, dans des situations de contradictions, est relié à une réflexion rétroactive sur la tâche et repose sur une négation des faits observés (qui proviennent d'une affirmation). Ce qui explique pourquoi les contradictions restent longtemps inconscientes, leur prise de conscience implique une construction de négations, non données au début, cette construction conduisant au dépassement de telles contradictions.

L'activité de contrôle (Piaget, 1974) se manifeste, ainsi, par une prise de conscience de la contradiction qui repose sur une anticipation déçue et un dépassement de celle-ci; elle provient d'une réflexion rétroactive permettant de percevoir un éloignement, une négation de l'anticipation de départ. D'autres chercheurs apportent un éclairage complémentaire en lien avec d'autres aspects. Ainsi, Richard (1998) s'est intéressé à définir la fonction de contrôle dans l'activité de résolution de problèmes. Ainsi nommée par l'auteur (il parle explicitement de contrôle), celle-ci est présente à chacune des phases de résolution.

2.1.2.2 La fonction de contrôle dans la résolution de problèmes

Richard (1998) s'est intéressé à la modélisation des conduites en situation de résolution de problèmes. Le contrôle est relié à la régulation de l'activité de résolution et est une des six grandes fonctions considérée :

- « conservation des structures cognitives permanentes : connaissances, croyances;
- élaboration des décisions d'action pour des tâches;
- construction des représentations (structures cognitives transitoires);
- production d'inférences à finalité épistémique (représentations) ou pragmatiques (décisions d'action);
- construction de connaissances;
- régulation et contrôle de l'activité. » (p.12)

La fonction de *régulation et contrôle de l'activité* se situe à la fois en amont et en aval des autres fonctions. La régulation consiste à se fixer des objectifs qui constituent des tâches, à définir des priorités entre ces tâches, à allouer des ressources pour leur réalisation (temps à passer, effort à fournir), voire à décider de l'abandon d'une tâche. La composante de contrôle concerne les moyens mis en place pour la réalisation de la tâche, elle veille à son bon déroulement :

> « En amont de la réalisation, le contrôle assure la planification; en aval, il assure l'évaluation des résultats de l'action : à ce dernier titre, il peut être à l'origine d'une réorientation de l'activité par la remise en cause de la représentation de la situation ou donner lieu à la formulation de nouveaux objectifs, comme la récupération d'erreurs ou d'incidents. » (p.15)

Le schéma suivant représente les différents éléments ou fonctions qui constituent le système cognitif (désignés par des boîtes) et leurs relations (désignées par des flèches). Le contrôle n'y apparaît pas, il est toutefois présent dans toutes les autres fonctions :

> « On remarque que la fonction de contrôle n'est pas représentée par une boîte. C'est qu'elle s'exerce à l'intérieur des autres fonctions : par la définition des

objectifs cognitifs, par le guidage des raisonnements, par la remise en cause des représentations. » (p. 13)

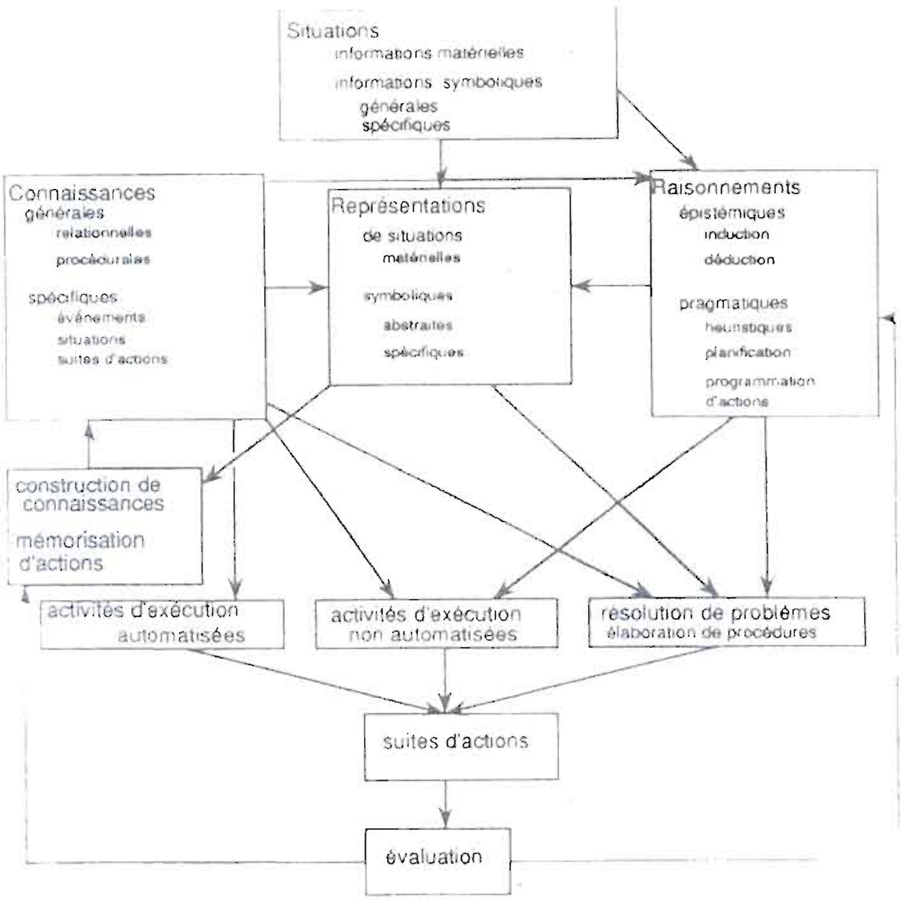


Figure 2.1.2.2 L'architecture cognitive (source : Richard, 1998, p. 13)

Tout un chapitre du livre de Richard (1998) est consacré au contrôle sur l'activité, celui-ci se manifeste dans chacune des phases de la résolution de problèmes. En effet, selon l'auteur le contrôle s'exerce à différents niveaux de l'activité :

1. dans la construction de la représentation de la situation
2. dans l'élaboration des décisions d'action
3. dans l'appréciation de l'adéquation aux objectifs de la tâche : c'est l'évaluation des résultats de l'action

Ces trois niveaux de l'activité ne sont pas forcément linéaires, ils peuvent être imbriqués les uns aux autres. Ainsi, la représentation de la tâche amène à faire des anticipations sur l'action à entreprendre, qui peut conduire à une remise en cause de la représentation de la situation. Nous allons par la suite expliciter ces trois niveaux de l'activité dans lesquels le contrôle joue un rôle décisif.

Construction d'une représentation de la situation et élaboration des décisions d'action

La construction d'une représentation de la situation requiert l'activation des connaissances disponibles pour résoudre la situation (qui sont propres au sujet) permettant d'aboutir à une planification portant sur les actions à entreprendre. Le processus de construction qui l'emporte est celui qui propose le plus vite une représentation qui conduit à une solution, même si l'exactitude de cette solution n'est pas garantie. À titre d'exemple, Richard propose le problème suivant :

> « Dans ma tirelire, j'ai 32 pièces de monnaie. Il n'y a que des pièces de 2 F et de 5 F. Avec ces 32 pièces j'ai 97 F. Combien ai-je de pièces de 2 F et de pièces de 5 F? » (p.292)

Ce problème se résout entre autres par un système d'équations du premier degré à deux inconnues. Toutefois, ces connaissances ne sont pas disponibles chez des enfants de dernière année du primaire (10-11 ans). Pour ce faire, ces derniers procèdent à la construction d'un espace de recherche dans lequel la résolution du problème est possible. Le contrôle assure alors la planification, guide les raisonnements et permet l'élaboration des décisions d'action.

Le processus de résolution adopté par les enfants de dernière année du primaire est d'émettre une hypothèse sur le nombre de pièces de 2 F et de 5 F, en prenant en compte qu'il y a en tout 32 pièces de monnaie. Les enfants procèdent alors au calcul de la somme des pièces qu'ils se sont données en hypothèse. Ils corrigent ensuite leur anticipation, en prenant en compte l'écart à la somme effective :

augmentation du nombre des pièces de 5 F et diminution correspondante du nombre de pièces de 2 F si la somme obtenue est trop petite, diminution du nombre de pièces de 5 F (et augmentation de celui des pièces de 2 F) dans le cas inverse. La résolution suivante est un exemple où l'élève part de l'hypothèse qu'il y a autant de pièces de 2 F que de pièces de 5 F, l'une des contraintes est toujours conservée, le nombre de pièces total (32 pièces) et l'élève ajuste le nombre de pièces de chaque type en fonction du total d'argent obtenu :

Nombre de pièces de 2 F	Nombre de pièces de 5 F	Nombre total d'argent
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	112 F
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	109 F
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	106 F
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	103 F
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	100 F
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	***97 F***

En procédant ainsi, l'élève obtient 21 pièces de 2 F et 11 pièces de 5 F. La résolution repose sur la construction d'un réseau relationnel : parmi les données du problème, les élèves ont cherché une relation à partir de laquelle ils peuvent déduire la solution. Dans l'exécution, le contrôle se manifeste ici dans l'ajustement des données en fonction d'une contrainte de départ.

Évaluation des résultats de l'action

Le processus de contrôle qui se met en place ici se situe après l'exécution. Le contrôle prend place lors de la remise en cause de la représentation initiale. En effet, si la façon de procéder conduit à des erreurs, dans ce cas, l'activité de contrôle permet d'abandonner la représentation construite et la construction d'une autre interprétation est entreprise. Le contrôle assure ainsi la remise en cause d'une interprétation, qui est déterminée soit par le sentiment d'avoir épuisé l'espace de recherche et d'arriver à une impasse, soit par la découverte d'incohérences avec d'autres informations données dans le problème.

Richard distingue deux stratégies de contrôle reliées à la vérification du résultat : l'évaluation de l'écart au but et l'évaluation de l'adéquation de la solution. Ces stratégies dénotent une activité de contrôle de la part de l'élève.

Évaluation de l'écart au but

> « L'évaluation de l'écart au but semble jouer un rôle important dans les problèmes numériques quand la recherche de la solution se fait en formant des hypothèses sur certaines inconnues et en corrigeant l'hypothèse compte tenu de l'écart entre le résultat qu'on devrait obtenir et le résultat qu'on trouve avec la valeur prise comme hypothèse. » (p.305)

Cette stratégie de contrôle part d'une anticipation du résultat permettant de donner une première solution au problème, qui va être ensuite ajustée. Dans l'exemple précédent des pièces de 2 F et de 5 F, le contrôle intervient dans l'ajustement du nombre de pièces de différents types, qui se révèle très difficile pour les sujets. Une fois le couple de deux nombres, celui des pièces de 2 F et de 5 F choisi, dont la somme est 32, le calcul du montant d'argent permet d'ajuster le nombre de pièces de 2 F et de 5 F, il s'agit d'augmenter le nombre d'une catégorie de pièces et de diminuer d'autant le nombre de l'autre catégorie, c'est dans cet ajustement qu'une activité de contrôle prend place. Un certain nombre d'élèves ne semble pas tenir compte de l'écart pour décider des nouvelles valeurs à prendre, ils oublient une des contraintes, se fixant seulement sur la contrainte portant sur le nombre total d'argent (97 F). La difficulté réside dans le choix du changement à faire selon que la valeur trouvée (le montant d'argent total) est au dessus ou en dessous de la valeur cherchée. Cette stratégie dénote ainsi une activité de contrôle sur la résolution, certaines procédures (ou raisonnements) arithmétiques forcent donc un contrôle sémantique sur la situation à résoudre.

En didactique des mathématiques, Coppé (1993) rejoint les constats de Richard. Cette chercheure a également observé les mêmes difficultés chez les élèves à qui on a posé ce problème. Certains d'entre eux ne tirent aucune conclusion de leurs essais, et se contentent de l'évaluation binaire (vrai/faux) du résultat, puis proposent un autre couple solution, indépendamment du premier essai. Ils peuvent alors tâtonner très longtemps, et attribuer leur échec, dans la recherche de la solution, à un manque de chance. Ces résultats rejoignent nos propres constats chez les futurs enseignants au primaire, dont nous avons parlé dans la problématique au point 1.1, autour du problème de vers de terre, de lézards et de scarabées :

> Roger collectionne des lézards, des scarabées et des vers de terre. Il possède plus de vers de terre que de lézards et de scarabées ensemble. Ces bestioles ont au total 12 têtes et 26 pattes. Combien de lézards Roger a-t-il?

Pour clarifier comment le contrôle se manifeste, nous allons donner un autre exemple de stratégie issue de notre pratique. Un raisonnement arithmétique intéressant, faisant preuve d'une activité de contrôle, se retrouve dans les problèmes de comparaison avec des liens multiplicatifs. Considérons le problème suivant :

> Trois enfants possèdent en tout 198 billes. Gilles a 2 fois plus de billes que Daniel et Paul possède 3 fois plus de billes que Gilles. Combien de billes possède chacun des enfants?

Dans cette catégorie de problème, on retrouve une stratégie arithmétique qui traduit une activité de contrôle de la part de ceux qui l'utilisent. Le tout est partagé entre le nombre de personnes, comme il y a 3 personnes, l'élève fera $198 \div 3 = 66$, Daniel aura donc 66 billes, Gilles en aura alors $66 \times 2 = 132$ et Paul $132 \times 3 = 396$. Mais alors le nombre total de billes dépasse les 198 billes données, l'élève tente alors d'ajuster les quantités trouvées afin de satisfaire les restrictions imposées par le problème. Ce raisonnement manifeste une activité de contrôle, dans la mesure où les relations de comparaison et le total sont pris en compte tout au long de la procédure arithmétique, c'est un contrôle sémantique qui prend en compte les données et les relations entre ces données.

Évaluation de l'adéquation de la solution trouvée

Dans les problèmes numériques, il est possible de vérifier si la solution trouvée est compatible avec les données initiales du problème. Richard (1998) donne le cas du problème suivant[19] :

> « Il y a 108 élèves dans l'école, il y a 57 filles, combien y a-t-il de garçons ? » (p.306)

Dans cet exemple, le contrôle se manifeste à travers la vérification de la solution trouvée, le regard sur sa pertinence. Par exemple, supposons qu'un élève trouve un nombre plus grand de garçons que le nombre total d'enfants, le contrôle se manifeste alors par une prise de conscience de l'incompatibilité de cette solution. Cette vérification suppose un retour au problème.

---

[19] Ce problème fait l'objet de la problématique au point 1.3.1.1.

En psychologie cognitive, Richard (1998) définit ainsi l'activité de contrôle en lien avec la résolution de problème. Le contrôle concerne les moyens mis en place pour la réalisation de la tâche et veille à son bon déroulement. Le contrôle est présent à toutes les étapes de la résolution. Il permet une représentation de la situation à travers une activation des connaissances disponibles, à travers un choix efficace des buts, des plans, des actions à entreprendre. Il assure la planification, régit l'action à travers l'élaboration des décisions d'actions, le guidage des raisonnements. Il passe par une évaluation des résultats de l'action qui se traduit par l'utilisation de stratégies de contrôle en cours de processus et l'évaluation de la solution trouvée. Finalement, dans le cas où la façon de procéder initiale est inappropriée, le contrôle permet une réorientation de l'activité, une remise en cause de la représentation. D'autres auteurs (Thiberghien et al., 1974) se sont quant à eux intéressés à cerner le contrôle durant une tâche d'études.

2.1.2.3 Modalités de contrôle des connaissances durant une tâche d'études

Tiberghien, Le Taillanter, Friemel, Gruner, Julo et Verdier (1974) distinguent deux modalités de contrôle des connaissances :

> « - rétrospective (comme le rappel ou la reconnaissance) : revient à un questionnement de la part de l'élève sur l'état des connaissances par rapport à un corpus de notions supposé antérieurement appris. Celle-ci déclenche chez l'élève une activité complexe de recherche en mémoire et de traitement de l'information et l'on peut penser que **cette activité exerce une activité régulatrice sur l'étude subséquente** (p.5).
> - prospective en orientant et en modulant l'activité d'étude ultérieure de l'élève. » (p.5)

Ils distinguent ainsi deux fonction au contrôle des connaissances: I. une fonction « rétrospective » du contrôle (la mise en relation d'un corpus de connaissances et de ce qui est recherché dans l'activité) et II. une fonction

« prospective » du contrôle qui oriente et modifie l'activité d'étude de l'élève, telles qu'illustrées dans le schéma suivant :

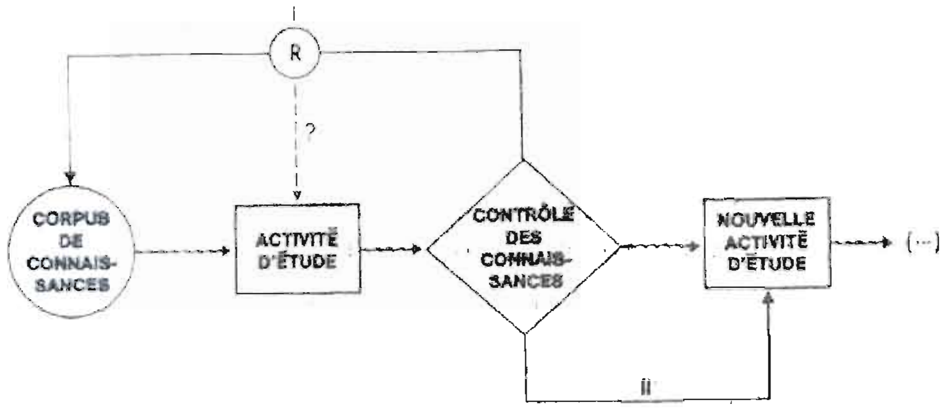


Figure 2.1.2.3 Schéma du rôle fonctionnel du contrôle des connaissances (source : Tiberghien, Le Taillanter, Friemel, Gruner, Julo et Verdier, 1974, p. 5)

Cette clarification du rôle fonctionnel du contrôle des connaissances dans une activité d'étude nous aide cependant peu à préciser ce que recouvre cette activité de contrôle comme telle.

Dans une autre étude portant sur l'élaboration d'un modèle sur l'apprentissage des sciences, Perkins et Simmons (1988) cherchent à expliquer les difficultés que les élèves ressentent en sciences, en mathématiques et en informatique. Ils explicitent dans ce modèle le cadre épistémique qui est relié, pour nous, au contrôle.

2.1.2.4 Un modèle de compréhension en lien avec l'apprentissage des sciences révélateur d'une activité de contrôle

Perkins et Simmons (1988), à partir de différents travaux de recherche portant sur les « patterns » de non-compréhension manifestés par des élèves dans différents domaines (mathématiques, physique, informatique), ont développé un modèle qui permet d'expliquer ces difficultés. L'analyse plus fine de ce modèle fait ressortir une composante centrale, qu'ils nomment « epistemic frame », intervenant dans la non compréhension, qui nous permet de caractériser, sous un certain angle, ce que nous entendons par contrôle.

Dans ce modèle explicatif des difficultés, de la non-compréhension, quatre cadres de référence sont impliqués : celui relatif au contenu celui relatif, à la résolution de problèmes, le cadre épistémique et le cadre qu'ils associent à l'investigation. Le cadre de référence associé au contenu comprend les faits, les définitions, les algorithmes et les stratégies rendant possible l'exécution d'une tâche, la mémorisation ou le rappel de certains processus. Dans le cadre de référence associé à la résolution de problèmes, nous trouvons les stratégies de résolution de problèmes, les processus d'auto régulation qui permettent la structuration, l'organisation de la démarche pendant la résolution d'un problème. On émet des hypothèses, et on cherche un ou plusieurs chemins qui mènent à la solution. On oublie souvent dans les cadres de référence impliqués dans ctte incompréhension, selon les auteurs, deux autres cadres de référence permettant d'expliquer les difficultés rencontrées par plusieurs étudiants en sciences, en mathématiques et en informatique. Or ces deux cadres de référence qui sont au cœur de l'activité mathématique. L'investigation englobe les stratégies qui nous permettent d'étendre nos connaissances, c'est la mise en place d'une pensée créatrice, critique sur des questions visant à étendre et à cerner les limites d'un domaine.

Enfin, le cadre épistémique, celui qui nous intéresse essentiellement, réfère aux « normes générales », aux stratégies sur lesquelles se fonde la validation d'un énoncé, aux fondements sur lesquels on s'appuie pour dire que telle chose est valide. Il témoigne d'une compréhension plus ou moins profonde de l'activité mathématique par l'élève. Le recours à un certain contenu ne peut être valide qu'à travers l'éclairage des normes, des fondements appartenant au cadre épistémique. On peut trouver dans ce cadre, entre autres, l'établissement d'une évidence ou la proposition de tests de vérification.

Ce modèle développé par les auteurs vise à expliquer les difficultés des élèves en physique, en mathématiques et en informatique, ces difficultés étant rattachées au fait que les élèves manipulent des concepts sans leur donner du sens, sans en comprendre la sémantique sous-jacente. Perkins et Simmons donnent comme exemple, en mathématiques, le cas de certains élèves qui écrivent les égalités suivantes : $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{A^2}+\sqrt{B^2}=A+B$. Le cadre épistémique (et donc le contrôle) intervient ici à travers le recours aux fondements qui vont permettre de vérifier la véracité ou non de l'égalité (par exemple le recours à des nombres qui vont invalider cette égalité) :

> « Les règles en algèbre sont essentiellement liées aux règles arithmétiques. Chercher une règle en algèbre en utilisant l'arithmétique signifie se tourner vers les fondements de l'algèbre. » (p. 312).

Ces quatre cadres sont inter reliés, l'activité mathématique pouvant faire appel simultanément à certains de ces cadres ou à plusieurs. Les auteurs soulignent que l'enseignement devrait intégrer ces quatre cadres pour permettre aux élèves de comprendre les concepts en profondeur.

L'étude de Perkins et Simmons (1988) aide à cerner la place du contrôle dans l'activité mathématique. Celle-ci se place dans le cadre épistémique, et interfère avec le contenu, la résolution de problèmes, et le travail d'investigation. Le processus de contrôle est présent à toutes les phases du travail mathématique et il constitue un élément explicatif aux difficultés rencontrées par les élèves en science, en mathématique et en informatique. À la page suivante, nous avons élaboré une synthèse de ce qui se dégage à partir des travaux précédents menés en psychologie.

Figure 2.1.2 Synthèse de l'activité de contrôle telle qu'éclairée par certains travaux en psychologie (sources : Piaget, 1974; Richard, 1998; Perkins et Simmons, 1988).

En résolution de problèmes

Le contrôle est présent tout au long de la résolution (Richard, 1998) :
- permet une représentation de la situation à travers une activation des connaissances disponibles, un choix efficace des buts, des plans et des actions à entreprendre.
- assure la planification, il régit l'action par l'élaboration des décisions d'action, il guide les raisonnements.
- contribue à une évaluation des décisions d'action
- permet la réorientation de l'activité.

Le contrôle dans les situations de contradiction (où un déséquilibre est en jeu)

Le contrôle (Piaget, 1974) :
- se manifeste dans une sensibilité à la contradiction qui repose sur une anticipation déçue.
- dans un dépassement de la contradiction qui provient d'une réflexion rétroactive pour apercevoir un éloignement, une négation de l'anticipation de départ.

Stratégies de contrôle (Richard, 1998)

- évaluation de l'écart au but (en cours de résolution) et réajustement
- évaluation de l'adéquation de la solution trouvée (à la fin de la résolution)

Le contrôle en lien avec l'apprentissage, la compréhension

- se situe dans le cadre épistémique (Perkins et Simmons, 1988)
- réfère aux fondements qui permettent une validation d'un énoncé, fondements sur lesquels on s'appuie pour dire que telle chose est valide.

Le contrôle des connaissances En situation d'études (Thiberghien et al., 1974)

Le contrôle permet :
- une mise en relation d'un corpus de connaissances et de ce qui est recherché dans l'activité
- une orientation et modification de l'activité d'étude

Des études plus spécifiques portent sur l'enseignement des mathématiques (Polya[20], 1945/1965; Mashiach Eizenberg et Zaslavsky, 2003 ; Cipra, 1985) nous ont permis d'aller plus loin sur le contrôle en résolution de problèmes, et de préciser différentes stratégies qui traduisent une telle activité.

2.1.3 Éclairage amené par des travaux en éducation mathématique sur le concept de contrôle

2.1.3.1 Le contrôle dans la résolution de problèmes en mathématiques

Polya (1945/1965), dans son livre « Comment résoudre des problèmes » vise à aider les étudiants à acquérir des habiletés face à la résolution de problèmes. Son modèle de résolution de problèmes est composé de quatre phases : comprendre le problème, concevoir un plan, mettre le plan à exécution et examiner la solution obtenue. Notre interprétation de son modèle nous amène à constater que le contrôle est présent avant, pendant et après la résolution, même si l'auteur n'utilise pas pour décrire ce processus de résolution le concept de « contrôle ». Pour éclairer les propos de Polya, nous y ajouterons les données du psychologue soviétique Krutetskii (1976) qui s'est intéressé aux habiletés des élèves en résolution de problèmes, en se penchant sur l'activité des élèves forts et des élèves faibles. Krutetskii est centré sur les stratégies d'apprentissage des élèves, alors que Polya aborde les stratégies d'enseignement.

---

[20] On restreint ici l'analyse au livre de Polya « comment résoudre des problèmes ». Comme les intentions de l'auteur sont de déclencher des réflexions sur le travail de l'élève et qu'il apporte une liste de méthodes, nous avons classé Polya comme éducateur. Nous avons une certaine réserve par rapport à son modèle, nous ne sommes pas nécessairement d'accord avec celui-ci. En effet, son modèle de résolution de problèmes apparaît linéaire, séquentiel ce qui est contestable. Mason (1994) et Schoenfeld (1985), parmi d'autres, ont réalisé des études qui montrent les restrictions du modèle de Polya et la complexité cognitive des actions entreprises dans la résolution de problèmes.

Comprendre le problème

Dans cette première étape, le travail porte sur la compréhension de l'énoncé du problème. Nous pouvons considérer que l'activité de contrôle se manifeste par une sélection effective entre les différents éléments de l'énoncé, par l'établissement d'une relation entre ces données, si elle existe. Krustetskii (1976) souligne que le sujet fort se différencie des autres, dans cet engagement par une grande possibilité à reconnaître les informations pertinentes et non pertinentes. Le sujet faible a tendance à s'arrêter à des détails superflus et aux données numériques, sans se préoccuper des relations entre les données. Quant au sujet moyen, il s'arrête aux informations contextuelles et aux données numériques, mais il peut aussi, dans certains cas, identifier la structure du problème, plus souvent que le sujet faible. Cette habileté à identifier des éléments cruciaux dans un problème constitue, d'après nous, un indicateur d'une activité de contrôle.

Concevoir un plan

Polya précise qu'à cette étape, on essaie de reconnaître quelque chose de familier dans le problème à résoudre, de détecter des ressemblances avec d'autres problèmes résolus. C'est dans cette reconnaissance que l'activité de contrôle prend place, dans la mobilisation de connaissances antérieures, leur combinaison et leur adaptation au problème posé :

> « Pour obtenir la solution, nous avons dû nous rappeler divers faits essentiels, nous souvenir de problèmes antérieurement résolus, de théorèmes connus, de définitions si nous avons affaire à un problème de mathématiques. On peut appeler *mobilisation* l'acte qui consiste à tirer de la mémoire les éléments appropriés. Cependant, pour résoudre un problème, il ne suffit pas de se remémorer des faits isolés, il faut encore les combiner entre eux en les adaptant au problème proposé. » (Polya, p.182).

Certaines caractéristiques relevées par Krustetskii (1976) nous semblent traduire une activité de contrôle dans cette deuxième phase : la conscience des similitudes, des différences et des analogies, la capacité d'estimer, d'évaluer, d'être sélectif.

Mettre le plan à exécution

Dans cette étape, l'élève met le plan à exécution en vérifiant chaque étape. Polya précise que l'élève peut éviter bien des fautes en vérifiant chaque étape du plan lors de son exécution. Le contrôle passe par des vérifications successives sur l'action qu'on est en train de mener.

Krustetskii note à cette étape que le sujet fort est capable d'utiliser différentes stratégies de résolution et de choisir parmi elles, celle qui s'avère la plus efficace et la plus économique. Le sujet faible semble manifester une plus grande rigidité opératoire, les solutions proposées sont peu diversifiées et même très souvent uniques. La capacité d'être flexible dans le recours à une stratégie de résolution (Krustetskii, 1976) nous semble aussi dans cette phase être un indicateur de contrôle.

Examiner la solution obtenue

Dans cette dernière phase, le contrôle se manifeste par une vérification de la solution trouvée et de la démarche adoptée. Mais il ne s'agit pas seulement de vérifier le travail effectué. Polya précise qu'à la fin de la résolution, il est important d'avoir une vue d'ensemble du travail que l'on vient d'effectuer. Il s'agit pour l'élève d'insérer cette solution, la démarche adoptée, dans ses connaissances antérieures. Ainsi ce résultat ou cette méthode pourront servir pour la résolution d'un autre problème. En revenant sur son travail et la forme finale de la solution, l'élève essaiera de voir ce qui l'a gêné et ce qui l'a finalement aidé.

Dans son ouvrage, Polya présente ce qui nous semble un moyen de contrôle et qui prend place à la deuxième étape de son modèle de résolution de problèmes, lors de la conception d'un plan : la substitution par un problème plus simple. D'après l'auteur, il arrive que l'on puisse résoudre un problème en lui substituant un problème semblable, mais beaucoup plus simple, dont la solution est soit évidente, soit très rapide à trouver. Polya distingue deux types de problèmes semblables, qu'il appelle intermédiaires, soit ceux pour lesquels on se sert du résultat pour résoudre le problème de départ, soit ceux pour lesquels on utilise la démarche pour réinvestir dans le problème de départ.

Pour le premier type de problèmes[21] intermédiaires, il donne l'exemple de la résolution d'équation $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. En remarquant que $x^4 = (x^2)^2$, on voit l'avantage qu'il y a à introduire $y = x^2$. On obtient alors un nouveau problème qui consiste à trouver y dans l'équation $y^2 - 13y + 36 = 0$. Ce nouveau problème est un problème auxiliaire, qui va servir à résoudre le problème de départ. Après avoir trouvé, en résolvant l'équation du second degré, que y est égal à 4 ou à 9, on en déduit que $x^2 = 4$ ou $x^2 = 9$, et donc toutes les valeurs possibles de x. On se sert dans ce cas du résultat du problème intermédiaire pour résoudre le problème de départ.

Polya ne donne pas d'exemple de problème intermédiaire appartenant à la deuxième catégorie. Nous en avons trouvé un. Le problème suivant

> Une solution est composée en partie de glucose. La concentration de glucose est de 12 ml pour 1 litre de solution. Combien faudra-t-il prendre de cette solution pour avoir 90 ml de glucose? (Bednarz, Auclair, Barette, Lafontaine, Péloquin, Rodrigue, Leroux et Morelli, 2008).

présente un contexte qui n'est pas familier aux élèves, ils ont de la difficulté à y reconnaître l'opération à faire, la démarche à entreprendre. Un moyen de contrôle

---

[21] Problème est pris ici dans un sens large, il inclut une tâche mathématique (de type exercice).

est dans ce cas de changer l'énoncé du problème par un autre plus simple mais qui possède la même structure. L'élève se sert alors de la démarche du problème intermédiaire ci-dessous (dans lequel il reconnaît l'opération à poser) pour résoudre le problème de départ :

> Une boisson est composée de pamplemousse et de jus d'orange. On met 12 ml de pamplemousse pour 1 litre de jus d'orange. Combien faudra-t-il de litres de jus d'orange si on met 90 ml de pamplemousse ?

Polya décrit ce deuxième type de problèmes auxiliaires comme étant basés sur l'utilisation de types de nombres permettant de comprendre la structure du problème. C'est le cas, par exemple, dans les problèmes dans lesquels on cherche à reconnaître une opération à effectuer. Par exemple, dans le problème suivant on peut cerner l'opération à effectuer en remplaçant les nombres décimaux par des nombres entiers :

> Un litre d'huile à chauffage coûte 2,35$. Écris ce que tu ferais sur la calculatrice pour remplir un petit réservoir qui contient 0,53 litres.

Les ouvrages de Polya (1945/1965) et de Krutetskii (1976) permettent d'éclairer l'activité de contrôle dans le processus de résolution de problèmes en général. Mashiach Eizenberg et Zaslavsky (2003) se sont quant à eux intéressés à définir ce qu'ils nomment des indicateurs d'une activité de contrôle en résolution de problèmes.

2.1.3.2 Des indicateurs de contrôle en résolution de problèmes

Mashiach Eizenberg et Zaslavsky (2003) ont mis en place un dispositif pour détecter une activité de contrôle chez des étudiants d'université lors de la résolution de problèmes de combinatoire. Ils ont ainsi établi 7 indicateurs d'une activité de contrôle :

1. donner du sens au problème en relevant les données décisives de l'énoncé.
2. une identification du but du problème.

3. quand un plan n'est pas facilement disponible pour résoudre le problème, une analyse du problème est entreprise.
4. une anticipation de la solution du problème
5. les étapes intermédiaires de l'implantation du plan sont évaluées
6. une description de la progression de la résolution du problème est explicitement donnée
7. le résultat final est vérifié

Nous pouvons remarquer que ces indicateurs sont d'ordre général, ils s'appliquent à tout type de problème. En ce qui concerne le premier indicateur de contrôle, relever les données décisives de l'énoncé, notre expérience nous amène à penser que la stratégie consistant à souligner les données importantes s'avère inefficace. En effet, le repérage des données décisives exige une certaine reconnaissance des relations entre les données. Nous avons pu remarquer que les élèves « forts » résolvent et ensuite soulignent les données importantes. Comme c'est le cas pour le modèle de Polya, nous pensons qu'il ne suffit pas de présenter aux élèves des étapes séquentielles à suivre pour résoudre un problème, la résolution n'étant pas linéaire et étant propre à chacun.

Le livre de Cipra (1985) est destiné essentiellement aux élèves. L'auteur présente des techniques, des méthodes pour détecter, corriger et éliminer les erreurs dans un champ particulier, le calcul différentiel et intégral. L'analyse de ce livre permet d'apporter des éléments nouveaux sur la notion de contrôle, à travers les stratégies de vérification à développer chez les élèves (à des fins de vérification des possibles erreurs commises).

2.1.3.3 Les stratégies qui témoignent d'une activité de contrôle

Cipra met de l'avant l'importance de contrôler le travail effectué pour repérer les possibles erreurs qui s'y sont glissées. Cette activité de contrôle part d'un doute face à la véracité d'un résultat. Pour Cipra, le contrôle se traduit par une vérification du résultat, de la démarche. Son livre est destiné aux élèves et aux enseignants (de manière à ce que ces derniers fournissent à leurs étudiants les moyens d'acquérir la vérification de leurs erreurs). Il met l'accent sur un apprentissage spécifique, associé à un travail de repérage et de correction d'erreurs, ayant comme objectif de développer chez les élèves la capacité à l'auto-correction. Il distingue deux étapes essentielles dans la résolution d'un problème :

1) Rédiger une réponse
2) Se demander si cette réponse a un sens.

Cipra fait le constat que l'enseignement se consacre principalement à la première étape alors que la deuxième est essentielle, on ne peut être sûr que notre travail ne contient pas d'erreurs, sans les avoir auparavant contrôlées. L'auteur montre qu'il y a de nombreux moyens de savoir s'il y a une erreur dans le raisonnement, sans savoir où cette erreur se trouve ni de quel type d'erreur il s'agit. En étudiant les différentes techniques de vérification proposées par Cipra, nous en avons répertoriées trois qui dénotent, pour nous, une activité de contrôle dans la résolution de problèmes : un questionnement sur le sens de la réponse, l'anticipation de l'ordre de grandeur, et le recours à différents registres de représentation. Nous allons expliciter chacune de ces stratégies.

Questionnement sur le sens de la réponse

Cette stratégie se placerait à la quatrième phase du modèle de résolution de problèmes de Polya (1945/1965) lors de l'examen de la solution obtenue. Le contrôle des erreurs passe par la question « est-ce que la réponse a un sens? ». Cipra affirme qu'on peut contrôler certaines erreurs en regardant si la solution a du sens ou non. On essaie alors de repérer l'erreur. Cette méthode s'applique, entre autres, dans les problèmes reliés à la vie réelle. Quand un problème est posé en référence à la « réalité », la réponse doit être physiquement réaliste. Par exemple, dans un exercice portant sur les vitesses relatives, un homme qui tire une corde ne la tirera pas en général à des vitesses supérieures à la vitesse de la lumière. Toutefois, se questionner sur le sens de la réponse obtenue repose sur la mobilisation de connaissances préalables que l'élève doit posséder, et qui sont essentielles à la détection des erreurs. Ainsi, le fait de savoir qu'une intégrale définie mesure la surface en dessous de la courbe nous permet de conclure que l'égalité $\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx = -6$ est fausse car $(x^2 + 1)$ est positif et défini sur l'intervalle [-2,1], donc l'intégrale $\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx$ doit être positive, or le résultat obtenu est négatif.

Anticipation de l'ordre de grandeur

Un autre moyen de contrôler le résultat dans une activité de résolution de problèmes est de procéder à une anticipation de l'ordre de grandeur de la réponse (Cipra, 1985). Par exemple, dans le problème suivant provenant d'une recherche menée en didactique des mathématiques (Oliveira, 2003) :

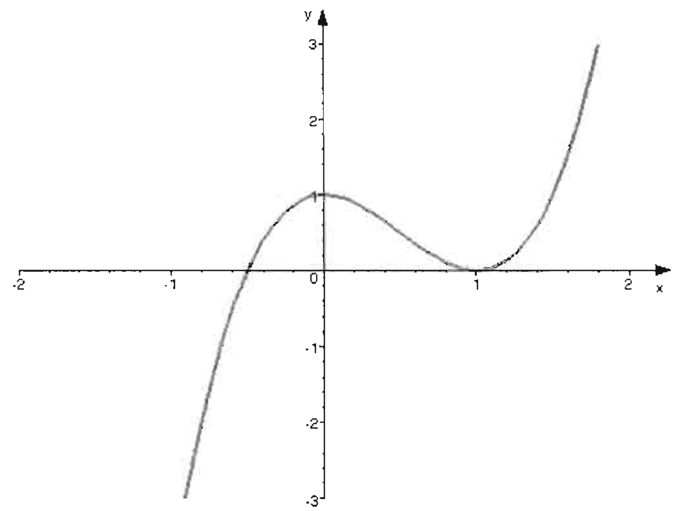
> « Une voiture parcourt une distance entre deux villes en 5 heures avec une vitesse de 90 kilomètres par heure. En combien de temps fera-t-elle le même voyage avec une vitesse de 75 kilomètres par heure? » (p.108)

En anticipant l'ordre de grandeur de la réponse, on peut prévoir que le résultat sera plus grand que 5 heures (qui est le temps mis pour parcourir les deux villes avec une vitesse de 90 km/h) et plus petit que 10 heures (car ça prendrait alors 2 fois plus de temps pour parcourir une même distance, or la vitesse n'a pas été réduite de moitié).

On peut remarquer qu'estimer l'ordre de grandeur peut se situer à deux moments de la résolution. Soit à la fin de la résolution, lorsqu'on se demande si la réponse que l'on a obtenue a du sens, soit en amont de la résolution, comme une anticipation de la solution.

Recours à différents registres de représentation

Un moyen permettant de détecter les erreurs est également d'avoir recours à l'utilisation de différents registres de représentation. Cette stratégie oblige à avoir recours à un changement de registre, et à une flexibilité dans le passage d'un registre à l'autre. Par exemple, un moyen de contrôler un problème présenté dans un registre symbolique en algèbre est d'avoir recours à un registre graphique (avoir par exemple une idée de l'allure générale d'une fonction que l'on doit étudier). Dans le cas présenté ci-après, le transfert se fait entre le registre symbolique et le registre graphique. Par exemple, supposons qu'on veut calculer la dérivée de la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ et qu'on ait trouvé $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Pour vérifier l'exactitude de ce calcul, on peut utiliser la représentation graphique de cette fonction :



On constate alors que le calcul de la dérivée donne une valeur fausse pour $x = 2$. En effet, d'après le calcul de la dérivée, $f'(2) = 0$, ce qui signifie que la courbe de la fonction *f* admet une tangente horizontale au point $x = 2$, comme nous le voyons sur le graphique ce n'est pas le cas, la fonction étant strictement croissante en ce point.

Pour en arriver à cette conclusion, des connaissances sur certaines propriétés sont toutefois indispensables, dans ce cas-ci, on a recours au lien entre la monotonie de la fonction et le signe de sa dérivée, ce qui dénote une activité de contrôle sur la tâche. Nous pouvons faire une distinction ici entre expert et apprenant. En effet, l'expert peut faire ces coordinations entre différents registres de représentations alors que l'élève, à différents niveaux de scolarité, doit apprendre à faire ces transferts de registres de représentation, qui lui permettront de contrôler par d'autres voies la solution obtenue. Ainsi, nous pouvons dire que cette stratégie, le recours à différents registres de représentation, ne peut avoir lieu en début d'apprentissage.

Certaines des stratégies décrites, le questionnement sur le sens de la réponse, l'anticipation de l'ordre de grandeur et un changement de registre de représentation, une entrée différente sur le problème, traduisent une activité de contrôle de la part de l'élève. Il serait important que l'enseignement vise à développer ces stratégies, indices d'une activité de contrôle chez l'élève. À la page suivante, nous présentons un schéma récapitulatif du concept de contrôle et de l'éclairage amené à son propos par les ouvrages pédagogiques s'intéressant à l'enseignement des mathématiques.

Figure 2.1.3 Synthèse de l'activité de contrôle telle qu'elle est mise en évidence en éducation (dans l'enseignement des mathématiques)
(sources: Polya, 1945/1965 ; Mashiach Eizenberg et Zaslavsky, 2003 ; Cipra, 1985)

En résolution de problèmes

Le contrôle est présent tout au long du processus de résolution de problèmes : - il est associé à la sélection, dans les différentes données de l'énoncé (Polya, 1945/1965), des éléments cruciaux, des informations pertinentes et non pertinentes (Krutetskii, 1976 ; Mashiach Eizenberg et Zaslavsky, 2003) - il permet de remarquer des similitudes, des différences et des analogies entre un problème à résoudre et un problème résolu (Krutetskii, 1976). - il est associé à une anticipation de la solution (Mashiach Eizenberg et Zaslavsky, 2003) - il se traduit par la capacité à estimer, évaluer, à être flexible dans le recours à une stratégie de résolution (Krutetskii, 1976) - il est présent lors d'évaluations périodiques tout au long de la résolution (Polya, 1945/1965) - il prend place lors de la vérification de la solution (Polya, 1945/1965 ; Mashiach Eizenberg et Zaslavsky, 2003) - il assure la détection des erreurs, limite le doute (Cipra, 1985)

Stratégies de la part de l'élève, de l'apprenant traduisant un contrôle

Cipra (1985) décrit : - un questionnement sur le sens de la réponse - une estimation, anticipation de l'ordre de grandeur - le recours à d'autres registres de représentation, à une entrée différente sur le problème - la substitution par un problème intermédiaire plus simple pour reconnaître l'opération (Polya, 1945/1965)

Le mathématicien français Jacques Hadamard, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie, s'est intéressé au processus d'invention en mathématiques dans son livre *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique* (1945/1975). Les différentes phases de la découverte en mathématiques ne sont pas traitées sous l'angle du concept de contrôle, mais l'auteur définit la pensée du mathématicien comme étant « contrôlée ». La lecture du livre d'Hadamard sous l'angle de notre objet de recherche nous en fait faire une lecture particulière.

2.1.4 Éclairage sur le contrôle en mathématique amené via le processus d'invention en mathématique

Hadamard (1945/1975) se base sur les témoignages de plusieurs chercheurs (sa propre expérience et, entre autres, celles de Poincaré et d'Helmholtz) pour définir les conditions qui permettent les inventions et/ou les découvertes[22] en mathématiques. Il définit la pensée inventive comme une pensée «contrôlée» et «concentrée» :

> « (...) il y a la pensée « libre » qui a lieu lorsque nous laissons vagabonder nos pensées sans les diriger vers un but spécial; et il y a la pensée « contrôlée » quand la direction est donnée. Il y a direction de notre pensée quand on lui demande quel jour on est; mais le cas de la pensée inventive est visiblement différent. Elle demande un certain effort de concentration, non seulement elle est contrôlée, mais elle est concentrée. » (p.73-74)

Le contrôle se traduit par une direction volontaire de notre pensée pour permettre l'invention, la découverte. Pour nous, l'activité de contrôle est omniprésente dans le travail du mathématicien, elle se retrouve dans trois des quatre

[22] Dans l'introduction de son livre, Hadamard précise qu'il y a une distinction entre une découverte et une invention mais que dans son livre il ne fera pas cette distinction. « La découverte concerne un phénomène, une loi, un être vivant qui existait déjà mais dont on n'avait pas la perception : Christophe Colomb a découvert l'Amérique, mais elle existait avant lui. (...) Cette distinction s'est montrée moins évidente qu'elle ne semble au premier abord. (...) il existe une quantité d'exemples de résultats scientifiques qui sont des découvertes aussi bien que des inventions. (...) C'est une des raisons pour lesquelles la distinction faite ci-dessus ne nous concerne pas vraiment. » (p.9).

phases définies par Hadamard, caractérisant le processus de découverte : la préparation, l'incubation et la vérification-finition.

2.1.4.1 Les phases du travail d'invention en mathématiques interprétées sous l'angle du contrôle

Nous allons présenter chacune des phases du travail d'invention en mathématiques en explicitant comment s'y traduit pour nous l'activité de contrôle.

Phase de préparation

Le mathématicien part d'un problème à résoudre, d'une proposition à cerner sur le plan conceptuel. Le contrôle permet, à ce stade, une mise en lien des connaissances du chercheur avec ce qu'il cherche à résoudre. Hadamard précise que dans cette première phase, le travail du mathématicien apparaît souvent infructueux, le chercheur a l'impression de faire fausse route, il perçoit plusieurs voies qu'il suppose avoir des chances de les conduire à la solution. Ces efforts ne sont pas stériles, ils mettent en branle la machine inconsciente qui va permettre au chercheur de rentrer dans la deuxième phase de la découverte : l'incubation.

Phase d'incubation

De cette première phase découle un nombre extraordinairement grand de combinaisons. Le contrôle permet un choix éclairé parmi ces combinaisons, permettant de distinguer celles qui sont fécondes et celles qui pourraient le devenir. Il est intéressant de noter que ce contrôle est inconscient, intériorisé par le chercheur. Il est guidé par la *sensibilité* du chercheur :

> « Les phénomènes inconscients privilégiés, ceux qui sont susceptibles de devenir conscients, ce sont ceux qui, directement ou indirectement, affectent le plus profondément notre sensibilité. » (Hadamard, repris de Poincaré, p.38).

La sensibilité du mathématicien prend la forme d'une référence au sens de la beauté en mathématique, de l'harmonie des nombres et des formes, de l'éloquence géométrique. Poincaré compare cette sensibilité à un véritable sens esthétique.

À ce stade, le contrôle permet de déterminer quelle direction de recherche vaut la peine d'être suivie, quelle question mérite en elle-même un intérêt, sa solution ayant probablement une valeur pour la science.

Phase d'illumination

Dans cette phase, l'activité de contrôle n'est pas présente. Cette phase est caractérisée par l'émergence soudaine d'une idée, résultant de l'incubation qui devient tout simplement consciente, sans que le mathématicien ait pour cela quelque effort à fournir.

Phase de vérification et de finition

La notion de contrôle est vue ici comme une activité de vérification suite à une idée, à une hypothèse émise, permettant au chercheur d'avoir le sentiment d'absolue certitude. Cette phase englobe également la finition qui est inséparable de la vérification, et dont le but est de pouvoir exposer les résultats avec précision. Après l'idée initiale, il faut passer aux calculs qui demandent de la discipline, de l'attention et de la volonté. Le contrôle se retrouve mobilisé dans la vérification des calculs, qui forme une partie assez mécanique du travail. Le mathématicien n'accorde pas une confiance aveugle aux résultats des règles qu'il utilise, il sait que des fautes de calcul sont possibles et même fréquentes. Nous pouvons nous référer à l'histoire des mathématiques pour illustrer l'importance de cette vérification chez les mathématiciens. En effet, Cantor dans une lettre traitant de la bijection entre deux ensembles infinis, clamait « je le vois, mais je ne le crois pas. » On peut se demander combien de vérifications il a fait de sa démarche mathématique pour finir par accepter le résultat. L'activité de contrôle assure également une perception des erreurs.

Hadamard souligne que lorsqu'une erreur a été faite, c'est la perspicacité qui avertit le mathématicien que ses calculs n'ont pas l'apparence qu'ils devraient avoir.

Ainsi, le concept de contrôle, à travers les propos d'Hadamard dont nous avons extrait la signification, peut être vu comme guidant l'invention mathématique. Pendant la phase de préparation, le contrôle permet une mise en relation entre ce que sait le chercheur (ses connaissances, celles du domaine, sa sensibilité,...) et le problème à résoudre, le contrôle guide en quelque sorte le chercheur vers les connaissances nécessaires à la recherche. Dans la phase d'incubation, le contrôle passe par une sélection de toutes les idées pour ne retenir que celles qui sont fécondes, ces idées étant sélectionnées sur la base entre autres d'une certaine sensibilité que possède chaque chercheur. Finalement, le contrôle permet, dans la dernière phase, la vérification de ce qui émerge, la détection de possibles erreurs en lien avec sa finition, sa présentation.

2.1.4.2 L'activité méta dans le travail de recherche sous l'angle du contrôle

La double opération de vérification et de finition du résultat ne constitue pas toujours la fin du processus de recherche, d'invention en mathématiques, mais en constitue plutôt une étape. À la fin des quatre premières phases, le mathématicien arrive à un résultat qu'Hadamard nomme un « résultat-relais », constituant le point de départ pour la prochaine étape de la recherche : un retour à la phase de préparation. Le témoignage [23] de Poincaré sur la découverte de la théorie des fonctions fuschsiennes illustre ces propos (nous avons mis en évidence en italiques, entre parenthèses, ce qui renvoie au contrôle). On voit apparaître à travers ce qui est dit ici bas un contrôle qu'il serait intéressant d'expliciter.

---

[23] Extrait tiré d'une conférence à la Société de Psychologie de Paris (*Bulletin de l'Institut Général de Psychologie,* n°3, 8e année, 1908)

> « Je voulus représenter ces fonctions par le quotient de deux séries; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandais quelles devaient être les propriétés de ces séries si elles existaient, *[contrôle conscient, réfléchi, mise en lien entre ce qu'il veut faire et des connaissances autres / phase de préparation]*[24] j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes *[contrôle qui permet de sélectionner l'idée la plus féconde / Phase d'incubation]*. A ce moment, je quittais Caen, que j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'Ecole des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade; au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuschsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification; je n'en aurais pas eu le temps puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée; mais j'eus tout de suite une entière certitude. *[Phase d'illumination]*. De retour à Caen, je vérifiais le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience *[contrôle sous l'angle d'une vérification / Phase de vérification]*. » (p.22-23)

Le résultat, *les transformations définissant les fonctions fuschiennes sont identiques à celles de la géométrie non-euclidienne*, est défini come un résultat relais. Celui-ci met en marche la deuxième étape de la recherche, donnant la nouvelle direction dans laquelle la recherche va se poursuivre :

> « Je me mis alors à étudier des questions d'Arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela put avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures *[mise en lien implicite ici entre ce qu'il cherche et certaines connaissances / Phase de préparation]*. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose *[Phase d'incubation]*. Un jour, en me promenant sur une falaise, l'idée me vint toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne *[Phase d'illumination]*. » (p. 22-23)

---

[24] C'est nous qui rajoutons les notes entre crochets.

Une fois finalisée la première étape, le mathématicien doit décider de la nouvelle direction à prendre. L'activité de contrôle se traduit alors par le choix d'une certaine direction nouvelle, c'est la pensée inventive dirigée par le but à atteindre qui guide cette nouvelle direction. Le contrôle agit dans ce cas à un autre niveau, un niveau méta, permettant l'articulation entre les différents résultats-relais.

Il est intéressant de noter que certains mathématiciens ont recours à des images mentales, des métaphores, des analogies. Les mots sont totalement absents pendant les trois premières phases de la recherche, tout mot disparaît au moment précis où le mathématicien commence à y réfléchir, l'utilisation des mots, des signes algébriques n'apparaissant que lors des calculs dans la phase de finition. Chez Hadamard, les mots ne deviennent présents que lors de la communication du résultat :

> « Les mots deviennent absolument absents de mon esprit jusqu'au moment où j'en viens à communiquer ces résultats sous forme orale ou écrite, ou (très exceptionnellement) comme formules-relais.» (p.80)
> « Mon conscient est focalisé sur les images successives, ou plus exactement, sur l'image globale; les raisonnements eux-mêmes attendent dans l'antichambre pour n'être introduits qu'au début de la phase de finition.» (p.79)

Hadamard donne l'exemple de la preuve de la proposition *il existe un nombre premier plus grand que 11* où les étapes successives de la démonstration s'appuient sur des images mentales qui lui sont associées (p.76). Ces images mentales, ces métaphores, ces analogies sont centrales dans le contrôle exercé par le mathématicien.

Les étapes sont reprises dans le tableau ci-dessous :

Étapes de la démonstration	**Images mentales associées**
Je considère tous les nombres premiers de 2 à 11, soit 2, 3, 5, 7 et 11.	Je vois une masse confuse.
Je forme leur produit 2 x 3 x 5 x 7 x 11 = N	N étant un nombre assez grand, j'imagine un point assez éloigné de cette masse confuse.

J'augmente ce produit de 1, soit N + 1.	Je vois un second point un peu au delà du premier.
Ce nombre, s'il n'est pas premier, doit admettre un diviseur premier, lequel est le nombre cherché. *Et ça se poursuit.*	Je vois un endroit quelque part entre la masse confuse et le premier point.

Tableau 2.1.4.2 Étapes d'une démonstration et les images mentales associées (source : Hadamard, 1945/1975, p. 76)

Ces images mentales [25] apparaissent importantes dans le processus d'élaboration de la démonstration, permettant une vue simultanée de tous les éléments du raisonnement, rappelant comment les chaînons de la démonstration doivent être assemblés.

Il est intéressant de noter comme nous le verrons dans ce qui suit que le contrôle exercé par le chercheur dans le travail de découverte possède, cependant, des limites.

2.1.4.3 Les limites de l'activité de contrôle du mathématicien dans le processus d'invention

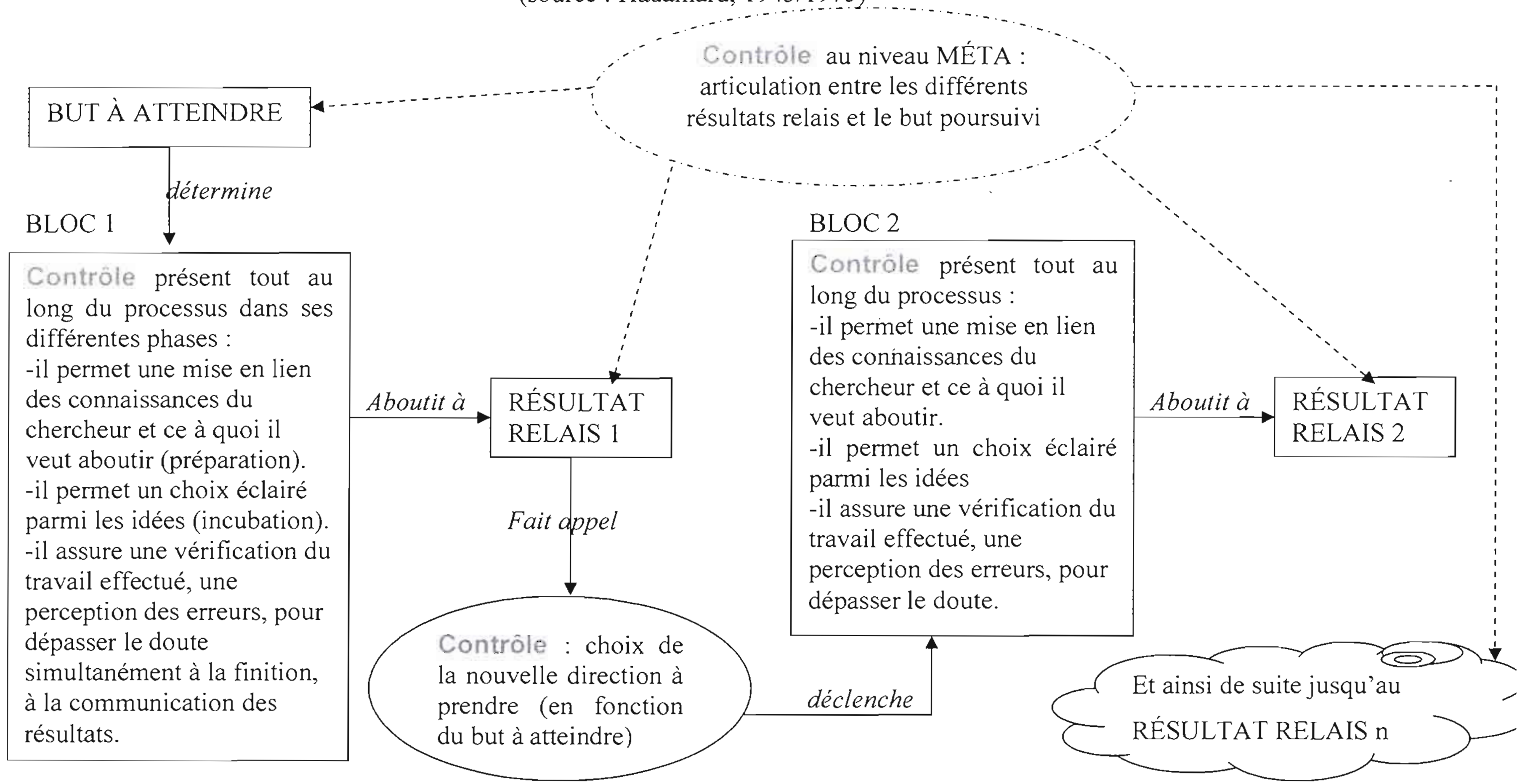
Ces limites sont dues soit à une dissémination de l'attention du chercheur, soit à une trop grande concentration sur un aspect particulier. Hadamard expose son cas personnel. Dans plusieurs de ses recherches, il n'a pas vu certains résultats qui pourtant sautaient aux yeux, étant des conséquences immédiates de résultats qu'il avait obtenus. Il explique par exemple qu'il avait trouvé, pour construire les conditions de possibilité d'un problème d'équations aux dérivées partielles, une méthode qui donnait le résultat d'une manière très complexe, mais il n'avait pas vu

[25] Cependant, ces images reposent sur une bonne capacité d'abstraction du mathématicien, les images traitent les nombres comme étant finis alors que l'ensemble considéré est infini. Cette image constitue en effet un modèle d'un certain concept qui peut être source d'obstacles.

dans ses propres calculs une caractéristique qui éclairait tout le problème. On peut remarquer qu'on trouve ces limites également chez les élèves, leur attention étant par exemple focalisée sur les calculs, ou les détails d'un raisonnement, les empêchant d'avoir une vue globale de la démarche ou du problème.

Comme nous venons de le voir, le contrôle en mathématiques est très présent dans le processus d'invention, agissant même à un niveau méta. Nous avons produit, en annexe, une synthèse de ce qui se dégage à propos du contrôle, dans le processus d'invention en mathématiques.

Figure 2.1.4 Synthèse de l'activité de contrôle telle qu'elle ressort dans l'analyse du processus d'invention mathématique (source : Hadamard, 1945/1975)



En didactique des mathématiques, l'analyse de travaux de recherche, sous l'aspect de l'activité de contrôle, nous a amené à distinguer plusieurs de ses composantes (même si tous les chercheurs n'utilisent pas le terme « contrôle »). Chez Coppé (1993), le contrôle apparaît sous l'angle des vérifications. Margolinas (1989) définit le contrôle en lien avec la validation, un aspect également traité par Balacheff (1987) et Lee et Wheeler (1989). Schmidt (1994), Brousseau (1986), Bednarz et Saboya (2007) et Kouki (2007) se sont intéressés à la distinction entre contrôle sémantique et contrôle syntaxique. À un tout autre niveau, le contrôle est associé aux métaconnaissances (Artigue, 1993; Robert, 1993; Lenfant, 2002; Jullien, 1989-90). Finalement, les études de Kargiotakis (1996) et de Schoenfeld (1985) nous amènent à considérer de nouveau le concept de contrôle dans la résolution de problèmes. Nous avons décidé de ne pas traiter l'activité de contrôle dans la preuve mathématique, ce domaine étant trop vaste. Ceci constitue un choix lié à la complexité de ce qui est déjà abordé.

2.1.5 Une nouvelle entrée sur le concept de contrôle via les recherches en didactique des mathématiques

Le travail de doctorat de Coppé (1993) porte sur la mise en œuvre des processus de vérification par des élèves de première scientifique (16-17 ans). Coppé se place dans le cadre de la théorie anthropologique développée par Yves Chevallard. Elle s'est intéressée à savoir si les élèves vérifient leurs résultats, et si tel est le cas, au type de vérification qu'ils utilisent et aux conditions dans lesquelles ils le font.

2.1.5.1 Le contrôle sous l'angle des vérifications

L'étude de Coppé (1993) commence quand l'élève, face à un problème, a identifié un résultat et qu'il se pose la question du caractère vrai ou faux de ce résultat. Les vérifications permettent de réduire l'incertitude face à un résultat, cette incertitude pouvant provenir d'un premier regard sur l'allure du résultat. Coppé a remarqué que dans le cas où l'élève est sûr que son résultat est faux, celui-ci ne rentre pas toujours dans une phase de rectification en cherchant l'erreur et en essayant de la corriger. Certains élèves laissent le résultat faux sur leur copie car ils n'ont rien d'autre à proposer. Nous pouvons remarquer qu'au début de son étude, son approche de la vérification telle qu'elle la définit (voir définition ci-dessous) rejoint celle des mathématiciens qui cherchent à limiter l'incertitude face à un doute, c'est un travail purement rétrospectif :

> « **Définition :** Dans une situation de résolution de problème, un élève a identifié un résultat partiel ou final et il se pose la question de la validité de son résultat.
>
> Nous appellerons vérification tout argument avancé ou toute action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat, si l'élève en a besoin, à ce moment là et dans cette situation. Une vérification a pour conséquence, soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement d'acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement de déboucher sur une phase de rectification. » (p. 30)

On remarque que la vérification est dynamique, elle implique un retour sur ce que l'élève a produit. À la lumière des résultats obtenus dans son expérimentation, Coppé se voit toutefois contrainte d'élargir sa problématique des vérifications aux procédures de contrôle. En effet, elle a remarqué que les vérifications des élèves ne portaient pas forcément sur le résultat lui-même, mais, par exemple, sur la méthode qui leur a permis d'arriver à ce résultat ou bien sur les critères de choix de cette méthode. Toutes ces considérations ont amené Coppé à s'intéresser aux procédures de contrôle[26] dont les vérifications ne sont qu'un aspect. Ainsi, elle élargit les procédures de vérification aux procédures de contrôle, ces dernières portant sur le résultat, sur le procédé de résolution (entièrement ou en partie), sur les critères qui ont déterminé le choix de la méthode et sur l'adéquation question / réponse. En ce qui

[26] Terme utilisé par Coppé.

concerne les vérifications sur le résultat, elle distingue celles qui ont lieu au début de la résolution de celles qui ont lieu à la fin :

> « la vérification porte sur le résultat mais elle peut apparaître une fois le résultat trouvé, sous la forme d'un retour en arrière sur ce résultat ou bien, de façon moins fréquente, par anticipation, c'est à dire que les élèves posent a priori une condition de validité de leur résultat avant de le connaître « si on trouve un multiple de trois, c'est bon » ou « si on trouve un nombre entier, c'est juste.
>
> Il y a donc de la part des élèves une analyse préalable des propriétés que devra posséder le résultat et une énonciation de celles-ci. (...) Nous nous rendons maintenant compte que nous sommes très proches de procédures de contrôle (...) » (p.44)

Coppé propose une typologie des vérifications qui nous semble intéressante car elle donne des exemples concrets des procédures de vérification utilisées par les élèves. Nous avons retenu certaines de ces stratégies qui, à notre avis, traduisent une activité de contrôle, d'autres vérifications nous semblent par contre loin d'une telle activité. Ainsi, dans une catégorie de vérifications qu'elle nomme « vérifications techniques » car :

> « Il s'agit de vérifier un résultat en refaisant la même chose, en faisant d'une autre façon assez proche (en tout cas sans changer de cadre) ou en reprenant chaque étape du procédé de résolution. » (p.42)

nous distinguons les cas où l'élève fait le calcul d'une autre façon ou fait un autre dessin en faisant varier les mesures, les points, etc., qui nous semblent traduire une activité de contrôle, de la simple répétition de l'activité, d'une reprise adoptant la même façon de procéder. Dans la problématique, au point 1.2, nous avons donné un exemple d'une telle activité lors de la vérification du calcul $126 \times 24 = 3024$. L'élève utilisant la connaissance que la division est l'opération inverse de la multiplication, contrôle le résultat de son calcul en calculant $3024 \div 24$ et en vérifiant que le quotient est bien 126. À ces stratégies porteuses d'une activité de contrôle, nous opposons les vérifications techniques[27] telles celles où l'élève refait le même calcul ou le même dessin, de la même façon, où il reprend une à une les étapes d'une démonstration, d'un calcul, d'un dessin. Même si cette relecture peut ne pas être vide de sens, les élèves n'abordent pas la tâche d'une autre façon, ils n'ont pas une autre entrée possible dans la résolution.

Dans une autre catégorie de vérifications, nommées « vérification par changement de cadres », on retrouve la catégorie « recours à différents registres de représentation » présentée par Cipra. Il s'agit de mettre en rapport des résultats obtenus dans des cadres différents afin de tester leur adéquation. Coppé donne l'exemple d'un élève qui met en relation le tracé d'une courbe et le tableau de variations, ou la valeur d'une intégrale.

La thèse de Coppé permet d'élargir les procédures de vérification aux procédures de contrôle qui portent sur la capacité à réfléchir sur le résultat (comme anticipation ou à la fin de la résolution) ; sur le procédé de résolution ; sur les critères qui ont déterminé le choix de la méthode et sur l'adéquation question / réponse. Elle nous renseigne également sur plusieurs stratégies traduisant une activité de contrôle chez l'élève : refaire le même calcul en le faisant d'une autre façon, sans changer de cadre ou en changeant de cadre. Une autre chercheure, Margolinas (1989) s'est penchée quant à elle sur le processus de validation. Les travaux de Margolinas ont été influencés par ceux de l'« école de didactique française » et en particulier par ceux de Guy Brousseau, auteur de la théorie des situations didactiques.

2.1.5.2 Le contrôle sous l'angle de la validation

Margolinas (1989) utilise le concept de contrôle en termes d'anticipation de la validation et ce, dans un contexte bien précis, celui de la résolution d'équations.

---

[27] Cette vérification fait l'objet du point 1.3.1.1 de la problématique.

2.1.5.2.1 Le contrôle défini comme une anticipation de la validation : le cas de l'algèbre

Margolinas (1989) réserve un chapitre de sa thèse pour parler du processus de contrôle dans la résolution d'équations. Les procédures de contrôle sont définies par Margolinas de la façon suivante :

> *« Nous appellerons processus de contrôle le processus d'anticipation de la validation. » (p.219)*

La chercheure a remarqué que la validation n'est pas seulement rétrospective. Pour répondre de façon pertinente à une question, il faut pouvoir anticiper (partiellement) la réponse, cette anticipation traduisant une activité de contrôle. Le schéma ci-dessous (p.220) décrit les endroits où le contrôle s'exerce dans la résolution d'équation, représentées par les flèches de 1 à 4.

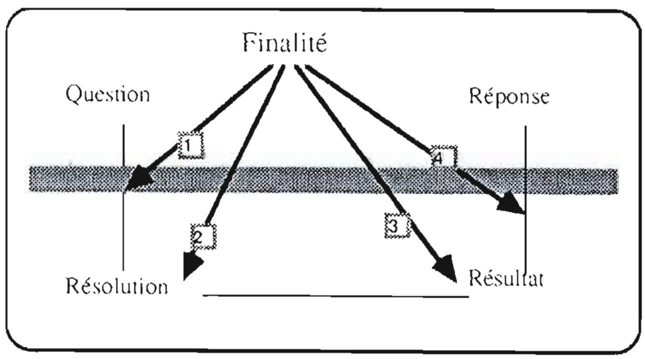


Figure 2.1.5.2.1 Schéma décrivant l'activité de contrôle dans la résolution d'équations (source : Margolinas, 1989, p.220)

On remarque que la finalité est au cœur du processus de contrôle, la finalité étant reliée au but de la résolution qui est de chercher à répondre de façon pertinente à une question. Margolinas distingue ainsi 4 composantes du contrôle, une première liée au choix de la méthode algébrique, une autre liée au procédé et à la procédure de résolution, une troisième liée à la fin de la résolution, au résultat et une dernière liée à l'interprétation. Nous allons par la suite détailler chacune de ces composantes pour relever la façon dont le contrôle s'exerce à ces différentes étapes dans le processus de résolution d'équation.

***Contrôle 1* : Choix de la méthode algébrique**

Le contrôle porte ici sur la liaison entre la question et la résolution. L'élève est en contrôle quand il cherche à savoir si un engagement dans un travail algébrique est nécessaire pour répondre à la question. Par exemple, dans le cas où on demande de résoudre $x-2=0$, Margolinas souligne que chez un élève de lycée (15-18 ans) la réponse « 2 est le seul nombre qui convient » est immédiate. C'est cette réflexion sur la tâche qui constitue une activité de contrôle.

Le contrôle est présent également, une fois que l'élève a décidé qu'un engagement algébrique est nécessaire, pour décider, faire le choix de la méthode de travail, qui dépend de la nature de la question, c'est à dire du type de réponse que l'on cherche. Margolinas donne l'exemple de la question *« y a-t-il une solution à l'équation* $2x+3=3$ *?»,* l'élève peut alors répondre *oui* à la question en constatant que zéro convient, le travail requis est de remplacer la valeur de x par 0 : $2\times 0+3=3$. Par contre, la question *« Trouver l'ensemble des solutions dans R de l'équation* $2x+3=3$, amène plus l'élève dans ce cas à résoudre l'équation $2x+3=3$; $2x=0$; $x=0/2$; $x=0$, car le remplacement par zéro ne nous renseigne que sur le fait que zéro est une solution de l'équation. Le fait que ce soit la seule, demande d'autres connaissances, comme par exemple qu'une équation du type $ax+b=c$ avec $a\neq 0$ a toujours une unique solution.

***Contrôle 2* : Procédé et procédure de résolution**

Dans cette deuxième composante, Margolinas se penche sur la résolution algébrique. En effet, celle-ci permet (dans certains cas) la constitution d'une procédure, d'une méthode organisée et raisonnée. La question et la réponse attendue sont ici importantes, par exemple, supposons qu'un élève doit chercher les racines du polynôme x^2+2x+1. L'activité de contrôle est présente quand l'élève, en tenant compte du fait qu'on cherche les racines du polynôme, écrit $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Ce passage d'une écriture à l'autre montre, à notre sens, un contrôle qui s'exerce dans la résolution algébrique elle-même. Il y a un choix sur l'écriture qui permet de voir vite ce qui est cherché (dans ce cas, les racines du polynôme), un choix de la forme la plus avantageuse traduisant une manipulation algébrique réfléchie. Ainsi, suivant la situation, l'élève discerne s'il vaut mieux développer, factoriser ou réduire l'écriture, l'élève est en situation de contrôle quand il perçoit dans la situation ce qui lui permet de faire ce choix. Il y a donc un contrôle qui se fait sur la signification de l'écriture de l'expression algébrique en regard de la tâche. Mais ce contrôle ne va pas de soi, la constitution d'une procédure n'est pas automatique. Il faut que l'élève soit conscient de la portée de l'écriture, par exemple l'équivalence suivante $x^2+2x+1=(x+1)^2$ lui permet de conclure que -1 est la seule racine de ce polynôme. L'élève doit donc savoir ce que signifie trouver les racines d'un polynôme et voir l'intérêt qu'il peut y avoir à exprimer l'expression algébrique sous forme d'un produit (ce qui suppose qu'il perçoit dans ce cas dans l'écriture $(x+1)^2$ un produit $(x+1)\ (x+1)$. Margolinas met en envergure les connaissances spécifiques aux problèmes qui permettent d'exercer le contrôle.

<u>Contrôle 3</u> : Fin de résolution

Le contrôle s'exerce également sur la donnée du résultat. Margolinas distingue le *résultat* de la *réponse*. Elle propose l'exemple suivant où on demande à l'élève de résoudre dans R l'équation $3x+4=7x+12$, un résultat peut être $-4x=8$, l'élève exerce un contrôle sur ce résultat car il sait que lorsqu'il obtient la forme $ax=c$ (pour $a\neq 0$), l'équation est résolue. Le contrôle intervient ici quand l'élève passe du résultat à la solution, en interprétant le résultat qu'il a obtenu, il donne alors du sens à l'équation. La réponse est S = {-2} (-2 est la seule solution de cette équation).

Toutefois, nous nous demandons si un élève qui donne comme solution $S = \{-2\}$ le fait de façon réfléchie en donnant du sens à l'unicité de cette solution ou alors si ce processus n'est pas automatique, et relève plus d'un contrôle syntaxique (automatique, reposant sur des techniques) que sémantique (reposant sur la connaissance qu'une équation du premier degré du type $ax+b=c$ avec $a \neq 0$ a toujours une unique solution).

<u>Contrôle 4</u> : Interprétation

Cette composante du contrôle s'exerce sur le passage entre le résultat et la réponse. À notre avis, nous trouvons cette composante du contrôle surtout dans la résolution d'équations qui n'ont aucune solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas-ci, l'activité de contrôle s'exerce quand l'élève interprète le résultat pour donner la réponse, ceci repose sur les connaissances du sujet, sur la signification qu'il accorde aux équations et à ce que veut dire résoudre une équation. Un exemple intéressant donné par Margolinas est celui où l'élève obtient comme résultat $-15=1$ à la résolution de l'équation du premier degré $3(x-1)+4(2x-3)=11x+1$. Il n'y a pas de valeurs de x qui vérifient une telle égalité, cette égalité est impossible. Certains élèves ont de la difficulté à interpréter ce résultat. Les difficultés surviennent lorsque les élèves obtiennent un résultat de la forme $11x-11x-15=1$, ce qui donne $0x-15=1$, les x s'annulant, les élèves ne savent comment interpréter ce résultat.

Margolinas (1989) rapproche dans ce travail sur la résolution d'équations le contrôle de la validation. Dans un contexte bien particulier, celui de la résolution d'équations, le contrôle permet une réflexion sur la nécessité d'avoir recours à un travail algébrique, donc une prise de décision sur l'action à entreprendre. Pendant la résolution, le contrôle s'appuie sur une signification de l'écriture algébrique et permet un choix éclairé. Le contrôle porte également sur la forme que peut avoir le résultat et sur le passage du résultat à la réponse en permettant l'interprétation.

D'autres chercheurs en didactique des mathématiques (Lee et Wheeler, 1989; Balacheff, 1987) se sont intéressés à la validation. À la différence de Margolinas, ces auteurs n'utilisent pas le terme « contrôle », mais la lecture de leurs travaux sous l'angle de notre objet de recherche nous a permis d'associer le contrôle à la capacité de valider des égalités algébriques (Lee et Wheeler, 1989) et à une prise de décision (Balacheff, 1987).

2.1.5.2.2 D'autres points de vue sur la validation qui éclairent le concept de contrôle

Lee et Wheeler (1989) se sont intéressés à la validation d'énoncés algébriques. Ils ont questionné des élèves sur la validité de l'égalité suivante $(a^2+b^2)^3 = a^6+b^6$ et ils ont demandé si cette égalité était toujours vraie, jamais vraie ou parfois vraie. Les chercheurs soulignent que la validation, la justification repose sur une coordination entre l'arithmétique et l'algèbre. Ainsi, pour justifier une telle égalité, les élèves doivent utiliser l'arithmétique qui est le fondement de l'algèbre, en notant que cette égalité est vraie dans certains cas particuliers, quand a ou b prennent respectivement les valeurs 0 ou 1 ou a et b valent tous les deux zéro. Nous pouvons remarquer que l'activité de contrôle, dans le cas de la validation d'égalités algébriques, passe par l'utilisation de cas particuliers.

Dans ses travaux sur les problèmes d'enseignement et d'apprentissage de la preuve en mathématiques, le didacticien français Nicolas Balacheff (1987) souligne que le processus de validation[28] (dans une activité de preuve ou non) est fondé sur une analyse du pour et du contre :

> « La prise d'une décision est légitimée par l'affirmation de son caractère *nécessaire*, elle se distingue d'autres décisions *possibles* par son adéquation et sa validité. Aussi le processus de validation, qu'il s'accomplisse ou non dans l'explicitation d'une preuve, est fondé sur une analyse du pour et du contre, sur la prise en charge de contradictions potentielles. » (p. 156)

Dans son étude, Margolinas (1989) propose plusieurs stratégies de validation qui nous semblent être porteuses d'une activité de contrôle : le changement de cadre et le recours à une vérification à l'aide d'une autre résolution; et d'autres stratégies qui ne sont pas, d'après notre interprétation, des stratégies de contrôle : la validation par double résolution et la validation par propriété mathématique. Nous allons présenter chacune de ces stratégies dans le prochain point.

2.1.5.2.3 Des stratégies de validation sous l'angle du contrôle

Le *changement de cadre* est une des stratégies que l'on retrouve chez Cipra (1985) et Coppé (1993). Margolinas donne l'exemple de la résolution de l'équation $2x + 3 = 3$. On peut valider le résultat obtenu, zéro, en vérifiant que (0,3) est le point d'intersection des droites $y=2x+3$ *et* $y=3$. Cependant, elle souligne que les élèves n'ont pas recours à ce passage à un cadre graphique.

La stratégie, *le recours à une vérification à l'aide d'une autre résolution*, se retrouve également chez Coppé (1993). Il s'agit de résoudre le même problème par une autre méthode, puis de regarder si les résultats concordent. Margolinas (1989) souligne que ce genre de vérification est surtout utilisé pour les calculs numériques. Butlen et Pézard (1990-91) présentent un exemple d'une telle stratégie dans le calcul

---

[28] Balacheff (1987) ne mentionne pas le terme « contrôle ».

de 23 + 12. Si on suppose que l'élève pose l'opération, il peut alors vérifier le résultat obtenu en refaisant le calcul de différentes façons :

23 + 10 + 2 (en décomposant 12 à la dizaine inférieure)

20 + 12 + 3 (en décomposant 23 à la dizaine inférieure)

23 + 7 + 5 (car 12 = 7 + 5) pour se ramener à un multiple de 10 qui se calcule facilement.

Dans le cas de la stratégie de *double résolution*, il s'agit de refaire la résolution par la même méthode, tel que souligné par Coppé (1993). Margolinas (1989) affirme que si on ne trouve pas la même chose, c'est qu'il y a une erreur au moins dans une des résolutions. Toutefois, il ne nous semble pas que cette stratégie témoigne d'un contrôle sur la tâche, l'élève ayant pu faire une erreur dans sa première résolution peut refaire cette erreur, si celle-ci provient d'une conception erronée ou d'une difficulté dans la résolution. Par exemple, supposons que l'élève résolve une équation donnée en isolant l'inconnue x de la façon suivante :

$2x+3=5$

$x+3=5/2$ d'où $x=(5/2)-3$

La stratégie de la double résolution ne permettra pas, dans ce cas, de détecter l'erreur, l'élève risque de refaire le même type d'erreur lors de la reprise. Dans le cas de la résolution du problème, « Cafés, Croissants »[29], une résolution algébrique conduit l'élève à une impasse. En refaisant les manipulations, l'élève ne perçoit nullement la contradiction. Dans ce type de problèmes (qui présente des données contradictoires), une telle stratégie n'est, au contraire, nullement efficace.

[29] Ce problème a été présenté dans la problématique au point 3.2.1 : « Au restaurant, un café et trois croissants coûtent 2,70$. Deux tasses de café et deux croissants coûtent 3$. Trois tasses de café et un croissant coûtent 3,50$. Trouve le prix d'une tasse de café et d'un croissant. »

La stratégie de validation par recours à une propriété mathématique (prise comme une norme dont on ne comprend pas nécessairement d'où elle vient) s'applique par exemple dans la résolution de l'équation $2x + 3 = 3$, l'élève dira que zéro est l'unique solution car une équation de ce type a toujours une solution. Cependant, nous pensons qu'une telle réponse de la part de l'élève ne nous permet pas de dire que ce dernier exerce une activité de contrôle, car l'élève peut appliquer seulement ce qu'il sait, ce qu'on lui a appris, sans comprendre pourquoi une telle équation admet une solution. C'est en effet ce qu'a constaté Margolinas, dans une expérimentation où elle a demandé à des élèves d'associer à une équation ou à un système d'équations des solutions présentées, elle a noté que les propriétés mathématiques utilisées pour la validation sont rarement justes, et jamais justifiées. Les propriétés ont, pour les élèves, le statut d'opinions et ils ne cherchent pas à les valider.

La chercheure souligne que pour que l'élève mette en place des stratégies de validation (et donc de contrôle), il faut que celui-ci ait un doute sur sa résolution, sur le résultat obtenu. Il s'engage alors dans un travail rétrospectif sur la résolution. Cette phase de rectification repose uniquement sur l'élève, il cherche à traiter le doute ou l'erreur qui lui sont apparus pendant son travail :

> « Pour rentrer dans une phase de rectification, il faut que l'élève ait les moyens de comprendre ce qui a engendré l'erreur, ou bien comment il pourrait faire pour réussir. » (p.173)

Le contrôle s'appuie donc sur une sensibilité à l'erreur, au doute et permet un retour en arrière sur la tâche. On peut remarquer que la phase de rectification rejoint les propos de Balacheff (1987) qui associe, comme nous l'avons vu, le processus de validation et donc de contrôle à une prise de décision.

D'autres chercheurs en didactique des mathématiques (Chevalier, 1984; Robert et Tenaud, 1988) présentent d'autres stratégies qui nous semblent intéressantes du point de vue du contrôle.

L'enseignante Arlette Chevalier (1985) faisant partie du groupe *Géométrie* de l'IREM de Montpellier[30] s'est intéressée à un problème qui a des caractéristiques bien particulières permettant une vérification de la part des élèves :

> « Quand l'énoncé comporte des informations redondantes du point de vue de la résolution, on peut se servir des informations restantes pour vérifier. » (p.171)

L'exemple est celui du problème suivant :

Sur une feuille de papier calque nous avons placé quatre points I, R, E, et M. Les renseignements concernant les distances entre les quatre points et les renseignements concernant les angles obtenus à partir des quatre points sont :

$\widehat{EIM} = 35°$	$\widehat{IEM} = 14°$	$\widehat{IRM} = 16°$	$\widehat{IME} = 131°$
$\widehat{EIR} = 63°$	$\widehat{IER} = 48°$	$\widehat{IRE} = 68°$	$\widehat{IMR} = 136°$
$\widehat{MIR} = 28°$	$\widehat{MER} = 34°$	$\widehat{MRE} = 52°$	$\widehat{EMR} = 93°$

IE = 15,2 cm	IM = 4,9 cm	RE = 14,6 cm
IR = 12,3 cm	RM = 8,3 cm	EM = 11,5 cm

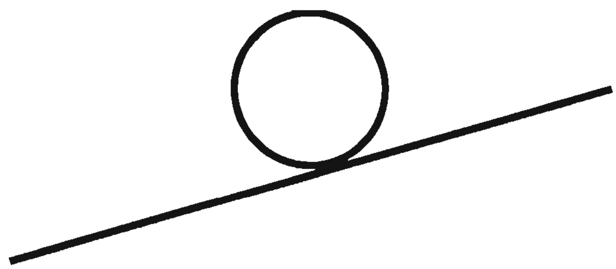
Quel nombre minimum de renseignements faut-il pour dessiner les quatre points sur une feuille de manière à ce qu'ils puissent coïncider avec ceux de la feuille calque ?

Figure 2.1.5.2.3 Problème permettant une vérification par la donnée d'informations redondantes (source : Chevalier, 1985, p. 171)

[30] Le groupe *Géométrie* regroupe une douzaine de professeurs qui enseignent au collège, au lycée ou à l'université (qui correspondent au Québec au secondaire, au Cégep et à l'université).

Les élèves ont souvent recours aux informations redondantes de l'énoncé pour vérifier leur tracé, ils effectuent une ou plusieurs mesures concernant des angles ou des distances qu'ils n'ont pas utilisées pour réaliser leur construction.

Connue par ses travaux sur les pratiques enseignantes en mathématiques en France, Robert s'est intéressée avec Tenaud à analyser une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C. Dans un de leurs articles (1988), les chercheures présentent une autre stratégie qui dénote, d'après nous, une activité de contrôle, de la part de l'élève, *le changement de point de vue*. Sans donner d'exemple de tâche précise, elles proposent la figure suivante :



L'activité de contrôle repose sur l'habileté à percevoir cette figure de différentes façons, soit comme une droite tangente à un cercle, soit comme un cercle tangent à une droite, soit une droite et un cercle tangents. Il s'agit donc de regarder une figure en prenant des points de vue différents, associés à des visualisations différentes. L'élève choisit un point de vue puis, en cas d'échec, il change de point de vue.

Ainsi, ces recherches nous permettent de relever des stratégies de validation qui témoignent d'un certain contrôle : le changement de cadre ou de registre de représentation, le recours à une vérification à l'aide d'une autre méthode, résolution, le recours à des informations redondantes et le changement de point de vue (percevoir une figure, un problème,... d'une autre façon). Nous pouvons remarquer que l'utilisation de ces stratégies dépend du problème donné. Par exemple, nous ne pouvons utiliser le recours à des informations redondantes que dans le cas où l'énoncé du problème propose de telles caractéristiques. D'autres chercheurs en didactique (Bednarz et Saboya, 2007; Schmidt, 1994; Brousseau, 1986; Kouki, 20007) se sont penchés sur différents types de contrôle : le contrôle syntaxique versus le contrôle sémantique.

2.1.5.3 Différents types de contrôle : syntaxique et sémantique[31]

Au Québec, les travaux de Schmidt (1994) en résolution de problèmes en algèbre et plus particulièrement ceux portant sur la transition arithmétique algèbre, pointent certaines difficultés chez les étudiants dans le passage à l'algèbre, dont l'origine est à retracer dans la nature du contrôle qu'ils exerçaient en arithmétique et qu'ils doivent maintenant exercer. La résolution arithmétique avançait en prenant appui sur des grandeurs connues et des significations contextuelles, alors que la résolution algébrique doit prendre appui sur des critères autres pour juger de la validité des raisonnements mis en place. Cette distinction entre contrôle syntaxique et sémantique avait déjà été introduite par Brousseau (1986) à propos de la théorie des ensembles :

> « Pour éviter les erreurs, il ne suffit pas d'appliquer des axiomes, il faut savoir de quoi on parle et connaître les paradoxes attachés à certains usages pour les éviter. Ce contrôle diffère assez du contrôle mathématique habituel, plus « syntaxique ». (p. 43)

À l'encontre du contrôle syntaxique, le contrôle sémantique est ici attaché au sens. Pour Bednarz et Saboya (2007)[32], ces deux types de contrôle sont en jeu dans le passage à l'algèbre. Elles illustrent leur propos avec le problème suivant :

---

[31] On verra plus tard toute l'importance de cette distinction, compte tenu du domaine plus spécifiquement ciblé par la recherche lors de notre expérimentation.

[32] Cette étude menée au Québec est une réflexion sur l'enseignement de l'algèbre et provient d'une étude de cas auprès d'une élève classée en difficulté d'apprentissage en secondaire 2.

Maggie et Sandra vont à une vente de disques. Maggie a 67$ en poche, et Sandra 85$. Sandra dépense 4 fois le montant de Maggie. Lorsqu'elles quittent la boutique, il leur reste le même montant d'argent en poche. Combien ont-elles dépensé chacune?

Le processus d'écriture de l'équation s'appuie sur une compréhension des relations entre les données :

Si x représente le montant dépensé par Maggie, Maggie ayant au départ 67$ en poche, elle aura après ses achats $67-x$ (ce qu'elle avait au départ moins ce qu'elle a dépensé). Sandra dépense 4 fois le montant de Maggie, soit 4 fois x. Elle avait au départ en poche 85$. Après ses achats, elle aura donc en poche $85-4x$. Comme on sait qu'il leur reste à toutes les deux le même montant d'argent en poche, nous obtenons l'égalité $67-x=84-4x$. La mise en équation requiert donc, comme nous le montre la verbalisation précédente, un contrôle sémantique s'articulant sur une signification contextuelle des grandeurs en présence, des relations et des transformations.

À l'opposé, au moment de la résolution, le passage vers un autre type de contrôle est nécessaire. Il apparaît en effet difficile de donner un sens aux manipulations suivantes dans le contexte du problème :

$$67-x+4x=85$$
$$67+3x=85$$
$$3x=85-67$$
$$3x=18$$
$$x=6$$

L'élève doit dans ce cas quitter le contexte pour pouvoir opérer et résoudre. La résolution s'appuie sur un travail sur des expressions algébriques, qui a une certaine signification bien sûr, mais dans un autre registre (des transformations sur des quantités sont ici effectuées de manière à conserver l'égalité).

Kouki (2007) va dans le même sens, il affirme que la résolution d'équations ou d'inéquations du premier degré à une inconnue réelle nécessite une articulation entre le contrôle sémantique et le contrôle syntaxique. L'idée d'une articulation entre ces deux contrôles nous semble intéressante. Comme les autres chercheurs (Bednarz et Saboya, 2007; Schmidt, 1994), le point de vue syntaxique est défini comme la capacité à gérer les règles de transformation dans la résolution d'équations. Le point de vue sémantique diffère du contrôle syntaxique, étant rattaché à la capacité à ne pas se détacher de la signification et/ou de l'interprétation des grandeurs qu'on manipule. Kouki (2007) souligne que le contrôle sémantique prend place au moment de conclure sur les solutions d'une équation :

> « En outre, certaines transformations ne préservent pas la satisfaction, ce qui nécessite un contrôle sémantique qui peut être effectué par assignation de valeurs à la variable (ou aux variables) afin de pouvoir conclure. Dans les cas où l'équivalence n'est pas préservée, en l'absence d'un contrôle sémantique, l'ensemble des solutions de l'équation ou de l'inéquation finale peut contenir des éléments qui ne satisfont pas les équations ou les inéquations de départ. Ce qui nécessite alors de mettre en œuvre des procédures de vérification. » (p.7)

Dans la résolution d'équations, le contrôle sémantique passe par une vérification, une interprétation, une assignation de la solution (ou des solutions) obtenues. Ainsi, l'élève exerce une activité de contrôle quand il y a coordination, articulation entre les aspects sémantique et syntaxique au cours de la résolution.

Le travail en algèbre nécessite une articulation entre ces deux types de contrôle, syntaxique et sémantique. Schoenfeld (1985) et Kargiotakis (1996) se sont quand à eux intéressés à définir le processus de contrôle dans un autre type de tâche, en lien avec le processus de résolution de problèmes en général.

2.1.5.4 Le contrôle en résolution de problèmes

Dans son livre *Mathematical problem solving* (1985), Schoenfeld a étudié le type de stratégies et d'heuristiques utilisées par les élèves dans la résolution de problèmes. Tout un chapitre est consacré au concept de contrôle associé à la prise de décisions :

- lors de la planification de la résolution (pour choisir des directions à prendre ou à ne pas prendre, des buts et des sous-buts, des connaissances à utiliser)
- lors d'évaluations périodiques tout au long de la résolution (pour éviter une impasse ou continuer à explorer une voie prometteuse)
- lors de la vérification de la solution obtenue (pour la retenir ou non)

Le contrôle est considéré comme une étape importante pour tirer bénéfice des stratégies heuristiques en résolution de problèmes. Quand on commence à travailler sur un problème, on peut posséder plusieurs stratégies de résolution, mais toutes ces stratégies ne sont pas nécessairement efficaces. Si on choisit une stratégie peu appropriée et qu'on poursuit avec celle-ci en excluant les autres, alors soit on échouera dans la résolution du problème, soit on arrivera à sa résolution mais avec des procédures difficiles et coûteuses en temps. Un bon ou mauvais contrôle de la situation peut donc affecter le processus de résolution d'un problème.

Le contrôle joue ici un rôle important, il permet de ne pas mettre en jeu une procédure difficile ou coûteuse en temps, et de tester éventuellement d'autres procédures qui peuvent conduire au résultat beaucoup plus facilement. Il est donc important de travailler avec les étudiants sur les stratégies heuristiques et la gestion des décisions qui sont des moyens de contrôle. Le contrôle englobe ainsi la capacité de faire un choix pertinent, le sujet ayant préalablement écarté les stratégies qui sont inappropriées. *Il renvoie à la capacité de faire des choix, d'écarter ce qui pourrait s'avérer difficile ou couteux en temps, de procéder à un traitement « efficace » du problème posé.*

Dans sa thèse de doctorat, Kargiotakis (1996) s'est intéressé à définir les processus de contrôle et à les caractériser en lien avec les environnements informatisés. La définition qu'il donne du contrôle est la suivante :

> « Nous appellerons contrôle en situation de résolution de problèmes, toute action ou suite d'actions menée par l'élève, en cours ou en fin de résolution, qui témoigne **d'une prise de distance par rapport à la seule résolution**. Un tel contrôle peut aussi bien porter sur le résultat et les méthodes utilisées que sur le plan d'actions éventuellement élaboré. » (p. 66)

Kargiotakis (1996) va dans le même sens que Schoenfeld (1985), le contrôle s'exerçant à chaque phase de la résolution. Avant la résolution d'un problème, le contrôle est vu à travers chaque action qui s'inscrit dans la planification. En cours de résolution, Kargiotakis distingue deux types de situations pouvant provoquer des actions de contrôle : des situations de choix (ce sont des situations dans lesquelles l'élève peut faire des choix, prendre des décisions) et des situations de contradiction. Nous étudierons ces situations plus en détails dans la troisième partie. En fin de résolution :

> « nous réserverons la dénomination « contrôle » à la mise en œuvre de processus différents de ceux utilisés en cours de résolution, soit parce qu'ils font intervenir d'autres connaissances, soit parce qu'ils font intervenir au moins une autre formulation de ces connaissances. » (p. 66)

À l'issue de la résolution du problème, le contrôle est vu comme une action rétrospective pour s'assurer de la validité de la résolution, ce sont des actions de vérification que l'auteur distingue des actions de pseudo-contrôle dans lesquelles l'élève vérifie la résolution en reparcourant simplement cette résolution. Ces processus de vérification relèvent d'une attitude de réflexion sur l'action :

> « Ils reposent sur un désir de certitude, soit résultant d'une anticipation ou de l'existence d'un attendu par rapport au but à atteindre. » (p.74)

Des chercheurs en didactique des mathématiques (Artigue, 1993; Robert, 1993) se sont enfin penchés sur le contrôle sous l'angle des métaconnaissances. Le cadre cognitif du contrôle est ici élargi à des caractéristiques du domaine des mathématiques. Dans les travaux de Lenfant (2002) et Jullien (1989-90) nous avons relevé des exemples en algèbre de métaconnaissances que nous associons au concept de contrôle.

2.1.5.5 Les métaconnaissances interprétées sous l'angle du contrôle

L'origine du concept de métaconnaissances en didactique des mathématiques provient d'un questionnement sur le manque d'initiative des élèves face à un problème nouveau, alors que ces derniers ont appris les connaissances nécessaires à la résolution du problème, et sur les nombreux échecs et difficultés qu'ils rencontrent. Plusieurs chercheurs (Butlen, Lagrange et Perrin, 1989; Perrin, 1992) ont alors été amenés à travailler sur autre chose que sur les connaissances mathématiques.

Les métaconnaissances permettent de venir en aide aux élèves pour leur permettre d'anticiper, d'agir efficacement. Elles se situent à un niveau qui n'est pas celui des connaissances mathématiques, mais *celui d'une réflexion sur ces connaissances ou sur l'accès à ces connaissances* (Robert, 1993). Les métaconnaissances vont donc au-delà des connaissances mathématiques prises au sens habituel, référant aux définitions, aux théorèmes, aux propriétés, mais elles y sont très liées.

Artigue (1993) distingue une connaissance d'une métaconnaissance à travers cinq énoncés portant sur les différentes écritures des nombres complexes[33] :

E1 : un nombre complexe peut s'exprimer algébriquement dans plusieurs registres : le registre cartésien qui met en évidence la décomposition en partie réelle et imaginaire : z = a+ib, les registres trigonométrique et exponentiel qui mettent

[33] Dans la problématique, au point 1.4.1, deux de ces énoncés ont été traités.

tous deux en évidence le module et l'argument mais avec des caractéristiques sémiotiques différentes : $\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $\rho\,e^{i\alpha}$

E2 : Si z = $\rho\,e^{i\alpha}$, la partie réelle de z est $\rho\cos\alpha$ et sa partie imaginaire est $\rho\sin\alpha$; si z = a+ib, son module ρ est égal à $\sqrt{a^2+b^2}$ et son argument est donné par les relations $\cos\alpha = \dfrac{a}{\rho}$, sin $\alpha = \dfrac{b}{\rho}$.

E3 : Le registre cartésien est bien adapté au calcul de sommes, les registres trigonométrique et exponentiel sont bien adaptés au calcul de produits, quotients, puissances, racines.

E4 : Si le problème à résoudre est un problème de calcul de puissance nième d'un nombre complexe ou de recherche de ses racines nièmes, mettre le nombre complexe sous forme exponentielle.

E5 : Quand on résout un problème portant sur des complexes, on a intérêt à se poser la question du choix d'un registre adapté au traitement et à changer éventuellement de registre en fonction de l'avancée du traitement.

La chercheure distingue les connaissances qui correspondent directement à la définition de notions et à leurs propriétés mathématiques comme E1 et E2 et *des connaissances qui expriment un savoir sur la pertinence, l'efficacité d'une notion* dans un contexte donné, sur les moyens de gérer cette notion comme E3, E4 et E5, ce sont des métaconnaissances. La chercheure englobe également dans les métaconnaissances une sensibilité aux difficultés que l'on risque de rencontrer dans la manipulation de cette notion, les erreurs habituellement commises, et donc les moments où il faut faire preuve d'une vigilance particulière. Utiliser des métaconnaissances (comme E3, E4 ou E5) représente la possibilité d'utiliser des connaissances sur des connaissances. Les métaconnaissances permettent donc une anticipation de l'action.

Dans un exercice[34] proposé par Lenfant (2002), les métaconnaissances nous apparaissent reliées à la conscience des forces et des limites de diverses notations. L'exercice porte sur le choix d'une écriture efficace, pertinente à propos d'expressions algébriques en lien avec une certaine tâche. L'élève doit procéder au choix d'une écriture (réduite, développée, factorisée) selon la tâche à effectuer, le but poursuivi :

Exercice 9 : On considère l'expression $A(x) = 7x\,(3x+4) + 9x + 12 - 2(3x+4)(x+3)$
a) Développer et réduire $A(x)$. On obtient une expression $D(x)$.
b) Factoriser $A(x)$. On obtient une expression $F(x)$.
c) En comparant $D(x)$ et $F(x)$, vérifier la factorisation et le développement.

d) Préciser dans chaque cas la forme $A(x)$, $D(x)$, $F(x)$ qui vous semble la plus appropriée pour répondre à la question posée
Calculer la valeur de l'expression en 0, en 1, en -1, en 3/5, en 5
Trouver le signe de l'expression pour $x=1/2$, pour $x=-10$
Donner un ordre de grandeur de $A(10)$
Résoudre les équations $A(x)=0$, $A(x)=-12$, $A(x)=14x^2+11x+4$

Figure 2.1.5.5 Problème favorisant le recours à des métaconnaissances (source : Lenfant, 2002, p.35)

Dans cet exercice, il s'agit de faire travailler les élèves sur différentes formes d'écriture d'une même expression, mais surtout de faire réfléchir à l'intérêt d'une écriture par rapport à une autre (en lien avec différentes tâches). L'auteure sollicite, pour nous, le recours à des métaconnaissances chez les élèves, telles que définies par Artigue (1993) :

> « (…) suivant ce que l'on veut faire de cette expression, les différentes formes, bien que mathématiquement équivalentes, ne présentent pas le même intérêt. » (p.40)

[34] Cet exemple se trouve dans les annexes de la thèse, à la page 35. Dans son travail de doctorat, Lenfant s'est intéressée à regarder l'évolution du rapport à l'algèbre chez des professeurs stagiaires.

Il s'agit de développer chez l'élève l'idée de savoir pourquoi telle ou telle transformation peut être ou non a priori intéressante. Le terme « contrôle » est utilisé par Lenfant dans la question (c), le contrôle est relié à une vérification de D(x) et de F(x) qui correspondent respectivement au développement et à la factorisation de A(x). Chacune des expressions permet de vérifier l'autre. Notre interprétation de la tâche nous amène à relever le recours à des métaconnaissances à la question d), dans laquelle aux différentes tâches (calcul de valeurs particulières, résolution d'équations diverses, signe de l'expression, ordre de grandeur), l'élève doit procéder à un choix d'écriture pertinente en regard de ce qui est demandé. Le contrôle auquel on s'attarde renvoie à une réflexion sur l'écriture la plus efficace pour répondre à la tâche proposée :

> « L'expression développée est commode pour calculer la valeur en 0, 1 et -1 (on se ramène à des additions) ainsi que pour estimer l'ordre de grandeur pour une valeur de x grande (il aurait d'ailleurs été plus judicieux pour y sensibiliser les élèves de prendre un nombre plus grand que 10), puisqu'elle met alors en évidence le terme prépondérant. L'expression factorisée est commode pour calculer une valeur lorsque la valeur de x annule un des facteurs, pour trouver le signe si le calcul de la valeur exacte n'est pas évident, pour résoudre une équation du type A(x) = 0. » (p.40)

Artigue (1993) remarque qu'il y a une hiérarchie dans les connaissances et les métaconnaissances. Ainsi, les

> « métaconnaissances générales doivent pouvoir s'appuyer sur des métaconnaissances plus locales portant sur les domaines mathématiques concernés, lesquelles à leur tour doivent s'appuyer sur des connaissances mathématiques dans ces domaines. (...) Ainsi, il ne sert à rien de disposer d'une métaconnaissance heuristique générale affirmant l'intérêt de l'exploration si l'on n'a pas les moyens de guider dans le contexte précis concerné une exploration efficace, de savoir, par exemple qu'il est intéressant de rechercher les points fixes d'une transformation géométrique pour l'identifier, si l'on n'est pas capable d'exploiter les informations recueillies ou a priori de mener à bien les calculs permettant de localiser ces points fixes. » (p.39)

Les métaconnaissances requièrent donc une réflexion sur la tâche, quelle que soit la tâche. Jullien (1989-90) présente dans son article l'analyse d'un exercice qui permet de mettre de l'avant, il nous semble, des métaconnaissances :

a) x désignant un nombre réel quelconque, développer $(x+5)^2$.
b) Expliquer pourquoi $(x+5)^2$ est toujours strictement supérieur à $10x$.

La question a) requiert ce que Jullien nomme un calcul algébrique *formel*, il s'agit simplement pour l'élève de développer. Par contre, la deuxième question est d'un tout autre type et fait appel à des métaconnaissances :

> « Il n'y a rien ici dans la consigne qui porte à penser qu'un calcul soit utile (voire nécessaire) pour répondre à la question. Il est simplement exigé une « explication ». Si l'élève s'engageait malgré tout dans un calcul, celui-ci prendrait (sauf exception) un tout autre statut que le calcul précédent : il proviendrait d'un choix, d'une décision de l'élève. Il s'agirait là d'un exemple de calcul algébrique *fonctionnel.* » (p. 74)

Ainsi, comme le nomme le chercheur, le contrôle *fonctionnel* provient d'une réflexion sur l'écriture $(x+5)^2 = 10x + (x^2 + 25)$, le nombre $x^2 + 25$ étant strictement positif quelque soit le nombre x, $(x+5)^2$ s'écrit comme la somme de $10x$ et d'un nombre strictement positif : il est donc toujours strictement supérieur à $10x$. Il est également possible de procéder en soustrayant : $(x+5)^2 - 10x = x^2 + 10x + 25 - 10x = x^2 + 25$, ici on obtient la somme du carré d'un nombre et du nombre 25 qui est toujours strictement positive, il en résulte que $(x+5)^2$ est toujours strictement plus grand que $10x$.

Cette prise de décision de la part de l'élève est reliée, à notre avis, à des métaconnaissances, à l'accès à une activité de contrôle :

> « (...) la nécessité de prendre une initiative, une *décision de calcul* : décider de calculer la différence $(x+5)^2 - 10x$, puis développer dans cette expression

> la « sous-expression » $(x+5)^2$ et non pas tenter de factoriser le tout, par exemple. De telles prises de décision, ou plus exactement, la capacité à prendre de telles décisions, nécessitent un rapport au calcul algébrique plus libre, moins soumis aux « codes de (bonne) conduite » qu'exige son apprentissage, ou plus précisément l'apprentissage de son maniement formel. » (p.77)

Jullien (1989-90) présente dans son article un autre exemple de calcul algébrique fonctionnel et formel. L'expression $x^2+10x+28$ peut s'écrire $(x+5)^2+3$, connaissance d'unę identité remarquable qui provient d'un calcul formel, ce dernier se rapproche du contrôle syntaxique. Si on utilise notre distinction entre le contrôle syntaxique et sémantique, on peut dire qu'un contrôle sémantique permettrait, dans cet exemple, de dire que le nombre que représente cette expression est toujours supérieur à 3 et que, par conséquent, la fonction $f(x)=x^2+10x+28$ admet un minimum qui vaut 3 et qui est atteint pour $x=-5$. Lorsque l'élève procède à cette réflexion sur l'écriture mathématique qui lui permet de faire un choix de transformation en regard de ce qu'il cherche, l'élève fait appel à des métaconnaissances, il utilise sa connaissance pour interpréter l'écriture en question.

Les chercheurs en didactique des mathématiques font apparaître à travers tout ce qui précède de nouvelles composantes du contrôle. Le contrôle prend part dans le travail de vérification (Coppé, 1993) qui peut avoir lieu lors de l'obtention du résultat (adéquation question/réponse soit par anticipation soit par un retour sur la tâche), lors de la vérification de la méthode de résolution et également lors de la vérification des critères qui ont guidé le choix de la méthode. Chez d'autres chercheurs, nous avons associé l'activité de contrôle à la validation associé à une prise de décision (Balacheff, 1987). Dans ce même ordre d'idées, Margolinas (1989) définit le contrôle comme une anticipation de la validation, dans un contexte bien particulier celui de la résolution d'équations. Dans des travaux portant sur le « méta », nous avons associé la mobilisation de métaconnaissances (Artigue, 1993 ; Robert, 1993) à une activité de contrôle. De plus, nous avons constaté que le contrôle diffère selon la tâche, résolution d'équations (Margolinas, 1989), résolution de problèmes (Schoenfeld, 1985 ; Kargiotakis, 1996) et validation d'énoncés algébriques (Lee et Wheeler, 1989). En algèbre, Schmidt (1994), Bednarz et Saboya (2007) et Kouki (2007) distinguent le contrôle syntaxique du contrôle sémantique. À la page suivante, nous avons repris les différents éléments du concept de contrôle sous l'éclairage apporté par ces travaux de recherche en didactique des mathématiques.

Figure 2.1.5 Synthèse de l'activité de contrôle telle qu'elle ressort de l'analyse des recherches en didactique des mathématiques
(sources : Coppé, 1993; Margolinas, 1989; Chevalier, 1985; Robert et Tenaud, 1988; Balacheff, 1987; Schmidt, 1994; Brousseau, 1986; Bednarz et Saboya, 2007; Kouki, 2007; Artigue, 1993; Robert, 1993; Lenfant, 2002; Jullien, 1989-90; Kargiotakis, 1996; Schoenfeld, 1985).

Sens attribués à l'activité de contrôle

Contrôle dépasse la simple vérification du résultat (Coppé, 1993). Il porte sur :
- le résultat (comme anticipation ou à la fin de la résolution)
- le procédé de résolution
- les critères qui ont déterminé le choix de la méthode
- l'adéquation question / réponse.

Le contrôle est associé à des métaconnaissances (Artigue, 1993; Robert, 1993), à une réflexion sur les connaissances mathématiques ou sur l'accès à ces connaissances. Ce sont des connaissances qui expriment un savoir sur la pertinence, l'efficacité d'une notion, sur les moyens de gérer cette notion. Elles se traduisent également par une sensibilité aux difficultés qu'on risque de rencontrer, aux erreurs habituellement commises.
Les métaconnaissances sont reliées à la conscience des forces et des limites de diverses notations, à la capacité de prendre des décisions, de réfléchir sur, par exemple, l'écriture la plus efficace (réduite, développée, factorisée) selon la tâche à produire (Lenfant, 2002 ; Jullien, 1989-90).

Le contrôle est associé à la validation, associé à une prise de décision, fondé sur une analyse du pour et du contre (Balacheff, 1987), à une anticipation de la validation (Margolinas).

Différents types de contrôle

Contrôle sémantique (*capacité à ne pas se détacher de la signification, de l'interprétation des grandeurs qu'on manipule)* et contrôle syntaxique *(reliées aux manipulations, la capacité de gérer les règles de transformation dans la résolution d'équations).*
(Schmidt, 1994; Bednarz et Saboya, 2007; Brousseau, 1986; Kouki, 2007)
Le travail en algèbre nécessite une articulation de ces deux types de contrôle.

Le contrôle diffère selon la tâche

En résolution d'équations (Margolinas, 1989) : le contrôle est défini comme une anticipation de la validation. Il porte sur :
- une réflexion sur la nécessité d'avoir recours à un travail algébrique (l'engagement dans un travail algébrique est-il nécessaire pour résoudre la tâche)
- une réflexion sur le choix de la méthode de travail (en lien avec la tâche), choix sur l'écriture qui permet de voir vite ce qui est cherché (procédure de résolution)
- la forme que prend le résultat
- le passage du résultat à la réponse (découlant d'une interprétation)

En résolution de problèmes, le contrôle permet la gestion des décisions. Il assure un choix pertinent de la procédure la plus efficace, permettant d'écarter une procédure difficile et coûteuse en temps (Schoenfeld, 1985). Il témoigne d'une prise de distance par rapport à la résolution (Kargiotakis, 1996).

Stratégies traduisant un contrôle

- Refaire le même calcul en le faisant d'une autre façon sans changer de cadre (Coppé, 1993 ; Margolinas, 1989)
- changement de cadre (Coppé, 1993 ; Margolinas, 1989)
- Informations supplémentaires utilisées pour valider un résultat (Chevalier, 1985)
- Changement de point de vue (Robert et Tenaud, 1988).
- Analyse préalable des propriétés que devra posséder le résultat (Coppé, 1993)

Stratégies ne traduisant pas un contrôle

- Par double résolution, même résolution reprise (Coppé, 1993 ; Margolinas, 1989)
- Recours à une propriété mathématique prise comme une norme sans qu'on ne sache d'où elle vient (par exemple une équation du premier degré a toujours une solution) (Margolinas, 1989)

Cette analyse du concept de contrôle selon différentes perspectives : sociologique (Giddens, 1987), psychologique (Richard, 1998; Piaget, 1974; Tiberghien, Le Taillanter, Friemel, Gruner, Julo et Verdier, 1974; Perkins et Simmons, 1988), en éducation mathématique (Polya, 1945/1965; Mashiach Eizenberg et Zaslavsky, 2003; Cipra, 1985), mathématique (Hadamard, 1945/1975) et didactique (Coppé, 1993; Margolinas, 1989; Chevalier, 1985; Robert et Tenaud, 1988; Balacheff, 1987; Lee et Wheeler, 1989; Schmidt, 1994; Brousseau, 1986; Bednarz et Saboya, 2007; Kouki, 2007; Artigue, 1993; Robert, 1993; Lenfant, 2002; Jullien, 1989-90; Kargiotakis, 1996; Schoenfeld, 1985) nous a amené à considérer différentes composantes du contrôle.

Dans la prochaine partie, nous allons présenter une synthèse des différentes composantes du concept de contrôle selon ces cinq perspectives. Cette synthèse permettra un retour sur les principaux éléments que nous retenons à cette étape.

2.1.6 Synthèse des différentes composantes du contrôle selon les cinq perspectives

Il ressort de notre analyse sous l'angle sociologique (Giddens, 1987) que le concept de contrôle renvoie à la mise en place, à l'élaboration d'une conduite rationnelle chez l'élève, en lien avec la construction de savoirs et le développement de processus. En mathématiques (Hadamard, 1975), l'activité de contrôle se manifeste par un regard « méta » sur la tâche, la démarche, le résultat. En didactique des mathématiques, le contrôle se traduit par une réflexion sur les connaissances mathématiques ou sur l'accès à ces connaissances (Artigue, 1993; Robert, 1993). Le travail d'invention du mathématicien exige, de plus, une activité de contrôle qui se traduit par une sensibilité au doute et aux erreurs. Cette capacité à détecter les erreurs constitue également une activité importante comme le souligne Cipra (1985) en éducation mathématique. En psychologie

(Piaget, 1974), nous avons associé le contrôle à une sensibilité à la contradiction et à la capacité de dépasser cette contradiction. Notre interprétation des travaux de Perkins et Simmons (1988) nous a permis de relier l'activité de contrôle au cadre épistémique.

L'analyse didactique fait aussi ressortir que l'activité de contrôle diffère selon la tâche, en résolution de problèmes (Schoenfeld, 1985 ; Kargiotakis, 1996), en résolution d'équations (Margolinas, 1989) ou dans la validation d'énoncés algébriques (Lee et Wheeler, 1989).

En résolution de problèmes, chacune des perspectives traite le concept de contrôle différemment, chacune d'elles étant guidée par son propre cadre de référence. En psychologie, Richard (1998) s'intéresse à la cognition, au traitement de l'information, de sorte que la résolution de problèmes apparaît comme un outil permettant de comprendre certains phénomènes reliés à la cognition. La notion de contrôle ne sera pas approchée de la même façon dans notre étude, la résolution de problèmes étant une des tâches permettant la mise en place d'un certain contrôle comme c'est le cas dans les études de Schoenfeld (1985) et de Kargiotakis (1996). Une condition importante sera donc la nature du problème qui va constituer un facteur important pour favoriser une activité de contrôle.

Comme Lee et Wheeler (1989), les psychologues Perkins et Simmons (1988) se sont intéressés à la validation d'énoncés en vue d'éclairer le cadre épistémique dans leur modèle des « patterns » de non compréhension permettant d'expliquer les difficultés des élèves dans différents domaines (mathématiques, physique, informatique). Les situations de contradiction (Piaget, 1974) constituent un autre type de tâche dans lequel on peut relever une activité de contrôle. À travers ce type de situations, Piaget visait à mieux cerner le développement de l'enfant, ces situations n'ont donc pas de lien direct avec l'enseignement mais peuvent amener un éclairage là dessus. Une autre tâche qui peut faire appel à une activité de contrôle est celle où on demande d'établir des conjectures, activité centrale dans l'invention mathématique (Hadamard, 1945/1975).

Il apparaît également que l'activité de contrôle se traduit par différents moyens qui sont de divers ordres : le contrôle porte sur la réponse, à travers, par exemple, un questionnement sur le sens de la réponse, sur une estimation de l'ordre de grandeur de la réponse (Cipra, 1985; Margolinas, 1989; Coppé, 1993). Il porte sur le sens d'une démarche, sa cohérence, sa validité, la capacité à repérer des contradictions et à les dépasser et il est formulé en termes de stratégies, par exemple, à travers l'utilisation de différents registres de représentation, par une flexibilité dans le passage de l'un à l'autre, par un changement de point de vue, par la substitution par un problème plus simple, par l'évaluation de l'écart au but, par l'utilisation d'informations supplémentaires (Richard, 1998 ; Cipra, 1985; Margolinas, 1989; Robert et Tenaud, 1988; Polya, 1945/1965).

Nous présentons à la page qui suit cette analyse de la recherche sous forme d'un réseau conceptuel, en mettant en évidence les différents points de vue qui nous ont permis de clarifier le concept de contrôle et de nous situer.

Concept de contrôle

Analyse épistémologique. Réflexion sur le processus **d'invention en mathématiques** et le rôle qu'y joue le contrôle	Analyse sous un angle **psychologique**	Analyse **didactique**	Analyse **sociologique**	Analyse en **éducation mathématique**
Contrôle comme un regard méta sur la tâche *(Hadamard, 1945/1975).* Processus qui guide l'invention mathématique en cours de processus, sa vérification. Contrôle présent tout au long du processus : - permet une mise en lien des connaissances du chercheur et ce de ce à quoi il veut aboutir. - permet un choix éclairé parmi les idées. - assure une vérification du travail effectué, une perception des erreurs, pour dépasser le doute, l'incertitude. Le contrôle se manifeste par un recours à des images mentales, des métaphores, des analogies.	Contrôle en lien avec le processus de résolution de problème *(Richard, 1998)* - permet une représentation de la situation - assure un choix éclairé de la démarche à adopter, guide les raisonnements. - contribue à une évaluation des décisions d'action - permet une réorientation de l'activité. Le contrôle en lien avec le développement cognitif - se manifeste dans une sensibilité à la contradiction - permet un dépassement de la contradiction *(Piaget, 1974)* Le contrôle en lien avec l'apprentissage des sciences, des maths *(Perkins et Simmons, 1988)* est associé au cadre épistémique.	Le contrôle est vu comme une prise de distance par rapport à la résolution *(Kargiotakis, 1996),* assure un choix pertinent de la procédure la plus efficace et la moins coûteuse en temps *(Schoenfeld, 1985).* Est associé aux vérifications *(Coppé, 1993)* et à la validation *(Margolinas, 1989; Lee et Wheeler, 1989; Balacheff, 1989)* Il est associé à des métaconnaissances *(Artigue, 1993; Robert, 1993)* (au delà des connaissances, à la capacité de faire un choix réfléchi de certaines connaissances). Permet de prendre des décisions sur, par exemple, l'écriture la plus efficace *(Jullien, 1989-90 ; Lenfant, 2002).* Différents types de contrôles : contrôle syntaxique versus contrôle sémantique *(Brousseau, 1986; Schmidt, 1994 ; Kouki, 2006 ; Bednarz et Saboya, 2007)*	Relié à la rationalité (intentions, raisons des actions), au développement d'une conduite rationnelle de l'acteur social (pour nous l'élève) *(Giddens, 1987)*	Conditions à mettre en place dans la résolution de problèmes *(Polya, 1945/1965)* - permet une sélection des données de l'énoncé - assure une relation entre les données et le but à atteindre - mobilisation des connaissances - vérifications successives sur l'action - vérification du résultat obtenu. 7 indicateurs de contrôle en résolution de problèmes *(Mashiach Eizenberg et Zaslavsky, 2003)* *Cipra (1985)* - stratégies pédagogiques comme anticiper un ordre de grandeur de la réponse. - Le contrôle assure la détection des erreurs, limite le doute.

Tableau 2.1.6 Synthèse des différentes composantes du contrôle selon les cinq perspectives.

L'analyse de ces cinq perspectives, *sociologique, mathématique, psychologique, en éducation mathématique et en didactique mathématique,* guidée par un besoin de clarification du concept de contrôle, nous a permis de construire une définition de ce concept qui est à la base de l'intervention que nous avons menée.

2.2 Vers une définition opérationnelle de la notion de contrôle exercé sur l'activité mathématique

Ce que nous retenons pour notre recherche des études précédemment citées.

L'activité de *contrôle* est associée pour nous à un processus qui se développe, se construit sur du *long terme* chez l'élève.

Le contrôle se traduit par :

- une *réflexion* de la part de l'élève, sur toute action, sur tout choix tout au long de la tâche : au début, en cours ou à la fin de la résolution.
- la capacité à *prendre des décisions* de façon réfléchie, rationnelle.
- une *prise de distance* par rapport à la résolution.
- le recours aux *fondements* sur lesquels on s'appuie pour valider.
- l'utilisation de métaconnaissances.

Le contrôle est présent tout au long de la résolution de la tâche :

***En amont de la réalisation* :**

Le contrôle permet une anticipation, les élèves posent a priori une condition de validité du résultat avant de le connaître. Il assure une mobilisation des connaissances en jeu, il se manifeste par une relation entre les données et le but à atteindre.

En aval de la réalisation :

Le contrôle assure un travail rétrospectif, une vérification, une validation du résultat pour dépasser le doute et acquérir une certitude. Si nécessaire, il permet un retour sur la tâche et contribue à une évaluation des décisions d'action. Il passe également par la perception des erreurs.

En début ou en cours de processus :

Le contrôle se manifeste par des prises de décision sur la direction à prendre, la stratégie la plus efficace, la moins coûteuse en temps, par des évaluations périodiques tout au long de la résolution.

Les stratégies traduisant une activité de contrôle sont :

- Le questionnement sur le sens de la réponse
- Une estimation de l'ordre de grandeur de la réponse
- Une utilisation de différents registres, un changement de cadre, une résolution parallèle
- Le recours à une autre façon de procéder sans changer de cadre
- La substitution par un problème semblable plus simple
- Le recours à des images mentales, à des métaphores, des analogies.
- Le recours aux informations supplémentaires (lorsque présent) pour revenir sur le problème et vérifier.
- Un changement de point de vue
- Une évaluation de l'écart au but (en cours de route et/ou à la fin de la résolution)

Les stratégies ne traduisant pas une activité de contrôle sont :

- la double résolution (refaire la même chose pour vérifier)
- des vérifications qui s'appuient sur le vécu de la classe (« c'est comme ça qu'on l'a fait », ...)
- l'utilisation d'une propriété mathématique prise comme une norne (par exemple une équation de type *$a.x+b=c$, avec $a \neq 0$, admet une et une seule solution)*

Nous venons de définir le concept de « contrôle » en nous appuyant sur ce que nous avons retenu des cinq perspectives. Ce cadre de référence servira d'appui, d'une part, à l'élaboration des situations sous l'angle de la contribution potentielle que le chercheur pourra amener dans cette élaboration (balises théoriques qui vont guider le chercheur), et d'autre part à l'analyse de l'évolution du contrôle chez les élèves, comme nous le verrons par la suite.

Comme nous l'avons vu dans la problématique (au point 1.4.1), Balacheff (1987) souligne l'importance de favoriser dans l'enseignement le développement en parallèle du savoir et d'une conduite rationnelle (qui se traduit pour nous par une activité de contrôle). Ce double enjeu, *construction du savoir* et *développement d'une activité de contrôle*, est illustré par Brousseau (1986) dans l'exemple du jeu de lapins. Dans ce jeu sur micro-ordinateur, des enfants de 5 ans doivent conduire des lapins dans un pré sans pouvoir pour cela les déplacer un à un. L'objectif est que l'enfant mette en place une stratégie de contrôle pour énumérer cette collection mentalement, sans pouvoir marquer les lapins qu'il a déjà comptés. L'enfant doit ainsi trouver une stratégie de comptage, repérer d'abord un premier lapin, en compter un deuxième et savoir alors que ce lot de deux lapins est déjà compté, en compter ensuite un troisième facilement repérable par rapport à ces deux premiers et ainsi de suite. Plusieurs stratégies de contrôle peuvent être mises en place, l'enfant peut soit regrouper mentalement les lapins en une ligne, soit en petits groupes, soit encore compter en premier ceux qui sont à l'extérieur... Dans le paragraphe qui suit, Brousseau fait une distinction entre un certain savoir (ici l'énumération d'une collection) et des stratégies de contrôle servant à utiliser ce savoir (ici décrites comme les moyens pour arriver à énumérer mentalement une collection dont les objets sont placés de différentes façons) :

> « Cette « tâche » *(le chercheur réfère ici au comptage mental des lapins)* ne peut pas être décrite comme une procédure, ni même « montrée » car :

> énumérer une collection *devant* un enfant ne lui donne aucune idée des moyens de contrôle qu'il doit acquérir. » (p. 55)

Ainsi, il ne s'agit pas simplement de compter les lapins devant les élèves pour que ces derniers discernent les stratégies de contrôle mises en œuvre pour réussir cette tâche. Cet extrait nous amène ainsi à nous questionner sur les possibles interventions en classe pouvant favoriser le développement d'une activité de contrôle chez les élèves.

2.3 Quelques pistes pour favoriser le développement d'une activité de contrôle dans l'enseignement

Pour éclairer le type d'intervention que nous souhaitons mener en classe, il nous semble important de nous positionner en tant que chercheure face à l'enseignement autour du développement du contrôle chez les élèves. Dans l'exemple précédent du jeu des lapins de Brousseau, est-ce qu'il faut que l'enseignant explicite la stratégie de contrôle qu'il a utilisée pour compter les lapins? Plus généralement, devrait-on favoriser un enseignement explicite de l'activité de contrôle auprès des élèves?

2.3.1 Notre positionnement en tant que chercheure sur un enseignement explicite du contrôle en classe

Les différentes perspectives étudiées nous ont permis de dégager plusieurs stratégies, moyens de contrôle qui dépendent de la tâche à effectuer comme le questionnement sur le sens de la réponse, une estimation de l'ordre de grandeur, l'utilisation de différents registres de représentation, le changement de point de vue, la substitution par un problème plus simple,... Nous avons également relevé deux stratégies qui, d'après notre interprétation, ne relèvent pas d'une activité de contrôle : la double résolution (Coppé, 1993; Margolinas, 1989) et l'utilisation d'une propriété mathématique prise comme une norme (Margolinas, 1989). De plus, au point 3.1.1 de la problématique, nous avons identifié des vérifications qui faisaient appel à ce qui a été vécu en classe et qui ne faisaient pas appel, à notre sens, à un contrôle sur la tâche.

Afin d'éclairer ce que nous entendons par des stratégies dénuées de contrôle, nous allons nous attarder sur deux stratégies : l'analyse dimensionnelle et la symétrie (Cipra, 1985). Nous rapporterons également une expérience d'enseignement sur le volume présenté par Janvier (1994), cette étude et celles de Robert et Tenaud (1988), d'Oliveira, Bednarz et Lajoie (2007) et d'Hadamard (1945/1975) permettront de nous positionner quant à l'enseignement explicite des stratégies de contrôle.

2.3.1.1 Stratégies qui ne traduisent pas une activité de contrôle

Nous avons répertorié deux moyens cités par Cipra (1985) qui, d'après nous, ne sont pas reliés à une manifestation de contrôle, en lien avec le sens de l'activité : l'analyse dimensionnelle et la symétrie, et qui vont permettre de mieux cerner la position que nous adoptons face à l'enseignement en lien avec le développement du contrôle chez les élèves. Ces stratégies nous apparaissent comme des « trucs », des astuces qui ne nous assurent pas de la validité du résultat et qui peuvent, dans certains cas, avoir des conséquences négatives, produisant des erreurs chez les élèves.

Recours à l'analyse dimensionnelle

On retrouve cette technique dans le livre de Polya (1945/1965), c'est un moyen souvent utilisé pour vérifier les formules géométriques ou physiques[35]. Elle repose sur le fait que, dans la réalité, toutes les grandeurs sont liées à des composantes (c'est le cas par exemple des longueurs, des surfaces, des solides...) et les composantes de la réponse doivent correspondre aux composantes de la grandeur obtenue. Cipra donne l'exemple du tronc du cône ci-après dont on veut trouver la

[35] Cette forme de vérification est plus importante en physique qu'en géométrie.

formule du volume. L'auteur affirme qu'on peut éliminer les mauvaises réponses parmi celles données en utilisant l'analyse dimensionnelle.

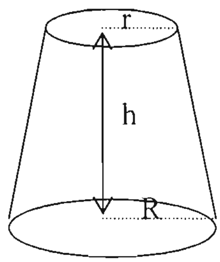
a) $V = \frac{1}{3}\pi h^2 Rr$

b) $V = \frac{1}{2}\pi \frac{h}{R^2 + r^2}$

c) $V = \pi h \frac{R^2 + r^2}{R + r}$

d) $V = \frac{1}{2}\pi h(R^2 + R - r + r^2)$

e) $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$



Les dimensions attendues pour un volume sont $longueur \times longueur \times longueur = (longueur)^3$ alors que :

a) (longueur) ^{4}

b) $\frac{longueur}{longueur^2} = (longueur)^{-1}$

c) $\frac{longueur^2}{longueur} = longueur$

d) *longueur*^{2} + *longueur* (on ne peut ajouter une grandeur représentant deux dimensions et une grandeur qui représente une dimension)

e) *longueur* ^{3}

En utilisant l'analyse dimensionnelle, on peut conclure que e) est la seule réponse qui satisfait les conditions du calcul d'un volume.

Notre analyse nous conduit toutefois à penser qu'il s'agit là d'un outil de contrôle dangereux. En effet, nous ne pouvons pas être sûrs de l'exactitude de cette réponse. On pourrait tout autant avoir $V = \pi h(R^2 + Rr + r^2)$ ou $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2)$ qui satisfont aux exigences de l'analyse dimensionnelle, mais ces formules sont fausses alors qu'elles ne sont pas rejetées par cette stratégie, elle peut donc induire l'élève en erreur. À notre avis, une meilleure stratégie serait de faire construire la formule par l'élève, de raisonner sur le concept, ce qui donnerait du sens à la formule, l'élève pourrait ainsi facilement retrouver les formules de volume dont il a besoin. Cette approche est celle de Janvier (1994) qui propose de raisonner les formules au lieu de demander aux élèves d'essayer de les mémoriser puisque comme le souligne Janvier :

> « Mais les examens le prouvent : les élèves retiennent mal les formules, ont recours à la mauvaise formule et utilisent de mauvaises données. » (p. IX dans l'Introduction.)

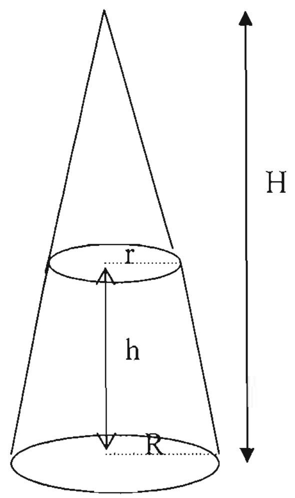
Ainsi, dans l'exemple du cône précédent, on peut construire la formule du volume du cône donné en partant de la formule de base du cône : $volume = \frac{1}{3}$ (aire du cercle) $\times hauteur$. Nous avons deux cônes représentés par la figure ci-dessous. Le cercle de base du grand cône a comme rayon *R* et comme hauteur *H*. Le cercle de base du petit cône a comme rayon *r* et comme hauteur *H-h*. Le volume de chacun de ces cônes est donc :

$$volume_G = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times H$$

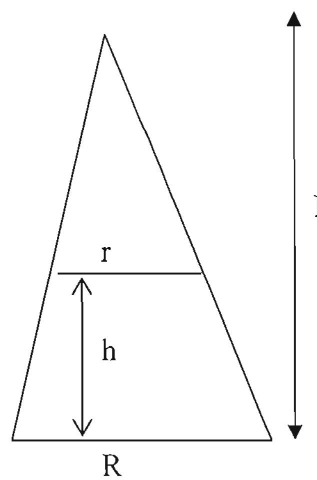
$$Volume_p = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times (H - h)$$

Donc le volume cherché sera :

$$Volume = volume_G - volume_p = \frac{1}{3} \times \pi \times (HR^2 - r^2 H + r^2 h) = \frac{1}{3} \times \pi \times (H(R^2 - r^2) + r^2 h))$$



En utilisant la relation $\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H}$ provenant des figures semblables suivantes :



On obtient $H=\frac{Rh}{R-r}$, en remplaçant H par $\frac{Rh}{R-r}$ dans la formule du volume précédente, on en déduit après quelques manipulations algébriques que :

$$Volume=\frac{1}{3}\times\pi\times h\times(R^2+Rr+r^2)$$

On peut donc retrouver une telle formule en se basant sur quelques raisonnements qui décrivent une bonne compréhension de la part de l'élève des concepts en jeu. Si on se penche sur l'histoire des mathématiques, nous pouvons souligner que chez les Grecs l'analyse dimensionnelle a constitué un obstacle à la progression des mathématiques de l'époque. L'analyse dimensionnelle a limité les progrès en algèbre (les équations du type $x^2 + x + 1 = 0$ qui ne pouvaient être conceptualisées en termes d'opérations sur des grandeurs de dimensions différentes ne pouvaient être résolues à cette époque.)

Recours à la symétrie

Cette technique est également présentée par Polya (1945/1965). Cipra note qu'un problème ou une formule possède une symétrie lorsque certains éléments présents dans cette formule sont interchangeables. Autrement dit, il y a de la symétrie chaque fois qu'une expression apparaît identique lorsqu'elle est observée de deux points de vue différents. L'égalité $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ a des chances d'être correcte parce que ses deux termes sont symétriques : l'échange de x et de y ne change pas les deux termes : $(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2$. Cependant, dans le cas où on écrit $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ ou $(x + y)^2 = x^2 + 3xy + y^2$, x et y sont interchangeables, mais les formules sont fausses, nous ne pouvons pas être assurés que ces égalités soient vraies en utilisant le recours à la symétrie.

Ces deux stratégies, recours à l'analyse dimensionnelle et à la symétrie nous semblent être plus des « trucs », essayant de déceler de possibles erreurs, mais dénuées de sens et n'assurant pas la validité du résultat. Ces deux stratégies ne dénotent pas, à notre avis, une véritable activité de contrôle sur la tâche.

L'approche proposée par Janvier permet, à notre avis, de développer des stratégies de contrôle chez les élèves au lieu de procéder à un enseignement explicite de ces dernières. D'autres chercheurs (Robert et Tenaud, 1988 ; Oliveira et al., 2007 ; Hadamard, 1945/1975) rapportent des éléments venant éclairer notre positionnement face à l'enseignement des stratégies de contrôle en classe.

2.3.1.2 Un enseignement explicite ou un développement des stratégies de contrôle en classe

Robert et Tenaud (1988) proposent des moyens que nous avons interprétés comme des pistes pour le développement d'une activité de contrôle dans l'enseignement car elles traitent de stratégies que nous avons identifiées précédemment comme des stratégies traduisant une activité de contrôle. Ces auteurs sont partis du constat que les élèves de 16 ans et plus ont des capacités réflexives, donc à un niveau méta, qu'ils peuvent être critiques par rapport à l'enseignement. Ils proposent alors de rajouter dans l'enseignement des éléments de réflexion sur les mathématiques qui vont donner aux élèves les moyens de vérifier leur propre travail. Leur expérimentation porte sur l'apprentissage de la géométrie en terminale C (avec des élèves de 17-18 ans), ils sont partis à la fois d'une utilisation simultanée d'un enseignement explicite de méthodes et du travail sur le contenu géométrique. Des méthodes ont été introduites auprès des élèves : une liste d'outils[36], de procédés applicables à un ensemble de problèmes semblables. Ils ont également présenté des conseils de type stratégique permettant de prendre des initiatives. Dans ces conseils, nous retrouvons certaines des stratégies de contrôle présentées par plusieurs chercheurs (Coppé, 1993 ; Margolinas, 1989 ; Cipra, 1985) comme le changement de cadre et le changement de point de vue introduit par ces chercheurs.

---

[36] Ces outils ont été élaborés à partir d'une classification des types de problèmes que les élèves peuvent rencontrer en géométrie en terminale C (17-18 ans), publiés par le Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie de Marseille (1983).

D'après Robert et Tenaud, la mise en œuvre de ces méthodes et donc d'un apprentissage explicite de stratégies de contrôle aide les élèves à résoudre des exercices non triviaux, contribuant également à (ré)organiser leurs connaissances. Ces chercheurs ont donc mis de l'avant dans leur étude, que l'apprentissage de la géométrie passe par la résolution d'exercices ou de problèmes, et que cette résolution est rendue plus accessible par la mise en fonctionnement explicite, consciente, volontaire de méthodes.

Sur ce même sujet, un enseignement explicite d'outils de contrôle, Oliveira et al. (2007) présentent une expérimentation dont les observations rejoignent notre positionnement face à cette question. Ces chercheures se sont intéressées à l'analyse des pratiques d'enseignement de la proportionnalité au secondaire. En ce qui concerne la reconnaissance des situations non proportionnelles, l'enseignant ayant vécu l'expérimentation présente des « marches à suivre » qui devront être employées par les élèves pour vérifier si une situation est proportionnelle ou non. Les techniques de contrôle, ainsi nommées par les chercheures, sur la proportionnalité sont donc enseignées explicitement. L'enseignant présente par exemple le recours à des tables de valeurs :

> « Pour vérifier si on a une situation de proportionnalité, on calcule tous les rapports ou taux qui doivent être équivalents pour que la situation soit proportionnelle. » (p.10)

Dans le cas des graphiques, une autre « marche à suivre » est fournie aux élèves pour vérifier si le graphique représente une situation proportionnelle :

> « Pour qu'une situation soit proportionnelle, 2 conditions doivent être respectées : on a une droite, la droite passe par le point d'intersection des 2 axes. » (p.10)

L'enseignant fournit d'autres techniques de contrôle de la proportionnalité comme l'utilisation des propriétés des proportions. Il présente également des conseils, des mises en garde. Par exemple, il met l'accent sur le fait que si le zéro n'est pas représenté dans la table de valeurs, il n'est pas possible pour autant de se prononcer sur la situation. Après enseignement, les chercheures ont analysé un questionnaire écrit passé à tous les élèves de la classe et portant sur la résolution de différents problèmes proportionnels et non proportionnels. L'analyse des productions des élèves montre que ces derniers s'engagent de manière non réfléchie dans la résolution des deux problèmes portant sur des situations non proportionnelles. Ils ne reconnaissent pas une situation non proportionnelle (traitant cette dernière comme une situation proportionnelle, et ont recours à l'écriture d'une proportion et à ses propriétés pour résoudre les deux problèmes).

Cette étude présente un réinvestissement des outils développés par l'enseignant sur la proportionnalité qui conduit dans ce cas à un non contrôle sur les situations proposées. Nous pouvons dans ce cas souligner les limites d'un enseignement explicite d'outils de contrôle.

Comme Oliveira et al. (2007), nous pensons que le développement du contrôle ne résulte pas d'un apprentissage de méthodes, mais plutôt d'une construction, d'un développement de stratégies par les élèves. Le contrôle ne peut être transmis par un enseignement de méthodes, mais il devrait plutôt se construire.

Un aspect qui nous semble important, rapporté par Tenaud et Robert (1988), est de considérer l'activité de contrôle sous l'aspect de l'utilisation par l'élève de stratégies, de questions, témoignant d'une attitude réflexive par rapport à l'action. Nous retenons des phrases comme « ça ne marche pas », « on n'a rien démontré », « on veut arriver à quoi? » tirées du discours entre les élèves qui correspondent à une activité de contrôle, illustrant une réflexion sur ce que le groupe est en train de faire. Ainsi, si on se place dans une perspective d'enseignement, nous ne pensons pas que les stratégies identifiées comme représentant une activité de contrôle peuvent s'enseigner. À notre avis, l'enseignement doit plutôt permettre de les développer en présentant aux élèves des situations, des problèmes qui requièrent l'utilisation d'une activité de contrôle.

Le livre d'Hadamard (1945/1975) qui rapporte, comme nous l'avons vu, une analyse fine du travail d'invention en mathématiques, a également nourri notre réflexion quant à cette question. En effet, si on revient aux différentes phases qui régissent le travail du mathématicien (préparation, incubation, illumination, vérification, finition,...), nous pouvons remarquer que l'enseignement place souvent les élèves d'emblée devant la phase de finition dans la résolution d'un problème, on centre l'élève sur l'écriture de la démarche laissant sans doute trop vite de côté l'exploration du problème, l'émergence de questions, de nouveaux problèmes... De plus, dans certains cas, les signes algébriques sont de rigueur au détriment des images mentales nécessaires pourtant à l'appropriation de l'invention mathématique. Face à la résolution de problème, une place devrait être laissée aux différentes phases de découverte, de recherche, l'élève exerçant ainsi une activité de contrôle sur la tâche à effectuer. Hadamard va dans ce même sens, notant que le travail de l'étudiant qui essaie de résoudre un problème de géométrie ou d'algèbre et le travail d'invention sont de même nature, il n'y a entre les deux qu'une différence de niveau. Cependant, il est important de souligner que étudiants et mathématiciens sont dans des institutions différentes, les buts poursuivis ne sont donc pas les mêmes.

Ainsi, Hadamard souligne que l'activité de contrôle (terminologie non utilisée par ce mathématicien) permet une vision globale sur les raisonnements mathématiques et assure le fil conducteur guidant la résolution. Cependant dans l'enseignement, on conduit les élèves directement vers la finition, vers la présentation, la résolution étant amenée sous

> « sa forme entièrement consciente, correspondant aux stades simultanés de vérification et de finition et on a même tendance à accroître le nombre de

> résultats-relais. Dans cette manière de travailler (qui semble la meilleure pour obtenir une présentation rigoureuse et claire pour le débutant), rien ne reste cependant de la synthèse[37]. Or cette synthèse donne le fil conducteur sans lequel on serait comme l'aveugle qui peut marcher mais qui ne saurait jamais dans quelle direction aller. Ceux qui ont la vision d'une telle synthèse, « comprennent les mathématiques. » » (p. 100)

Notre interprétation des propos d'Hadamard nous porte à penser que dans l'enseignement, l'activité de contrôle se traduit par une compréhension de chacune des étapes qui constitue le raisonnement mathématique et par la compréhension des chaînons entre ces étapes. D'après ce mathématicien c'est ce qui distingue les étudiants qui comprennent de ceux qui ne comprennent pas les mathématiques, cette vision de la direction générale de la pensée qui guide le raisonnement sur l'objet de recherche. Le travail de résolution de problèmes est ainsi un travail sur du long terme. Nous prenons le parti de penser que cette dimension devrait être plus prise en compte dans l'enseignement où, souvent, on ne laisse pas le temps aux élèves d' « incuber », les problèmes se résolvant sur une courte durée de temps. Or, l'incubation est une phase importante qui peut mener à la compréhension, au contrôle sur la tâche à produire. Malheureusement, nous ne pouvons ignorer les contraintes de temps qui régissent l'enseignement actuel.

Cependant, nous pensons qu'il ne suffit pas seulement de laisser du temps aux élèves pour qu'une activité de contrôle se développe. Il faut également que le problème, la situation soit élaborée pour rendre nécessaire des allers retours, des temps d'essais, des prises de décision... C'est dans ce sens que, dans la prochaine partie, nous allons réfléchir sur les situations susceptibles de développer une activité de contrôle et sur l'aménagement de ces situations.

---

[37] En parlant de synthèse, Hadamard fait allusion à tout le travail effectué par le mathématicien pour arriver à la démonstration claire et rigoureuse du résultat. On retrouve dans cette synthèse les différentes phases qui régissent l'invention mathématique, les images mentales utilisées, les intuitions qui ont guidé le mathématicien le long de sa découverte.

2.3.2 Types de situations et conditions susceptibles de favoriser une activité de contrôle. Aménagement de ces situations en classe.

En didactique des mathématiques, nous avons relevé que l'activité de contrôle diffère selon différentes tâches : résolution de problèmes, résolution d'équations et validation d'énoncés. Nous allons, dans un premier temps, nous intéresser à décrire d'autres types de tâches pouvant favoriser une activité de contrôle et qui serviront d'assises à la construction de situations à expérimenter dans notre étude. Dans un deuxième temps, nous nous pencherons sur les conditions et les occasions susceptibles de développer une activité de contrôle. Une réflexion sera également amenée sur l'aménagement de ces situations en classe.

2.3.2.1 Types de tâches pouvant déclencher une activité de contrôle

Comme nous l'avons vu, le travail du mathématicien (Hadamard, 1945/1975) repose sur l'établissement de conjectures. En éducation mathématique, Cipra (1985) présente cette même tâche qui favorise, d'après nous, une activité de contrôle. L'auteur utilise un dialogue entre deux mathématiciens fictifs pour aborder la validation d'une conjecture émise. Le point de départ d'une telle activité provient d'une incertitude, d'un questionnement sur la véracité d'un énoncé. L'un des mathématiciens pose une conjecture, l'utilisation de cas particuliers apparaît alors comme un moyen possible pour tester cette hypothèse. L'énoncé de la conjecture présentée par l'un des mathématiciens est la suivante :

> « L'aire d'une ellipse est à l'aire du cercle ce que le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont formés par le grand et le petit axe de l'ellipse est au carré du diamètre du cercle. En d'autres termes, si l'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, l'aire du cercle est $\pi(a^2 + b^2)$. » (p.56)

Le deuxième mathématicien démolit cette formule en utilisant des cas particuliers. Dans le cas où a et b sont égaux, on obtient un cercle de rayon a, dont l'aire vaut exactement πa^2 et non $\pi(a^2 + a^2)$ comme ce serait le cas avec la formule donnée par le premier mathématicien. Ce dernier propose alors une autre formule $A = \pi (a^2 + b^2)/2$, qui marche quand a et b sont égaux car on obtient πa^2. En se servant d'un autre cas particulier, le deuxième mathématicien montre la fausseté de cette formule. Ainsi, quand $b = 0$, l'ellipse s'aplatit jusqu'à former une ligne, qui n'a pas d'aire alors que la formule du premier mathématicien fournit une aire de $\pi a^2/2$! L'utilisation de cas particuliers (utilisés comme contre-exemples) intervient ici comme moyen de contrôle en géométrie analytique pour vérifier la validité d'une formule qui doit résister à tous les tests.

Cipra (1985) donne un autre exemple de l'établissement d'une conjecture, en algèbre. Un mathématicien demande à un collègue de lui factoriser le polynôme $x^{17}+1$, la réponse obtenue est $x^{17}+1=(x+1)(x^{16}+x^{15}+...+1)$. Cette factorisation est tout de suite démentie par le premier mathématicien, il utilise pour ce faire le cas particulier où $x=1$, il obtient alors $1^{17}+1=2$ et $(1+1)(1+1+...+1)=2\times 17=34$, ce qui montre que la factorisation proposée ne fonctionne pas.

En didactique des mathématiques, Balacheff (1987) relève l'existence de situations qui tolèrent une absence de validation de celles qui en imposent. Ainsi, la situation elle-même peut tolérer une absence de validation ou encourager un travail de validation. Les situations qui ne requièrent pas de validation, ne risquent pas, d'après nous, de favoriser une activité de contrôle de la part des élèves. Ces situations sont décrites par Balacheff de la façon suivante :

> « C'est aussi le cas des situations dans lesquelles l'élève a à exécuter des algorithmes, des suites d'ordre, ou à mettre en œuvre des pratiques réglées par des *habitudes* pour lesquelles les questions de la validité et de la consistance ne se posent pas. (...) Ces situations n'exigent pas de contrôle des productions, toute erreur contingente d'exécution mise à part, parce que la situation porte a priori sur de « bons objets », de « bonnes relations », selon un contrat qui permet l'économie de l'examen des conditions de validité de l'action. » (p.152)

On peut imaginer par exemple, le cas de l'exercice suivant :

Soit $U_n = 3n+1$. Calculez U_0, U_1, U_2.

Il s'agit ici, mécaniquement, de remplacer n respectivement par 0, 1 et 2 dans l'expression $3n+1$.

Comme exemple de situation de validation, Balacheff (1987) présente « la course à 20 » étudiée par Brousseau (1975) :

> « Dans ce jeu l'un de joueurs commence et dit (ou écrit) 1 ou 2. Son adversaire peut alors ajouter 1 ou 2... celui qui arrive à dire 20 a gagné. » (p.174)

Dans la dernière phase du jeu, on demande à des équipes qui jouent d'élaborer des propositions qui permettent de « gagner à coup sûr ». Plusieurs énoncés sont alors produits, comme par exemple, si je dis 17 c'est sûr que je gagne. Les élèves se trouvent dans une situation de validation dont l'objectif est de justifier la vérité ou la fausseté d'un énoncé (production d'une preuve).

Balacheff introduit, de plus, les *situations de décision* en les distinguant des situations de validation. Dans les situations de décision, on demande aux élèves d'anticiper, de prédire, mais la production d'une preuve n'est pas exigée, c'est une proposition vraie et non la preuve de cette proposition qui doit être produite. Margolinas (1989) donne un exemple d'une telle situation en géométrie, sur la symétrie orthogonale, qu'elle a adaptée d'un problème proposé par Denise Grenier (1988). Elle propose de donner une feuille de papier en carton rigide (que les élèves ne peuvent pas plier) comportant une figure dessinée au feutre vert, et une droite. On demande alors aux élèves de dessiner le symétrique de la figure verte par rapport à la droite. Les élèves doivent prendre la décision de l'endroit où il faut dessiner la figure symétrique, ils doivent réfléchir et anticiper cette figure. On peut prévoir alors un papier ordinaire sur lequel les élèves vont calquer la figure et trouver la figure symétrique en calquant, vérifiant ainsi leur résultat.

Ce type de situations où on demande de prédire ce que donnera l'image d'une figure, demande la mobilisation de moyens de décision et donc de moyens de validation :

> « Dans la situation de décision, les opérations intellectuelles du raisonnement hypothético-déductif (en tant que système légitime et fiable de production d'informations) peuvent être mis en œuvre sans que pour autant une preuve soit produite. Les contrôles logiques et sémantiques fonctionnent localement dans le cours de l'élaboration de la solution. Éventuellement, en tant que mathématiciens, nous reconnaîtrons dans ce processus une organisation qui est de l'ordre de la démonstration; mais ici elle est dans le fonctionnement du sujet un outil et non un objet (cf. pour cette distinction, Douady, 1985) » (Balacheff, 1987, p.153).

Kargiotakis (1996) définit également deux autres types de situations qui favorisent une activité de contrôle, les situations de choix et les situations de contradiction.

Situations de choix : situations favorisant un choix éclairé parmi un ensemble de choix possibles

Dans ces situations, l'élève peut théoriquement résoudre en faisant des choix, en prenant des décisions, ce qui implique que l'élève se trouve devant plusieurs choix possibles au moment de la résolution. Il doit alors procéder à un choix. Kargiotakis parle alors d'un « contrôle en situation de choix » quand l'élève décide entre la décision qu'il vient de prendre et l'issue possible de l'action, il prend alors une distance par rapport à l'action. C'est le cas par exemple dans la situation de la course à 20 dont nous avons parlée précédemment (Balacheff, 1987) dans laquelle il est attendu que l'élève anticipe l'issue de l'action.

Comme Piaget (1974), Kargiotakis (1996) s'est intéressé aux situations de contradictions. Chez ces deux auteurs, dans une telle situation, l'élève ressent un déséquilibre, une contradiction. Toutefois, nous ne pensons pas qu'il suffit de créer un déséquilibre chez l'élève pour qu'il y ait apprentissage. Kargiotakis traite comme Piaget du cas où l'élève ressent un déséquilibre qui provient d'un raisonnement qui n'est pas valide. Il distingue, toutefois, un autre cas, celui où l'élève se questionne, est sensible à la contradiction alors que le raisonnement est bon.

Situations de contradiction : confrontation à des contradictions

Kargiotakis distingue différents types de contradictions. Lorsque le raisonnement de l'élève n'est pas valide, deux cas de figure peuvent se présenter, soit l'élève perçoit la contradiction, soit il ne la perçoit pas. Le chercheur illustre ses propos dans l'exemple où l'élève procède aux simplifications suivantes :

$$\frac{14}{15}\times\frac{35}{36}=\frac{14}{1}\times\frac{3}{36}=\frac{7}{1}\times\frac{3}{18}=\frac{7}{1}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{6} \text{ (p.69)}$$

Le raisonnement de l'élève n'est pas valide, la première réduction $\frac{35}{15}=\frac{3}{1}$ est erronée. Un élève peut percevoir comme une contradiction le fait qu'en multipliant deux fractions qui ont les numérateurs plus petits que les dénominateurs, il obtient comme produit une fraction qui a le numérateur plus grand que le dénominateur. Cette interrogation sur la contradiction est source d'une activité de contrôle, l'élève ressent un doute sur sa production.

Kargiotakis rapporte un autre cas où le raisonnement de l'élève cette fois est valide, une situation de contradiction peut tout de même alors survenir, l'élève étant sensible à une contradiction qui est source de questionnement. Cette contradiction provient des conceptions qui sont liées aux raisonnements de l'élève ou aux connaissances mises en jeu. Ce sont des contradictions qui sont reconnues comme telles par l'élève, mais qui ne le sont pas pour l'observateur. Le chercheur présente l'exemple d'un élève de cinquième (12-13 ans) qui voit une contradiction lorsqu'il procède aux simplifications de fractions suivantes :

$$\frac{28}{42}\times\frac{63}{42}=\frac{14}{21}\times\frac{63}{42}=\frac{14}{1}\times\frac{3}{42}=\frac{1}{1}\times\frac{3}{3}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{1}$$

L'élève explique que :

> « en simplifiant j'ai trouvé des fractions qui ont des numérateurs et des dénominateurs égaux, tandis qu'au début j'avais des fractions dont les numérateurs et dénominateurs n'étaient pas égaux. » (p. 68)

Ainsi, nous venons de relever différents types de tâches qui peuvent favoriser une activité de contrôle :

- la validation d'énoncés mathématiques : l'élève doit se prononcer sur le caractère vrai ou faux d'un énoncé (Lee et Wheeler, 1989 ; Perkins et Simmons, 1988 ; Balacheff, 1987)
- se prononcer sur la validité d'une conjecture énoncée (Cipra, 1985) proche du travail d'invention du mathématicien (Hadamard, 1945/1975)
- Situations dans lesquelles l'élève sera confronté à des contradictions (Piaget, 1974 ; Kargiotakis, 1996 ; Schmidt, 1994), comme par exemple des problèmes avec des données contradictoires.
- Situations dans lesquelles l'élève est confronté à faire plusieurs choix, ce qui suppose une anticipation de la réponse (Schoenfeld, 1985 ; Balacheff, 1987 ; Kargiotakis, 1996).
- La résolution d'équations qui ont une infinité de solutions ou qui n'admettent aucune valeur comme solution (Margolinas, 1989)
- Des situations où l'élève doit prédire, anticiper appelées les situations de décision (Balacheff, 1987).

Cette synthèse des différents types de tâches pouvant favoriser une activité de contrôle chez l'élève nous ont permis de cerner des balises susceptibles de servir à l'élaboration des situations d'enseignement de la part du chercheur. Nous avons regroupé les différentes composantes du contrôle relevées lors de l'analyse de la littérature en 6 catégories, un exemple de situation en lien avec chacune de ces composantes va permettre de les éclairer. Dans le tableau ci-après, nous sommes à la fois sur les composantes du contrôle (*anticipation, vérification, validation, engagement réfléchi, discernement-choix éclairé, métaconnaissance et perception des erreurs)* et les balises susceptibles de servir au choix, à l'élaboration de situations.

Anticipation (Margolinas, 1989; Cipra, 1985; Balacheff, 1987) **La situation proposée doit** permettre de **pouvoir poser a priori une condition de validité du résultat** avant de le connaître.	**Vérification, validation** (Hadamard, 1945/1975; Cipra, 1985, Coppé, 1993; Margolinas, 1989; Richard, 1998; Kargiotakis, 1996; Schoenfeld, 1985; Lee et Wheeler, 1989; Perkins et Simmons, 1988). **La situation proposée doit permettre d'engager des vérifications successives,** périodiques **tout au long de la tâche.** Le résultat obtenu peut mener vers un retour sur la tâche, sur la méthode, ou sur les calculs.	**Engagement réfléchi** (Margolinas, 1989; Balacheff, 1987; Kargiotakis, 1996; Perkins et Simmons, 1988; Schmidt, 1994) **La situation fait intervenir le sens**, la compréhension des concepts en jeu de manière à permettre un engagement réfléchi. **Elle requiert également une prise de distance** par rapport à la tâche, un temps d'arrêt, de réflexion.
Discernement, choix éclairé (Schoenfeld, 1985; Balacheff, 1987; Kargiotakis, 1996) **La situation permet plusieurs engagements possibles**. C'est l'idée d'un choix éclairé entre diverses stratégies possibles, pour **discerner celle qui est la plus efficace,** celle qui mène vers la solution le plus rapidement, sans trop de risques d'erreurs.	**Idée de métaconnaissance** (Artigue, 1993; Robert, 1993 ; Lenfant, 2002; Julien, 1989-90) **La situation sollicite l'utilisation de connaissances de type méta**, nommées métaconnaissances, liées à la prise de décision sur l'utilisation des connaissances les plus appropriées en lien avec la tâche.	**Perception des erreurs, sensibilité à la contradiction. Capacité de dépasser la contradiction** (Balacheff, 1987; Piaget, 1974; Kargiotakis,1996) **La situation provoque un déséquilibre, une contradiction**, des résultats aberrants, qui n'ont pas de sens… de manière à provoquer une prise de conscience. **Elle invite aussi à dépasser la contradiction**.

Tableau 2.3.2.1 Différentes composantes du contrôle qui serviront de balises à la chercheure pour l'élaboration de situations d'enseignement

Exemple d'une situation requérant une anticipation

Au point 2.3.2.1 de ce même chapitre, nous avons donné un exemple de situation de validation qui requiert des élèves d'anticiper a priori l'image d'une figure obtenue par une symétrie orthogonale donnée (Margolinas, 1989).

Exemple d'une situation favorisant les vérifications

Comme exemple de situation qui favorise des vérifications successives, nous pouvons nous ramener à la situation des pièces de monnaie suivante :

> « Dans ma tirelire, j'ai 32 pièces de monnaie. Il n'y a que des pièces de 2 F et de 5 F. Avec ces 32 pièces j'ai 97 F. Combien ai-je de pièces de 2 F et de pièces de 5 F? » (voir Richard, 1998, p.292 au point 2.1.2.2 du cadre théorique).

Une validation

Lee et Wheeler (1989) présentent un exemple de situation dans laquelle on demande à l'élève de se prononcer sur le caractère vrai, possiblement vrai ou faux, de l'énoncé algébrique suivant $(a^2+b^2)^3 = a^6 + b^6$ (voir cadre théorique, le point 2.1.5.2.2).

Exemple de situation demandant un engagement réfléchi

Dans la problématique, au point 3.2.1, le problème café croissants demande aux élèves une prise de distance, du recul quant à la résolution :

> « Au restaurant, un café et trois croissants coûtent 2,70$. Deux tasses de café et deux croissants coûtent 3$. Trois tasses de café et un croissant coûtent 3,50$. Trouve le prix d'une tasse de café et d'un croissant. » (Schmidt, 1994)

Exemple de situation favorisant un discernement, un choix éclairé

Un exemple d'une telle situation est donné par Schoenfeld (1985) que nous avons présenté au point 1.3.5.1 de la problématique dans le calcul de l'intégrale indéfinie $\int \frac{xdx}{x^2-9}$ (requérant le passage à une stratégie plus efficace parmi un ensemble possible de stratégies).

Exemple de situation dans laquelle l'élève utilise des connaissances sur ses connaissances (métaconnaissances)

Nous avons rapporté au point 1.5.5 du cadre théorique (voir Lenfant, 2002) un exemple d'une telle situation où on demande à l'élève de choisir parmi plusieurs écritures équivalentes (réduite, factorisée, développée) celle qui convient le mieux, la plus efficace pour calculer la valeur de l'expression en un point ou encore pour déterminer un ordre de grandeur pour une certaine valeur.

Exemple de situation devant laquelle l'élève est face à une contradiction

Nous pouvons considérer la situation suivante tirée de Hitt (2004) (cf. A et B, problème 7 du questionnaire) :

a) Résous l'équation suivante : $0{,}8x - 0{,}2(0{,}4x + 6) = 6$

b) Vérifie que $x = 10$ est solution de cette équation.

Dans la résolution de cette équation, certains élèves font des erreurs sur la multiplication de nombres décimaux comme $0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}8$ ce qui les amène à trouver une solution différente de celle proposée dans la deuxième question. L'élève peut, dans un premier temps, être sensible à cette contradiction et, dans un deuxième temps, peut dépasser cette contradiction en revenant sur la résolution et en détectant les erreurs.

Pour mieux cerner l'intervention que nous voulons mener auprès des élèves dans le cadre de cette étude, nous nous sommes également questionnée sur les conditions susceptibles de favoriser une activité de contrôle en lien avec l'intervention de l'enseignante et l'organisation du travail des élèves en classe.

2.3.2.2 Aménagement en classe des situations susceptibles de favoriser une activité de contrôle

Plusieurs chercheurs pointent l'intérêt du travail en équipe en lien avec certaines composantes du contrôle. Ainsi Coppé (1993) a remarqué que les vérifications sont plus nombreuses quand les élèves sont en groupe et qu'ils échangent entre eux. Soit ils ressentent le besoin d'êtres sûrs et peuvent alors déboucher sur une rectification, soit ils peuvent répondre à des demandes d'éclaircissements de leur camarade. Robert et Tenaud (1988) notent également que le travail en groupe amène chaque individu à changer de stratégies ou de points de vue ou de cadre, ce qu'il n'aurait pas fait individuellement, l'apprentissage provenant de ces changements. Dans l'expérimentation qu'elles ont menée sur la géométrie en classe de terminale (17-18 ans), elles ont remarqué que, dans les équipes, les solutions proposées ont été traitées par les collègues et retournées sous forme de solutions plus élaborées, des procédés complètement nouveaux sont nés à partir d'éléments partiels de propositions individuelles. Ces résultats nous amènent à penser qu'il peut exister une supériorité des productions collectives sur les individuelles, débouchant dans certains cas sur la construction d'une nouveau procédé de résolution.

Un exemple intéressant d'une telle construction est présenté par Coulibaly (1987). Il illustre la mise en place d'une activité de validation de règles moyennant un travail en équipes de deux. Ce chercheur est parti du constat que les élèves possèdent souvent des règles erronées pour classer les nombres décimaux (Léonard et Grisvard, 1981, Grisvard et Léonard, 1983). Une première règle énonce que si on a deux nombres décimaux qui ont la même partie entière, le plus grand sera celui dont la partie décimale possède le plus grand nombre entier. Par exemple, $0{,}514 > 0{,}6$ car $514 > 6$ ou $0{,}71 > 0{,}006$ car $71 > 6$. Une deuxième règle part du principe que si les deux parties entières sont identiques, le plus grand des deux nombres sera celui qui a le moins de chiffres après la virgule. Ainsi 0,6 > 0,514 car 0,6 a seulement 1 chiffre après la virgule alors que 0,514 en possède 3. De la même façon 0,5 > 0,514 ou 0,71 > 0,006.

Coulibaly a formé 4 équipes de deux élèves. Les équipes ont été constituées de partenaires possédant des règles erronées différentes, il leur a alors présenté 5 séries de nombres décimaux à classer, choisies de manière à provoquer un conflit dans l'équipe[38]. Il a remarqué que trois des quatre équipes ont vécu un conflit provenant des contradictions ressenties et dans deux de ces équipes, le conflit a évolué vers une nouvelle règle : on rajoute autant de 0 que nécessaire pour que les deux parties décimales aient le même nombre de chiffres, on peut alors les comparer.

À partir de cet exemple, Laborde (1996) constate que pour que le travail en commun débouche sur un dépassement de la contradiction, les élèves doivent avoir l'intérêt de dépasser le conflit et une façon de le dépasser est de coordonner leurs points de vue opposés, les transformant en un troisième qui va dépasser les contradictions. On voit apparaître alors une nouvelle solution correspondant à un niveau supérieur de résolution qui dépasse la contradiction apparue dans les processus de résolution proposés par chacun des deux partenaires. La collaboration avec un autre contribue ainsi au développement et à l'émergence de stratégies dues aux explications et aux réfutations que le travail avec une autre personne requiert : se mettre d'accord sur une solution exige de communiquer à l'autre son propre procédé de résolution, et aussi d'argumenter contre le projet de son partenaire. Travailler en équipe permet également la présence conjointe de stratégies diverses avec lesquelles un individu ne se verrait pas confronté autrement et amène l'individu à considérer sa solution par rapport à celles des autres.

---

[38] Par exemple si on classe les deux nombres 7,5 et 7,55 suivant la première règle on aura que $7,55 > 7,5$, alors que l'application de la deuxième règle erronée donne l'inégalité inverse!

Cependant, les apports du travail en groupe sont à nuancer comme le montrent Laborde (1996) et Margolinas (1992).

Laborde souligne que le travail en équipe présente des limites, il ne suffit pas de mettre les élèves ensemble pour obtenir les résultats escomptés. Suite à l'exemple précédent, elle constate que les équipes n'ont pas été formées au hasard, le chercheur a retenu certains nombres à comparer et il a choisi les partenaires, des élèves opérant sur des règles différentes. Or, dans ce cas, une des équipes n'a pas évolué vers un procédé plus élaboré, et une équipe n'a nullement ressenti la contradiction. Ainsi, il ne suffit pas de mettre les élèves en équipe pour aboutir à une prise en compte de la contradiction et à son dépassement. Laborde rapporte à cet effet que la recherche d'une solution dépend de la relation qui existe entre les partenaires, l'un d'eux peut être toujours d'accord avec l'autre ou il peut exister des arguments d'autorité. La solution peut donc être établie sur des bases autres que mathématiques, ils peuvent se mettre d'accord à propos d'un argument erroné pour une solution, que celle-ci soit correcte ou non.

Partant de ces considérations, la chercheure a établi les conditions nécessaires pour créer un terrain favorable aux interactions « productives de nouvelles significations » dans la résolution de problèmes. Ces conditions sont de trois types : *le choix des partenaires, le choix de la tâche* et *la durée de l'interaction.*

Le choix des partenaires

La différence cognitive entre les deux partenaires ne doit pas être trop grande, chacun des partenaires doit pouvoir comprendre les propositions, les arguments de son partenaire.

Choix de la tâche

La tâche doit être choisie de telle sorte que les élèves utilisent le plus possible leurs connaissances mathématiques, mais celles-ci ne doivent pas être suffisantes pour que le problème soit immédiatement résolu. La tâche doit favoriser une explicitation des différents points de vue des partenaires sur un plan rationnel, les amenant à expliquer les raisons de leurs choix.

Durée de l'interaction

Les processus d'interaction ne sont pas linéaires : un élève ne va pas suivre immédiatement ce qu'un de ses partenaires va dire, mais il va plutôt poursuivre avec son idée malgré l'intervention d'un autre, et seulement plus tard quand il va rencontrer une difficulté il peut avoir recours à l'idée de son partenaire éventuellement modifiée. Laborde souligne la nécessité d'une période de temps suffisante pour permettre l'intégration chez un élève des procédés des autres élèves.

Nous nous sommes enfin questionnée sur le rôle que peut jouer l'enseignant pour favoriser le développement d'une activité de contrôle chez les élèves. Nous avons recensé peu d'études traitant de ce sujet. Les études de Mary (1999) et de Margolinas (1989, 1992) s'intéressent à la place de l'enseignant en lien avec la validation.

2.3.3 Stratégies d'enseignement, réflexion sur le rôle de l'enseignant pour favoriser une activité de contrôle

Margolinas (1989, 1992) et Mary (1999) soulignent l'importance du rôle de l'enseignant en lien avec la validation, celui-ci pouvant favoriser, susciter une activité de contrôle[39] chez les élèves (c'est nous qui employons le terme « contrôle »). L'analyse de ces deux chercheures autour de la place de l'enseignant diffère sensiblement, leurs cadres de référence n'étant pas le même. Margolinas s'intéresse aux enseignants à travers la théorie des situations didactiques de Brousseau, elle se

[39] La composante du contrôle reprise ici est celle uniquement de la validation.

penche sur les interactions entre l'enseignant et les élèves dans un certain milieu. Mary, quant à elle, cherche à définir la façon dont les futurs enseignants procèdent pour valider un énoncé dans un domaine bien particulier, l'algèbre. Dans son cadre théorique, elle reprend les travaux de Balacheff sur la preuve (preuve pragmatique, exemple générique,...).

Margolinas (1992) s'intéresse à ce qui se passe à la fin du travail de résolution d'un problème mathématique, au moment où il s'agit de savoir si le résultat obtenu convient au problème posé. Elle appelle phase de conclusion « la phase au cours de laquelle l'élève accède à une information sur la validité de sa réponse » (p.121). Cette phase peut être une phase de validation ou une phase d'évaluation selon la place prise par l'enseignant. Ainsi, la phase de conclusion est une phase d'évaluation quand l'enseignant délivre un jugement de validité sans appel sur la réponse de l'élève. Ce jugement n'appelle pas de réflexion de la part de l'élève sur la validité de sa procédure, l'élève sait tout de suite si sa procédure a marché ou pas, il n'a rien à faire pour valider. Une telle phase d'évaluation bloque, est un frein à un contrôle de l'élève sur l'activité mathématique (c'est nous ici qui parlons).

C'est quand la phase de conclusion se présente selon une phase de validation qu'elle devient intéressante pour nous en ce qui a trait au développement d'une activité de contrôle, l'élève décidant lui-même de la validité de sa réponse et devant argumenter en ce sens. Il est alors amené à justifier son travail, à vérifier sa démarche et le résultat obtenu. Il est donc important d'organiser le milieu de façon à permettre la validation de la part des élèves. Le rôle de l'enseignant est ici réduit, toute intervention sur la validité des stratégies et des méthodes n'étant plus à sa charge. Or même quand le milieu est conçu de telle sorte qu'il permette la validation comme c'est le cas dans la situation de la course à 20, les enseignants se heurtent à des difficultés les amenant à intervenir directement dans la relation des élèves avec le milieu pour la validation[40], ce qui est contraire à ce qui est souhaité. En effet,

---

[40] Voir le point précédent.

l'enseignant ne peut être sûr que la phase de validation vécue par les élèves sera acceptable comme phase de conclusion pour lui. Il est ainsi important d'arriver à anticiper les différentes réactions des élèves face au milieu pour que l'enseignant puisse intervenir en conséquence.

Margolinas (1992) propose alors d'introduire une phase de bilan pour que l'enseignant puisse se situer à l'intérieur de la phase de conclusion :

> « Un des rôles de la phase de bilan est de permettre la formulation publique des méthodes de résolution par les élèves qui sont envoyés au tableau, où ces élèves doivent formuler leurs stratégies (p. 136). »

Les connaissances mises en œuvre par les élèves sont alors portées à la classe toute entière pour être discutées et validées. À notre avis, c'est quand l'élève est responsable de la totalité de ses actions qu'une activité de contrôle risque de se développer. La phase de bilan, rendant publiques les stratégies devant la classe est intéressante du point de vue de l'enseignant qui peut alors reformuler, renvoyer des questions au reste de la classe à des fins de validation. La phase d'évaluation n'apparaitrait qu'en dernier recours, celle-ci court-circuitant en partie la mise en place d'une activité de contrôle.

Mary (1999) a également remarqué que l'enseignant peut favoriser une activité de validation dans sa classe à travers les questions qu'il pose, ce qu'il accepte ou refuse comme arguments, les renforcements tels le peu d'intérêt qu'il accorde à une réponse. La validation prend donc son sens à travers les explications des enseignants. La chercheure distingue plusieurs types d'arguments de validation utilisés par l'enseignant : l'enseignant peut convaincre par autorité (c'est vrai car c'est lui qui le dit), c'est un des moyens décrit par Margolinas qui ne favorise pas, d'après nous, une activité de contrôle. D'autres moyens sont décrits tels le recours à des actions pragmatiques (mesures, tableau de valeurs, essais numériques, une expérience cruciale, un constat sur du matériel), à une vérification (par une autre méthode, en changeant de référent, en utilisant un autre résultat, en utilisant une information redondante), le recours à un raisonnement inductif menant à une évidence (comme le recours à un exemple générique), ou le recours à un raisonnement de type preuve (preuve particulière, expérience mentale, démonstrations plus ou moins formelles). Cependant, pour favoriser le développement d'une activité de contrôle, il faut laisser aux élèves la place pour valider par eux-mêmes ou par leurs pairs leurs résultats, l'enseignant gérant les échanges, les exploitant et présentant ses propres moyens de validation, s'il le faut.

Nous venons d'explorer plusieurs pistes d'intervention pour favoriser le développement d'une activité de contrôle en classe sous l'angle ici du rôle du travail en équipe et du rôle de l'enseignant, de ses stratégies d'intervention (sous l'angle uniquement de la validation). Comme nous l'avons vu, les situations jouent un rôle important dans ce développement. Pour bâtir ces situations, nous allons pouvoir nous appuyer sur les six composantes du contrôle que nous avons définies d'après une analyse de la littérature : *anticipation, vérification/validation, engagement réfléchi, discernement/choix éclairé, métaconnaissances et perception des erreurs/sensibilité à la contradiction/capacité de dépasser les contradictions*. Mettre les élèves en équipe autour de ces situations est une alternative intéressante, il est toutefois important de prendre en considération plusieurs aspects comme le choix des partenaires *(les élèves de la même équipe doivent pouvoir comprendre les propositions, les arguments de leurs partenaires)*, le choix de la tâche *(dans laquelle ils doivent pouvoir s'engager, sans avoir la solution)* et la durée de l'interaction *(qui doit être assez longue pour permettre des périodes de latence qui vont permettre d'assimiler les arguments des partenaires)*. Les interventions de l'enseignant sont aussi essentielles au développement d'une activité de contrôle chez les élèves. Dans ce sens, renvoyer la validation aux élèves (phase de validation et non d'évaluation) et la phase de bilan nous semble intéressante, que les élèves travaillent individuellement ou en équipe. En effet, amener les élèves à formuler leurs stratégies devant la classe à des fins de discussions et de validation peut favoriser une activité de contrôle. Nous n'optons pas pour un enseignement explicite des stratégies de contrôle mais plutôt pour un développement, une construction de ces dernières via les situations et les échanges entre pairs, et la mise en place de stratégies d'intervention en ce sens autour de l'exploitation des situations.

Pour atteindre les deux objectifs que nous nous sommes fixés, à savoir d'une part *caractériser les situations et les interventions élaborées conjointement en vue de développer une activité de contrôle chez les élèves* et, d'autre part, *caractériser l'activité de contrôle chez les élèves du secondaire au cours de ces situations*, nous allons expliciter dans le chapitre qui suit la méthodologie que nous avons privilégiée, capable de capter toute la dynamique de ce phénomène complexe.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Dans la problématique, nous avons soulevé un problème central en lien avec le peu de contrôle des élèves dans différentes activités mathématiques. Ce constat est partagé par les chercheurs en didactique des mathématiques et par plusieurs enseignants. En cherchant à rejoindre cette double préoccupation, notre objectif général tourne autour du développement d'une activité de contrôle chez les élèves, à travers l'élaboration de situations d'enseignement construites à cette fin entre enseignants et chercheurs. Cet éclairage conjoint amené par la didactique de recherche (cf. cadre théorique sur l'analyse du concept de contrôle, ses différentes composantes, les situations susceptibles de le développer) et la didactique praticienne (à travers les contributions susceptibles d'être amenés par les enseignants) permettront de documenter une intervention didactique visant le développement du contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves. L'atteinte de ces objectifs nous amène, comme nous allons le voir, vers l'approche méthodologique de la recherche collaborative.

3.1 L'orientation méthodologique générale : vers la recherche collaborative

L'approche méthodologique retenue s'inscrit dans un certain paradigme interprétatif qualitatif (Goetz et LeCompte, 1984; Denzin et Lincoln, 1994). En effet, dans notre recherche, nous sommes animée du désir de mieux comprendre l'intervention élaborée conjointement entre enseignants et chercheurs visant le développement du contrôle (quelles situations sont retenues? sur quelle base? Comment se caractérise l'exploitation de ces situations en classe), et dans le cas où les élèves acquièrent un contrôle, à éclairer le développement du contrôle par les élèves en lien avec les situations proposées. Bref, nous cherchons à mieux comprendre d'une part le processus de construction et d'exploitation en classe des situations élaborées conjointement, et d'autre part, le processus de développement du contrôle chez l'élève en lien avec ces situations. Cette compréhension d'un phénomène complexe, de l'intérieur même de la démarche, s'inscrit bien dans un paradigme qualitatif/interprétatif (Savoie-Zajc, 2000) :

> « La démarche souple et émergente de la recherche qualitative / interprétative permet au chercheur de comprendre, de l'intérieur, la nature et la complexité des interactions d'un environnement spécifique, et d'orienter sa collecte de données en tenant compte de la dynamique interactive du site de recherche. » (p.173-174)

Plus spécifiquement, à l'intérieur d'un tel paradigme, notre intérêt pour l'élaboration d'une intervention didactique autour du contrôle, cherchant à prendre en compte le double point de vue des enseignants et des chercheurs, nous oriente vers une recherche collaborative : nous sommes en effet intéressés par la contribution que les enseignants peuvent apporter à la construction de ces situations ainsi qu'à leur exploitation en classe, le peu de contrôle exercé par les élèves étant, comme nous l'avons vu, d'une part, une de leurs préoccupations, ils bénéficient donc à cet effet d'observations, de connaissances sur les élèves, sur ce qu'ils font, qui peuvent ici être mises à profit. Ils bénéficient d'autre part d'un savoir d'expérience développé dans l'action, in situ, qui peut là aussi s'avérer potentiellement riche dans l'élaboration de cette intervention. Les travaux récents, qui viennent éclairer les ressources structurantes mobilisées par les enseignants dans la construction de situations d'enseignement en mathématiques, montrent bien en effet l'apport possible d'un tel croisement entre didactique de recherche et didactique praticienne pour la mise au point d'interventions didactiques nouvelles (voir à ce sujet Bednarz, Poirier, Desgagné et Couture, 2001; Bednarz, 2009; Barry, 2009).

La recherche collaborative nous permet de considérer ces deux points de vue, du chercheur et du praticien, dans la construction des situations d'enseignement en nous attardant aux ressources mobilisées de part et d'autre.

Une collaboration entre les enseignants et les chercheurs est ainsi au cœur de notre projet, cherchant à rejoindre les préoccupations partagées entre le monde de la pratique et celui de la recherche, et visant à travailler sur l'élaboration d'une intervention puisant aux compétences de ces deux mondes. La recherche collaborative mise sur les compétences respectives du chercheur et du praticien par rapport au savoir à co-construire :

> « Dans son acceptation la plus répandue, le concept de recherche collaborative prend forme autour de l'idée de faire de la recherche « avec » plutôt que « sur » les enseignants (Lieberman, 1986). Cette formule toute simple en dit plus long qu'il ne paraît sur le concept lui-même et sur ce qui justifie son apparition dans le monde de la recherche en éducation. En effet, y est implicite une proposition de renouveler le rapport établi entre le chercheur et le praticien pour ce qui intéresse la recherche liée à la pratique enseignante. À l'enseignant considéré comme un objet d'investigation et « sur » la pratique sur qui on pose un regard distant et évaluatif, on oppose ici un enseignant considéré comme un partenaire de l'investigation « avec » qui on pose un regard complice et réflexif sur la pratique. » (Desgagné, Bednarz, Couture, Poirier et Lebuis, 2001, p.34)

Dans la conception de situations visant le développement d'un contrôle chez les élèves, nous avons donc cherché à prendre en compte à la fois le point de vue de la recherche en didactique, les connaissances dans le domaine (cf. chapitre 2) et le point de vue des praticiens, leur savoir d'expérience, leurs connaissances des difficultés des élèves, leurs stratégies, leur contexte particulier d'intervention, leurs routines d'interprétations et d'action, leurs contraintes, de manière à construire des situations non seulement fécondes mais qui rejoignent les préoccupations des enseignants. Ce choix méthodologique nous permet, à ce stade, de revisiter nos objectifs de recherche pour les préciser en prenant en compte l'implication des enseignants, et de formuler des questions de recherche.

3.2 Objectifs et questions de recherche

À la croisée de cette double préoccupation pour l'apport de la didactique de recherche et de la didactique praticienne, notre objet de recherche se définit autour de la construction conjointe (en collaboration avec des enseignants) de situations d'enseignement susceptibles de développer le contrôle chez les élèves. Dans cette conception, un autre élément nous semble important à investiguer, au-delà des situations construites, les stratégies d'enseignement mises en place en classe, qui peuvent contribuer, comme nous l'avons vu au point 2.3 du cadre théorique, au développement d'une activité de contrôle chez les élèves. Nous chercherons ainsi à documenter ces décisions prises autour des situations d'enseignement en classe telles les consignes, les modes de présentation de l'activité, la gestion du travail, les interactions, etc. Comme le précise Ngono (2007) :

> « Une partie visible des stratégies ayant une incidence sur les apprentissages, concerne les tâches proposées, les contenus mathématiques visés à travers ces tâches, <u>les formes de travail qui leur sont associées</u>, ainsi que <u>les échanges entre les élèves et les professeurs, ou ceux que les professeurs favorisent entre les élèves.</u> » (*C'est nous qui soulignons*)

Plusieurs chercheurs[41] (Milhaud, 1997-98; Ngono, 2007; Peltier-Barbier, 2007) soulignent l'importance de se pencher sur les stratégies d'enseignement mises en place en classe qui sont déterminantes dans l'évolution, la progression des connaissances chez les élèves, et, dans notre cas, dans l'acquisition du contrôle qu'exerce l'élève sur son activité mathématique. Milhaud (1997-98) a remarqué que, dans certains cas, les enseignants ne laissent pas le temps à l'élève de s'engager dans la tâche, ils décortiquent à sa place l'énoncé du problème, le simplifiant ou changeant la consigne :

> « Par exemple, dans certaines classes, le professeur après avoir donné un problème, explique comment le résoudre, avant même que les élèves n'aient compris de quoi il s'agissait, et se soient engagés dans sa résolution. » (p.64)

C'est le professeur « qui prend en charge une partie des transformations que devrait effectuer l'élève face à un problème » (Ngono, 2007). L'intervention en classe étant déterminante dans l'acquisition d'une activité de contrôle, nous allons chercher à éclairer les décisions d'action et les stratégies d'enseignement autour des situations élaborées.

Nous cherchons ainsi à cerner les situations élaborées conjointement et visant le développement du contrôle (comment se caractérisent ces situations? Sur quelle base

---

[41] Ces chercheurs s'intéressent à la pratique des enseignants, mais cette question déborde du concept de contrôle auquel nous nous intéressons.

sont-elles construites?), ainsi que ce qui se passe pendant l'intervention en classe autour de ces situations, ce qui peut favoriser le développement du contrôle chez les élèves (comment se caractérisent les stratégies d'intervention élaborées), et ce, en prenant en compte les savoirs des enseignants à ce sujet et les connaissances didactiques dans le domaine. Nous cherchons aussi à identifier le possible développement d'une activité de contrôle chez les élèves. Les deux objectifs et les questions de la recherche peuvent s'énoncer ainsi :

OBJECTIFS DE LA RECHERCHE :

- Cerner les situations élaborées conjointement et les stratégies d'intervention construites conjointement visant le développement d'une activité de contrôle chez les élèves du secondaire
- Mieux comprendre ce qu'il advient sur le plan du développement du contrôle chez les élèves du secondaire au cours de ces situations.

QUESTIONS DE RECHERCHE :

- Comment se caractérisent les situations élaborées conjointement en vue de développer un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves ?
- Comment se caractérisent les stratégies d'intervention mises en place en classe conjointement pour développer un tel contrôle chez les élèves ?
- Comment se manifeste l'activité de contrôle chez les élèves dans les situations élaborées ?

À ce stade de notre étude, il est important de décrire la façon dont nous allons opérationnaliser la recherche. Les processus de co-situation et de co-opération de la recherche collaborative vont permettre d'éclairer cette opérationnalisation.

3.3 Opérationnalisation de la recherche

La construction de situations mettant à contribution les connaissances didactiques du domaine et les savoirs de l'enseignant, nous renvoie, comme nous le précise Desgagné (1998) à une médiation de la part du chercheur (qui s'engage dans ce type de recherche) entre deux communautés, une communauté de recherche et une communauté de pratique, en vue de construire un savoir nouveau :

> « En ce sens, à la source de l'approche collaborative de recherche, avons-nous précisé, il y a cette attitude du chercheur à vouloir rapprocher, concilier, voire se co-constituer deux mondes, recherche et pratique, dans une sorte de démarche de négociation constante, à chaque étape de la recherche, entre les exigences, les préoccupations, les contraintes et les ressources propres à chacun d'eux. C'est cette visée de rapprochement et de conciliation qui nous a fait qualifier la démarche du chercheur de « médiatrice » entre le monde de la recherche universitaire et le monde de la pratique en milieu scolaire : médiation, avons-nous développé entre le « cadre de pratique » partant duquel le praticien va aborder ce qui fait l'objet de la recherche (le champ pratique qui est le sien : la classe, l'école,...) et le « cadre théorique » partant duquel le chercheur va l'aborder (le champ théorique qui est le sien : un certain objet de recherche dans un certain domaine du savoir en éducation). » (Desgagné, 1998, p.80).

Cette médiation autour d'un objet de recherche, le développement d'une activité de contrôle et les situations d'enseignement susceptibles d'y contribuer, renvoie les partenaires de la collaboration à un certain cadre de référence: ce contrôle de la part des élèves s'exprime souvent, comme nous l'avons vu précédemment, chez les enseignants en exercice à travers une référence à une attitude ou non de leur part à se vérifier, à s'engager de façon réfléchie dans une tâche et dans la capacité à choisir stratégiquement entre plusieurs possibilités[42], composantes que l'on retrouve aussi dans le cadre de référence [43] du chercheur, sous les termes d'*anticipation, vérification/validation, engagement réfléchi, discernement/choix éclairé*. Ces composantes communes constituent une entrée possible dans la phase de co-situation de la recherche sur laquelle nous reviendrons maintenant.

---

[42] Voir le point 1.3 de la problématique.
[43] Voir le point 2.3.2.1 du cadre théorique.

3.3.1 L'étape de co-situation de la recherche

L'un des enjeux de la recherche collaborative est de co-situer la recherche (ce qui signifie que chercheur et praticien vont co-définir l'objet d'investigation). Comme le précise Desgagné (1998), notre objet d'investigation doit se construire à l'intersection des préoccupations du milieu de pratique et de notre champ de recherche en didactique des mathématiques. Il y a donc une première étape de négociation avec le milieu de pratique autour de la conception et expérimentation en classe de situations visant le développement du contrôle chez les élèves.

- Une première co-situation du projet (par la chercheure) à des fins de présentation de celui-ci à des enseignants.

Les enseignants susceptibles de s'engager dans une telle recherche collaborative sont de toute évidence des enseignants qui sont touchés par la problématique du peu de contrôle chez leurs élèves (par le fait que ces derniers ne vérifient pas leurs réponses, qu'ils ne reviennent pas sur leur résultat), et qui sont intéressés à entrer dans une recherche de moyens à mettre en place pour pallier à cette difficulté. Travailler sur cette question nécessite aussi que les enseignants soient prêts à s'engager dans la co-construction de situations d'enseignement et qu'ils en perçoivent les retombées possibles pour eux.

Les enseignants soucieux de travailler conjointement avec la chercheure sur le développement d'une activité de contrôle chez les élèves, pourront partager avec celle-ci les résultats obtenus, ils auront à leur disposition à l'issue de la recherche une banque de situations (en quelque sorte mises à l'épreuve de la réalité de leur classe) intéressantes à proposer aux élèves, ils auront eu l'occasion in situ de constater ce qui se dégage des situations, et de cerner l'engagement des élèves, de voir leur progression éventuelle. Cette investigation les rejoint donc sous ces différents aspects dans leur pratique car elle est susceptible d'avoir des retombées concrètes pour celle-ci. Lors des rencontres préalables, ces différents aspects ont été mis en évidence dans la négociation.

- Un choix de travailler plus spécifiquement avec une enseignante volontaire

À ce stade, nous nous sommes demandés le nombre d'enseignants que nous pouvions engager dans une telle recherche. Pour des questions de faisabilité, nous nous sommes restreints à une négociation avec une enseignante qui s'est montrée intéressée par notre objet d'étude. Nous cherchons en effet à documenter de façon fine la co-construction des situations (par la chercheure et la praticienne) et le développement du contrôle chez les élèves en lien avec ces situations. Les nombreuses données qui sont rattachées à celle-ci (nous le verrons par la suite) nous ont conduit à poser ce choix.

Nadia, l'enseignante qui a participé à la recherche, était préoccupée par le peu de contrôle exercé par ses élèves en termes de vérification de la démarche, du résultat, ses observations proviennent de son expérience riche de cinq années de métier.

Que sait-on de cette enseignante? Nadia est une enseignante qui a été formée au baccalauréat en enseignement des mathématiques à l'UQAM, elle possède de plus une maîtrise en didactique des mathématiques. C'est dans l'implication de Nadia dans la formation didactique de futurs enseignants de mathématiques au secondaire (comme enseignante intervenant dans l'un des cours de didactique à l'université) que la chercheure a fait sa connaissance[44]. L'enseignante partage donc une certaine « culture » didactique avec la chercheure. De plus, Nadia est une enseignante impliquée dans son milieu de pratique, étant personne ressource à l'école pour l'implantation de la réforme scolaire (MELS, 2003, 2006) et ayant participé par le passé à titre d'animatrice aux ateliers du GRMS *(Groupe de responsables en mathématiques du secondaire).*

---

[44] Nadia est intervenue comme chargée de cours dans deux cours de didactique du BES (baccalauréat en enseignement du secondaire) en mathématiques à l'UQAM : *Didactique I et laboratoire* (première année, deuxième session) et *Raisonnement proportionnel et concepts associés* (deuxième année, première session).

- Un objet d'investigation défini à l'intersection des préoccupations de l'enseignante et de la chercheure

Nadia, avec qui nous avons travaillé en collaboration était enseignante. au moment de l'expérimentation, en secondaire 3. La négociation plus précise du projet dans ce cas a donc pris en compte le programme d'études en mathématiques à ce niveau pour cibler un contenu à propos duquel le travail conjoint avec l'enseignante se ferait. L'algèbre constituant un thème important, prenant une grande place dans le programme de secondaire 3[45], l'élaboration conjointe de l'intervention s'est centrée sur l'algèbre. Ce contenu constitue une préoccupation centrale pour elle comme praticienne comme nous le verrons par la suite[46].

Lors de cette co-situation, nous avons été amenées à préciser, d'une part, le contenu plus précis sur lequel s'est centrée l'élaboration conjointe des situations en lien avec le développement du contrôle et d'autre part les modalités de travail. Ces rencontres préalables ont fait l'objet de prises de notes systématiques de la chercheure, à l'intérieur du *Journal de bord* (nous reviendrons ultérieurement sur cet aspect). À travers ce projet, l'enseignante était intéressée à développer des situations intéressantes pour les élèves en algèbre en secondaire 3, elle ressentait en effet un malaise par rapport au fait de faire des activités sur ce sujet peu motivantes pour les élèves en regard de ce qu'elle fait ailleurs dans sa pratique (ce qu'elle explicitera dans le verbatim en parlant d'activités « plates », voir extrait ci-dessous). Elle cherche, nous dit-elle, à dépasser la seule technique comme par exemple le fait de montrer la double distributivité (juste en mettant des flèches de couleur) comme présenté ci-dessous :

---

[45] Dans les manuels scolaires les plus utilisés par les enseignants, l'algèbre occupe environ 47% du manuel.

[46] Notons par ailleurs que son travail de maîtrise portait sur l'algèbre et plus précisément sur le développement d'outils en lien avec les opérations sur les polynômes.

$$(a+b).(c+d) = a.c + a.d + b.c + b.d$$

Nadia : Mais il faut que moi *mon idée pourquoi je suis intéressée avec ton affaire c'est parce que je trouve ça plate. Tu sais quand tu enseignes l'algèbre là en secondaire 3 c'est des manipulations, additions, soustractions de polynômes puis tu sais il n'y a pas vraiment d'activités le fun à faire avec eux* c'est... voici ce que *c'est avec des flèches de couleur puis j'apprends la technique* puis... Puis *je ne suis pas bien là-dessus*, parce qu'avec plein d'affaires, je fais plein de belles activités puis ici *c'est plate, on fait de la drill puis c'est plate, alors je me suis dit ben est-ce qu'on peut trouver quelque chose...* (...) Ouais, là *j'ai des traits de couleur, c'est tout joli là mais... ça reste que c'est de la technique, c'est juste que je mets l'emballage plus beau là.* (8 novembre 2005, 87-95)

Cette préoccupation de l'enseignante amènera lors de la co-situation à travailler sur un contenu plus précis (pour dépasser la simple technique) en algèbre qui tourne essentiellement autour de deux thèmes en secondaire 3 : les exposants et les polynômes :

Exposants	**Polynômes**
- Notation exponentielle. - Lois des exposants : $a^0 = 1, \quad 0^n = 0, \quad 1^n = 1,$ $a^x.a^y = a^{x+y}, (ab)^n = a^n.b^n$, $a^{-n} = 1/a^n$, $a^x/a^y = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{x.y}$, $(a/b)^x = a^x/b^x$	- Addition et soustraction d'expressions algébriques. - Multiplication d'expressions algébriques (monôme x polynôme). La mise en évidence simple. - Multiplication de binômes. - Division d'expressions algébriques (polynôme ÷ monôme et polynôme ÷ binôme).

Tableau 3.3.1 Contenu mathématique sur les exposants et les polynômes en secondaire 3.

Un certain objet d'investigation co-situé se dessine donc autour de la construction de situations d'enseignement en algèbre, plus spécifiquement portant sur les exposants, les polynômes et les opérations sur ceux-ci, cherchant à dépasser la seule technique et à favoriser le développement du contrôle chez les élèves, un objet commun prenant en compte à la fois les préoccupations de l'enseignante et de la chercheure.

- *Une entente sur le mode de fonctionnement*

En ce qui concerne les modalités de travail, il a été convenu lors de la co-situation qu'une première version de situations allait être d'abord construite par la chercheure, ensuite envoyée à l'enseignante comme base de discussion pour finalement être retravaillée en commun lors d'une rencontre, comme nous le montre l'extrait suivant :

> Nadia : *Ce qu'on peut faire mettons c'est que tu fais une première version, tu peux me l'envoyer par courrier peut-être, là je peux faire une première lecture, puis après que j'ai fait une première lecture là... Envoie-le-moi, on fixe une date pour se rencontrer, je vais avoir eu le temps de le lire puis après quand on va se rencontrer ça va être efficace. Je vais avoir mes idées, je vais regarder, lire parce que là je ne peux pas vraiment discuter, je n'ai pas eu le temps de réfléchir comme il faut là.* (15 décembre 2005, 459-465)

Cette proposition de bâtir une première version des situations provenait au départ de la chercheure, qui, ayant enseigné au secondaire, se souvenait que les enseignants sont souvent débordés. Ne voulant pas trop augmenter la charge de travail de Nadia, je lui ai donc proposé de construire des situations qui peuvent favoriser le développement du contrôle chez les élèves, situations qui allaient servir de point de départ pour une discussion. Dans la conception des situations, il y a l'idée, comme nous l'avons vu, d'une co-construction mettant en jeu une contribution à la fois de la chercheure et de l'enseignante. Les situations proposées au départ par la chercheure comme base de discussion, et ensuite discutées avec l'enseignante, diffèrent ainsi d'un produit pédagogique déjà construit, qu'il ne resterait aux enseignants qu'à utiliser.

À ce stade, il fallait déterminer de façon plus précise les rencontres de travail conjointes. Nadia ayant été libérée les jours 9 pour travailler sur la nouvelle réforme, nous avons planifié de réserver une partie de cette journée pour nos rencontres, les autres étant décidées au fur et à mesure de l'avancée de l'expérimentation. L'aménagement plus précis de cet espace réflexif fait l'objet de l'étape de co-opération de la recherche collaborative, sur lequel nous reviendrons par la suite. D'autres aspects ont également été précisés lors de ces rencontres de co-situation, il en est ainsi par exemple du choix du groupe d'élèves.

- Le choix du groupe retenu pour l'expérimentation

L'expérimentation a eu lieu dans une polyvalente mixte de la rive sud où Nadia enseignait à deux groupes à l'international, un groupe régulier et un groupe de sports études. Pendant les deux rencontres de co-situation qui ont eu lieu le 8 novembre et le 15 décembre 2005, l'enseignante a précisé que l'expérimentation pouvait avoir lieu dans n'importe quel groupe, y compris dans ses groupes « forts » où les élèves selon elles s'engagent moins.

> C : toi l'expérimentation tu voudrais qu'on le fasse dans quel groupe? Lequel tu préfèrerais toi?
>
> Nadia : moi ça ne me dérange pas parce que… en fait, ils sont… <u>c'est sûr qu'ils ont de la misère à s'engager</u>, c'est sûr à peu près à n'importe quel niveau.
>
> C : même international?
>
> Nadia : <u>même les élèves forts, puis les élèves forts d'autant plus que ils s'engagent moins parce qu'ils ont peur d'écrire des affaires fausses, ils veulent toujours avoir tout bon</u>.
>
> C : ouais, d'accord.
>
> Nadia : <u>ils n'écrivent pas nécessairement… ils ne vont pas s'engager facilement à moins d'être sûrs</u> parce qu'ils vont dire je ne comprends rien, puis ils n'écrivent rien. Là il faut les convaincre d'écrire quelque chose « oui mais je ne serais pas bon » ou… (8 novembre 2005, 46-58)

Le choix de l'enseignante s'est porté finalement sur le groupe international, composé de trente élèves (la majorité d'entre eux étant ensemble depuis secondaire 1), des élèves qui discutent facilement, et pour lesquels on aura ainsi plus de facilité à documenter (sur le plan des données de recherche) le développement d'une activité de contrôle :

> Nadia : j'ai un groupe là, mon groupe 32, eux là ils sont très très agréables, ils embarquent dans n'importe quoi, ils discutent, 31 ben ils sont pas pires mais tu as comme 6 ou 7 élèves qui sont toujours « mais à quoi ça sert? » (15 décembre, 135-137)

Ce choix est confirmé à une autre reprise plus tard dans la phase de co-situation :

> C : oui donc on a le temps avant. Donc toi tu as deux groupes de PEI. Toi tu voudrais qu'on prenne lequel?
> Nadia : moi je te dis, le 32 là tu aurais plus de chances d'avoir des choses intéressantes, ils discutent, ils sont brillants… (15 décembre, 148-151)

Cette phase de co-situation a donc permis de préciser l'objet à investiguer au croisement des préoccupations de l'enseignante et de la chercheure, de se donner un mode de fonctionnement et des modalités globales. Ces rencontres ont aussi été l'occasion pour la chercheure de se sensibiliser au fonctionnement usuel de l'enseignante dans la classe, elles nous fournissent ainsi une première explicitation de sa pratique avec les élèves.

- Sur le mode de fonctionnement de l'enseignante/ sa didactique praticienne

Lors de ces rencontres, l'enseignante a abordé spontanément son mode de fonctionnement en classe, il ressort de ses propos (voir verbatim ci-dessous) qu'elle joue sur une variété d'approches avec les élèves, évitant une certaine routine de fonctionnement qui serait toujours la même. En arrière plan, l'idée d'intéresser les élèves guide ce choix :

> C : et comment tu fonctionnes en classe? Est-ce que tu corriges les devoirs au début, est-ce qu'il y a une certaine routine ou…?
> Nadia : non, ça dépend. Moi *je fais tout ce qu'il ne faut pas faire pour une gestion de classe idéale là. (...) Ça change des fois je vais corriger le devoir, des fois je vais commencer je mets un problème « vous me*

faîtes ça », là ils sont là « ah, ok. » Là, ils essaient quelque chose, bon. (...) Des fois ils ont des notes de cours au début, des fois ils ont des notes de cours à la fin, des fois ils n'ont pas de notes de cours, ça dépend là.

C : je me disais que tu faisais peut-être les choses très structurées, tu sais, il y a des profs, correction du devoir...on corrige les exercices.

Nadia : non, *c'est bien trop plate, il ne faut pas qu'ils s'habituent. Il ne faut pas qu'ils s'habituent, ils ont le temps de dormir. Comme ça, ils ne dorment pas dans mon cours. (...) Ils ne peuvent pas m'accuser que c'est plate dans mes cours.* (8 novembre, 406-423)

Ainsi pour Nadia, il est important de varier les stratégies d'enseignement. Ce mode de fonctionnement est explicité davantage dans l'extrait ci-dessous, où ressort l'importance qu'occupe le fait de questionner les élèves dans sa pratique, et le fait que les élèves doivent y être actifs (travailler):

Nadia : parce que du monde, il y a une enseignante, elle ne fait que des projets, des travaux d'équipes en coopération tout le temps. Mais moi je ne peux pas non plus faire juste ça là. Tu sais, moi là, moi *ça me prend un balancement, tu sais, oui des fois je vais remplir des tableaux puis ça va être magistral, oui ça l'arrive. Mais mon magistral ce n'est pas un magistral heu... tu sais je pose des questions aux élèves puis... (...) j'essaie de ne pas parler plus de 15 minutes par cours pour qu'eux autres ils travaillent pas moi. Moi je le sais quoi faire, ce n'est pas moi qui faut qui fasse quelque chose là.* (8 novembre 2005, 477-482)

Le travail en équipe est très présent dans sa classe : Nadia fait travailler les élèves en équipe de deux sur des projets, des problèmes...les discussions entre les élèves sont souvent bruyantes, c'est la raison pour laquelle l'enseignante a demandé à ce que son local soit situé dans un coin de l'école pour ne pas déranger ses collègues. Nadia se sent très à l'aise avec ce mode de fonctionnement, n'étant nullement dérangée par le bruit :

Nadia : C : tes élèves, est-ce qu'ils sont toujours assis à la même place?

Nadia : oui, mais ben je te dis oui mais en fait ils changent. Ils sont en équipe de 2, ils sont assis 2 par 2.

C : ok, tu les fais travailler en équipe?

Nadia : *tout le temps. Quand j'explique il faut qu'ils se taisent par exemple, mais après ça quand je leur donne des documents à faire ou des* *exercices ou des projets ou des... des trucs, ils peuvent parler tout le temps.* (8 novembre 2005, 394-400)

(plus loin) oui, je suis dans un recoin, mais *c'est moi qui ai demandé le recoin parce que... parce qu'ils travaillent beaucoup en projet, tout ça et ça dérange les profs autour fait que... puis moi je n'ai pas de limites pour dire « parlez moins fort. »* Tu sais, j'ai l'impression que quand je fais toujours « chut, chut, chut » tout le long, ça m'énerve puis moi j'ai une grosse voix quand je parle, fait que ça dérangeait les profs, puis je suis bien dans ce local là. (15 décembre 2005, 829-834)

Elle laisse aux élèves le choix dans la composition des équipes :

C : ok, et là ils sont à deux. C'est eux qui ont décidé d'être à deux comme ça?
Nadia : oui.
C : si un jour ils veulent arriver et ils veulent changer, ils changent de place?
Nadia fait oui avec la tête. (8 novembre 2005, 400-405).

L'enseignante a l'habitude aussi de récupérer les productions des élèves écrites comme point de départ pour une discussion en grand groupe, ce qui est très apprécié par les élèves :

Nadia : *quand je leur ai fait faire les graphiques, je passais des acétates et quand je voyais quelque chose d'intéressant je leur donnais un bout d'acétate comme ça, puis là ils disaient « madame, prenez le mien, prenez le mien! » Ils veulent être en vedette là et tout, ils sont vraiment drôles.* (15 décembre 2005, 504-507)

Enfin, comme le montre l'extrait suivant, cette enseignante prépare ses propres documents d'exercices :

Nadia : Mais je n'ai pas de... je n'utilise pas le manuel.
C : ok, c'est quel manuel d'habitude?
Nadia : Maths et la vie. Là ils l'ont pris, ils (les élèves) l'ont amené au premier cours et là je leur ai dit « vous le redescendez tous en bas, on ne va pas le voir de l'année. » *Moi, je leur donne mes documents d'exercices que je fais moi-même.* (8 novembre 2005, 74-79)

Ces premières rencontres ont donc permis de mettre en évidence un certain mode de fonctionnement usuel de l'enseignante, sur lequel va pouvoir prendre appui l'intervention construite conjointement en classe.

3.3.2 L'étape de co-opération

La recherche collaborative n'exige pas que les praticiens se prêtent à des tâches liées à la réalisation de la recherche, au sens formel du terme ; ce qu'elle exige, c'est leur participation de co-constructeurs, c'est-à-dire leur engagement à explorer un aspect de leur pratique et à apporter leur compréhension en contexte du phénomène exploré. Au cœur du modèle collaboratif, une activité réflexive « dans laquelle praticiens et chercheurs sont amenés à interagir et à explorer ensemble un aspect de la pratique d'un intérêt commun » (Desgagné et al., 2001, p.37) est mise en place :

> « Pour permettre cette prise en compte des praticiens, la démarche collaborative va chercher à installer une zone de rencontre entre enseignants et chercheurs autour de ces situations d'enseignement, dans une certaine dialectique entre intervention en classe et réflexion sur l'action, de telle sorte qu'une série d'argumentations s'élabore autour des situations. » (Bednarz, Desgagné, Diallo et Poirier, 2001, p.181)

Cette activité réflexive a constitué le pivot de la démarche qui a été mise en place avec l'enseignante pour la co-construction de situations visant le développement du contrôle chez les élèves. Elle a rendu possible l'explicitation des situations, de leurs modifications, des contributions du chercheur et de l'enseignante à cette construction (elle constitue en ce sens une source importante de données de recherche).

> « En fait, notre modèle propose l'aménagement d'un « espace réflexif », entendu comme un espace discursif où chercheurs et praticiens vont interagir à propos et à l'appui d'un aspect de la pratique qui est l'objet de questionnement. Dans cet « espace réflexif », le chercheur jouera un rôle important d'élaboration, d'encadrement et de facilitation, faisant en sorte que la « voix » de l'enseignant soit interpellée. » (Desgagné, 2001, p.54-55)

Cette activité réflexive a pris forme à travers des rencontres régulières entre la chercheure et l'enseignante alternant le travail de construction des situations, dans lequel un souci de prendre en compte les difficultés des élèves est présent, ainsi qu'un retour sur les situations expérimentées en classe. Ce retour a permis un retour réflexif sur l'action, autour des stratégies d'intervention mises en place en classe, et autour de ce qui se passe chez les élèves au cours de ces situations. Ce retour sur l'expérience en classe servait de point de départ à une nouvelle élaboration de situations.

Six rencontres de co-opération d'une durée variable allant d'une demi-heure à deux heures et demie ont eu lieu entre l'enseignante et la chercheure, étalées tout le long de l'expérimentation (cf. tableau 3.3.2). Celles-ci étaient par ailleurs entrecoupées de séances d'expérimentation en classe. Cette dernière a pris place du 8 au 16 mars 2006 et du 2 mai au 7 juin 2006[47] pour un total de quinze périodes de 75 minutes chacune. Avant l'expérimentation, Nadia avait travaillé quelques unes des propriétés des exposants comme $a^x.a^y = a^{x+y}$ et $(a^x)^y = a^{x.y}$. L'enseignante avait également demandé aux élèves de calculer les valeurs numériques d'expressions algébriques avec des exposants. En ce qui concerne les polynômes, les élèves savaient additionner et soustraire des polynômes, résoudre des équations avec des fractions et réduire des expressions algébriques. Sept périodes de notre expérimentation en classe ont porté sur les exposants, nous sommes revenues sur le sens de la notation exponentielle (nous verrons par la suite les raisons d'un tel choix) et nous nous sommes attardée sur les autres propriétés des exposants, comme la division $a^x/a^y = a^{x-y}$ et les exposants négatifs $a^{-n} = 1/a^n$. Notre intervention a également porté pendant quatre périodes sur la multiplication et la division d'expressions algébriques et une période de temps a été réservée à la résolution d'équations. Un examen formatif[48] et un examen de pratique[49] ont également eu lieu pendant l'expérimentation.

---

[47] Nadia recevait une stagiaire pendant cinq semaines, son stage débutait le 20 mars et les élèves partaient en voyage à Washington pendant une semaine le 18 avril. C'est la raison pour laquelle l'expérimentation a été arrêtée à la mi-mars et a repris au mois de mai.

[48] L'examen formatif portait sur les exposants et la multiplication et division de polynômes et il a eu lieu le mardi 30 mai.

[49] Les élèves ont fait un examen de pratique le vendredi 2 juin. Il s'agissait de l'examen du ministère de 1999.

Février 2006				
Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
		1	2	3
6	7	8	9 ***Rencontre co-opération***	10
13	14	15	16	17
20	21	22	23	24
27	28 ***Rencontre co-opération***			

Mars 2006 (Travail sur les exposants)				
Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
6 ***Rencontre co-opération***	7	8 Expérimentation en classe sur les exposants : Notation exponentielle	9	10
13	14	15 Expérimentation en classe sur les Exposants : Notation exponentielle	16 Expérimentation en classe : Lois des exposants	17

Avril 2006 (Travail sur les exposants/suite)				
Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
24	25	26	27	28 ***Rencontre co-opération***

Mai 2006 (Travail sur les exposants-fin/début du travail sur polynômes)				
Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
1	2 Expérimentation en classe : Lois des exposants	3 Expérimentation en classe : Lois des exposants	4	5 ***Rencontre co-opération***
8 Expérimentation en classe : Lois des exposants	9	10 Expérimentation en classe : Lois des exposants	11 Expérimentation en classe : Lois des exposants / Polynômes (monôme x binôme)	12

15	16 Correction du devoir sur les exposants	17	18	19 ***Rencontre co-opération***
22	23	24 Expérimentation en classe : Polynômes (binôme x binôme)	25 Expérimentation en classe : Polynômes (binôme x binôme)	26
29 Expérimentation en classe : Polynômes (binôme x binôme)	30 Examen formatif			

Juin				
Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
			1	2 Examen de pratique
5	6 Expérimentation en classe : Équations	7	8	9

Tableau 3.3.2 Calendrier des rencontres réflexives entre l'enseignante et la chercheure et répartition dans le temps du contenu mathématique expérimenté en classe.

- *Rôle de la chercheure durant l'expérimentation*

Cette question a été abordée avec Nadia dès la première rencontre, le 8 novembre 2005, plusieurs possibilités s'offrant ici à nous : rester extérieure à la classe, le travail se centrant sur les rencontres réflexives (conception des situations, retour sur leur réalisation en classe); observer les situations expérimentées sans intervenir dans la gestion de celles-ci en classe; co-animer les séances en classe avec l'enseignante. L'enseignante a reçu favorablement la proposition de co-animer les séances, voyant la présence de la chercheure-enseignante comme une aide pour elle auprès des élèves. Les raisons qui ont motivées ce choix prennent en compte à la fois les élèves et les situations, les stratégies d'intervention élaborées.

Du point de vue des élèves : par notre rôle de co-intervenante, une relation de confiance, de collaboration était explicite entre la chercheure et l'enseignante, qui a permis une explicitation de l'intérieur de la classe des actions des élèves, sans qu'ils ne se sentent contraints par « la personne qui vient de l'extérieur ». Ces explicitations ont été cruciales car elles ont permis de mieux comprendre ce qui se passe du côté des élèves, de mieux comprendre comment se développe le contrôle en lien avec les situations proposées et les interventions en classe.

Du point de vue des situations, des stratégies d'intervention élaborées : travaillant conjointement sur l'élaboration des situations, partager leur réalisation en classe a aidé la chercheure et l'enseignante à développer une certaine complicité, indispensable au bon déroulement de la recherche collaborative, et à cerner le potentiel et les limites de ces situations de l'intérieur de la démarche.

Dans les faits, la chercheure a pris ce rôle de co-intervenante dans la première partie de l'expérimentation (les 3 premières séances), est intervenue à quelques reprises dans plusieurs autres séances (interventions ponctuelles) et a pris en charge la classe pendant une séance où l'enseignante était absente.

Cette co-intervention nous a permis d'observer de l'intérieur ce qui se passe dans la classe, de vivre les actions, de participer à la mise en place des stratégies d'intervention. Nous avons ainsi pu documenter les stratégies développées avec l'enseignante de l'intérieur. Dans l'action, il y a eu des prises de décision provenant de la chercheure et/ou de l'enseignante. La zone réflexive (Desgagné, 1998; Desgagné, 2001; Bednarz, Poirier, Desgagné et Couture, 2001) que nous avions aménagée nous a permis de revenir sur ce qui a motivé ces prises de décision, donnant accès à un regard croisé de l'enseignante et de la chercheure sur l'action vécue en classe, sur les stratégies mises en place, ce qui a apporté une richesse à l'analyse de notre objet d'investigation.

La prise de contact avec les élèves, la classe s'est fait progressivement. Pour cela, nous avons assisté, avant l'expérimentation et après la phase préalable de négociation avec l'enseignante (voir l'étape de co-situation), à trois séances en classe en tant qu'observatrice. Ces séances ont eu lieu le 30 janvier, le 1 et 7 février 2006[50]. Pour que les élèves s'habituent à la présence de la chercheure, celle-ci a circulé dans la classe et a saisi les occasions de poser des questions individuellement aux élèves sur leurs productions. Ceci a supposé une présence prolongée à l'école qui a rendu possible une description contextuelle du site et une meilleure familiarisation avec celui-ci.

Parallèlement au travail de conception et de réalisation des situations en classe, nous avons mis en place des outils de collecte de données permettant de documenter l'analyse des situations et stratégies d'intervention élaborées (objectif 1/questions 1 et 2) ainsi que le développement graduel du contrôle chez les élèves au cours des situations (objectif 2/question 3).

3.4 Différentes sources de données

3.4.1 Les sources de données pour l'analyse des situations, des stratégies d'intervention élaborées

Dans notre premier objectif qui est de *cerner les situations élaborées et les stratégies d'intervention élaborées conjointement,* les enregistrements des séances de co-construction avec l'enseignante et les vidéos des séances en classe constituent ici l'instrument de collecte central. Quelques entrevues informelles qui ont eu lieu à la fin de séances en classe viennent éclairer, de façon complémentaire, l'intervention en classe.

---

[50] Le 30 janvier et le 1[er] février 2005 correspondent à la passation du questionnaire comme nous allons le voir plus loin.

Les enregistrements audio des rencontres régulières de travail avec l'enseignante, autour de l'élaboration des situations : chaque rencontre avec l'enseignante a été enregistrée, des retranscriptions des verbatims ont été produites, permettant de retracer comment se sont co-construites les situations, sur quelles bases ont été pensées ces dernières, leurs modifications, les choix retenus, les stratégies d'intervention élaborées en lien avec ces situations (scénario anticipé).

Les vidéos des séances en classe : des retranscriptions des séances en classe ont également été menées, permettant de retracer les situations et stratégies d'intervention élaborées en classe.

Rencontres réflexives informelles : nous avons également mené des rencontres informelles (à l'occasion) à la fin des séances en classe, ces dernières cherchant à expliciter des décisions prises dans l'action, des observations. Connaissant les conditions dans les écoles, le peu de disponibilité des enseignants après les cours, ces rencontres nous ont tout d'abord semblé difficiles à effectuer. Cependant, une des caractéristiques de ces dernières est qu'elles ont été de courte durée, elles n'ont pas dépassé 5 à 10 minutes, et elles se sont effectuées pendant que l'enseignante et la chercheure rangeaient leurs affaires après le cours. Ces dernières n'ont pas été enregistrées, ce qui s'est passé a été consigné dans le journal de bord (dont nous parlerons à la section 3.4.3) pour en avoir une trace pour l'analyse. Ces rencontres informelles ont été l'occasion d'une explicitation de la part de l'enseignante et de la chercheure des actions vécues en classe, des stratégies d'intervention, d'une réflexion sur les actions de certains élèves documentant le développement possible du contrôle. Les différentes sources de données se résument ainsi :

Élaboration conjointe des situations et des stratégies d'intervention (objectif 1)
Enregistrements des rencontres ↓ complétés par : - Entrevues informelles (en classe en lien avec les séances, ce qui s'est passé). - Journal de bord

Tableau 3.4.1 Différentes sources de données en lien avec l'analyse des situations, des stratégies d'intervention, les choix faits....

3.4.2 Les différentes sources de données en lien avec le développement du contrôle chez les élèves

L'analyse du développement du contrôle chez les élèves du secondaire au cours de ces situations va puiser à différentes sources de données: les productions écrites des élèves recueillies durant l'expérimentation, et les vidéos des séances en classe, ainsi que des questionnaires écrits et des entrevues individuelles menées avec quelques élèves. Les vidéos en classe (et la retranscription de ces séances) et les productions des élèves permettent de documenter ce qui se passe au cours des situations (indicateurs de contrôle de la part des élèves en lien avec les situations).

Productions des élèves : pour documenter le développement du contrôle chez les élèves, nous avons recueilli leurs productions, leurs traces écrites pendant les séances en classe, en lien avec les situations traitées. Pour faciliter la cueillette des données, les situations ont été données aux élèves sur des feuilles qui ont été récupérées par la chercheure à la fin de chaque séance.

Vidéos des séances en classe : nous avons filmé toutes les séances en classe qui touchent à des activités ciblées autour des différentes composantes de l'algèbre expérimentées. Ces vidéos nous ont permis de retracer les éléments de contrôle à travers les interactions entre les enseignantes et les élèves et/ou les interactions entre les élèves (par exemple, quand un élève passe au tableau pour expliquer sa solution, et que les autres élèves réagissent, les éléments de justification qu'il met de l'avant, l'argument qu'il oppose...etc).

De manière complémentaire, des questionnaires écrits (passés avant et après l'expérimentation) ont été élaborés, complétés par des entrevues individuelles avec quelques élèves, cherchant au delà des situations et du contenu expérimenté à voir le transfert possible de ce travail sur le développement du contrôle en algèbre chez les élèves.

Questionnaires écrits auprès des élèves : un questionnaire écrit a été administré à tous les élèves de la classe à deux moments de la recherche : avant l'intervention (30 janvier et 1er février 2006) et après l'intervention (7 et 9 juin 2006). Ce questionnaire[51] a comme double objectif de cerner, d'une part, le contrôle exercé par les élèves avant toute intervention, et de dégager, d'autre part, l'évolution des élèves à l'égard du contrôle. Il s'agit du même questionnaire pour les deux moments.

Description du questionnaire/ le cadre de référence qui a guidé sa construction

Le choix des problèmes retenus[52] s'appuie, d'une part, sur les composantes du contrôle provenant de notre cadre théorique : l'anticipation ; la vérification et le retour sur la tâche ; l'engagement réfléchi ; le discernement/choix éclairé de stratégies; la perception des erreurs/la sensibilité à la contradiction/le dépassement de la contradiction; et le recours à des métaconnaissances. D'autre part, nous avons eu recours au contenu mathématique sur lequel va s'exercer cette activité de contrôle, l'algèbre de secondaire 3 avec ses différentes composantes : sens de l'écriture algébrique, résolution d'équations,

---

[51] Une description plus précise du questionnaire sera donnée au point 3.4.4.1.
[52] Les problèmes sont présentés à l'appendice A.

résolution de problèmes et généralisation à des fins de preuve. Nous pouvons remarquer que certaines situations font travailler plus d'une composante du contrôle. Une des composantes du contrôle, l'anticipation, ne se retrouve pas dans ce questionnaire. La présence de cette action ne pouvant être constatée par des traces écrites, elle sera traitée en entrevue. Le tableau à double entrée présenté à la page qui suit permet une vue d'ensemble du classement des situations retenues selon la composante du contrôle qu'elles visent à faire travailler, et la composante algébrique qu'elles rejoignent. Soulignons également que la composante de l'algèbre, généralisation à des fins de preuve, n'est représentée que par une seule situation, ce qui s'explique par le fait que cette composante occupe une place moins importante dans le programme de secondaire 3[53].

[53] Nous avons procédé à une analyse de chacune de ces situations dans le but d'en montrer la pertinence quant aux composantes du contrôle travaillées. Cette analyse se retrouve à l'appendice B.

Tableau 3.4.2a Classement des problèmes suivant la dimension du contrôle et la composante de l'algèbre travaillées.

Composantes de l'algèbre / Dimensions du contrôle	Sens de l'écriture algébrique	Résolution d'équations	Résolution de problèmes	Généralisation à des fins de preuve
Anticipation de la nature du résultat, de l'ordre de grandeur,…				
Vérification, retour sur la démarche, sur les calculs, sur la réponse,…)			**Pb 1** (interprétation de la réponse, retour au problème) **Pb 2 et 3** (retour au problème)	**Pb 12** (contrôle exercé sur l'écriture à des fins de validation)
Engagement réfléchi	**Pb 4a** (contrôle exercé sur l'écriture : sens du nombre, raisonnement) **Pb 9** (engagement réfléchi dans l'interprétation de 0x = 0)	**Pb 8** (engagement réfléchi dans la solution) **Pb 10** (engagement réfléchi dans l'interprétation de 20=4)	**Pb 3** (engagement réfléchi des données : prise en compte de la contrainte sur 2 items)	
Discernement, choix éclairé (de stratégies plus efficaces, d'une écriture,…)		**Pb 11** (choix éclairé d'une stratégie de résolution plus efficace)	**Pb 2** (choix éclairé de l'inconnue, en lien avec l'engagement dans le problème)	
Perception des erreurs, et sensibilité à la contradiction	**Pb 4b** (interprétation de l'erreur par l'élève)	**Pb 6** (erreurs qui portent sur la compréhension de la manipulation algébrique) **Pb 7** (erreurs sur la multiplication de décimaux)	**Pb 5** (sensibilité à la contradiction dans les données du problème)	
Capacité de dépasser la contradiction		Pb 7	Pb 5	
Recours à des métaconnaissances	**Pb 13** (choix éclairé d'une écriture en fonction de la tâche)			

Passation du questionnaire

Une pré-expérimentation du questionnaire a été réalisée dans une autre classe du même niveau dans une autre école, pour nous assurer de la compréhension par les élèves des situations et pour voir si les situations posées allaient bien chercher les composantes du contrôle ciblées *a priori*.

Le questionnaire a été passé en deux temps[54]. Il a été demandé aux élèves de remplir le questionnaire individuellement, de ne pas effacer pour ne pas perdre la trace de leurs démarches[55].

Deux périodes, le 30 janvier et le 1er février 2006, ont été réservées pour la passation du questionnaire qui comptait treize questions.

Des données complémentaires non prévues

C'est dans le cadre de la passation du questionnaire qu'une première prise de contact avec les élèves a eu lieu. Le 1er février, l'enseignante ayant été sollicitée pour une rencontre au ministère dans le cadre de l'implantation du nouveau programme, j'ai eu l'occasion de prendre la classe en charge[56]. Dans cette période, les élèves ont finalisé le questionnaire et la plupart d'entre eux ont eu la possibilité de commencer le document de révisions en algèbre que Nadia avait prévu pour eux.

Ce document portait sur le contenu vu en algèbre par Nadia (voir appendice E). Celui-ci s'est avéré une source complémentaire (non prévue a priori) de données dans la mise en évidence de difficultés rencontrées par les élèves sur les exposants (celles-ci seront à la base de la construction de situations sur les exposants, nous reviendrons sur ceci dans l'analyse au chapitre 4).

---

[54] La calculatricce était permise dans certains cas, l'objectif n'étant pas de vérifier la capacité des élèves à effectuer des calculs.

[55] Cependant, nous avons remarqué que certains élèves ne suivaient pas cette consigne et effaçaient leur démarche. Nadia explique ceci par un souci de performance de ces élèves, une peur de l'erreur et de l'échec.

[56] En cas d'absence d'un enseignant, l'école prévoit un surveillant. Nous étions ainsi deux à prendre la relève de Nadia, mais le surveillant n'étant pas un professeur de mathématiques, les questions des élèves m'étaient surtout destinées (les questions tournaient autour du questionnaire et du document de révisions préparé par Nadia comme nous allons le voir).

Entrevues individuelles auprès des élèves : nous avons conduit par ailleurs une entrevue auprès de quelques élèves, en complément à l'administration du questionnaire, avant et après l'intervention. Dix élèves ont ainsi été vus en entrevue (du 9 au 23 février 2006, et du 9 au 14 juin 2006). L'entrevue nous a permis d'une part, de revenir sur certaines situations que les élèves avaient résolues dans le questionnaire écrit pour mieux comprendre leurs actions et leurs réflexions, le processus de résolution par lequel ils sont passés. En effet, les traces laissées par les élèves ne nous permettaient pas, dans certains cas, de bien comprendre le raisonnement utilisé. Un protocole d'entrevue a été bâti pour chacune de ces situations. D'autre part, le questionnaire écrit présentant des limites en regard de certaines composantes du contrôle, telle l'anticipation, de nouvelles tâches y ont été proposées.

L'entrevue choisie s'inspire du modèle de l'entrevue clinique développée par Piaget, et reprise par un bon nombre de didacticiens (Nantais, 1992; Confrey, 1994; Brun et Conne, 1990). Elle vise avant tout une compréhension du processus de pensée de l'élève. Cette entrevue est une entrevue de type semi-structurée, dans le sens où le protocole est construit à partir de certaines situations précises, mais laissant place toutefois à une certaine liberté et adaptation des questions en fonction du discours, du raisonnement de l'élève.

Le protocole d'entrevue avec les élèves

L'entrevue, nous l'avons vu précédemment, revient sur des situations issues du questionnaire (nous en avons choisi quatre, que nous allons décrire) et comprend une situation nouvelle, qui vise pour sa part à tenter de comprendre le contrôle qu'exerce l'élève en termes d'anticipation.

La situation permettant de vérifier la composante anticipation : la situation choisie est la suivante :

Pour chacun de produits suivants, on te propose plusieurs résultats. Explique lesquels sont faux et pourquoi.			
21×98	a) 20 518	b) 2058	c) 2 085 258
803×47	a) 73 741 371	b) 37 741	c) 36 621

N'ayant ni le droit d'utiliser la calculatrice ni de poser la multiplication, les élèves sont ici forcés d'anticiper l'ordre de grandeur du résultat.

Les situations reprises du test écrit : nous avons choisi deux situations du questionnaire qui permettent de déceler la sensibilité à la contradiction de l'élève et sa capacité à dépasser la contradiction dans deux composantes de l'algèbre différentes, la résolution de problèmes et la résolution d'équations. Pour la résolution de problèmes, il s'agit du cinquième problème celui du café croissants qui est un problème à données contradictoires et pour la résolution d'équations, le septième problème dont nous avons parlé dans le point précédent :

Résous l'équation suivante :
$0,8x - 0,2(0,4x + 6) = 6$
Vérifie que $x = 10$ est solution de cette équation.

La sensibilité et le dépassement de la contradiction sont difficiles à percevoir d'après les traces écrites des élèves, l'entrevue vise ici à avoir plus d'informations sur ces composantes du contrôle et à comprendre, dans le cas où l'élève dépasse la contradiction, comment il y arrive et dans le cas contraire à comprendre ce qui constitue un obstacle à un tel dépassement.

Les deux autres situations du questionnaire reviennent sur l'engagement réfléchi[57] de l'élève et son accès à des métaconnaissances[58]. Nous allons conclure en présentant le protocole d'entrevue plus précis sur une des situations prévues, afin d'apporter plus de clarté à nos propos. Le protocole d'entrevue utilisé pour les trois autres situations se trouve à l'appendice C.

[57] Il s'agit du neuvième problème du questionnaire (voir appendice A).
[58] Les métaconnaissances sont travaillées dans le treizième problème du questionnaire (voir appendice A).

La situation de départ (reprise du questionnaire écrit, amené en entrevue avec la solution de l'élève). *Résous l'équation suivante :* $0,8x - 0,2(0,4x + 6) = 6$ *Vérifie que x = 10 est solution de cette équation.*	**Objectifs sous-jacents**
1) Je veux être sûre de bien comprendre ce que tu as fait dans cette question. Peux-tu m'expliquer ce que tu as fait?	Retour sur la résolution de l'élève au questionnaire écrit.
2) Ok, quelle est la réponse pour toi à la question qui est posée?	Pour mieux comprendre son processus de pensée.
3) Peux-tu maintenant vérifier que pour x = 10, l'égalité $0,8x-0,2(0,4x+6)=6$ est vérifiée?	Observer si l'élève, suite à cette question, retourne ou non sur sa réponse.
→ Si l'élève retourne à sa réponse précédente suite à cette question. Qu'est-ce qui t'embête? Que pourrais-tu faire?	Est-il sensible à la contradiction?
→ si l'élève ne retourne pas à sa réponse. Est-ce que 10 et le nombre (donné précédemment par l'élève) sont des solutions de l'équation? Qu'en penses-tu?	Est-il à même de dépasser cette contradiction? Est-il sensible à la contradiction, suite à cette intervention?

Tableau 3.4.2b Exemple d'un protocole d'entrevue utilisé dans l'expérimentation.

Choix des élèves pour l'entrevue

Pour des raisons de faisabilité[59] nous nous sommes restreints à des entrevues individuelles avec quelques élèves d'une durée de 20 à 30 minutes. Les élèves ont été sélectionnés sur la base de ce qu'ils avaient produit dans le questionnaire écrit.

Vu que nous cherchions à mieux comprendre le possible développement du contrôle, nous avons ciblé des élèves qui exerçaient peu de contrôle au début de l'expérimentation. L'entrevue ayant lieu au début et à la fin de l'expérimentation,

[59] Chaque entrevue obligeait à sortir un élève de ses cours (pas nécessairement de mathématiques) et il était peu réaliste en ce sens de vouloir prendre les 30 élèves de la classe.

nous allions pouvoir ainsi retracer ce possible développement. Comme nous l'avons vu, quatre situations du questionnaire ont été ciblées plus spécifiquement pour choisir ceux que nous allions voir en entrevue. Nous avons proposé à seize élèves de passer l'entrevue, dix d'entre eux ont été volontaires, acceptant d'être filmés. À la fin de l'expérimentation, trois d'entre eux se sont toutefois désistés, prétextant un manque de temps dû à la préparation des examens du ministère de fin d'année. Dans notre analyse, nous allons ainsi prendre en compte les entrevues de certains de ces élèves..

Le tableau ci-dessous résume l'enchâssement des différentes sources de données en regard du développement du contrôle chez les élèves.

Avant l'intervention	**Pendant l'intervention**	**Après l'intervention**
Questionnaires écrits ↓ complétés par Entrevues individuelles	Productions des élèves Vidéos en classe	Questionnaires écrits ↓ complétés par Entrevues individuelles

Tableau 3.4.2c Différentes sources de données en lien avec le développement du contrôle

Le journal de bord apporte un regard complémentaire en lien avec les deux objectifs de la recherche situations, interventions élaborées, indicateurs de contrôle chez les élèves...)

3.4.3 Instrument complémentaire

Le journal de bord de la chercheure : le journal de bord « est une sorte de mémoire vive de la recherche » (Savoie-Zajc, 2000, p.195). J'y ai noté les événements relatifs aux rencontres réflexives avec l'enseignante lors de la phase de co-situation et de co-opération, du travail en classe, mes impressions et réflexions en cours de route, afin d'en garder une trace et pouvoir y revenir dans l'analyse. Avant l'expérimentation, je voulais consigner les informations jugées pertinentes selon le modèle de Gold décrit dans Savoie-Zajc, (2000) : *les notes de site* qui présentent ce qui s'est passé sur le terrain; *les notes théoriques* consignant les conceptualisations suscitées par les propos ou faits consignés, de manière à voir apparaître des éléments conceptuels qu'on n'avait pas vu a priori dans notre cadre théorique; *les notes méthodologiques* présentant les composantes méthodologiques (modifications, ajustements,...) affectant le déroulement de la recherche; finalement, *les notes personnelles* consignant nos réflexions personnelles sur le travail avec l'enseignante ou sur les observations et les interactions en classe.

Dans le feu de l'action, je n'ai pas réussi à garder une telle organisation, les notes de site, théoriques, méthodologiques et personnelles se retrouvant pèle mêle consignées dans mon journal de bord. Cet instrument nous a permis par la suite de « retrouver la dynamique du terrain et de reconstituer les atmosphères qui ont prévalu pendant la recherche » (p.196). Les données qu'il a produites ont été utilisées, de manière complémentaire, aux autres données recueillies. Cet instrument de collecte de données a été très précieux au moment de l'analyse des données, il m'a permis de revivre les événements survenus lors de l'expérimentation.

3.5 Démarche d'analyse de recherche

Un premier choix de données

Nous avons fait le choix de centrer l'analyse des situations et interventions élaborées et du développement du contrôle au cours des situations en regard d'une des trois séquences élaborées et réalisées en collaboration avec l'enseignante, celle portant sur les exposants. Les raisons suivantes justifient ce choix, au delà de la masse importante de données recueillies qui ont exigé de la chercheure de faire un choix a posteriori : Cette séquence est celle qui a été expérimentée auprès des élèves pendant la plus grande durée de temps[60] (8 périodes de 75 minutes versus 5 périodes sur les polynômes et 1 période sur les équations) et elle a fait l'objet d'un plus grand nombre de rencontres de co-opération entre l'enseignante et la chercheure (5 rencontres versus 2 rencontres pour les deux autres parties). Nous avons produit les verbatims des 5 rencontres portant sur la planification sur les exposants ainsi que des 9 séances en classe qui s'échelonnent comme indiqué dans le tableau ci-dessous. Ces derniers forment le corpus central de données sur lequel s'est fait l'analyse.

Rencontres de co-opération *(avant expérimentation en classe)* portant sur la planification de la séquence globale	9 février 2006 (1 heure) 28 février 2006 (2h30) 6 mars (30 min)
Expérimentation en classe (3 périodes en classe pendant lesquelles la planification est mise à l'épreuve)	8 mars 2006 (75 min) 15 mars 2006 (75 min) 16 mars 2006 (75 min)
Rencontre de co-opération (Retour sur l'expérimentation et ajustements sur la planification)	28 avril (1h23)
Expérimentation en classe (Mise à l'épreuve de la planification avec les ajustements)	2 mai 2006 (75 min) 3 mai 2006 (75 min)
Rencontre de co-opération (Planification sur la fin des exposants et planification générale sur les polynômes)	5 mai 2006 (1h45)

[60] Comme nous l'avons vu dans notre cadre théorique, nous pensons que le contrôle se développe sur du long terme, d'où l'importance de nous attarder sur la première séquence. De plus, considérer les deux autres séquences dépasse le travail requis dans une thèse.

Expérimentation en classe (Mise à l'épreuve de la planification sur les exposants et examen formatif)	8 mai 2006 (75 min) 10 mai 2006 (75 min) 11 mai 2006 (75 min) 16 mai 2006 (75 min)

Tableau 3.4.3a Rencontres de co opération et séances en classe échelonnées dans le temps dont les verbatims ont fait l'objet d'une analyse

Une approche inductive d'analyse

Notre analyse s'est inspirée pour la codification d'une approche inductive cherchant à faire émerger des catégories de sens du corpus de données recueillies. Comme le met en évidence Blais et Martineau (2006), une démarche d'analyse émergente vise à « donner un sens à un corpus de données brutes mais complexes, dans le but de faire émerger des catégories favorisant la production de nouvelles connaissances de recherches » (p. 2). Cette démarche inductive vise à « dégager les significations centrales... parmi les données brutes et relevant des objectifs de recherche » (p. 7) et conduit à l'élaboration « de catégories... les plus révélatrices des objectifs de recherche identifiés au départ par le chercheur. » (p. 7). Nous avons ainsi procédé aux premiers codes et catégorisations qui proviennent du sens émergeant du terrrain. Nous préciserons plus précisément ci-dessous la démarche de codage «émergente » des données telle qu'elle a été réalisée.

Une entrée par les tâches : Dans l'analyse de la séquence d'enseignement, sur les exposants, un premier découpage des données en épisodes s'est fait à partir d'une entrée par les tâches : de la tâche initiale, proposée par la chercheure à l'enseignante (comme base de discussion), à la tâche redéfinie et élaborée conjointement par l'enseignante et la chercheure à la tâche effective en classe. Cette entrée par les tâches et leur évolution se justifie d'une part en regard de notre objet de recherche, car comme nous l'avons vu dans notre cadre théorique au point 2.1.6, la dimension du contrôle sur l'activité mathématique n'est pas indépendante du type de tâches proposées, et d'autre part, en regard de nos questions de recherche touchant aux situations et stratégies d'intervention élaborées en lien avec le développement du contrôle

Rogalski (2003) définit cette différenciation entre tâches redéfinie et effective. La tâche *redéfinie* « c'est la représentation de la tâche que se donne le sujet » (p. 350) et la tâche *effective* « c'est celle à laquelle il répond effectivement, et qui peut différer de celle qu'il pense s'être fixée » (p. 350). Ainsi la tâche redéfinie c'est celle qu'enseignant et chercheur se représentent comme étant ce qu'ils ont retenu à l'issue de la médiation, celle-ci sera explicitée au cours des rencontres réflexives (dans la planification conjointe). La tâche effective est celle qui prendra place en classe avec les élèves. Nous considérons donc les tâches à trois moments dans le temps du processus de collaboration (cf. tableau 3.4.3b).

Les tâches	**Les éléments pris en compte dans leur élaboration**	**Trois moments du processus**
La **tâche initiale**	- Cadre de référence sur le contrôle - Fait aussi suite parfois à une première rencontre avec l'enseignante et tient compte de ses attentes, de ses contraintes.	Une tâche présentée par la chercheure comme base de discussion lors des premières rencontres
La **tâche redéfinie** et son exploitation prévue en classe	Des éléments venant de la chercheure et de l'enseignante (au croisement de didactique de recherche et didactique praticienne)	Élaborée conjointement lors des rencontres réflexives de planification
La **tâche effective** dans la classe	Des éléments : - au croisement de sa didactique praticienne - de ce qui a été construit précédemment (tâche redéfinie) - de ce qui se passe chez les élèves	La tâche telle que prise en charge par l'enseignante dans la classe

Tableau 3.4.3b De la tâche initiale à la tâche effective

Un premier découpage des tâches : Une analyse a priori de la séquence d'enseignement portant sur les exposants a conduit à repérer 7 blocs correspondant à différents types de tâches [61] au centre du processus de collaboration et de l'intervention avec les élèves.

Un codage pour chacun des blocs : Pour chacun des blocs, nous avons réalisé dans un premier temps une analyse des verbatims des rencontres réflexives autour de chacune des tâches (de la tâche proposée à la tâche redéfinie) et, dans un deuxième temps, une analyse des verbatims des séances en classe (tâche effective). Nous avons cherché à cerner, dans le premier cas, *sur quelle base s'est fait le choix des tâches* retenues au cours de la planification, *comment elles ont été modifiées* au cours du processus de collaboration entre chercheure et enseignante (tâches redéfinies) et quelles sont les *raisons qui ont guidé cette modification.* Nous nous sommes également attardées sur les *tâches effectives en classe, et les modifications apportées en cours de réalisation.*

Cette analyse émergente [62] a permis de dégager des caractéristiques des situations et des interventions élaborées ainsi que ce qui guide la chercheure et l'enseignante dans le choix de ces tâches et leur modification (de la tâche initiale à la tâche redéfinie) ainsi que leur réalisation en classe. Ce codage, comme on le verra, touche à différentes composantes.

L'analyse de ces situations telles que vécues en classe visait par ailleurs, de manière complémentaire, [63] à *mieux comprendre ce qu'il advient sur le plan du développement du contrôle chez les élèves du secondaire au cours de celles-ci.* Les entrevues individuelles, le questionnaire écrit constituent ici, avec les productions des

---

[61] Il s'agit d'un découpage effectué a posteriori, pour des fins d'analyse. La séquence finale retenue et réellement vécue en classe intercale ces tâches. Une analyse de l'ordre de la progression à l'intérieur de la séquence a par ailleurs été menée, pour préciser les éléments qui ont guidé chercheure et enseignante dans la progression et dans l'articulation des grandes lignes de cette séquence.

[62] Nous avons procédé à une théorisation émergente, à partir d'une interprétation de ce qui se dégage du point de vue du contrôle. Il en émergera une certaine définition du concept du contrôle que nous confronterons à celui obtenu dans notre cadre théorique (voir chapitre V).

[63] Cette partie de l'analyse ne sera conduite, nous le verrons par la suite, que partiellement. Elle ne constitue donc pas l'élément central des résultats.

élèves, le matériau central à partir duquel s'est faite l'analyse, en partant de notre cadre de référence sur le contrôle (cf. cadre théorique).

Dans le prochain chapitre, nous présentons une analyse des résultats obtenus lors de l'expérimentation sur les exposants.

CHAPITRE IV

ANALYSE DES RÉSULTATS

En entrant dans l'analyse par les tâches, nous avons été amenées à faire un premier découpage de la séquence d'enseignement portant sur les exposants en 7 blocs correspondant à différents types de tâches. Ces dernières touchent à deux grands aspects, le travail sur l'écriture algébrique et la résolution de problèmes :

- Bloc *Résolution de problèmes*
- Bloc *Réflexion sur la notation exponentielle*
- Bloc *Réflexion sur la notation en lien avec la manipulation*
- Bloc *Introduction à un certain contenu* (division d'expressions algébriques et exposants négatifs)
- Bloc *Exercices calculatoires sur des expressions / Écris sous une certaine forme*[64]
- Bloc *Exercices vrai – faux / Montre que*[65]
- Bloc *Information historique à propos de la notation*[66]

Nous reviendrons plus précisément sur chacun des blocs, le type de tâches auquel il renvoie et préciserons la manière dont s'est réalisée la codification dans chacun des cas.

---

[64] Ce bloc est centré sur un travail de manipulation algébrique. Il vise à faire développer des automatismes aux élèves dans ce domaine, et correspond à une demande de l'enseignante. Son analyse en regard des dimensions du contrôle apparaît peu intéressante. Toutefois il va être intéressant de voir l'impact que ce type de travail a sur le contrôle qu'a l'élève de l'activité mathématique : s'avère-t-il important ? Nuit-il ? Sous quels aspects ?

[65] Ce bloc fait partie du travail en algèbre portant sur la généralisation à des fins de preuve, qui n'est pas très présent dans le programme d'études (MELS, 2003). Quelques exercices ont pu être expérimentés dans cette séquence.

[66] Dans ce bloc, on a prévu une intervention pour expliquer aux élèves la provenance de la notation exponentielle, en se basant pour ce faire sur l'histoire des mathématiques. Nous ne nous attarderons pas sur cette partie, qui est avant tout informative et où le développement du contrôle n'est pas en jeu.

4.1 Analyse d'un premier bloc sur la résolution de problèmes

Ce premier bloc est composé de 7 problèmes (proposés au départ par la chercheure comme base de discussion). Quatre de ces problèmes ont été retenus pour la planification finale, dans certains cas sans aucun changement, dans d'autres cas, modifiés et restructurés. Les trois autres problèmes ont été rejetés[67]. Pour chacun des problèmes (ou groupe de problèmes similaires), nous retrouvons trois types d'analyses complémentaires :

- Une analyse préalable du problème proposé initialement (par la chercheure) en regard du contrôle (les raisons en quelque sorte pour lesquelles elle l'a choisi).
- Un codage des arguments invoqués dans la rencontre qui ont conduit à le retenir, le modifier (sur la base des données issues des verbatims des rencontres), sous-jacents donc aux modifications, à l'acceptation dans ce cas (ce qui guide le choix de la tâche redéfinie)
- Un codage émergent d'autres données pertinentes qui ressortent des verbatims des rencontres en lien avec ces problèmes (et qui nous le verrons nous renseignent sur l'analyse a priori du problème, sur une anticipation de ce qui peut se passer dans la classe autour du problème....)

[67] Ces problèmes ont été rejetés essentiellement pour des raisons de manque de temps. Nous ne les reprendrons donc pas dans l'analyse (cf. appendice D).

4.1.1 De la tâche initiale à la tâche redéfinie

4.1.1.1 Autour du problème des robots

Nous présentons dans le tableau ci-dessous le problème initial et ce qu'il est devenu après discussion avec l'enseignante[68].

Tâche initiale (la tâche proposée)	**Ce que la tâche est devenue** (la tâche redéfinie)
Les Robots[69] Un expert efficace travaille dans une usine de fabrication de robots. En cinq minutes, un robot construit une copie de lui-même et se déplace ensuite jusque dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert a une idée géniale et découvre une façon d'augmenter le rendement. Il fabrique un robot capable de construire deux de ses semblables en cinq minutes. Le robot-mère se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert court voir sa supérieure pour lui expliquer qu'il a doublé la production et met en route le robot au préalable pour être à même de lui montrer sa nouvelle invention. Lorsqu'il arrive, sa supérieure est en réunion, et il doit attendre trois heures avant de pouvoir la rencontrer. Quand elle est libre, l'expert lui explique son invention, celle-ci regarde l'horloge et court, alarmée, jusqu'à l'usine. *Combien de robots y trouve-t-elle?* Combien de robots l'expert s'attend-il qu'elle trouve?	Un expert efficace travaille dans une usine de fabrication de robots. En cinq minutes, un robot construit une copie de lui-même et se déplace ensuite jusque dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert a une idée géniale et découvre une façon d'augmenter le rendement. Il fabrique un robot capable de construire deux de ses semblables en cinq minutes. Le robot-mère se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert court voir sa supérieure pour lui expliquer qu'il a doublé la production et met en route le robot au préalable pour être à même de lui montrer sa nouvelle invention. Lorsqu'il arrive, sa supérieure est en réunion, et il doit attendre trois heures avant de pouvoir la rencontrer. Quand elle est libre, l'expert lui explique son invention, celle-ci regarde l'horloge et court, alarmée, jusqu'à l'usine. *Pourquoi panique-t-elle?* Combien de robots l'expert s'attend-il qu'elle trouve?

Tableau 4.1.1.1a Les robots : tâche initiale et tâche redéfinie

[68] Nous ferons apparaître dans tous les énoncés des tâches à venir les modifications apportées.

[69] Si nous faisons le problème nous pouvons remarquer qu'au bout de 3 heures, il va y avoir 2^{36} = **68 719 476 740** robots. Or, la population mondiale au 1[er] janvier 2009 est de 6 750 432 844 personnes. Nous pouvons questionner la vraisemblance d'un tel problème puisqu'en trois heures il y aurait dans l'usine de fabrication beaucoup plus de robots que la population mondiale. A posteriori, nous pensons qu'il aurait été plus raisonnable de se pencher sur le nombre de robots produits au bout d'une heure (2^{12} = 4096 robots).

a) Une analyse préalable de la tâche initiale

Une analyse préalable dont le cadre de référence est la notion de contrôle (cf. chapitre 2) a guidé le choix de ce problème par la chercheure, dont nous reprenons ici les éléments :

- Choix d'un énoncé complexe qui force une certaine interprétation du problème par l'élève, à extraire des données quantitatives et voir les relations entre les données. Il s'agit ici d'un *contrôle sur le processus de résolution de problèmes, plus particulièrement au niveau de la construction de la représentation de la situation* (voir le point 2.1.2.2).

- Ce problème sollicite par ailleurs une certaine *anticipation de l'ordre de grandeur de la réponse* dans la formulation introduite (la supérieure regarde l'horloge et court, alarmée jusqu'à l'usine).

b) Les arguments invoqués à l'appui de ce problème pour justifier qu'on le retient

Le codage fait ressortir les arguments invoqués de part et d'autre, à l'appui du choix de ce problème : un problème intéressant à retenir, mais pas pour les mêmes raisons comme on le voit ci-dessous.

- ***À la recherche en algèbre de situation-problèmes et de contextes / une référence à la réforme (E)***[70]

L'enseignante met de l'avant le manque de situations-problèmes, de contextes en algèbre en secondaire 3 alors que c'est ce qui est prescrit par la nouvelle réforme.

> Nadia : mais c'est vrai que... ça <u>c'était une de nos préoccupations parce que moi comme pivot pour la réforme</u> là, notre préoccupation c'est l'algèbre, l'algèbre qu'est-ce qu'on fait, l'algèbre de 3 les trucs c'est très statique, <u>des situations problèmes il n'y en a pas des tonnes.</u> <u>Tu cherches à la petite goutte pour les trouver</u> et je pense que <u>c'est une bonne situation justement</u> (sous-

[70] Nous indiquerons par (E) les arguments de l'enseignante et par (C) ceux de la chercheure.

entendu dans le sens de situation problème) donc ce serait très réforme en plus. (9 février 2006, 49-54)

Elle ressent aussi le besoin (en lien avec ce qui précède) de trouver des contextes dans ce domaine (en opposition à ce qui est fait habituellement en secondaire 3)

Nadia : non mais quand même, l'algèbre ça va bien en deux *(en secondaire 2)*, ça va bien là dedans, mais moi je m'aperçois en 3 c'est très... il n'y a jamais de situations, jamais de contextes. (9 février 2006, 370-371)

- ***Un choix de problème que les élèves sont en mesure de s'approprier (E)***

Dans l'argumentation qui la guide dans le choix du problème, l'enseignante a aussi en tête les élèves (est-ce un problème qu'ils peuvent comprendre, dans lequel ils peuvent s'engager).

Nadia : ouais, c'est ça et on veut mettre des situations... c'est une bonne idée de commencer par cette situation. Une situation pas trop difficile à s'approprier, à comprendre, on peut la comprendre assez facilement. (9 février 2006, 35-37)

- ***Un choix de situation originale, différente de la routine (E)***

Nadia : moi j'aime celui des robots...j'aurais aimé avoir ça (la situation des robots) avant, moi je fais l'affaire des 2 cents. *(Elle fait référence à ce qu'elle fait habituellement).*

C : c'est quoi ça?

Nadia : parce qu'en secondaire 1 quand on fait les exposants, je leur dis toujours « ton grand père propose de te donner 100 000 dollars tout de suite aujourd'hui ou bien de te donner maintenant 2 sous puis de doubler le montant à chaque jour pendant le premier mois. » Puis eux ils choisissent toujours le 100 000 dollars, ils se disent que 100 000 c'est beaucoup.

C : c'est bon comme situation.

Nadia : ouais mais c'est plate, c'est classique, tout le monde le fait. (28 février 2006, 314-324)

- ***Un choix de problème visant à donner du sens à l'accroissement exponentiel / à introduire l'écriture exponentielle (C)***

La chercheure propose le problème des robots pour débuter la partie sur les exposants. Elle veut ainsi donner du sens à l'exponentielle (donner l'idée que ça grossit très vite si on se restreint aux nombres naturels) et faire ressortir la notation exponentielle comme une écriture efficace.

> C : il y a une situation sur les robots sur les exposants qui peut être intéressante, elle sert à introduire les exposants, pour donner l'idée que ça monte toujours très très vite. (9 février 2006, 11-13)

(...)

> C : Cours 2, retour robots avec les acétates, on fait ressortir l'écriture exponentielle comme une convention, une écriture efficace. (6 mars, 165-170)

- ***Un choix de problèmes en opposition aux aspects calculatoires (C)***

> C : c'est ça je pense que c'est mieux que de leur donner juste des calculs. Bon, des calculs il faut leur en donner, tu es obligée, on est en secondaire 3, il n'y en a pas beaucoup des situations. (9 février 2006, 46-48)

- ***Un choix en référence au contrôle (C)***

> C : oui... pour développer le contrôle, qu'ils comprennent bien ce qu'ils font, qu'ils vérifient, qu'ils aient un engagement réfléchi. (28 février 2006, 834-836)

Les arguments invoqués de part et d'autre à l'appui de ce choix de ce problème ne sont donc pas de même nature.

Arguments invoqués à l'appui du problème des robots	
Arguments de l'enseignante	**Arguments de la chercheure**
- À la recherche pour l'algèbre de situations-problèmes / référence à la réforme et à la recherche de contextes - Un problème que les élèves sont en mesure de s'approprier. - Une situation originale, différente de sa routine	- Donner du sens au concept (à l'accroissement exponentiel) et introduire l'écriture - Un choix en opposition aux aspects calculatoires - Une référence au contrôle (développer le contrôle)

Tableau 4.1.1.1b Choix de la tâche initiale (les robots) : arguments de l'enseignante et de la chercheure

De cette analyse ressortent deux perspectives différentes clairement invoquées au départ. La perspective de l'enseignante nous renvoie à une certaine didactique praticienne : ses contraintes institutionnelles à travers le programme d'études; sa sensibilité aux élèves et à leur compréhension, certaines manières de faire dans la manière dont elle introduit habituellement les exposants (des manières de faire qu'elle cherche à renouveler). La perspective du chercheur nous renvoie à une certaine didactique de recherche : ses intentions didactiques (donner du sens au concept, ne pas restreindre aux aspects calculatoires) et son cadre conceptuel sur le contrôle. Il est à noter que la référence au contrôle n'est pas du tout présente chez l'enseignante à cette étape dans les arguments invoqués.

Les arguments invoqués à l'appui des modifications de la tâche (vers la tâche redéfinie)

- ***Reformuler pour en faire une situation-problème/référence à la réforme (E)***

La recherche par l'enseignante d'une situation problème *(pour tenir compte de la réforme)* l'amène à changer la formulation de la question : « Combien de robots y trouve-t-elle? » devient « Pourquoi panique-t-elle? »

> Nadia : ouais... là je suis en train de me dire comment je pourrais poser la question pour être certain... l'expert lui explique, elle regarde, elle capote... Pourquoi capotait-elle? Et pourquoi lui il ne capote pas?... Ok, au lieu de dire « combien elle trouve de robots » dire « pourquoi elle panique »... Ouais... ça va plus faire une situation problème on va pouvoir ploguer du langage réforme là dedans, les gens vont être contents.[71] (28 février 2006, 238-243)

- ***S'assurer de ce que l'élève pourrait faire / une analyse passant par une reformulation, résolution du problème pour elle (E)***

Nadia s'approprie le problème en le reformulant et en le résolvant pour mieux en saisir la compréhension possible par les élèves. On retrouve le même souci associé aux élèves que précédemment (s'assurer qu'ils puissent comprendre le problème). Elle anticipe pour cela ce qui pourrait se passer, ce que pourrait faire l'élève.

> Nadia : Je veux juste comprendre bien ce qu'un élève ferait « un expert efficace travaille dans une usine de fabrication de robots, en 5 minutes un robot construit une copie de lui-même et il se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. » Ok fait que là comment ça

[71] L'énoncé original de la question engage l'élève dans un type de résolution (de type calcul du nombre de robots produits). Par contre, le changement apporté par l'enseignante ouvre sur le pourquoi, sur les différentes possibilités d'explication, qui est en effet caractéristique d'une situation problème (Pallascio, 2005).

marche, fait que le robot il est là, là il y a quelqu'un, une première personne qui fait ce robot là, puis là le robot il s'en va, il en fabrique un autre, il s'en va proche de la caisse puis là il attend que quelqu'un ferme la caisse autour de lui. Puis là l'autre robot qui vient d'être construit il part et il va en faire un autre et il s'en va proche de sa caisse. Fait que ça ça monte linéaire, pas de problème. Fait que mettons en 60 minutes on a 12 robots qui sont construits. *(Elle résout le sous-problème)* « L'expert a une idée géniale et découvre une façon d'augmenter le rendement, il fabrique un robot capable de construire deux de ses semblables en 5 minutes, le robot mère se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé. » Ça c'est bien parce que ça dit que... parce que les élèves ils posent tout le temps des questions comme ça, ils rajoutent tout le temps, comme ils essaient de faire la somme de... (...) Je veux juste voir si je comprends bien, si moi je comprends tout le monde comprend. Fait qu'il dit le robot il part, il en fait deux puis là il va s'installer dans sa petite boite, ces deux là partent et en font chacun deux, ces deux là s'en retournent dans leur petite boite fait que là au début ça n'a pas l'air si pire mais en trois heures, chaque 5 minutes, ça fait beaucoup de fois 2 hein? *Rires.* C'est bon ça, c'est correct. (28 février 2006, 245-271)

La tâche redéfinie : arguments de l'enseignante à l'appui des modifications
- Reformuler pour en faire une situation-problème/référence à la réforme - S'assurer de ce que l'élève pourrait faire / une analyse passant par une reformulation/résolution du problème pour elle.

Tableau 4.1.1.1c Arguments invoqués par l'enseignante à l'appui des modifications de la tâche redéfinie (les robots)

L'analyse confirme ici ce qui précède (voir tableau 4.1.1.b) : la perspective de l'enseignante conduisant aux modifications suggérées puise aux mêmes ressources (référence au programme d'études et au contexte de la réforme; sensibilité aux élèves et à leur compréhension). Elle la conduit à mettre en œuvre certaines manières de faire, explicitées par cet extrait (reformulation de la question dans le sens d'une situation problème; reformulation du problème et résolution par elle pour s'assurer que les élèves puissent le comprendre). Dans cette modification du problème initial, il est à noter que la chercheure est complètement absente.

c) Autour de la tâche redéfinie : une analyse conjointe

Le codage du verbatim fait par ailleurs apparaître d'autres éléments : l'enseignante s'engage en effet spontanément avec la chercheure dans une analyse a priori du problème modifié : anticipation des procédures, des difficultés des élèves, mais aussi analyse a priori du point de vue du contrôle. C'est comme si cette dernière se réappropriait le cadre de référence de la chercheure et lui donnait un sens en référence à sa pratique.

- ***Un engagement dans une anticipation des procédures de résolution possibles des élèves (E)***

Nadia anticipe les procédures de résolutions possibles (les élèves ne feront pas l'exponentielle directement, certains feront un arbre).

> Nadia : déjà il faut savoir que c'est 2 exposant quelque chose là… (28 février, 272)
> (…)
> Nadia : ben si quelqu'un fait ça comme ça là, peut-être qu'ils vont faire un truc pareil là avec un petit dessin, un petit arbre là ok? (28 février 2006, 280-282)

- ***Une anticipation des erreurs possibles des élèves puisant à des connaissances didactiques (C)***

La chercheure s'appuie sur ses connaissances didactiques sur les erreurs possibles des élèves dans ce problème, puisant à la recherche [72]. C'est une connaissance « théorique » sur ce qu'a fait l'élève interviewé dans un tel problème selon Confrey (1994).

> C : attends je vais essayer de ressortir l'article… « l'étudiant il lit le problème, on lui demande de dire ce qu'il comprend, là il explique… il trouve 12 fois 3. »
> Nadia : ok donc il trouve 36.
> C : oui, 36 minutes.
> Nadia : fait qu'il fait 36 fois 2, 72.
> C : …« il double, ensuite chacun d'eux construit deux robots de plus ce qui fait un total de… » *(la chercheure continue à lire l'article)*
> Nadia : 4.
> C : « c'est seulement multiplié par 2 parce qu'au départ à l'instant 0, il y en a 1 après 5 minutes, il y en a 2, 5 minutes plus tard, il y en a 4, donc 5 minutes après il

[72] Celle-ci fait ici référence à l'article de Confrey (1994).

y en a 8, c'est donc multiplié par 2 à chaque fois. Au bout de 3 heures ça fait 36 fois 2, 72 » et il dit... il trouve 72 et il s'arrête là. (28 février, 294-305)

- ***Un engagement dans une analyse des difficultés : difficulté à calculer le résultat avec la calculatrice, des erreurs dans le calcul explicitées (C* et *E)***

C : les robots il y a juste un problème, c'est qu'à la fin ça donne 2 exposant 43, c'est quelque chose qu'ils vont avoir du mal à calculer avec la calculatrice.

Nadia : non... ils vont obtenir une notation scientifique.

C : s'ils obtiennent une notation scientifique ça va prendre beaucoup plus de temps, ils vont vouloir savoir d'où ça vient, ce que c'est...

Nadia : mais je pense qu'il y a des gens... parce que s'ils voient ça, c'est écrit avec un petit nombre en haut sur la calculatrice, il y en a c'est écrit fois 10 en petit exposant 12... La calculatrice graphique il y a marqué e avec un 12 en haut. Bon ça dépend la calculatrice mais on peut juste le dire « ça ça veut dire que c'est 8,79 mettons fois 10 exposant 12, c'est ça que ça veut dire. »

C : mais 10 exposant 12 ils savent ce que ça veut dire c'est 10 fois 10 fois 10...

Nadia : tu rajoutes 12 zéros, ben là c'est ça qu'ils vont dire tu prends ça puis tu rajoutes 12 zéros, ce n'est pas vraiment ça, il faut que tu te tasses 12 fois mais... (6 mars, 144-159)

Une analyse de la tâche redéfinie du point de vue du contrôle

L'enseignante montre une *sensibilité à l'objet de la recherche*, ce qui la fait rentrer spontanément dans l'analyse du problème dans les termes de la chercheure (elle parle explicitement de contrôle). Elle cherche à faire la jonction, un rapprochement entre sa didactique praticienne et le cadre de référence de la chercheure sur le contrôle, comme nous le montrera toute l'analyse qui suit. Ce passage entre didactique de recherche et pratique de l'enseignante est spontané (Nadia se place dans le cadre de la chercheure et lui donne un sens dans sa pratique). En faisant cela, elle va mettre en évidence d'une part, conjointement avec la chercheure, des *composantes du contrôle sollicitées par le problème*; mais elle nous donne aussi accès à ce qu'elle fait dans sa pratique, à sa didactique praticienne (elle fait déjà, nous dira t-elle, ce type de choses dans sa pratique).

- ***Des composantes du contrôle (sollicitées par le problème) explicitées***
    - ***Réfléchir, anticiper, vérifier/faire un retour sur le problème (C)***
    - ***Anticiper l'ordre de grandeur, favoriser un retour sur la réponse, sur le caractère pertinent de cette réponse en lien avec la question du problème (E)***

C : ben moi je commence à être perdue, choisir des problèmes qui favorisent une activité de contrôle ce n'est pas si évident. Les élèves doivent réfléchir, anticiper, vérifier leurs résultats, d'après moi ces problèmes ne sont pas si mal…

Nadia : ceux-là oui, parce qu'avec ceux-là tu peux anticiper facilement avec ceux-là. Mais comment on va faire pour justifier ça, c'est ça ton problème. Ben moi je vais te dire la seule affaire qui fait la différence c'est que la fille elle panique. Eux autres ils arrivent avec 72 (sous-entendu les élèves) puis ils se disent pourquoi elle panique, 72 robots ce n'est pas tant que ça. *(Lien avec la question, force un retour)*

C : donc les élèves font un retour au problème, c'est du contrôle.

Nadia : ouais. Fait que là tu en as, donc une manière de faire ton contrôle c'est ça…. *(Faire un retour sur le problème)* (28 février, 390-400)

- ***Un principe explicité : « faire clash » (« déstabiliser », mettre en doute de manière à forcer un retour sur la réponse) (E)***

C'est l'idée pour l'enseignante d'amener chez les élèves un doute : quand ils voient la réponse ça doit les frapper, ça doit les questionner.

Nadia : ouais. Fait que là tu en as, donc une manière de faire ton contrôle c'est ça. C'est qu'ils arrivent à une réponse mais ils se disent « oui mais là c'est pas à ça que je m'attendais. » Tu sais, il faut qu'ils aient un gros… il faut qu'ils aient une bonne idée de l'ordre de grandeur de la réponse et que quand ils voient la réponse ça les frappe. Je ne sais pas le principe de ça mais c'est « clash », ça clash avec tes attentes *(en référence ici à la personne, l'élève qui résout)*, tu as une certaine attente puis là tu arrives et tu te dis « hein je ne pensais pas à ça, ça ne se peut pas. » Bon, ça c'est une réaction ça. (28 février 2006, 400-408)

- ***Un indicateur de contrôle chez les élèves explicité (permettant de repérer qu'il y a contrôle de la part des élèves) (E)***

Une réaction explicite des élèves de doute dans ce cas apparaît (selon l'enseignante) dans leur discours.

C : comment on va le voir ça chez les élèves? Parce qu'ils travaillent entre eux, il faudrait qu'on se promène, qu'on les fasse parler…

Nadia : bon d'habitude quand j'en fais des problèmes comme ça, c'est assez fort, ils ne s'attendent pas à ça là.

C : et tu le vois sur les faces?
Nadia : même pas sur les faces ils vont te le dire « heu, ça donne ça madame, ça n'a pas d'allure, il me semble que ça ne marche pas », ils vont te le dire clairement. (28 février 2006, 409-415)

- ***Une didactique praticienne qui intègre déjà ce travail d'anticipation/retour sur la réponse (l'effet «clash ») (E)***

Ce type d'intervention qui force une anticipation est déjà intégré dans sa pratique, comme on le voit précédemment (« Bon d'habitude quand on fait des problèmes comme ça... »). Ce qu'elle nomme « l'effet clash » fait donc partie de sa théorie implicite de l'action (elle donne un exemple d'une situation où elle a utilisé cet effet « clash »).

Nadia : j'ai eu ça avec le 436 *(secondaire 4)* quand on faisait les fonctions quadratiques, quand tu te tasses à droite ou à gauche avec ton *h* là.
C : ah oui.
Nadia : moi mettons je leur disais « qu'est-ce que vous pensez qu'il va arriver? » Là ils disent que ça va à droite et finalement ça va à gauche. Et là ils disent « ça ne marche pas » puis ils recommencent « ça ne marche pas là » et... mais il faut que ce soit fort pour qu'ils le voient. (28 février 2006, 417-423)

Le tableau ci-dessous synthétise l'analyse a priori menée par l'enseignante et la chercheure de la tâche redéfinie.

La tâche redéfinie : une analyse *a priori* conjointe	
Enseignante	**Chercheure**
Une anticipation des procédures de résolution possibles des élèves (recours à un arbre, pas de passage direct à l'écriture exponentielle)	Une anticipation des erreurs des élèves puisant à des connaissances didactiques
- Un engagement dans une analyse des difficultés : difficulté à calculer le résultat sur la calculatrice, des erreurs dans le calcul explicitées (à la fois par l'enseignante et par la chercheure).	
Des composantes du contrôle explicitées (sollicitées par le problème)	
Anticiper l'ordre de grandeur, favoriser un retour sur la réponse, sur le caractère pertinent de cette réponse en lien avec la question du problème	Réfléchir, anticiper, vérifier / faire un retour sur le problème

Des stratégies d'intervention explicitées autour du contrôle Des indicateurs de contrôle possibles de la part des élèves.	
- Un principe explicité : « faire clash » (« déstabiliser », mettre en doute de manière à forcer un retour sur la réponse). - Une didactique praticienne qui intègre ce travail d'anticipation / retour sur la réponse (l'effet clash) - Une réaction explicite des élèves de doute dans leurs visages, dans leur discours	

Tableau 4.1.1.1d Autour de la tâche redéfinie (les robots) : une analyse conjointe

Nous reviendrons maintenant sur l'analyse des trois autres problèmes retenus dans ce premier bloc.

4.1.1.2 Autour des problèmes des abeilles et des bactéries

La tâche et ce qu'elle est devenue

Tâches initiales (proposées)	**Ce que les tâches sont devenues** (redéfinies)
Abeilles[73] Un essaim d'abeilles compte environ 60 000 individus. Une pauvre petite abeille a attrapé une maladie contagieuse et mortelle, sans le savoir elle revient dans sa ruche. Cette maladie se propage au rythme suivant : tous les jours, chaque individu atteint transmet la maladie à 5 autres individus puis meurt. Dans combien de temps, l'essaim sera-t-il complètement décimé?	**Abeilles** Même énoncé, pas de changement.
Bactéries Le nombre de bactéries dans une culture double tous les jours. Au début, il y avait 2 bactéries, au bout de combien de jours va-t-on en compter 33 554 432?	**Bactéries**[74] Même énoncé, pas de changement.

[73] Ce problème est tiré de Breton et Morand, 1995, p. 227.

[74] L'énoncé a été modifié par la suite à l'initiative de la chercheure comme suit : « Le Clostridium difficile est une bactérie qui cause la diarrhée et d'autres maladies intestinales. Il s'agit aussi de l'infection la plus communément répandue dans les hôpitaux et les établissements de soins de longue durée. Pour prévoir les répercussions de cette épidémie, des chercheurs étudient leur propagation. Pour cela, ils placent deux bactéries du C. difficile dans une culture pour les observer. Ils

Tableau 4.1.1.2a Les abeilles et les bactéries : les tâches initiales et redéfinies

a) Analyse préalable de ces deux tâches initiales (proposées pour fins de discussion) par la chercheure en termes de contrôle (C)

Problème des abeilles

- Nous pouvons remarquer que le contexte prête à plusieurs interprétations et débouche sur plusieurs réponses possibles. Par exemple, on peut supposer que les abeilles meurent la journée où elles sont infectées ou alors qu'elles meurent la journée d'après, la réponse donnée au problème n'étant plus la même. Ainsi, l'élève s'il s'approprie le problème en donnant du sens en contexte peut aller vers différentes interprétations, ce qui demande un certain engagement réfléchi (une composante du contrôle).
- Dans le cas où l'élève cherche quel est l'exposant de 5 donnant comme réponse 60 000 (le nombre total d'abeilles dans la ruche), le nombre qu'il va trouver est un irrationnel, ce qui oblige à une interprétation, à un retour sur la réponse.

Problème des bactéries

Tout comme pour le problème des abeilles, l'exposant recherché ici est un irrationnel, ce qui oblige à une interprétation de la réponse.

b) Les arguments à l'appui de ce choix des problèmes (par l'enseignante et la chercheure dans la rencontre réflexive) pour justifier qu'on les retient

L'enseignante cherche à avoir des problèmes présentant des variantes sur le plan du contenu, et qui préparent les élèves aux années suivantes, au contenu à venir. Elle retient ainsi le problème des abeilles parce qu'il s'agit dans ce cas de trouver l'exposant (la base étant connue, ainsi que le résultat), ce qui est différent de ce qui

---

notent que le nombre de bactéries double tous les jours. **Au bout de combien de jours va-t-on dépasser les 33 millions de bactéries C. difficile?** » La chercheure voulait contextualiser, cette modification a été approuvée par l'enseignante.

est demandé pour les robots (où la base et l'exposant sont connus et il faut trouver le résultat). Elle évoque de plus la possibilité de préparer ainsi les élèves au secondaire 4 et 5, où on traite explicitement des logarithmes. Ce qui distingue par ailleurs les deux problèmes (abeilles et bactéries) c'est leur base (5 pour les abeilles et 2 pour les bactéries).

- ***Choisir le problème en tenant compte de la variété des contenus qu'ils touchent (E)***
    - ***Chercher l'exposant versus trouver le résultat d'un nombre élevé à une certaine puissance***
    - ***Jouer sur des bases différentes***

- ***Préparer au contenu des années suivantes (E)***
    - ***Introduction / préalable aux logarithmes (sans parler explicitement de logarithme : je cherche l'exposant...)***

> Nadia : Je garderais les situations comme celle de l'abeille que tu cherches l'exposant, tu ne cherches pas... parce que ça c'est autre chose qu'ils n'ont jamais vu, tu sais puis ça va mener plus loin, tu sais en 4 ou en 5, ah c'est plate on aurait des effets peut-être sur les logarithmes et tout ça parce que ça c'est plus des problèmes de logarithmes quand tu cherches l'exposant fait que c'est plus judicieux pour eux à ce moment là pour les autres années après. C'est les habituer à dire « je cherche un exposant », nous on ne dit pas le mot logarithme là mais déjà ils seraient préparés pour l'an prochain mettons. C'est pour ça, les problèmes qui disent « dans combien de temps » là... parce que là on ne leur demande pas combien d'individus vont être morts, on demande « dans combien de temps il n'y en aura plus », ça c'est une autre réflexion, tu cherches l'exposant là. Puis il y en avait un autre... oui celui des bactéries aussi, « au bout de combien de jours ».
> C : là c'est pareil, tu cherches l'exposant.
> Nadia : ouais, mais lui c'est avec une base 2 et l'autre c'est une base 5... (28 février 2006, 349-366)

Choix de la tâche / Arguments à l'appui (les tâches proposées et redéfinies sont les mêmes)	
Arguments de l'enseignante	**Arguments de la chercheure**
Choisir le problème en tenant compte de la variété des contenus qu'ils touchent - Chercher l'exposant versus trouver le résultat d'un nombre élevé à une certaine puissance - Jouer sur des bases différentes	Choix du problème guidé par le cadre de référence sur le contrôle : - Plusieurs engagements possibles / Donner du sens en contexte. Ce qui exige un engagement réfléchi. - Force un retour sur la réponse et sa signification en lien avec le contexte.

Préparer au contenu des années suivantes - Introduction / préalable aux logarithmes (sans parler de logarithme : je cherche l'exposant...)	

Tableau 4.1.1.2b Arguments de l'enseignante quant au choix de la tâche (les abeilles et les bactéries)

Là encore il est intéressant de voir que l'enseignante et la chercheure sont sur des perspectives différentes pour justifier le fait que l'on retienne ces deux problèmes. Celle-ci puise, dans le cas de la chercheure, à une didactique de recherche invoquant un cadre de référence conceptuel sur le contrôle; dans le cas de l'enseignante, à une didactique praticienne faisant appel aux savoirs mathématiques que ces problèmes permettent de travailler, à sa connaissance du programme et à un souci de préparer les élèves aux apprentissages subséquents.

c) Une analyse par l'enseignante de la tâche (des deux problèmes) du point de vue du contrôle

L'enseignante va de nouveau se placer spontanément, pour analyser ces problèmes et ce qu'ils vont chercher, sur le terrain de la chercheure en parlant de contrôle et en lui donnant un sens dans sa pratique.

- Tâche non familière forçant davantage un retour au sens (E)

L'enseignante explicite un critère implicite : le fait d'avoir un problème inconnu (nous pourrions dire routinier, pris dans le sens où ils n'ont jamais abordé de tels problèmes) va pousser les élèves à se demander si le résultat a du sens, ils vont ainsi retourner au problème, ce qui correspond à une des composantes du contrôle. Cette connaissance est issue de sa pratique, du fonctionnement de ses élèves dans un problème inconnu (qui sort de ce qu'ils font habituellement).

Nadia : L'autre façon pour qu'il y ait le contrôle ou ce que tu dis là <u>c'est par des affaires qu'ils n'ont jamais vu</u> comme ici là, chercher l'exposant. (...) Là ça va être plus fort, par exemple dans tes problèmes, abeilles, bactéries, fait que tu as une première façon c'est que <u>le résultat attendu est bien étonnant par</u>

rapport au résultat réel, fait que ça c'est une façon qu'ils vont faire du contrôle et qu'ils vont retourner au problème. Ben c'est ce que je pense. Mon autre hypothèse là, l'autre hypothèse c'est que quand tu fais des problèmes comme abeilles, bactéries, que c'est quelque chose qu'ils n'ont jamais vu ça de même, ils sont capables de calculer combien de bactéries mais d'aller chercher l'exposant ça c'est quelque chose qu'ils n'ont jamais fait avant, fait que c'est un problème un peu inconnu, puis ça va faire qu'ils vont se poser plus de questions, puis retourner « est-ce que ça fait du sens, est-ce que ça a de l'allure? » Parce que là comme ils ne savent pas à quoi s'attendre et comment calculer ça, là ils vont trouver une réponse aussi, et qu'est-ce qu'ils font faire, ils vont regarder si ça a de l'allure, ils vont faire fois 2 fois 2 fois 2, ouais ça marche. Ça c'est à cause de la nature du problème que tu as parce que c'est des choses qu'ils n'ont jamais vues et ils vont se demander si leur résultat a du sens.

C : mais c'est possible que des élèves ne le fassent pas, ils feraient leur calcul et donneraient la réponse trouvée sans vérifier.

Nadia : ouais. Mais il y en a qui vont se demander « est-ce que ça a de l'allure? » C'est plus des situations qui vont favoriser le contrôle, tu as plus de chances qu'un élève retourne essayer sa réponse que si tu fais juste que lui poser la question puis bon. (28 février 2006, 428-450)

Plus loin dans la rencontre Nadia confirme que le choix du type de problème aura une incidence sur le développement d'une activité de contrôle par les élèves. Ainsi pour que les élèves vérifient, il faut un enjeu, des problèmes non routiniers, qui sortent du format usuel pour les élèves.

Nadia : mais là tu vas voir, on a choisi des problèmes pour que tu l'aies ton contrôle pour qu'il apparaisse ton contrôle. Si tu fais des exercices plates, comme on fait d'habitude...

C : mais ça en prend des exercices comme ça...

Nadia : oui ça en prend mais juste pour développer un réflexe « est-ce que ma réponse a du sens ». (28 février, 698-705)

- *Une anticipation des procédures des élèves : essais-erreurs (E)*

Nadia : ah les abeilles...Bon là qu'est-ce qu'ils vont faire? Ils vont faire des essais erreurs, c'est bien normal parce que c'est le seul outil qu'ils ont pour le moment. Ils n'ont pas les logarithmes... (28 février, 613-616)

Une analyse du point de vue du contrôle par l'enseignante
- Une analyse a priori du point de vue du contrôle : Tâche non familière forçant davantage un retour au sens - Une anticipation des procédures des élèves : essais-erreurs

Tableau 4.1.1.2c Une analyse a priori par l'enseignante (abeilles)

4.1.1.3 Autour du problème du Placement d'argent

La tâche et ce qu'elle devenue

Tâche initiale (tâche proposée)	**Ce que la tâche est devenue** (tâche redéfinie)
Placement d'argent Je place 500$ à un taux annuel de 10%. Quelle est sa valeur après 3 ans? Après plusieurs années?	**Placement d'argent** Émilien avait 18 ans quand il a commencé à placer son argent à un taux annuel de 10% par an. Combien d'argent va-t-il avoir quand il aura pris sa retraite? Et s'il meurt à 98 ans et qu'il cotise jusque là quel héritage va-t-il laisser à ses enfants?

Tableau 4.1.1.3a Placement d'argent : tâche initiale et tâche redéfinie

a) Analyse préalable de la tâche initiale proposée par la chercheure (C)

En proposant cette tâche, la chercheure cherchait à pousser les élèves à trouver une façon rapide, efficace de calculer le montant obtenu après plusieurs années (en utilisant le fait que calculer le 10% d'un nombre revient à multiplier par 1,1), à passer à une méthode générale, plus efficace. La composante du contrôle visée était celle d'un discernement, d'un choix de stratégie plus efficace (entre différentes stratégies).

b) Arguments à l'appui de ce choix de problème (par l'enseignante et la chercheure) pour justifier qu'on le retient

Le codage fait ressortir les arguments de part et d'autre à l'appui du choix de ce problème, arguments qui ne sont pas de même nature.

- ***Un problème qui est courant en secondaire 4 ou 5. Idée encore de préparer à un type de problème qu'ils vont rencontrer, aux apprentissages subséquents (E)***

Nadia : Puis l'autre chose que je trouvais intéressant c'est celui du placement d'argent parce que ça c'est <u>très courant en secondaire 4 et 5 ces problèmes là</u>. (28 février 2005, 365-367)

- ***Tâche qui amène un contrôle : sous la dimension choix d'une stratégie de calcul plus efficace (C)***

C : ça les fait réfléchir sur leur quotidien et ils peuvent le faire en essayant de trouver <u>le 10%, on calcule le 10% de 500 et ensuite j'ajoute à 500, ils se plantent parce que là ils ne peuvent pas le calculer sur un grand nombre d'années, il</u>

faut qu'ils calculent et calculent alors qu'il suffit de multiplier par 1,1 c'est pour ça que c'est intéressant. (28 février 2005, 370-374)

Les arguments invoqués à l'appui du problème redéfini

- ***Une intention explicitée : une manière de faire générale à trouver (E)***

Le problème est modifié en cours de route pour rejoindre une intention :

Nadia : (...) tu as une ouverture qui dit « après plusieurs années » fait qu'il faut trouver une espèce de formule qui te permettrait de trouver pour n'importe quelle année.

- *Reformuler le problème de départ pour pousser les élèves à généraliser (E)*

Nadia : Au lieu de dire plusieurs années on pourrait rajouter une petite question et dire « bon ok, je ne sais pas moi, Émilien avait 18 ans quand il a commencé ça là puis là l'espérance de vie d'un homme est de 78 ans... je ne sais pas, mettons, il prévoit de prendre sa retraite à 65 ans. » (28 février 2006, 457-461)

(...)

C : oui mais ceux qui auront fait une table de valeurs pour 60 ans, ils auront tous les montants avant 60 ans...

Nadia : oui fait qu'il ne faut pas dire ça... Il faudrait qu'on fasse 55, ben là non l'autre il a vécu jusqu'à 98 ans. *Rires.* Ah ok là tu dis il prend sa retraite à 55 ans déjà c'est assez gros et là tu viens leur compter que finalement là il avait 98 ans, qu'est-ce qu'il a laissé en héritage? Il faut qu'ils rajoutent 30 et quelques années, ils vont dire « ah non sérieux là. » fait que retraite 55 puis là, je ne sais pas trop, il avait un bon programme de pension. Il a dit je n'ai jamais eu besoin de toucher à ça, je vais garder ça pour l'héritage de mes enfants. Puis il est mort à 98 ans. Puis la là c'est sûr que ça les décourage. (28 février 2006, 667-676)

La question « après plusieurs années » ne pousse pas vraiment les élèves à généraliser, à trouver une « manière de faire » générale. L'enseignante propose à cette fin de donner un nombre d'années qui va demander beaucoup de calculs, de changer l'année de départ, d'arrivée...

Arguments invoqués à l'appui de la tâche initiale et redéfinie	
Arguments de l'enseignante	**Arguments de la chercheure**
- Un problème qui est courant en secondaire 4 ou 5. Idée de préparer à un type de problème qu'ils vont rencontrer, aux apprentissages subséquents.	- Tâche qui amène un contrôle sous la dimension choix d'une stratégie de calcul plus efficace.

- Une intention en arrière : faire trouver une manière de calculer générale - Une reformulation du problème de départ pour pousser les élèves à généraliser (joue sur différentes variables).	

Tableau 4.1.1.3b Placement d'argent : arguments invoqués à l'appui de la tâche initiale et redéfinie

Deux perspectives différentes sont de nouveau mises en œuvre dans ce choix : du côté de la chercheure, un cadre de référence sur le contrôle, très présent on le voit depuis le début, dans ce qui guide; du côté de l'enseignante, des intentions, des manières de faire puisant à son expérience de pratique avec les élèves (jouer sur les nombres, changer le nombre de départ, d'arrivée...pour forcer une généralisation), une connaissance du curriculum et de ce qui se fait dans les années subséquentes.

c) Autour de la tâche redéfinie : une analyse *a priori*

Nadia fait là encore spontanément une analyse réflexive de la tâche. Elle prend en compte à la fois deux aspects qui sont imbriqués tout au long de son discours :

- Une anticipation de ce que les élèves vont faire dans le problème proposé (comment le modifier puisqu'ils ne généralisent pas, pour contrer les calculs à mesure...)
- Une anticipation de la façon dont elle va gérer la classe (autour du problème)

- Une anticipation d'une difficulté des élèves à fonctionner sans nombres (C)

C : oui, il faut qu'ils généralisent. Mais comment on va le mener parce que les élèves vont nous dire « après plusieurs années, donnez-moi l'année. »

- Une anticipation des difficultés des élèves dans le calcul du montant après intérêt : stratégie de calcul plus efficace pas perçue (E)

Nadia : Faire fois 1,1 ils ne savent pas là.
C : non?
Nadia : non même en secondaire 5 ils ont de la misère avec ça, ils vont te dire 500, 10% de 500 c'est 50, fait que là il a 550 fois 10% c'est 55... là il est rendu à

605 et là il va se dire « ben crime il doit y avoir une façon plus rapide de calculer ça. »[75] (28 février 2006, 463-470)

- Une anticipation des procédures de résolution possibles des élèves (E)

Nadia anticipe ce que les élèves vont faire (recours à une table de valeurs).

Nadia : oui tu ne fais pas ça, sa retraite à 65 ans, combien d'argent il aurait? Puis là ils vont peut-être trouver quelque chose et ils vont dire « oh mais là c'est long à compter, bon ben là... » Il y en a qui vont se mettre à compter et ils vont faire une table de valeurs, il y en a qui y tiennent hein? Il faut faire une table, tout, tout, tout. (28 février 2006, 485-489)

Une didactique praticienne explicitée (autour du problème)

- ***Piquer la curiosité, les amener à s'engager dans le problème***

Nadia : ouais mais tu leur dis « je serais gentille si je te disais combien d'années hein? Mais je ne te le dis pas. Puis je ne sais pas le gars, il a peut-être commencé ça à 18 ans et il a maintenant 65 ans, maintenant il a 5 ans. »... « Si j'étais assez gentille pour te le donner le nombre d'années, qu'est-ce que tu ferais? »

- ***Expliciter l'intention aux élèves, après avoir piqué leur curiosité***

Nadia : Puis là mais là ils sont capables de te dire « je vais faire fois ça, je vais rajouter ça, je vais faire fois ça, je vais rajouter ça... » Je vais leur dire « ouais mais là là je veux une formule qui marche pour n'importe qui et pour n'importe quel nombre d'années là. ».

  - ***Les amener à voir la pertinence de généraliser***

Nadia : oui moi je veux arriver et je dois refaire tous ces calculs vite là, tu imagines-tu là? Ok si le gars est mort dans un accident d'auto à 60 ans ok là mais si le gars veut savoir vite quand, tu ne vas calculer année après année surtout s'il a commencé à 18 ans. (...) Si tu dis dans trois ans c'est sûr qu'ils vont compter comme ça mais si tu leur dis dans 60 là...est-ce que tu vas calculer ça 60 fois? (28 février 2006, 453-458)

- ***Piquer la curiosité pour les amener à aller plus loin, vers quelque chose de plus efficace***

Comme nous l'avons déjà relevé, Nadia pique la curiosité des élèves pour les pousser à trouver quelque chose de plus efficace, à quitter le calcul un à un.

C : ils vont tout calculer?

---

[75] Les élèves ne font pas le lien « montant + 10% du montant revient à calculer le 110% du montant ». Nous ne sommes pas sûrs qu'on prenne le soin de voir le raisonnement sous-jacent en contexte scolaire, d'expliciter aux élèves d'où vient le 110.

Nadia : ah oui, je te le dis, mais toi tu peux arriver, moi ce que je fais des fois là c'est que je leur donne un problème comme ça ils le font, puis là je suis avec ma calculatrice et je fais « ok, 65 moins 18 ça fait 47 ans, fait que je fais 1,1 exposant 47… et là le gars il va avoir tant » et là je leur demande « est-ce que vous avez fini? » « mais là c'est long! », « mais vous n'êtes pas vite ». Je leur fais toujours des affaires comme ça « mais vous n'êtes pas vite » et ça fait comme un clic et en plus je prends mon temps là. Je leur dis « l'avez-vous la réponse? Vous n'êtes pas vite! » *Rires.* Puis là il y en a un « mais là vous avez un truc ou vous l'aviez faite d'avance. » Et là je leur dis non, mais ça c'est le fun qu'ils pensent que je l'ai fait d'avance, alors je leur dis « mettons qu'il prend sa retraite à 59 ans, mais que je ne le sais pas là. » Tu leur demandes « à quel âge est-ce qu'il va prendre sa retraite? » Comme ça ils ne peuvent pas dire que j'ai calculé d'avance là ou que j'ai un truc. Je faisais ça aussi quand on a fait Pythagore avec un angle de 30 degrés, je leur disais « dessinez-moi un triangle avec un angle de 30 degrés n'importe lequel, toi là dis-moi ce côté-là dis-moi ça fait combien » et là je trouvais toutes les affaires et là il y en avait qui me disait « essaie avec le mien, essaie avec le mien. » Là il y en a un qui m'a accusé qui a dit « elle a une liste avec tous les côtés possibles », j'ai dit « franchement là, tu ne t'imagines pas la liste là, 5,8 tu crois que j'ai ça moi? », il y en d'autres qui disent « oh elle a un truc » et tu en as toujours un qui s'aperçoit « ben non c'est toujours la moitié. » (28 février 2006, 498-512)

- ***Déstabiliser pour forcer un passage à quelque chose de plus efficace (E)***

Nadia prévoit un ajout dans l'énoncé de la situation pour déstabiliser les élèves qui font une table de valeurs. La chercheure souligne alors que les élèves qui utilisent ce moyen ne vont pas être déstabilisés quelle que soit l'année de retraite choisie (qui va se rapprocher des 60 ans), les élèves qui ont fait une table de valeurs vont juste la rallonger de quelques lignes. Un autre changement est alors apporté par l'enseignante celui de choisir 98 ans. Nadia cherche à déstabiliser les élèves en les laissant s'engager dans une stratégie, et là introduit un gros nombre qui va les dérouter et les questionner sur la stratégie qu'ils ont choisie.

C : le 98 on ne leur dit pas tout de suite.
Nadia : non on ne leur dit pas tout de suite là on voit ce qu'ils font puis tout ça ok? Puis là s'il y en a qui ont fait une table de valeurs ou tout ça… Mais on ne leur dit pas tout de suite. On leur dit « est-ce qu'il y a quelqu'un qui a trouvé quelque chose? C'est combien, est-ce que tout le monde est d'accord? Bla-bla-bla ». Mais là finalement le gars est mort à 98 ans, qu'est-ce que ça a donné son héritage. (28 février 2006, 663-682)

<table>
<tr><th colspan="2">Une analyse a priori de la tâche redéfinie</th></tr>
<tr><th>Éléments imbriqués soulevés par l'enseignante</th><th>Éléments soulevés par la chercheure</th></tr>
<tr><td>Une anticipation de ce que les élèves vont faire dans le problème proposé :
- Une anticipation des difficultés des élèves dans le calcul du montant après intérêt : stratégie de calcul plus efficace pas perçue
- Une anticipation des procédures de résolution possibles des élèves

Une anticipation de la façon dont elle va gérer la classe (une didactique praticienne explicitée autour du problème) :
- Piquer la curiosité, les amener à s'engager dans le problème.
- Expliciter l'intention aux élèves, après avoir piqué leur curiosité
- Les amener à voir la pertinence de généraliser
- Piquer la curiosité pour les amener à aller plus loin, vers quelque chose de plus efficace
- Déstabiliser pour forcer un passage à quelque chose de plus efficace</td><td>- Une anticipation d'une difficulté des élèves à fonctionner sans nombres</td></tr>
</table>

Tableau 4.1.1.3c Placement d'argent : une analyse *a priori* de la tâche redéfinie

Dans cette analyse *a priori* du problème, des éléments importants ressortent du point de vue du contrôle, autour d'indicateurs de la part des élèves (les élèves n'iront pas spontanément vers une stratégie plus efficace) et de stratégies d'intervention susceptibles de contribuer au développement de ce contrôle (piquer la curiosité pour les amener à aller vers quelque chose de plus efficace; déstabiliser pour forcer un passage à quelque chose de plus efficace). Il est intéressant de noter que dans cette élaboration, la chercheure est un peu en retrait, les stratégies d'intervention (le plan de l'action en classe) renvoyant à l'expertise de l'enseignante. La chercheure se fait ici l'interprète de la voix de l'enseignante, qu'elle contribue à expliciter.

4.1.1.4 Qu'est-ce qui se dégage à cette étape de l'analyse du bloc problèmes?

Nous avons procédé à une lecture transversale de l'analyse des différents problèmes, en regroupant les différents codes, obtenus au premier niveau de codage, en catégories. Cette catégorisation ouvre la voix à une théorisation qui va se préciser au fil du chapitre : cette catégorisation, qui constituera le fil directeur pour la suite de l'analyse, va en effet se raffiner au fil des différents blocs.

I. Autour d'une didactique d'intervention visant le développement du contrôle
1. Des composantes du contrôle explicitées en lien avec les différents problèmes *Problème des robots* - Construction d'une représentation d'une situation complexe (extraire les données quantitatives et voir les relations entre les données) (C) - Anticipation de l'ordre de grandeur avant toute résolution (C et E) - Engagement réfléchi (C et E) - Retour sur la réponse, sur le caractère pertinent de cette réponse en lien avec le problème (C et E) - Faire ressortir l'écriture exponentielle comme une écriture efficace (C) *Problèmes des abeilles et des bactéries* - Retour sur le sens de la réponse, interprétation en contexte (C+E) - Retour sur le problème (E) *Problème du placement d'argent* - Discernement, choix d'une stratégie efficace (C+E) **2. Une analyse des éléments des problèmes qui favorisent le contrôle (une entrée sur l'analyse des problèmes eux-mêmes)** *Problème des robots* - Question qui n'amène pas à calculer mais qui pousse à réfléchir sur ce qui a pu arriver (E) - Force une anticipation de l'ordre de grandeur (C et E) *Problèmes des abeilles et des bactéries* - Problèmes non routiniers qui mettent les élèves dans une attitude d'engagement plus réfléchi / on est sur le sens (E) - Problèmes non routiniers, non usuels pour les élèves qui les poussent à vérifier

puisqu'il y a un défi (E) *Problème du placement d'argent* - Des variables introduites (gros nombres, nombre de départ, d'arrivée,...) dans le problème qui forcent le passage vers une stratégie plus efficace.
3. Des stratégies d'intervention (explicitées par l'enseignante) qui favorisent une activité de contrôle (et qui viennent éclairer sa didactique praticienne) *Problème des robots* - Le principe dit « clash » : déstabiliser, mettre en doute de manière à forcer un retour sur la réponse. (Stratégie d'intervention ancrée dans la pratique de l'enseignante, les élèves sont habitués à avoir de telles interventions). *Problème du Placement d'argent* - Déstabiliser les élèves, les dérouter (pour forcer un passage à quelque chose de plus efficace - Piquer la curiosité pour les amener à s'engager dans le problème - Piquer la curiosité pour les pousser à trouver une stratégie plus efficace, à quitter le calcul un à un. - Expliciter l'intention aux élèves, après avoir piqué leur curiosité. - Les amener à voir la pertinence de généraliser.
4. Indicateurs de contrôle de la part des élèves explicités par l'enseignante en lien avec les problèmes *Problème des robots* Réaction explicite des élèves dans leur discours (« ça n'a pas d'allure, ça ne marche pas madame ») et sur leurs visages. *Problème du placement d'argent* Certains élèves ne vont pas dans ce cas vers une stratégie plus efficace qu'ils ne perçoivent pas (E) ce qui n'est pas forcément un indicateur de difficulté de contrôle, tout dépend de la stratégie utilisée par l'élève.
II. Contributions de la didactique de recherche et de la didactique praticienne au choix, à la modification des tâches / des perspectives différentes

Arguments invoqués par l'enseignante	Arguments invoqués par la chercheure
Problème des robots - À la recherche de situations problèmes,	*Problème des robots* - Donner du sens à l'accroissement

ancrage dans la réforme - Recherche de contextes en algèbre - Situations originales, différentes de la routine - Problème accessible, entrée possible pour les élèves *Problèmes des abeilles et des bactéries* - Des problèmes qui touchent à des contenus différents (trouver l'exposant versus trouver le résultat d'un nombre élevé à une certaine puissance) - Jouer sur des bases différentes *Problèmes des abeilles, des bactéries et du placement d'argent* - Préparer au contenu des années subséquentes - Reformuler le problème de départ pour pousser les élèves à généraliser	exponentiel, à introduire l'écriture - En opposition aux aspects calculatoires *Problème des robots, des abeilles, des bactéries, du placement d'argent* - Référence au contrôle (anticipation, engagement réfléchi, vérification, choix éclairé)

III. Analyse a priori : anticipation des procédures de résolution et des difficultés des élèves (contributions autres) *Problème des robots* - Anticipation d'une procédure de résolution : recours à un arbre (E) - Erreurs possibles des élèves puisant à des connaissances didactiques issues de la recherche (multiplication de 36 par 2) (C) - Difficultés à calculer le résultat sur la calculatrice, des erreurs dans les calculs explicitées (C et E) *Problème des abeilles* - Anticipation d'une procédure de résolution : essais erreurs (E) *Problème du placement d'argent* - Procédure de résolution : table de valeurs (E) - Difficulté des élèves à fonctionner sans nombres (C) - Dans le calcul du montant après intérêt : stratégie de calcul plus efficace pas perçue (E)

Tableau 4.1.1.3d Catégories et sous catégories émergentes issues de l'analyse du bloc *Problèmes : de la tâche initiale à la tâche redéfinie*

Pour compléter cette partie (avant d'entrer sur l'analyse des tâches effectives en classe), nous reviendrons sur les choix et les arguments qui ont menés à préciser un certain scénario autour de ces problèmes. Les différents problèmes retenus s'insèrent en effet dans une certaine séquence qui a été pensée par l'enseignante et la chercheure lors des rencontres, et dont l'ordre n'est pas arbitraire. Il est intéressant de se demander sur quelles bases reposent les choix relatifs à l'ordre retenu et au scénario anticipé dans cette planification. Dans les discussions qui suivent, les stratégies d'intervention de l'enseignante se précisent.

4.1.2 Le scénario redéfini conjointement : les choix sous-jacents, les raisons en arrière de l'exploitation de la séquence retenue avant expérimentation

Le scénario prévu avant expérimentation est consigné dans le tableau qui suit. Nous avons seulement retranscrit dans la séance 2 la partie relative au bloc résolution de problèmes, la séance se poursuivant sur d'autres blocs (*Information historique à propos de la notation* et *Réflexion sur la notation*).

Séance 1	Séance 2
1. Problème des robots (20 minutes) - Reformulation du problème par les élèves - Résolution du problème en équipes - Retour différé à la séance 2 2. Problème des abeilles (15 minutes) - Résolution en équipes - Les solutions sont mises en commun : argumentation autour de plusieurs interprétations possibles de la situation 3. Problème sur le placement d'argent (40 minutes) - Résolution en grand groupe amorcée (pour les 3 ans) - Résolution en équipes - Retour en grand groupe	1. Question quizz (5 minutes, donnée individuellement) : problème des bactéries. 2. Retour sur le problème des robots (15 minutes) - Validation des différentes stratégies utilisées pour résoudre le problème.

Tableau 4.1.2 Contenu planifié des deux premières séances en classe

Nous reviendrons ci-dessous sur la discussion autour de l'exploitation anticipée de chacun de ces problèmes et sur l'enchaînement prévu.

4.1.2.1 Analyse de la discussion autour de l'exploitation du problème des robots (telle que planifiée)

La chercheure propose de donner le problème des robots en premier pour introduire la notation exponentielle. L'enseignante appuie cette décision jugeant la situation des robots visuelle, les élèves pouvant s'y engager facilement et celle-ci permettant de les mettre en situation. L'analyse fait ressortir des stratégies d'intervention dans l'exploitation prévue du problème en classe, ainsi que les raisons sous-jacentes.

- ***Lecture individuelle du problème par l'élève et explication dans ses mots. Rationnel sous-jacent : relever leur compréhension de la situation (repérer s'ils ont bien compris) (C)***

C : <u>pourquoi on ne leur demande pas de lire le problème, on les laisse travailler et après quand on fait le retour on leur demande « explique-nous le problème, qu'est-ce que tu as compris? » Parce que c'est une histoire… Au lieu de le faire nous, qu'ils le fassent eux pour voir s'ils ont bien compris</u>.

Nadia : ok. (28 février, 261-263)

- ***Résolution du problème en équipes. Rationnel sous-jacent : importance de travailler en équipes pour que les élèves partagent leurs stratégies (C)***

Nadia : Là c'est ça <u>est-ce qu'on les fait travailler tout le temps en équipe de deux ou</u>…

C : <u>je pense que c'est bon qu'ils travaillent en équipe sur les problèmes, après peut-être les exercices techniques ils peuvent les faire tous seuls mais les problèmes ce serait mieux en équipe pour qu'ils puissent partager ce qu'ils trouvent</u>.

Nadia : oui, ok. (28 février, 520-524)

- ***Repérer les stratégies des élèves avant de faire le retour avec les élèves. Rationnel sous-jacent : avoir le temps de regarder les solutions / Se préparer à bien intervenir (E)***

Nadia : <u>il faut qu'on regarde ce qu'ils ont fait</u>. (…) <u>je préfère le regarder avant pour voir comment on fait le retour, parce que des fois tu le mets comme ça</u> *(sous-*

entendu la solution) et tu n'as pas le temps de réfléchir. Je préfère avoir le temps de réfléchir là-dessus. (6 mars, 70-73)

- ***Repérer les stratégies intéressantes et les faire retranscrire par l'équipe sur un transparent qui sera utilisé lors de la deuxième séance. Rationnel sous-jacent : permet de travailler la compétence de communication chez les élèves (E)***

Nadia : Fait que circule entre les bureaux et quand tu vois quelque chose d'intéressant tu dis « ah ok, ça tu le mets sur ce bout d'acétate là. »

C : j'avais pensé de récupérer leurs copies à la fin du cours et d'écrire moi sur une acétate les différentes stratégies qui sont ressorties mais c'est beaucoup mieux si c'est eux qui l'écrivent.

Nadia : oui parce qu'on peut travailler sur comment ils communiquent les choses, si c'est efficace quand on livre. C'est comme ça qu'ils ont compris pourquoi il fallait écrire proprement. (6 mars, 41-55)

- ***Récupérer les différentes stratégies des élèves sur acétate, s'entendre sur un choix à retenir. Rationnel sous-jacent : voir la pertinence d'aller vers une stratégie plus efficace avec l'écriture exponentielle (C)***

C : On récupère les stratégies des élèves et au cours 2, on leur présente ces stratégies sur une acétate ce qu'ils ont trouvé et là on discute avec eux sur les différentes stratégies « qu'est-ce que vous en pensez ? Laquelle on pourrait choisir, parce qu'il faut qu'on se mette d'accord.» Et là on va voir que l'exponentielle est la plus efficace et là on leur sort l'historique. On fait juste le bout sur l'historique sur les exposants positifs, on garde le bout sur les exposants négatifs et on le ressort quand on va les traiter.

Nadia : ah oui c'est bon. (6 mars, 26-32)

Autour de l'exploitation (anticipé) du problème des robots	
Éléments amenés par l'enseignante	**Éléments amenés par la chercheure**
- Repérer les stratégies des élèves avant de faire le retour avec eux. Rationnel sous-jacent : avoir le temps de regarder les solutions / Se préparer à bien intervenir - Les stratégies sont retranscrites par chaque équipe sur un transparent qu'on va utiliser à la deuxième séance. Rationnel sous-jacent : ce qui permet de travailler la compétence de communication	- Lecture individuelle du problème par l'élève et explication dans ses mots. Relever leur compréhension de la situation (repérer s'ils ont bien compris) - Résolution en équipe. Rationnel sous-jacent : importance de travailler en équipe pour que les élèves partagent leurs stratégies - Récupérer les stratégies des élèves sur acétate et discussion en classe pour amener les élèves à voir que l'exponentielle est l'écriture la plus efficace.

Tableau 4.1.2.1 Exploitation du problème des robots : scénario redéfini conjointement

4.1.2.2 Analyse de la discussion autour de l'exploitation du problème des abeilles

L'analyse a fait ressortir les stratégies d'intervention suivantes dans l'exploitation prévue du problème en classe.

Exploitation (anticipée) du problème des abeilles	
Éléments amenés par l'enseignante	**Éléments amenés par la chercheure**
- Faire ressortir différentes stratégies utilisées dans la classe	
- Repérer des élèves qui ont utilisé des stratégies intéressantes, et aller les chercher pour expliquer leurs stratégies *(élément amené à la fois par l'enseignante et par la chercheure).*	

Tableau 4.1.2.2 Exploitation du problème des abeilles : scénario redéfini conjointement

4.1.2.3 Analyse de la discussion autour de l'exploitation de la situation du placement d'argent

Les stratégies d'intervention mises en évidence dans ce cas sont :

- ***Procéder à un calcul du taux d'intérêt pour les 3 premières années avec les élèves / Rationnel sous-jacent : les aider à s'approprier le problème (E)***

Nadia : on lit ça avec eux puis on leur demande « ça veut dire quoi, comment on ferait pour calculer ça ? » Juste pour voir s'ils comprennent le principe ou.... (...) Ceci c'est juste pour qu'ils s'approprient le problème et qu'ils comprennent quoi faire comment ça marche. (6 mars, 94-109)

- ***Leur expliquer comment marchent les taux d'intérêt (E) / Raison sous-jacente : une connaissance des erreurs qu'ils font***

Nadia : « Steve reçoit 500 dollars à Noël, très prévenant il décide de placer son argent à un taux annuel de 10%, il voudrait savoir combien d'argent il va avoir après 3 ans, peux-tu l'aider ? » Là il faudra peut-être leur expliquer comment ça marche le taux d'intérêt. Eux autres ce qu'ils pensent c'est qu'ils font 10% de 500 c'est 50, fait qu'ils vont dire ok 50 par année, donc 150. (6 mars, 88-92)

- ***Les laisser chercher sur le problème (C et E)***

C : c'est important qu'on les laisse chercher.
Nadia : oui, oui, on les laisse rocher, puis s'il n'y en a pas un qui se réveille et qui se dit « Ok, bon Steve est mort à 98 ans, ah non, sérieux là, il faut qu'il y ait un truc là. » Moi ce que je ferais c'est que je les laisserais travailler, ils gossent, ils gossent, ils gossent puis là soit qu'ils se réveillent soit qu'ils ne se réveillent pas. (6 mars, 122-127)

- ***Prendre du temps pour le retour : pour chaque équipe, aller chercher la façon dont ils ont procédé, s'ils ont été bloqués,… (E)***

Nadia : moi je les laisserais travailler là-dessus un 20 minutes. Il faudrait se réserver un 15 minutes à la fin pour faire le retour pour que chaque équipe communique, dise comment ils ont fait, comment ils s'y sont pris, s'ils ont été bloqués, s'ils ont trouvé ça long, qu'est-ce qu'ils ont fait, est-ce qu'ils ont trouvé une façon… (28 février, 613-618)

- ***Repérer les élèves qui font des calculs à mesure versus ceux qui ont trouvé une stratégie efficace (E)***

Nadia : Fait qu'on leur laisse 25 minutes pour patauger dans le problème. S'ils n'arrivent à rien ce n'est pas grave là mais au moins on va avoir une idée de ceux qui essaient de calculer tout le temps à la mitaine pendant 47 ans, ou ceux qui sont allés se chercher une stratégie efficace. (28 février, 619-622)

- ***Piquer la curiosité pour amener les élèves à voir qu'il y a une stratégie plus efficace (E)***

Nadia : Ok fait que peut-être qu'il y en a un qui va se réveiller et qui va dire « ça n'a pas d'allure il doit y avoir un truc. » Et si personne se réveille là après ça toi tu arrives avec ta situation, tu prends ta calculatrice, tu fais ta petite formule puis là tu dis « là c'est facile, j'ai trouvé combien. » Et là ils vont dire « mais là, ça ne se fait pas vite de même. » Là ils vont voir qu'il y a un truc. (6 mars, 128-134)

Exploitation (anticipée) du problème du placement d'argent	
Éléments amenés par l'enseignante	**Éléments amenés par la chercheure**
- Procéder à un calcul du taux d'intérêt pour les 3 premières années avec les élèves. Rationnel sous-jacent : les aider à s'approprier le problème - Leur expliquer comment marchent les taux d'intérêt. Raison sous-jacente : une connaissance des erreurs qu'ils font - Prendre du temps pour le retour : pour chaque équipe, aller chercher la façon dont	

ils ont procédé,... - Repérer les élèves qui font des calculs à mesure versus ceux qui ont trouvé une stratégie efficace. - Piquer la curiosité pour amener les élèves à voir qu'il y a une stratégie plus efficace	
- Les laisser chercher sur le problème (C et E) Idée sous-jacente : leur faire voir la pertinence d'aller éventuellement vers quelque chose de plus efficace (E)	

Tableau 4.1.2.3 Exploitation du problème du placement d'argent : scénario redéfini conjointement

4.1.2.4 Analyse de la discussion autour de l'ordre de passation des différents problèmes (robots, bactéries, abeilles, placement d'argent)

- Sur le choix du premier problème

Problème des robots en premier / Arguments sous-jacents :

- ***Mettre les élèves en situation (E)***
- ***Une situation que l'on peut visualiser de sorte que les élèves sont capables de s'y engager (E)***

Nadia : ouais. Moi je leur donnerais le problème des robots pour les mettre en situation parce qu'ils sont capables de le faire, c'est visuel, (...) Bon, après ça là on devrait les lancer sur ces trois problèmes *(abeilles, bactéries et placement d'argent).* (28 février, 378-383)

- Sur la place de l'information historique sur la notation exponentielle

Reportée à la deuxième séance. Raison sous-jacente : ne pas influencer les solutions, les écritures des élèves (C)

C : et si on leur parle de l'historique, on risque de les mettre dans la voie que c'est les exposants qu'on va travailler, et là ils vont résoudre la situation avec des exposants. (28 février, 284-286)

(...)

C : j'ai repensé au problème des robots et à l'historique. Quand on va faire le problème des robots, il y a plein de stratégies qui vont ressortir, il n'y a pas forcément l'écriture exponentielle qui va sortir.

Nadia : ça c'est vrai.

C : on pourrait donc d'abord regarder les stratégies que les élèves ont utilisées, on ne met pas l'historique tout de suite, parce que si on leur parle déjà de l'historique c'est comme leur dire que les écritures qu'ils ont trouvées ne sont pas bonnes ce qu'il faut écrire c'est l'exponentielle. (6 mars, 18-26)

- **Une gradation, un ordre des problèmes en fonction de leur complexité et de ce qu'ils vont chercher**

Idée de donner une situation facile au départ (E)

C : dans quel ordre on les donne?

Nadia : là je suis en train de me demander, est-ce que tu veux qu'on essaie de trouver quelque chose de plus facile au début, fait que si on fait ça on pourrait leur donner.... (28 février, 532-535)

Placement d'argent considéré comme une situation difficile (C)

C : placement d'argent il est compliqué pour le début je trouve.

Nadia : c'est ça lui je le mettrais à la fin. (28 février, 536-537)

Abeilles facile car c'est visuel (E)

Nadia : les abeilles parce que c'est visuel, parce que visuellement c'est facile de comprendre qu'est-ce qui se passe. (28 février, 539-540)

En faire moins mais mieux les travailler : choix d'un problème (parmi abeilles, bactéries) pour tenir compte des bases différentes (E)

C : les deux (bactéries et abeilles) vont chercher la même chose.

Nadia : ouais fait qu'il faudrait choisir un des deux, mais comme on vient de faire les robots que c'est fois 2...

C : on fait les abeilles. *(sous-entendu autre base)*

Nadia : ouais, fait qu'on va enlever les bactéries, on est mieux d'en faire moins mais de mieux les travailler. On fait deuxièmement les abeilles.

C : ok, les robots ensuite les abeilles. On leur donne et on les résout tout de suite. (28 février, 541-547)

Bactéries comme quiz résolu individuellement. Raison sous-jacente : avoir des indices des différentes stratégies développées à ce stade par les élèves (E et C)

C : les bactéries on pourrait le garder pour le prochain cours pour voir ce qu'ils ont compris.

Nadia : ouais on pourrait le mettre comme genre un petit quiz début de cours là...

C : ah oui c'est bon ça.

Nadia : là regarde on arrive au début du cours « là j'en ai une à vous proposer », on leur donne celle là sur acétate et tu ramasses les feuilles tout de suite.

C : ah ouais! (28 février, 532-559)

(...)

Nadia : comme ça tu vas voir... ça va te donner comme...

C : un feedback, un compte rendu d'où ils en sont, des stratégies qu'ils utilisent après notre intervention. (6 mars, 178-180)

- **Une organisation aussi liée au souci d'aller voir le développement du contrôle chez l'élève : l'élève réinvestit-il ce qui a été vu précédemment ?**

Ne pas leur donner les trois problèmes d'un coup, mais un à la fois pour contrôler ce qui se passe (du point de vue de la pratique) et pouvoir prendre des données (du point de vue de la recherche) (E)

Nadia : mais je ne veux pas leur donner les trois problèmes tout d'un coup et qu'ils les fassent, je veux leur en donner un, ils travaillent dessus...

C : oui c'est mieux.

Nadia : penses-tu que c'est mieux même pour toi c'est mieux aussi pour prendre des données. Si on les donne tous d'un coup, là on va avoir les équipes pas rendues à la même place, ça va être difficile de contrôler s'il y en a qui finissent bien en avance ou... (28 février, 525-531)

Souci d'aller voir les élèves qui manifestent un contrôle : se traduisant pour l'enseignante par un réinvestissement de stratégies d'un problème à l'autre, et par une vérification (E)

En référence aux stratégies qu'ils utilisent dans le quiz :

Nadia : Là tu es mieux de définir c'est quoi un élève qui a du contrôle ou pas quoi... a-t-il développé des habiletés parce que ça ressemble aux robots, ça ressemble... et ce n'est pas trop compliqué et peut-être que tu vas voir s'ils ont développé des habiletés sur le contrôle. (28 février, 560-564)

(...)

Nadia : On va leur laisser l'affaire des bactéries, tout récolter et ne rien leur dire à propos de ça parce que ça c'est ton affaire de contrôle. Parce qu'on dit manque de contrôle mais en fait avec cette situation on va voir s'ils réinvestissent tout ce qu'on a fait dans l'autre cours, là on va le voir.

C : oui parce que cette situation ressemble pas mal à celle de l'abeille, on va pouvoir voir ce qu'ils ont compris, on va le voir individuellement. (6 mars, 171-176)

(...)

Nadia : Tu vas voir si les trucs qu'on a donnés en classe, est-ce qu'ils ont appris des choses et en classe on va prendre des notes sur celui qui reste nono devant sa table de valeurs ou il ne vérifie pas, les autres vérifiaient puis après tu arrives avec la situation des bactéries et tu vas voir si tout le monde systématiquement ou la plupart... tu sais si tu vois qu'il y a des gens qui ne faisaient pas ça puis que là avec cette façon là ils se sont revérifiés, ils ont compris qu'il s'est passé quelque chose. (28 février, 567-573)

Émettre des hypothèses sur le type de problèmes qui favorise le contrôle : s'éloigner des problèmes non routiniers / nécessité d'un défi (E)

Nadia : C'est bon ce qu'on fait là, on émet des hypothèses sur le type de problèmes qui favorisent ça puis on est bonnes. *Rires.* Parce que moi je suis une personne qui vait contrôler ce que je fais, donc à chaque fois que je fais quelque chose je vais contrôler est-ce que ça a de l'allure ou pas mais les élèves ce n'est pas leur premier réflexe de faire ça. Puis il y a des problèmes qui font en sorte qu'ils vont plus le faire puis il y en a d'autres que… mais plus qu'on s'éloigne des problèmes scolaires typiques plus qu'ils vont le faire parce que quand on donne des problèmes… tu sais des affaires qu'ils voient tout le temps, c'est toujours le même type. Tu sais c'est comme si on arrive et on donne juste des exposants, bon fais de la drill d'exposants.

C : ben là ils ne vérifient pas.

Nadia : ben non parce que là il n'y a pas d'enjeu pour vérifier si c'est vrai là. (28 février, 573-584)

Repérer les élèves qui ont des stratégies de vérification (E)

Nadia : mais ça c'est correct, mais l'idée ce n'est pas tant qu'ils font ça mais c'est est-ce qu'ils vont aller vérifier après? C'est là que nous il faut qu'on se promène et qu'on voit ça. Fait qu'on pourrait prendre en note les noms de ceux qui se vérifient et ceux qui ne se vérifient pas et prendre les stratégies mais toi ce n'est pas tant ça qui t'intéresse les stratégies. (28 février, 618-622)

<table>
<tr><th colspan="2">Analyse de la discussion autour de la séquence des différents problèmes (robots, abeilles, bactéries, placement d'argent)</th></tr>
<tr><th>Éléments invoqués par l'enseignante</th><th>Éléments invoqués par la chercheure</th></tr>
<tr><td>Un choix de problème de départ en fonction des critères suivants :

- Mettre les élèves en situation
- S'assurer que les élèves sont capables de s'y engager (un énoncé visualisable qui aide à se représenter le problème)</td><td>Place du court historique sur la notation exponentielle : reportée. Raison sous-jacente : ne pas influencer les solutions, les écritures des élèves.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Une gradation, un ordre des problèmes en fonction de leur complexité et ce qu'ils vont chercher</td></tr>
<tr><td>- Idée de donner une situation facile au départ
- Des critères sous-jacents de visualisation possible (robots, abeilles sont dans ce cas)
- En faire moins mais mieux les travailler (un choix parmi deux problèmes semblables)
- Ne pas leur donner les trois problèmes d'un coup mais un à la fois. Une double rationalité en arrière : contrôler ce qui se passe (dans la pratique) et pouvoir prendre des données (de recherche)</td><td>- Placement d'argent considéré comme une situation difficile, les élèves ayant des difficultés à généraliser.</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Bactéries comme quiz résolu individuellement. Raison sous-jacente : avoir des indices des différentes stratégies développées à ce stade par les élèves.</td></tr>
<tr><td>En lien avec le développement du contrôle chez l'élève :</td><td></td></tr>
</table>

- Des indicateurs de contrôle explicités : définis par l'enseignante en termes de l'élève réinvestit-il les stratégies d'un problème à l'autre? Se vérifie-t-il? - Émet des hypothèses sur le type de problème qui favorise ce contrôle : s'éloigner des problèmes usuels, nécessité d'un défi.	

Tableau 4.1.2.4 Analyse de la discussion autour de l'ordre de passation des différents problèmes (robots, abeilles, bactéries, placement d'argent)

Une lecture transversale de ce qui précède (séquence de problèmes, exploitation anticipée de chacun des problèmes) nous amène à mettre en évidence les grandes catégories qui émergent de cette analyse.

4.1.2.5 Ce qui se dégage à cette étape

Au point 4.1.1, nous avons amorcé une construction conceptuelle autour des grandes catégories d'une didactique d'intervention visant le développement du contrôle (cf. tableau 4.1.1.3d). L'analyse du scénario anticipé fait apparaître des éléments nouveaux tel l'explicitation de nouvelles composantes du contrôle et la confirmation d'une caractéristique des problèmes pouvant favoriser une activité de contrôle.

I. Autour d'une didactique d'intervention visant le développement du contrôle
1. ***Des composantes du contrôle explicitées en lien avec les différents problèmes*** - Réinvestissement des stratégies par les élèves d'un problème à l'autre (E) - Vérification de la démarche (E) 2. ***Une analyse des éléments de problèmes qui favorisent le contrôle (une entrée sur l'analyse des problèmes eux-mêmes)*** - Problèmes non routiniers qui présentent un défi pour les élèves et forcent une vérification[76].

[76] Nous émettons un doute quant à une telle hypothèse. En effet, nous ne sommes pas sûrs qu'un problème non habituel pour les élèves soit garant d'une activité de vérification.

Dans cette analyse, nous n'avons pas d'indices sur les indicateurs de contrôle chez les élèves. Par contre, la sous-catégorie portant sur les stratégies d'intervention s'est enrichie. Nous l'avons organisé en trois temps : l'entrée dans le problème, pendant la résolution des élèves et lors du retour. Toutes les stratégies d'intervention synthétisées ici ne sont pas liées au contrôle (dans le tableau, s'il n'y a pas d'indication du contraire, les stratégies relevées sont liées au contrôle).

Stratégies d'intervention prévues dans l'exploitation	**Raisons sous-jacentes**
Entrée dans le problème	
- Faire formuler le problème par l'élève dans ses mots *(Robots)* (C)	- Repérer ce qu'en retiennent les élèves / ce qu'ils en ont compris (un indicateur de contrôle qu'il a dans le processus de résolution sur la représentation du problème)
- Leur expliquer comment marchent les taux d'intérêt *(Placement d'argent)* (E) (pas lié au contrôle)	- Une connaissance des difficultés des élèves
- Procéder à un calcul du taux d'intérêt pour les 3 premières années *(Placement d'argent)* (E) (pas lié au contrôle)	- Les aider à s'approprier le problème.
- Piquer la curiosité *(Placement d'argent)* (E)	
Pendant la résolution ou en différé (repérage)	
- Les laisser chercher sur le problème *(Placement d'argent)* (C et E)	- Importance de patauger pour voir la pertinence d'aller vers une stratégie plus efficace
- Résolution du problème en équipe *(Robots)* (C) (pas lié au contrôle)	- Faciliter un partage des stratégies
- Repérer les stratégies des élèves, leurs notations avant le retour *(Robots)* (E)	- Prendre le temps de regarder les solutions, se préparer à bien intervenir

- Repérer les stratégies des élèves, celles qui seront retranscrites *(Robots)* (E) - Faire retranscrire leurs solutions sur acétate (par les élèves) *(Robots)* (E) - Repérer les élèves qui font des calculs à mesure versus ceux qui ont trouvé une stratégie efficace *(Placement d'argent)* (E)	- Travailler la compétence à communiquer (la solution, la démarche,...)
Choix des élèves pour le retour	
- Repérer des élèves qui ont utilisé des stratégies intéressantes, aller les chercher pour le retour *(Abeilles)* (C et E) - Repérer les élèves qui font des calculs à mesure versus stratégie efficace *(Placement d'argent)* (E) **Retour** : - Aller chercher la façon dont chaque équipe a procédé *(Placement d'argent)* (E) - Retour sur les stratégies, voir que l'exponentielle est l'écriture la plus efficace *(Robots)* (C) - Faire ressortir les différentes stratégies utilisées *(Abeilles)* (E)	- Voir ceux qui passent à une stratégie plus efficace.

D'autres éléments se dégagent par ailleurs de l'analyse autour d'une autre catégorie.

<table>
<tr><th colspan="2">II. Contributions de l'enseignante et de la chercheure dans la conception du scénario retenu, redéfini / l'ordre de passation : arguments sous-jacents aux choix (faisant ressortir les deux perspectives)</th></tr>
<tr><td>Arguments amenés par l'enseignante</td><td>Arguments amenés par la chercheure</td></tr>
<tr><td>Sur le choix d'un premier problème
- Favoriser une mise en situation
- Dans laquelle les élèves sont en mesure de s'engager (visuel)

Sur la gradation des problèmes
- Facile au départ vers plus complexe
- Tenir compte du contenu (bases différentes) pour le choix entre abeilles et bactéries.

Sur l'élimination d'un problème
- En faire moins mais mieux travailler

Sur le choix de ne pas donner les trois problèmes d'un coup mais un à la fois
- Contrôler ce qui se passe, pouvoir prendre des données sur les élèves (lié à la recherche)</td><td>Sur la place de l'historique vu après la notation exponentielle
- Ne pas influencer les solutions, les écritures des élèves (dans les problèmes)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sur l'utilisation d'un quiz (bactéries) pour repérer les stratégies des élèves
- Aller voir les élèves qui se vérifient
- Voir s'ils réinvestissent ce qui a été développé précédemment
(Argument invoqué à la fois par l'enseignante et par la chercheure)</td></tr>
</table>

Tableaux 4.1.2.5 Catégories et sous catégories émergentes issues de l'analyse du scénario planifié autour du bloc *Problèmes*

Les situations planifiées ont été expérimentées en classe. Dans la tâche réelle telle qu'elle a été vécue en classe (la tâche effective), l'analyse permettra de mettre en évidence les stratégies d'intervention de l'enseignante pouvant favoriser ou ne pas favoriser le développement d'une activité de contrôle, ces stratégies nous éclairant sur sa didactique praticienne et venant enrichir la construction conceptuelle en cours (tableaux 4.1.1.3.d et 4.1.2.5). Nous relèverons également (élément nouveau dans l'analyse) des indicateurs de contrôle et de non contrôle chez les élèves en lien avec l'exploitation des problèmes, à travers les traces des verbatim des rencontres en classe et à travers leurs productions.

4.1.3 Les tâches effectives ; le scénario effectif en classe : analyse des stratégies d'intervention (en lien avec le développement du contrôle) et analyse de l'engagement des élèves (du point de vue du contrôle)

Dans les rencontres de co-production (planification conjointe avant expérimentation), l'enseignante et la chercheure ont réparti les problèmes du bloc 1 sur une séance et la moitié d'une deuxième. Sur le terrain, deux séances et une partie d'une troisième séance ont été de fait nécessaires (une séance donc de plus que prévu) pour ce premier bloc, premier indice de décalage entre tâche redéfinie et effective. Le problème du placement d'argent longuement débattu (lors de la planification), comme on l'a vu précédemment, n'a hélas pu être fait en classe, faute de temps. Voici donc le scénario effectif tel qu'il a été vécu en classe.

Séance 1 (8 mars 2006)	Séance 2 (15 mars 2006)	Séance 3 (16 mars 2006)
1. Problème des robots : - Reformulation par les élèves - Résolution en équipes - Retour différé à la séance 2. 2. Problème des abeilles : - Résolution en équipes - Les solutions sont mises en commun : argumentation	1. Problème des robots (retour) : - Synthèse des différentes stratégies utilisées par les élèves. 2. Problème des abeilles : - Retour et correction par l'enseignante et la chercheure.	1. Problème des bactéries : - Synthèse collective des différentes stratégies ayant ressorti. - Retour sur la situation des robots pour comparer ces deux situations.

autour de plusieurs interprétations possibles de la situation.	3. Historique sur la notation exponentielle (Bloc *Information historique à propos de la notation).*[77]	
	4. Problème des bactéries (quiz) - Résolution individuelle. Retour séance 3.	

Tableau 4.1.3 Description du scénario effectif en classe pour la séquence problèmes.

Pour ne pas alourdir la lecture des résultats de l'analyse du scénario effectif en classe, nous avons choisi de présenter l'exploitation d'un seul problème, celui des abeilles étalé sur deux séances. Nous donnerons pour les deux autres problèmes (robots et bactéries) les résultats obtenus après analyse des verbatims des séances en classe (cf. appendices F et G pour l'analyse complète). Nous reprenons sous forme de vignette les extraits significatifs de cette séance, en mettant en évidence des éléments (dans les commentaires) qui seront repris lors de l'analyse.

Dans la séance du 8 mars, les élèves ont formulé le problème des robots dans leurs mots, ils l'ont ensuite résolu en équipes. Le retour sur ce problème ne s'est fait que la séance d'après (le 15 mars). Pendant cette séance du 8 mars, le problème des abeilles a été également présenté aux élèves.

4.1.3.1 Analyse de l'exploitation effective du problème des abeilles lors de la séance du 8 mars

Les élèves ont résolu ce problème en équipes. Pour mieux comprendre la discussion qui s'ensuit en classe, nous consignons dans le tableau qui suit les différentes stratégies ayant ressorti. Cette analyse a été produite par la chercheure

[77] L'historique ne fait pas partie du bloc Problèmes mais est signalé ici à titre d'information.

d'après les productions des élèves (30 copies), analyse réalisée après l'expérimentation complète de la séquence.

Analyse des productions des élèves

<table>
<tr><td>Stratégie 1
L'élève calcule jour après jour le nombre d'abeilles mortes :
Jour 1 : 1
Jour 2 : 5
Jour 3 : 25
Jour 4 :125
Jour 5 : 625
Jour 6 : 3125
Jour 7 : 15 625
Jour 8 : 78 125

<u>Réponse</u> : 7 jours (2 élèves)
<u>Réponse</u> : 8 jours (2 élèves)</td><td>Stratégie 2
Ressemble à la stratégie 1 mais pour le jour 1, l'élève comptabilise 5 abeilles mortes.
Jour 1 : 5
Jour 2 : 25
Jour 3 : 125
Jour 4 :625
Jour 5 : 3125
Jour 6 : 15 625
Jour 7 : 78 125

<u>Réponse</u> : 7 jours (5 élèves)</td></tr>
<tr><td>Stratégie 3
Les élèves utilisent directement l'écriture exponentielle $5^{\text{nbre de jours}} = 60\,000$ (on obtient le même résultat qu'en utilisant la stratégie 2).
$5^6 = 15625$
$5^7 = 78\,125$
<u>Réponse</u> : 7 jours (8 élèves)
<u>Réponse</u> : 6 jours (2 élèves)</td><td>Stratégie 4
Les élèves procèdent comme ceux qui ont utilisé la stratégie 3 mais ils cherchent à avoir un nombre décimal en exposant.

<u>Réponse</u> : 6,68 jours (2 élèves)</td></tr>
<tr><td>Stratégie 5
Les élèves calculent la racine cinquième de 60 000 : $\sqrt[5]{60000} = 9{,}03$.
<u>Réponse</u> : 10 jours (4 élèves)</td><td>Aucune réponse
4 élèves</td></tr>
<tr><td colspan="2">Stratégie 6
L'élève calcule le nombre d'abeilles mortes comme dans la stratégie 1, mais il ajoute à la fin toutes les abeilles mortes (1 élève).

Dans combien de temps, l'essaim sera-t-il complètement décimé?
1e 2e 3e 4e 5e 6e 7e 8e
1 + 5 + 25 + 125 + 625 + 3125 + 15 625 + 78 125 = 9765
x5 x5 x5 x5 x5 x5 x5

après 8 jours toutes les abeilles sont mortes</td></tr>
</table>

Tableau 4.1.3.1a Analyse des productions des élèves autour du problème des abeilles

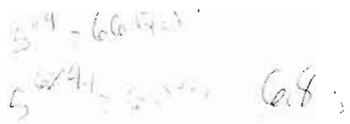
Nous pouvons remarquer que les élèves qui ont utilisé la stratégie 1 et 2 ont perçu la structure multiplicative du problème, faisant toutefois les calculs un à un. Ces élèves ont interprété le problème de deux façons différentes (dans la stratégie 1, seule la première abeille meurt le premier jour alors que dans la stratégie 2, les cinq abeilles meurent le premier jour). Certains élèves qui ont utilisé la stratégie 1 répondent 7 jours, relevant d'une absence de vérification de leur réponse. Les stratégies 3 et 6 dénotent un contrôle des élèves quant au recours à une écriture efficace (dans la stratégie 6, les élèves ajoutent les abeilles mortes jour après jour). La stratégie 4 relève d'une absence de vérification de la réponse, un non retour au problème.

Lors du retour en classe, Nadia demande à un élève, Marc, d'aller en avant pour expliquer sa démarche au reste de la classe. Le choix de cet élève n'est pas anodin, l'enseignante ayant circulé dans les rangées et ayant repéré la production de cet élève qui reflète une absence de vérification, un non retour au problème (stratégie 4). Marc s'appuie sur une représentation en arbre pour justifier l'utilisation de l'écriture exponentielle.

Analyse de l'exploitation effective en classe

Exploitation du problème des abeilles : le retour collectif sur les solutions. Autour de la solution explicitée par Marc.	
Marc : d'accord, au début moi j'ai faite. *L'élève fait le dessin suivant au tableau :* 	Solution explicitée par l'élève caractérisée par : - une modélisation du problème à l'aide de l'arbre - une représentation de la structure multiplicative qu'il perçoit La représentation de l'élève lui a permis d'anticiper la structure du problème.
Nadia : c'est quoi ça? **Marc** : ça c'est la petite abeille *(il montre le premier grand trait qu'il a tracé)*, là elle donne sa maladie à 5 personnes puis je n'ai pas fait plus parce que ça prenait de la place. 	L'élève rajoute des traits sur sa représentation en arbre pour mettre en évidence la structure multiplicative.
Marc : puis là elle *(la première abeille)* elle fait fois 5, 5 fois plus que elle, ça fait 5 fois 1 = 5, 5 fois plus qu'elle *(il montre l'une des abeilles qu'il vient de dessiner)*, puis là ça fait 5 fois 5, ce qui fait 25 et tu fais ça tant que tu remplisses le tableau.	L'élève met en évidence la régularité ($\times 5, \times 5, \times 5$, etc.)

Nadia : ok et qu'est-ce que tu as écrit sur ta feuille? Parce que là tu nous dis ça en mots mais je ne sais pas si…	- Un renvoi de l'enseignante à ce que l'élève a fait / à aller plus loin
Marc : non mais là j'ai fait ça puis *(l'élève regarde sur sa feuille)*, après je me suis dit « je vais faire 5 à la 30 » pour faire comme avec l'autre numéro *(les Robots)*, ça faisait 6 millions de trillions donc là je me suis dit « ce n'est pas ça là », donc là j'ai faite… 5 à la 6 et ça m'a donné 50 000 là.	L'élève repère que les deux problèmes *Robots* et *Abeilles* ont la même structure, passe à l'écriture exponentielle.
Les autres élèves : mais non c'est 15 625.	- Invalidation du calcul par le groupe
Marc : ça m'a donné 50 000 *(rires)*. Et là je me suis dit ce n'est pas ça, donc j'ai fait 5 à la 7 et là ça m'a donné, on va dire 72 000. Et après j'ai faite entre les deux, fait j'ai faite 5 à la 6 point 5.	- Quitte le contexte. L'élève cherche un nombre décimal de jours. Il est guidé par l'idée de trouver l'exposant qui permettra de trouver 60 000.
Nadia : 5 à la 6 point 5. **Marc** : ouais.	
François : mais il n'y a pas de demi journée (appuyé par Nicolas, qui souligne que l'exposant doit être un nombre entier).	- Invalidation de la stratégie en ramenant le résultat au contexte.
Nadia : laissez-le faire, c'est beau.	- Importance pour l'enseignante que l'élève explicite sa stratégie jusqu'au bout avant que la classe se prononce.
Marc : Là ça donnait entre les deux, on va dire entre les deux 60 000, non pas 60 000 on va plutôt dire 66 000, ok? Puis là j'ai fait 5 à la 6	L'élève ramène son résultat dans le contexte / interprétation dans le contexte.

point 9 puis ça, ça me donnait 69 000 puis là c'est pas ça, ça donnait 60 000, fait que les 9 000 abeilles de trop que ça me donnait. Donc j'ai essayé 5 à la 6 point 8 et j'ai rajouté des chiffres, je me suis rendu jusqu'à 5 à la 6 point 8544 puis là ça me donnait 66 778, ça veut dire que ça fait entre 6 point 8 jours, ça veut dire 6 jours et un bon bout de l'autre jour. (8 mars, 90-121) 	

Autour du retour sur la première solution explicitée par l'élève

Dans ces extraits plusieurs éléments ressortent, le point de vue de l'élève (Marc), de sa compréhension à travers ce qu'il explicite, nous pouvons également relever le contrôle exercé par les autres élèves sur la solution présentée ainsi que des stratégies d'intervention de l'enseignante.

Point de vue de l'élève (Marc), sa compréhension à travers ce qu'il explicite	**Contrôle exercé par les autres élèves sur la solution présentée**	**Les stratégies d'intervention mises en évidence**
- modélise la situation à des fins de résolution (arbre) - perçoit la structure multiplicative - passe à l'exponentielle (notation efficace) - effectue un encadrement pour trouver 5 exposant quoi donne 60000 - fait un retour au contexte dans	- valide / invalide ce qui est avancé : le calcul (groupe) ; le sens de la réponse en lien avec le contexte (« a-t-elle de l'allure ?) (François)	- un choix de l'élève pour le retour guidé par son repérage et où le sens de la réponse est à questionner - renvoie à ce que l'élève a fait, à aller plus loin - fait en sorte que l'élève explicite jusqu'au bout avant que les autres interviennent

l'interprétation		

Tableau 4.1.3.1b Stratégies d'intervention et indicateurs de contrôle chez les élèves autour de l'explicitation de la démarche de Marc (problème des abeilles)

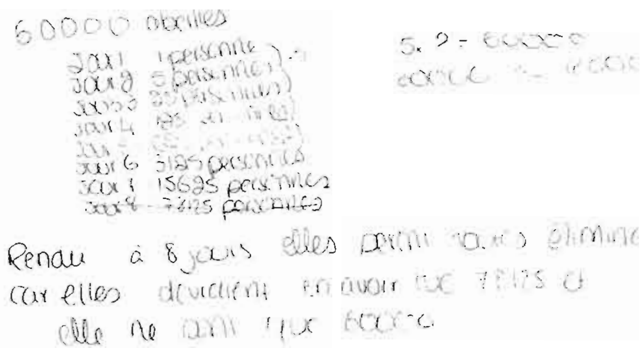
Autour d'un deuxième groupe de solutions

Plusieurs élèves *(Sam, Nicolas, François, Zaïa, Sandra, Carmen et Éva)* se prononcent sur différentes interprétations possibles de l'énoncé et de l'écriture exponentielle.

Autour de la solution explicitée par Sam	
Nicolas : <u>le problème c'est que ça prend une journée au complet pour qu'elle soit infectée</u>. (8 mars, 122) **Sam** : <u>il y a un autre problème c'est quand tu fais 5 à la 7 tu te dis, genre ça fait 7 journées oui mais la première elle crève aussi</u>. **Nadia** : ouais. **Sam** : <u>fait que ça fait une autre journée.</u> **Nadia** : ok donc ça fait une autre journée parce que la première aussi il faut qu'elle meure, je comprends, ok. François, toi tu as fait d'autres choses. (8 mars, 125- 129)	- Ces élèves sont sur le sens de la réponse, ils retournent au contexte, à une certaine interprétation de l'énoncé. - Reformulation des propos de l'élève par l'enseignante. - Fait signe qu'elle comprend l'interprétation émise. - Dirige la discussion vers un autre élève (François) qu'elle a repéré comme ayant utilisé une autre stratégie.

Sam avance ainsi qu'il faut ajouter une autre journée dans les 7 comptées puisque la première abeille prend une journée pour mourir (stratégie 6). Ce commentaire amène un contre argument de la part de François qui avance que dans 5^6 on a compté plus d'abeilles que celles qui sont réellement mortes, il faut donc les retrancher, intervention qui soulève de grosses protestations dans la classe.

Autour de la solution explicitée par François	
François : les 5 autres… mettons ils se sont multipliés 2 fois ok? Les autres qui sont mortes ne peuvent plus se multiplier fait qu'il faut que tu les enlèves du calcul. **Les autres élèves** : non mais elles sont déjà enlevées. **François** : elles ne peuvent pas s'enlever à la 7. *Les élèves parlent.* **François** : la somme se multiplie. *Les élèves parlent.* (8 mars, 130-138)	- Interprétation de l'écriture 5^6 par l'élève qui lui donne un sens dans le contexte. - Invalidation par le reste de la classe.
Nadia : bon est-ce qu'il y en a d'autres qui ont fait d'autres façons? Je sais que François et Laure ont fait d'une autre façon, est-ce qu'il y en a qui ont fait d'une autre façon? Zaïa va venir nous expliquer sa façon et après ça, François. Vas-y Zaïa puis après ça on va envoyer François. C'est François et Laure ensemble qui ont trouvé quelque chose de pas pire.	- L'enseignante ne se prononce pas sur la discussion autour de l'interprétation de l'écriture 5^6 par François. - Repérage de deux équipes intéressantes (mais on ne sait pas à ce stade pourquoi). - Désigne l'une de ces deux équipes pour exposer sa solution (nous ne pensons pas que ce choix soit aléatoire). - Pique la curiosité du reste de la classe en disant que l'une des stratégies est *« pas pire »*.
Autour de la solution explicitée par Zaïa	
Zaïa explicite ce que nous avons identifié comme la première stratégie. **Zaïa** : il y a jour 1, 2, 3, 4 et 5 puis là jour 1 il y a 1 personne. **Une élève** : ce sont des abeilles **Zaïa** : ouais, là c'est ça, jour 2 il y a 5, ici on remarque que ça fait fois 5 donc là moi j'ai fait des essais erreurs, j'arrive à 25, pour 4, 125, pour 5, 625, pour 6, 3125, pour 7, 15 625 et pour 8, 78 125 donc c'est entre 7 et 8 là. **Nadia** : ok. C'est beau. Sandra? (8 mars, 146-150)	- L'élève ramène Zaïa dans le contexte. - Zaïa décrit sa stratégie : calculs pour 1 jour, 2 jours, etc. en percevant la structure multiplicative, et encadrement, le résultat recherché est entre 15 625 et 78 125 (entre 7 et 8).

Ci après la production de Zaïa :  60000 abeilles jour 1 1 personne jour 6 3125 personnes jour 7 15625 personnes jour 8 78125 personnes Rendu à 8 jours elles seront toutes éliminées car elles devraient en avoir que 78125 et elle ne sont que 60000	- L'enseignante fait signe qu'elle a compris les explications de Zaïa sans se prononcer sur la validadité de celle-ci.

Sandra reprend la résolution de Sam, ramenant le fait qu'il faut ajouter les abeilles mortes jour après jour. Un consensus s'établit entre ces deux élèves qui n'étaient pas dans la même équipe (d'après sa production écrite, Sandra n'avait pas su résoudre ce problème). Cette idée fait chemin dans la classe, Carmen reprenant cette résolution.

Extrait	Commentaires
Sandra : <u>mais on n'ajoute pas les deux en même temps pour avoir le nombre d'abeilles?</u> Là c'est juste le nombre d'abeilles infectées et non pas le nombre d'abeilles mortes. **Nadia** : mais si elles sont infectées c'est sûr qu'elles meurent. **Sandra** : oui mais les chiffres qui sont là indiquent le nombre d'abeilles infectées…. **Sam** : <u>à la fin des 7 jours, il va y en avoir ben plus qui sont mortes</u>. **Sandra** : <u>oui c'est ça.</u> **Nadia** : Carmen?	- Une discussion a lieu autour de l'interprétation amenée par Sam. - L'enseignante intervient dans la discussion.

Carmen : ben, il faudrait prendre en considération que le jour 1, il y en a 6 qui meurent puisque la première petite abeille elle part puis quand elle revient la même journée elle en contagie est-ce que ça se dit comme ça? Elle contagie 5, donc ça fait 6 abeilles le jour 1 qui meurent. **Nadia** : elle contamine 5 abeilles. **Carmen** : moi je n'ai pas faite de même mais je viens de penser à ça. **Nadia** : ok, donc là il y en a qui meurent et il y en a d'autres qui se rajoutent. **Carmen** : la première elle, elle pogne la maladie et elle va la donner à 5 autres, là ça fait 6 puis là les 5 autres la donnent à 5 autres et là ça fait 5 fois 5, 25. La première il ne faut pas l'oublier. **Nadia** : ok, la première, la Carmen. **Edith** : mais elle va infecter les 5 autres dans la même journée. **Nadia** : ouais. **Sam** : donc ça prend une journée. (8 mars, 151-181)	- Réaction d'une autre élève (Carmen) qui appuie les propos de Sam et de Sandra en explicitant le cas de la première abeille. - Reprise des propos des élèves par l'enseignante. - L'enseignante fait signe qu'elle comprend. - Éva amène une interprétation différente de la situation *(la première abeille et les cinq autres qui sont infectées par cette abeille mourant la première journée)* alors que pour Sandra, Carmen et Sam la première abeille meurt le premier jour et les cinq abeilles infectées ne mourront que le lendemain.

Le retour collectif sur les solutions amène une discussion sur les différentes interprétations possibles de l'énoncé. Nous avons ainsi accès au point de vue de certains élèves ainsi qu'à certaines stratégies d'intervention.

Point de vue des élèves, de leur compréhension à travers ce qu'ils explicitent	**Stratégies d'intervention mises en évidence**
- Retour au contexte : donne un sens à la réponse en contexte (Nicolas, Sam, François) - Des interprétations possibles de l'énoncé sont mises en évidence montrant un contrôle sémantique sur le processus	- Dirige la discussion en ayant préalablement repéré les stratégies utilisées. - Pique la curiosité des élèves en déclarant que la résolution de certains élèves est « pas pire ».

de résolution (Nicolas, Sam, Carmen, François, Sandra, Éva). - Interprétation de l'écriture 5^6 (par François) invalidée par le reste de la classe - Résolution par essais successifs et encadrement de la réponse, montrant un contrôle sur le processus de calcul (Zaïa)	- Ne se prononce pas sur les stratégies des élèves et renvoie la validation à la classe.

Tableau 4.1.3.1c Stratégies d'intervention et indicateurs de contrôle autour d'un deuxième groupe de solutions (problème des abeilles)

L'enseignante ne prend pas position devant les différentes interprétations émises par les élèves, elle choisit de désigner une autre équipe pour qu'ils explicitent leur solution (que nous avons désigné comme la cinquième stratégie). Nadia récupère cette stratégie pour aller plus loin mais comme nous le verrons dans les prochaines séances, cette stratégie provoque des confusions auprès des élèves.

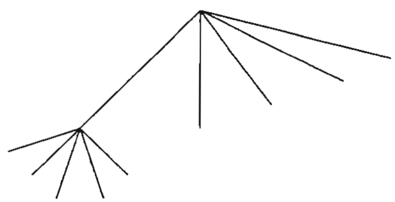
Autour d'un troisième groupe de solutions

Autour de la solution explicitée par Laure	
Nadia : ok. Bon, <u>François vient nous expliquer ce que tu as fait, Laure la même façon</u>. Émilie m'a posé une question, ça veut dire qu'elle pensait la même affaire. Viens-nous faire ça François. **François** : Laure, elle a la bonne réponse, elle. Elle passe à la télé, elle est habituée elle. **Nadia** : un des deux <u>c'est super votre affaire</u>. Viens t'en François. Ah, Laure s'est levée. *Laure va au tableau.* **Laure** : <u>ok. Je ne sais pas comment ça s'appelle… J'ai fait</u>	- Valorisation de la part de l'enseignante, elle pique du même coup la curiosité des autres élèves.

$\sqrt[5]{60000}$ (elle écrit ceci au tableau). **François** : la racine cinq cubes. **Nadia** : la racine cinq cubes… *Rires.* **François** : ben la racine cinquième. **Nadia** : la racine cinquième, ouais. **Laure** : fait que dans ma tête c'est comme l'inverse de l'exposant puis ça a marché. **Nadia** : ok parce que c'est le contraire de l'exposant. **Laure** : bon pas vraiment le contraire de l'exposant mais… ça m'a donné à peu près 9,03 jours mais bon le point 03 faisait que l'on changeait pour 10 jours puis c'est ce que ça me donnait. (8 mars, 184-203)	- L'enseignante formule en écho à l'élève. - L'enseignante reformule en écho (une deuxième fois) - L'élève a repéré qu'on cherchait en quelque sorte l'opération inverse de l'exponentielle. - L'élève contrôle le résultat obtenu puisqu'elle l'arrondit en se ramenant au contexte.

François prend alors la parole pour revenir sur la discussion précédente, ramenant son interprétation de l'écriture 5^6 dans le contexte : il faut enlever du calcul de l'exponentielle des abeilles qui sont comptées en trop. Une discussion est alors enclenchée dans la classe, Nicolas et François vont au tableau pour expliquer leurs points de vue, la classe est agitée, un consensus s'établit autour du fait que François a tort. Au tableau, la validation des propos de Nicolas et de François prend appui sur une représentation en arbre.

Extrait	**Commentaires**
François : je veux contredire les autres. **Nadia** : c'est juste pour les contredire. *Rires.* Tu aimes ça la chicane. *François va au tableau.* **François** : tout à l'heure ils disaient 6 abeilles là, mettons, il y en a un qui donne à 5 là ça fait 6. Mais la première elle est déjà morte *(il montre la première abeille)*, c'est juste elles *(les 5 autres)* qu'il faut faire à la 5. Mais dans le calcul, tu inclues elle aussi *(la première)*.	- L'enseignante laisse la place à l'argumentation - L'élève explicite son interprétation autour du cas de la première abeille et des cinq premières infectées et/ou mortes. - Invalidation des propos par le reste de la classe

<table>
<tr>
<td>
I IIIII
Les autres élèves : non, non.
Tout le monde parle, on ne comprend plus rien.
Nadia : un à la fois, chut, chut. Miranda, Nicolas, Carmen. Miranda.
Miranda : je veux te montrer quelque chose pour voir ce que tu en dis.
Nadia : attends un petit peu, j'aimerais ça finir. Nicolas, toi tu veux faire un dessin. Viens faire un dessin. Et Miranda vient aussi, on va voir si c'est bon.
Nicolas : regarde François, (Nicolas fait le dessin suivant au tableau) :

Nicolas écrit à côté de sa représentation (1 x 5 = 5, 5 x 5 = 25…)
Nicolas : c'est 5 fois 5 pas 6 fois 5, elle (la première), elle ne contamine plus personne là.
François : oui mais dans ton calcul c'est tout ça (l'élève entoure les 6 premières abeilles) que tu fais à la 5.
Tous les élèves parlent en même temps, on n'entend plus rien. Nicolas et François continuent leur discussion dans le bruit…. François compte les abeilles obtenues après deux contagions, il en compte 31 sur le schéma et il dit alors à Nicolas qu'il n'a pas de 31 ici mais 25…
</td>
<td>
- L'enseignante laisse place à d'autres points de vue.
</td>
</tr>
</table>

L'enseignante décide alors d'interrompre les deux élèves et reprend la discussion en demandant à François de reformuler ses propos pour qu'elle puisse bien comprendre et tente par la suite une explication hors contexte.

Extrait	Commentaires
Nadia : Nicolas et François retournez vous asseoir, je veux juste faire un retour sur une petite affaire. Bon, puis ça va peut-être répondre à François. Chut! Ok, Sandra, est-ce que tu peux t'asseoir à ta place, s'il te plait. François, tu peux nous expliquer ton affaire, je ne comprends pas bien ton affaire, tu veux en compter 6 toi, tu veux en compter 5, je ne comprends pas là. **François** : bon, mettons… comment je peux expliquer ça.... Quand tu fais à la 5… **Nadia** : quand tu fais exposant 5… **François** : ben tu comprends toutes les autres. **Nadia** : ouais… **François** : c'est ça.	- L'enseignante force une explication pour mieux comprendre la stratégie de François.
Nadia : toi tu veux que ça comprenne tous les autres ou tu veux que ça comprenne… mais à la 1 c'est quoi qui te dérange à la 1, c'est parce que ce n'est pas un 5, tu veux que ça fasse 6, je ne comprends pas… **François** : non…	- L'enseignante sort du contexte, elle est centrée sur l'écriture exponentielle.
Nadia : parce que tu dis 6, je ne comprends pas d'où il vient ton 6. **François** : ben il vient d'à la 5 dans le fond.	- Nadia redemande des explications au même élève dans le souci de compréhension.
Nadia : oui mais le 1 là *(Nadia va au tableau).* On a vu une loi des exposants qui dit quelque chose, 1 là c'est quoi là dans le fond? *(Elle montre l'écriture de Nicolas au tableau : 1 x 5 = 5).* Dans ce cas là c'est toujours des fois 5 et le 1 ce n'est pas un 5. Pourrais-je le remplacer pour que ce soit un 5? *Un élève répond quelque chose qu'on n'arrive pas à entendre.* **Nadia** : mais c'est quoi 1 avec un 5 exposant quelque chose? C'est 5 exposant quoi qui donne 1?	- Une institutionnalisation en rupture avec l'activité des élèves

Un élève : 0. **Nadia** : zéro. Fait que dans le fond c'est comme l'étape du zéro quand ça commence toute cette histoire là. Fait que dans le fond François ton 1 c'est comme 5 exposant 0 là. Fais que tu n'as pas d'affaire de 6 ou de truc comme ça. Oui, Carmen. (8 mars, 228-254)	

L'intervention de Carmen ramène la discussion en contexte. D'autres réactions s'ensuivent qui reposent sur l'ambiguïté de la situation telle que formulée, la discussion dérape.

Extrait	Commentaires
Carmen : la première là… il faut compter une journée de plus parce que ça prend une journée pour donner la maladie plus mourir. Elle ça lui a pris une journée de la donner aux 5 fait qu'il faut compter une journée de plus.	- L'élève ramène la discussion en contexte.
Nadia : ouais, ouais. Mais les autres ça leur a pris une journée après pour la donner aux 5 autres, ok. Fais que ça c'est une affaire qui serait discutable, y a-t-il une journée de plus ou de moins à mettre, qu'est-ce qu'on fait? Julie. *(Julie lève la main).*	- L'enseignante intervient dans la discussion, elle relativise.
Julie : je sais d'où il vient le 6, c'est que au bout de trois jours, il y a 6 abeilles qui sont mortes parce qu'il y a la première qui s'est fait contaminer puis les 5 autres qui ont été contaminées.	- Julie rejoint dans son interprétation la résolution de Sam.
Nadia : ouais. Fait qu'il y en a 6 qui sont mortes.	- L'enseignante conclut d'après les propos de Julie, elle fait ainsi signe qu'elle a compris ses explications.
Julie : ça lui prend un jour pour aller à la ruche. **Carmen** : ça fait deux jours ça là. **Nadia** : non mais même si ça lui prend… avant la ruche ça lui prend une journée quand tu meurs, quand tu as la maladie une journée après tu meurs. **Miranda** : oui mais si personne n'est contaminée…	- Une discussion a alors lieu sur le temps que ça prend aux abeilles pour mourir après infection. L'enseignante tranche.

Rires. **Stéphanie** : mettons qu'il lui reste 5 minutes à sa journée et qu'elle s'en va contaminer les autres pendant 5 minutes puis elle meurt tout de suite après puis là…. **Nadia** : ben là si, si, si, si, on peut faire plein de… on peut aussi dire que l'abeille elle ne s'est pas rendue à la ruche, elle s'est perdue fait qu'elle est la seule à être morte, elle ne va contaminer personne. Ok. Avec des si on pourrait mettre plein de scénarios, on pourrait dire une journée… *Tout le monde parle en même temps.* **Nadia** : bon fait que vous rajoutez votre petite abeille dans vos cartables, on ramasse les cartables. *Les élèves applaudissent!* (8 mars, 255, 281)	- L'enseignante clôt la discussion qui glisse, qui dérape.

Dans ce troisième groupe de solutions nous retrouvons certaines stratégies d'intervention mises en évidence précédemment, d'autres points de vue sont amenés. Le tableau ci-dessous reprend ces éléments.

Point de vue des élèves, de leur compréhension à travers ce qu'ils explicitent	**Stratégies d'intervention mises en évidence** (en ombré les stratégies qui freinent le développement d'un contrôle)
- Laure repère qu'on cherche en quelque sorte l'opération inverse de l'exponentielle - Laure contrôle le résultat obtenu, elle prend en compte le contexte dans son interprétation de la réponse (elle arrondit le résultat obtenu). - Invalidation par le groupe classe de l'interprétation amenée par François qui donne place à une discussion au tableau entre Nicolas et François. - Retour au contexte (Carmen) - Différentes interprétations en contexte (Julie, Miranda,	- Valorisation d'une des stratégies ressorties. Raison sous-jacente : Piquer la curiosité des élèves - Force une explication pour mieux comprendre. - Laisse place à l'argumentation, à différents points de vue. - Institutionnalisation en rupture avec l'activité des élèves - Ne valide pas les stratégies des élèves et demande à la classe de statuer.

Stéphanie).	

Tableau 4.1.3.1d Stratégies d'intervention et indicateurs de contrôle autour d'un troisième groupe de solutions (problème des abeilles)

Un retour sur le problème des abeilles a lieu la séance d'après (le 15 mars). Après avoir exploité la situation des robots, Nadia revient sur le problème des abeilles.

4.1.3.2 Analyse sur le retour sur le problème des abeilles lors de la séance du 15 mars

L'enseignante et la chercheure reviennent sur l'ambigüité de la situation telle que formulée, les abeilles infectées est-ce qu'elles meurent le même jour ou le lendemain? Les deux interprétations sont considérées comme correctes.

Extrait	Commentaires
Nadia : Fait que là par exemple, sachant ceci pour les robots, on a eu des abeilles après, vous vous rappelez qu'il y a eu une grosse discussion sur les abeilles. Donc si on comprend cette affaire là, ça veut dire qu'est-ce qui arrivait pour les abeilles? Est-ce que vous vous rappelez c'était quoi qui se passait?	- L'enseignante introduit la situation des abeilles en demandant aux élèves d'en expliquer le contexte. Elle fait un lien entre les deux situations (abeilles et robots), la résolution des abeilles étant être vue en regard de ce qui a été vu pour les robots.
Une élève : il y avait une qui avait une maladie, elle en contaminait 5 par jour puis là il y en avait comme 5 qui mouraient comme par jour qui étaient contaminées et ainsi de suite…	- Les éléments importants de la situation sont présents mais la structure multiplicative ainsi que la question ne sont pas là.
Nadia : ok et on demandait combien ça va prendre de temps avant que tout l'essaim soit décimé. Ok. Donc si on faisait un dessin semblable à celui là? Donc on met la première petite abeille… *C dessine l'arbre en question au tableau.* **Nadia** : qui s'en va contaminer 5.	- L'enseignante finit la description de la situation, elle reprend la question.
C : ça c'était le premier jour, on avait Carmen et là il y avait eu une	- La chercheure reprend l'ambigüité de la situation qui a

discussion très intéressante, est-ce que c'est le premier jour qu'elle meurt ou est-ce que c'est le lendemain qu'elle meurt? Est-ce que vous vous souvenez de ça? **Certains élèves** : oui. **C** : Est-ce qu'on compte le premier jour ou pas? Là on avait dit que ça dépendait de comment on comprenait le problème. S'il y en a qui considèrent que l'abeille elle a été piquée là et qu'elle est morte le jour d'après, alors on compte le jour où elle est morte, c'est-à-dire le lendemain d'avoir été piquée sinon on commence à zéro mais il faut le spécifier comment vous comprenez le problème. Les deux façons de faire sont alors bonnes. Si on regarde ici, on avait la première abeille, c'était Carmen, on voulait savoir combien de jours toute la colonie qui était de 60 000 abeilles meurent toutes. Donc ici si notre jour 1 c'est celui où la première abeille meurt. Le jour 1 il y a combien d'abeilles qui sont infectées? **Les élèves** : 6. **C** : oui, il y en a 5 ici et la première abeille. Et il y en a combien qui vont mourir? **Des élèves** : 1. **D'autres élèves** : 5. **C** : le problème il est là, le problème c'est de savoir quand est-ce que vous considérez qu'elle meurt, si elle arrive le matin et qu'elle a sa maladie, elle vient de l'extérieur, elle est allée butinée, elle infecte 5 abeilles, donc là si on compte à la fin du jour 1, il y en a combien qui sont mortes? **Les élèves** : 1 **C** : oui, il y en a une qui est morte et les 5 autres elles sont infectées. Là il y a les 5 qui sont là chacune est infectée mais elle ne le sait pas c'est le jour 2 et chacune donne sa maladie à 5 autres abeilles, donc ici il va y en avoir combien qui vont être infectées? **Nicolas** : 25. **C** : oui on en aura 5 fois plus que la dernière fois donc c'est 5	été soulevée dans la classe la séance précédente. - La chercheure spécifie que les différentes interprétations du problème sont bonnes. - On sent ici que la classe est partagée entre les interprétations possibles.

exposant 2, là il y en aura combien qui vont être mortes? **Des élèves** : 6 **C** : oui 6 et on continue comme ça et on continue comme ça. **Des élèves** : ah! **Carmen** : nous autres la manière qu'on a vu c'est qu'elles meurent le même jour… **Nadia** : ça dépend ce que tu considères, si toi tu considères… est-ce que toi tu considères que la petite abeille elle meurt à la fin du jour 1 ou est-ce que tu considères qu'elle rentre puis que bon, qu'elle meurt tout de suite après avoir infectée les autres, genre tout de suite, ok? Donc la première journée, ta petite abeille elle arrive, elle en infecte 5, ok? Donc on aura combien d'abeilles qui seront infectées? **Des élèves** : 6. **Nadia** : j'en ai 6 mais elles ne sont pas toutes mortes parce qu'elles meurent parce qu'on s'est dit qu'elles meurent à la fin du jour 1. Est-ce que je vais dire… vu qu'elles meurent à la fin du jour 1, je vais mettre une qui est morte, la première qui est rentrée le matin. **Des élèves** : ouais. **Nadia** : ok. **Carmen** : <u>mais les 6 meurent aussi d'abord</u>. **Nadia** : ben là ces 5 là elles viennent d'être infectées fait qu'elles ne vont pas mourir tout de suite. **Carmen** : <u>ils ne disent pas dans le problème qu'elles meurent le lendemain</u>. **Nadia** : ils disent au bout d'une journée tu meurs. Sam, tu vas me dire que si les 5 sont infectées le matin comme la première alors la première journée on en a 6 qui sont mortes à la fin. **Sam** : <u>c'est plus que si elle est morte, elle n'est plus infectée, donc elle ne compte plus</u>. **Nadia** : <u>regarde bien, on va dire d'abord à la première journée il n'y a 0 qui est morte, est-ce que ça marche mieux de même? Est-ce que</u>	- Carmen revient à son interprétation de la situation - L'enseignante reprend les explications, on sent une confusion dans la classe - Carmen met l'accent sur l'ambigüité de l'énoncé du problème - L'enseignante se met à la place de l'élève (Sam) pour expliciter sa stratégie en le prenant à témoin.

c'est cela que vous voulez mettre ou vous préférez mettre 1? *Des élèves parlent en même temps.* **Nadia** : l'essentiel c'est que ce n'est pas nécessairement important de savoir combien il y en a qui sont mortes exactement et tout ça, ce qu'il faut comprendre c'est qu'à chaque fois… là j'en ai 6 à quelque part qui vont mourir, êtes-vous d'accord? **Des élèves** : ouais. **Nadia** : donc là j'en ai 1 qui meurt, elle en infecte 5 autres fait là là ça en fait 6 qui meurent là. Mais ces 5 là elles sont allées en infecter 5 autres chacune, là il y en a 25 de plus qui sont infectées. Il y en avait 6 de mortes, là il y en a 25 autres qui vont mourir éventuellement, là je suis rendue à 31 abeilles qui sont mortes. Ça c'est correct. **Des élèves** : ouais. **Nadia** : là j'en ai 31 de mortes, vous pensez à ça là? Là là, parmi ces 31 les 5 dernières avant de mourir elles sont infectées quelqu'un d'autre, eux autres. On est rendus que ces 25 là elles ont infectées chacune 5 abeilles fait qu'on est rendu à l'autre étape, on en a 125 qui sont infectées on en avait déjà 31 qui sont mortes. Éventuellement les 125 se rajoutent aux 31 qui sont mortes. Est-ce que vous comprenez ça? Au fur et à mesure que les calculs avancent ben là jour 1, jour 2, jour 3, jour 4, jour 5 et elle arrive ici, après son jour 5 quand tu additionnes toutes tes abeilles qui sont mortes, après le jour 5, à la fin de la journée 5 il y en a 781 abeilles qui sont mortes. Mais les dernières avant de mourir, elles ont infectées 15 625 autres abeilles, fait à la fin de la sixième journée j'avais les 781 qui étaient déjà mortes et je rajoute à ça les 15 625 qui vont finir par mourir elles autres avec. Est-ce que ça va comme ça ou…? **Une élève** : j'aime bien de cette manière là. **Nadia** : tu aimes mieux ça? **Un autre élève** : moi je préfère l'autre.	- L'enseignante essaie d'arriver à un consensus dans la classe dans la résolution du problème - L'enseignante demande l'avis des élèves sur ses explications. Raison sous-jacente : s'assurer que les élèves suivent le raisonnement. - L'enseignante reprend la résolution étape après étape. - L'enseignante vérifie la compréhension des élèves. - L'enseignante réévalue la compréhension des élèves - Les différentes interprétations de la situation sont bien ancrées chez les élèves

Nadia : ici ce que tu verrais apparaître c'est le cumulatif des morts. C'est dur ce matin. Oui, Miranda.	- L'enseignante fait état de ce qu'elle ressent *« c'est dur ce matin. »*
Miranda : pour le jour 6 pour savoir le nombre d'abeilles qui sont mortes, on regarde le nombre d'abeilles qui ont été infectées le jour d'avant soit 3125 plus le nombre d'abeilles qui sont mortes et on additionne les deux nombres.	- L'élève redit dans ses mots les explications données et demande à l'enseignante de les valider.
Nadia : oui tu additionnes tout le temps tes morts à chaque fois, c'est juste ça que ça dit. Tout ça que l'on fait c'est... quand on arrive à notre 60 000, ben il faut tout le temps rajouter combien sont mortes avant pour savoir combien... Il faut regarder quand est-ce qu'on arrive à au moins 60 000 parce que ça n'arrivait pas juste juste là, mais moi je veux voir pour que l'essaim soit décimé, il faut que j'arrive à au moins 60 000 et quand je fais tout ça je m'aperçois que c'est la septième ou la huitième journée selon ce que vous avez pris comme point de départ c'est quand qu'elle meurt au début ou à la fin de la journée. (15 mars, 305-373)	- L'enseignante met de l'avant qu'il y a deux réponses possibles.

L'enseignante fait alors un retour sur la solution présentée par Laure, sur les racines cinquièmes. Elle leur explique qu'on fait en fait des logarithmes (notion nouvelle pour les élèves). Ces explications vont porter les élèves à confusion comme nous pouvons le voir dans les productions des élèves sur le problème des bactéries. Dans le tableau synthèse ci après nous avons ramassé les différentes stratégies d'intervention et les indicateurs de contrôle chez les élèves.

Retour sur les ABEILLES : lors de l'explicitation des différents points de vue des élèves	
STRATÉGIES d'INTERVENTION (en ombré les stratégies d'intervention qui freinent le possible développement du contrôle)	**INDICATEURS DE CONTRÔLE CHEZ LES ÉLÈVES**
Dans le choix des élèves désignés : - Nadia dirige la discussion en ayant préalablement repéré les stratégies utilisées. D'abord une stratégie qui amène un questionnement autour du sens de la réponse, ensuite des essais erreurs contrôlés avec comme réponse un encadrement, finalement une stratégie pour aller plus loin (introduction aux logarithmes) *Pendant l'explicitation des élèves* : - Renvoie à ce que l'élève a fait, à aller plus loin. - Fait en sorte que l'élève explicite jusqu'au bout avant de se prononcer - Force une explication pour mieux comprendre. - Laisse place à l'argumentation, à différents points de vue. - Institutionnalisation en rupture avec ce qui se vit en classe.	*Indicateurs de contrôle chez certains élèves* : - Marc perçoit la structure multiplicative du problème - Marc relève que le problème des abeilles a la même structure que le problème des robots. - Retour au contexte (Marc, Nicolas, Sam, Carmen, François) - Valide / invalide (François) ce qui est avancé (regard de la réponse « a-t-elle de l'allure ?). - Différentes interprétations possibles sont mises en évidence (Nicolas, Sam, Carmen, François, Sandra, Éva, Julie, Miranda et Stéphanie). - Recherche de l'opération inverse de l'exponentielle (Laure) - Arrondit le résultat obtenu, tient ainsi compte du contexte (Laure) *Indicateurs de contrôle du groupe* : - Utilisation d'une représentation visuelle pour modéliser la tâche - Passage à l'exponentielle (écriture efficace) - Perçoit la structure multiplicative - Interprétation de l'écriture 5^6 par François dans le contexte est invalidée par le reste de la classe

Tableau 4.1.3.2 Synthèse des éléments ressortis (stratégies d'intervention et indicateurs de contrôle chez les élèves) lors de la séance du 8 mars 2006 autour du problème des abeilles

Dans la section qui suit, nous allons présenter dans un tableau synthèse les différents éléments ressortis de l'analyse de l'exploitation des problèmes des robots et des bactéries (cf. annexes F et G pour une analyse détaillée de ces deux problèmes en classe).

4.1.3.3 Synthèse des stratégies d'intervention pouvant favoriser le développement d'une activité de contrôle et des indicateurs de contrôle chez les élèves dans les problèmes des robots et des bactéries.

Dans l'exploitation du problème des robots, nous pouvons distinguer trois moments clés : la formulation du problème par les élèves, la résolution en équipes et le retour sur le problème. Dans cette première phase portant sur la reformulation du problème (séance du 8 mars), des stratégies d'intervention sont mises en évidence (certaines d'entre elles ayant déjà été explicitées lors de la planification et en quelque sorte confirmées dans l'action), stratégies susceptibles ou non de favoriser le développement d'une activité de contrôle chez les élèves. Nous pouvons également relever des indices d'une activité de contrôle chez certains élèves, ou, chez d'autres, des difficultés de contrôle sur le processus de résolution sous l'angle de la représentation qu'il se construit du problème.

Stratégies d'intervention	Indicateurs de contrôle chez les élèves
- Reformulation du problème par les élèves/ dans leurs mots. (Va chercher la représentation que les élèves se construisent du problème ; force une telle représentation) - Circuler entre les rangées, demander aux élèves d'écrire toute leur démarche, de ne pas barrer. (Repère les stratégies des élèves, va chercher les stratégies possibles des élèves). - Un retour différé annoncé, repousser toute requête de validation de la part des	Un indice d'anticipation de l'ordre de grandeur de la réponse avant toute résolution (Carmen). Indicateurs de contrôle sur le processus de résolution (sous l'angle de la construction d'une représentation) : - Peu en contrôle sur les relations entre les données dans sa formulation : les informations factuelles de la situation sont présentes mais les liens entre toutes ces données ne sont pas là (Claude). - Un indice de contrôle : mise en évidence de la structure multiplicative du

élèves à son endroit sur leur solution - Repousser la requête d'une élève sur la validité de ce qu'elle avance, renvoyer celle-ci au problème (Une validation qui n'est pas prise en charge par l'enseignante). - Validation indirecte de la formulation de l'élève, pas de renvoi de validation au groupe *(une stratégie qui freine le possible développement du contrôle)*	problème (Miranda)

Tableau 4.1.3.3 Synthèse des éléments ressortis lors de l'exploitation du problème des robots (séance du 8 mars)

L'enseignante va conclure cette phase de formulation du problème et amorcer la phase de résolution en orientant les élèves sur le *pourquoi.* Dans le retour au problème (qui a lieu la séance d'après, le 15 mars), l'intervention se résume à faire une synthèse des démarches ressorties et à les confronter à la classe pour que les élèves les valident, détectent et dépassent les possibles erreurs. En procédant ainsi, nous forçons chez les élèves un retour au problème, une appropriation de la situation dans laquelle l'efficacité et l'utilité de l'écriture exponentielle sont mises de l'avant. Cette intervention permet de mettre en évidence plusieurs stratégies d'intervention et d'indicateurs de contrôle que nous avons ramassés dans le tableau ci-dessous :

Stratégie d'intervention (en ombré les stratégies d'intervention qui freinent le possible développement du contrôle)	**Indicateurs de contrôle chez les élèves** (en ombré les indicateurs de non contrôle)
Retour sur le problème des robots : - Au départ les explications sur ce qui a été fait viennent de l'enseignante (peu propice au développement du contrôle) - Une institutionnalisation de la stratégie plus efficace (passage par l'exponentielle) arrive assez vite (peu propice au développement du contrôle par les élèves, qui ne voient pas nécessairement la pertinence de ce passage) - Validation des autres stratégies s'appuie sur	- Choix éclairé : ils quittent la représentation de l'arbre vers une autre écriture plus efficace. - Choix de l'écriture la plus efficace (l'exponentielle) *(pour certains élèves)* - Anticipation de l'ordre de grandeur de la réponse (12 élèves sur 30) - Certains élèves perçoivent la structure multiplicative du problème

la stratégie validée par l'enseignante - Face aux procédures erronées, renvoie par contre leur validation aux élèves Même chose pour les formules produites, force une explication du pourquoi? D'où viennent-elles? Leur validation et signification est renvoyée aux élèves. - Elle essaie de donner du sens en contexte aux formules erronées ressorties - Sollicite des justifications *« Pourquoi? »* - Demande des éclaircissements *« Qu'est-ce que ça veut dire? »*. - Reprise de la question d'un élève et renvoyé à l'élève qui a produit la démarche en question - Fait des liens entre différentes stratégies (elle identifie deux démarches comme étant similaires)	- Donner du sens à l'écriture exponentielle dans le contexte. - Moyen de vérification : vérifier la stratégie utilisée en s'appuyant sur une représentation visuelle (Nicolas) - Invalidation d'une stratégie en utilisant la stratégie statuée comme correcte (Sam, François). - Force une explication de la formule erronée en contexte puis bloque (Christine). - Autre interprétation de l'écriture 2^{36} (Nicolas) - Certains élèves sortent du contexte, sont centrés sur une relation entre les nombres (Sandra, Christine, Nicolas,...) - Pas de questionnement sur le résultat obtenu avec la calculatrice (6,872 robots)

Tableau 4.3.1.3b Synthèse des éléments ressortis lors de l'exploitation du problème des robots (séance du 15 mars)

Le problème des bactéries a été distribué aux élèves à la fin de la séance du 15 mars. Il leur a été demandé de la résoudre individuellement (quiz), le retour a eu lieu le 16 mars, nous reprenons dans le tableau ci-dessous ce qui est ressorti de l'analyse (voir appendice G pour une analyse détaillée).

Stratégies d'intervention qui favorisent une activité de contrôle (en ombré celles qui le freinent)	**Indicateurs de contrôle chez les élèves** (en ombré les indicateurs de non contrôle)
- Fait un lien entre les différentes stratégies ressorties. - Demander à l'élève des éclaircissements - Nadia ramasse les différentes stratégies ressorties - L'enseignante valide certaines stratégies - Fait un lien entre les problèmes, relève les ressemblances et les différences	- Les explications prennent appui sur le contexte (Nicolas, Christine, Carmen, Miranda) - Validation d'une stratégie erronée par un retour au contexte, l'élève donne du sens aux calculs dans le contexte (Nicolas) - Une élève voit que sa stratégie est peu efficace (de longs calculs) mais ne cherche pas une autre façon de procéder

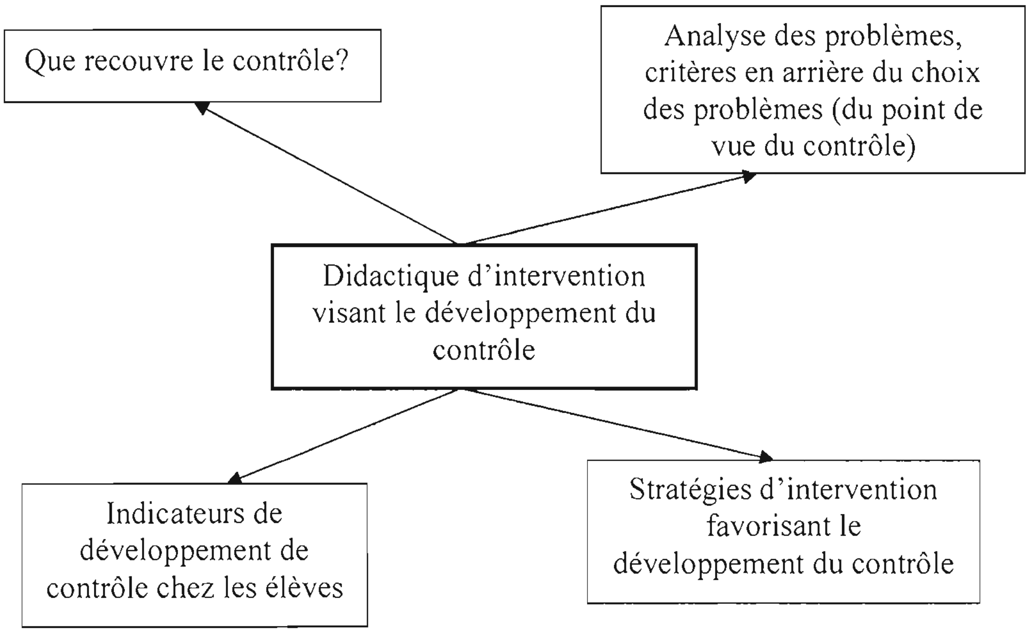
- Met l'accent sur l'importance d'une représentation visuelle pour s'approprier le problème, bien comprendre l'énoncé, le sens de la question.	(Marie) - Certains élèves font la racine carrée (provenant certainement de l'utilisation de la racine cinquième dans le problème des abeilles).

Tableau 4.3.1.3c Synthèse des éléments ressortis sur le problème des bactéries (stratégies d'intervention et indicateurs de contrôle chez les élèves) lors de la séance du 16 mars 2006

L'analyse de ce premier bloc a été guidée par l'atteinte de nos deux objectifs. Nous cherchions d'une part à cerner les situations élaborées et les stratégies d'intervention mises en place en classe. D'autre part, nous voulions mieux comprendre ce qu'il advient sur le plan du développement du contrôle chez les élèves du secondaire au cours de ces situations. Il en ressort plusieurs éléments de réponse.

4.1.4 Théorisation qui émerge à cette étape du bloc Problèmes

À travers les rencontres de co-opération autour du bloc Problèmes, la didactique d'intervention élaborée conjointement visant le développement du contrôle est éclairée sous plusieurs aspects tels qu'explicités dans la représentation ci-dessous. Nous allons dans cette partie détailler chacun de ces éléments.



4.1.4.1 Analyse du point de vue des composantes du contrôle travaillées dans le bloc *Problèmes*

Nous pouvons remarquer que l'enseignante amène une composante du contrôle « nouvelle » vis-à-vis de notre cadre théorique : le réinvestissement d'une stratégie d'un problème à l'autre. Les composantes ne sont pas « dites » de la même manière par l'enseignante et la chercheure comme nous pouvons le voir dans le tableau ci-dessous :

Concept de contrôle (en lien avec le processus de résolution de problèmes)	
Composantes relevées par l'enseignante	***Composantes relevées par la chercheure***
- Anticipation de l'ordre de grandeur, favorise un retour sur la réponse, sur le caractère pertinent de cette réponse en lien avec le problème. *(Robots)*	- Anticipation de l'ordre de grandeur, peut favoriser un retour au problème. *(Robots)*

- Vérification du résultat (*Robots, Abeilles, bactéries)* - Vérification de la <u>démarche</u> *(Placement d'argent)*	- Vérification du résultat *(Robots, Abeilles, bactéries)*
- Passage vers une stratégie efficace (une écriture) *(Robots)* - Passage vers une stratégie efficace (une généralisation) (*Placement d'argent)*	- Choix éclairé, discernement d'une stratégie plus efficace (écriture) (*Robots)* - Choix éclairé, discernement vers une stratégie plus efficace. *(Placement d'argent).*
	- Engagement réfléchi : le contexte débouche sur différentes interprétations et donc sur différentes réponses possibles *(Abeilles)*
- Réinvestissement des stratégies par les élèves d'un problème à l'autre *(Bactéries)*	

Tableau 4.1.4.1 Composantes du contrôle éclairées par la didactique d'intervention élaborée conjointement.

Dans les problèmes du Placement d'argent et des Robots, le choix d'une stratégie efficace n'est pas du même ordre. En effet, pour les Robots, on reste dans le même registre de représentation alors que pour le placement d'argent, il s'agit de généraliser donc de changer de registre.

4.1.4.2 Analyse des problèmes, critères en arrière du choix des problèmes (du point de vue du contrôle) dans le bloc *Problèmes*

Comme nous l'avons vu au point 2.3.1.2 du cadre théorique, nous prônions que le développement du contrôle ne résulte pas d'un apprentissage explicite de stratégies de contrôle mais plutôt d'une construction, d'un développement de stratégies par les élèves. Ainsi l'enseignant doit permettre le développement des stratégies de contrôle en présentant des situations, des problèmes qui requièrent une activité de contrôle. La discussion entre l'enseignante et la chercheure autour des problèmes *Robots*, *Abeilles, Bactéries* et *Placement d'argent* nous éclaire sur les différents critères en arrière du choix des problèmes pour favoriser le développement d'une activité de contrôle.

<table>
<tr><th colspan="2">Analyse des problèmes, critères en arrière du choix des problèmes (du point de vue du contrôle)</th></tr>
<tr><th>Critères amenés par l'enseignante</th><th>Critères amenés par la chercheure</th></tr>
<tr><td>- Tâche non familière, non classique. Les élèves sont poussés vers un défi :
▪ Met les élèves dans une attitude de réflexion par rapport à un problème routinier
▪ Pousse les élèves à vérifier (un retour au sens car il y a pour les élèves un enjeu).
(Abeilles et Bactéries)

- Problème semblable à un autre problème travaillé qui permet de détecter le réinvestissement des stratégies par les élèves (Bactéries).</td><td>- Problème qui dépasse l'aspect calculatoire et qui mise sur la compréhension. (Robots)

- Problème ayant un énoncé long, complexe qui force une certaine interprétation du problème par les élèves (extraire les données, voir la relation entre ces données) (Robots)

- Problème qui se prête à différentes interprétations (Abeilles)</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Problème qui demande un choix éclairé entre plusieurs stratégies, le contexte doit pousser les élèves à aller vers une stratégie plus efficace (Placement d'argent)</td></tr>
<tr><td>- La question ne doit pas amener à calculer mais plutôt pousser à réfléchir, à argumenter, à expliquer (« Pourquoi? ») (Robots)

- Mettre de gros nombres amène les élèves vers une stratégie efficace, les force à réfléchir, les éloigne des calculs. (Placement d'argent)</td><td></td></tr>
</table>

Tableau 4.1.4.2 Critères en arrière du choix des problèmes du point de vue du contrôle éclairés par une didactique d'intervention élaborée conjointement.

4.1.4.3 Synthèse sur les indicateurs de contrôle chez les élèves dans le bloc *Problèmes*

Lors des rencontres de planification, l'enseignante met en évidence certains indicateurs de contrôle chez les élèves. Nous avons des informations également sur les indicateurs de contrôle des élèves d'après leurs traces écrites et leurs interventions en classe.

Indicateurs de contrôle des élèves explicités par l'enseignante	
Indicateurs de contrôle	***Indices de non contrôle***
- Anticipation du sens de la réponse : réaction explicite des élèves dans leur discours (« ça ne marche pas, ça n'a pas d'allure »). *(Robots)* - Réaction explicite sur leurs visages (qui expriment de la surprise). *(Robots).* - Dans leurs productions (dans le choix des stratégies utilisées : calculs à mesure versus le choix d'une écriture efficace). *(Placement d'argent)* - Dans le réinvestissement des stratégies de contrôle d'un problème à l'autre	Difficultés des élèves à aller vers une stratégie efficace qu'ils ne perçoivent pas. *(Placement d'argent)*

Tableau 4.1.4.4a Indicateurs de contrôle des élèves explicités par l'enseignante dans le bloc *Problèmes*

Indicateurs de contrôle des élèves d'après leurs traces écrites et leur discours (dans l'action)	
Indicateurs de contrôle	***Indices de non contrôle***
Autour de l'anticipation	
Anticipation de l'ordre de grandeur de la réponse avant toute résolution *(Carmen dans sa formulation ; d'autres élèves d'après leurs traces écrites)*	
Sur le processus de résolution de problème (sous l'angle de la construction d'une représentation)	
- Un indice de contrôle : mise en évidence de la structure multiplicative du problème *(Miranda d'après sa formulation ; d'autres élèves d'après leurs traces écrites :* $\times 2, \times 2, \times 2, \ldots$*)* - Une modélisation de la situation à des fins de résolution (arbre)	- Peu en contrôle sur les relations entre les données : les informations factuelles de la situation sont présentes mais les liens entre toutes ces données ne sont pas là *(dans la formulation de Claude)*

- Repérer que deux problèmes ont la même structure.	
Choix d'une stratégie efficace	
- Quitter la représentation visuelle vers une écriture mathématique - Passage à l'exponentielle (notation efficace	- Percevoir que la stratégie utilisée n'est pas efficace (de longs calculs) mais ne pas chercher une autre façon de procéder *(Marie)*
Engagement réfléchi	
- Faire un retour au contexte dans l'interprétation du problème - Des interprétations possibles de l'énoncé sont mises en évidence montrant un contrôle sémantique sur le processus de résolution - Différentes interprétations de 2^{36} dans le contexte. - Repérer qu'on cherche en quelque sorte l'opération inverse de l'exponentielle *(Laure)*	- Certains élèves sortent du contexte, sont centrés sur une relation entre les nombres *(Sandra, Christine, Nicolas,...)* - Interprétation de l'écriture 5^6 dans le contexte *(par François).*
Autour de la vérification	
- Vérifier la stratégie utilisée en s'appuyant sur une représentation visuelle (Nicolas) - Invalidation d'une stratégie en utilisant la stratégie statuée comme correcte (Sam, François). - Validation / invalidation ce qui est avancé : le calcul (groupe) ; le sens de la réponse en lien avec le contexte (« a-t-elle de l'allure ?) (François) - Invalidation de l'interprétation de l'exponentielle en contexte présentée par François. - Contrôle du résultat obtenu, prise en compte du contexte dans l'interprétation de la réponse (arrondir le résultat obtenu) *(Laure)*	- Pas de questionnement sur le résultat obtenu avec la calculatrice (6,872 robots)

- Forcer une explication de la formule erronée en contexte *(Christine).*	
Autour du calcul	
- Effectuer un encadrement pour trouver 5 exposant quoi donne 60 000 *(Marc).* - Résolution par essais successifs et encadrement de la réponse, montrant un contrôle sur le processus de calcul *(Zaïa)* - Trouver une relation entre les nombres (hors contexte), comme la formule de la somme *(Nicolas, Sandra, Élie)* - Faire les calculs avec les logs *(Nicolas)*	

Tableau 4.1.4.4b Indicateur de contrôle des élèves d'après leurs traces écrites et leur discours dans le bloc *Problèmes*

4.1.4.4 Analyse des stratégies d'intervention favorisant le développement du contrôle dans le bloc *Problèmes*

Nous avons recueilli de nombreuses informations sur les stratégies d'intervention favorisant (ou non) le développement d'une activité de contrôle. Certaines de ces stratégies sont explicitées par l'enseignante lors des rencontres de planification et mises en action dans l'expérimentation. En classe, de nouvelles stratégies d'intervention apparaissent. Il se dégage trois principes porteurs d'une activité de contrôle provenant de la didactique praticienne de Nadia.

Didactique praticienne de Nadia : des principes porteurs d'une activité de contrôle
L'effet clash Déstabiliser, mettre en doute de manière à forcer : - Un retour sur la réponse (qui provient d'une anticipation) - Un retour sur la tâche *(Les élèves s'attendent à quelque chose et ils sont surpris quand ce n'est pas ce qu'ils ont prévu qui sort).* **Piquer la curiosité des élèves** Pour les pousser vers une stratégie plus efficace.

(Passe par une reformulation du problème, par une mise en scène « moi je trouve ceci très vite, je serais gentille si je vous donnais le nombre d'années.... »). **Renvoyer la validation au groupe**[78] Nadia ramasse et construit à partir de ce que les élèves amènent.

Tableau 4.1.4.5a Des principes porteurs d'une activité de contrôle provenant de la didactique praticienne de Nadia (dans le bloc *Problèmes*).

D'autres stratégies d'intervention sont mises en place à des moments différents : dans la mise en route de la tâche, pendant la résolution et au retour. Nous allons noter en ombré les stratégies d'intervention qui freinent le développement d'une activité de contrôle.

***Stratégies d'intervention* : Mise en route de la tâche**
- Reformulation du problème dans les mots de l'élève pour repérer leur construction du problème, leur compréhension (C) - Validation indirecte de la formulation de l'élève, pas de renvoi de validation au groupe (E) - Une mise en route orientée sur le *pourquoi* (E)
***Stratégies d'intervention* : Pendant la résolution**
- Circuler entre les rangées, demander aux élèves d'écrire toute leur démarche, de ne pas barrer. *(Repérer les stratégies des élèves)* (E) - Repousser toute requête de validation de la part des élèves à l'endroit de l'enseignante sur leur solution. Les renvoyer à la lecture de la tâche, leur annoncer un retour différé. (E) - Les laisser patauger pour leur permettre d'aller vers une stratégie plus efficace (E)
***Stratégies d'intervention* : Dans le retour**
- Importance d'aller chercher la façon dont chaque équipe a procédé, s'ils ont été bloqués (E). ***Choix des élèves pour le retour*** - Repérer les élèves qui utilisent des stratégies intéressantes du point de vue de l'efficacité) et ceux qui font des calculs à mesure (non efficace) (E) - Partir des stratégies incomplètes, ou plus ou moins efficaces, erronées. Demander à

[78] Nous pouvons toutefois remarquer que l'enseignante ne le fait pas systématiquement. Elle renvoie essentiellement la validation au groupe dans le problème des abeilles.

la classe de les valider et ensuite aller vers les stratégies les plus efficaces[79] (E).

Explicitation des stratégies / validation des démarches des élèves

- Certaines explications sur ce qui a été fait par les élèves viennent de l'enseignante *(Robots)* (E)
- Une institutionnalisation de la stratégie plus efficace (passage par l'exponentielle) arrive assez vite (les élèves ne voient pas nécessairement la pertinence de ce passage) *(Robots)* (E)
- Institutionnalisation en rupture avec l'activité des élèves *(Abeilles)* (E)
- Validation des autres stratégies s'appuie sur la stratégie validée par l'enseignante *(Robots)* (E)
- Face aux procédures erronées, renvoie par contre leur validation aux élèves
Même chose pour les formules produites, force une explication du pourquoi? D'où viennent-elles? Leur validation et signification est renvoyée aux élèves. *(Robots)* (E)
- Reprise de la question d'un élève et renvoyée à l'élève qui a produit la démarche en question (E)
- Dirige la discussion en ayant préalablement repéré les stratégies utilisées (E) : D'abord une stratégie qui amène un questionnement autour du sens de la réponse, ensuite des essais erreurs contrôlés avec comme réponse un encadrement, finalement une stratégie pour aller plus loin (introduction aux logarithmes) (E)
- Ne se prononce pas sur les stratégies des élèves et renvoie la validation à la classe *(Abeilles)* (E)
- Laisse place à l'argumentation, à différents points de vue (E)
- Ne valide pas les stratégies des élèves et demande à la classe de statuer. *(Abeilles)* (E)

Axer sur le sens

- Essayer de donner du sens en contexte aux formules erronées (E)
- Accepte plusieurs interprétations possibles du problème tant qu'elles sont bien justifiées (E)

Forcer des éclaircissements, pousser à aller plus loin

- Sollicite des justifications *« Pourquoi? » (E)*
- Demande des éclaircissements *« Qu'est-ce que ça veut dire? »*. Force une explication pour mieux comprendre *(E)*

[79] C'est le cas pour le problème des abeilles et des bactéries mais pas pour celui des robots.

- Renvoie à ce que l'élève a fait, à aller plus loin (E) - Faire en sorte que l'élève explicite jusqu'au bout avant que les autres interviennent (E) ***Faire des liens*** - Fait des liens entre différentes stratégies (elle identifie deux démarches comme étant similaires) (E) - Au moment de l'institutionnalisation, fait un lien entre les problèmes, relève les ressemblances et les différences (E)

Tableau 4.1.4.5b Stratégies d'intervention mises en place lors de la résolution de problèmes.

Nous pouvons constater que les stratégies d'intervention changent d'un problème à l'autre. Dans le problème des abeilles, la validation est axée sur les élèves, Nadia dirige la discussion d'après les stratégies qu'elle a repérées en circulant entre les rangées. Dans la situation des robots, c'est elle qui prend en charge la validation des stratégies, déléguant aux élèves la validation des stratégies erronées.

Nous avons également obtenu dans ce premier bloc des informations sur les deux perspectives, de l'enseignante et de la chercheure.

4.1.4.5 Autour des perspectives de l'enseignante et de la chercheure

Dans le bloc *Problèmes*, nous pouvons remarquer que l'enseignante et la chercheure ont deux perspectives différentes.

Perspective de l'enseignante	Perspective de la chercheure
Renvoie à sa didactique praticienne - Ses contraintes institutionnelles (programme d'études, la réforme) - Sa sensibilité aux élèves, à leur compréhension - Certaines manières de faire dans la manière dont elle introduit habituellement les exposants (qu'elle cherche à renouveler) - Sur les savoirs mathématiques que les problèmes permettent de travailler - Souci de préparer les élèves aux apprentissages	***Renvoie à une didactique de recherche*** - Ses intentions didactiques (donner du sens au concept, ne pas restreindre aux aspects calculatoires) - Son cadre conceptuel sur le contrôle.

subséquents. - Expérience de pratique avec les élèves (jouer sur les nombres, changer le nombre de départ, d'arrivée pour forcer une généralisation)	

Tableau 4.1.4.6 Autour des perspectives de l'enseignante et de la chercheure dans le bloc *Problèmes*

Comme nous venons de le voir, ce bloc sur la résolution de problèmes nous éclaire d'une part sous différents aspects du contrôle : ses composantes, sur les critères des problèmes qui favorisent un contrôle, sur les indicateurs de contrôle des élèves, sur les stratégies d'intervention permettant le possible développement du contrôle, et d'autre part, sur les perspectives de l'enseignante et de la chercheure. Afin de compléter cette première analyse, nous allons procéder à l'analyse d'un deuxième bloc portant sur des exercices qui requièrent une réflexion sur la notation exponentielle, ces exercices ont été élaborés suite à un constat de difficultés chez les élèves autour du sens accordé à l'écriture exponentielle comme nous l'avons vu au point 3.4.1 de la méthodologie. Pour les blocs subséquents et pour ne pas alourdir cette étude, nous ferons ressortir les points globaux issus de l'analyse sans les verbatim (en ce qui a trait aux rencontres de planification).

4.2 Analyse d'un deuxième bloc portant sur la *Réflexion sur la notation*

Ce bloc a été conçu suite à une séance d'observation préalable en classe (1er février 2006) où nous avons été amenée à nous rendre compte de difficultés des élèves sur le sens de l'écriture exponentielle. En circulant dans les rangées, j'ai pu en effet remarquer que les élèves avaient de la difficulté à déterminer le signe de certaines expressions algébriques. Dans le cas où on demande de remplacer x par -3 dans l'expression x^2 ou $-x^2$, beaucoup d'élèves donnaient comme réponse -9 pour x^2 et 9 pour - x^2. La majorité d'entre eux utilisaient la calculatrice pour trouver ces résultats sans les remettre en question, se désengageant de la vérification du résultat obtenu (une des composantes du contrôle) et se fiant au calcul effectué par la calculatrice[80]. Les interrogeant sur la pertinence d'un tel résultat, les élèves répondaient qu'ils avaient calculé en utilisant la calculatrice et ne revenaient pas au sens de l'écriture exponentielle comme « la base se multipliant par elle-même autant de fois qu'indiqué par l'exposant. » Cette observation a été sujet à discussion lors de la première rencontre de co-opération avec Nadia, c'est la raison pour laquelle nous avons convenu de revenir et de nous attarder sur le sens de la notation exponentielle en début d'expérimentation.

Ce constat a mené à l'élaboration d'une série d'exercices par la chercheure, favorisant une réflexion sur le signe d'expressions algébriques avec des exposants, exercices proposés et discutés avec l'enseignante. Comme pour le premier bloc sur les problèmes, notre analyse portera sur les tâches, de la tâche initiale à la tâche redéfinie, en faisant ressortir les arguments sous-jacents qui ont guidé les choix et modifications. Nous ne reprenons dans cette partie que les résultats. Finalement, nous allons nous attarder sur ce qui ressort du scénario effectif.

4.2.1 De la tâche initiale à la tâche redéfinie

Différents types d'exercices se retrouvent à l'intérieur de ce bloc, renvoyant :

- À la signification de l'écriture exponentielle en arithmétique (expressions avec des nombres)
- À la signification de cette écriture, toujours en arithmétique, en lien avec les opérations sur les exposants.
- À la signification de la notation en algèbre

[80] Nous pouvons ici remarquer que le maniement des différentes calculatrices (scientifiques ou non) demande une certaine expertise de son fonctionnement. Pour calculer la valeur de x^2 pour $x = -3$, les élèves écrivent -3 et ensuite ils appuient sur le bouton « exposant 2 », calculant ainsi $-3^2 = -9$ au lieu de $(-3)^2 = 9$. Cette remarque rejoint celle de certains enseignants, voir le point 1.3.1.2 de la problématique.

a) Sens de la notation exponentielle en arithmétique (référence à des nombres)

Tâches initiales (tâches proposées)	**Ce que les tâches sont devenues**[81] (tâches redéfinies)
Détermine le signe de chacune des puissances suivantes, sans calculatrice : 5^3 $(-5)^3$ -5^3 $-(-5)^3$ 5^{21} $(-5)^{20}$ -5^{26} $-(-5)^2$ $-(-5)^{31}$	Émilie a calculé 5^3, elle a trouvé 125. En te servant de ce résultat, elle te propose de relever le défi de trouver la valeur de chacun des nombres ci-dessous, <u>sans faire de calculs</u>. Es-tu capable de relever le défi? $(-5)^3$ -5^3 $-(-5)^3$ $\boxed{-(-5^3)}$ $\boxed{(-0,\overline{123})^{20}}$ $\boxed{-0,\overline{123}^{26}}$ $\boxed{-(-0,\overline{123})^{2}}$ $\boxed{-(-0,\overline{123})^{31}}$
Place les expressions suivantes du plus petit au plus grand : $(-3)^0$ $(-3)^2$ $(-3)^5$ $(-3)^{18}$ $(-3)^{21}$	Sandra veut placer les nombres ci-dessous du plus petit au plus grand. Elle a réussi à le faire sans sa calculatrice! Peux-tu trouver de quelle façon elle a procédé? $\boxed{(-4,\overline{123})^{20}}$ $\boxed{-4,\overline{123}^{26}}$ $\boxed{-(-4,\overline{123})^{2}}$ $\boxed{-(-4,\overline{123})^{31}}$ $\boxed{-(-4,\overline{123})^{1635}}$
	François te lance un défi ! Il te demande de placer les nombres ci-dessous du plus petit au plus grand <u>sans utiliser ta calculatrice</u>. Explique comment tu as procédé pour les ordonner. $(-3)^0$ $(-3)^2$ $(-3)^5$ $\boxed{3^5}$ $(-3)^{21}$ $\boxed{3^{-2}}$

Analyse préalable des tâches initiales proposées en regard du contrôle

- Trouver le signe de l'expression (sans avoir recours au calcul) fait appel à un contrôle sémantique (exercé sur cette écriture, ce qu'elle signifie) de la part de l'élève: il faut ici par exemple distinguer le nombre (-5) multiplié par lui-même 3 fois, du nombre 5 multiplié par lui-même 3 fois, dont on prend ensuite l'opposé.
- Un certain contrôle exercé sur la signification des exposants, sur la signification du signe – (moins) (2 significations sont associées au même symbole : opération et entier relatif.
- L'élève doit pouvoir anticiper la nature du nombre obtenu, soit positif soit négatif.

[81] Les nombres qui sont encadrés sont de nouveaux nombres (qui ne font pas partie de la tâche initiale) et qui ont été introduits dans la rencontre de planification.

Arguments à l'appui du choix des tâches initiales et redéfinies (issus de l'analyse du verbatim)

L'enseignante accorde de l'importance à ce type d'exercices qu'elle travaille habituellement avec ses élèves. Elle nous informe qu'ils sont habituellement mélangés dans ce genre d'exercice, n'ayant pas d'esprit critique face au résultat donné par la calculatrice (difficultés ressenties à anticiper le signe de l'expression). C'est cet argument qui va aussi la guider dans les modifications qui vont être apportées à la tâche, par exemple dans le choix des nombres (de manière à forcer à prendre une distance par rapport à l'utilisation de la calculatrice).

Des changements sont apportés sur les nombres initiaux proposés: la chercheure et l'enseignante s'entendent sur le fait qu'il faut donner des nombres autres qu'entiers, les raisons évoquées sont, toutefois, différentes. Plusieurs changements sont envisagés, elles décident d'enlever soit 5^3 soit 5^{21} (les deux écritures allant chercher la même information), de rajouter $-(-5^3)$ (requérant un autre raisonnement) et de changer certaines bases par $0,\overline{123}$.

La deuxième tâche initiale donne lieu à deux exercices. L'importance de favoriser une réflexion de la part de l'élève sur l'écriture amène à rajouter dans les deux énoncés de ne pas utiliser la calculatrice. On axe également sur les explications, les deux exercices spécifiant d'expliquer comment l'élève a procédé pour ordonner les nombres présentés. L'exercice *François* présente une difficulté supplémentaire avec l'interprétation de l'exposant négatif.

Arguments invoqués à l'appui des tâches initiales	
Arguments amenés par l'enseignante	**Arguments amenés par la chercheure**
- Prendre une distance par rapport à la calculatrice, avoir un regard critique sur le résultat qu'elle donne.	- Une prise en compte des difficultés observées dans la classe chez les élèves (dans le calcul de x^2, $-x^2$ pour $x=-3$). - Contrôle sémantique exercé sur l'écriture : forcer une réflexion sur le signe du résultat sans calculer ; anticiper la nature du nombre obtenu positif ou négatif.

Arguments invoqués à l'appui des tâches redéfinies	
Arguments amenés par l'enseignante	**Arguments amenés par la chercheure**
- Forcer à ne plus utiliser la calculatrice en ayant recours à des nombres « laids » (comme des périodiques, des fractions comme 81/98,...) - Forcer une réflexion sur la signification de l'écriture - Solliciter leur justification (demander *pourquoi ils disent que ce sera positif ou négatif).*	- Contrer la conception installée chez les élèves dans le travail sur les exposants : les exposants ne s'appliquent qu'à des nombres entiers.
- Enlever les nombres qui vont chercher la même information (C et E) comme 5^3 et 5^{21}.	

Nous pouvons remarquer que les deux perspectives (de l'enseignante et de la chercheure) mises en évidence ici sont moins tranchées que dans la résolution de problèmes. Du côté de la chercheure, sa perspective puise au cadre de référence sur le contrôle, à la didactique de recherche (conception des élèves sur les exposants associée aux entiers) mais aussi (et ceci est nouveau) à une sensibilité aux élèves réels dans la classe (ceux qu'elle a vus, avec leurs difficultés). On sent une certaine prise en compte de la pratique (sous l'angle des élèves). Du côté de l'enseignante, sa volonté de faire en sorte que les élèves soient critiques face au sens de la réponse donnée par la calculatrice est une entrée dans le contrôle (dans ses mots, même si elle ne parle pas de contrôle), ce qui rejoint l'idée de jugement critique sur la réponse, de forcer une réflexion sur le sens de l'écriture.

b) Signification de l'écriture exponentielle en arithmétique en lien avec les opérations sur les exposants

Tâche initiale (tâche proposée)	**Ce que la tâche est devenue** (tâche redéfinie)
Détermine le signe de chacun des produits suivants : $5^3 \times 2^4$ $\quad 5^3 \times (-2)^4$ $\quad (-5)^3 \times 2^4$ $(-5)^3 \times (-2)^4$ $\quad (-5)^{32} \times (-2)$ $\quad (-5)^{51} \times (-2)^0$ Détermine le signe de chacun des quotients suivants :	Peux-tu trouver le signe de chacune des expressions suivantes? $(-5)^3 \times (-2)^4$ $\quad \boxed{(-5)^3 \times (-2^4)}$ $(-5)^{32} \times (-2)$ $\quad (-5)^{51} \times (-2)^0$ $\dfrac{-(-2)^5}{(4-7)^3 \times 9}$ $\quad \dfrac{(-3)^4-(-3)^5}{14^2-(-2)^4}$

$\frac{(-3)^5}{(-2)^3\times(-5)^4}$ $\frac{-(-2)^5}{(4-7)^3\times 9}$ $\frac{(-3)^4-(-3)^5}{14^2-(-2)^4}$	

Analyse préalable de la tâche initiale en regard du contrôle

- Contrôle sémantique sur l'écriture exponentielle comme dans les exercices précédents. La tâche est toutefois ici plus complexe, on a des multiplications, des divisions, des soustractions de nombres avec des exposants. Cet exercice permet d'asseoir les raisonnements précédents.

Arguments à l'appui de la tâche initiale et modifiée

L'enseignante avance qu'il faut enlever quelques expressions pour que l'exercice soit moins long. Le nombre dont l'exposant est 0 ainsi que les expressions comportant de « gros » exposants sont conservées. Le nombre $5^3\times 2^4$ disparaît car on voit trop facilement que c'est positif, il ne présente aucun défi. Il y a ainsi un choix dans les nombres guidé par certains critères :

Critères amenés par l'enseignante	Critères amenés par la chercheure
- Combiner les différents types dans chaque expression : positif-positif, positif- négatif, négatif-négatif. - Enlever des expressions qui ne présentent aucun défi. - Comprendre pourquoi on arrive à un positif ou à un négatif.	- Exposant 0 à garder pour revenir sur sa signification. - Insérer des quotients car habituellement peu travaillé.
- Varier les expressions : certaines positives, d'autres négatives (C et E)	

L'analyse du verbatim fait ressortir de plus dans ce cas une analyse préalable par l'enseignante de la tâche du point de vue du contrôle

Le travail dans ce bloc qui pousse à une réflexion sur la notation est en effet intéressant pour l'enseignante car elle aimerait que les élèves réinvestissent ce qu'ils ont appris pour voir l'égalité entre les écritures $-\frac{5}{6};\frac{-5}{6};\frac{5}{-6}$; qu'ils voient qu'il s'agit du même nombre. Le contrôle sur l'écriture, exprimé dans ce cas pour l'enseignante, à travers la capacité de l'élève à reconnaître un même nombre sous plusieurs écritures équivalentes, rejoint la caractérisation du contrôle qui s'exprime chez la chercheure dans la flexibilité de passage d'une écriture à l'autre. À ce sujet d'ailleurs, dans une rencontre préalable (rencontre du 28 février), le contrôle était apparu pour Nadia relié à se poser des questions sur les signes, ce qu'elle nomme « le contrôle sur l'écriture ». Son discours fait ressortir plusieurs éléments de contrôle :

- un contrôle sur la signification du signe moins dans l'écriture.
- un contrôle en termes du pourquoi du signe du résultat.
- des indicateurs de non contrôle observés (en lien avec le signe moins dans les fractions)

c) Signification de la notation en algèbre

D'autres exercices ont été planifiés par la chercheure travaillant cette fois-ci sur le sens de la notation en algèbre. Tous ces exercices n'ont toutefois pas pu être expérimentés faute de temps comme nous le verrons au point 4.2.3.

Tâches initiales (tâches proposées)	**Ce que les tâches sont devenues** (tâches redéfinies)
Soient a et b deux nombres entiers tels que $\boldsymbol{a < 0}$ **et** $\boldsymbol{b > 0}$. Détermine le signe de chacune des expressions suivantes : a^2 a^3 b^2 b^3 a^2b^5 $-ab$	Soient a et b deux nombres entiers tels que ***a* est négatif et *b* est positif**. Détermine le signe de chacune des expressions suivantes[82] : a^2 a^3 b^2 a^2b^5 $-ab$ Ghila prend deux nombres qu'elle nomme a et b et écrit les nombres ci-dessous : a^2 a^3 b^3 a^2b^5 ab Es-tu capable de savoir lequel de ces nombres est le plus grand? Ghila te donne un indice a est plus petit que -1 et b est plus grand que 1. Explique comment tu fais pour savoir lequel de ces nombres est le plus grand.
Quelle expression représente la plus grande valeur? 1) 2^2a $2a^2$ $(2a)^2$ 2) $2^{-2}a$ $2a^{-2}$ $(2a)^{-2}$	Même énoncé, pas de changement[83].

[82] Cet exercice n'a pas pu être expérimenté faute de temps. La partie sur les problèmes ayant pris plus de temps que prévu, l'enseignante tenait à ce stade à commencer la division d'expressions avec des exposants et les exposants négatifs le plus tôt possible.

[83] Cet exercice n'a pas pu être expérimenté (même raisons que dans la note 80).

Analyse des tâches initiales proposées en termes de contrôle

- Contrôle sémantique en lien avec la signification du symbolisme en algèbre. Un degré de difficulté s'ajoute ici, on a des lettres au lieu de nombres. Une conception des élèves sur le sens du symbolisme en algèbre est prise en compte dans la première tâche : *-a* est associée pour les élèves à un nombre négatif (implicitement, ils ne voient pas que *a* peut être autant positif que négatif).
- La deuxième tâche initiale est plus complexe que la précédente, il s'agit de distinguer les différents cas possibles selon les valeurs de *a* (pour le premier numéro, il faut distinguer pour $a = 1$, $a = 0$, $a \in]0,1[$, $a > 1$ et $a < 0$. Le deuxième numéro suppose de plus une bonne interprétation des exposants négatifs).

Arguments à l'appui des tâches initiales et redéfinies

- Une variable didactique importante : le choix de travailler sur les lettres mises de l'avant par la chercheure et appuyée par l'enseignante (C et E) pour donner du sens au symbolisme.
- Idée de contrer le calcul et de forcer une réflexion, de dépasser la technique qui se traduit par « faire ça puis ça ». (C et E)

L'enseignante propose de changer la formulation « $a < 0$ et $b > 0$ » par « *a* est négatif et *b* est positif », cette verbalisation permettant d'enlever la difficulté du symbolisme, ce changement suggéré prend assise sur une connaissance des élèves, de leurs difficultés. Les changements dans les questions cherchent à pousser les élèves à réfléchir. Dans plusieurs problèmes on demande de calculer, de résoudre, plutôt demander d'expliquer, d'argumenter, sont-ils d'accord ou pas?

L'analyse du verbatim fait ressortir ici encore une analyse préalable par l'enseignante de la tâche du point de vue du contrôle

Des composantes du contrôle sont explicitées ici par l'enseignante :

- Est-ce que les élèves se vérifient?
- Est-ce qu'ils retournent à leurs réponses?
- Est-ce qu'ils pensent, réfléchissent sur le sens de l'écriture? *(en arrière le contrôle sémantique)*

Nous pouvons remarquer ici que les perspectives de l'enseignante et de la chercheure se rejoignent : elles ont un souci commun de contrer le calcul, de forcer une réflexion, de dépasser la technique et de donner du sens au symbolisme. L'enseignante montre un souci dans l'engagement de ses élèves (qui se retrouve ici), elle connaît les difficultés de ses élèves et décide ici de les aider (en traduisant $a < 0$ par a est négatif) pour que les élèves puissent se concentrer sur ce qui est vraiment important et ne pas être bloqués à cette première interprétation de l'écriture symbolique.

4.2.2 Le scénario redéfini conjointement : les choix sous-jacents, les raisons en arrière de l'exploitation de la séquence retenue avant expérimentation

Dans la rencontre de co opération, l'enseignante et la chercheure décident de préparer un document dans lequel on va retrouver quelques uns des exercices présentés précédemment[84].

Scénario retenu	Arguments sous-jacents
Exercices sur le sens de la notation en arithmétique (référence à des nombres) : - Émilie - Sandra Exercice en lien avec la signification de l'écriture exponentielle avec des nombres en lien avec les opérations sur les exposants.	- Document distribué aux élèves après le travail sur le bloc *Résolution de problèmes.* - Exercices faits individuellement puis corrigés en grand groupe (l'enseignante précise qu'elle ne veut pas y consacrer beaucoup de temps car ce sont des notions que les élèves ont déjà vues) - Questions prévues au moment de l'intervention : « Qu'est-ce que tu en penses? Comment tu l'as fait? »

[84] Les autres exercices qu'on retrouve dans ce document proviennent des autres blocs.

Exercice : Soient *a* et *b* deux nombres entiers tels que *a* est négatif et *b* est positif. Détermine le signe de chacune des expressions suivantes : a^2 a^3 b^2 a^2b^5 $-ab$	- Donné en quiz aux élèves le cours après qu'ils aient eu à déterminer le signe d'expressions arithmétiques. Le but étant de relever si les élèves réinvestissent ce qu'ils ont vu précédemment (E).
Exercices *François* et *Ghila.*	Donnés une fois que les exposants négatifs seront traités.

4.2.3 Le scénario effectif en classe : analyse des stratégies d'intervention (en lien avec le contrôle) et analyse de l'engagement des élèves (du point de vue du contrôle)

Avant de rentrer dans l'analyse du scénario effectif en classe, nous allons d'abord présenter les différentes tâches dans l'ordre qu'elles ont été réellement données aux élèves.

Scénario effectif tel que vécu en classe
Séance du 16 mars : - Une feuille d'exercices est distribuée après avoir traité la situation des bactéries. Dans cette feuille, on retrouve les exercices *Émilie, Sandra* et l'exercice sur la signification de l'exponentielle en lien avec des opérations sur les exposants tel que planifié par l'enseignante et la chercheure. - Ces exercices ont été résolus individuellement. Les exercices *Émilie* et celui portant sur les opérations sur les exposants ont été corrigés en classe, nous avons analysé les productions des élèves pour l'exercice *Sandra.* Séance du 10 mai : - Travail sur la flexibilité dans le passage d'une écriture à l'autre ($\frac{27}{-64} = \frac{-27}{64} = -\frac{27}{64}$). Séance du 25 mai : - Une feuille d'exercices sur les polynômes a été distribuée aux élèves, nous y retrouvons les exercices *François* et *Ghila.* - L'exercice *François* n'a pas été corrigé en classe, nous analyserons les productions des élèves. L'exercice *Ghila* a été corrigé dans la séance du 2 juin.

Nous allons procéder ici comme pour le premier bloc, des extraits de verbatim des exercices corrigés en classe et des commentaires de ce qui ressort seront donnés sous forme de vignette.

Séance du 16 mars : Autour des exercices *Émilie, Sandra* et signification de l'exponentielle en lien avec les opérations sur les exposants

<table>
<tr><th colspan="2">Autour de l'exercice Émilie
Mise en route et pendant la résolution (exercices Émilie et Sandra)</th></tr>
<tr><th>Extraits</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr><td>Nadia : Bon, maintenant je vous passe une série de feuilles, vous faîtes ça individuellement, je vous laisse un petit peu de temps et après ça on corrige tout ça ensemble, vous allez voir ce n'est pas très compliqué. ce sont des petits exercices et vous faîtes tout ça sans calculatrice. (16 mars, 109-114)
(...)
Nadia : juste en connaissant les règles des signes tu peux te débrouiller pour faire les exercices, si tu sais qu'un moins par un moins ça un plus, si tu sais ça tu peux te débrouiller sans la calculatrice. (123-125)</td><td>- Importance pour l'enseignante de ne pas utiliser la calculatrice.

- Pendant la résolution de ces deux exercices par les élèves, l'enseignante les aligne sur un outil : « la loi des signes » (ce qui ne favorise pas une activité de contrôle).</td></tr>
<tr><th colspan="2">Autour du retour sur l'exercice Émilie</th></tr>
<tr><td>Nadia : Ok, on disait que Émilie a calculé 5 à la 3 ça donne 125, alors -5 entre parenthèses à la 3 ça va donner quoi comme signe?
Les élèves : -125.
Nadia : -125, ok. Moins 5 à la 3 ça donne combien?
Les élèves : -125.
Nadia : -125, ok. L'autre à côté?
Les élèves : 125.
Nadia : 125 et le dernier?
Les élèves : 125.
Nadia : 125 aussi. Est-ce que j'ai besoin d'expliquer un peu pourquoi c'est comme ça ou tout le monde a bien compris le principe? Le principe c'est quoi là dedans, comment on sait que l'un c'est moins l'autre qui est plus puis, comment on sait ça... Laure?</td><td>- L'enseignante demande les réponses de chacune des expressions (il n'y a pas de mauvaises interprétations du signe de la part des élèves)

- Après avoir obtenu les réponses, l'enseignante oriente les élèves vers le pourquoi, sur une justification.</td></tr>
</table>

Laure : ben si on a des parenthèses ben c'est tout le chiffre au complet, c'est le -5 au complet qui est à la 3. Donc si on n'a pas de parenthèses c'est juste le 5 qui est à la 3, on a juste à rajouter un petit moins en avant. : Puis moi… quand c'est entre parenthèses, on regarde l'exposant, si l'exposant est impair ça donne négatif si dedans c'est négatif là, si l'exposant est pair ça donne positif.	***Indicateurs de contrôle*** : on peut noter deux composantes différentes montrant que cette élève exerce un contrôle sur l'écriture : - Signification donnée à l'écriture exponentielle en lien avec les parenthèses, elle exerce un contrôle sémantique sur l'écriture (si on a des parenthèses c'est tout le chiffre au complet qui est à la 3). - Laure formule une loi générale qui permet de déterminer le signe de l'expression (si l'exposant est impair, toute l'expression est négative si le nombre sans l'exposant est négatif et l'exposant est pair alors c'est positif).
Nadia : ok. Fait que si l'exposant est impair ça donne est négatif, ben si c'est négatif entre parenthèses et si l'exposant est pair ça donne un positif. Pourquoi? Oui, Miranda. **Miranda** : je prends un exemple pas compliqué, mettons si on veut faire -5 fois -5 là ça va donner 25 et avec un -5 encore ça va faire – 125.	- L'enseignante relance les élèves sur le *pourquoi.* - Miranda travaille sur un exemple spécifique pour expliquer cette loi générale, elle passe ainsi par le calcul. C'est un contrôle qui s'exerce différemment sur un exemple numérique particulier, il n'y a pas de passage à une généralisation.
Nadia : ok, parce qu'on sait que quand on multiplie deux nombres négatifs ça donne un positif, fait que si l'exposant est pair ça veut dire qu'il y en a deux qui peuvent toujours se mettre ensemble pour donner un positif tandis que si l'exposant est impair il va toujours en rester un négatif tout seul au bout de la ligne et c'est pour ça qu'on va avoir un négatif, il n'est pas heureux, il est triste et c'est pour ça qu'il est négatif. (148-160)	- L'enseignante revient sur la loi de manière générale : elle reformule ce que dit Laure en donnant un sens.

L'exercice *Sandra* n'a pas été corrigé en classe, la chercheure a toutefois mis des commentaires sur chacune des copies le soir même (du 16 mars) et les feuilles ont été placées dans le classeur des élèves. Nous pouvons constater d'après les productions des élèves que trois réponses sont essentiellement apparues.

8 élèves sur 28 répondent à la question en explicitant la procédure utilisée (utilisant la parité de l'exposant pour se prononcer) : « Elle a commencé par regarder le nombre sans parenthèses. Ensuite, elle n'avait plus qu'à regarder si l'exposant était pair ou impair et s'il y avait un moins devant la parenthèse. » « Je regarde si les exposants sont pairs ou impairs et le signe en avant du nombre, Après je les classe selon les exposants »	**20 élèves sur 28** classent les nombres par ordre croissant mais n'explique pas comment ils ont procédé.

Nous pouvons remarquer que les justifications reposent sur une règle à suivre, les élèves exerçant un contrôle syntaxique sur l'écriture. Nous n'avons pas d'autres indices sur le contrôle exercé par les autres élèves.

Autour du retour sur l'exercice portant sur la signification de l'exponentielle en arithmétique en lien avec les opérations sur les exposants.	
Nadia : Le premier ça donnait un négatif avec un positif donc ça faisait un négatif. Le deuxième en haut, ça faisait... positif ou négatif? **Les élèves** : positif. **Nadia** : positif oui parce que ça donnait deux moins. Le troisième ça donnait un négatif. **Les élèves** : ouais. **Nadia** : le quatrième... **Les élèves** : négatif. **Nadia** : négatif et le cinquième. **Des élèves** : positif. **D'autres élèves** : négatif. **Nadia** : ça donne positif en haut puis un négatif en bas donc négatif. **Nadia** : Et le dernier... oui Élie? **Élie** : le -2 entre parenthèses à la 0 ça donne 1?	- Nous pouvons constater que plusieurs des réponses sont données par l'enseignante. Elle livre également les explications *(ce qui ne favorise pas une activité de contrôle).* Dans la planification, elle nous fait part de ses raisons, elle va vite car les élèves ont déjà vu ce type d'exercices, tout a été déjà dit. - La question d'Élie est intéressante, elle porte à la fois sur l'exposant 0 (qui cause des difficultés aux élèves) et sur une réflexion sur le signe de l'expression quand le signe moins est à l'intérieur de la parenthèse.

Nadia : oui ça donne 1, s'il n'y avait pas eu de parenthèses, c'était moins 1, ok? Et le dernier, en haut on a quelque chose de positif et en bas on a quelque chose de positif, donc ça donne un nombre positif. (16 mars, 194-212).	- C'est l'enseignante qui répond à l'élève en distinguant les cas où le moins est à l'intérieur ou à l'extérieur de la parenthèse.

Séance du 10 mai : autour de la flexibilité dans le passage d'une écriture à l'autre

L'extrait qui suit présente des indicateurs importants sur les difficultés de contrôle des élèves sur l'écriture en lien avec la flexibilité d'une écriture à l'autre; voir que les écritures sont équivalentes $\frac{27}{-64};\frac{-27}{64};-\frac{27}{64}$. Dans la séance du 10 mai, l'enseignante demande aux élèves de trouver une écriture équivalente à $\left(\frac{-4}{3}\right)^{-3}$ sans l'exposant négatif, la démarche effectuée en classe est la suivante : $\left(\frac{-4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{-4}\right)^{3}=\frac{3^3}{-4^3}=\frac{27}{-64}$. Ceci amène l'enseignante à préciser qu'en mathématiques, on ne laisse pas le signe moins au dénominateur (c'est une convention).

Extraits	Commentaires
Nadia : Dans les fractions, c'est une petite convention qu'il y a, on le laisse pas les nombres négatifs en bas, on le met avec le 27 en haut. $\left(\frac{-4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{-4}\right)^{3}=\frac{3^3}{-4^3}=\frac{27}{-64}=\frac{-27}{64}$	
Les élèves : pour vrai? Mais ce n'est pas égal. **Nadia** : ça c'est égal à ça non? *(elle montre les deux dernières fractions écrites).* **Les élèves** : non.	- On peut noter que les élèves réagissent vivement considérant que les deux dernières fractions écrites au tableau ne sont pas égales.
Nadia : parce que dans le fond quand je fais ça, je fais 27 divisé par 64 mais si je fais 27 divisé par moins 64 ça donne moins quelque chose.... Si je fais moins 27 divisé par 64 ça	- L'enseignante tente une explication en s'appuyant sur le travail fait sur le signe

donne la même affaire non? Un nombre négatif divisé par un nombre positif ça donne un nombre négatif fait que ça donne pareil que je mette le moins en haut ou en bas là. **Carmen** : je ne comprends rien.	des expressions avec des exposants. - Ces explications n'arrivent pas à convaincre cette élève en particulier.
Nadia : si je fais 27 divisé en 64 ça donne 0 virgule...34 quelque chose, ben si je fais 27 divisé par moins 64 ça va faire moins 0,34 quelque chose? Oui? **Carmen** : ouais. **Nadia** : mais si je fais moins cette affaire là ça me fait encore moins la même affaire, ça va? Quand je fais un plus divisé par un moins, la réponse va être... **Les élèves** : plus... heu... moins. **Nadia** : ça va donner négatif.	- L'enseignante tente alors une autre explication en ayant recours cette fois-ci à l'écriture décimale de la fraction. - On sent que les élèves sont complètement déboussolés, cette difficulté apparaît comme résistante.
Carmen : ok ça va donner deux négatifs mais est-ce que ça va donner les deux mêmes mêmes chiffres? **Nadia** : ben essaye-le, je fais 27 divisé en 64 ou 27 divisé en 64? **Carmen** : ouais mais il y a le moins... **Nadia** : mais le moins il ne change rien sur c'est quoi le résultat final.	- L'élève est convaincue que les deux expressions auront le même signe mais n'est pas assurée qu'il s'agit du même nombre.
C : le moins qu'on le mette là, là ou là c'est pareil. *Elle écrit :* $\frac{27}{-64} = \frac{-27}{64} = -\frac{27}{64}$ **Carmen** : donc le moins on peut le mettre où on veut tout le temps? **Nadia** : on peut le mettre partout sauf qu'en mathématiques on ne les prend pas en bas d'habitude parce que... **Un élève** : ce n'est pas beau.	- La chercheure intervient dans la discussion en introduisant une troisième écriture équivalente, le moins devant le trait de fraction. - Nous avons ici un argument relié à l'esthétique, la beauté de l'écriture.
Nadia : surtout quand il y a des fractions parce qu'au dénominateur... tu sais avec les fractions, il y a toujours une passe en quelque part où il faut peut-être trouver des dénominateurs communs et là trouver des dénominateurs communs avec moins	- L'enseignante donne, quant à elle, un argument basé plus sur une facilité à calculer.

quelque chose… **Sandra** : on peut mettre le moins en avant. **Nadia** : oui comme elle a faite là, le moins tu peux juste le mettre en avant, ça donne tout le temps la même réponse. Il faut juste qu'à la fin ça donne moins quelque chose. **Sandra** : ça veut dire qu'on met le moins en haut? **Nadia** : ouais. (10 mai, 247-285)	Nous ne sommes pas sûrs après cette discussion que cette difficulté ait été contrée.

Séance du 25 mai : Autour des exercices *François* et *Ghila*

Ces exercices ont été donnés vers la fin mai avec un document préparé par l'enseignante et la chercheure portant essentiellement sur les polynômes. L'exercice *François* n'a pas été corrigé en classe mais plusieurs élèves l'ont résolu. L'analyse des productions se retrouve dans le tableau ci-dessous.

Autour de l'exercice *François*

2 élèves donnent la bonne réponse avec les explications suivantes : « J'ai regardé les exposants, si le (-3) avait un exposant impair, il était négatif, s'il était pair, il était positif. Je me suis fié aux exposants et j'ai placé en ordre » (Sam). Miranda repère les résultats de certaines expressions : $(-3)^0 = 1$, $(-3)^2 = 9$, $3^{-2} = 1/3^2$ et détermine le signe des autres $(-3)^5$ et $(-3)^{21}$ sont négatifs, 3^5 est positif.	
2 élèves donnent la bonne réponse mais ne fournissent pas d'explications (François et Mathieu)	**3 élèves** procèdent par des calculs pour ordonner les expressions (Patricia, Dominique, Léa). Ces élèves exercent peu de contrôle sur la tâche.
7 élèves ne classent pas convenablement $(-3)^0$, 3^{-2} et $(-3)^2$: - Geneviève, Éva, Élie et Zaïa affirment que $(-3)^0 < 3^{-2} < (-3)^2$, les explications laissées par quelques uns de ces élèves nous portent à conclure que ces élèves ont fait l'erreur suivante : $(-3)^0 = -1$. - Julie affirme que $(-3)^0 < 3^{-2}$ et oublie de placer $(-3)^2$. Elle ne donne pas d'explications sur sa démarche, mais nous pouvons supposer qu'elle produit la même erreur que les élèves précédents. - Pour Stéphanie $3^{-2} < (-3)^2 < (-3)^0$, comme l'élève ne donne pas d'explications, il est difficile de nous prononcer sur ce qui a motivé sa démarche. - Marie intervertit $(-3)^5$ et $(-3)^{21}$. Peut-être une erreur d'inattention? Nous n'avons pas plus de détails sur son raisonnement.	

On peut remarquer que Sam et Miranda exercent un contrôle différent sur l'écriture (voir les deux premières réponses données dans le tableau). Sam est sur un contrôle syntaxique, l'utilisation d'une règle qui lui permet de contrôler ce qui se passe alors que Miranda revient à la signification exerçant un contrôle sémantique sur l'écriture. Nous pouvons également noter pour Geneviève, Éva, Élie, Zaïa et Julie certaines difficultés de contrôle sur l'écriture reliées à la combinaison de l'exposant 0 et d'une expression où le signe moins est entre parenthèses : $(-3)^0$.

Autour de l'exercice *Ghila*

Cet exercice a été corrigé en classe le 6 juin. D'après l'analyse des productions des élèves, nous pouvons remarquer que plusieurs d'entre elles dénotent une activité de contrôle dans le repérage de l'expression la plus grande.

13 élèves repèrent que a^2b^5 est l'expression la plus grande : - **4 élèves** (Nicolas, Éva, François et Mathieu) donnent la bonne réponse mais sans fournir d'explications. Exercent-ils une activité de contrôle? - **2 élèves** (Sam et Ghila) trouvent la réponse en remplaçant a par -2 et b par 2. Ils ne généralisent pas. On voit ici un contrôle sur le calcul. - **1 élève** (Stéphanie) précise que c'est a^2b^5 la bonne réponse car ça s'écrit *(a.a).(b.b.b.b.b)*. Cette élève donne un sens à l'écriture mais il n'y a pas de réflexion sur la nature des nombres en question. - **6 élèves** (Anna, Léa, Julie, Élie, Zaïa, Laure et Geneviève) exercent un contrôle sémantique sur l'écriture, un contrôle sur le signe du résultat procédant à des explications comme suit : « Comme a est négatif, s'il est à la deux il devient positif et b est déjà positif. » « a^2 sera positif parce que l'exposant est pair, b^5 est positif car le nombre est plus grand que 1. a^2b^5 multiplication de deux nombres positifs, le résultat est positif. »
4 élèves (Cathy, Miranda, Marie et Dominique) désignent b^3 comme le plus grand nombre. Ces élèves remplacent les lettres par des nombres pour opérer, ils sont sur un cas particulier et se trompent sur le signe de a^2b^5 précisant que cette expression est négative car a est négatif. Contrôle limité qui porte sur le calcul, ils ne généralisent pas.

4.2.4 Indices sur l'évolution des élèves

Dans la rencontre du 28 avril, l'enseignante annonce à la chercheure que les élèves ont bien compris le sens de la notation exponentielle. Ce bloc a été expérimenté avant que la stagiaire ne prenne la classe en charge. La stagiaire s'est fait reprendre par les élèves quand elle a fait une erreur reliée au signe d'expressions algébriques comme nous pouvons le voir dans l'extrait ci-dessous :

> Nadia : ils ont bien compris parce que la stagiaire elle est venue pour dire quelque chose, elle s'est trompée puis hou... Ils l'ont ramassé là... « il n'y a pas de parenthèses fait que le moins il compte là. » Parce qu'on est arrivé et dans mon examen on avait mis genre -8^0, c'était des vrais ou faux là, est-ce que $(-8)^0 = -1$? Puis il y en a qui se sont fait prendre, d'autres ont dit « non le moins il est dans la parenthèse. » Ils se font moins prendre que ce qu'ils se faisaient prendre ou au moins ils se posent la question...

Nous allons par la suite faire un retour sur la théorisation émergente en reprenant les catégories établies dans le bloc 1.

4.2.5 Théorisation qui émerge du bloc *Réflexion sur la notation*

Des éléments nouveaux apparaissent dans ce bloc éclairant d'une part la didactique d'intervention visant le développement du contrôle. Nous ne sommes plus sur un contrôle sur le processus de problèmes, mais plus sur un contrôle sur l'écriture. Nous avons également des indices sur le choix d'exercices favorisant le développement du contrôle, sur des indicateurs dans ce cas surtout de difficultés de contrôle sur l'écriture de la part des élèves et sur les stratégies d'intervention qui freinent surtout dans ce cas-ci le développement d'une activité de contrôle. D'autre part, nous pouvons remarquer qu'il y a un croisement à cette étape entre les deux perspectives, de la chercheure et de l'enseignante.

4.2.5.1 Analyse du point de vue des composantes du contrôle travaillées dans le bloc *Réflexion sur la notation*

Nous retrouvons certaines des composantes relevées dans le bloc *Problèmes*, la vérification, l'anticipation et le réinvestissement des stratégies d'une tâche à l'autre qui prennent un éclairage nouveau dans le contrôle s'exerçant sur l'écriture exponentielle. D'autres composantes apparaissent comme la flexibilité dans le passage d'une écriture à l'autre, le contrôle sémantique en arithmétique qui est différent de celui qui s'exerce en algèbre et le contrôle syntaxique.

Concept de contrôle (sous l'angle d'un contrôle exercé sur l'écriture exponentielle)	
Composantes relevées par l'enseignante	***Composantes relevées par la chercheure***
Contrôle sur l'écriture en arithmétique - Signification du signe moins dans l'écriture. - Un contrôle en termes du pourquoi le signe du résultat.	*Contrôle sémantique en arithmétique* - Interprétation du signe moins : le signe moins a deux sens, opération et entier relatif - Interprétation de l'écriture exponentielle : trouver le signe d'une expression sans avoir recours au calcul, suscite une réflexion sur la signification de l'écriture, sur le rôle des parenthèses. Niveau de difficulté plus élevé si on donne des expressions avec des multiplications, divisions d'expressions contenant des exposants.
Contrôle sur l'écriture en algèbre (Est-ce que les élèves pensent, réfléchissent, sur le sens de l'écriture?) - Si l'exposant est pair alors l'expression est positive, si l'exposant est impair l'expression est négative.	*Contrôle sémantique en algèbre* - Avoir recours à l'arithmétique (qui passe par un calcul). - Passage vers une généralisation : déterminer une loi générale pour déterminer le signe de l'expression (portant sur la parité de l'exposant).
Anticipation de la nature du nombre obtenu (positif ou négatif)	

Réinvestissement des stratégies utilisées de l'écriture en arithmétique à l'écriture en algèbre.	
Flexibilité d'une écriture à l'autre Des difficultés de contrôle dans le passage d'une écriture à l'autre, voir l'égalité entre les écritures $-\frac{5}{6};\frac{-5}{6};\frac{5}{-6}$.	
- *Vérification* du signe obtenu dans leur expression. Un retour sur leurs réponses si c'est jugé nécessaire. - Regard critique vis-à-vis la calculatrice : sur le sens de la réponse obtenue par cet outil.	
Contrôle syntaxique : Utilisation d'une règle (portant sur la parité des exposants) pour contrôler ce qui se passe.	

Tableau 4.2.5.1 Analyse du point de vue des composantes du contrôle travaillées dans le bloc *Réflexion sur la notation*

4.2.5.2 Analyse de la tâche, critères en arrière du choix des tâches (du point de vue du contrôle) dans le bloc *Réflexion sur la notation*

Nous retrouvons certains critères amenés par l'enseignante comme une réflexion sur la nature de la question et une tâche qui permet de réinvestir les stratégies développées précédemment.

Analyse de la tâche, critères en arrière du choix des tâches (du point de vue du contrôle)	
Critères amenés par l'enseignante	***Critères amenés par la chercheure***
Une tâche axée sur une difficulté des élèves provenant sur le peu de contrôle exercé sur l'écriture : voir l'équivalence entre les écritures $-\frac{5}{6};\frac{-5}{6};\frac{5}{-6}$.	
Tâche qui permet de *réinvestir* les stratégies développées précédemment.	
Un changement à l'intérieur de	*Un changement à l'intérieur de*

l'exercice - Choisir des nombres irrationnels, périodiques pour forcer une distance par rapport à la calculatrice. - Choisir de gros exposants pour contrer le calcul	*l'exercice* - Des nombres autres qu'entiers pour contrer la conception chez les élèves que les exposants ne s'appliquent qu'à des nombres entiers - Choisir des exposants négatifs, mettre des expressions avec des exposants 0, introduire le symbolisme *-a* car les élèves ont de la difficulté à les interpréter.
Autour de la question Préciser qu'il ne faut pas utiliser la calculatrice, il faut l'axer sur le raisonnement, la réflexion. Elle doit axer sur les explications.	

Tableau 4.2.5.2 Analyse de la tâche, critères en arrière du choix des tâches (du point de vue du contrôle) dans le bloc *Réflexion sur la notation*

4.2.5.3 Synthèse des indicateurs de contrôle chez les élèves dans le bloc *Réflexion autour de la notation*

Comme pour le bloc précédent, certains indicateurs de contrôle (ou plutôt de difficultés de contrôle des élèves) autour de l'écriture sont explicités par l'enseignante et la chercheure. D'autres indicateurs ont pu être relevés d'après les traces écrites des élèves et leur discours.

Indicateurs de contrôle chez les élèves explicités par l'enseignante
- Réinvestissement des stratégies d'un exercice à l'autre
Indicateurs de difficultés de contrôle des élèves explicités par l'enseignante et la chercheure
- Difficulté des élèves à anticiper le signe du résultat d'une expression avec des exposants (E et C) - Difficultés à traiter, à interpréter les exposants négatifs (C) - Difficultés à voir l'équivalence entre les écritures $-\frac{5}{6};\frac{-5}{6};\frac{5}{-6}$ (E) - Difficultés autour de l'interprétation de *–a* (vu comme un nombre négatif)

Tableau 4.2.5.3a Synthèse des indicateurs de contrôle chez les élèves explicités par l'enseignante et la chercheure dans le bloc *Réflexion sur la notation*

Indices de contrôle ou de difficultés des élèves d'après leurs traces écrites et leur discours	
Indices de contrôle	***Indices de difficultés de contrôle***
Contrôle sémantique en arithmétique - Signification donnée à l'écriture exponentielle en lien avec les parenthèses (si on a des parenthèses c'est tout le chiffre au complet qui est à la 3) - Passage à une généralisation qui permet de déterminer le signe d'une expression (portant sur la parité des exposants)	*Contrôle sémantique en arithmétique* - Difficultés avec la combinaison de l'exposant 0 et d'une expression où le signe moins est entre parenthèses, par exemple $(-2)^0$. - Certains élèves calculent les expressions données et n'ont pas recours à une réflexion sur l'écriture exponentielle.
Contrôle sémantique en algèbre - Avoir recours à l'arithmétique (passe par un calcul). - Signification donnée à l'écriture exponentielle en lien avec le symbolisme.	*Contrôle sémantique en algèbre* - Un contrôle limité sur le calcul (se trompe en calculant certaines expressions)
Contrôle syntaxique L'élève contrôle ce qui se passe en utilisant une règle.	
	Flexibilité d'une écriture à l'autre Difficulté à voir l'équivalence entre les écritures $\frac{27}{-64};\frac{-27}{64};-\frac{27}{64}$

Tableau 4.2.5.3b Indicateurs de contrôle chez les élèves d'après leurs traces écrites et leur discours dans le bloc *Réflexion sur la notation*

4.2.5.4 Analyse des stratégies d'intervention qui favorisent ou freinent le possible développement du contrôle dans le bloc *Réflexion sur la notation*

Dans ce bloc, on retrouve des stratégies d'intervention mises de l'avant dans le premier bloc. D'autres stratégies apparaissent qui essentiellement freinent le possible développement du contrôle (que nous avons noté en ombré). Nous les avons classé en trois moments : autour de l'entrée dans la tâche, pendant la résolution et au retour. Nous avons mis en ombré les stratégies d'intervention qui freinent le développement d'une activité de contrôle.

***Stratégies d'intervention :* Mise en route de la tâche**
- Explicite la tâche en insistant sur le fait de ne pas utiliser la calculatrice, idée de réfléchir sur l'écriture exponentielle.
***Stratégies d'intervention :* Pendant la résolution**
- L'enseignante aligne les élèves sur un outil : « la loi des signes ».
***Stratégies d'intervention :* Dans le retour**
Explications / Validation - Les réponses et certaines explications sont données par l'enseignante. - Certaines explications permettent de considérer plusieurs cas de figure : le moins à l'intérieur ou à l'extérieur de la parenthèse (explications qui ne sont pas renvoyées aux élèves). - Exercices prennent appui sur des stratégies développées dans les exercices précédents (idée du réinvestissement), menés par l'enseignante du début à la fin. ***Forcer des éclaircissements, pousser les élèves à aller plus loin*** - L'enseignante oriente les élèves sur le *pourquoi,* sur une justification ***Axer sur le sens*** - L'enseignante reformule les propos d'une élève en donnant du sens (elle revient sur la loi de manière générale)

Tableau 4.2.5.4 Analyse des stratégies d'intervention favorisant ou pas le développement d'une activité de contrôle dans le bloc *Réflexion sur la notation*

4.2.5.5 Autour des perspectives de l'enseignante et de la chercheure

Dans ce bloc, les perspectives de l'enseignante et de la chercheure se rejoignent autour d'un souci commun en lien avec le contrôle sur l'écriture.

Perspective de l'enseignante	**Perspective de la chercheure**
Sur sa didactique praticienne - Souci exprimé dans l'engagement de ses élèves (provenant des difficultés qu'elle connaît, basées sur son	*On retrouve* - Une référence au cadre conceptuel sur le contrôle - Une explicitation de la didactique de

expérience) *Une entrée dans le contrôle (même si l'enseignante n'emploie pas ce terme)* Jugement critique sur la réponse, porte sur le sens de la réponse (être critique face à la réponse donnée par la calculatrice). Forcer une réflexion sur le sens de l'écriture.	recherche (autour de la conception des élèves sur les exposants associés aux entiers). *Ce qui est nouveau* - Prise en compte de la pratique à travers une sensibilité aux élèves dans la classe (aux difficultés qu'elle a perçues)
Souci commun : Contrer le calcul, forcer une réflexion, dépasser la technique, donner du sens au symbolisme.	

Tableau 4.2.5.5 Autour du changement des perspectives de l'enseignante et de la chercheure dans le bloc *Réflexion sur la notation*

4.3 Analyse sur un troisième bloc portant sur le sens de la manipulation sur les exposants

Les exercices dans ce bloc requièrent un contrôle sémantique, un engagement réfléchi sur la manipulation d'expressions avec des exposants.

4.3.1 Analyse des tâches initiales en regard du contrôle

Tâches initiales (tâches proposées)	**Ce que les tâches sont devenues** (tâches redéfinies)
Sachant que x, y et z sont des nombres, dans chacune des expressions ci-dessous, attribue une valeur possible à ces lettres de manière à obtenir une égalité vraie. $2^x . 2^x . 2^y = 2^{10}$ $2^{15} . 2^{10} = 2^z$ $10^x . 10^y = 10^5 . 10^z$ $5^x = 5^6 . 5^6$ $10^x = 10^6 . 10^y . 10^z$ $3^3 = 3^x . 3^y . 3^z$	Les égalités ci-dessous peuvent-elles être vraies? **Explique pourquoi.**

Égalités vraies?	**Démarche**
$2^x . 2^x . 2^y = 2^{10}$	
$2^{15} . 2^{10} = 2^z$	
$10^x . 10^y = 10^5 . 10^z$	
$\boxed{\dfrac{2^x}{2^x} = 2^0}$	
$5^x = 5^6 . 5^6$	

$$\boxed{(x+y)^3 = x^3 + y^3}$$

	$\boxed{(x+y)^3 = x^3 + y^3}$	
	$3^3 = 3^x . 3^y . 3^z$	
	$\boxed{3^4 = 3^x . 3^2 . 3^z}$	
Trouve deux nombres a et b tels que $a < b$ et $a^2 = b^2$.	Ah, ah!! Sam dit qu'il a trouvé deux nombres a et b tels que a est plus petit que b et en plus $a^2 = b^2$. Sais-tu quels sont ces deux nombres?	

Analyse des tâches initiales proposées en regard du contrôle	
<u>*Pour la première tâche*</u> : Contrôle exercé sur la notion d'équation (égalité conditionnelle) requérant un engagement réfléchi. Forcer un sens sur l'égalité : voir que dans certains cas il existe plusieurs valeurs qui vérifient une égalité et dans d'autres cas il y a une et une seule valeur possible (par exemples dans l'égalité $5^x = 5^6.5^6$ seul $x = 12$ convient et dans l'égalité $3^3 = 3^x . 3^y . 3^z$ plusieurs valeurs sont possibles)[85]. (C)	
Arguments évoqués par l'enseignante	***Arguments de la chercheure***
<u>*Pour la deuxième tâche*</u> Cet exercice permet de consolider ce qui aura été vu au niveau de la réflexion sur la notation exponentielle. Il est plus difficile, destiné donc aux plus « tofs ». *Il sera donc donné quelques séances après que les élèves aient fait les exercices portant sur la réflexion sur la notation.* Un contrôle plus ardu, moins simple que celui mis en place pour les exercices en lien avec l'arithmétique est ici sollicité.	<u>*Pour la deuxième tâche*</u> Engagement réfléchi, contrôle sémantique exercé sur l'écriture. Faire le pont entre l'arithmétique et l'algèbre : essayer plusieurs nombres et s'apercevoir qu'on a une infinité de solutions (les nombres sont égaux en valeur absolue et de signe différent). Difficulté anticipée : il faut prendre en compte deux contraintes.

[85] Après coup, nous nous sommes aperçus que nous aurions pu rajouter le cas où l'égalité n'est jamais vraie pour contrer la conception qu'il y a toujours une solution. Par exemple dans l'égalité $2^x.2^5 = 2^4.2^x$

4.3.2 Arguments à l'appui des tâches modifiées

	Enseignante	**Chercheure**
La tâche (changements)	<u>*Pour la première tâche*</u> - Rajouter des expressions avec l'exposant 0. - Modifier la question : préciser si les égalités peuvent être vraies et *pourquoi.* <u>*Pour la deuxième tâche*</u> - Traduire le symbolisme < en mots. - Présenter la tâche de façon à engager les élèves.	<u>*Pour la première tâche*</u> Varier les égalités : des égalités toujours vraies, parfois vraies.
Arguments évoqués	<u>*Pour la première tâche*</u> - L'exposant 0 pose des difficultés aux élèves (même s'il a été travaillé). - Proposer la tâche sous forme de question *« Les égalités ci-dessous peuvent-elles être vraies? »* pour mettre les élèves dans la voie que les égalités peuvent ne pas être toujours vraies. <u>*Pour la deuxième tâche*</u> - Le symbolisme < peut poser des difficultés de compréhension chez certains élèves (ils risquent alors d'être bloqués et ne pas faire la tâche demandée).	<u>*Pour la première tâche*</u> Voir le sens qu'accordent les élèves à l'équation (voient-ils que l'égalité est conditionnelle?)

Nous pouvons constater ici que la chercheure est centrée sur son cadre de référence sur le contrôle. L'enseignante exprime à la fois un souci dans l'engagement de ses élèves (provenant des difficultés qu'elle connaît, basées sur son expérience) et une entrée dans le contrôle par la formulation de la question. Dans le premier exercice, l'énoncé *« Les égalités ci-dessous peuvent-elles être vraies? Explique pourquoi. »* amène les élèves à émettre une opinion et à la valider en argumentant, la question présente également aux élèves l'idée que les égalités peuvent ne pas être vraies, ce qui n'est pas le cas de l'énoncé initial *« Attribue une valeur possible à ces lettres de manière à obtenir une égalité vraie »* (qui renforce l'idée que les égalités sont toujours vérifiées). La perspective de l'enseignante rejoint ainsi celle de la chercheure.

4.3.3 Analyse du scénario effectif en classe

Le premier exercice *« Les égalités ci-dessous peuvent-elles être vraies? Explique pourquoi »* a été corrigé lors de la séance du 16 mars (cours 3).

Mise en route de la correction

L'enseignante reformule l'énoncé en ses mots en insistant sur l'égalité conditionnelle, en donnant un sens à ce qui est en jeu dans cet exercice.

Nadia : on vous demande « les égalités ci-dessous peuvent-elle être vraies? » ça veut dire peuvent-elles être vraies ce n'est pas nécessairement que c'est toujours vrai, mais est-ce qu'on est capable de trouver des cas où est-ce que c'est vrai?

Les productions et les interventions des élèves	Interventions de l'enseignante lors de la correction
Correction de $2^x \cdot 2^x \cdot 2^y = 2^{10}$	
Réponse de Marie : $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^2$	- L'enseignante invalide cette réponse *« on a x et x, il faut que j'en ai deux pareils. »*
Réponse de Marie : $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^2$	L'enseignante donne d'autres possibilités : les triplets (2,2,6), (1,1,8), (4,4,2). *C'est elle qui fait le travail de validation, d'ouverture à d'autres possibilités.*
Presque toutes ces possibilités se retrouvent dans les productions des élèves : (3,3,4)	

(9 élèves); (2,2,6) (5 élèves); (4,4,2) (8 élèves). Steve et Claude affirment toutefois que cette égalité n'est pas vraie car il y a deux exposants différents, x et y, la conception sous-jacente étant qu'une équation ne peut avoir qu'une et une seule inconnue.

Correction de $10^x \cdot 10^y = 10^5 \cdot 10^z$	
Ghila fait le raisonnement suivant : comme $10^x.10^y = 10^5.10^z$ alors $10^x = 10^5$ et $10^y = 10^z$. On a ainsi $x = 5$ et $y = z$, cette dernière égalité est impossible deux lettres différentes ne peuvent avoir la même valeur. *(Conception chez les élèves qui apparaît ici très ancrée : deux lettres différentes représentent deux nombres différents)*	L'enseignante reformule les propos de l'élève et les renvoie au reste de la classe. (Validation renvoyée au groupe).
Nicolas ouvre sur une autre solution, il donne des valeurs différentes : x est égale à 7, y à 8 et z à 10.	L'enseignante explique la démarche de Nicolas : « 7 et 8 fait que tu as mis 5 et 10 comme ça ça faisait 15 de chaque côté. » Elle revient ensuite sur la conception de Ghila en essayant de comprendre le raisonnement en arrière de sa solution, s'assurer que c'est bien cela : « Mais le y et le z Ghila là, toi c'est parce que ce n'est pas la même lettre, il ne faut pas que ce soit le même chiffre c'est ça? »
Marc va dans le même sens que Ghila : « Ben il ne faut pas qu'ils soient égales parce que ce n'est pas la même lettre ».	Suite à l'intervention de Marc, les explications de l'enseignante ne sont pas très claires, n'ayant pas de contexte sur lequel s'appuyer, il est difficile de convaincre les élèves que deux lettres différentes peuvent avoir la même valeur : « ben ce n'est pas grave, je pourrais supposer... ça peut être vrai en autant que y soit égale à z, je pourrais faire ça, c'est juste que c'est deux lettres différentes, il n'y a rien qui empêche que...
Réaction de Carmen : « mais dans l'examen si on met x, y et z c'est trois trucs différents. »	L'enseignante n'arrive pas à convaincre les élèves, elle coupe court « ok, parce que si tu prends la peine d'écrire trois lettres différentes c'est parce que ce n'est pas pareil. ».

	Elle renforce ainsi la conception qu'elle cherche à contrer.
Résolution de $\frac{2^x}{2^x} = 2^0$	
Miranda prend un exemple : $x=2$ mais ne précise pas qu'il y a plusieurs valeurs possibles. C'est Nicolas qui voit que l'égalité est toujours vraie : « x peut être égal à n'importe quoi. »	L'enseignante ramène dans son institutionnalisation le sens de l'équation (elle fait la distinction entre cette égalité et les autres, les autres sont vraies sous certaines conditions (certaines valeurs) alors qu'ici l'égalité est toujours vraie.
Résolution de $10^x = 10^6 . 10^y . 10^z$	
Christine donne comme valeurs y = 1, z = 2 et si on additionne tous les exposants ça va faire 9 donc x est égal à 9.	L'enseignante reformule les propos de l'élève pour en dégager la généralité : « ce que tu me dis c'est que j'ai juste à m'arranger pour que quand je fais le 6 + y + z ça donne le 10… le x. Fait que pourvu que je trouve des nombres pour que ça fonctionne, on est correct, ça se peut, ok. »
Résolution $(x + y)^3 = x^3 + y^3$	

La classe est partagée devant cette égalité : Réponse de Ghila : l'égalité est vraie, on distribue l'exposant dans la parenthèse sur les deux nombres. *(Une erreur courante qui pourrait être renforcée en fait par cet exercice).*	L'enseignante suscite le débat dans la classe, elle ne se prononce pas sur la démarche de Ghila et désigne un autre élève que dit que l'égalité n'est pas vraie. Renvoie la validation au groupe.
Intervention de Christine : « je dis que ce n'est pas vrai parce qu'il faut les additionner avant de les exposer à la 3 puis heu... tandis que de l'autre côté tu les exposes en premier le x et le y et ensuite tu les additionnes ensemble, ça ne donne pas la même affaire. » (Contrôle sur le sens de l'écriture).	L'enseignante ne se prononce pas et relance le débat en demandant s'il y a un moyen de se vérifier si c'est vrai ou pas.
Christine trouve un moyen de vérification *(élément de contrôle)* : elle propose de remplacer par des nombres.	
Nicolas fait référence à la priorité des opérations pour justifier que l'égalité est vraie : « la règle elle dit que la chose à faire en premier c'est les exposants, ensuite la parenthèse, ensuite les multiplications et les divisions et ensuite les additions et les soustractions. »	
Pour Laure l'égalité est fausse « parce que l'exposant c'est la parenthèse, fait qu'il faut que tu exposes comme la parenthèse au complet. » *(contrôle sur l'écriture).*	
	L'enseignante reprend les propos de l'élève « tu exposes la parenthèse, je ferais $x + y$ fois $x + y$ fois $x + y$. Ok mais si on l'essaie... ceux qui me disent que ça ne marche pas, il faut que vous me trouviez un contre exemple. » L'enseignante ne pousse pas le raisonnement de Laure, elle envoie les élèves sur un contre-exemple.

Exemple proposé par Miranda : $x = 10$ et $y = 15$.	L'enseignante demande à toute la classe d'essayer avec ces deux nombres ou avec des nombres plus faciles. Constat : on a trouvé un exemple pour lequel cette égalité ne fonctionne pas. L'enseignante essaie avec d'autres nombres $x = 2$ et $y = 3$.
Nicolas propose alors un cas dans lequel l'égalité est vraie $x=0$ et $y=1$ prouvant ainsi que l'égalité est parfois vraie.	L'enseignante conclue alors que cette égalité est vraie dans des cas très précis : « là ça fonctionne mais ça ne fonctionne pas toujours. Ça fonctionne avec certains nombres mais ça ne fonctionne pas toujours fait que cette affaire là ce n'est pas toujours vrai c'est vrai dans des cas très particuliers, très précis. »
Dominique souligne son incompréhension, elle est toute mélangée, elle ne sait plus qui a raison…	La sonnerie retentit, l'enseignante n'a pas le temps de conclure sur cette égalité et n'a plus le temps dans les prochains cours de revenir sur ce document.

Analyse des productions des élèves

En analysant les productions des élèves après coup, nous pouvons noter que l'égalité $3^3 = 3^x.3^y.3^z$ est intéressante du point de vue de la diversité des résultats donnés par les élèves :

- deux élèves donnent comme réponse $x=1$, $y=2$, $z=1$, ce qui permet de revenir sur la conception que deux lettres différentes représentent deux valeurs différentes.
- D'autres élèves donnent comme réponse $x=0$, $y=1$, $z=2$ ce qui permet de revenir sur la convention d'écriture reliée à l'exposant 0 qui pose des difficultés aux élèves.

- Les réponses avec des exposants négatifs comme *x=4, y=-6 et z=5* permettent à ce stade d'introduire les exposants négatifs. Une entrée spontanée vers les exposants négatifs.
- D'autres réponses avec des exposants décimaux comme *x=1, y=1,2 et z=0,8* permettent de se pencher sur la signification reliée aux exposants décimaux contrant la conception chez les élèves que les exposants sont des nombres entiers.

La deuxième tâche « *Ah, ah!! Sam dit qu'il a trouvé deux nombres a et b tels que a est plus petit que b et en plus* $a^2 = b^2$*. Sais-tu quels sont ces deux nombres?* » a été fait par les élèves le 29 mai. D'après leurs productions, on peut noter que plusieurs d'entre eux donnent comme réponse un seul couple (Marie, Éva, Mathieu, Ghila, Stéphanie, Léa, Zaïa, Geneviève, Cathy, Miranda) alors que d'autres (Sam, François, Anna, Julie, Élie, Laure) précisent qu'il existe une infinité de couples satisfaisant ces deux relations, démontrant un contrôle sur les systèmes qui ont une infinité de valeurs. D'autres tâches ont été proposées par la chercheure dans ce bloc, l'enseignante les a trouvées intéressantes, elles devaient être discutées lors de la rencontre de co-opération du 28 avril mais elles ont dû être laissées de côté considérant le retard pris dans la planification (cf. appendice H).

Dans la rencontre du 28 février, l'enseignante précise qu'elle accorde trois statuts différents à la tâche :

- Les tâches qui vont être discutées en classe (un temps important leur est accordé). Elles peuvent être présentées dans le cours ou données en devoir et récupérées en cours.

- Les tâches qui servent à consolider la matière (des exercices d'application comprenant de la drill mais également des exercices de réflexion).

- Des exercices qui sont utilisés pour vérifier où en sont les élèves, réinvestissent-ils ce qu'ils ont vu jusqu'ici?

Elle ne donne malheureusement pas d'exemples de chacun de ces types de tâche, précisant ainsi les critères qui définissent le statut de la tâche.

Dans ce troisième bloc, quelques éléments se précisent autour de la didactique d'intervention visant le développement du contrôle et les perspectives de l'enseignante et de la chercheure se confirment.

4.3.4 Théorisation qui émerge du bloc Sens de la manipulation sur les exposants

4.3.4.1 Analyse du point de vue des composantes du contrôle travaillées

Dans ce bloc, nous sommes sur un contrôle sur le sens accordé à la manipulation sur les exposants, plus particulièrement le sens accordé à l'égalité, les élèves voient-ils qu'elle est conditionnelle? C'est un contrôle sur l'égalité avec des exposants en algèbre qui est travaillée ici.

Concept de contrôle (sous l'angle d'un contrôle sur les égalités avec des exposants en algèbre)	
Composantes relevées par l'enseignante	***Composantes relevées par la chercheure***
- Le contrôle mis en place ici est moins simple que celui qui s'exerce dans le bloc 2.	*Contrôle qui s'exerce sur une égalité* - Engagement réfléchi, un contrôle sémantique sur l'égalité conditionnelle. Certaines égalités admettent comme solution plusieurs valeurs, d'autres une seule valeur, d'autres une infinité de valeurs ou aucune valeur.
- Le niveau de difficulté ici est plus grand que précédemment *(le contrôle qui s'exerce sur une égalité).* C'est un contrôle « plus ardu, qui est pour les tofs. »	*Contrôle qui s'exerce sur une égalité et une inégalité (idée de système)* Prise en compte des deux contraintes simultanées. (Ces deux composantes s'appuient sur un recours à l'arithmétique, qui passe par un calcul, cf. bloc 2).
Réinvestissement des habiletés développées au bloc 2.	

Tableau 4.3.4.1 Analyse du point de vue des composantes du contrôle travaillées

4.3.4.2 Analyse de la tâche, des critères en arrière du choix des tâches (du point de vue du contrôle)

Analyse des tâches, critères en arrière du choix des tâches (du point de vue du contrôle)	
Critère amenée par l'enseignante	***Critère amenée par la chercheure***
Nature de la question : Mettre en évidence l'idée de l'égalité conditionnelle, l'élève doit émettre une opinion et justifier.	La tâche présente plusieurs cas de figure (des égalités toujours vraies, parfois vraies…).

Tableau 4.3.4.2 Analyse des tâches, critères en arrière du choix des tâches

4.3.4.3 Synthèse des indicateurs de contrôle chez les élèves

Indicateurs de non contrôle explicités par l'enseignante	
- Difficultés des élèves à interpréter des expressions avec l'exposant 0. - Difficultés avec l'interprétation du symbolisme <	
Indicateurs de contrôle ou de difficultés des élèves d'après leurs traces écrites et leur discours	
Indices de contrôle	***Indices de non contrôle***
Contrôle qui s'exerce sur une égalité Voir que l'égalité est vraie pour une infinité de valeurs (Nicolas). Donne un moyen de valider un énoncé : avoir recours à l'arithmétique (Christine) Contrôle sémantique sur l'écriture exponentielle (Laure) $(x+y)^3 = (x+y).(x+y).(x+y)$ *Contrôle qui s'exerce sur deux contraintes* Voir que l'égalité est vraie pour une	*Contrôle qui s'exerce sur une égalité* Contrôle sur un exemple particulier mais ne considère pas toutes les possibilités *(Miranda).* *Des conceptions autour du symbolisme* - Une égalité ne peut avoir qu'une seule inconnue *(Steve, Claude)* - Deux lettres différentes représentent deux valeurs différentes *(Ghila, Marc)* *Autour d'une erreur courante* $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ - Pas d'engagement réfléchi (on distribue l'exposant *(Ghila)*

infinité de valeurs *(Sam, François, Anna, Julie, Élie, Laure)*	- Utilisation d'une règle (contrôle syntaxique) : d'abord on effectue les exposants, ensuite les parenthèses,... mais qui ne mène pas à la bonne réponse *(Nicolas)* *Contrôle qui s'exerce sur deux contraintes* Un contrôle limité (trouvent un seul couple possible) *(Miranda, Marie, Éva, Mathieu, Ghila, Stéphanie, Laure, Zaïa, Geneviève, Cathy)*

Tableau 4.3.4.3 Synthèse des indicateurs de contrôle relevés chez les élèves

4.3.4.4 Analyse des stratégies d'intervention qui favorisent le possible développement d'une activité de contrôle

***Stratégies d'intervention :* Mise en route**
Axé sur le sens Donne du sens à l'égalité conditionnelle (à ce qui en jeu dans l'exercice)
***Stratégies d'intervention :* Pendant la correction**
Validation / Explications - Pour certaines égalités, le travail de validation, d'ouverture à d'autres possibilités est fait par l'enseignante. - Elle renforce la conception qu'elle cherche à contrer : deux lettres différentes représentent deux nombres différents. - Validation renvoyée au groupe. - Demande aux élèves un moyen de vérification. ***Axer sur le sens*** - Elle ramène dans son institutionnalisation le sens de l'équation - L'enseignante reformule les propos de l'élève pour en dégager la généralité.

Tableau 4.3.4.5 Analyse des stratégies d'intervention favorisant le possible développement du contrôle

4.3.4.5 Autour des perspectives de l'enseignante et de la chercheure

Perspective de l'enseignante	Perspective de la chercheure
Sur sa didactique praticienne Souci dans l'engagement de ses élèves (provenant des difficultés qu'elle connaît, basés sur son expérience) *Une entrée sur le contrôle* Par la formulation de la question, annonce l'égalité conditionnelle, l'élève doit émettre une opinion et la valider.	*Sur une didactique de recherche* Renvoie à son cadre conceptuel sur le contrôle

Tableau 4.3.4.5 Autour des perspectives de l'enseignante et de la chercheure

4.4 Analyse sur un quatrième bloc portant sur les *Exercices vrai-faux / Montre que*

4.4.1 Analyse des tâches co-construites du point de vue du contrôle

Les trois tâches ci-dessous ont été conçues par l'enseignante et la chercheure. Elles reposent sur des difficultés relevées chez les élèves et cherchent à les contrer.

Tâches co-construites	Analyse en regard du contrôle
Est-ce que $m^a = ma$ est toujours vraie, jamais vraie ou parfois vraie?	- Engagement réfléchi, contrôle sémantique en algèbre : avoir recours à l'arithmétique.
Mireille a calculé les expressions $x.x$ et $2x$ pour $x=0$ puis pour $x=2$, elle trouve que $x.x = 2x$. Elle conclut que l'expression $x.x$ est toujours égale à l'expression $2x$. Es-tu d'accord? Explique.	- Cet exercice est basé sur la conception de la preuve (si c'est vrai sur un cas, c'est toujours vrai). - Demande une réflexion sur l'écriture, de percevoir l'erreur. Un contrôle axé sur un recours à l'arithmétique.

Tâche co-construite

Pour les expressions suivantes, on te propose plusieurs résultats. Explique lesquels sont faux et pourquoi.

Expressions	Résultats possibles		
$\frac{8^5}{8}$	a) $\frac{8^4}{0}$	b) $\frac{8^4}{1}$	c) 8^4

$\frac{9^2}{9^5}$	a) $\frac{1}{9\times9\times9}$	b) 9^3	c) $\frac{0}{9\times9\times9}$	
$\frac{10^2\times10^5}{10^5}$	a) $\frac{10^{10}}{10^5}=\frac{10^5}{1}$	b) $\frac{10^7}{10^5}=\frac{10^2}{1}$	c) $\frac{10\times10\times10\times10\times10\times10\times10}{10\times10\times10\times10\times10}=\frac{10\times10}{0}$	
$\frac{8^5\times10^5}{10^2}$	a) $\frac{80^5}{10^2}=\frac{8^5}{1^2}=\frac{8^5}{1}$	b) $\frac{18^5}{10^2}$	c) $\frac{8^5\times10^3}{10^0}$	d) $\frac{8^5\times10^3}{0}$

Arguments sous-jacents à la construction des tâches

	Enseignante	Chercheure
Autour de la $1^{ère}$ tâche	Souligne la confusion ressentie chez certains élèves entre les écritures x^2 et $2x$.	Propose de donner une égalité générale qui présente quelques subtilités (énoncé vrai pour $m=0$ ou pour $a=1$ et pour $m=2$ et $a=2$). *(tâche plus difficile que la $2^{ième}$).*
Autour de la $2^{ième}$ tâche	Même difficulté que précédemment. La question pique la curiosité des élèves puisqu'on leur demande de se prononcer sur un énoncé : importance de la question « Es-tu d'accord? Explique. » On facilite l'engagement des élèves.	
Autour de la $3^{ième}$ tâche ***Arguments amenés par l'enseignante et basés sur un constat de difficultés chez les élèves***		
Dimension du contrôle travaillée : Perception des erreurs - Lors de la réduction d'une expression, les élèves ont tendance à barrer les valeurs au numérateur et au dénominateur et mettent 0 au lieu de 1 quand les valeurs du numérateur ou du dénominateur ont été simplifiées comme dans l'exemple suivant : $\frac{8^5}{8}=\frac{\cancel{8}.8.8.8.8}{\cancel{8}}=\frac{8}{0}$.		

Variables didactiques : dans un des cas le 0 est au numérateur (ce qui ne devrait pas déranger les élèves qui font une telle erreur) et dans l'autre le 0 est au dénominateur (ce qui devrait questionner certains élèves, la division par 0 étant impossible).

- Une autre difficulté travaillée porte sur l'erreur qui consiste à multiplier les exposants au lieu de les additionner : $10^2 \times 10^5 = 10^{10}$.

- Certains élèves simplifient de la façon suivante : $\frac{80^5}{10^5} = \frac{8^5}{1^5}$ ou ils additionnent les bases de deux nombres ayant les mêmes exposants : $8^5 \times 10^5 = 18^5$.

L'enseignante est axée sur sa pratique en lien avec les difficultés des élèves, dans un souci de favoriser leur engagement, c'est ce que nous retrouvons dans les autres blocs. La formulation des tâches mise sur une des composantes du contrôle : la perception des erreurs par les élèves et rejoint ainsi la perspective de la chercheure.

4.4.2 Analyse des productions des élèves et de ce qui a été vécu en classe

Cet exercice (le premier) a été donné aux élèves le 16 mars avec les exercices portant sur le bloc *Réflexion sur la notation.* Faute de temps, il n'a pas pu être corrigé en classe, les productions des élèves nous indiquent que certains d'entre eux démontrent un contrôle sur la tâche qui se manifeste par différents engagements : un contrôle sur l'égalité conditionnelle, idée de généralité (trouver les cas où l'égalité est toujours vraie), un contrôle exercé par la donnée d'un contre-exemple (l'égalité n'est pas vraie) et un contrôle sur le sens de l'écriture exponentielle.

7 élèves répondent que l'égalité est parfois vraie :

- 2 élèves *(Sam, Nicolas)* démontrent un contrôle sur l'égalité conditionnelle en précisant que l'égalité est vraie pour $a = 1$.

- 3 élèves *(François, Daniel et Cathy)* écrivent que c'est parfois vrai mais ne donnent pas d'explications. *Nous n'avons pas assez d'informations sur le contrôle exercé.*

- Mathieu dit que c'est parfois vrai pour $m = 136943996211342$ et $a = 2$ *(cet élève n'exerce pas de contrôle)*

- Émilie dit que l'égalité est vraie si m et a ont la même valeur *(cette élève n'exerce pas de contrôle)*	
7 élèves écrivent que l'égalité n'est jamais vraie : - 2 élèves *(Laure et Ly)* donnent les explications suivantes : m^a c'est le nombre m qui est multiplié par lui-même a fois alors que ma c'est m fois a. *Ces élèves exercent un contrôle sur l'écriture, sur le sens de l'écriture exponentielle.* - 3 élèves *(Christine, Steve, Claude)* disent que ce n'est jamais vrai mais ne donnent pas d'explications. - 2 élèves *(Patricia et Marie)* donnent un contre-exemple : $3^2 \neq 3.2$ pour montrer que cette égalité n'est jamais vraie. *Ces deux élèves se prononcent sur le vrai / faux à l'aide d'un contre-exemple (exercent ainsi du contrôle sur la tâche).*	**1 élève** (Ghila) précise que l'égalité est toujours vraie sans donner plus d'explications.

En ce qui a trait à la deuxième tâche (confusion entre x^2 et $2x$), une discussion sur ces deux écritures est amenée par Carmen dans la séance du 3 mai. Dans la séance précédente, deux expressions ont été données aux élèves qu'ils devaient réduire : $\frac{2xy+6y}{2y}$ et $\frac{4ab+12a^2b^3+16a^3b^2}{4ab}$. L'enseignante et la chercheure ont ramassé les copies et les ont corrigées, un retour sur les différentes solutions des élèves a été faite. Plusieurs élèves (Marie, Zaïa, Dominique, Sandra, Carmen, Christine) ont réduit l'expression $\frac{2xy+6y}{2y}$ de la façon suivante :

$$\frac{2xy+6y}{2y} = \frac{2xy}{2y} + \frac{6y}{2y} = \frac{xy.xy}{yy} + \frac{yyyyyy}{yy}$$

La difficulté des élèves à reconnaître la différence entre les écritures x^2 et $2x$ ressort ici plusieurs fois dans les égalités $2xy = xy.xy$; $6y = yyyyyy$; $2y = yy$. L'enseignante met l'accent sur cette difficulté comme nous le voyons dans l'extrait ci-dessous :

Extraits	Commentaires
Nadia : fait que là ici on a *2xy + 6y* sur *2y*, il y en a beaucoup qui ont fait ça, ok? Fait que ça on sépare ça en deux morceaux, on a dit *2xy* sur *2y* plus *6y* sur *2y*, jusque là ça ça va, est-ce que vous comprenez que c'est bon jusque là là? Ça jusque là ça va, mais *2xy* la personne elle s'est dit que c'était *xy* fois *xy*.	L'enseignante reprend la démarche d'un élève qui a produit cette erreur en explicitant le rationnel en arrière.
Marc : 2 *x* fois *y*	Marc démontre un décodage des éléments implicites
Nadia : c'est *xy* plus *xy* ça c'est plus… ah, ça si on multiplie ça ici ça fait *x* à la 2 puis *y* à la 2 ça ne marche pas ça là là ce n'est pas la même affaire.	C'est l'enseignante qui montre, qui invalide.
Carmen : non mais 2*x* c'est *x* fois *x*	La conception ressort chez Carmen.
Nadia : non *2x* c'est *x* plus *x*.	
Carmen : mais vous ne m'avez jamais dit ça… je n'ai jamais appris ça! *Rires.*	
Carmen : *2x* ça a toujours égalé à *x* fois *x*.	
Nadia : non, non.	
Carmen : ma vie est basée sur un mensonge.	C'est l'enseignante qui montre. Elle ne va pas chercher, ne sollicite pas la signification par l'élève.
Nadia : *x* à la 2 c'est *x* fois *x*, *x* à la 2 ce n'est pas *2x*.	
C écrit au tableau : $2x = x + x$ *et* $x^2 = x.x$	
Nadia : et ici c'est la même affaire, *6y*…	
Carmen : c'est pour ça que j'avais tout mal partout!	
Nadia : bon, tu vas avoir appris quelque chose aujourd'hui. Chut… chut…. Ok, puis en plus le *6y* vous avez écrit ça comme ça, *yyyyyy*, ça ce n'est pas *6y*, c'est y^6. y^6 ce n'est pas la même affaire que *6y*.	
Un élève : on ne savait pas ça nous.	
Nadia : 6 fois *y*, ça c'est y^6 ce n'est pas la même chose, ça c'est ça c'est *y* fois *y* fois *y* fois *y* fois *y* fois *y*.	
Les élèves parlent en même temps.	
Un élève : il faudrait mettre des + là haut.	
Nadia : oui là ça marcherait.	

L'exercice planifié par l'enseignante et la chercheure (est-ce que $x^2 = 2x$ si cette égalité est vérifiée pour $x = 0$ et $x = 2$?) a été donné aux élèves dans un document distribué le 29 mai. D'après les productions des élèves, nous pouvons remarquer que les réponses sont de deux types :

- Certains élèves (Marie, Geneviève, Laure, Julie, Sam, François, Nicolas) perçoivent cette égalité comme fausse et donnent au moins un contre-exemple pour le démontrer. Ces élèves perçoivent l'erreur et ont recours à l'arithmétique pour donner un contre-exemple.

- D'autres élèves (Dominique, Miranda, Ghila) donnent comme argument que ces deux écritures ne sont pas équivalentes car ces deux écritures ne représentent pas la même chose $x^2 = x.x$ et $2x = x+x$. Ces élèves exercent un contrôle sur le sens de l'écriture exponentielle.

Le contrôle s'exerce ici de deux façons différentes :

- Utilisation d'un contre-exemple (une entrée sur le vrai / faux par les nombres)

- Une entrée sur le sens différent de l'écriture de manière générale.

Cette tâche n'a pas été corrigée en classe mais une correction (avec des annotations) a été faite pour chacune des copies et remises aux élèves.

Autour de la troisième tâche

Les élèves ont résolu cet exercice en classe et il a été corrigé lors de la séance du 8 mai.

Interventions des élèves	**Stratégies d'intervention**
Correction de $\frac{8^5}{8}$	
	L'enseignante annonce que la première expression donnée est fausse et elle demande pourquoi au reste de la classe : $\frac{8^4}{0}$.
Miranda : « un nombre divisé par lui-même ça ne donne pas 0. » On	L'enseignante reprend l'explication en disant que 8 divisé par 8 donne 1. Ensuite c'est

peut noter qu'elle perçoit l'erreur.	l'enseignante qui valide pour les autres réponses : le b) c'est correct et le c) aussi, elle donne des explications pour le c) : « 8 exposant 4 divisé par 1 ça donne bien 8 exposant 4. »
Correction de $\frac{9^2}{9^5}$	
Les élèves disent oui sans d'autres explications.	L'enseignante demande aux élèves de valider la première écriture donnée $\frac{1}{9\times9\times9}$. L'enseignante passe alors à la prochaine écriture 9^3.
Ici la classe est divisée, certains disent que c'est vrai, d'autres que c'est faux.	L'enseignante repère une élève qui dit que c'est faux et lui demande d'expliquer pourquoi.
Christine : « parce que j'ai fait 9 à la 2 moins 5 exposant ça donne 9 à la moins 3. » Contrôle syntaxique (application d'une loi).	C'est l'enseignante qui valide les explications de Christine et donne des explications supplémentaires : « n'oubliez pas que le 9 exposant 5 est en bas, donc si 9 exposant 5 est en bas ça veut dire que c'est en bas qu'il va en rester, une fois qu'on aura divisé en 9 plusieurs fois c'est en bas qu'il en reste, ok? Pas en haut, fait que ça fait 9 exposant moins 3. » Elle donne du sens à l'écriture. Elle valide ensuite la prochaine écriture : « c'était faux parce que quand on divise il ne reste pas 0, il reste 1 hein? Ok? »
Correction de $\frac{10^2\times10^5}{10^5}$	
Les élèves disent que c'est faux.	L'enseignante demande de valider la première écriture $\frac{10^{10}}{10^5}=\frac{10^5}{1}$ L'enseignante désigne alors Anne-Julie pour qu'elle explique pourquoi c'est faux.

Anne-Julie : « ça donne 10 à la 7 parce qu'on ne peut pas multiplier les exposants. » (cette élève perçoit l'erreur).	L'enseignante reformule les explications de l'élève et demande si les écritures $\frac{10^7}{10^5} = \frac{10^2}{1}$ sont équivalentes à celle donnée.
Les élèves répondent que c'est vrai.	
Les élèves disent que c'est faux.	L'enseignante acquiesce et demande pour la dernière écriture. C'est elle qui donne les explications : « faux parce qu'il ne restera pas 0 à la fin, il restera 1. »

Correction de $\frac{8^5 \times 10^5}{10^2}$	
	Elle se penche sur le premier $\frac{80^5}{10^2}$.
les élèves disent que cette écriture n'est pas équivalente à celle donnée.	Nadia demande pourquoi.
Une élève dit que c'est parce qu'on ne multiplie pas les bases.	L'enseignante reprend les propos et renvoie la discussion: « on ne multiplie pas les bases, ok, l'avez-vous essayé pour voir ce que ça marchait ou si ça ne marchait pas à la calculatrice ou…? » et leur demande s'ils ont vérifié en utilisant par exemple la calculatrice.
Carmen explique qu'on n'a pas le droit de le faire parce qu'on n'a pas le droit de le faire pour un exemple en particulier comme $2^3 \times 2^5$. Réinvestissement de ce qu'elle connaît.	

L'enseignante reprend l'exemple de Carmen et construit à partir de celui-ci :

> « ok, c'est bon ce que tu dis là on va se servir de ça. Si tu as 2 à la 3 fois 2 à la 5 toi tu voudrais que ça fasse 4 exposant 8 c'est ça? Pourquoi on ne fait pas ça? Parce que 2 exposant 3 c'est 2 fois 2 fois 2 fois une, deux, trois, quatre, cinq $2^3.2^5 = 2.2.2.2.2.2.2.2$ donc dans le fond ici $2^3.2^5$ tout ce que ça dit c'est de faire 2

fois 2 fois 2 fois 2, 8 fois comme ça, ça a donné que j'ai splité ça comme ça dans le milieu, mais j'aurais pu dire 2 à la 4 fois 2 à la 4 ça aurait fait pareil, 2 à la 7 fois 2 à la 1 donc dans le fond ça ça représente des 2 j'en ai 8 fois l'un à la suite de l'autre. Là si je dis $8^5 \times 10^5$, je vais regarder le bout en bas, je ne regarde pas tout de suite le bout en bas parce que c'est... vous avez dit on ne peut pas multiplier le 8 et le 10, normalement on ne multipliait pas ça non plus $2^3.2^5$, 8 exposant 5 c'est 8 fois 8 fois 8 fois 8 fois 8, êtes-vous d'accord? ...fois 10 fois 10 fois 10 fois 10 fois 10, ok là j'ai ça, jusque là ça va? J'ai le droit de dire que je pourrais écrire ça dans un autre ordre hein? Quand je multiplie c'est commutatif, j'ai le droit de changer d'ordre donc dans le fond c'est comme 8 fois 10 fois 8 fois 10 fois 8 fois 10 fois 8 fois 10 fois 8 fois 10, est-ce que jusque là j'ai dit quelque chose qui était faux? J'ai juste pris les 10 et je les ai emboités avec les 8... Donc 8 fois 10 ça donne 80 fois 80 fois 80 fois 80 fois 80 donc ça fait bien 80 exposant 5.
$8^5.10^5 = 8.8.8.8.8.10.10.10.10.10 = 80.80.80.80.80 = 80^5$. Et pourquoi ça marche là et puis que là $2^3.2^5 = 2.2.2.2.2.2.2.2$ ça ne marche pas? ».

Interventions des élèves	**Stratégies d'intervention**
	Nadia : Et pourquoi ça marche là et puis que là $2^3.2^5 = 2.2.2.2.2.2.2.2$ ça ne marche pas? » Elle relance les élèves, à la recherche d'explications.
Ghila : « parce qu'ici ce n'est pas le même exposant $2^3.2^5$ tandis qu'ici c'est le même exposant $8^5.10^5$. »	L'enseignante reprend les explications : « Donc quand je les combine j'ai autant de 8 que j'ai de 10 c'est pour ça que ça marche mais ça ne fonctionne pas tout le temps cette affaire là là hein? »
Carmen : « si jamais c'était 8 à la 6 fois 10 à la 5. »	L'enseignante explique alors que ça n'aurait pas marché et conclue que cette écriture serait une écriture finie : « On aurait été obligé de le laisser écrit comme ça $8^6.10^5$ » (Ce qui n'est pas tout à fait vrai, on peut trouver d'autres écritures équivalentes comme $80^5 \times 8$.
Anne-Julie conclut alors que le a) est faux car « on ne peut pas enlever un 0 en haut et en bas comme ça. »	L'enseignante conclue ainsi que la partie du milieu est fausse et demande de

Les élèves disent que c'est faux.	valider le b) $\frac{18^5}{10^2}$.
Les élèves disent qu'elle est vraie.	L'enseignante confirme leur réponse et donne les explications : « là on a additionné les deux bases, il n'y a pas de + là dedans ça n'a pas rapport. » Elle demande de valider l'avant dernière écriture.
Pour la dernière écriture $\frac{8^5 \times 10^3}{0}$, les élèves affirment que c'est faux.	L'enseignante confirme et donne les explications suivantes : « oui, on a 8 exposant 5 qui est resté pareil et qu'est-ce qui s'est passé après ça? $\frac{8^5 \times 10^3}{10^0}$ .On avait 10 exposant 5 en haut et 10 exposant 2 en bas, j'ai simplifié ça, ça veut dire que j'ai divisé par 10 en haut deux fois il reste 10 exposant 3 et il n'en restait pas en bas, fait qu'il en restait 1, 10 exposant 0 ».
Ce à quoi les élèves répondent parce qu'il y a l'affaire du 0 en bas.	L'enseignante demande pourquoi.

4.4.3 Théorisation qui émerge dans le bloc Sens de la manipulation sur des exposants

4.4.3.1 Analyse des composantes du contrôle éclairées

Concept de contrôle (sous l'angle de la réflexion autour des vrais / faux)	
Composantes relevées par l'enseignante	***Composantes relevées par la chercheure***
Perception des erreurs Percevoir des erreurs qui portent sur une confusion entre les écritures x^2 et $2x$, sur	*Contrôle sémantique en algèbre* Avoir recours à l'arithmétique (passe par un calcul).

la manipulation avec des exposants comme $\frac{8^5}{8} = \frac{8.8.8.8.8}{8} = \frac{8}{0}$; $10^2 \times 10^5 = 10^{10}$; $8^5 \times 10^5 = 18^5$ et $\frac{80^5}{10^5} = \frac{8^5}{1^5}$.	*Contrôle qui s'exerce sur une égalité* Voir que l'égalité peut être toujours vraie, parfois vraie ou jamais vraie.

Tableau 4.4.3.1 Les composantes du contrôle qui émergent du bloc 3

4.4.3.2 Analyse des tâches, des critères en arrière du choix des tâches du point de vue du contrôle

Critères en arrière du choix des tâches du point de vue du contrôle amenés par l'enseignante
- Une tâche présentant des pièges, construite d'après les difficultés des élèves (confusion entre les écritures x^2 et $2x$; $\frac{8^5}{8} = \frac{8.8.8.8.8}{8} = \frac{8}{0}$; $10^2 \times 10^5 = 10^{10}$; $\frac{80^5}{10^5} = \frac{8^5}{1^5}$; $8^5 \times 10^5 = 18^5$). - Question : Demander à l'élève de se prononcer sur un énoncé, est-ce vrai ou pas et *pourquoi*. Demander des explications.

Tableau 4.4.3.2 Critères en arrière du choix des tâches du point de vue du contrôle

4.4.3.3 Synthèse des indicateurs de contrôle chez les élèves

Difficultés de contrôle chez les élèves explicitées par l'enseignante
- Confusion entre les écritures x^2 et $2x$. - Des erreurs dans la manipulation : $\frac{8^5}{8} = \frac{8.8.8.8.8}{8} = \frac{8}{0}$; $10^2 \times 10^5 = 10^{10}$ (ils mulitplient les exposants) ; $\frac{80^5}{10^5} = \frac{8^5}{1^5}$; $8^5 \times 10^5 = 18^5$ (ils ajoutent les bases).
Indicateurs de contrôle ou de difficultés des élèves d'après leurs traces écrites et leur discours
Indices de contrôle
- Contrôle sémantique sur l'égalité (voir à quelles conditions l'égalité est toujours vraie)

- Passage à l'arithmétique
- Contrôle sur le sens de l'écriture de manière générale.
- Utilisation d'un contre-exemple (une entrée sur le vrai / faux par les nombres)
- Décodage des éléments implicites : *2xy* c'est égal à *2 x fois y.*
- Perception des erreurs : un nombre divisé par lui-même ne donne pas 0, on ne peut pas multiplier les exposants dans $10^2 \times 10^5 = 10^{10}$.
- Contrôle syntaxique (application de la loi sur la division des exposants)
- Réinvestissement d'une manière de faire qui ne convient pas ici (pour $2^3 \times 2^5$, on ne multiplie pas les bases entre elles donc on ne peut pas le faire non plus pour $8^5 \times 10^5$).
- Émettre une conjecture (sur la raison pour laquelle dans $8^5.10^5$, on peut multiplier les bases entre elles mais pas le faire pour $2^3 \times 2^5$).
Indices de non contrôle
- Confusion entre les écritures x^2 et *2x.*

Tableau 4.4.3.3 Indicateurs de contrôle des élèves explicitées par l'enseignante et d'après leurs traces écrites et leur discours

4.4.3.4 Analyse des stratégies d'intervention qui favorisent ou qui freinent le possible développement d'une activité de contrôle

Un principe porteur de la didactique praticienne de l'enseignante
- Tendre des « pièges » pour mettre les élèves face à leurs difficultés. À travers des exercices sur lesquels ils doivent se prononcer sur les erreurs les plus courantes.
Stratégies d'intervention : **Retour**
Validation / Explications
- C'est l'enseignante qui montre, qui invalide, qui donne les explications. Elle ne va pas chercher, ne sollicite pas la signification par l'élève.
- Elle renvoie la question d'un élève, demande *pourquoi,* suscite un débat dans la classe.
- Elle demande aux élèves de valider avec la calculatrice.
- Elle construit à partir de ce que l'élève amène.

Axée sur le sens - L'enseignante reformule les propos de l'élève dans un cas en donnant du sens au résultat, un moyen d'anticiper, de vérifier (il en reste au dénominateur car c'est là qu'il y en avait le plus) et dans un autre cas en généralisant (à quelles conditions peut-on peut multiplier les bases entre elles). - Voir les différentes écritures, possibilités, toutes équivalentes : $2^3 \times 2^5 = 4^4 = 2^4 \times 2^4 = 2^7 \times 2^1$

Tableau 4.4.3.4 Analyse des stratégies d'intervention qui favorisent ou qui freinent le possible développement d'une activité de contrôle

4.4.3.5 Autour des perspectives de l'enseignante et de la chercheure

Perspective de l'enseignante	Perspective de la chercheure
Sur sa didactique praticienne - Autour des difficultés des élèves - Dans un souci de favoriser leur engagement	- Cadre de référence sur le contrôle - Rentre dans une analyse des erreurs et difficultés des élèves dans la co-construction des tâches.

Tableau 4.4.3.4 Autour des perspectives de l'enseignante et de la chercheure

Nous pouvons remarquer qu'ici c'est la chercheure qui rentre dans la perspective de l'enseignante. En co-construisant ces tâches avec l'enseignante, elle exprime un souci de travailler autour des difficultés des élèves en lien avec les exposants.

4.5 Analyse sur un cinquième bloc portant sur une discussion autour de l'introduction à un certain contenu

Dès la première rencontre de co-opération (9 février), l'enseignante et la chercheure ont discuté autour de l'introduction à la fois des exposants négatifs et de la division d'exposants.

4.5.1 De l'idée initiale à une approche d'enseignement redéfinie

4.5.1.1 Différentes approches pour introduire les exposants négatifs

Un constat de départ provenant de l'enseignante : la convention d'écriture $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ pose problème aux élèves, elle n'a pas de sens pour eux. Une façon algébrique de s'attaquer à cette difficulté, consiste pour l'enseignante à passer par la résolution de l'équation $5^x = \frac{5^6}{5^8}$ qu'elle gère de la façon suivante :

Résolution algébrique	Manière dont l'enseignante gère la résolution
$5^x = \frac{5^6}{5^8}$ $\frac{5^x}{1} = \frac{5^6}{5^8}$	5^x c'est comme $\frac{5^x}{1}$.
$\frac{5^8 \times 5^x}{5^8} = \frac{5^6}{5^8}$	On multiplie par 5^8 des deux côtés pour être sûrs qu'on n'a rien changé. On a les mêmes dénominateurs, les numérateurs sont donc égaux.
$5^8 \times 5^x = 5^6$	J'ai $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$, 8 d'un bord, j'en ai 6 de l'autre bord et c'est égale. Il s'est donc passé quelque chose, on en a perdu quelque part des 8.
$x = -2$	Les élèves disent « ben on en a perdu deux ».
On sait aussi que : $\frac{5^6}{5^8} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$	« Si tu l'écris au long tu voies que ça donne $\frac{1}{5^2}$ ».
Avec ces deux résultats (elle retourne à l'expression de départ pour voir ce que ça veut dire), on en conclut que $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$.	

La chercheure propose une autre approche : idée d'une régularité.

Approche proposée par la chercheure
En partant des exposants positifs et de l'observation d'une certaine régularité dans le passage d'un terme à l'autre :

Puissance		Convention
8 x 8 x 8 x 8	÷ 8	8^4
8 x 8 x 8	÷ 8	8^3
8 x 8	÷ 8	8^2
8		8^1
1	÷ 8	8^0
1/8	÷ 8	8^{-1}
1/(8x8)	÷ 8	8^{-2}
1/(8x8x8)		8^{-3}

Nous pouvons remarquer qu'*a priori* l'enseignante et la chercheure ont deux façons différentes de penser.

Analyse des deux perspectives qui fondent les deux approches proposées de part et d'autres	
Chercheure	**Enseignante**
Idée d'étendre une notation en maintenant une cohérence dans la convention d'écriture retenue en lien avec la signification pour les exposants positifs de l'écriture exponentielle (<u>Rationnel en arrière</u> d'une telle entrée : Une extension qui permet de donner un sens au pourquoi de cette notation, ce qui permet de voir sa cohérence).	- Elle nous renseigne tout d'abord sur le fait que l'acceptation de ce passage d'une écriture à l'autre pour les élèves ne va pas de soi: « ils perçoivent un truc, ils ne voient pas la raison en arrière ». - De plus, elle a constaté que son entrée algébrique fonctionne avec les élèves. (<u>Rationnel en arrière</u> d'une telle entrée par la résolution algébrique : s'attaquer à une difficulté des élèves en entrant sur

De x^n à x^{n+1}, on multiplie par x. De x^{n+1} à x^n, on divise par x. $\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$, x^1, x^2,x^3,……,x^n,…… $\boxed{\text{Ce qui précède pour garder cette idée ne peut être que 1 } (x^0),\ ^1/_x\ (x^{-1}),\text{ etc.}}$	quelque chose qu'ils connaissent; reprendre une approche qui a fait ses preuves). C'est comme si l'enseignante était entrée sur le syntaxique, là où ça fonctionne avec les élèves (résolution algébrique avec ses règles de fonctionnement) alors que sur le sémantique, les bases étant fragiles pour les élèves, il est difficile d'adopter l'approche proposée par la chercheure.

La chercheure se rallie alors à entrer de deux façons possibles mais avec l'idée de contrer le calcul et d'entrer sur un raisonnement sur le sens :

C : On pourrait donner les deux pour toucher ceux qui comprennent d'une façon ou d'une autre. Il faut juste qu'ils voient qu'ils n'ont pas de calculs à faire, il y a une logique.

Cependant, avant d'introduire les exposants négatifs, l'enseignante précise qu'il faut présenter la division d'exposants qui est nécessaire pour aborder les exposants négatifs.

4.5.1.2 Discussion autour de l'introduction de la division d'exposants (pour donner un certain sens à celle-ci)

Pendant la discussion, la chercheure note l'importance de voir le trait de fraction comme une division (ce qui développe une certaine flexibilité de l'écriture, un contrôle sur l'écriture). L'enseignante explicite qu'elle trouve ce passage important et qu'elle le fait dans sa pratique, elle écrit tout le temps $\frac{2}{3} = 2 \div 3$.
L'enseignante et la chercheure rentrent ensuite dans une analyse des erreurs des élèves liées à la division des exposants.

S'attaquer à certaines erreurs faites par les élèves dans la division des exposants

Approche proposée par l'enseignante	Remarque de la chercheure
L'enseignante explique qu'elle procède de la façon suivante : $a^2 \div a^4 = \frac{a^2}{a^4} = \frac{\overset{\div a}{a}\times\overset{\div a}{a}}{\underset{\div a}{a}\times \underset{\div a}{a}\times a\times a} = \frac{1}{a^2}$ On fait a divisé par a ça donne 1. Stratégie d'intervention : Retour au sens de la notation; idée de faire apparaître les facteurs communs par lesquels on divise.	*La chercheure mobilise ses connaissances didactiques sur les erreurs des élèves.* Elle souligne que ceci (s'ils ont à faire a divisé par a) peut donner lieu à une erreur fréquente des élèves : $\frac{a}{a} = 0$ (et non 1), ils ont tendance à barrer les mêmes termes au numérateur et au dénominateur et quand il ne reste plus de facteurs, ils concluent que c'est 0.

Approche proposée par l'enseignante (suite)
Cette erreur commise par les élèves a été également remarquée par l'enseignante au cours de ses années d'enseignement et plus précisément avec les groupes de cette année : « Je ne savais pas trop quoi faire, cette année c'est arrivé beaucoup plus fort que les autres années. » *Une didactique praticienne sensible aux erreurs des élèves et qui essaie de les prendre en compte.* L'enseignante a alors tenté une autre intervention : On peut multiplier par 1 autant de fois que l'on veut pour avoir le même nombre de facteurs en haut et en bas $a^2 \div a^4 = \frac{a\times a\times 1\times 1}{a\times a\times a\times a} = \frac{a}{a}\times\frac{a}{a}\times\frac{1}{a}\times\frac{1}{a} = 1\times 1\times\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$ « J'ai tous des multipliés, c'est comme si j'avais multiplié 4 fractions. » *Stratégie d'intervention : Elle décode les éléments implicites (le facteur 1).*

Remarque de la chercheure	Remarque de l'enseignante
La chercheure soulève le problème que les élèves barrent souvent les facteurs communs et qu'en procédant ainsi, ils	Cette remarque vient toucher l'enseignante qui exprime son insatisfaction face à ses interventions

<table>
<tr>
<td>risquent de procéder de cette même façon même s'il y a des additions au numérateur et au dénominateur, ce qui donne alors un résultat faux. Par exemple dans ce cas-ci :
$\frac{a^5}{a^3+a}=\frac{a\times\cancel{a}\times\cancel{a}\times\cancel{a}\times\cancel{a}}{\cancel{a}\times\cancel{a}\times\cancel{a}+\cancel{a}}=a.$
La chercheure mobilise ses connaissances didactiques sur les erreurs des élèves.</td>
<td>pour contrer les difficultés des élèves à simplifier quand il y a des additions au numérateur et/ou au dénominateur. Cette insatisfaction se fait sentir à plusieurs reprises dans la discussion :
« Pourquoi quand on a des fois j'ai le droit mais quand j'ai un plus, c'est ça que je n'ai pas encore trouvé comme réponse et que ça fait deux ans que je cherche comment est-ce que je vais aider à contrer cette affaire-là. (...) Ça comment je fais tomber ça à terre ce réflexe là? Moi je ne sais pas quoi faire avec ça. »</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Approche essayée par l'enseignante pour contrer cette erreur
(Limite de cette approche dont l'enseignante est consciente)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Après plusieurs exemples où les élèves sont habitués à faire $6^5\times 6^3=6^8$, l'enseignant leur présente une addition du type 5^2+5^3, ce à quoi plusieurs élèves répondent que ça donne 5^5.
Stratégie d'intervention : elle cherche à provoquer l'erreur.

Certains d'entre eux toutefois ont constaté l'erreur « mais non ça ne marche pas quand je le pitonne à la calculatrice, ce n'est pas ça que ça donne. » Son intervention est alors de revenir à l'écriture exponentielle écrite au long :
$5\times5+5\times5\times5\neq5\times5\times5\times5\times5.$

J'ai un plus
qui gâche le
party des fois.

Retour au sens, là encore elle cherche à provoquer l'erreur en mettant un + , elle cherche à développer une sensibilité à l'erreur.

Nadia nous fait part des limites d'une telle approche. Cette explication ne la satisfait pas complètement car « ce n'est pas mathématique » :

« Mais moi je n'ai pas trouvé encore une façon efficace, c'est juste une affaire comme ça, pouf. Après ils ne feront plus cette erreur là, je pense que c'est à force d'en donner, d'en faire puis de comparer, de regarder. Mais pour ma part je n'ai pas trouvé encore un moyen d'expliquer ça, de faire en sorte qu'on contre cette erreur là, je ne l'ai pas vu encore. La seule chose que j'ai vu c'est en apportant des contre exemples, des affaires qui ne marchent pas, qu'ils le fassent, qu'ils se rendent compte que ça ne marche pas et de voir pourquoi mais là il y a des</td>
</tr>
</table>

affaires qui ne se simplifient pas là dedans mais pourquoi?»

Malheureusement, les élèves continuent à faire cette erreur même après les explications fournies. C'est une erreur persistante dont l'enseignante est consciente et qui revient quand on travaille sur d'autres choses :

> Extrait 1 : « Je me suis aperçue avec mon autre groupe parce que je leur ai fait faire un document révision où j'ai commencé à faire multiplier des binômes et tout ça. Puis là là, tout à coup ils ont dit « mais madame là pourquoi que là tout d'un coup x et x^2 ça ne se mélange plus? Quand on fait fois ça se mélange, puis quand on fait plus ça ne se mélange pas… » Il est encore revenu avec cette histoire là et là je dis « oui, mais c'est parce que un c'est plus et l'autre c'est fois.… »

Des stratégies d'intervention dans ce cas pas très heureuses en regard du développement du contrôle (elle restitue l'opération mais ne revient pas sur le sens). Nous pouvons toutefois noter un indice de contrôle chez certains élèves qui décèlent à quelles conditions l'égalité est vraie.

> Extrait 2 : « J'ai encore des questions « quand j'ai $x^2 + x$, pourquoi ce n'est pas x^3? » Et là je leur dis « c'est parce que x^2 et x ça ne représente pas le même nombre ». Puis là évidemment si c'est 1, « mais ne prends pas 1 là » (…) Mais x^2 et x ça ne représente pas le même nombre, je ne peux pas mettre ça ensemble. Ou ils disent « $x + x$, ça ne fait pas x^2? » Je dis « non, parce que si j'achète là, tu sais une pomme plus une pomme ça ne fait pas une pomme au carrée, ça fait deux pommes encore. »

Dans cet extrait, nous pouvons remarquer que l'enseignante vient renforcer une conception chez l'élève sur la lettre (la lettre représente un objet et non un nombre d'objets).

Nadia nous informe sur une des ses stratégies d'intervention qui peut d'après nous favoriser le développement d'une activité de contrôle : proposer aux élèves des énoncés qui ne sont pas valides et les confronter pour voir que ça ne marche pas. Il y a ici encore une fois cette idée de surprise (dans ce cas ici à travers une sensibilité à l'erreur) qu'elle crée chez les élèves et qui fait partie intégrante de sa pratique. Elle est également centrée sur le sens, essayant de trouver la rationalité en arrière des concepts en jeu pour convaincre les élèves.

Approche proposée par la chercheure
La chercheure propose de faire un parallèle avec les fractions équivalentes, de revenir dans le numérique : « On peut faire comme avec les fractions équivalentes, on divise en haut et en bas par le même nombre pour réduire la fraction, on obtient ainsi une fraction équivalente. (...) Si on a $\frac{a^2}{a^4}$, on cherche une fraction équivalente réduite, a est un facteur commun du dénominateur et du numérateur. Si on divise a^2 par a on obtient a et a^4 divisé par a donne a^3. On obtient alors la fraction équivalente $\frac{a}{a^3}$ qu'on peut encore réduire. C'est pareil que pour les fractions, si j'ai $\frac{15}{18}$ qu'est-ce que je fais pour trouver une fraction équivalente réduite? Je divise en haut et en bas par 3... »   *<u>Stratégie d'intervention</u> : S'appuyer sur quelque chose de connu par les élèves (la simplification de fractions numériques) : je divise le numérateur et le dénominateur par le même nombre.*

L'enseignante a retenu le parallèle ave les fractions comme quelque chose d'intéressant. Elle teste alors cette explication sur deux exemples (un avec des nombres et un autre avec des lettres). Si on a $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$, certains élèves vont écrire $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}=\frac{10^4}{10^2}+\frac{10^5}{10^3}=10^2+10^2=10^4$. Nadia précise qu'on peut alors intervenir auprès des élèves sur l'égalité fausse $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}=\frac{10^4}{10^2}+\frac{10^5}{10^3}$ de la façon suivante :

> « Ce ne sont pas des dénominateurs communs. Si on revient en arrière, vous êtes en train de dire que quand on additionne des fractions, on additionne les numérateurs et les dénominateurs entre eux. »

Le deuxième exemple traité est $\frac{a^2+a^3}{a^5+a^2}$:

« Je divise par a en haut et en bas mais j'ai a^2+a^3, donc ça va faire $\frac{a+a^2}{a^4+a}$. Et là on regarde est-ce qu'on peut encore? Je redivise encore par a. Je vais avoir $\frac{1+a}{a^3+1}$ et là je ne peux plus rien faire. Et j'ai toujours le plus qui est là, il n'y a pas d'affaires qui se simplifient de même. <u>Moi je pense que ça là, ça contournerait le problème</u> ».

4.5.2 Ce qui émerge de l'analyse à ce stade

L'analyse autour des idées initiales sur les exposants négatifs et la division d'exposants nous renseigne sur une didactique d'intervention favorisant le développement du contrôle à travers les stratégies d'intervention, les indicateurs de contrôle (ou plutôt ici les indices de difficulté de contrôle) chez les élèves ainsi que sur certaines composantes du contrôle.

Stratégies d'intervention favorisant une activité de contrôle	**Indicateurs de contrôle chez les élèves**
Axée sur le sens - Faire apparaître les facteurs communs - Décoder les éléments implicites (facteur 1) - Retour au sens en écrivant $5^2+5^3=5\times5+5\times5\times5$ ***Un principe porteur de sa didactique praticienne*** - Elle cherche à provoquer l'erreur en présentant aux élèves des expressions qui ne « marchent » pas (comme 5^2+5^3). Idée de surprise à travers une sensibilité à l'erreur. ***Des stratégies d'intervention qui freinent le développement du contrôle :*** - L'enseignante restitue l'opération mais ne revient pas sur le sens ($x + x^2$ on ne peut pas ajouter car on a un + et un $\times$). - Renforce une conception chez l'élève (voir la lettre comme un objet :	*Contrôle sur l'égalité (détecter les cas où l'égalité est vraie)* $x^2 = x$ si $x = 1$. ***Des indices de difficulté de contrôle chez les élèves*** La convention $5^{-2}=\frac{1}{5^2}$ pose des difficultés aux élèves (n'a pas de sens). (E) Des erreurs produites lors de la simplification d'expressions avec des exposants : $\frac{a}{a}=0$; $\frac{a^5}{a^3+a}=\frac{a\times\cancel{a}\times\cancel{a}\times\cancel{a}\times\cancel{a}}{\cancel{a}\times a\times\cancel{a}+\cancel{a}}=a.$ (C) ; $5^2+5^3=5^5$ et $x+x^2=x^3$ (E)

$x + x \neq x^2$ car une pomme + une pomme ça ne fait pas une pomme au carré).	

Tableau 4.5.2a Autour des stratégies d'intervention et des indicateurs de contrôle chez les élèves.

Composantes du contrôle éclairées

- Contrôle sémantique en arithmétique : voir que le trait de fraction a plusieurs sens (il peut représenter une division) (C et E).
- Réinvestissement ici du travail précédent sur les exposants. Composante que l'on retrouve également dans les autres blocs (E).
- Perception des erreurs ($5^2 + 5^3 \neq 5^5$) (E)

Les approches proposées par l'enseignante et la chercheure autour des exposants négatifs nous renseignent sur leurs perspectives qui ne se rejoignent pas. L'enseignante propose une entrée par le syntaxique et la chercheure par le sémantique.

Perspective de l'enseignante	Perspective de la chercheure
Difficulté des élèves dans l'égalité $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$. Rentrer alors par quelque chose que les élèves connaissent, le syntaxique car les bases sont fragiles en ce qui concerne le sémantique.	Idée de donner du sens en présentant une cohérence dans la convention d'écriture retenue (qui s'étend des exposants positifs aux exposants négatifs).

Tableau 4.5.2b Autour des perspectives de l'enseignante et de la chercheure

4.5.3 Un scénario redéfini : discussion sur la séquence planifiée autour de l'introduction des exposants négatifs et de la division des exposants

4.5.3.1 Un scénario redéfini : autour des exposants négatifs

Scénario	Commentaires
Tâche donnée aux élèves « Calculer 5^{-3} ».	L'enseignante introduit les exposants négatifs en piquant la curiosité des élèves sur un calcul (jamais fait).

Une des réponses des élèves anticipée est -125. Intervention de Nadia : « non, moi ça ne me donne pas ça, un autre élève a calculé avec sa calculatrice et a trouvé 0,008 ».	La stratégie d'intervention de l'enseignante est alors de semer le doute. On a un élément de contrôle dans la confrontation des deux réponses. L'enseignante précise que cet effet de surprise face à une réponse non attendue $5^{-3} = 0{,}008$ (résultat donné par la calculatrice) est à la base d'une activité de contrôle : « Tu vois cet effet de surprise là, je pense que ça joue un grand rôle dans ton affaire de contrôle. Tu sais l'effet de surprise des réponses attendues versus ce qui est la réalité… » *(entrée de l'enseignante dans le cadre de référence de la chercheure).* Ce sont les propos que nous retrouvons dans l'analyse du bloc sur les problèmes.
Voir le lien entre 0,008 et 125 : **Nadia** : « 0,008 c'est 8 millièmes, je vais l'écrire comme ça 8/1000 mais 8/1000 c'est une fraction qui se réduit, bon par 2, 4/500, encore, 2/250, encore 1/125 et là 125 c'est 5 fois 5 fois 5. Donc on avait 5^{-3} c'est comme $1/5^3$. (…) Je m'aperçois qu'il y a l'air d'avoir un lien ici, regarde c'est intéressant. » Présentation des deux approches : l'idée d'une régularité (amenée par la chercheure) et celle de la résolution de l'équation $5^x = \frac{5^6}{5^8}$).	Comme les élèves veulent voir le 125 prévu au départ, l'enseignante les amène à voir le lien entre 0,008 et 125 (elle exploite ainsi les réponses des élèves). L'enseignante précise qu'elle souhaite constater si les élèves peuvent réinvestir ce qu'ils ont fait avant (le travail sur les exposants). Il y a ainsi l'idée d'une progression.

Il y a ainsi l'idée d'une progression, elle précise qu'il y a 3 manières de voir les exposants négatifs :

1. Trouver 5^{-3} et exploiter ce que les élèves amènent.
2. Idée d'une régularité.
3. Résoudre $5^x \times 5^8 = 5^6$.

D'autres éléments se dégagent également de l'analyse du verbatim.

- *Une anticipation des réponses des élèves*

L'enseignante s'appuie sur son expérience dans l'autre groupe pour anticiper les réponses des élèves à la tâche « Trouvez 5^{-3} ». Ainsi, dans le groupe 31, une élève a construit un sens à l'écriture 5^{-3}, ce que l'enseignante trouve brillant :

> « Ben si 5 à la 3 c'est 5 fois 5 fois 5 fois 5 alors 5 à la moins 3, tu divises en 5, tu divises en 5 et tu divises en 5 ».

- *Une rationalité explicitée (en arrière de sa pratique)*

Dans sa description des événements qui ont eu lieu dans le groupe qui ne vit pas l'expérimentation, Nadia insiste sur l'importance de donner du sens. Ainsi, après leur avoir présenté les exposants négatifs des 3 façons que nous avons vues précédemment, une élève lui demande :

> « Mais pourquoi vous expliquez de même? On prend la loi, on l'applique c'est bien plus facile. Pourquoi vous compliquez l'affaire en l'expliquant? »

L'élève axe sur l'application d'une loi, ce à quoi un autre élève répond en soulignant l'importance de remonter aux sources :

> « Oui, mais là tu ne comprendrais pas quand il y aurait des lettres, c'est mieux au moins là on sait d'où ça vient, on sait comment ça marche, c'est bien mieux comme ça. »

À travers cette intervention, l'enseignante explicite sa rationalité en arrière : *l'importance pour elle de savoir d'où viennent les lois* :

« Parce que les lois elles viennent de quelque part et je trouve ça plate moi quand on vous dit c'est comme ça, appliquez bêtement. Si tu es mal pris, tu n'as pas besoin de les savoir, tu peux les retrouver, tu te débrouilles. »

Elle met également de l'avant le fait que les élèves ne sont pas habitués à réfléchir, avançant que c'est important de les faire réfléchir pour qu'ils puissent mieux comprendre. L'enseignante précise toutefois que même avec cette approche, certains élèves continueront à faire l'erreur 5-3 = -125.

4.5.3.2 Sur le scénario redéfini : autour de la division des exposants

L'enseignante et la chercheure prévoient trois cours pour aborder ce nouveau contenu. Pour l'enseignante il est important de donner une grande quantité d'exercices (de la drill) pour aider les élèves à intégrer cette nouvelle matière. On sent que l'enseignante se pose des questions sur ce que l'expérimentation va donner :

« C'est drôle j'ai l'impression que je ne peux pas prévoir à l'avance comment ça va se passer. D'habitude je peux prévoir, je sais qu'est-ce que... où est-ce qu'ils vont se planter. Mais là je ne sais pas s'ils vont trouver ça facile ou pas, je ne sais pas. »

Il est ainsi important pour elle que les élèves qui vivent l'expérimentation fassent les mêmes feuilles d'exercices que les autres élèves, elle veut s'assurer qu'ils sont tous au même point :

Nadia : Ok on a fait tout ça là, mais est-ce que quand j'arrive avec les mêmes problèmes que je donne dans les autres groupes là, est-ce qu'ils sont capables de les faire aussi ou finalement j'ai fait tout ça et ils ne sont pas plus capables de faire les problèmes qu'avant. Parce que si je fais ça et après je donne les mêmes exercices que je donne normalement, si l'élève n'est pas capable de les faire c'est qu'il y a un problème là.

L'enseignante explicite la manière dont elle a présenté la division des exposants dans un autre de ses groupes.

Démarche adoptée par l'enseignante
1ère étape : Division d'exposants avec des nombres : 1. Revenir sur ce que représente l'écriture exponentielle : écriture au long $\frac{10^3}{10^5} = \frac{10\times10\times10}{10\times10\times10\times10\times10}$ (Une attention particulière est portée sur le vocabulaire : les 10 se *simplifient* et non pas *s'annulent*). Analyse : une référence sous-jacente à l'idée de simplification par un même nombre au numérateur et au dénominateur. 2. Faire plusieurs autres exemples numériques en procédant de la même manière. 3. Les amener à ne plus écrire l'exponentielle au long mais plutôt les amener à réfléchir sur l'écriture *(ce qui encourage un contrôle sur le résultat).* - « Combien il y en a en haut? Et en bas? » - « Où y en a-t-il le plus? » - « Où va-t-il en rester en haut ou en bas? » (Elle précise de faire attention de ne pas éliminer tout le monde) 2^{ième} étape : Division d'exposants avec des lettres.

L'enseignante et la chercheure décident de garder cet ordre dans la séquence planifiée. Pour ne pas alourdir la lecture, nous reprendrons les grandes lignes du scénario planifié, on présentera un exercice ou une question type avec l'analyse du point de vue des stratégies d'intervention.

Cours 1

1ère étape : Division des exposants avec des nombres

La chercheure propose de commencer en présentant l'exercice suivant aux élèves.

> Si je connais 1/10 et $1/10^2$, est-ce que je peux trouver $10/10^3$ sans faire de calculs ?

L'idée est ici de contrer le calcul, d'amener les élèves à faire des liens entre les différentes écritures pour trouver le résultat. Il s'agit ici de voir que $10/10^3$ c'est équivalent à $1/10^2$.

<u>Stratégie d'intervention</u> : écrire les différentes réponses des élèves au tableau pour animer une discussion en classe, les valider (ce qui favorise une activité de contrôle).

- Leur demander de réduire $\frac{10^9}{10^8}$; $0,1^2 \times 0,1^0$ et $\frac{2^3}{2^7}$.

<u>2$^{\text{ième}}$ étape</u> : Division des exposants avec des lettres (à relier avec le travail fait précédemment avec les nombres)

- Commencer par une expression dont l'expression au numérateur est plus grande qu'au dénominateur : $\frac{a^5}{a^2}$. L'enseignante et la chercheure sont d'accord pour mettre l'emphase ici sur le facteur 1 et d'écrire à la fin $\frac{a^3}{1} = a^3$.
- Amener les élèves à voir que $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$.
- On donne alors $\frac{a^3}{a^7}$; $\frac{x^5 y^4}{x^3 y^6}$.
- On va ensuite s'attaquer à la difficulté des élèves à réduire des expressions qui comportent des additions au numérateur et/ou au dénominateur. <u>Exemple</u> : $\frac{10^{15} + 10^8 + 10}{10^2}$.

- Puis donner un exemple avec des lettres : $\frac{2xy + 6y}{2y}$ et faire le lien avec ce que nous avons fait précédemment : $\frac{2xy}{2y} + \frac{6y}{2y}$.

Dans la discussion, l'enseignante explique toute la démarche et prévoit la réaction d'un élève :

> « Ok c'est comme si j'avais 2 fois *xy* sur 2 fois *y*. Je divise en 2, je divise en 2, il me reste *xy* sur *y*. Là je peux dire ben c'est comme *y* fois *x* sur *y* fois 1, je divise en *y*, je divise en *y*, c'est fini. Bon et celle *6y* sur *2y*, je divise en 2, je divise en 2, c'est comme *3y* sur *y*, fait que c'est comme *y fois 3* sur *y fois 1*. C'est tout fait que dans le fond j'ai *x + 3*. Ben regarde ben ça, Nicolas il va dire « ben c'est ben évident que ça donne *x*, tu enlèves les 2, tu enlèves les *y*. » Ben tant mieux pour toi si tu fais ça comme ça. »

L'enseignante exprime l'idée d'un facteur commun par lequel on divise, elle fait apparaître le coefficient 1 (implicite) avant de simplifier par le facteur commun.

- Autre exemple (pour qu'ils se pratiquent) : $\dfrac{4a^2b^3+16a^3b^2+4ab}{4ab}$. (Erreur anticipée $\dfrac{4ab}{4ab}=0$).
- Puis des exercices leur seront proposés dans lesquels on glisse des « pièges », c'est-à-dire des additions au numérateur et/ou au dénominateur. Il y a l'idée de provoquer l'erreur, de développer chez les élèves une sensibilité à l'erreur.

Cours 2

- Retour sur $\dfrac{4a^2b^3+16a^3b^2+4ab}{4ab}$ (à partir de leurs productions).

<u>$3^{\text{ième}}$ étape</u> : Présenter les exposants négatifs (comme vu dans le point précédent)

<u>$4^{\text{ième}}$ étape</u> : Faire le lien entre la division des exposants et les exposants négatifs

$$\frac{a^4}{a^5}=a^{4-5} \text{ car } \frac{a^4}{a^5}=a^4\times\frac{1}{a^5}=a^4 \text{ x } a^{-5}=a^{4-5} \qquad \text{ou}$$

$$\frac{a^4}{a^7}=\frac{a^4\times 1}{1\times a^7}=\frac{a^4}{1}\times\frac{1}{a^7}=a^4\times a^{-7}=a^{4-7}$$

<u>$5^{\text{ième}}$ étape</u> : Donner des expressions avec des exposants négatifs au dénominateur, des fractions avec des exposants négatifs, ….

La discussion avec l'enseignante nous renseigne sur une de ses stratégies d'intervention : *des fois, elle donne aux élèves, de nouveaux concepts qu'elle n'a pas expliqués précédemment et se sert ainsi des différentes productions des élèves (de leurs conceptions) pour présenter ce concept.*

<u>Explications prévues pour</u> $\dfrac{1}{6^{-3}}$: ça c'est comme $1\div\dfrac{1}{6^3}$, quand on divise des fractions c'est comme faire multiplier à l'inverse fait que dans le fond ça fait 6^3.

- Finalement leur donner des exemples comme $\dfrac{a^3b^4}{a^{-2}b^3}$ et $\left(\dfrac{x^3}{y^2}\right)^{-2}$ qui sont plus compliqués à réduire et qui, de part son expérience, constituent un vrai défi pour les élèves.

Un troisième cours est prévu pour finaliser les numéros que nous n'aurions pas eu le temps de faire. Lors de la rencontre du 5 mai après qu'il y ait eu deux cours portant sur la division d'exposants et les exposants négatifs, l'enseignante et la chercheure se rencontrent autour de la planification des prochains cours.

4.5.3.3 Autour de la rencontre de planification du 5 mai

L'enseignante propose de voir avec les élèves l'égalité suivante : $\dfrac{1}{5^{-4}} = 5^4$.

Dans ses explications, l'enseignante axe sur le passage du trait de fraction en division et de revenir à ce que les élèves connaissent :

> « Le mieux c'est peut-être de dire que ça ça représente 1 divisé par 5^{-4}. Fait que 5^{-4}, on sait maintenant c'est quoi fait que c'est 1 divisé par 1 sur 5^4, dans le fond c'est 1 fois 5^4 sur 1 donc c'est 5^4. »

La chercheure met l'accent sur les pré requis des élèves : la division de fractions. L'enseignante reprend alors la planification travaillée précédemment et elle cible les numéros qu'elle veut faire avec les élèves. Une discussion a lieu autour de l'expression $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$ qui peut être simplifié de différentes façons :

$$\frac{1}{\left(3/5\right)^2} = \frac{1}{3^2/5^2} = 1 \div \frac{3^2}{5^2} = 1 \times \frac{5^2}{3^2} \text{ (C)} \qquad \frac{3^{-2}}{5^{-2}} = 3^{-2} \div 5^{-2} = \frac{1}{3^2} \div \frac{1}{5^2} = \frac{1}{3^2} \times 5^2 \text{ (E)}$$

Les élèves auront ensuite des petits numéros à faire qui seront corrigés dans le cours. L'expression suivante $\left(\dfrac{8a^3b^2c}{2a^4bc^{-1}}\right)^{-2}$ leur sera donnée à faire individuellement, les productions seront ramassées pour avoir un indice de ce que font les élèves. Il apparaît important pour l'enseignante et la chercheure de donner des petits numéros en devoir à chaque fois et de les corriger à mesure pour suivre la progression des élèves (contrôle syntaxique). La chercheure axe sur l'importance d'expliquer *pourquoi* on fait tout ceci :

> C : oui, ce qu'il faut qu'ils comprennent c'est qu'on cherche à réduire le plus possible parce que ces expressions ne sont pas belles. On pourrait dire que quand on fait de la physique ou n'importe quelle matière scientifique, on obtient souvent des grosses expressions et on regarde si on ne peut pas réduire pour ensuite simplifier nos calculs, pouvoir calculer plus facilement.

L'enseignante met de l'avant l'importance d'arriver avec les élèves au résultat « diviser par 5 à la moins 4 c'est comme multiplier par 5 à la 4 » pour que les élèves puissent réduire les autres expressions données. On sent ici un besoin d'institutionnalisation. Les deux collaboratrices prévoient de donner des exercices du document préparé par l'enseignante (sur le contrôle syntaxique) en devoir et d'en glisser même pendant qu'ils feront les polynômes.

4.5.3.4 Théorisation qui émerge du scénario planifié

La discussion autour du scénario planifié vient compléter la didactique d'intervention sous différents points : les composantes du contrôle, les critères des tâches qui favorisent le développement d'une activité de contrôle, les stratégies d'intervention et les indicateurs de contrôle chez les élèves.

Composantes du contrôle	**Critères en arrière des tâches qui favorisent une activité de contrôle**
- Une sensibilité et un dépassement de la contradiction (dans la confrontation des réponses -125 et 0,008 pour 5^{-3}). (E) - Revenir aux fondements : Être capable de retrouver les lois sur les exposants, les comprendre, voir d'où elles viennent. (E) - Contrôle sur le résultat : se demander	- Une tâche « piège » pour laquelle on va travailler des difficultés, des erreurs classiques des élèves. Exemple demander le calcul de 5^{-3} (jamais fait auparavant), donner des expressions à réduire avec des additions au numérateur et/ou au dénominateur, des expressions pour voir si l'élève fait l'erreur $\frac{4ab}{4ab}=0$.

où il y en a le plus en haut ou en bas? Où va-t-il alors en rester? (E) - Décoder les implicites (le facteur 1) : $\frac{a^3}{1} = a^3$ et $\frac{a^2}{a^3} = \frac{a^2 \times 1}{a^2 \times a}$ (E) - *Contrôle syntaxique* Il y a différentes façons de simplifier certaines expressions. Par exemple, $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$: $\frac{1}{\left(3/5\right)^2} = \frac{1}{3^2/5^2} = 1 \div \frac{3^2}{5^2} = 1 \times \frac{5^2}{3^2}$ (C) OU $\frac{3^{-2}}{5^{-2}} = 3^{-2} \div 5^{-2} = \frac{1}{3^2} \div \frac{1}{5^2} = \frac{1}{3^2} \times 5^2$ (E)	(E) - Une tâche dans laquelle on demande de trouver le résultat d'une expression en se servant des résultats connus d'autres expressions. Contrer le calcul. « En utilisant les valeurs de deux expressions que je connais, trouve la valeur d'une autre expression. » (C)

Tableau 4.5.3.3a Les composantes du contrôle et les critères en arrière des tâches qui favorisent une activité de contrôle

Indicateur de contrôle chez les élèves

- Construire un sens à l'écriture 5^{-3}, c'est divisé par 5, divisé par 5, divisé par 5.

Stratégies d'intervention qui favorisent une activité de contrôle
Principes porteurs de la didactique praticienne de l'enseignante - Pique la curiosité des élèves en leur présentant un calcul jamais fait (5^{-3}) pour avoir un effet de surprise face aux résultats obtenues, elle sème ainsi le doute pour essayer de les rendre sensibles à la contradiction et les pousser à la dépasser. - Elle donne des pièges ($5^2 + 5^3$) pour pousser les élèves à percevoir leurs erreurs. ***Axée sur le sens*** - Importance de savoir d'où viennent les lois des exposants. - Idée de simplification par un même nombre au numérateur et au dénominateur. - Amener les élèves à réfléchir sur le résultat à obtenir (y en aura-t-il plus en haut ou en bas?), pousse à une vérification du résultat. - Décoder les implicites (le facteur 1) :

$\frac{a^3}{1} = a^3$ et $\frac{2xy}{2y} = \frac{2 \times xy}{2 \times y} = \frac{xy}{y} = \frac{x \times y}{1 \times y} = \frac{x}{1} = x$.
Faire des liens
- Exploiter les productions des élèves et les amener à faire des liens entre les différentes écritures proposées (0,008 et -125).
Aller chercher les productions des élèves et les valider en classe.

Tableau 4.5.3.3b Stratégies d'intervention qui favorisent une activité de contrôle

4.5.4 Analyse du scénario effectif en classe

Ce bloc a été expérimenté testé sur 5 séances et un bout d'une autre séance au lieu des 3 séances prévues au départ. Après les deux premières séances, la chercheure et l'enseignante se sont rencontrées, elles nous renseignent à cette occasion sur l'avancée de l'expérimentation, c'est la première fois que nous avons une analyse a posteriori des séances.

4.5.4.1 Deux exemples autour de la division d'exposants (mardi 2 mai)

Dès le départ, l'enseignante annonce que la matière qu'ils vont voir est la plus difficile de l'année. Elle attire ainsi la vigilance et l'attention des élèves faisant un lien avec l'expérimentation en cours :

> Nadia : la matière qu'on va faire là c'est un peu ça le plus difficile qu'on a à voir dans l'année. Mireille et moi on s'est assises et on a essayé de planifier quelque chose de différent que ce que j'ai faite avec le groupe 31. Ça se peut que ça ne marche pas, ben si ça ne marche pas, ben on va se rasseoir et on va repenser à notre affaire mais on essaie quelque chose et je vous demande de l'ouverture d'esprit. *Rires.* Puis on verra comment ça marche ça, c'est correct? C'est bon?

1^ère tâche : Je connais un dixième et $1/10^2$, puis-je savoir en utilisant ces deux résultats la valeur de $10/10^3$? Cette question amène une discussion entre l'enseignante et les élèves que nous avons reproduite dans le tableau ci-dessous sous forme de vignette :

Extrait	Commentaires
Nadia : C'est quoi un dixième? Marc : c'est 1/10 Nadia : C'est quoi $1/10^2$? Un élève : un centième	Flexibilité entre les registres verbal et fractionnaire (Marc). *On remarque ici que l'enseignante a le souci de présenter chacune des écritures dans un registre différent (verbal, fraction) pour amener une certaine flexibilité dans le passage de l'un à l'autre.*
Nadia : Je connais 1/10 et $1/10^2$, pourriez-vous trouver $10/10^3$?	Elle reformule la tâche en utilisant des registres de représentation différents.
Ly : 10^{-2}	L'élève utilise une loi des exposants qui n'a pas été vue auparavant.
Nadia : Pourquoi?	L'enseignante demande des explications.
Ly : c'est parce que j'ai fait 10^{1-3}, je ne sais pas pourquoi je le sais, c'est tout.	
Julie : Pourquoi 1?	
Carmen : c'est 10 à la 1.	L'élève décode les éléments implicites, 10 c'est 10^1.
Julie : pourquoi 1-3? Quel est le rapport avec 1/10 et $1/10^2$?	

Nadia : qui peut répondre?	L'enseignante ne répond pas, elle renvoie la question à la classe.
Christine : si j'ai des multipliés, j'ajoute les exposants : $10^1 \times 10^3 = 10^{1+3} = 10^4$. Et si on divise alors on soustrait $10^1 \div 10^3 = 10^{1-3} = 10^{-2}$.	Cette élève construit un sens à la loi, elle axe sur les lois, indice de contrôle syntaxique.
Nadia : ce serait logique, ça a l'air de marcher.	Une certaine validation de la part de l'enseignante.
Nicolas : $10/10^3$ c'est un centième et $10^{-2} = 0{,}001$ donc les deux écritures sont égales.	Cet élève valide. On remarque une flexiblité dans l'écriture de fraction à décimal.
Nadia : Pourquoi $10^{-2} = 0{,}01$?	L'enseignante demande des éclaircissements.
Nicolas : …	
François : j'ai 1,0 et là je déplace la virgule de deux vers la gauche.	François tente une explication basée sur un « truc », il abandonne vite, n'arrivant pas à satisfaire les *pourquoi* de Nadia.
Nadia : en partant de $1/10$ et de $1/10^2$ pourriez-vous trouver $10/10^3$?	L'enseignante lance les élèves sur la tâche en l'énonçant.
Geneviève : 10/1000 c'est comme 1/100. *(Nadia écrit sa réponse au tableau).*	Cette élève a d'abord trouvé une écriture équivalente, donne du sens à l'écriture exponentielle : $\frac{10}{10^3} = \frac{10}{1000}$ et ensuite réduit la fraction (travail fait dans le même registre de représentation).

Nicolas : on pourrait tous les mettre en pourcentages, 1 dixième c'est 10% et un centième c'est 1%. *Nadia écrit* $\frac{1}{10}$ = 10% et $\frac{1}{10^2}$ =1%. Nicolas : ben ça c'est égale à 10 sur 1000 donc à 1 sur 100 donc à 1%. Nadia : c'est correct, on a $10/10^3 = 1/10^2$. Une élève : Je ne comprends pas l'affaire du 1 moins 3. Nadia : c'est normal ça que tu ne le comprennes pas parce que ça Ly il est en avance de 2 semaines. Quand on va être rendu là tu vas voir, correct? *Les élèves applaudissent.*	Nicolas effectue un changement de registre, passage aux pourcentages. $1/10 = 10\%$, $1/10^2 = 1\%$ et $10/10^3 = 10/1000=1/100=1\%$. Cet élève dénote une flexibilité entre les différentes écritures. L'enseignante valide les explications fournies par Nicolas, ne les renvoie pas à la classe. Retour sur la réponse donnée par Ly.

<u>2ième tâche</u> : Si je vous disais de simplifier $\frac{2^3}{2^7}$.Nous pouvons voir (dans ce qui suit) que la loi donnée par Ly (et que l'enseignante appelle la loi de Ly) amène ici des questionnements de la part des élèves. Il est intéressant de remarquer que certains élèves sont mal à l'aise d'appliquer cette loi sans comprendre d'où elle vient (ils sont à la recherche de sens).

Extrait	**Commentaires**
Nadia : 2^3 sur 2^7 ça pourrait donner quoi? Laure : 2^{-4} Nadia : Pourquoi?	L'enseignante demande des justifications.

Laure : on a un divisé donc on fait un moins 3-7=4. Geneviève : quand on a un divisé on soustrait les exposants.	Laure et Geneviève sont sur la loi (contrôle syntaxique), application mécanique d'une loi.
Nadia : oui c'est logique mais pourquoi ça marche?	Stratégie d'intervention : renvoie sur la justification oui c'est logique mais pourquoi ça marche?
Geneviève : c'est parce que c'est Ly qui l'a dit.	C'est l'élève, sa personne qui devient ici une source de validation *(on lui fait en quelque sorte confiance, il est garant d'une bonne réponse).*
Nadia : il peut dire n'importe quoi.	Les sensibilise au fait qu'on ne peut pas dire n'importe quoi, renforce encore l'importance de la justification.
Des élèves : vous avez dit qu'il était en avance de 2 semaines, ça veut dire qu'il a raison.	La validation repose sur ce que l'enseignante a avancé.
Ghila : mais ici on a toujours des nombres semblables, si les nombres ne sont pas semblables comme 2^3 sur 4 exposant… est-ce que ça marche?	L'élève ouvre sur une nouvelle question, cherche à étendre à d'autres cas.
Nadia : ah là il faudrait voir… est-ce que ça marcherait… est-ce que ça fonctionnerait parce que là Ghila ce qu'elle dit c'est que là c'est tout le temps la même base, en haut et en bas c'est des 2, est-ce que ça marcherait vous pensez si je n'avais pas la même base? Disons j'avais 2 exposant 3 et 5 exposant 7 en bas.	Nadia reprend la question en changeant l'exemple donné (celui qu'elle donne peut se réduire alors que l'autre pose plus de difficultés et peut mélanger les élèves) : si j'ai $2^3/5^7$? Il y a là une stratégie d'intervention, en choisissant de manière appropriée un exemple elle reprend la question de l'élève mais dose la difficulté.
Carmen : je ne comprends pas, pourquoi on ne ferait pas 8	

sur 128 parce que 2 à 3 ça fait 8 et 2 à la 7 ça fait 128, parce qu'avec les exposants c'est mêlant, il y a toujours plein de façons de calculer fait que je ne sais plus.	Carmen ramène la classe à l'exemple précédent ($2^3/2^7$), est-ce qu'on peut écrire que c'est égale à $8/128$? Cette élève a besoin de se ramener à quelque chose de connu. Elle a besoin de calculer, un indicateur de la difficulté de contrôle qu'elle a sur l'écriture.
Nadia ramène la question de Carmen (ça tombe bien c'est là où elle voulait en arriver) : est-ce que $\frac{8}{128} = 2^{-4}$?	
Certains élèves remarquent que oui en utilisant la calculatrice ils obtiennent pour chacune de ces deux expressions 0.7.	Une validation passant par un artéfact.
Nadia leur demande alors de le vérifier <u>sans la calculatrice</u> et pour cela elle leur demande de simplifier la fraction $\frac{8}{128}$.	Stratégie d'intervention : relance sur une autre validation.
Marie : $\frac{1}{16}$.	
Nadia : Peut-on écrire 16 comme 2 exposant quelque chose?	
Nicolas : oui 2^4.	
Nadia : On a donc $\frac{8}{128} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$ et maintenant est-ce	Elle relance les élèves sur l'exposant négatif.

qu'on a $\frac{1}{2^4} = 2^{-4}$?	
Les élèves commencent à bouger, à s'impatienter. Certains d'entre eux paniquent, ne comprennent plus rien.	
Nadia : vous ne pouvez pas dire que vous ne comprenez pas, il n'y a rien à comprendre. Il y a des gens qui proposent des affaires, on arrive à des résultats, on cherche, on réfléchit ensemble.	Stratégie d'intervention : elle leur renvoie l'image de la classe comme une communauté de chercheurs.
Nadia : la calculatrice donne le même résultat pour $\frac{1}{2^4}$ et pour 2^{-4}. Maintenant, il faut essayer de voir POURQUOI c'est la même chose.	Une communauté dans laquelle on valide.
Marie : Pourquoi $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$?	
Nadia : la base de l'expression de départ étant 2, j'ai essayé de me ramener à cette base et 16 est égale à 2 exposant combien? 16 c'est $2 \times 2 \times 2 \times 2$ c'est donc 2^4.	
Patricia : on sait que si l'exposant est pair alors c'est positif.	Elle se ramène à ce qu'elle connaît, elle essaie de faire des liens, on la sent perdue…
Nadia : ça ne s'applique pas. Nicolas : (pour prouver que $1/2^4 = 2^{-4}$) : On a vu	

précédemment que $10^{-2} = 0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$ et c'est pareil pour les autres nombres, on va avoir $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$.	L'élève relie des éléments ensemble, fait des liens (élément de contrôle).
Nadia : c'est beau.	Elle valide la stratégie de Nicolas.
Carmen : le truc de Ly c'est mêlant, on a juste à simplifier les fractions.	On peut constater ici que l'élève est encore dans une recherche de sens (indice de contrôle).
Nadia : Super, je suis contente, on va essayer de donner du sens à ce qu'a fait Ly. Ça marche mais on ne sait pas pourquoi. Il y a des gens pour qui ça ne fait pas de sens quand ils ne savent pas pourquoi on fait ça, ils ont besoin de comprendre d'où ça vient. Je peux ici appliquer la règle (ce qui ne demande pas beaucoup de calculs) mais avant il faut comprendre toutes les étapes du raisonnement qu'on a utilisées pour y arriver.	Elle ramène la classe sur le sens, sur la compréhension de ce qu'on fait.
Marie : si j'ai $\frac{4^3}{2^7}$ est-ce que je divise aussi la base?	Marie reprend la question de Ghila qui était restée en suspens suite à l'intervention de Carmen.
Nadia tente à ce stade une explication mais les élèves ne sont pas très réceptifs, ça va trop vite : $\frac{4^3}{2^7} = \frac{4\times4\times4}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}$ et là on peut transformer le 4 en 2 pour pouvoir réduire l'expression…	Nous pouvons remarquer que l'exemple pris par Marie vient ici compliquer les explications de Nadia puisque c'est une expression qui peut se simplifier même si ce n'est pas la même base, l'une des deux bases étant un multiple de l'autre.
Marc : et si c'était 5^2?	L'élève cherche à étendre à d'autres cas.

Nadia : là je ne pourrais pas réduire... Je ne peux rien faire... Marc : je ne comprends rien. Nadia : Quand on ne comprend pas, c'est bon parce que ça veut dire qu'on se pose des questions. On va laisser ceci au tableau et on reviendra après.	Valorise le fait de se poser des questions.

Nous pouvons constater que la séance ne se déroule pas tel que planifiée. La réponse amenée par Ly (que Nadia et les élèves nomment la « loi de Ly ») amène à se questionner sur le sens de cette loi. Il est intéressant de voir que les élèves participent à l'approche amenée par Nadia et que les échanges entre l'enseignante et les élèves sont riches, éclairant la didactique d'intervention que l'on cherche à éclairer autour des stratégies d'intervention et des indicateurs de contrôle chez les élèves.

Stratégies d'intervention qui favorisent le développement du contrôle (en ombré celles qui le freinent)	**Indicateurs de contrôle chez les élèves (en ombré les indices de difficulté de contrôle)**
- Utilise différents registres de représentation dans sa formulation (en mots, fractionnaire), amène ainsi une flexibilité dans le passage de l'un à l'autre. ***Demande des éclaircissements*** - Demande des précisions, pose la question *Pourquoi*. ***Validation / Justification***	- Construire du sens (autour de l'écriture 5^{-3}, c'est divisé par 5, divisé par 5, divisé par 5; autour de la loi sur les exposants négatifs si j'ai des multipliés j'ajoute donc si j'ai divisé je fais moins (Christine)). (Si j'ai 10^{-2} alors je fais 1,0 et je déplace la virgule de deux vers la gauche) (François). Contrôle syntaxique. - Contrôle syntaxique (application d'une règle) (Laure et

- Dans certains cas, renvoie la validation au groupe. - D'autres explications sont validées par l'enseignante et ne sont pas renvoyées à la classe. - Renvoie sur la justification oui c'est logique mais pourquoi ça marche? - Sensibilise au fait qu'on ne peut pas dire n'importe quoi, renforce l'importance de la justification. - Relance sur une autre validation que la calculatrice (les calculs versus le sens). ***Axer sur le sens*** - Un travail sur le sens de l'écriture exponentielle $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ ***Choisir de manière appropriée un exemple en reprenant la question de l'élève mais en dosant la difficulté.*** ***Classe vue comme une communauté de chercheurs*** - Où on propose des choses, on réfléchit, on arrive à des résultats, on cherche. - Où on valide, on essaie de comprendre *pourquoi*. - Ce n'est pas mauvais de ne pas comprendre car ça signifie qu'on se pose des questions. ***Revenir aux fondements*** Comprendre d'où viennent les lois sur les exposants, être capables de les retrouver, de les raisonner.	Geneviève) : si j'ai un divisé alors je soustrais les exposants. - Flexibilité entre les registres verbal et fractionnaire: un dixième c'est 1/10 (Marc), entre les registres fraction, décimal, verbal et pourcentages (Nicolas) - Un contrôle exercé dans le même registre de représentation $\frac{10}{10^3} = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ (Geneviève). - Décoder les éléments implicites $10 = 10^1$ (Carmen) - Recherche de sens (les élèves sont mal à l'aise d'appliquer la loi de Ly sans la comprendre) (Carmen). - Chercher à étendre à d'autres cas (où les nombres ne sont pas multiples l'un de l'autre) (Ghila). (Où les nombres sont premiers entre eux) (Marc). - Étendre la règle prouvée $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ aux autres nombres $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$. (Nicolas) - Besoin de calculer les expressions avec des exposants, difficulté de contrôle sur l'écriture (Carmen) - Une validation passant par un artéfact. - Faire des liens qui ne conviennent pas (Patricia)

Composantes du contrôle éclairées
Métaconnaissance - On peut réduire l'expression si les bases du numérateur et du dénominateur sont multiples l'un de l'autre : $\frac{4^3}{2^7}$ mais on ne peut pas le faire si les nombres sont premiers entre eux comme par exemple $\frac{5^2}{2^7}$ (E) ***Flexibilité entre les différents registres de représentation*** Passage entre les registres décimal, verbal, pourcentages, fraction (E)

Tableau 4.5.4.1a Stratégies d'intervention, indicateurs de contrôle chez les élèves et composantes du contrôle autour de deux exemples sur la division d'exposants

Dans cette même séance, l'enseignante met les élèves sur d'autres tâches, la simplification des expressions $\frac{24}{60}$; $\frac{a^5}{a^2}$; $\frac{a^3}{a^7}$; $\frac{x^5y^4}{x^3y^6}$ et $\frac{10^5+10^8+10}{10^2}$ qu'elle mène au tableau avec eux. Nous ne reprendrons ici que ce qui ressort de l'analyse en termes d'indicateurs de contrôle chez les élèves et de stratégies d'intervention favorisant le développement d'une activité de contrôle pour les séances du 2, 3, 10 et 11 mai (pour une analyse détaillée cf. appendice I).

Analyse sur ce qui ressort des autres séances effectives

Stratégies d'intervention (en ombré les stratégies qui freinent le possibles développement du contrôle)	**Indicateurs de contrôle chez les élèves** (en ombré les indices de difficulté de contrôle chez les élèves)
Axée sur le sens pour contrer les difficultés, erreurs des élèves - Mise en évidence (écrit) du facteur commun qui permet de simplifier l'expression. - Présence du facteur 1. - Revient constamment au sens de l'écriture exponentielle (écriture écrite au long). - Elle s'appuie sur la propriété de la multiplication, elle écrit $a \times 1$ et $1 \times a$ (commutativité). - Le trait de fraction représente également une division. - Lire l'égalité des deux côtés, de droite à gauche $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{2+3+5}{7}$ et de gauche à droite *(si j'ai une addition de 3 facteurs au numérateur, je peux les séparer en 3 morceaux chacun ayant le même numérateur).* - Donne du sens à l'écriture *2xy = 2 fois xy = xy + xy.* - Chaque étape de la simplification est détaillée. - Accepte différentes façons de simplifier une expression. ***Réinvestissement de ce que les élèves ont fait*** - Utilisation du travail sur les fractions en arithmétique (addition, multiplication, division de fractions). ***Choix efficace, stratégique***	- Choix stratégique, efficace du facteur commun le plus grand pour simplifier (Christine) - Trouve un facteur commun mais pas le plus efficace (Miranda) - Voir différentes écritures équivalentes pour l'exponentielle ($a^5 = a^4 \times a = a^3 \times a^2$) (Marie) - Décoder les éléments implicites (Marie) $a = a^1$. - Contrôle sur le résultat (il va en rester en bas car c'est le plus gros) (Miranda) - Contrôle syntaxique pour la simplification d'expressions avec des exposants en algèbre (Nicolas), d'expressions avec de additions au numérateur (Laure) - Décode les éléments implicites $a = a^1$. - Anticipation du signe de $\frac{1}{2^{-3}}$ (positif car 2^{-3} est positif) (Laure) ***Des difficultés reliées au symbolisme*** - Difficultés à opérer sans nombres (Marc) : il faut savoir ce que vaut *a*. - Concaténation : $2xy+6y=2x7y$ - Écriture $3+x$ est non achevée (les élèves écrivent *3x*).

<table>
<tr>
<td>
- Repérer le facteur commun le plus grand entre le numérateur et le dénominateur.

Validation / Explications
Partir des productions des élèves
- Dans certains cas, elle renvoie la validation à la classe autour du calcul de 5^{-3} (calcul que les élèves n'ont jamais vu auparavant), autour de certaines démarches (correctes) produites par les élèves.
- Les explications ne sont pas toujours renvoyées à la classe, elle prend la validation et les explications à sa charge (elle se prononce sur les simplifications erronées recueillies en classe).
- C'est elle qui tranche sur la valeur de $\frac{4ab}{4ab}$ (erreur persistante chez les élèves) et donne les explications.

Force des éclaircissements, des explications
- Demande que l'élève aille au bout de sa démarche avant que les autres élèves n'interviennent.

Revenir aux fondements
Comprendre d'où viennent les lois pour pouvoir les retrouver.
</td>
<td>
- Mauvaise interprétation de l'écriture $2x = xx$ et $6y = yyyyyy$.
- Le dénominateur disparaît une fois qu'on donne le résultat final $\frac{xy}{y} + \frac{3y}{y} = xy + 3y$.
- 2xy = 2x.2y ; on peut ajouter a^2b et ab^2.

Des difficultés reliées aux facteurs multiplicatifs numériques
- Confusion entre le facteur multiplicatif et l'exposant $\frac{2xy(\div 2)}{2y(\div 2)} = \frac{x^2}{y}$
- Autre type d'erreur $\frac{6y}{2y} = 4y$ (ils font 6y - 2y).

Des erreurs qui ont été anticipées
$\frac{4ab}{4ab} = 0$; 1/10 = -10
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Composantes du contrôle</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
Choix éclairé entre plusieurs possibilités
Choisir le facteur commun entre le numérateur et le dénominateur le plus grand possible pour simplifier de façon plus efficace (par exemple pour $\frac{a^5}{a^2}$, on choisit comme facteur commun a^2) (E)
</td>
</tr>
</table>

***Métaconnaissance*s** Voir l'équivalence entre les écritures $2xy$ et $xy+xy$. Savoir laquelle de ces écritures est la plus efficace, la plus appropriée lors de la simplification d'expressions algébriques comme par exemple $\frac{2xy+6y}{2y}$ (C)

Tableau 4.5.4.1b Synthèse sur les composantes du contrôle, les stratégies d'intervention et les indicateurs de contrôle chez les élèves dans les séances du 2, 3, 10 et 11 mai.

4.5.4.2 Autour de l'introduction des exposants négatifs (le 3 mai)

Dans cette même séance, l'enseignante introduit les exposants négatifs en utilisant ce qui a déjà été ressorti.

Introduction aux exposants négatifs

Pour introduire les exposants négatifs Nadia rappelle la réponse de Ly à la simplification de l'expression $\frac{2^3}{2^7}$: $\frac{2^3}{2^7} = 2^{3-7} = 2^{-4}$ et la réponse de Carmen : $\frac{2^3}{2^7} = \frac{8}{128} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$. Elle conclue alors qu'on arrive à $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$. Ici les élèves sont tout abasourdis, l'enseignante rit et leur dit « vous avez l'air souffrants!! » La classe rit alors avec l'enseignante (moment de complicité).

Elle reprend alors pour leur demander ce que signifie 2^4, certains élèves répondent 16, d'autres $2 \times 2 \times 2 \times 2$. Elle demande alors comment elle pourrait calculer 2^{-4}. Nicolas répond « On fait 2 divisé en 2, divisé en 2, divisé en 2 ». Les élèves s'accordent pour dire que Nicolas a raison (cet élève est connu dans la classe comme celui qui performe, qui ne se trompe jamais). Pour les déstabiliser, l'enseignante leur dit que Nicolas n'a pas tout à fait raison. Cet élève répond alors en explicitant la suite logique!

> « Ça devrait fonctionner parce que normalement à chaque fois qu'on augmente, disons 2 à la 4 c'est 2 fois 2 fois 2 fois 2, et disons 2 à la 0 c'est divisé en 2 pour donner 1 donc ensuite si on divise en 2, donc à la moins 1 ça donne… »

Ce qui l'amène à mieux verbaliser le calcul de 2^{-4} après que l'enseignante ait repris une partie de son explication. Nadia : « là tu m'as dit 2 à la 0 ça donne 1 ».

> Nicolas : « 2 à la 0 ça donne 1 donc si c'est à la moins 1, c'est 2 divisé… non c'est 1 divisé par 2, ok non fait que c'est 1 divisé par 2, par 2… »

L'enseignante reformule les propos de Nicolas et demande aux autres élèves de se prononcer (elle a entendu d'autres réponses dans la classe) :

> **Nadia** : Ben c'est bien normal c'est Nicolas qui expliquait là! Ok, Nicolas tu as vu, Nicolas il a dit « ben si 2 à la 4, c'est 2 fois 2 fois 2 fois 2 fois 2, donc 2 à la moins 4 c'est peut-être 1 divisé en 2 divisé en 2 divisé en 2 divisé en 2. » Là j'ai entendu d'autres affaires, j'ai entendu quelqu'un qui a dit -16. »

Carmen se joint à cette dernière réponse « ben oui pourquoi ce n'est pas -2 fois -2 fois -2 fois -2. » L'enseignante invalide cette solution « ben ce n'est pas ça pas en toute (…) Parce que c'est 2 exposant moins 4 fait que tu ne peux pas avoir un -2 tout à coup qui apparaît. »

Nouvelle tâche : Calcul de 5^{-3}

Nous pouvons constater qu'après avoir fait un retour sur ce qui était ressorti sur les exposants négatifs, l'enseignante reprend les grandes lignes du scénario planifié conjointement. Nous pouvons distinguer trois moments clés dans cette tâche.

1

1er moment : L'enseignante demande comment calculer 5^{-3}. Plusieurs réponses sont avancées par les élèves, l'enseignante prend soin de toutes les noter au tableau sans se prononcer sur leur validité :

- Calculatrice : 0,008 (Réponse de Dominique)
- 1 divisé par 5 divisé par 5 divisé par 5 : $1 \div 5 \div 5 \div 5$ (Réponse de François)
- 1 sur 5 à la 3, 1 sur 125 : $\frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ (Réponse de Christine qui explicite qu'elle a fait le contraire que ce qu'on a fait précédemment)
- 5 divisé en 5 divisé en 5 divisé en 5, divisé en 5, cinq fois : $5 \div 5 \div 5 \div 5 \div 5$ (Réponse de Carmen, elle précise qu'elle ne sait pas pourquoi ça marche mais que ça marche à tous les coups! François précise que c'est parce qu'elle a fait 5 divisé en 5 ça fait 1, il se ramène ainsi au calcul qu'il a proposé).

L'enseignante commente l'écriture choisie par Carmen : « mais il ne marchera pas tout le temps le truc à Carmen » mais précise qu'elle va y revenir plus tard, elle souligne que l'élève s'est compliquée la vie, ainsi ce n'est pas un calcul efficace.

2ième moment : Validation de chacune des réponses présentées par les élèves (validation effectuée par l'enseignante)

- Elle part du calcul donné par la calculatrice qui est institué comme valide puisque donné par l'outil technologique et elle ramène les élèves à donner du sens à cette écriture en passant par différents registres : verbal, fraction,… comme prévu dans la planification conjointe.

0,008 c'est 8 millièmes donc $0{,}008 = \frac{8}{1000}$. On peut réduire cette fraction, on trouve 1 sur 125, on peut écrire 125 comme une puissance de 5 : $0{,}008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3}$. Donc $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$.

- Elle valide ainsi la réponse de Christine et l'entoure au tableau. Puis demande aux élèves de se prononcer sur la validité de la réponse « c'est 1 divisé en 5 divisé en 5 divisé en 5 » en s'appuyant sur la réponse de Christine qui vient d'être validée par une démarche provenant du résultat donné par la calculatrice. L'enseignante valide cette réponse :

  « Ici $0{,}008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3}$, j'ai 1 sur 5 fois 5 fois 5, donc je prends 1 je le divise par 5 par 5 par 5 fait que ça aussi ça fonctionne $1 \div 5 \div 5 \div 5$. »

- Elle fait ainsi le rapprochement entre l'écriture de François et celle de Carmen :

  « Là ton truc à toi Carmen pourquoi il marche? Parce que tu as commencé à dire 5 divisé en 5 c'est comme le 1 de tout à l'heure donc ça revient au même et 0,008 c'est sûr que ça marche on l'a pitonné fait que… est-ce que ça c'est correct. »

3^ième^ moment : Discussion autour de la réponse 0.008 donnée par la calculatrice.

Christine intervient à la vue d'un tel résultat :

« mais quand on faisait les exposants ça ne donnait pas des nombres à virgule ni des fractions! »

L'enseignante explique ceci par le fait que jusqu'à maintenant les exposants traités étaient toujours positifs (comme 2^3, 2 fois 2 fois 2) et que là ce sont des exposants négatifs. Elle leur demande alors de tester avec leur calculatrice d'autres exemples comme $2^{-3} = 0{,}125$; $4^{-5} = 0{,}009765$; $8^{-2} = 0{,}015625$. Elle conclut en avançant que n'importe quel exposant négatif ça va donner des zéros virgule zéro, zéro,... Steve vient contredire ce résultat qu'il formule gauchement :

> Steve : « Non mais quand tu peux par exemple genre 0 virgule quelque chose à la place du 5 ça fait positif. (...) »
> Nadia : ça c'est... bon je vais vous dire après parce qu'Etienne il a essayé un nombre à virgule exposant négatif et ça donne un nombre ordinaire.
> Les élèves : wow, qu'est-ce que tu es futé!

Cette discussion a lieu avant que l'enseignante n'ait validé les différents résultats présentés par les élèves ($2^{\text{ième}}$ moment), elle met cette question en suspens pour y revenir après (on sent chez elle un souci de répondre à toutes les interrogations de ses élèves). Elle profite ainsi de l'occasion pour refaire la démarche des exposants négatifs avec un nombre compris entre 0 et 1 : $0{,}5^{-5}$, elle reprend la démarche, les élèves utilisent alors les résultats validés précédemment : $0{,}5^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$. Nicolas propose de continuer en écrivant que c'est égale à 1 divisé par une demie divisé par une demie divisé par une demie... $0{,}5^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 1 \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$. Elle leur demande alors combien ça fait 1 divisé par une demie, Nicolas répond que c'est égal à 2 parce que « divisé par une demie c'est comme multiplié par 2 ». Nadia fait alors un rappel de la division de fractions dont plusieurs élèves ne se souviennent plus : $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$ et reprend le calcul précédent :

> « Donc là si je fais 1 divisé par une demie ben c'est comme 1 fois deux <u>unièmes</u>, ça fait 1 fois 2, 2, 2 divisé en une demie, ça fait comme 2 fois 2 <u>unièmes</u>, ça fait 4, fait qu'on a 2 x 2 divisé par une demie, fois 2, divisé par une demie, fois 2, divisé par une demie, fois 2, fait que dans le fond ça me fait une, deux, trois, quatre, cinq, 2 exposant 5 ça veut dire 32. Donc une demie à la moins 5 c'est la même chose que, quand je le calcule, c'est la même chose que 2 exposant 5. On obtient ainsi un nombre ordinaire.»

Notes de cours : (Son institutionnalisation de ce qui ressort de toutes ces séances)

L'enseignante donne ensuite des notes de cours aux élèves (ils en sont friands alors que d'habitude ils n'en veulent pas). Une synthèse devient donc importante à ce stade où plusieurs découvertes et discussions se sont produites, il est temps de faire le grand ménage! L'enseignante en profite pour faire un rappel sur toutes les lois vues jusqu'à maintenant, la loi portant sur la division des exposants est baptisée la « loi de Ly » portant le nom de celui qui l'a découverte. Nous pouvons remarquer que Nadia a le souci de se pencher sur les cas limites :

- $a^0 = 1$ sauf si $a = 0$.
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $a \neq 0$.

Dans les notes de cours, elle rajoute trois exemples de simplification $\frac{x^5y^4}{x^3y^6}$ dans lesquels elle utilise directement la loi de Ly qui est plus efficace. En ce qui concerne le résultat obtenu x^2y^{-2}, Nadia leur précise qu'on ne présente pas le résultat avec un exposant négatif, il faut toujours le rendre positif, c'est une convention d'écriture[86]. Pour mieux se faire comprendre, elle prend l'exemple de l'écriture *2x* qu'on n'écrit pas *x.2.* Sandra demande un autre exemple avec des additions : $\frac{10^5 + 10^8 + 10^2}{10^2}$. Nadia leur donne un dernier exemple $\frac{3x^3y^3 + 12x^2y^2 - 24xy^2}{3x^2y}$ à la demande de certains élèves qui voulaient une expression avec des lettres.

Voici ce qui ressort autour de l'introduction des exposants négatifs.

Stratégies d'intervention favorisant le développement du contrôle

[86] C'est quelque chose dont nous n'avions pas parlé avec l'enseignante. Elle a dû le dire car elle veut que les élèves s'entraînent pour le faire.

Validation des écritures ressorties (Approche d'un concept nouveau sur les exposants négatifs)

- Partir des idées des élèves, les ramasser et les écrire au tableau pour ensuite les valider en classe.

- Certaines de ces écritures sont validées par l'enseignante (l'une d'elle étant vue comme n'étant pas efficace).

- Fait des liens entre différentes écritures apportées par les élèves en axant sur le sens, sur un travail entre les différents registres de représentation (décimal, fraction, verbal), sur des écritures équivalentes.

- La validation des autres écritures se fait à partir de celle qui a été statuée comme correcte.

Axée sur le sens

- Donne du sens aux expressions avec des exposants négatifs (avec la calculatrice), ce sont des nombres à virgule, positifs, plus grands que 1.

- Récupère ce qu'un élève amène (si la base est entre 0 et 1, l'expression est plus grande que 1). Elle prouve ce résultat (donné par la calculatrice) en donnant du sens, en utilisant des expressions équivalentes *(elle justifie chacune des étapes (différents registres de représentation, division de fractions, ce qui est connu autour des exposants négatifs).*

- Pour expliquer la division des fractions elle revient au SENS : elle décode les éléments implicites $2 = \frac{2}{1}$ c'est 2 unièmes.

- Elle se penche sur les cas limites $a^0 = 1$ sauf si $a = 0$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $a \neq 0$.

- Explicite les conventions d'écriture : *2x* qu'on n'écrit pas *x.2.*

Institutionnalisation

Une institutionnalisation de ce qui ressort de toutes ces séances : synthèse sur les découvertes et discussions qui se sont produites.

Pousse vers le choix d'une stratégie plus efficace

Une fois que les fondements sont solides (on a compris d'où viennent les lois et qu'on peut les retrouver) on peut passer à l'utilisation d'une loi plus efficace et

rapide.
Indicateurs de contrôle chez les élèves
- Différentes façons de voir l'exponentielle $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.   - Active ses connaissances sur les fractions (diviser c'est multiplier par l'inverse) (Nicolas)   ***Sens les exposants négatifs***   - Conception : les expressions avec des exposants ne sont ni des décimaux ni des fractions mais des nombres entiers (Christine).   - Si on a un nombre afflué d'un exposant négatif et que la base est un nombre entre 0 et 1 alors l'expression est plus grande que 1. (Steve).   ***Autour des écritures équivalentes à 5^{-3}***   - Construit un sens aux exposants négatifs : 1 divisé par 5, divisé par 5, divisé par 5 (Nicolas, François).   - Explique la cohérence de l'écriture avec des exposants négatifs en se ramenant à la régularité (ce qu'on fait avec les exposants positifs, on l'étend) (Nicolas).   - Fait des liens avec ce qui a été présenté auparavant $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ (Christine).   - Écriture non efficace : 5 divisé en 5 divisé en 5 divisé en 5, divisé en 5, cinq fois : $5 \div 5 \div 5 \div 5 \div 5$ (Carmen). François fait le lien avec sa stratégie : $5 \div 5 = 1$ donc on retrouve $1 \div 5 \div 5 \div 5$ (valide celle de Carmen mais montre qu'elle n'est pas efficace).   - Un simple calcul fait par la calculatrice : 0,008 (Dominique)

Tableau 4.5.4.2 Stratégies d'intervention et indicateurs de contrôle chez les élèves autour de l'introduction des exposants négatifs.

4.5.4.3 Analyse de la rencontre de co-opération suite à deux séances en classe (2 et 3 mai)

L'enseignante et la chercheure se sont rencontrées le 5 mai. Dans un premier temps, elles discutent sur l'expérimentation revenant sur les moments marquants des deux dernières séances en classe, l'enseignante nous renseigne de plus sur différents aspects : sa pratique en classe, ses façons de faire, d'interagir avec les élèves et différents épisodes vécus avec les élèves avant l'expérimentation (voir tableau ci-après sur ce qui ressort). Dans un deuxième temps, elles planifient les prochaines séances.

Retour sur l'expérimentation

Sur les élèves et leur engagement dans ce qui a été proposé : Portrait positif de ce qui s'est passé en classe

- Les deux approches (exposants négatifs et division d'exposants) ont bien fonctionné : « ils *(les élèves)* font divise par *a*, divise par *a (sous entendu quand ils ont une division d'exposants)* et ils font tout bien! » (E et C).

« C'était épatant de les voir aller surtout qu'on n'était pas sûres qu'ils allaient comprendre. » (E)

« Il faut que je refasse ça l'an prochain. » (E)

Retour sur des interventions d'élèves

- Explication de Nicolas sur la suite logique *(sur la convention d'écriture, extension des exposants positifs)*, il a poursuivi le raisonnement, l'enseignante l'ayant utilisé pour donner du sens à l'exposant 0.
- Les élèves « suppliaient » d'avoir des notes de cours alors qu'ils n'en veulent pas d'habitude *(un indice qu'ils sont mal à l'aise avec cette partie)*.
- Intervention d'Steve (autour du résultat obtenu quand la base est entre 0 et 1 et l'exposant est négatif).
- Intervention de Carmelle qui donne du sens à l'écriture symbolique avec des + et des ×.

Informations sur la pratique de Nadia

- Nadia souligne qu'elle est bonne pour improviser, elle est un peu théâtrale, elle fait un show en avant.

- Nadia est à l'écoute de ses élèves et profite de la moindre occasion pour les faire aller plus loin :
« Un élève il te tend la perche, il te dit quelque chose, les profs en général ils repoussent ça de la main genre « mais ce n'est pas ça là » au lieu de dire « ah mais c'est quoi que tu me dis là? » et puis essayer d'aller plus loin. Tu sais comme Ly quand il a dit tu soustrais les exposants, j'ai demandé « mais pourquoi? » « Mais parce qu'il faut que tu les soustrais », « mais pourquoi? ». « Ben parce que je l'ai appris comme ça », « Oui tu l'aS appris comme ça mais tu ne sais pas finalement si ça marche ou si ça ne marche pas, pourquoi ça marche d'abord? »

Implications observées de cette approche sur deux élèves

- C'est la première fois que Ly lève la main, l'enseignante n'avait presque pas entendu sa voix avant. Cet élève a « trippé! » (E et C)

- L'approche adoptée a un effet bénéfique sur Patricia (une élève faible), elle embarque quand on détaille les démarches.

L'enseignante exprime sa satisfaction car les élèves ont bien compris que $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$ et ça sans qu'elle ait eu à l'expliquer (elle fait référence ici à l'approche planifiée par la chercheure et l'enseignante autour des exposants négatifs où deux approches introductives avaient été discutées). L'approche suggérée par l'enseignante autour de la résolution d'une équation n'a pas été montrée aux élèves.

Dans la discussion autour de l'intervention de Steve, la chercheure met de l'avant la capacité de l'enseignante à réagir vite dans des occasions inattendues. Nadia explique alors que des fois elle ne sait pas répondre et qu'à ce moment là, elle préfère le leur dire. Elle a ainsi un souci de transparence face aux élèves, elle n'a pas la réponse à tout. La chercheure précise qu'elle est contente que cette intervention ait eu lieu, les élèves ont ainsi pu s'apercevoir que pour les nombres compris entre 0 et 1, il se passe des choses différentes que pour les autres nombres (nous nous restreignons ici aux nombres positifs), ce qui met de l'avant l'engagement réfléchi des élèves, leur interprétation des résultats fournis par la calculatrice. L'enseignante nous renseigne à ce moment sur d'autres moments clés vécus avant l'expérimentation et qui touchent à certaines conceptions auxquelles elle donne du sens (ce qui met en évidence ses connaissances des conceptions des élèves qu'elle cherche à prendre en compte) :

> Nadia : mais tu sais au début de l'année j'avais beaucoup de difficultés avec eux parce que quand ils multipliaient, mettons ils disaient 25 fois un tiers, ils disaient ce n'est pas normal ça rapetisse, si je multiplie ça devrait grossir puis là on avait eu toute une démarche, je leur avais dit oui mais « je fais 25 fois un tiers, un tiers ce n'est même pas un, je leur ai dit, je prends une quantité, je la multiplie même pas une fois, fait que c'est sûr que j'en prends moins… Puis multiplié par un tiers c'est comme divisé par 3 et ça ce n'était pas clair. » Je suis sûre que j'irais dans n'importe quel cours de math de n'importe quel prof là, de 1 à 5 là, tu dis aux élèves multiplier par un tiers c'est comme divisé par 3 là, ce n'est pas comme assis dans leur tête sauf les plus forts mais sinon ce n'est vraiment pas automatique.

4.6 Analyse sur un sixième bloc portant sur les Exercices calculatoires sur des expressions / Écris sous une certaine forme

Les tâches qui font partie de ce bloc font appel à un contrôle syntaxique. Elles ont été bâties essentiellement pour faire suite aux lois des exposants et au travail sur les exposants négatifs. Certains des exercices de ce bloc avaient été préparés par la chercheure et soumis à l'enseignante. Quelques uns de ces exercices ont été retenus, l'enseignante a ensuite proposé d'utiliser son document « quotient d'expressions algébriques » ramassant également des exercices de type calculatoire.

4.6.1 De la tâche initiale à la tâche redéfinie

Tâches initiales (les tâches proposées)	**Ce que les tâches sont devenues** (les tâches redéfinies)
Exercice 1 Complète ces énoncés pour qu'ils soient vrais : $2^3 . 2^4 = 2^?$ $\quad 2^? . 2^3 = 2^8$ $\quad 2^? . 2^5 = 2^9$ $2^3 . 2^? = 2^6$ $\quad 2^4 . 2^? = 2^5$ $\quad 2^3 . 2^0 = 2^?$ $2^?.2^1 = 2^2$ $\quad 2^x . 2^y = 2^?$ $\frac{2^?}{2^4} = 2^2$ $\quad \frac{2^8}{2^?} = 2^5$ $\quad \frac{2^?}{2^1} = 2^0$ $\frac{2^6}{2^6} = 2^?$ $\quad \frac{2^3}{2^4} = 2^?$ $\quad \frac{2^n}{2^n} = 2^?$	***Exercice 1*** Calcule les puissances suivantes[87]. a) 2^{-2} b) $\frac{1}{5^{-2}}$ c) 5^{-4} d) x^{-2} e) 10^{-3} f) a^{-n} g) $\frac{1}{10^{-1}}$ h) $\frac{1}{a^{-2}}$ i) $(-3)^2.3^3$ j) $6^5.6^2$ k) $\left(\frac{3}{5}\right)^3.\left(\frac{3}{5}\right)^6$ l) $(-2,2)^3.(-2,2)$ m) $0,1^2.0,1^0$ n) $10^a.10^b$ o) $5.5^4.5^{-2}$ p) $x^n.x^3$ q) $a^2.a^3.a$ r) $3^7.3^b$ s) $9^{-5}.9^y.9^3$ t) $-10^0.10^5$ u) $(-3)^6.(-3)^n.(-3)^7$ *(L'exercice choisi ici (provenant d'un document déjà préparé par l'enseignante) présente des expressions dont la nature des nombres a changé, les exposants ne sont pas*

[87] Pour les tâches modifiées, nous avons encadré les « nouveaux » nombres qui apparaissent suite à la rencontre de planification.

	juste positifs mais l'enseignante introduit aussi des exposants négatifs).
Exercice 2 Détermine l'exposant : $10^? = 0{,}1$ $8^? = 1$ $8^? = 4096$ $5^? = 0{,}04$ $4^? = 0{,}015625$ $20^? = 0{,}05$ $5^? = 1\ 953\ 125$ $5^? = 0{,}0016$	***Exercice 2*** Trouve l'exposant permettant d'obtenir la puissance désirée. a) $3^x = 9$ b) $3^t = 81$ c) $5^y = 625$ d) $12^a = 144$ e) $7^b = 343$ f) $2^m = 32$ g) $\left(\frac{1}{3}\right)^? = \frac{1}{27}$ h) $\left(\frac{1}{3}\right)^? = \frac{4}{36}$ i) $10^f = 0{,}1$ j) $8^n = 1$ k) $8^d = 4096$ m) $5^? = 0{,}04$ n) $4^k = 0{,}015625$ o) $20^q = 0{,}05$ p) $5^z = 0{,}0016$ q) $5^x = 1953125$ r) $5^? = 0{,}04$ *(Nous pouvons noter le recours à un symbolisme algébrique (plus qu'au point d'interrogation indiquant un nombre que l'on cherche; l'enseignante passe donc clairement dans le registre algébrique).*
Exercice 3 Détermine la base : $?^1 = 501$ $?^{-2} = 0{,}01$ $?^{-1} = ¼$ $?^3 = 216$ $?^3 = 343$ $?^{-4} = 0{,}0001$ $?^{-2} = 1/49$	*Cette tâche n'a pas été reprise.*
Exercice 4 Problèmes et exercices d'application sur la division : $\frac{10^{15}+10^8+10^{10}}{10^2}$ $\frac{5ab+15b}{5b}$ $\frac{2(3ab^2+6ab+4b)-2ab^2}{3b}$ $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$ $\frac{10^2\times10^5}{10^5}$ $\frac{8^5\times10^6}{10^2}$ $\frac{8^2\times9^6}{8^5\times9}$ ***Exercice 5*** Exprime ces expressions en une seule expression exponentielle :	***Exercice 3*** Réduis les expressions suivantes sans calculatrice en te servant des propriétés des nombres que tu connais. $\frac{10^{15}+10^8+10^{10}}{10^2}$ $\frac{5ab+15b}{5b}$ $\frac{2(3ab^2+6ab+4b)-2ab^2}{3b}$ $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$ $4^2 \times 4^3 \times 4^0$ $3^8 \times 3^3 \div 3^6$ $6^5 \div 6^4 \times 6^2$ $4^8 \div 4 \times 4^3$ $(5^3 \times 5^4) \div (5^3 \times 5^5)$ $8^2 \times 8^4$ $8^2 + 8^1$ $7^3 \times 7^0$ $9^4 \div 9^4$ $(-2)^4 \times (-2)^3$ $(-1)^8 \div (-1)^3$ $-5^2 \times 5^3$

(les élèves perçoivent-ils les cas où ils ne peuvent pas le faire?) $4^2 \times 4^3 \times 4^0$ $3^8 \times 3^3 \div 3^6$ $6^5 \div 6^4 \times 6^2$ $4^8 \div 4 \times 4^3$ $5^4 \div 5^2 \times 5^{-2}$ $(5^3 \times 5^4) \div (5^3 \times 5^5)$ $8^2 \times 8^4$ $7^3 \times 7^0$ $9^4 \div 9^4$ $3^3 \times 3^2$ $2^8 \div 2^4$ 5×5^2 $(-2)^4 \times (-2)^3$ $6^5 \times 6^2$ $(-1)^8 \div (-1)^3$ $(-3)^5 \times (-3)^2$ $-5^2 \times 5^3$ $7^4 \times (-7)^2$ $3^2 \times 3^1$ $4^3 \times 4^2$ $8^2 + 8^1$ $7^4 - 7^2$ $5^4 \times 4^5$ $9^5 \div 9^3$ $11^3 \times 10^2$ $9^6 \times 9^3$ $15^6 \div 15^8$ $25^4 \times 25^5$ $\frac{4^3 \times 4^2}{4^4}$ $\frac{5^1 \times 5^4}{5^2 \times 5^3}$ $\frac{3^4 \times 5^4}{3^2 \times 5^3}$ $\frac{7^4 \times 5^4}{5^2 \times 7^3}$ $\frac{2 \times 10^4}{1,5 \times 10^3}$ $\frac{3 \times 10^{-2}}{4 \times 10^{-1}}$ $\frac{4,5 \times 10^5}{3 \times 10^3}$ $\frac{3 \times 10^3 \times 5 \times 10^2}{1,5 \times 10^4}$ $2 \times 10^2 + 3 \times 10^2$ $2 \times 10^2 \times 3 \times 10^2$ $4 \times 10^3 - 3 \times 10^2$ $(9 \times 10^4) \div (3 \times 10^3)$	$7^4 \times (-7)^2$ $3^2 \times 3^1$ $7^4 - 7^2$ $11^3 \times 10^2$ $15^6 \div 15^8$ $5^4 \times 4^5$ $2 \times 10^2 + 3 \times 10^2$ $2 \times 10^2 \times 3 \times 10^2$ $4 \times 10^3 - 3 \times 10^2$ $(9 \times 10^4) \div (3 \times 10^3)$ 5×5^2 *Certaines expressions ont été enlevées (il y en avait trop).*

Arguments à l'appui des tâches initiale et modifiée	
Chercheure (arguments à l'appui de la tâche préalable)	***Enseignante (arguments à l'appui de la tâche modifiée)***
Exercice 1 Le choix de l'exercice repose sur un contrôle syntaxique relié aux exposants en regard des opérations sur ceux-ci et des exposants négatifs (pour un seul numéro) mettant en jeu les lois sur les exposants et la définition d'exposant négatif : il s'agit de trouver l'inconnue qui permettra de vérifier l'égalité.	***Exercice 1 et 2*** L'enseignante avait déjà un document qui travaillait les mêmes aspects que ceux relevés (selon elle) dans nos exercices. Elle a donc proposé de donner son document aux élèves vu que le document était prêt (argument de type pragmatique). De plus, un des arguments pour choisir son document d'exercices

Exercices 2 et 3 (trouver la base et trouver l'exposant) Contrôle qu'exerce l'élève sur l'exposant 0 et le fait qu'un terme (un certain exposant) divisé par lui-même vaut 1 (deux aspects qui causent des difficultés aux élèves).	était qu'elle voulait que les élèves de ses différents groupes soient capables de faire le même type d'exercices (souci de faire en sorte que tous ses groupes aient vu les mêmes choses sur ce contenu précis). Elle cherche de plus à prendre en compte certaines difficultés, comme la chercheure (pas les mêmes toutefois) : elle met par exemple l'accent sur certaines expressions avec lesquelles les élèves ont de la difficulté comme $\left(\frac{1}{3}\right)^{?} = \frac{4}{36}$ (ils ne voient pas que $\frac{4}{36}$ représente une fraction équivalente à $\frac{1}{9}$ donc à $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$. La consigne a également été modifiée, il s'agit ici de calculer, d'appliquer les lois des exposants vues.
Exercices 4 et 5 Ces exercices axent sur un contrôle syntaxique sur des expressions avec des exposants. On travaille le fait qu'une division peut s'écrire avec le signe d'opération ÷ ainsi que par la barre de fraction. Certaines expressions ne peuvent pas se réduire (ce sont des additions, des soustractions, ce ne sont pas les mêmes bases), ce sont des « pièges » pour vérifier l'esprit critique des élèves. On cherche à déceler si les élèves ont un engagement réfléchi sur l'écriture dans les cas où on ne peut pas réduire certaines expressions en utilisant les lois sur les exposants. Par exemple pour les expressions $8^2 + 8^1$; $7^4 - 7^2$ et $5^4 \text{x } 4^5$.	***Exercice 3*** L'enseignante a combiné les deux exercices proposés par la chercheure, elle met de l'avant (pendant la rencontre du 9 février), la *difficulté des élèves à réduire des expressions qui comportent des additions ou des soustractions au numérateur et/ou au dénominateur. Les élèves appliquent souvent de façon mécanique et aveugle les lois vues sur les exposants sans jugement réfléchi.* L'enseignante *propose d'enlever certaines de ces expressions* (il y en a *trop*, certaines qui vont chercher les mêmes informations que d'autres) mais de *laisser les « pièges », elle les trouve très intéressants, n'en ayant pas inclus dans son document d'exercices.* Elle propose également de *changer l'énoncé, il est important que les élèves*

	n'utilisent pas leur calculatrice car ils ont souvent l'habitude de calculer les expressions avec les exposants, avec des fractions, ils se retrouvent ainsi avec des nombres irrationnels,... *Pour eux, une expression avec des exposants n'est pas achevée, finie (prise en compte d'une conception des élèves).*

Nous pouvons remarquer que l'enseignante et la chercheure ont chacune leur perspective mais il y a pour chacune d'elles une prise en compte de la perspective de l'autre. La chercheure est axée sur son cadre de référence sur le contrôle, elle explicite certaines difficultés des élèves provenant de la recherche, mais elle prend également en compte dans la conception de la tâche les difficultés des élèves relevées par l'enseignante lors d'une rencontre préalable *(autour de (autour de la simplification d'expressions avec des additions au numérateur et/ou au dénominateur).* L'enseignante explicite sa didactique praticienne autour de ses élèves (elle veut que tous ses groupes aient vu le même contenu), elle cherche à travailler leurs difficultés et prend en compte leurs conceptions *(les expressions avec des exposants ne sont pas achevées, finies, il faut continuer à calculer).* Elle rentre sur le contrôle (même si elle n'utilise pas ce mot) autour des numéros « pièges » dans lesquels l'élève doit mettre à contribution un jugement réfléchi.

Les deux premiers exercices de la tâche modifiée sont ainsi des exercices provenant d'un document de l'enseignante, les autres font partie d'un document appelé « la feuille du prisonnier » (parce que la chercheure a choisi une image d'un prisonnier obligé de faire des calculs...) construit conjointement entre l'enseignante et la chercheure.

4.6.2 Le scénario effectif en classe : analyse des stratégies d'intervention (en lien avec le contrôle) et analyse de l'engagement des élèves (du point de vue de contrôle)

Nous allons dégager dans l'analyse du scénario effectif tout d'abord une caractérisation des stratégies d'intervention de l'enseignante dans la correction des exercices, ensuite une caractérisation des stratégies d'intervention de la chercheure (qui a pris en charge exceptionnellement la correction lors d'une séance) et finalement nous allons faire une analyse des expressions avec lesquelles les élèves ont manifesté des difficultés (les indices que cela nous donne sur le contrôle).

Caractérisation des stratégies d'intervention de l'enseignante

Les exercices faisant partie de la feuille du prisonnier (qui regroupent des expressions où les élèves ont des difficultés avec la réduction d'expressions ayant des additions, soustractions au numérateur et/ou dénominateur et quelques pièges) ont été corrigés lors de la séance du 8 mai après l'introduction de la division d'exposants et des exposants négatifs. Nous pouvons remarquer que dans la correction de ces exercices et de ceux provenant de son document, c'est l'enseignante qui prend en charge la correction en donnant les réponses et les explications. L'extrait suivant autour de la correction de l'expression $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$ montre bien qu'on est ici sur des stratégies d'intervention peu intéressantes du point de vue du développement du contrôle, la validation reposant sur l'enseignante :

> Nadia : $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$, on ne peut rien faire avec ça. Le quatrième ça reste comme ça on ne peut rien faire.
>
> Une élève : pourquoi ça ne…
>
> Nadia : ce n'est pas des fois c'est des plus qu'il y a entre les deux donc on laisse ça comme ça on ne peut rien faire.
>
> Une élève : on peut séparer…

Nadia : non on ne peut pas séparer ça...

L'élève : ah non?

Nadia : là si tu le sépares ça fait $\frac{10^4}{10^2}+\frac{10^5}{10^3}$, ça veut dire que quand tu additionnes des fractions, tu additionnes en haut et en bas est-ce qu'on a le droit?

L'élève : non.

Nadia : non ben là quand tu sépares ça en deux c'est ça que tu fais.

Anne-Julie : mais est-ce qu'on ne peut pas faire juste $\frac{10^4}{10^2}$?

Nadia : non. Qu'est-ce que tu fais quand tu fais ça là $\frac{10^4}{10^2}+\frac{10^5}{10^3}$. C'est ça que tu as fait Anne-Julie?

Anne-Julie : oui.

Nadia : ça ne marche pas ça là, parce que quand tu me dis que tu additionnes deux fractions, t'additionnes et tu additionnes en bas c'est ça qui est écrit ce qui est écrit en bas *(Nadia montre la feuille)*.

Carmen : mais elles sont additionnables les fractions.

Nadia : elles sont additionnables mais quand elles ont le même dénominateur. (8 mai, 220-241).

Dans la séance du 16 mai, Nadia est absente, la chercheure prend alors exceptionnellement la correction des exercices provenant du document de l'enseignante, c'est une demande des élèves qui se disent complètement perdus.

Caractérisation des stratégies d'intervention de la chercheure

Nous pouvons noter que les réponses aux exercices proviennent des élèves ainsi que la validation de ces dernières. Certaines simplifications sont plus complexes demandant plusieurs étapes, la chercheure propose alors aux élèves d'aller les faire en avant et demande que les élèves expliquent comment ils procèdent, qu'ils justifient les étapes par lesquelles ils passent, elle leur demande de jouer au professeur :

« C : tu joues à la prof, tu expliques tout ce que tu fais. »

La validation est en général laissée aux élèves comme on le voit dans l'extrait ci-dessous :

Nicolas : $\dfrac{3x.8x^3y}{6x^5}=\dfrac{3x.8x^3}{6x^5}.y=\dfrac{x^4.8.}{2x^5}.y=\dfrac{4x^4}{x^5}.y=\dfrac{4}{x}.y$

Miranda : pourquoi tu ne mets pas le $6x^5$ en bas du y?

Nicolas : parce que c'est un fois.

C : qu'est-ce que vous en pensez?

Les élèves parlent tous en même temps.

C : il y a ici une question pertinente, pourquoi il n'a pas mis $\dfrac{3x.8x^3}{6x^5}.\dfrac{y}{6x^5}$?

François : parce que ce n'est pas un +. (16 mai, 304-311)

Les explications proviennent de la chercheure quand celles données par les élèves ne sont pas assez claires et qu'on arrive à une impasse. Elle s'assure souvent de la compréhension des élèves : « Tout le monde est d'accord jusque là? » Les stratégies d'intervention mises en place ici autour de la validation, de la justification de leur démarche nous semble intéressantes du point de vue du développement du contrôle. Le développement d'un contrôle syntaxique est également mis de l'avant quand la chercheure demande à un élève qui ne comprend pas comment on procède pour simplifier d'aller au tableau et de se faire aider par certains élèves qui vont ainsi expliciter les règles qui sous-tendent la réduction d'expressions avec des exposants :

> Élie : ben je ne comprends pas.
>
> C : ben viens, on va le faire ensemble. Au tableau tout s'éclaire. Alors Élie, qu'est-ce que tu peux faire? Miranda elle va t'aider.
>
> Miranda : ben... les parenthèses avec les exposants on pourrait peut-être faire ça? (16 mai, 346-352)

Une analyse des expressions avec lesquelles les élèves ont surtout manifesté des indices de difficulté de contrôle

Indices de difficultés de contrôle chez les élèves	
Discours des élèves	**Commentaires**
Sandra et Carmen demandent pourquoi dans l'expression $2(3ab^2)$ on ne multiplie pas par 2 le 3 ensuite par 2 le a et finalement par 2 le b^2 $2(3ab^2) = 2.3.2.a.2.b^2$	Difficultés dans le sens accordé au symbolisme : veulent distribuer le 2 dans la parenthèse ($3ab^2$).
Devant l'expression $2ab + 4a + \frac{8}{3} - \frac{2}{3}ab$, Sam voit que l'on peut faire la soustraction suivante : $2ab - \frac{2}{3}ab$. Mais en général, on note des difficultés chez les élèves à voir que les termes ab et ab^2 ne sont pas semblables.	Sam dénote un contrôle sur l'écriture : reconnaissance des termes semblables. Mais les élèves en général ont des difficultés dans le sens accordé au symbolisme : autour des termes semblables
L'expression $\frac{4ab}{3} + \frac{8}{3}$ n'est pas achevée, n'est pas finie, il faut « coller » ces deux termes ensemble par exemple en écrivant $\frac{4ab}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12ab}{3}$.	Provient d'une conception : une somme de termes non semblables n'est pas finie, achevée.
$\frac{10^4 + 10^5}{10^2 + 10^3} = \frac{10^4}{10^2} + \frac{10^5}{10^3}$ (Anne-Julie) Dans l'égalité $\frac{3x.8x^3y}{6x^5} = \frac{3x.8x^3}{6x^5}.y$ Miranda demande pourquoi il n'a pas écrit $\frac{3x.8x^3}{6x^5}.\frac{y}{6x^5}$. François répond parce que n'est pas un plus.	Difficultés dans l'addition de fractions (on fait la même chose que si on avait des multiplications). Difficultés dans le sens de l'écriture en arithmétique. Miranda présente cette même difficulté en algèbre, François démontre par sa réponse un contrôle sur le sens accordé au symbolisme en algèbre.
Pour $5^3.7^2$, Nicolas propose d'écrire 5 fois 5 fois 5 fois 7 fois 7, donc 35^2 fois 5. Il s'appuie sur le fait que la multiplication est commutative. Les autres élèves sont perdus...	Nicolas démontre un contrôle sur le sens de l'écriture exponentielle et sur les propriétés des opérations. Des difficultés de plusieurs élèves autour de cette flexibilité autour de l'écriture

	exponentielle.
Difficultés à faire moins moins un nombre comme dans la troisième étape ci-dessous : $\frac{2b^3}{(2b)^{-6}}=\frac{2b^3}{2^{-6}b^{-6}}=\frac{2b^{3-(-6)}}{2^{-6}}$ et à voir que l'exposant de b est 9.	Difficultés de contrôle sémantique en arithmétique (autour des différents sens du signe moins) (Marie, Cathy, Jennifer, Élie et Miranda). D'autres élèves ne présentent pas cette difficulté et possèdent en général un bon contrôle syntaxique (Marc, François, Nicolas, Christine, Julie).
Des indicateurs de contrôle chez les élèves	
$2^{-5}.2^2.16=2^{-5}.2^2.2^4$ (Ghila)	Cette élève donne du sens à l'écriture exponentielle (flexibilité dans les différentes écritures).
Pour réduire l'expression $\frac{x^5y^{-3}.xy}{3x^2y.x^{-1}y}$, Miranda écrit $\frac{x^5\times y^{-3}\times .x^1\times y^1}{3\times x^2\times y^1\times .x^{-1}\times y^1}$, elle arrive alors à $\frac{x^6\times y^{-2}}{3\times x^1\times y^2}$ puis $\frac{x^5\times y^{-4}}{3\times 1\times 1}$.	On peut noter que cette élève décode les éléments implicites (l'exposant 1 et le facteur 1).

4.6.3 Données complémentaires sur les élèves et le contrôle qu'ils exercent sur l'écriture à travers un test formatif

Le 30 mai, l'enseignante fait passer un test formatif aux élèves portant essentiellement sur les exposants, test qui permet de les situer quant à la réflexion qu'ils exercent sur l'écriture exponentielle et sur le développement du contrôle syntaxique.

Vrai ou faux?
a) $5^2 = 5+5$ b) $\frac{3^2}{7}=\frac{9}{49}$ c) $(-1)^{12}=1$ d) $-3^2=9$ e) $-8^0=-1$

On peut noter que la grande majorité des élèves répondent correctement à cette question (Zaïa, Christine, Geneviève, Marc, Sam, François, Cathy, Miranda, Julie, Nicolas, Patricia, Marie, Émilie, Ghila, Mathieu, Ly) démontrant ainsi une bonne réflexion sur la notation exponentielle. Quelques élèves présentent certaines difficultés autour des trois derniers numéros. Dominique ne répond pas correctement aux numéros c) et e) montrant ainsi des difficultés dans la réflexion autour de la notation exponentielle en présence du signe moins. C'est également le cas d'Anne-Julie (difficultés avec le d) et le e)) et Daniel (avec le c), d) et e))

Le deuxième numéro comporte plusieurs simplifications.

Réduis les expressions algébriques suivantes :

a) $(d^5g^2)^3$

b) $10a^3.5a.4a^5$

c) $\dfrac{3x^6y^2z^{-1}}{12x^3y^3z^{-1}}$

d) $\dfrac{12b^3c^4-16b^2c^2+4bc}{4bc}$

e) $(3xy-15x^3y^2+6y)\div -3xy^2$

f) $(-3a^3b^2)^2(5a^3b^4)$

g) $\left(\dfrac{2a^7b^6}{a^{-2}b}\right)^{-3}$

Il y a plusieurs éléments en jeu dans le choix de ces expressions. Voir que $\dfrac{4bc}{4bc}=1$ (au numéro d)) ; une réflexion sur l'écriture exponentielle $(-3)^2 = 9$ (au numéro f)); le contrôle syntaxique exercé :

- Sur des expressions avec des additions au numérateur (aux numéros d) et e) dans lesquelles la division apparaît représentée dans l'un des numéros par le trait de fraction et dans l'autre par l'opération $\div$).
- Sur des fractions sans addition (aux numéros c) et e))
- Sur une multiplication d'expressions (aux numéros a), b) et f)).
- Sur des fractions sans addition avec un exposant négatif (au numéro g))

Nous rapportons ici l'analyse de quelques productions représentatives de l'ensemble de la classe. On peut noter que trois élèves exercent un contrôle syntaxique sur tout type d'expressions (Nicolas, Julie et François). D'autres élèves font l'erreur $\frac{4bc}{4bc} = 0$ (François, Miranda, Zaïa, Christine). Certains élèves exercent du contrôle syntaxique sur tout type d'expressions sauf celles avec un dénominateur négatif (Christine, Miranda). Elles appliquent la règle suivante « avec un exposant négatif pour qu'il devienne positif on l'inverse (s'il est en haut on le met en bas et vice versa) », Christine « monte » ainsi en haut le dénominateur qui devient alors positif $\frac{3xy}{-3xy^2} = 3xy + 3xy^2$. Finalement plusieurs élèves (Marc, Cathy, Dominique et Ghila) exercent peu de contrôle syntaxique sur les expressions. Par exemple, dans l'expression $\frac{12b^3c^4 - 16b^2c^2 + 4bc}{4bc}$, Ghila barre les *4bc* et opère ensuite en opérant sur des termes non semblables (elle soustrait les nombres et les exposants entre eux) : $12b^3c^4 - 16b^2c^2 = -4bc^2$. Dans l'expression $\left(\frac{2a^7b^6}{a^{-2}b}\right)^{-3}$, elle écrit $\left(\frac{a^2b}{-2a^{-7}b^{-6}}\right)^3$ (elle change de signe chacun des facteurs même le nombre en les inversant tout en changeant de signe l'exposant de la parenthèse, il y a une confusion dans la règle à appliquer.

4.6.4 Théorisation qui émerge

On retrouve dans ce bloc quelques éléments qui ressortent de la didactique d'intervention sous l'angle des composantes de contrôle travaillées, des critères des tâches qui favorisent une activité de contrôle, des indicateurs de contrôle chez les élèves et des stratégies d'intervention.

Composantes du contrôle éclairées	
Chercheure	***Enseignante***
Contrôle syntaxique qui s'exprime dans l'application des lois des exposants pour réduire certaines expressions.	Faire des exercices de « drill » pour s'entraîner.
Engagement réfléchi : voir que certaines	Jugement réfléchi, un esprit critique face

expressions ne peuvent se réduire.	à certaines expressions
Contrôle sémantique : voir qu'une division et le trait de fraction peuvent avoir le même sens. (C)	

Tableau 4.6.4a Composantes du contrôle éclairées

Stratégies d'intervention	**Critères des tâches favorisant une activité de contrôle**
- Validation et justification de la démarche par les élèves. - Pour certains exercices la validation et les explications sont faits par l'enseignante ce qui freine le possible développement du contrôle.	- Tâches calculatoires dans lesquelles il s'agit d'appliquer les lois des exposants (C et E), développe le contrôle syntaxique. - Une tâche qui présente des pièges dans laquelle on donne des expressions qui ne peuvent pas se réduire en utilisant les lois des exposants. Développe le jugement critique, l'engagement réfléchi (C).

Tableau 4.6.4b Critères en arrière des tâches favorisant une activité de contrôle et stratégies d'intervention

Indices de difficultés de contrôle chez les élèves	**Indicateurs de contrôle**
Des difficultés autour du symbolisme (le sens de l'écriture) - Distributivité qui ne convient pas $2(3ab^2) = 2.3.2.a.2.b^2$ - Repérer les termes semblables - L'expression $\frac{4ab}{3} + \frac{8}{3}$ n'est pas finie, achevée. - $\frac{3x.y}{6x^5} = \frac{3x}{6x^5} \cdot \frac{y}{6x^5}$ (confusion avec l'addition de fractions), apparaît également en arithmétique. ***Difficultés avec le moins*** Les deux sens du signe moins sont mis à contribution, ce qui cause des difficultés chez certains élèves comme dans l'exemple suivant	- Sam repère les termes semblables - Nicolas exerce un contrôle sur le sens de l'exponentielle (flexibilité entre les différentes écritures) et utilisation d'une propriété de la multiplication (commutativité) $5^3.7^2 = 35^2 \times 7$. - Sens de l'écriture exponentielle, flexibilité entre les différentes écritures : $2^{-5}.2^2.16 = 2^{-5}.2^2.2^4$ (Ghila). - Décode les éléments implicites (l'exposant 1 et le facteur 1) (Miranda).

$\frac{b^2}{b^{-3}} = b^{2-(-3)} = b^5$ ***Des difficultés dans la réflexion de l'écriture exponentielle avec le signe moins*** Des erreurs comme $-3^2 = 9$; $(-1)^{12} = 1$. ***Des difficultés dans la simplification de certaines expressions*** Erreur $\frac{4bc}{4bc} = 0$. Des difficultés dans la simplification d'expressions contenant des additions au numérateur, applique une règle de façon non convenable comme dans l'exemple ci après $-1y^{-1} + 5x^2y - 2 = \frac{5x^2y}{1y^1 - 2}$.	

Tableau 4.6.4c Autour des indicateurs de contrôle chez les élèves

Perspective de l'enseignante	Perspective de la chercheure
Autour d'une didactique praticienne - Uniformité dans ses groupes au niveau du contenu - Une préoccupation autour des difficultés et des conceptions des élèves	Sur son cadre de référence sur le contrôle Sur une didactique de recherche (autour des difficultés des élèves)
Une sensibilité à la recherche ⟵ - Développer le jugement réfléchi des élèves face à des expressions « pièges » qui ne peuvent se réduire.	⟶ ***Une sensibilité à la pratique*** Prise en compte dans la conception de certaines tâches des difficultés des élèves explicitées préalablement par l'enseignante.

Tableau 4.6.4d Autour des perspectives de l'enseignante et de la chercheure

L'analyse de l'expérimentation autour des 6 blocs permet de dégager plusieurs indicateurs de contrôle chez les élèves ainsi que des indices de difficulté. Dans la prochaine partie, nous allons nous attarder à tracer l'évolution sur le plan du développement du contrôle de quelques élèves bien choisis.

4.7 Analyse des productions de quelques élèves du point de vue du développement du contrôle

Pour essayer de cerner le possible développement du contrôle chez les élèves, un questionnaire (à titre de données complémentaires) comprenant 13 tâches a été passé à tout le groupe au début et à la fin de l'expérimentation. En vu de ce qui a été traité dans les séances en classe, nous ne retiendrons à des fins d'analyse que quatre de ces tâches[88] qui rejoignent des composantes travaillées dans l'expérimentation (cf. appendice A pour les énoncés des tâches).

En lien avec le contrôle exercé sur le processus de résolution de problèmes

Problème 1 : Le problème des trains

Dans ce problème, c'est le *contrôle sur le processus de résolution de problèmes* qui s'exerce à travers une vérification du résultat (on cherche un nombre de wagons et le résultat obtenu n'est pas entier) qui entraîne un retour au problème. Cette dimension du contrôle est travaillée dans l'expérimentation autour des problèmes *Robots*, *Abeilles* et *Bactéries*.

Problème 5 : Problème cafés- croissants.

Dans ce problème, nous pouvons voir le contrôle que les élèves exercent sur la résolution à travers leur sensibilité à la contradiction (des trois contraintes données). Dans l'expérimentation, nous avons mis l'accent sur un engagement réfléchi dans la tâche et un retour sur la résolution au besoin, et ce à plusieurs endroits.

En lien avec le contrôle exercé sur l'écriture algébrique

Problème 4 : L'achat de livres et de disques par Brigitte

---

[88] Nous reviendrons dans la conclusion sur les limites de ce questionnaire, construit préalablement à l'expérimentation.

Dans ce problème, nous pouvons observer le *contrôle sur l'écriture* exercé par l'élève à différents niveaux :

a) Sens qu'il accorde à la notation symbolique *(on peut cerner le sens que l'élève donne aux lettres L et D, et surtout à la notation 2L et 6D)*. Dans l'expérimentation, l'enseignante a travaillé à différencier les écritures L^2 et 2L par exemple.
b) La deuxième question du problème nous renseigne de plus sur une des conceptions des élèves autour de l'écriture symbolique : « deux lettres différentes représentent deux nombres différents », qui a été abordée en classe.

Exercice 12 : Validation d'un énoncé avec des exposants (se prononcer sur le caractère vrai ou faux d'un énoncé).

Cette tâche *(L'énoncé $(a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6$ est-il toujours vrai, jamais vrai ou parfois vrai ?)* requiert un contrôle sur l'écriture. Une validation similaire a été demandée en classe à propos de $(x+y)^3 = x^3 + y^3$, nous allons chercher à définir la signification que les élèves accordent à l'écriture exponentielle.

En entrevue, nous sommes revenues sur certaines tâches du questionnaire, seules les données du problème 5 (café, croissants), en lien avec le contenu traité dans l'expérimentation, seront reprises ici.

Choix de 8 élèves retenus pour cette analyse

L'entrevue a été passée au début et à la fin de l'expérimentation auprès de 7 élèves[89]. Nous avons retenu cinq de ces sept élèves (Christine, Miranda, Julie, Zaïa et Laure), les deux élèves non choisis ayant été absents une longue partie de l'expérimentation. Trois autres élèves (Nicolas, François et Carmen) ont aussi été

[89] D'autres élèves ont passé l'entrevue, certains d'entre eux juste au début et d'autres juste à la fin. L'absence de certains élèves de l'école au moment de la passation n'a pas permis de retrouver tout à fait les mêmes élèves avant et après l'expérimentation.

retenus, même si ces élèves n'avaient pas été vus en entrevue, car nous avions des traces importantes de leurs productions et de leurs discours en raison de leur implication, participation en classe. Pour ces huit élèves, nous avons relevé les indices de contrôle et de non contrôle (ces dernières en ombré), en regard des situations expérimentées en classe, et ce autour de deux composantes du contrôle qui apparaissent dans l'expérimentation :

- Contrôle sur le processus de problèmes (Bloc 1)
- Contrôle sur l'écriture (Blocs 2, 3, 4, 5 et 6)

Le *contrôle sur l'écriture* est abordé plus précisément dans l'expérimentation autour de différentes tâches :

- Réflexion sur la notation exponentielle en arithmétique et en algèbre *(à travers une réflexion du signe d'expressions avec des exposants).*
- Validation d'énoncés (se prononcer sur le caractère vrai/faux) sous différents cas de figure :
  - Quand la base est un nombre *(par exemple cette égalité $2^x.2^y.2^z = 2^{10}$ peut-elle être vraie?)*
  - Quand la base est une lettre *(par exemple $x^2 = 2x$ est toujours, jamais ou parfois vraie?)*
  - Avec deux contraintes (Peut-on trouver deux nombres a et b tels que $a < b$ et $a^2 = b^2$).
- Sens accordé à la notation exponentielle et aux opérations sur les exposants en lien l'introduction d'un certain contenu (exposants négatifs et division d'exposants).
- Perception des erreurs *(repérer les expressions équivalentes.* Par exemple les écritures $\frac{8^4}{0}$, $\frac{8^4}{1}$ et 8^4 sont-elles équivalentes à $\frac{8^5}{8}$?)
- Simplification d'expressions avec des exposants : les expressions ne contenant que des multiplications au numérateur et au dénominateur (en arithmétique et en algèbre), des expressions avec des exposants négatifs, des expressions avec des additions au numérateur et/ou au dénominateur en arithmétique et en algèbre).

Nous avons également relevé les difficultés sur l'interprétation du symbolisme des élèves quand elles se manifestaient.

4.7.1 Analyse des productions et du discours de huit élèves du point de vue du développement du contrôle

Pour chacun des huit élèves sélectionnés, nous reprendrons dans un premier temps dans un tableau les indicateurs de contrôle ou de difficultés de contrôle relevés au cours de l'expérimentation (à partir de leurs traces écrites ou de leur discours). Ce tableau nous donnera un portrait détaillé de la manière dont s'est manifesté le contrôle en lien avec les situations. Nous complèterons par la suite cette analyse par les données obtenues dans le questionnaire écrit et dans quelques cas dans l'entrevue.

Analyse du contrôle exercé par Christine sur l'activité mathématique au cours de l'expérimentation

<table>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur le processus de résolution de problèmes</th></tr>
<tr><td colspan="2">- Anticipation de l'ordre de grandeur avant de connaître le résultat.
- Choix de la stratégie efficace (passage à l'exponentielle).
- Engagement réfléchi (donne du sens à l'écriture en contexte, émet une certaine interprétation de la situation qu'elle abandonne car ne convient pas).
- Vérification, retour sur la réponse (vérifie la réponse en faisant l'opération inverse ce qui l'amène à abandonner la stratégie adoptée; retour au contexte : elle arrondit le résultat)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur l'écriture</th></tr>
<tr><th>Sens de la notation en lien avec le travail sur le signe d'une expression</th><th>Validation d'un énoncé (se prononcer sur le caractère vrai/faux)</th></tr>
<tr><td>En arithmétique
Contrôle syntaxique exercé sur l'écriture exponentielle (utilise une règle pour se prononcer sur le signe d'une expression avec des exposants, liée à la parité des exposants).</td><td>La base est un nombre
Donne un moyen de valider les énoncés : remplacer par des nombres.

La base est une lettre
Difficultés dans la validation, avance que l'énoncé est toujours vrai et n'explique pas pourquoi.</td></tr>
<tr><th>En lien avec le travail sur les exposants négatifs et division d'exposants</th><th>Perception des erreurs</th></tr>
</table>

- *Contrôle syntaxique* : construit du sens autour de la loi sur les exposants négatifs « si j'ai des multipliés j'ajoute donc si j'ai divisé je fais moins. » - *Choix stratégique, efficace* du facteur commun le plus grand pour simplifier dans les fractions en arithmétique. - Fait des liens avec ce qui a été vu précédemment $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.	*Contrôle syntaxique* (application d'une loi générale sur la division d'exposants « quand on a une multiplication on ajoute les exposants donc quand on divise, on soustrait les exposants).
Simplification d'expressions algébriques	***Difficultés dans le symbolisme et erreur***
10 mai *Contrôle syntaxique* (déduction de règles) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2}$ et $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^{-2} = \left(\frac{y^2}{x^3}\right)^{2}$. *Contrôle syntaxique* sur la simplification d'expressions algébriques en algèbre avec des exposants négatifs. *30 mai* Contrôle syntaxique exercé sur tout type d'expressions avec des exposants. Difficultés avec la simplification d'expressions avec des additions au numérateur quand au dénominateur il y a le signe moins : $\frac{3xy}{-3xy^2} = 3xy + 3xy^2$ (essaie d'enlever le moins en le « montant en haut » comme c'est le cas avec les exposants négatifs.	*Le 2 et 3 mai* Difficulté dans l'interprétation de l'écriture : $x^2 = 2x$, $2x = xx$ et $6y = yyyyyy$ (2 et 3 mai) Concaténation $2xy + 6y = 2x7y$. Conception autour des exposants : ce sont des nombres entiers, ne peuvent être ni des décimaux ni des fractions. Dans la simplification d'expressions algébriques : Erreur $\frac{4ab}{4ab} = 0$.

Qu'est-ce qui se dégage de cette analyse sur le contrôle exercé par l'élève au cours de l'expérimentation? Quel éclairage apportent ici les données complémentaires du questionnaire et de l'entrevue?

- *Sur le processus de résolution de problèmes?*

Le très bon contrôle exercé par cette élève sur le processus de résolution de problèmes (bloc 1 de l'expérimentation) se manifeste à toutes les étapes du processus : anticipation de l'ordre de grandeur du résultat, passage à une stratégie plus efficace, vérification du résultat obtenu, abandonnant la démarche adoptée quand elle ne convient pas, retour au problème, au contexte pour interpréter la réponse, elle est à la recherche de sens.

Que nous montre ici l'analyse du questionnaire?

Dans le questionnaire passé avant l'expérimentation, elle s'engage dans la résolution du problème café, croissants sans manifester de contrôle sur le processus « c'est 1,50$ pour un café et un croissant. » Le contrôle va se manifester à la fin dans sa réponse au questionnaire lorsque l'élève écrit :

> « Après de très longues réflexions, je suis venue à la conclusion que c'est un restaurant dans lequel il y a des rabais. »

Elle bâtit ainsi une explication pour que le problème soit plausible. Dans l'entrevue, la chercheure lui demande d'expliciter comment elle a procédé et si ce prix marche pour les trois énoncés. Elle se lance alors dans des essais erreurs contrôlés mais finit par dire qu'il y a un problème, ça marche pour les deux premiers mais pas pour le troisième. Elle demande alors s'il y a différents prix.

Toutefois, l'élève ne procède pas toujours à un retour au problème : ainsi dans le problème des *Trains*, Christine ne prend pas en compte une des contraintes : on a le même nombre de wagons et donne au début et à la fin du test deux réponses plausibles si on ne prend pas en compte cette contrainte *(20 wagons de 16 places et 22 wagons de 12 places pour le questionnaire du début et 19 wagons de 16 places, 23 wagons de 12 places pour le questionnaire de la fin).*

- *Sur le contrôle exercé sur l'écriture*

Christine axe sur le choix du plus grand facteur commun (choix efficace).

Tout le long de l'expérimentation, l'élève exerce un contrôle syntaxique sur les tâches proposées, elle est à la recherche de règles auxquelles elle donne du sens. Cependant, ce contrôle syntaxique est limité dans le cas de simplification d'expressions dont le numérateur a un signe moins, elle applique alors une règle apprise avec les exposants négatifs *« quand on a des exposants négatifs on monte l'expression en haut et on change alors le signe »* est appliqué avec le signe moins de l'expression : $\frac{3xy}{-3xy^2} = 3xy + 3xy^2$, et ce à la fin de l'expérimentation.

Cette élève exerce un bon contrôle sémantique autour de la notation exponentielle. Plusieurs erreurs, difficultés et conceptions ont été relevées autour du symbolisme au début de l'expérimentation, nous ne retrouvons plus ces difficultés dans le test du 30 mai.

Qu'apporte ici l'éclairage du questionnaire?

D'après l'analyse du questionnaire *(problème 4)*, une autre conception est présente : « deux lettres différentes représente deux nombres différents », et ce au début et à la fin de l'expérimentation. Nous décelons ici une des limites de notre approche, cette conception ayant été travaillée en classe (nous reviendrons sur ce point, voir 4.7.2).

Nous pouvons également noter une régression dans la validation d'énoncés. Au début de l'expérimentation (voir dans le questionnaire, tâche 12), Christine fait un lien entre l'arithmétique et l'algèbre, concluant que l'égalité $(a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6$ n'est jamais vraie (elle donne quatre contre-exemples (2, 3), (4, 5), (10, 15), (34, 6)). Dans une tâche similaire donnée le 16 mars, nous pouvons noter d'après ses interventions en classe que cette élève donne du sens à l'écriture et fait un lien avec l'arithmétique, se tourne vers les nombres pour vérifier la validité de l'énoncé. La discussion autour de la véracité de l'égalité $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ abordée en classe semble ici créer un conflit chez cette élève puisqu'on peut noter que dans une tâche similaire donnée en devoir le même jour, Christine avance que l'énoncé est vrai (alors qu'il est parfois vrai), sans donner d'autres explications et dans le questionnaire final, elle répond que l'égalité $(a^2+b^2)^3 = a^6+b^6$ est toujours vrai car on a juste à distribuer l'exposant dans la parenthèse. Nous allons nous attarder de plus près à l'intervention en classe autour de la validation d'énoncés qui dans ce cas semble créer des difficultés chez les élèves (voir point 4.7.2).

Analyse du contrôle exercé par Carmen sur l'activité mathématique au cours de l'expérimentation

<table>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur le processus de résolution de problèmes</th></tr>
<tr><td colspan="2">- Anticipation de l'ordre de grandeur avant de connaître le résultat
- Choix d'une stratégie efficace (passage vers l'exponentielle)
- Engagement réfléchi (propose une interprétation de l'énoncé).
- Vérifie, retourne au contexte.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur l'écriture</th></tr>
<tr><th>En lien avec le travail sur les exposants négatifs et division d'exposants</th><th>Perception des erreurs</th></tr>
<tr><td>- Décode les éléments implicites $10 = 10^1$.
- Recherche de sens (mal à l'aise d'appliquer la loi de Ly sans la comprendre).
- Besoin de calculer les expressions avec des exposants, difficulté de contrôle sur l'écriture (2 mai).
- Présente pour discussion une écriture aux exposants négatifs non efficace mais qui marche $5^{-3} = 5 \div 5 \div 5 \div 5 \div 5$</td><td>Réinvestissement d'une manière de faire qui ne convient pas ici (pour $2^3 \times 2^5$, on ne multiplie pas les bases entre elles donc on ne peut pas le faire non plus pour $8^5 \times 10^5$). Le sens accordé à l'exponentielle est à questionner.</td></tr>
</table>

Simplification d'expressions algébriques	***Difficultés dans le symbolisme et autres difficultés***
Contrôle syntaxique sur la simplification d'expressions algébriques en algèbre avec des exposants négatifs.	*Autour du symbolisme* Mauvaise interprétation de l'écriture. $2x = xx$ et $6y = yyyyyy$ *Erreur* $2xy = 2x.2y$ *Concaténation* $3+x = 3x$ *Sur les termes semblables : on peut ajouter* a^2b *et* ab^2. (3 mai). Erreur : $2(3ab^2) = (2.3).(2.a).(2.b^2)$ (distribue le 2 dans la parenthèse). *On sent une évolution :* $3ab^2 =$ *a* fois *b* fois *b* plus *a* fois *b* fois *b* plus *a* fois *b* fois *b (évolution, accorde un sens au symbolisme).* (10 mai). *Flexibilité d'une écriture à l'autre* Difficultés à voir que les écritures suivantes sont équivalentes $\frac{27}{-64} = \frac{-27}{64} = -\frac{27}{64}$ (10 mai).

Qu'est-ce qui se dégage de cette analyse sur le contrôle exercé par l'élève au cours de l'expérimentation? Quel éclairage apportent ici les données complémentaires du questionnaire?

- *Sur le processus de résolution de problèmes?*

Nous pouvons remarquer que cette élève exerce un contrôle sur le processus de résolution de problèmes, elle anticipe, dénote un engagement réfléchi, vérifie, retourne au problème et fait un choix judicieux d'écriture (exponentielle).

Que nous montre ici l'analyse du questionnaire?

Nous retrouvons la composante vérification et retour au problème dans le questionnaire autour du problème des *Trains* qu'elle résout algébriquement et donne une réponse entière, elle précise même dans la tâche effectuée à la fin de l'expérimentation « un demi wagon ça n'existe pas. »

- *Sur le contrôle exercé sur l'écriture*

Cette élève nous a semblé intéressante à analyser car elle participe en classe et a suscité des discussions intéressantes autour de l'interprétation du symbolisme. Par son discours, nous pouvons souligner qu'elle est à la recherche de sens. Faisant de nombreuses erreurs reliées à l'interprétation de l'écriture en arithmétique et en algèbre, elle cherche à comprendre ce qui est pour nous une porte d'entrée pour exercer une activité de contrôle. Ses interventions ont mené l'enseignante à expliciter le sens en arrière du symbolisme et ainsi à en faire profiter tous les autres élèves de la classe. Une évolution se fait sentir, ainsi le 10 mai cette élève explicite l'écriture $3ab^2$ comme $a \times b \times b + a \times b \times b + a \times b \times b$, ce qui précédemment constituait une difficulté.

Qu'apporte ici l'éclairage du questionnaire?

Le questionnaire nous renseigne sur le fait qu'elle possède la conception suivante « deux lettres différentes doivent avoir deux valeurs différentes » (au début et à la fin de l'expérimentation).

Analyse du contrôle exercé par Nicolas sur l'activité mathématique au cours de l'expérimentation

<table>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur le processus de résolution de problèmes</th></tr>
<tr><td colspan="2">- Contrôle sur la représentation du problème (perçoit la structure multiplicative)
- Vérification, retour au contexte, s'appuie sur une représentation visuelle (2 fois)
- Engagement réfléchi : axé sur le sens (de la réponse dans le contexte, propose une interprétation de l'écriture en contexte)
→ Pas de passage vers une écriture efficace</td></tr>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur l'écriture</th></tr>
<tr><th>Sens de la notation en lien avec le travail sur le signe d'une expression</th><th>Validation d'un énoncé (se prononcer sur le caractère vrai/faux)</th></tr>
<tr><td>En arithmétique
- Donne du sens à la notation</td><td>Quand la base est une lettre
- Contrôle qui s'exerce sur l'égalité (voit qu'elle est toujours vraie)</td></tr>
</table>

exponentielle, utilise les différentes écritures équivalentes (avec l'exposant, les multiplications successives, l'écriture au long).	- Utilisation d'un contre-exemple (une entrée sur le vrai / faux par les nombres) - *Contrôle syntaxique* : utilisation d'une règle, d'abord on effectue les exposants, ensuite les parenthèses,... mais qui ne mène pas à la bonne réponse. *Tâche avec deux contraintes* Voit que l'égalité est vraie pour une infinité de valeurs
En lien avec le travail sur les exposants négatifs et division d'exposants	***Simplification d'expressions algébriques***
- Flexibilité entre les registres fraction, décimal, verbal et pourcentages. - Étendre la règle prouvée $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ aux autres nombres $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$. - Construit un sens aux exposants négatifs $1 \div 5 \div 5 \div 5$ - Explique la cohérence de l'écriture avec des exposants négatifs en se ramenant à la régularité (ce qu'on fait avec les exposants positifs, on l'étend) - Fait appel à ses connaissances sur les fractions (diviser revient à multiplier par l'inverse, les propriétés des opérations).	Contrôle syntaxique exercé pour la simplification d'expressions de tout type.

Qu'est-ce qui se dégage de cette analyse sur le contrôle exercé par l'élève au cours de l'expérimentation? Quel éclairage apportent ici les données complémentaires du questionnaire et de l'entrevue (passée au début de l'expérimentation?)

Nous avons retenu cet élève car il présente des indicateurs de contrôle que nous ne retrouvons pas toujours chez d'autres élèves.

- Sur le contrôle exercé sur l'écriture

Activation des connaissances antérieures / faire des liens / anticiper

Nicolas fait appel à ses connaissances lors d'un nouveau contenu en donnant du sens, faisant des liens entre ce qu'il sait et ce qu'il est en train d'apprendre ce qui lui permet parfois de devancer ce que l'enseignante veut présenter (par exemple montrer la cohérence de l'écriture exponentielle avec les exposants négatifs en étendant la régularité obtenue avec les exposants positifs). Cette rapidité de connexion entre l'ancien et le nouveau lui permet d'opérer dans un contenu nouveau (calcul des logs en s'appuyant sur les proportions).

Contrôle exercé dans la flexibilité entre les registres de représentation

Il possède également une grande flexibilité dans les registres de représentation, (il s'appuie sur une représentation visuelle : l'arbre; fait le passage entre les différents registres décimal, fraction, pourcentage).

Validation d'énoncés

Nicolas exerce un contrôle sur la validation d'énoncés : repère les cas où il y a une infinité de possibilités, fait appel à l'arithmétique. Par contre, dans le questionnaire du début et de la fin, il énonce que l'égalité $(a^2+b^2)^3 = a^6+b^6$ est toujours vraie (cf. point 4.7.2).

- *Résolution de problèmes : que nous montre l'analyse du questionnaire et de l'entrevue?*

Nous pouvons souligner une évolution dans la résolution du problème *Cafés-croissants*. Au début de l'expérimentation Nicolas conclut qu'une tasse de café coûte 90 sous et un croissant 60 sous (sans démarche ni explications). Dans l'entrevue l'élève précise que ça marcherait si dans le premier énoncé ça coûtait 2,50$. Alors qu'à la fin, nous notons chez l'élève une recherche de sens :

« Ça me gosse le premier n'est pas proportionnel. Un croissant : 50 sous, un café : 1 dollar. À l'achat de 3 croissants ou plus, rabais de 10 sous par croissant. »

Analyse du contrôle exercé par Miranda sur l'activité mathématique au cours de l'expérimentation

<table>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur le processus de résolution de problèmes</th></tr>
<tr><td colspan="2">- Contrôle sur la représentation du problème (elle perçoit la structure multiplicative du problème)
- Engagement réfléchi (elle donne une interprétation du problème des abeilles en contexte)
- Pas de contrôle sur la structure du problème : Essaie d'appliquer une des stratégies vues dans les robots et les abeilles (ajouter jour après jour), n'y arrive pas et conclue en donnant une formule à laquelle elle essaie de donner du sens.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur l'écriture</th></tr>
<tr><th>Sens de la notation en lien avec le travail sur le signe d'une expression</th><th>Validation d'un énoncé (se prononcer sur le caractère vrai/faux)</th></tr>
<tr><td>En arithmétique
- Travaille sur un exemple particulier pour expliquer la loi générale sur la parité des exposants. Elle passe ainsi par le calcul. C'est un contrôle qui s'exerce différemment sur un exemple numérique particulier, il n'y a pas de passage à une généralisation. (16 mars)

- Contrôle syntaxique (utilisant une règle pour se prononcer liée à la parité des exposants) (16 mai).
- Bonne interprétation de l'écriture exponentielle (30 mai).
- Voit l'égalité $1^{-2} = 1$ (10 mai)

En algèbre
- Contrôle limité qui porte sur le calcul, ne généralise pas. (25 mai)
- Décode les éléments implicites $a = a^1$ (3 mai).</td><td>Quand la base est une lettre
- Contrôle sur un exemple particulier mais ne considère pas toutes les possibilités. (16 mars).
- Une entrée sur le sens différent de l'écriture de manière générale : x^2 c'est $x.x$ alors que $2x$ c'est $x+x$ (29 mai).

Énoncés présentant deux contraintes
Un contrôle limité avec deux contraintes (trouve un seul couple possible) (16 mars).</td></tr>
</table>

Simplification d'expressions algébriques	***Perception des erreurs***
- Trouve un facteur commun mais pas le plus efficace. - Contrôle sur le résultat : il va en rester le plus en bas car c'est le plus gros. - Erreur $\frac{6y}{2y} = 4y$ (elle fait *6y - 2y)* (2 mai). - Confusion avec l'addition de fractions $\frac{3xy}{6x^5} = \frac{3x}{6x^5} \cdot \frac{y}{6x^5}$ (16 mai). - Contrôle syntaxique sur la simplification d'expressions algébriques en algèbre à part celles qui présentent un dénominateur avec un signe moins. (30 mai). - Décode les éléments implicites (exposant 1 et facteur 1). - Erreur $\frac{4bc}{4bc} = 0$	Perçoit l'erreur : un nombre divisé par lui-même ne donne pas 0.

Qu'est-ce qui se dégage de cette analyse sur le contrôle exercé par l'élève au cours de l'expérimentation? Quel éclairage apportent ici les données complémentaires du questionnaire et de l'entrevue?

- *Sur le processus de résolution de problèmes*

Miranda perçoit la structure multiplicative du problème mais il n'y a pas de passage vers une écriture plus efficace. Elle présente des difficultés lors de la résolution du problème des bactéries, nous sentons qu'il y a une confusion entre deux démarches mises de l'avant dans les problèmes de robots et des abeilles. Pour le problème des bactéries, elle commence par ajouter au fur et à mesure les bactéries obtenues jour après jour mais arrête son calcul au cinquième jour, perdue et finit par donner une formule à laquelle elle colle un sens :

> « $(n^2 \times 2)$ exposant 2 car on a deux bactéries au départ et on multiplie ensuite par 2 car c'est multiplié par 2 chaque jour. »

Que nous montre l'analyse des questionnaires et des entrevues?

En ce qui a trait à la composante vérification, nous pouvons noter qu'elle n'apparaît pas dans l'expérimentation mais elle est présente dans le questionnaire écrit (problème des *Trains*). Après une résolution algébrique, l'élève vérifie son résultat en remplaçant dans l'équation de départ (fait au début et à la fin). Nous pouvons noter une recherche de sens dans le problème des *Cafés-croissants.* Au début de l'expérimentation, l'élève fait plusieurs essais et conclue que ça ne marche pas. En entrevue, elle explique qu'il y a peut-être des taxes, ça a l'air non proportionnel, peut-être qu'il y a des coupons rabais. Ainsi l'élève construit un sens au problème que l'on retrouve à la fin de l'expérimentation :

> « Dans le restaurant, ils font des rabais mystères n'importe quand. C'est pour ça que ça ne marche pas. Tarifs spéciaux : café 0,45 et croissant 0,95 ou café 0,5 et croissant 0,90. »

- *Sur le contrôle sur l'écriture*

Nous pouvons remarquer que cette élève bouge le long de l'expérimentation. Au début, elle est centrée sur les nombres, utilisant des exemples particuliers *(dans le sens accordé à la notation et dans la validation d'énoncés).* Il y a par la suite un passage vers le général : elle utilise une règle sur la parité des exposants (contrôle syntaxique), elle donne du sens à la notation de manière générale (signification de $2x$ et de x^2). Mais dans le questionnaire écrit, Miranda répond que l'égalité est toujours vraie mais qu'il faut faire attention quand a et b sont remplacés par des chiffres (nous ne comprenons pas ce qu'elle essaie d'expliquer). Nous pouvons remarquer qu'elle exerce à la fois un contrôle sémantique (décode les éléments implicites) et syntaxique (simplifications d'expressions) sur l'écriture qu'elle développe pendant l'expérimentation. Nous voyons ainsi pour le contrôle syntaxique une nette amélioration des règles de simplification basées sur les lois des exposants. Toutefois, comme c'est le cas pour Christine, les expressions avec des dénominateurs négatifs posent problème.

Qu'apporte ici l'éclairage du questionnaire?

Nous pouvons remarquer une confusion chez l'élève autour de la conception « deux lettres différentes représentent deux nombres différents. » Au début de l'expérimentation, Miranda explicite que

« $x = y$ c'est faux, les disques et les livres n'ont pas le même prix. »

À la fin, l'élève écrit :

« *x et y* sont en effet le même nombre mais ils ne représentent pas le même objet (des livres, des disques). »

Nous sentons qu'elle donne ici du sens à l'écriture mais finit par conclure :

« Donc si on additionne ça ne fonctionne pas… on ne peut pas mélanger des pommes et des oranges »,

reprenant une image semblable à celle donnée par l'enseignante autour des termes semblables.

Analyse du contrôle exercé par Julie sur l'activité mathématique au cours de l'expérimentation

<table>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur le processus de résolution de problèmes</th></tr>
<tr><td colspan="2">- Anticipation de l'ordre de grandeur avant de connaître le résultat.
- Choix de la stratégie efficace (passage vers l'exponentielle, Robots)
- Un certain engagement réfléchi (propose une interprétation de la situation des abeilles)
- Elle perçoit la structure multiplicative (un certain contrôle sur la construction de la représentation du problème) mais calcule juste jusqu'au quatrième jour, elle s'arrête là (abeilles).
- Dans le problème des bactéries, elle donne deux réponses 6 et 25 jours (la dernière réponse provenant d'un passage vers l'écriture exponentielle). N'exerce pas de vérification, retour au problème.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur l'écriture</th></tr>
<tr><th>Sens de la notation en lien avec le travail sur le signe d'une expression</th><th>Validation d'un énoncé (se prononcer sur le caractère vrai/faux)</th></tr>
<tr><td>En arithmétique
- Contrôle syntaxique exercé sur</td><td>Quand la base est une lettre
Utilisation d'un contre-exemple (une</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>l'écriture exponentielle (utilise une règle pour se prononcer sur le signe d'une expression avec des exposants, liée à la parité des exposants)

- Difficultés contrôle sémantique : avec la combinaison de l'exposant 0 et d'une expression où le signe moins est entre parenthèses $(-2)^0$.

Évolution
- Contrôle sémantique sur le sens de la notation (30 mai)

En algèbre
- Contrôle sémantique sur l'écriture, un contrôle sur le signe du résultat lié au symbolisme (25 mai)</td>
<td>entrée sur le vrai / faux par les nombres)

Énoncé avec deux contraintes
Voit qu'il existe une infinité de valeurs qui satisfont les deux contraintes.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Simplification d'expressions algébriques</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">- Confusion entre le facteur multiplicatif et l'exposant $\frac{2xy(\div 2)}{2y(\div 2)} = \frac{x^2}{y}$ (2 mai)
- Contrôle syntaxique sur la simplification d'expressions algébriques avec des exposants négatifs (10 mai).
- Contrôle syntaxique exercé sur tout type d'expressions (30 mai).</td>
</tr>
</table>

Qu'est-ce qui se dégage de cette analyse sur le contrôle exercé par l'élève au cours de l'expérimentation? Quel éclairage apportent ici les données complémentaires du questionnaire et de l'entrevue?

- *Sur le processus de résolution de problèmes*

Nous pouvons remarquer que l'expérimentation autour de la résolution de problèmes n'a pas été très bénéfique pour Julie. Dans le premier problème *(Robots)*, l'élève anticipe l'ordre de grandeur du résultat et fait le choix d'une stratégie efficace. Dans le deuxième problème *(abeilles)*, on sent un contrôle sur la représentation du problème (repère la structure multiplicative) mais elle abandonne sa démarche. C'est dans le troisième problème (bactéries) où l'élève exprime des difficultés de contrôle sur sa tâche sous l'angle de la vérification. Julie donne deux réponses au problème et ne revient pas sur celles-ci.

Que nous montre l'analyse des questionnaires et des entrevues?

Nous constatons la même chose dans le questionnaire écrit. Au début de l'expérimentation, Julie résout le problème des *Trains* algébriquement et arrive à la réponse 21 wagons (elle exerce ainsi une vérification sur le résultat, un retour au problème) alors qu'à la fin de l'expérimentation, elle résout de la même façon mais donne comme résultat final 20,64285... wagons. Comme c'est le cas pour Miranda on sent une perte de contrôle de ces élèves quand elles arrivent au problème des bactéries. Nous regardons ceci de plus près au point 4.7.2.

Dans le problème *Cafés-croissants*, Julie réécrit simplement dans le premier questionnaire les énoncés et en entrevue elle explique qu'elle a essayé d'ajouter tous les items et tous les prix mais que ça ne lui a rien donné. Elle se lance alors dans des essais erreurs contrôlés, elle précise que ça marche pour les deux premiers énoncés mais pas pour le troisième, mais qu'elle pourrait y arriver si elle essayait encore et encore. Dans le test final elle rentre dans la résolution en essayant avec plusieurs couples de nombres (sans conclure). On a ici un indicateur de non contrôle, l'élève est dans les essais, convaincue que ça marche, elle essaie encore de nouveaux nombres dans le test final.

- Sur le contrôle sur l'écriture

Il en va autrement en ce qui a trait au contrôle sur l'écriture (on sent ici une évolution). On peut noter que Julie donne du sens à la notation exponentielle en arithmétique et en algèbre, surmontant les difficultés rencontrées au début de l'expérimentation. Un changement survient également quant à l'interprétation du symbolisme. Dans le problème de Brigitte au début de l'expérimentation, Julie donne deux interprétations possibles de l'équation :

« 2 livres et 6 disques coûtent 40 dollars. »

« 2$ x un certain nombre de livres + 6$ x un certain nombre de disques = 40$ »

À la fin de l'expérimentation, l'élève commence par écrire la première phrase mais elle la barre et choisit la deuxième. Elle exerce ainsi une bonne interprétation du symbolisme à la fin de l'expérimentation.

Elle possède également du contrôle syntaxique, étant habile dans la simplification de tout type d'expressions à la fin de l'expérimentation.

Finalement, face à la validation d'énoncés on sent une certaine confusion chez Julie. Dans le premier questionnaire, elle explicite que l'égalité $(a^2+b^2)^3 = a^6+b^6$ est toujours vraie. Pendant l'expérimentation, nous pouvons par contre constater qu'elle exerce du contrôle sur la validation d'énoncés, ce contrôle est mis à profit dans la résolution de la tâche à la fin du questionnaire où elle remplace *a* et *b* par des nombres. Cependant elle finit par dire que l'égalité est vraie. Dans l'entrevue de la fin de l'expérimentation *(nous avons exceptionnellement demandé des éclaircissements à l'élève sur ce numéro car nous avions du temps)*, l'élève explique pourquoi cette égalité est toujours vraie, elle précise qu'elle a essayé avec toutes sortes de nombres et que ça marchait même avec des nombres négatifs. Elle fait un exemple devant la chercheure : $(3^2+2^2)^3 = 3^6+2^6$ (elle distribue l'exposant dans la parenthèse et n'opère pas sur les nombres en calculant comme on aurait pu le croire). L'arithmétique dans ce cas-ci ne lui sert pas à porter un jugement sur la validité de cet énoncé et a le même statut que le symbolisme. Ce constat rejoint les observations de Lee et Wheeler (1989).

Analyse du contrôle exercé par Laure sur l'activité mathématique au cours de l'expérimentation

Contrôle sur le processus de résolution de problèmes
- *Contrôle sur la construction de la représentation* (perçoit la structure multiplicative; elle perçoit qu'il faut faire l'opération inverse de l'exponentielle pour

les abeilles). - *Vérifie le résultat et retourne au contexte* (elle arrondit à l'entier supérieur pour le problème des abeilles). - Bactéries : elle perçoit la structure multiplicative mais abandonne le calcul. Elle essaie alors de retrouver le raisonnement sur les proportions présenté par Nadia (quand elle explicite les logs), cette tentative est abandonnée, elle ne donne pas de réponse.	
Contrôle sur l'écriture	
Sens de la notation en lien avec le travail sur le signe d'une expression	***Validation d'un énoncé (se prononcer sur le caractère vrai/faux)***
En arithmétique - Signification donnée à l'écriture exponentielle en lien avec les parenthèses, elle exerce un *contrôle sémantique* sur l'écriture (si on a des parenthèses c'est tout le chiffre au complet qui est à la 3). (16 mars) - Laure formule une loi générale qui permet de déterminer le signe de l'expression, elle exerce du *contrôle syntaxique* (si l'exposant est impair, toute l'expression est négative si le nombre sans l'exposant est négatif et l'exposant est pair alors c'est positif). (16 mars). - *Contrôle syntaxique sur l'écriture exponentielle* (utilise une règle pour se prononcer sur le signe d'une expression avec des exposants, liée à la parité des exposants). (16 mars). - Après : contrôle à questionner, elle calcule toutes les expressions données pour pouvoir ensuite les ordonner. - Anticipation la réponse de $\frac{1}{2^{-3}}$ sera positive car 2^{-3} ça donne un nombre à virgule donc 1 sur un nombre à virgule positif va être positif. (10 mai).	*Quand la base est une lettre* - *Contrôle sémantique sur l'écriture exponentielle* $(x+y)^3 = (x+y).(x+y).(x+y)$ (16 mars) - *Contrôle sur le sens de l'écriture exponentielle* (*m^a* c'est le nombre *m* qui est multiplié par lui-même *a* fois alors que *ma* c'est *m* fois *a).* (16 mars) - Utilisation d'un contre-exemple (une entrée sur le vrai / faux par les nombres) *Énoncé avec deux contraintes* Voit que l'égalité est vraie pour une infinité de valeurs

En algèbre - *Contrôle sémantique* sur l'écriture, un contrôle sur le signe du résultat lié au symbolisme.	
En lien avec le travail sur les exposants négatifs et division d'exposants	***Simplification d'expressions algébriques***
- *Contrôle syntaxique* (application d'une règle), si j'ai un divisé alors je soustrais les exposants.	- *Contrôle syntaxique* mais fait l'erreur $\frac{4ab}{4ab} = 0$ (3 mai) - *Contrôle syntaxique* exercé sur la simplification des expressions avec des additions au numérateur. - *Contrôle syntaxique* sur la simplification d'expressions algébriques en algèbre avec des exposants négatifs.

Qu'est-ce qui se dégage de cette analyse sur le contrôle exercé par l'élève au cours de l'expérimentation? Quel éclairage apportent ici les données complémentaires du questionnaire et de l'entrevue?

- Sur le processus de résolution de problèmes?

Nous pouvons constater que Laure ne fait pas le choix d'une écriture efficace (exponentielle), elle opère avec des multiplications successives. L'élève a résolu le problème des abeilles en faisant la racine cinquième qu'elle a explicitée en classe. Cette stratégie a été jugée très intéressante par l'enseignante qui annonce que ce n'était pas tout à fait la racine cinquième qu'on doit faire mais plutôt les logarithmes (elle a alors expliqué les logs en avant, en utilisant une proportion). Nous pensons que sous l'effet de cette intervention, l'élève a essayé de retrouver ce raisonnement dans le problème des bactéries. Tout d'abord, elle commence à résoudre le problème en faisant des multiplications successives mais abandonne cette démarche (qu'elle barre) pour écrire une proportion $\frac{5}{32} = \frac{x}{33000000}$ qu'elle finit par barrer ne sachant sûrement pas comment continuer. Finalement aucune réponse n'est donnée pour ce problème. Nous pouvons ainsi remarquer ici un indice de non contrôle.

Que nous montre ici l'analyse du questionnaire?

Dans le problème des trains, il est intéressant de voir qu'au début de l'expérimentation, Laure résout le problème algébriquement et donne comme réponse 21 wagons (vérification, retour au problème). Dans le test écrit final, elle fait la même démarche qu'elle finit par barrer. Elle essaie alors de résoudre le problème d'une autre façon (par essais erreurs contrôlés) et remarque ainsi, en ayant procédé de deux façons différentes que la première démarche et le résultat obtenus étaient « bons finalement ». L'élève utilise ici un moyen de vérification qui s'appuie sur une résolution du problème autrement en utilisant une autre stratégie.

- *Sur le contrôle exercé sur l'écriture*

Laure possède un bon contrôle sémantique sur l'écriture à la fois en arithmétique et en algèbre. Elle est axée sur le sens, apportant une réflexion sur l'écriture exponentielle. Cette recherche de sens est présente à la fin de l'expérimentation dans le problème *Cafés-croissants*. Dans le premier test, Laure essaie avec plusieurs nombres, elle efface puis recommence sans donner de réponse. Dans l'entrevue, elle fait d'autres essais erreurs et finit par conclure qu'elle y arriverait si elle avait toute la nuit devant elle. Au test final, elle donne du sens à cette situation en disant que le restaurant offre des rabais :

« 1 croissant 1,20$; 1 café 0,77$. Rabais : à l'achat de 2 croissants, le café ne coûte que 0,30$. »

Ce sens accordé à l'écriture est également présent lors de la validation d'énoncés. Toutefois il est surprenant de constater que dans le questionnaire on ne retrouve pas ce contrôle exercé sur la tâche, l'élève écrit au début et à la fin de l'expérimentation :

« Toujours vrai car c'est une addition donc les 2 exposants ne peuvent pas s'additionner mais avec les parenthèses on peut multiplier les exposants 2 par 3. En gros $(a^2+b^2)^3 = a^{2\times 3}+b^{2\times 3}$. »

Par ailleurs, l'élève possède un bon contrôle syntaxique sur la simplification d'expressions avec des exposants.

Analyse du contrôle exercé par François sur l'activité mathématique au cours de l'expérimentation

<table>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur le processus de résolution de problèmes</th></tr>
<tr><td colspan="2">- Anticipation de l'ordre de grandeur du résultat avant la résolution
- Choix d'une stratégie efficace (passage à l'exponentielle)
- Vérifie, retour au problème (invalide certaines stratégies en utilisant l'ordre de grandeur, en revenant sur le sens de la réponse en contexte, retour au contexte)
- Contrôle sur la construction de la représentation (perçoit qu'il faut faire l'opération inverse de l'exponentielle dans le problème des abeilles).
- Une mauvaise interprétation de l'écriture 5^6 (voit des abeilles qu'il faut retrancher car déjà comptées dans le calcul).
- Dans le problème des bactéries : fait la racine carrée de 33 millions puis barre. Il écrit ensuite $2+2^2+2^3+2^4+....+2^{34}=33553916$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Contrôle sur l'écriture</th></tr>
<tr><th>Sens de la notation en lien avec le travail sur le signe d'une expression</th><th>Validation d'un énoncé (se prononcer sur le caractère vrai/faux)</th></tr>
<tr><td>- Bonne réflexion autour de l'écriture exponentielle en arithmétique.</td><td>Quand la base est une lettre
Utilisation d'un contre-exemple (une entrée sur le vrai / faux par les nombres) (pour $2x$ et x^2)

Énoncés avec deux contraintes
Voit que l'égalité est vraie pour une infinité de valeurs</td></tr>
<tr><th>En lien avec le travail sur les exposants négatifs et division d'exposants</th><th>Difficultés dans le symbolisme</th></tr>
<tr><td>- Construit un sens aux exposants négatifs $1\div 5\div 5\div 5$
- Fait un lien entre son écriture et celle</td><td>Écriture 3+x non achevée, il écrit $3x$.</td></tr>
</table>

de Carmen et voit que cette dernière n'est pas efficace $5^{-3} = 5 \div 5 \div 5 \div 5 \div 5$ et $1 \div 5 \div 5 \div 5$.	
Simplification d'expressions algébriques	
- *Contrôle syntaxique* sur la simplification d'expressions algébriques de tout type. - *Invalide* les propos d'un autre élève (ce n'est pas un plus mais un multiplié) - Erreur $\frac{4ab}{4ab} = 0$ (à deux reprises, le 2 et le 30 mai)	

Qu'est-ce qui se dégage de cette analyse sur le contrôle exercé par l'élève au cours de l'expérimentation? Quel éclairage apportent ici les données complémentaires du questionnaire?

- *Sur le processus de résolution de problèmes*

François possède un bon contrôle sur le processus de résolution de problèmes, il anticipe, vérifie, invalide des démarches ressorties, retourne au contexte et procède au choix d'une écriture efficace. Comme Laure, il résout le problème des bactéries en utilisant la racine carrée, c'est ce qu'il essaie de faire dans le problème des bactéries mais s'aperçoit que ça ne marche pas (vérification du résultat). Dans le problème des trains nous pouvons noter chez cet élève une évolution au niveau de la vérification. Dans le test au début de l'expérimentation, il résout le problème arithmétiquement mais ne contrôle pas tout à fait la résolution :

> $12+16=28$ (il considère ainsi une locomotive ayant des wagons de 28 places).
> $578 \div 28 = 21$ (il trouve ici le nombre de wagons).
> $21 \div 2 = 10{,}5 = 11 wagons / locomotive$ (il divise en 2 ce qui est une erreur). On peut toutefois remarquer qu'il arrondit son résultat, il y a donc un retour au problème.

À la fin de l'expérimentation, l'élève résout algébriquement mais en posant une équation différente des autres élèves de la classe : x représente ici le nombre de passagers dans les wagons à 12 places, $1\frac{1}{4}x$ représente alors le nombre de passagers dans les wagons à 16 places (puisque 16 représente le $1\frac{1}{4}$ de 12). Ainsi $x + 1\frac{1}{4}x = 578$, $x = 256{,}88$ (qu'il arrondit à 257). Il suffit ensuite de diviser par 12 pour avoir le nombre de wagons. François obtient ainsi 11 wagons.

- *Sur le contrôle sur l'écriture*

Nous pouvons constater que François possède du contrôle invalidant les démarches de ses camarades et fait des liens. Il exerce également un contrôle sémantique et syntaxique sur l'écriture. L'erreur $\frac{4ab}{4ab} = 0$ semble toutefois persistante. La conception autour de l'écriture non achevée n'apparaît plus à la fin de l'expérimentation (dans le test du 30 mai). Dans le test écrit final, François interprète correctement l'écriture, il écrit $2L + 6D = L + L + D + D + D + D + D + D$, mais écrit après 2 livres et 6 disques! Il possède également la conception « deux lettres différentes représentent deux valeurs différentes » au début et à la fin de l'expérimentation. Autour de la validation d'énoncés, il est encore une fois surprenant de constater comme pour Christine qu'il y a un revirement. Au début de l'expérimentation, François annonce que l'égalité $(a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6$ n'est jamais vrai en donnant un contre exemple (*a= 2515956 et b=1046856)* alors qu'à la fin de l'expérimentation il écrit que cette égalité est toujours vraie.

Analyse du contrôle exercé par Zaïa sur l'activité mathématique au cours de l'expérimentation

Contrôle sur le processus de résolution de problèmes
- *Anticipation de l'ordre de grandeur* du résultat avant la résolution. - Stratégie erronée : (2.n).39 qui n'a pas de sens dans le contexte *(Robots).* - Perçoit la structure multiplicative du problème (*contrôle sur la représentation de la situation*) dans le problème des abeilles et dans celui des bactéries. - Perte du contexte (elle se rapporte à des personnes et pas à des abeilles)

<table>
<tr><td colspan="2">- CHANGEMENT dans le problème des bactéries, passage de multiplications successives (fois 2, fois 2,...) à l'écriture exponentielle en lien avec un calcul systématique $2^2, 2^3, 2^4, 2^5,...$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contrôle sur l'écriture</td></tr>
<tr><td>Sens de la notation en lien avec le travail sur le signe d'une expression</td><td>Validation d'un énoncé (se prononcer sur le caractère vrai/faux)</td></tr>
<tr><td>En arithmétique
- Difficultés contrôle sémantique : avec la combinaison de l'exposant 0 et d'une expression où le signe moins est entre parenthèses.
- Bonne réflexion sur la réflexion autour de l'écriture exponentielle (avec des moins, parenthèses...) (30 mai)

En algèbre
- Contrôle sémantique sur l'écriture, un contrôle sur le signe du résultat lié au symbolisme</td><td>Énoncé avec deux contraintes
Un contrôle limité avec deux contraintes (trouve un seul couple possible)</td></tr>
<tr><td colspan="2">En lien avec le travail sur les exposants négatifs et division d'exposants</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Contrôle syntaxique $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$ (fait des liens avec ce qui a été fait précédemment).</td></tr>
<tr><td>Simplification d'expressions algébriques</td><td>Difficultés dans le symbolisme</td></tr>
<tr><td>- Difficultés dans la simplification d'expressions en algèbre avec des exposants négatifs (10 mai).
- Erreur $\frac{4bc}{4bc} = 0$
- Contrôle syntaxique sur tout type d'expressions (30 mai)</td><td>- Erreur : $x^2 = 2x$ (3 mai)
- Mauvaise interprétation de l'écriture $2x = xx$ et $6y = yyyyyy$ (3 mai)</td></tr>
</table>

Qu'est-ce qui se dégage de cette analyse sur le contrôle exercé par l'élève au cours de l'expérimentation? Quel éclairage apportent ici les données complémentaires du questionnaire et de l'entrevue?

- Sur le processus de résolution de problèmes

On peut remarquer que Zaïa exerce un contrôle limité dans la résolution de problèmes au début de l'expérimentation, mais on sent une nette progression. Dans le problème sur les *Robots*, elle donne comme réponse une formule qui n'a pas de sens en contexte. Dans le problème des abeilles, elle acquiert un contrôle sur la représentation du problème, percevant la structure multiplicative même si elle dit qu'il s'agit de personnes au lieu d'abeilles (quitte momentanément le contexte). Dans le problème des bactéries, Zaïa passe à une écriture efficace (l'exponentielle). Toutefois, Zaïa n'a pas développé une attitude de vérification. Dans le problème des *Trains*, l'élève donne comme résultat 20,64 wagons (pas de vérification ni de retour au problème), le problème est résolu de façon algébrique. À la fin de l'expérimentation, Zaïa résout le problème par essais erreurs contrôlés et donne comme réponse 20 wagons, on voit ici un changement car elle donne un nombre entier de wagons.

- *Sur le contrôle sur l'écriture*

Zaïa acquiert pendant l'expérimentation un contrôle sémantique sur l'écriture en arithmétique et en algèbre. Elle développe également un contrôle syntaxique sur la simplification d'expressions avec des exposants. À la fin de l'expérimentation, nous ne retrouvons plus les erreurs commises sur le symbolisme. L'interprétation de la lettre change également. Dans le test écrit, au début de l'expérimentation, « L et D » désignent pour Zaïa des livres et des disques alors qu'à la fin de l'expérimentation, elle donne du sens à l'équation proposée de la façon suivante :

« Un nombre de livres qui coûtent 2$ et un nombre de disques qui coûtent 6$ ».

Dans ce même problème, nous pouvons constater qu'elle possède la conception « deux lettres différentes représentent deux nombres différents. » Elle ne donne pas de réponse dans le problème *Cafés-croissants*, précisant qu'elle ne sait comment le faire. En entrevue (au début de l'expérimentation), Zaïa veut résoudre le problème par l'algèbre mais elle ne sait pas comment procéder, elle fait donc des essais erreurs et demande « Vous êtes sûre que vous n'avez rien oublié? »,

« Comment peut-on savoir? ». Elle finit par donner un résultat en utilisant les deux premiers énoncés. Lors de l'entrevue de la fin de l'expérimentation, l'élève précise qu'elle ne sait vraiment pas comment le faire, qu'elle a déjà essayé plein de choses et personne ne sait le faire. Il n'y a donc pas d'évolution du point de vue du contrôle.

En ce qui concerne la composante validation d'énoncés, on constate une évolution dans l'utilisation d'une des lois sur les exposants. Au début, elle précise qu'il y a une erreur de calcul dans l'égalité car $(a^2+b^2)^3 = a^{2^3} + b^{2^3} = a^8 + b^8$. À la fin elle précise que l'égalité est toujours vraie car $(a^2+b^2)^3 = a^{2\times3} + b^{2\times3} = a^6 + b^6$.

4.7.2 Quelques éléments de discussion autour des indicateurs de contrôle chez les élèves

Commentaires autour du contrôle exercé sur le processus de résolution de problèmes

Il se dégage de l'analyse des productions et du discours de ces huit élèves, une recherche de sens qui a été encouragée sans aucun doute par l'enseignante qui a axé beaucoup dans sa pratique sur la compréhension de ce qui s'y fait. Nous le voyons dans le problème *Cafés-croissants* où une grande majorité de ces 8 élèves donne du sens au problème en affluant le restaurant de rabais (essayant de donner un sens possible à la contradiction).

Dans l'expérimentation, il semble toutefois y avoir un moment clé de « perte de contrôle » avec le problème des bactéries. Nous faisons l'hypothèse que l'intervention qui a eu lieu autour des problèmes des robots et des abeilles a causé quelques confusions chez certains élèves. En effet, dans le problème des abeilles, une stratégie est mise de l'avant par l'enseignante, celle de la racine cinquième. Elle utilise cette démarche pour aller plus loin et explique aux élèves comment on calcule les logarithmes. Nous pensons que l'approche de ce contenu a mélangé certains élèves qui face au problème des bactéries (dont la structure est semblable) ont voulu retrouver le raisonnement avec les logarithmes mais n'y sont pas arrivés, ils ont majoritairement fini par abandonner la résolution alors qu'ils possédaient les outils pour bien résoudre le problème. Une autre démarche a probablement causé des confusions. Dans les problèmes *Robots* et *Abeilles*, certains élèves ajoutent les robots ou les abeilles à chaque étape, cette démarche a suscité de vives discussions dans la classe et de l'incompréhension chez la plupart des élèves.

Commentaires autour du contrôle exercé sur l'écriture

Deux composantes ont été développées pendant cette expérimentation : le contrôle sémantique et le contrôle syntaxique. La majorité des élèves donnent du sens à l'écriture, comme le souligne l'enseignante (voir 4.2.4), la stagiaire s'est fait reprendre quand elle a fait une erreur au tableau et elle a constaté que les élèves font beaucoup moins d'erreurs qu'auparavant. La grande majorité des élèves sont également habiles dans la simplification d'expressions de tout genre, dans l'application de différentes règles. Nous pouvons noter à cet effet qu'à la fin de l'expérimentation (dans le test du 30 mai) les erreurs et difficultés des élèves autour du symbolisme n'apparaissent plus ($x^2 = 2x$; concaténation ; l'addition de termes non semblables et l'écriture achevée). Cependant la conception « deux lettres différentes ne représentent pas les mêmes nombres » persiste après l'expérimentation et revient constamment dans les questionnaires des élèves. Nous pensons que l'intervention qui a eu lieu à cet effet n'a pas permis aux élèves de contrer cette conception, l'enseignante n'arrivant pas à trouver des arguments convaincants (4.3.3). Dans le contrôle syntaxique, on note toutefois certaines dérives reliées aux expressions ayant un signe moins au dénominateur. Nous pensons que cette difficulté est reliée au sens qu'accordent les élèves à l'expression $\frac{2}{-3}$ qui n'est pas vue comme un seul nombre et leur difficulté à percevoir l'équivalence de cette écriture avec $\frac{-2}{3};-\frac{2}{3}$. À la fin de l'expérimentation certains élèves annulent de façon abusive $\frac{4ab}{4ab}=0$, cette difficulté n'a pas été surmontée dans l'expérimentation.

Finalement, un dernier point reste en suspens autour de la validation d'énoncés. Unanimement nos 8 élèves disent, à la fin de l'expérimentation, que l'égalité $(a^2+b^2)^3=a^6+b^6$ est toujours vraie et justifient pour la plupart en distribuant l'exposant à l'intérieur de la parenthèse. De plus, pour deux d'entre eux on note une régression puisqu'au début de l'expérimentation ils avançaient que l'égalité n'était jamais vraie en donnant des contre exemples. Pourtant, tous ces élèves exercent un contrôle sémantique autour de l'écriture. Après le travail sur les exposants, l'expérimentation a porté sur la multiplication et division de polynômes, nous pensons que ce contenu a peut-être eu un effet sur les stratégies des élèves face à la validation de ce type d'énoncés.

Dans ce chapitre (cf. parties 4.1.4, 4.2.5, 4.3.4, 4.4.3, 4.5.3.3, 4.5.4.1, 4.6.4) une théorisation émerge venant éclairer une didactique d'intervention autour des composantes du contrôle, des critères en arrière du choix des tâches du point de vue du contrôle, des indicateurs de contrôle chez les élèves et des stratégies d'intervention favorisant le possible développement du contrôle. Nous allons dans le prochain chapitre revenir sur cette théorisation émergente (dans une analyse transversale) en la confrontant à ce que nous avait permis de dégager l'analyse théorique a priori et ce que nous savions sur le contrôle (cf. cadre théorique).

CHAPITRE V

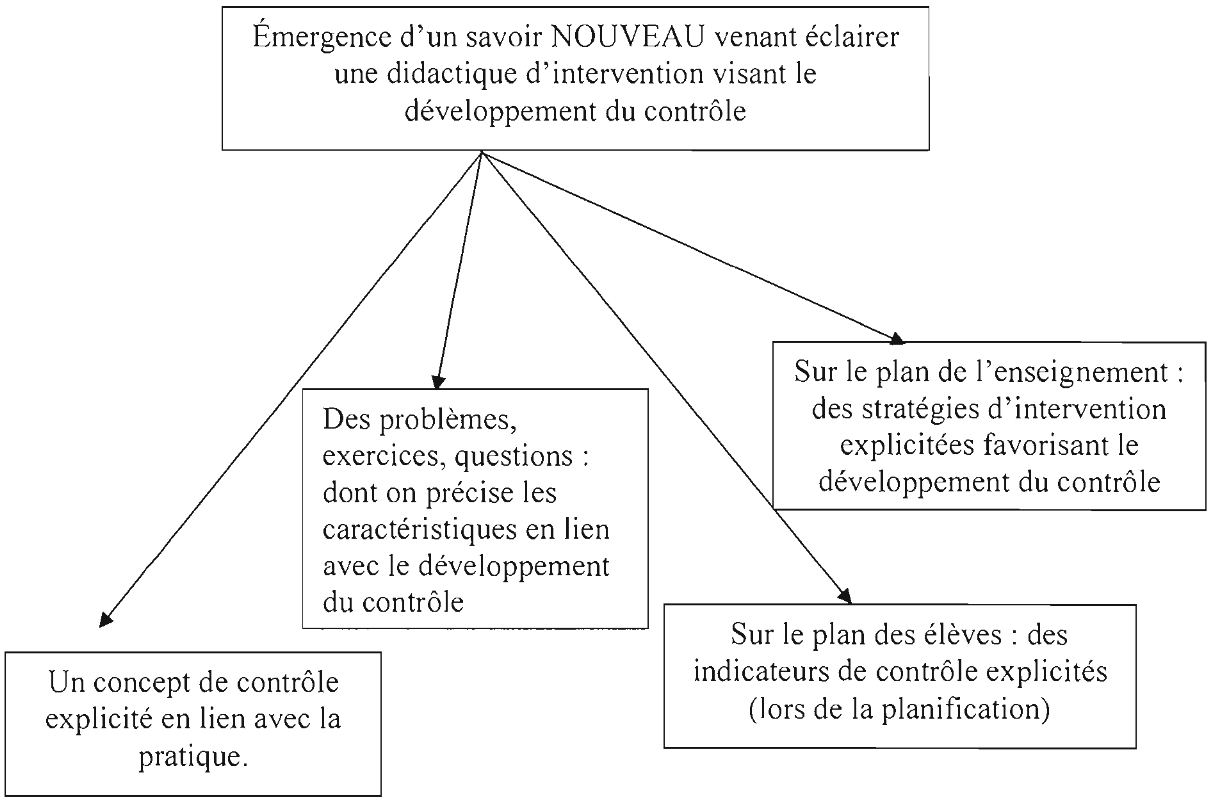
INTERPRÉTATION

Un regard transversal sur l'analyse des différents blocs menée au chapitre 4 nous conduit à préciser une didactique d'intervention (dans le contexte particulier d'un travail sur les exposants) visant le développement du contrôle chez les élèves, sous quatre angles : 1) ce que recouvre le contrôle, ses différentes composantes telles qu'elles apparaissent explicitées dans la pratique (lors des rencontres réflexives); 2) les éléments des tâches (proposées et redéfinies) susceptibles de favoriser une activité de contrôle; 3) les stratégies d'intervention (autour de ces tâches) qui favorisent une activité de contrôle; 4) des indicateurs possibles de contrôle de la part des élèves (dans la classe, autour de ces tâches).

Dans ce chapitre, nous reviendrons sur la théorisation qui émerge sur une didactique d'intervention (à propos des exposants) visant le développement du contrôle, en la confrontant à ce que nous savions sur le plan théorique avant l'expérimentation (cf. chapitre 2). Cette confrontation nous conduira à revenir notamment sur le concept de contrôle (la conceptualisation nouvelle qui en émerge) ainsi que sur une caractérisation des situations susceptibles de développer le contrôle. D'autres éléments, complètement nouveaux, seront aussi mis en évidence en regard notamment des indicateurs de contrôle de la part des élèves et des stratégies d'intervention.

Élaboration d'une didactique d'intervention sur les exposants visant le développement du contrôle chez les élèves

L'analyse des différents blocs nous a conduit à préciser une théorisation émergente à travers 4 sous-catégories dont nous avons précisé antérieurement les éléments.



Nous reviendrons maintenant sur chacune de ces 4 sous-catégories en les confrontant à l'analyse théorique que nous en avions menée antérieurement, pour pousser plus loin la conceptualisation nouvelle qui en émerge.

5.1 Une conceptualisation nouvelle du contrôle au croisement d'une didactique de recherche et d'une didactique praticienne

Après une analyse théorique menée selon les perspectives sociologique, psychologique, en éducation mathématique, mathématique et didactique, nous avions retenu une définition du contrôle (cf. 2.2) que nous reprenons ci-dessous :

> L'activité de *contrôle* est associée pour nous à un processus qui se développe, se construit sur du *long terme* chez l'élève.
>
> Le contrôle se traduit par :
>
> - une *réflexion* de la part de l'élève, sur toute action, sur tout choix tout au long de la tâche : au début, en cours ou à la fin de la résolution.
> - la capacité à *prendre des décisions* de façon réfléchie, rationnelle.
> - une *prise de distance* par rapport à la résolution.
> - le recours aux *fondements* sur lesquels on s'appuie pour valider.
> - l'utilisation de *métaconnaissances*.

Le contrôle est présent tout au long de la résolution de la tâche :

***En amont de la réalisation* :**
Le contrôle permet une anticipation, les élèves posent a priori une condition de validité du résultat avant de le connaître. Il assure une mobilisation des connaissances en jeu, il se manifeste par une relation entre les données et le but à atteindre.

En aval de la réalisation :
Le contrôle assure un travail rétrospectif, une vérification, une validation du résultat pour dépasser le doute et acquérir une certitude. Si nécessaire, il permet un retour sur la tâche et contribue à une évaluation des décisions d'action. Il passe également par la perception des erreurs.

En début ou en cours de processus :
Le contrôle se manifeste par des prises de décision sur la direction à prendre, la stratégie la plus efficace, la moins coûteuse en temps, par des évaluations périodiques tout au long de la résolution.

Six composantes du contrôle avaient été relevées :

- Anticipation,
- Vérification / Validation
- Engagement réfléchi
- Discernement / Choix éclairé
- Recours à des métaconnaissances
- Perception des erreurs / Sensibilité à la contradiction. Capacité de dépasser la contradiction.

L'analyse émergente (cf. chapitre 4) fait ressortir plusieurs composantes du contrôle qui rejoignent ce cadre conceptuel et viennent le préciser. Ce résultat n'est pas surprenant, les tâches proposées à l'enseignante comme base de discussion ayant été élaborées par la chercheure en regard de son cadre de référence sur le contrôle. L'analyse permet toutefois d'aller plus loin, puisqu'au cœur de la discussion sur le choix des tâches, et surtout leur re-définition, la didactique de recherche (cadre de référence de la chercheure sur le contrôle) et la didactique praticienne (cadre de référence de l'enseignante qui guide sa pratique) vont se croiser. Des composantes du contrôle sont ainsi précisées, nuancées. Nous reprenons ci après ces différentes composantes telles qu'explicitées dans le cadre théorique en regard de ce que met en évidence l'analyse des données.

Différentes composantes du contrôle

Anticipation

L'anticipation selon l'analyse théorique
- Estimation de l'ordre de grandeur (Cipra, 1985)
- *Analyse préalable* des propriétés que devra posséder le résultat (l'anticipation se retrouve par exemple dans les propos suivants « si on trouve un multiple de trois, c'est bon »). Il s'agit de poser une condition de validité du résultat avant de le connaître. L'anticipation amène une vérification du résultat (Coppé, 1993).

L'anticipation issue de l'analyse émergente
- *Anticipation de l'ordre de grandeur*, qui favorise un *retour sur la réponse, sur le caractère pertinent de cette réponse en lien avec le problème, un retour sur le problème* (*Analyse du Bloc 1*, dans la formulation du problème des robots, la supérieure regarde l'horloge et court, alarmée jusqu'à l'usine amène à anticiper que le nombre de robots doit être très grand) (C et E).
- *Anticipation* de la nature du nombre obtenu (positif ou négatif) (C et E), (*Analyse du Bloc 2*, autour de la réflexion sur le signe de $-(-5^3)$).

L'anticipation se retrouve autant dans le travail sur la résolution de problèmes que dans le travail sur l'écriture. Elle est associée à l'estimation de l'ordre de grandeur, à l'estimation de la nature du nombre obtenu. Cette composante est intimement liée à un retour sur la réponse en lien avec la question, le problème posé. Les propos de la chercheure et de la praticienne se rejoignent ici, elles s'expriment toutefois différemment du cadre théorique qui associe cette anticipation au fait de poser de manière plus large une condition de validité du résultat a priori avant même de le connaître (Coppé, 1993). Cette condition de validité prend ici la forme spécifique d'un ordre de grandeur ou est relative à la nature du nombre obtenu. L'analyse émergente rejoint ici l'analyse théorique, l'exemplifie.

Vérification

La vérification selon l'analyse théorique
- La vérification prend place après l'exécution lors de la découverte d'incohérences avec d'autres informations données dans le problème ou le sentiment d'avoir épuisé l'espace de recherche arrivant ainsi à une impasse. La vérification se traduit par une remise en cause de la représentation de la tâche (abandon de la représentation construite et construction d'une autre représentation) (Richard, 1998).
- La vérification passe par un questionnement sur le sens de la réponse (par exemple un homme qui tire une corde ne la tirera pas en général à des vitessses supérieures à la vitesse de la lumière) (Cipra, 1985).
- L'élève se pose la question sur le caractère vrai / faux du résultat. La vérification implique un retour sur ce que l'élève a produit (Coppé, 1993).

La chercheure (Coppé, 1993) distingue deux types de vérifications, celles qui portent :

- Sur le résultat lui-même
- Sur la méthode qui a permis d'arriver à ce résultat, sur les critères de choix de cette méthode

Elle précise que la vérification peut également provenir d'une anticipation.

- La vérification permet de détecter les erreurs de calcul qui peuvent être fréquentes et provient d'une incertitude, elle permet de dépasser le doute (Hadamard, 1945/1975)

La vérification issue de l'analyse émergente

- La vérification provient d'un questionnement sur le caractère pertinent de la réponse obtenue en lien avec la question du problème. (*Analyse du Bloc 1*, dans le problème des abeilles, le résultat obtenu qui est un nombre décimal oblige à un retour au contexte). La vérification peut provenir d'une anticipation du résultat et requiert un retour au contexte (*Analyse du Bloc 1*, dans le problème des robots, le résultat 72 robots pousse à une vérification car on s'attendait à un nombre plus grand de robots provenant du fait que la supérieure panique).

- La vérification renvoie à un regard critique sur le signe d'une expression avec des exposants (à travers notamment un résultat obtenu avec la calculatrice), qui peut provenir d'une anticipation sur le signe de l'expression (*Analyse du Bloc 2*, un regard critique porté sur la calculatrice qui donnerait un résultat négatif pour l'expression $(-3)^{6}$) (E et C).

- La vérification renvoie aussi à un questionnement sur la forme générale du résultat (*Analyse du Bloc 5*, dans la simplification de l'expression $\frac{a^4}{a^7}$ on remarque qu'il va y en avoir plus en bas qu'en haut, réflexion qui peut être produite par anticipation).

Cette composante est présente à la fois dans un travail sur l'écriture et sur le processus de résolution de problèmes. Nous pouvons constater qu'il y a deux types de vérification, le premier provenant d'une anticipation (on anticipe un certain résultat et on exerce une vérification face au résultat obtenu pour le confronter à celui anticipé). Le deuxième est une vérification du résultat sans qu'il y ait eu d'anticipation préalable, on revient sur le problème, sur la question posée pour relever si le résultat obtenu a du sens, est conforme à ce qui est demandé. L'analyse émergente permet de préciser, d'expliciter, de donner des exemples de la vérification portant sur le résultat, en lien avec le travail sur les exposants, mettant en évidence différents outils de contrôle possibles (questionnement sur la pertinence de ce résultat dans un contexte de résolution de problèmes, sur la nature de ce résultat, positif ou négatif, sur sa forme globale dans le cas d'une expression algébrique). Par exemple, la vérification est associée à une réflexion sur le signe de l'expression obtenue, rendant possible un contrôle sur la véracité de la réponse fournie par la calculatrice, ou à une réflexion sur la forme de l'expression que l'on devrait obtenir après simplification d'expressions avec des exposants, donnant un contrôle sur la réponse (est-ce possible ou non d'avoir une telle réponse).

Validation

La validation selon l'analyse théorique
- La validation a recours à certains fondements sur lesquels on s'appuie pour dire qu'un énoncé est valide ou non, et qui permet de détecter certains erreurs (Perkins et Simmons, 1988). Par exemple, la validation d'énoncés algébriques va s'appuyer sur une coordination entre l'arithmétique et l'algèbre pour pouvoir se prononcer sur le caractère vrai ou faux de certains énoncés (exemple pour se prononcer sur la validité ou non de l'énoncé $\sqrt{(a^2+b^2)} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$, il est possible de s'appuyer sur une signification donnée à l'écriture en algèbre, notamment aux exposants et à la racine carrée, et sur un recours aux nombres et au calcul sur les nombres (Perkins et Simmons, 1988; Lee et Wheeler, 1989).
La validation issue de l'analyse émergente
- La validation d'une expression algébrique comportant une égalité va s'appuyer sur certains fondements à la fois algébriques et arithmétiques et une coordination entre les deux (*Analyse des Blocs 3 et 4,* on demande de trouver des valeurs possibles de *x, y et z* telles que $3^3 = 3^x.3^y.3^z$). - La validation d'un système requiert ici encore le passage par une coordination entre le travail algébrique et les calculs sur des nombres et demande, de plus, la prise en compte de deux contraintes (*Analyse du Bloc 3,* trouvez les valeurs de a et b telles que $a < b$ et $a^2 = b^2$). - Validation de différents énoncés passe par un jeu d'écritures équivalentes et un contrôle sur ces écritures équivalentes / flexibilité dans le passage de l'une à l'autre (*Analyse du Bloc 5,* devant la validation de l'énoncé $5^{-3} = -125$, recours à l'énoncé que l'on sait vrai $5^{-3} = 0{,}008$ et recours à des écritures équivalentes qui invalident

l'énoncé précédent $0{,}008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$).
- La validation de certains énoncés permet le dépassement de difficultés et erreurs sur l'écriture exponentielle à travers la signification reliée à l'écriture (*Analyse des Blocs 4 et 6*, les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux $5^2 = 5 + 5$; $\frac{8^5 \times 10^5}{10^2} = \frac{18^5}{10^2}; (a+b)^3 = a^3 + b^3$).

L'analyse émergente autour de la validation rejoint l'analyse théorique, pour ce qui est plus spécifiquement des expressions algébriques, sous l'angle d'une coordination entre l'algèbre et l'arithmétique. La validation d'énoncés algébriques se traduit en effet par un recours à la fois à la signification de l'écriture algébrique et à l'arithmétique à travers un calcul, permettant de contrôler certaines erreurs. L'analyse émergente apporte différents exemples de telles validations en lien avec le travail sur les exposants. De plus, cette analyse permet d'entrevoir une validation d'énoncés qui passe par une signification accordée au symbolisme, par l'utilisation d'écritures équivalentes et une flexibilité dans le passage d'une écriture à l'autre.

Nous pouvons remarquer à ce stade que les résultats de l'analyse émergente vont dans le sens de la caractérisation amenée par l'analyse théorique des trois composantes du contrôle telles que l'anticipation, la vérification et la validation. Cette analyse vient essentiellement expliciter, raffiner l'analyse théorique sur ces trois composantes, et permet de préciser les formes d'anticipation (ordre de grandeur, nature du résultat), vérification du résultat (pertinence, signe du résultat, forme globale) et validation (importance du passage d'un cadre à l'autre, du cadre algébrique au cadre arithmétique, du passage d'une écriture à l'autre dans le travail de validation en algèbre et le contrôle exercé sur cette validation) mobilisées dans cette construction conjointe en lien avec le travail sur les exposants. L'activité de contrôle semble ici associée à une flexibilité dans le passage d'un registre d'écriture à l'autre, d'un cadre à l'autre, à la prise en compte de différents regards complémentaires portés sur ce résultat (son signe, sa forme algébrique globale, sa pertinence…)

Dans le cas de l'engagement réfléchi, l'analyse émergente permet d'enrichir, de préciser cette composante.

Engagement réfléchi

L'engagement réfléchi selon l'analyse théorique
- Une prise de distance, un arrêt devant la tâche avant de résoudre, une réflexion sur l'action (Kargiotakis, 1996). *Dans le contexte de la résolution d'équations :* - L'engagement réfléchi renvoie à un travail sur le sens de résoudre une équation : le fait de trouver le ou les valeurs de x, si elles existent, qui vérifient l'égalité (une idée d'égalité conditionnelle) (Margolinas, 1989). - Elle renvoie aussi à voir la pertinence et la provenance de règles (dans la manipulation algébrique d'équations) (Margolinas, 1989). - Elle suppose une réflexion sur la nécessité d'avoir recours à un travail algébrique, une prise de décision sur l'action à entreprendre (par exemple arrivés au résultat $x-2=0$, les manipulations algébriques ne sont plus nécessaires, on sait que $x=2$ est solution).
L'engagement réfléchi issu de l'analyse émergente se caractérise par
- Un jugement réfléchi qui porte sur le sens accordé à l'égalité : voir qu'elle est conditionnelle et entrevoir tous les possibles. (*Analyse des Blocs 3 et 4*, dans certains cas il existe plusieurs valeurs qui vérifient l'égalité comme par exemple pour $3^3=3^x.3^y.3^z$, d'autres égalités admettent une seule valeur comme $5^x=5^6.5^6$ ou aucune valeur comme par exemple $2^x.2^5=2^4.2^x$) (C). - Un jugement réfléchi, un temps d'arrêt devant certaines expressions à simplifier qui causent des difficultés (*Analyse du Bloc 6*, réduction d'expressions qui ont des additions au numérateur et/ou au dénominateur, ne pas faire de simplifications abusives $\frac{a^5}{a^3+a}$)(E). (*Analyse du Bloc 6*, voir que certaines expressions ne peuvent pas se réduire en une expression ayant la même base comme par exemple 7^4-7^2) (C) - Un retour aux fondements : donner du sens aux conventions d'écriture et aux lois des exposants, savoir d'où elles viennent et pouvoir les retrouver (*Analyse du Bloc 5*, savoir que les exposants négatifs sont obtenus par extension des exposants positifs et retrouver les lois des exposants en revenant au sens de

l'écriture exponentielle, à l'écriture au long comme par exemple $(2^3)^2 = (2^3).(2^3) = 2.2.2.2.2.2 = 2^6 = 2^{2.3}$) (E).

- Un jugement réfléchi dans des contextes qui se prêtent à différentes interprétations et débouchent sur plusieurs réponses possibles : appropriation du problème en donnant du sens en contexte. (*Analyse du Bloc 1*, dans le problème des abeilles, on peut considérer que l'abeille meurt la journée où elle a été infectée ou le jour d'après ce qui donne des réponses différentes).

L'analyse émergente vient enrichir la caractérisation de l'engagement réfléchi sous l'angle du travail sur les exposants et sur le processus de résolution de problèmes. Les didactiques de recherche et praticienne se rejoignent autour d'une prise de distance, d'un arrêt devant la tâche, qu'elles expriment en termes de jugement réfléchi, d'esprit critique, avant de résoudre comme par exemple quand l'élève est face à des expressions qui ne peuvent se réduire (C) ou un temps d'arrêt marqué devant la simplification d'expressions avec des additions au numérateur et/ou au dénominateur qui sont source de difficultés (E). Nous rejoignons ici les propos de Kargiotakis à travers des exemples sur les exposants. Nous retrouvons également dans l'analyse émergente l'idée de donner du sens à l'égalité conditionnelle (Margolinas, 1989) qui se précise dans l'expérimentation à travers une considération de tous les cas possibles. L'engagement réfléchi est également associé par l'enseignante à un retour aux fondements permettant de retrouver les lois des exposants et des conventions d'écriture (rejoignant ici l'idée de voir la pertinence et la provenance de règles que nous avions dans le cadre théorique). Un élément nouveau apparaît par rapport à l'analyse théorique, l'engagement réfléchi est associé dans le contexte de la résolution de problèmes à une appropriation du problème en donnant du sens en contexte, et se manifeste dans le choix d'une interprétation du problème parmi d'autres interprétations possibles.

Discernement / choix éclairé

Le discernement, choix éclairé selon l'analyse théorique
En résolution de problèmes Capacité de voir différentes stratégies pour résoudre le problème. Capacité de faire un choix pertinent d'une stratégie appropriée, efficace, peu coûteuse en temps en ayant préalablement écarté les stratégies qui sont inappropriées (Krustetskii, 1976; Schoenfeld, 1985). *Dans un travail sur le symbolisme* Capacité de faire un choix pertinent, à écarter ce qui est inapproprié, à procéder à un traitement efficace, le sujet ayant préalablement écarté les stratégies qui sont inappropriées (Schoenfeld, 1985). Par exemple, dans le calcul de l'intégrale indéfinie $\int \frac{xdx}{x^2-9}$, le changement de variable u = $x^2 - 9$ est un choix plus efficace et économique en temps que la factorisation de $(x^2 - 9)$ ou le changement de variable $u = 3\sin\theta$.
Le discernement, choix éclairé issu de l'analyse émergente
En résolution de problèmes - Choix, discernement éclairé parmi plusieurs <u>écritures</u>, choisir celle qui est la plus efficace, plus économique en temps (E et C) (*Analyse du Bloc 1*, dans le problème des Robots, le choix portant sur l'écriture 2^{36} est plus efficace que le choix d'une écriture au long $2\times2\times2\times2\times2.....$ ou des calculs au fur et à mesure $2\times2=4;4\times2=8;8\times2=16;etc.$) - Choix, discernement éclairé parmi plusieurs <u>stratégies</u>, choisir la plus efficace celle qui permet une <u>généralisation</u> (E et C) (*Analyse du Bloc 1*, dans le problème du Placement d'argent le calcul du 10% du montant année après année amène de longs calculs fastidieux par rapport à une généralisation qui permet de multiplier par 1,1 le montant initial autant de fois qu'il y a d'années écoulées). *Dans un travail sur le symbolisme* Choix, parmi différents <u>facteurs communs</u>, du plus grand, celui qui mène vers la simplification la plus efficace, en un seul coup (E) (*Analyse du Bloc 5*, pour simplifier $\frac{a^5}{a^2}$, choisi le facteur commun a^2 permettra de simplifier en une seule étape).

Cette composante apparaît centrale étant présente à la fois dans un travail sur la résolution de problèmes et dans un travail sur l'écriture. Les didactiques praticienne et de recherche se rejoignent ici, le discernement et le choix éclairé étant associés à la fois au recours à une écriture efficace comme l'exponentielle ou le facteur commun le plus grand, au recours à une stratégie efficace qui mène, dans le cas de l'expérimentation vers une généralisation ou une simplifiacation efficace. Nous rejoignons ainsi Krustetskii et Schoenfeld.

Perception des erreurs / Sensibilité à la contradiction / Dépassement de la contradiction

Cette composante selon l'analyse théorique
La sensibilité à la contradiction est reliée à une réflexion rétroactive sur la tâche qui repose sur une négation des faits observés (et qui proviennent d'une affirmation) et est issue d'une anticipation déçue. Une construction de négations non données au début conduit au dépassement de telles contradictions (Piaget, 1974).
Cette composante issue de l'analyse émergente
- La sensibilité à la contradiction, la perception des erreurs provient d'un effet de surprise face à un résultat auquel on ne s'attendait pas, qui ne correspond pas à celui que l'on avait anticipé (*Analyse du Bloc 1*, dans le problème des Robots le résultat 72 est plus petit que celui attendu implique ici un retour au problème, à la question, à la stratégie utilisée). - La sensibilité à la contradiction, la perception des erreurs provient de l'obtention de différents résultats à un calcul qui devrait mener à un seul résultat (*Analyse du Bloc 5*, pour 5^{-3} différents résultats sont avancés comme -125 et 0,008). - Le dépassement d'une contradiction est issu d'un retour sur le sens des concepts en jeu, sur leur signification (*Analyse des Blocs 4 et 5*, pour voir que $5^2 + 5^3 \neq 5^5$ ou $10^2 \times 10^5 \neq 10^{10}$, il faut revenir à la définition de l'écriture exponentielle à travers une écriture au long).

Comme Piaget, la sensibilité à la contradiction peut provenir d'une anticipation déçue. L'analyse émergente permet d'éclairer et d'aller plus loin dans la caractérisation de cette composante du contrôle à travers différents indices qui permettent de repérer une telle sensibilité comme l'effet de surprise face à un résultat qui ne correspond pas à celui anticipé (nous retrouvons ici les propos de Piaget) et à travers l'obtention de différents résultats pour une seule expression. Dans cette deuxième catégorisation, nous pouvons constater que l'effet social est très important. En effet, c'est à travers la confrontation des résultats obtenus dans la classe qu'une telle sensibilité à la contradiction, une perception des erreurs est possible. Dans le cas très particulier du travail sur les exposants, l'analyse émergente nous présente un exemple de dépassement d'une contradiction par un retour au sens de l'écriture exponentielle.

Métaconnaissances

Les métaconnaissances selon l'analyse théorique

- Les métaconnaissances se situent à un niveau qui n'est pas le même que celui des connaissances mathématiques (définitions, théorèmes, propriétés) mais davantage celui d'une réflexion sur ces connaissances. Elles expriment un savoir sur la pertinence, l'efficacité d'une notion dans un contexte donné, sur les moyens de gérer cette notion. Par exemple, dans les nombres complexes, une connaissance serait de savoir qu'un nombre complexe peut s'exprimer dans le registre cartésien, trigonométrique ou exponentiel. Une métaconnaisssance serait de savoir que le registre cartésien est utile pour calculer des sommes de nombres complexes alors que les registres trigonométriques et exponentiels favorisent le calcul de produits et de quotients de tels nombres (Artigue, 1993).

- Les métaconnaissances permettent de déterminer les forces et les limites des différentes formes d'écriture d'une même expression (réduite, développée, factorisée) selon la tâche à effectuer. Par exemple, l'expression développée est commode pour calculer la valeur en 0 d'une expression à une inconnue car on se ramène à des additions, l'expression factorisée est quant à elle commode pour résoudre l'équation du type « expression = 0 » (Lenfant, 2002).

Les métaconnaissances issues de l'analyse émergente

Les métaconnaissances sont le fruit d'une réflexion sur la combinaison de deux ou plusieurs connaissances. (*Analyse du Bloc 5*, par exemple la décision sur le chemin à prendre vis à vis une expression à réduire s'appuie sur une combinaison de connaissances relatives à la réduction d'expressions algébriques avec des exposants et aux nombres premiers. Cette métaconnaissance se manifeste dans le choix qui est fait : si l'expression à réduire est composée de la division de deux nombres avec des exposants dont les bases ne sont pas des nombres premiers, alors la réduction de cette expression donnera une expression dont la base sera le plus petit de ces deux nombres, par exemple pour $\frac{4^3}{2^7} = \frac{2^6}{2^7} = \frac{1}{2}$, ce qui n'est pas le cas si les deux bases sont des nombres premiers, dans ce cas-ci la simplification en un seul nombre avec

un exposant n'est pas possible comme c'est le cas pour $\frac{5^2}{2^7}$).

Dans l'analyse théorique tout comme dans l'analyse émergente des données, les métaconnaissances se situent à un niveau qui n'est pas le même que celui des connaissances mathématiques, celui d'une réflexion sur les connaissances. Toutefois pour Artigue et Lenfant, elles permettent dans un contexte, une tâche donnés de déterminer l'écriture, le registre adéquat, le plus approprié pour aborder un problème, une tâche donnée, alors que dans notre analyse émergente, les métaconnaissances sont l'aboutissement d'une combinaison de plusieurs connaissances qui donne une connaissance qui se situe à un autre niveau, étant plus élaborée, plus complexe et prenant en compte différentes connaissances.

Cette confrontation entre l'analyse théorique et l'analyse émergente nous a permis de préciser certaines composantes comme l'*anticipation*, la *vérification*, la *validation* et le *discernement/choix éclairé*, les formes qu'elles pouvaient prendre, à travers des exemples en lien avec le travail sur les exposants. D'autres composantes ont été nuancées, enrichies par l'analyse émergente comme l'*engagement réfléchi*, la *perception des erreurs/ la sensibilité à la contradiction/le dépassement de la contradiction* et les *métaconnaissances*. Une nouvelle conceptualisation du *contrôle* émerge donc suite à cette confrontation entre analyse théorique et analyse émergente. Le tableau synthèse ci-dessous rapporte une nouvelles caractérisation du contrôle en lien avec les composantes :

Le concept de contrôle : Une nouvelle conceptualisation autour de ses différentes composantes	
Anticipation	Il s'agit de poser une condition de validité du résultat avant de le connaître : estimation de l'ordre de grandeur, anticipation de la nature du nombre obtenu, analyse préalable des propriétés que doit posséder le résultat. L'anticipation est liée à un retour sur la réponse en lien avec la

	question, le problème posé.
Vérification	Il y a deux types de vérification : - Une vérification provenant d'une anticipation, on anticipe le résultat et on exerce ensuite une vérification face au résultat obtenu pour le confronter à celui anticipé. - Une vérification sans anticipation préalable, une fois le résultat obtenu on se pose les questions suivantes « a-t-il du sens dans le contexte? », « est-il conforme à ce qui est demandé? ». La vérification requiert un retour à la tâche, à la question posée. La vérification peut porter sur : - la démarche, la méthode utilisée - le choix de la méthode utilisée - le résultat lui-même. Elle se manifeste à travers un questionnement sur le caractère pertinent de ce résultat, sur sa nature, sur sa forme globale. La vérification permet de dépasser le doute.
Validation	- La validation s'appuie sur des fondements (qui vont être explicités) qui permettent de juger du caractère vrai, faux, partiellement vrai de ce qui est avancé. Dans le cas d'énoncés algébriques, elle se traduit par une coordination entre arithmétique et algèbre, par la capacité de passer d'un cadre à l'autre. Ce type de validation permet le développement d'une sensibilité aux erreurs, aux difficultés. - La validation peut également s'exprimer à travers l'utilisation d'écritures équivalentes, une flexibilité dans le passage d'une écriture à l'autre; elle requiert un retour au sens des concepts en jeu (dans le cas de notre expérimentation à la signification de l'écriture exponentielle).
Engagement réfléchi	L'engagement réfléchi peut s'exprimer à travers : - Une prise de distance, un arrêt devant la tâche, un esprit critique avant la résolution. - Un retour aux fondements, être à la recherche de sens (savoir d'où proviennent les conventions, les règles, les concepts en jeu). - Une appropriation du problème en donnant du sens en

	contexte, faisant appel au choix d'une interprétation du problème parmi d'autres interprétations possibles / Jugement réfléchi dans des contextes qui se prêtent à différentes interprétations possibles.
Discernement / Choix éclairé	Le discernement/choix éclairé se traduit par une capacité à choisir parmi parmi différentes <u>écritures</u> et/ou différentes <u>stratégies</u> celle qui est la plus appropriée, la plus efficace et la moins coûteuse en temps en ayant préalablement écarté celles qui sont inappropriées.
Perception des erreurs/sensibilité à la contradiction	La sensibilité à la contradiction peut provenir d'une anticipation déçue, d'un effet de surprise face à un résultat qui ne correspond pas à celui attendu. Dans une classe, la sensibilité à la contradiction peut s'exprimer à travers une mise en commun des résultats obtenus dans le groupe qui ne sont pas équivalents les uns des autres. Le dépassement de la contradiction est issu d'un retour sur les concepts en jeu, du symbolisme, sur leur signification.
Métaconnaissance	Les métaconnaissances sont le fruit : - d'une réflexion sur les connaissances, elles expriment un savoir sur la pertinence, l'efficacité d'une notion, d'une écriture dans une tâche donnée. - d'une réflexion sur la combinaison de deux ou plusieurs connaissances qui débouche sur une connaissance plus élaborée.

Tableau 5.1 Le concept de contrôle : une nouvelle conceptualisation

L'analyse émergente nous éclaire sur d'autres composantes du contrôle que nous ne retrouvons pas dans le cadre théorique et qui sont amenées au cours de cette construction conjointe, principalement dans ce cas par l'enseignante.

Flexibilité d'une écriture à l'autre : le contrôle sur l'activité mathématique renvoie à une flexibilité dans la passage d'une écriture à l'autre

- Ceci sera explicité en termes de difficultés de contrôle dans le passage d'une écriture à l'autre, voir l'égalité entre les écritures $-\frac{5}{6};\frac{-5}{6};\frac{5}{-6}$ (*Analyse du Bloc 2*).

- Ou encore dans la capacité dans le passage entre les registres de représentation décimal, verbal, fraction (*Analyse du Bloc 5*, 0,008 c'est 8 millièmes, on peut l'écrire $\frac{8}{1000}$).

Réinvestissement des stratégies

- Réinvestissement des stratégies d'un problème à l'autre, (*Analyse du Bloc 1,* voir si les élèves réinvestissent les stratégies mises de l'avant dans le problème des robots et des abeilles lors de la résolution du problème des bactéries);
- Réinvestissement des stratégies utilisées de l'écriture en arithmétique à l'écriture en algèbre (*Analyse du Bloc 2,* le travail sur le signe d'expressions arithmétique réinvestit sur les expressions algébriques).

À ce stade, nous pouvons éclairer la notion de contrôle à travers ses processus et manifestations, ce qui viendra compléter la caractérisation des composantes du contrôle vue précédemment. Nous ferons apparaître dans une autre police (Arial) les changements apportés à la caractérisation de départ suite à notre analyse de données.

L'activité de *contrôle* est associée pour nous à un processus qui se développe, se construit sur du *long terme* chez l'élève.

Le contrôle se traduit par : - une *réflexion* de la part de l'élève, sur toute action, sur tout choix tout au long de la tâche : au début, en cours ou à la fin de la résolution.

- *un temps d'arrêt, une prise de distance, un esprit critique avant toute résolution.*
- la capacité à *prendre des décisions* de façon réfléchie, rationnelle.
- le recours aux *fondements,* un retour au sens des concepts utilisés
- l'utilisation de *métaconnaissances.*
- Le réinvestissement de stratégies.
- Un recours au sens, aux fondements des concepts en jeu

Le contrôle est présent tout au long de la résolution de la tâche :

En amont de la réalisation :
Le contrôle permet une anticipation, les élèves posent a priori une condition de validité du résultat avant de le connaître. Il assure une mobilisation des connaissances en jeu, il se manifeste par une relation entre les données et le but à atteindre. Il se traduit par un temps d'arrêt, un esprit critique, une évaluation des stratégies possibles, par une recherche de sens, par le choix d'une interprétation possible parmi plusieurs interprétations.

En aval de la réalisation :
Le contrôle assure un travail rétrospectif, une vérification du résultat pour dépasser le doute et acquérir une certitude. Si nécessaire, il permet un retour sur la tâche, sur la question et contribue à une évaluation de la méthode utilisée, la démarche, le choix de la méthode, le résultat lui-même. Il passe également par la perception des erreurs, une sensibilité et/ou un dépassement à la contradiction.

En début ou en cours de processus :
Le contrôle se manifeste par des prises de décision sur la direction à prendre, la stratégie la plus efficace, la moins coûteuse en temps, par des évaluations périodiques tout au long de la résolution, par un réinvestissement des stratégies utilisées précédemment, par une recherche de sens, un retour aux fondements.

Dans notre cadre théorique, nous avons distingué le contrôle syntaxique du contrôle sémantique. L'expérimentation a porté essentiellement sur ces deux composantes du contrôle ce qui a permis de les éclairer, de les raffiner et de les enrichir à travers un travail sur les exposants.

Contrôle sémantique et syntaxique d'après le cadre théorique

Pour Brousseau (1986), le contrôle syntaxique permet d'appliquer les axiomes alors que le contrôle sémantique est relié à savoir de quoi on parle et « connaître les paradoxes attachés à certains usages pour les éviter » (p.43). Bednarz, Saboya (2007) et Kouki (2007) se sont intéressés quant à eux aux contrôles syntaxique et sémantique dans le contexte de résolution de problèmes en algèbre et de la résolution d'équations. Le contrôle syntaxique est défini comme la capacité à gérer des règles de transformation alors que le contrôle sémantique est attaché à la capacité à ne pas se détacher de la signification des grandeurs qu'on manipule. L'analyse émergente permet de faire apparaître des éléments nouveaux reliés au contrôle sémantique et syntaxique.

Dans notre expérimentation, le contrôle sémantique apparaît relié à l'écriture à travers :

1. Un sens accordé au symbole lors de :

- l'interprétation du signe moins de l'écriture qui a 2 sens : le sens d'une opération et le sens d'un nombre entier relatif par exemple dans l'expression $2-(-5^3)$ (*Analyse du Bloc 2*).

- l'interprétation du trait de fraction comme une division $\frac{5}{2}=5\div 2$ (*Analyse des Blocs 5 et 6*).

2. Un retour aux fondements, sur le sens de la notation exponentielle (*Analyse du Bloc 2*, quand on demande le signe de l'expression $-(-5^3)$, il s'agit de trouver le signe sans avoir recours au calcul ce qui suscite une réflexion sur la signification de l'écriture, sur le rôle des parenthèses).

3. Une construction de règles qui s'apuie sur le sens des symboles et des notations (*Analyse du Bloc 2,* dans le passage d'une loi générale pour déterminer le signe de

l'expression portant sur la parité des exposants, par exemple pour déterminer le signe de $(-5)^3$ on s'appuie sur le sens de l'écriture exponentielle $(-5)^3 = (-5).(-5).(-5)$, par la règle des signes on sait que moins par moins donne moins et qu'un moins par un plus donne un moins on est donc assurés que l'expression est négative, ce qui nous permet d'entrevoir que dans ce cas si l'exposant est impair, l'expression sera négative et s'il est pair, elle sera positive).

4. Un décodage des implicites de la notation (*Analyse du Bloc 5* dans $\frac{a^2}{a^3} = \frac{a^2 \times 1}{a^2 \times a}$).

Suite à l'analyse émergente, le contrôle syntaxique apparaît relié à :

1. L'utilisation d'une règle pour voir si c'est positif ou négatif (*Analyse du Bloc 2*, par exemple dans l'expression $(-5)^3$, comme l'exposant 3 qui est impair porte sur une expression négative alors le résultat sera négatif).

2. Flexibilité de l'utilisation de règles (*Analyse du Bloc 5*, différentes façons de simplifier $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$, soit on fait $\frac{1}{\left(3/5\right)^2} = \frac{1}{3^2/5^2} = 1 \div \frac{3^2}{5^2} = 1 \times \frac{5^2}{3^2}$ soit on procède ainsi $\frac{3^{-2}}{5^{-2}} = 3^{-2} \div 5^{-2} = \frac{1}{3^2} \div \frac{1}{5^2} = \frac{1}{3^2} \times 5^2$.

Le contrôle syntaxique est ainsi lié à un travail sur l'écriture à travers l'utilisation, l'application de règles (portant sur la parité des exposants, sur les lois des exposants), et sur une flexibilité dans l'utilisation de ces règles qui débouche dans certains cas sur différentes simplifications.

5.2 Un savoir nouveau qui émerge autour du choix des tâches susceptibles de favoriser le développement du contrôle : caractérisation

Suite à l'interprétation des travaux de plusieurs chercheurs et à notre propre construction théorique à la fin du chapitre 2, nous avions cerné différentes tâches susceptibles de développer une activité de contrôle. Nous les avons recompilées dans le tableau ci-dessous :

1. Situations de choix requérant un discernement, un choix éclairé (Kargiotakis, 1996)

Ce sont des situations dans lesquelles l'élève peut faire des choix, prendre des décisions. Ces situations permettent plusieurs engagements possibles. C'est l'idée d'un choix éclairé entre diverses stratégies possibles, pour discerner celle qui est la plus efficace, celle qui mène vers la solution le plus rapidement, sans trop de risques d'erreurs.

2. Situations dans lesquelles on doit percevoir des erreurs, être sensibles à la contradiction et être capables de dépasser la contradiction (Kargiotakis, 1996; Piaget, 1974)

La situation provoque un déséquilibre, une contradiction, des résultats aberrants, qui n'ont pas de sens... de manière à provoquer une prise de conscience. Elle invite aussi à dépasser la contradiction. Kargiotakis distingue deux cas : la contradiction peut provenir d'un raisonnement qui n'est pas valide et le cas où l'élève se questionne, est sensible à la contradiction alors que le raisonnement est bon.

3. Situation de vérification

La situation proposée doit permettre d'engager des vérifications successives, périodiques tout au long de la tâche. Le résultat obtenu peut mener vers un retour sur la tâche, sur la méthode, ou sur les calculs.

4. Situations de validation (Lee et Wheeler, 1989; Perkins et Simmons, 1988; Cipra, 1985; Balacheff, 1987)

On peut distinguer différentes situations :

- Validation d'énoncés algébriques : l'élève doit se prononcer sur le caractère vrai ou faux d'un énoncé ce qui requiert une coordination entre l'arithmétique et l'algèbre.

- Validation d'une conjecture : l'utilisation de cas particuliers utilisés comme contre-exemples permet de vérifier par exemple la validité d'une formule.

- Les élèves élaborent des propositions et ils doivent justifier la vérité ou la fausseté d'un énoncé (production d'une preuve) (cf. course à 20 de Brousseau, 1986).

5. Situations de décision, d'anticipation (Balacheff, 1987)

On demande aux élèves d'anticiper, de prédire, de poser a priori une condition de validité du résultat avant de le connaître.

6. Situation favorisant un engagement réfléchi

La situation fait intervenir le sens, la compréhension des concepts en jeu de manière à permettre un engagement réfléchi. Elle requiert également une prise de distance par

rapport à la tâche, un temps d'arrêt, de réflexion.
7. Situation mettant de l'avant l'utilisation de métaconnaissances
La situation sollicite l'utilisation de connaissances de type méta, nommées métaconnaissances, liées à la prise de décision sur l'utilisation des connaissances les plus appropriées en lien avec la tâche.

Suite à l'analyse émergente, nous pouvons faire un parallèle entre ces différents types de tâches et celles que nous avons dégagées. Il en ressort un éclairage sur ces tâches exemplifié sur un contenu précis, le travail sur les exposants.

1. Éclairage autour des situations de choix requérant un discernement, un choix éclairé

Suite à l'analyse émergente

- Problème qui se prête à différentes interprétations et débouche ainsi sur plusieurs réponses (*Analyse du Bloc 1*, le problème des abeilles).
- Problème qui requiert une stratégie efficace et peu coûteuse en temps (*Analyse du Bloc 1*, dans le problème du placement d'argent la multitude de calculs à effectuer pousse les élèves à se tourner vers une autre stratégie).

2. Éclairage autour des situations dans lesquelles on doit percevoir des erreurs, être sensibles à la contradiction et être capables de dépasser la contradiction

Suite à l'analyse émergente

Des tâches « pièges » construites à partir de la connaissance des difficultés des élèves (*Analyse du Bloc 4*, tâche construite autour de la confusion entre les écritures $2x$ et x^2, est-ce que $m^a = ma$ est toujours vraie, jamais vraie ou parfois vraie?).

3. Éclairage autour des situations de vérification

Suite à l'analyse émergente

Le résultat obtenu requiert une vérification car non-conforme à la question demandée, au contexte. La vérification sollicite un retour à la tâche, à la question (*Analyse du Bloc 1*, dans le problème des abeilles, le résultat obtenu est décimal alors qu'on cherche un nombre de jours).

4. Éclairage autour des situations de validation

Suite à l'analyse émergente
- Validation d'égalités, percevoir tous les possibles, des égalités toujours vraies, jamais vraies, parfois vraies (*Analyse du Bloc 4*). - Validation de conjectures (*Analyse du Bloc 5*, validation autour des différentes écritures énoncées par les élèves pour 5^{-3} : -125; $1 \div 5 \div 5 \div 5$; $\frac{1}{125}$, 0,008,...) - Validation est sollicitée par la nature de la question, elle ne doit pas amener à calculer, à résoudre mais doit axer sur le raisonnement, sur la réflexion, sur les explications à travers des questions comme *« Pourquoi? », « Explique comment l'élève a procédé. », « Es-tu d'accord avec cette façon de faire? ».* Préciser qu'il ne faut pas utiliser la calculatrice. Les élèves doivent ainsi émettre une opinion et la justifier (*Analyse des Blocs 2, 3, 4 et 5*).

5. Éclairage autour des situations de décision, d'anticipation

Suite à l'analyse émergente
La situation permet de donner un ordre de grandeur du résultat (*Analyse du Bloc 1*, dans le problème des robots, la question « pourquoi panique-t-elle » sollicite une anticipation du résultat).

6. Éclairage autour des situations favorisant un engagement réfléchi

Suite à l'analyse émergente
Tâche qui dépasse l'aspect calculatoire et qui mise sur la compréhension, sur le sens (*Analyse du Bloc 2*, sans calculer trouve le signe de l'expression $-(-5)^{67}$).

7. Éclairage autour des situations favorisant l'utilisation de métaconnaissances

Suite à l'analyse émergente
Nous n'avons pas de tâche dans notre expérimentation reliée à cette composante du contrôle.

La confrontation entre ce qui ressort de l'analyse théorique et l'analyse émergente permet de préciser, d'éclairer, d'exemplifier certaines tâches susceptibles de favoriser le développement du contrôle. Ainsi dans les situations dans lesquelles l'élève perçoit une contradiction reposent essentiellement sur la connaissance des difficultés des élèves. Dans les situations de vérification, l'expérimentation donne un exemple de retour sur la tâche (quand le nombre obtenu est décimal et que l'on cherche un nombre entier). Dans les situations d'anticipation, on ne demande pas aux élèves d'anticiper (cf. analyse théorique) mais la question, le contexte pousse vers une anticipation qui sera alors naturelle. Les situations de validation se précisent sous certains aspects comme le recours à des égalités qui présentent différents cas de figure. De plus elles s'enrichissent par l'importance donnée à l'aspect social, à la mise en commun des résultats de la classe pour les confronter. La nature de la question (qui suscite un raisonnement, une réflexion) est également soulignée favorisant une validation. Finalement, les situations de choix sont éclairées pas seulement sous la dimension de situations qui permettent plusieurs engagements possibles mais également différentes interprétations.

De nouvelles caractérisations sont mises en évidence par l'expérimentation :

- Une prise en compte du contrôle syntaxique (des tâches calculatoires dans lesquelles il s'agit d'appliquer les lois des exposants, *Analyse du Bloc 6*).
- Une prise en compte de la dimension *enjeu de la situation,* une tâche non familière, non classique, qui présente un défi et pousse les élèves à vérifier, à un retour au sens car il y a pour eux un enjeu (*Analyse du Bloc 1*, dans le problème des abeilles, il s'agit de calculer l'exposant, la base et la puissance étant connues, ce que les élèves n'ont pas l'habitude de faire).
- Tâches qui requièrent un réinvestissement des stratégies vues précédemment (*Analyse du Bloc 1*, le problème des bactéries est semblable à celui des abeilles).

L'analyse émergente permet de plus de détecter dans la construction des tâches favorisant le développement d'une activité de contrôle un jeu sur certaines variables didactiques :

- Sur la nature des nombres (base des exposants entière, décimale, irrationnelle,… positive, négative) pour forcer un raisonnement ou le pousser, créer une distance avec la calculatrice (*Analyse du Bloc 2*)

- Sur la nature des exposants : choisir de gros exposants pour contrer le calcul (*Analyse du Bloc 2*)

- Une prise en compte des erreurs dans la construction des tâches, des questions (par exemple des expressions avec des exposants 0, une interprétation de $-a$ vu comme un nombre négatif) (*Analyse du Bloc 2*).

5.3 Un savoir nouveau qui émerge autour des indicateurs de contrôle chez les élèves

Dans l'analyse menée au chapitre 2 et dans l'analyse émergente nous avons relevé des stratégies traduisant une activité de contrôle et des indicateurs de difficultés de contrôle en lien avec certaines composantes du contrôle. Le tableau ci-dessous compile les résultats obtenus. Nous avons mis en ombré les indicateurs de difficultés de contrôle.

Composantes du contrôle	**Indicateurs de contrôle ou de difficultés de contrôle issus de l'analyse théorique**	**Indicateurs de contrôle ou de difficultés de contrôle mis en évidence par l'analyse émergente**
Anticipation *Sensibilité à la contradition*	Une estimation de l'ordre de grandeur de la réponse	- Réaction explicite des élèves dans leur discours (« ça ne marche pas, ça n'a pas d'allure ») provenant d'une anticipation (*Analyse du Bloc 1*). - Réaction explicite sur leurs visages (qui expriment de la surprise) (*Analyse du Bloc 1*). - Réaction face à des erreurs écrites au tableau qui sont plus ou moins intentionnelles. Exemple : $(-8)^0 = -1$, dans leur discours « c'est faux, le moins il est dans la parenthèse. » (*Analyse du Bloc 2*)
Vérification	- Un questionnement sur le sens de la réponse - Une utilisation de différents registres de représentation, un changement de	

	cadre, le recours à une résolution parallèle - Le recours à une autre façon de procéder sans changer de cadre - Le recours à des informations supplémentaires - Une évaluation de l'écart au but (en cours de route et/ou en fin de résolution) - La double résolution (refaire la même chose pour vérifier) - Des vérifications liées à une certaine « norme », à un certain « allant de soi » (« c'est bon parce que c'est comme ça qu'on l'a fait », ...) - L'utilisation d'une propriété mathématique prise comme un absolu, une norme (par exemple une équation de type *a.x+b =c, avec* $a \neq 0$*, admet une et une seule solution)*	
Engagement réfléchi	- Un changement de point de vue - La substitution par un problème	- Donner du sens à une écriture (voir que $5^2 + 5^3 = 5^5$ (*Analyse Bloc 5*). Au moment de l'introduction des

	semblable plus simple - Le recours à des images mentales, des métaphores, des analogies.	exposants négatifs donner la signification suivante « 5^{-3} c'est divisé en 5, divisé en 5, divisé en 5. » (*Analyse du Bloc 5*). - Sens accordé à l'exponentielle (difficulté des élèves à anticiper le signe d'une expression avec des exposants, à interpréter les exposants négatifs, à interpréter l'écriture -*a* (vu comme un nombre négatif), des expressions avec l'exposant 0 (*Analyse des Blocs 2 et 3*). - Retour aux fondements : sur les conventions d'écriture ($5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ Analyse Bloc 5)
Discernement/ Choix éclairé		Dans le choix des stratégies utilisées : passage à une stratégie plus efficace, des calculs à mesure versus le choix d'une écriture efficace (l'exponentielle) (*Analyse du Bloc 1*, placement d'argent).
Validation		Lors d'explications en classe où l'enseignante insiste sur le fait que x^2 et x n'ont pas la même valeur, un élève explicite « oui cette égalité est

		vraie si $x^2 = x$ *si* $x = 1$ *» (Analyse du Bloc 5).*
Contrôle syntaxique		Des simplifications abusives en arithmétique $\frac{8^5}{8} = \frac{8.8.8.8.8}{8} = \frac{8}{0}$; $\frac{80^5}{10^5} = \frac{8^5}{1^5}$ et en algèbre $\frac{a}{a} = 0$; $\frac{a^5}{a^3 + a} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a + a} = a$. (C et E), *Blocs 4 et 5.*

La confrontation entre l'analyse théorique et émergente fait ressortir plusieurs indicateurs de contrôle chez les élèves en lien avec les composantes du contrôle. L'anticipation que nous avons reliée ici à une sensibilité à la contradiction dans le cas où l'anticipation amène chez l'élève une perception de ses erreurs dû à la différence entre le résultat anticipé et celui obtenu est explicité, précisé par l'analyse émergente à travers une réaction des élèves dans leur discours et une réaction sur leurs visages. D'autres composantes sont seulement traitées par l'analyse théorique comme c'est le cas de la vérification et d'autres uniquement par l'analyse émergente comme le discernement/choix éclairé, la validation et le contrôle syntaxique. Les deux analyses se rejoignent, se précisent autour de l'engagement réfléchi. Ainsi les indicateurs de d'engagement réfléchi chez les élèves réfléchi sont de divers ordres : différentes façons de voir, d'interpréter, le recours à des images mentales, à des métaphores, à des analogies; le recours à un problème plus simple; donner du sens aux concepts en jeu; revenir aux fondements.

5.4 Un savoir nouveau qui émerge autour des stratégies d'intervention favorisant le recours à une activité de contrôle

Dans le cadre théorique, nous avions relevé 3 stratégies d'intervention favorisant une activité de contrôle que nous retrouvons dans notre expérimentation.

***Stratégie 1* : Donner du sens / un contrôle sémantique**

D'après notre interprétation de la littérature, nous avions mis de l'avant l'importance de donner les moyens aux élèves d'acquérir des stratégies de contrôle plutôt que de les enseigner. On axe ainsi sur le sens comme dans l'exemple de Janvier où les formules des volumes de différents solides sont construites en se basant sur une bonne compréhension de la part de l'élève des concepts en jeu. La stratégie donner du sens est exemplifiée, précisée, enrichie par l'analyse émergente, ce qui éclaire des manières de faire.

« Donner du sens » est un des principes porteurs d'une activité de contrôle provenant de la didactique praticienne de Nadia. Il est présent dans sa pratique à différents moments dans la mise en route et dans le retour d'une tâche à travers :

- Une reformulation orientée sur le sens. La mise en route de la tâche est orientée par le « pourquoi », par la justification (*Analyse du Bloc 1*), elle donne du sens à l'égalité conditionnelle (*Analyse du Bloc 3*). Dans le retour sur la tâche, l'enseignante essaie de donner du sens en contexte aux formules erronées (*Analyse du Bloc 1*), aux expressions avec des exposants négatifs (ce sont des nombres à virgule, positifs, plus grands que 1 (*Analyse du Bloc 5*), elle revient sur le sens de l'écriture exponentielle (par exemple $5\times5+5\times5\times5\neq5\times5\times5\times5\times5$ et $16=2\times2\times2\times2=2^4$ en utilisant l'écriture tout au long) et sur le sens de l'écriture $2xy = 2$ *fois* $xy = xy + xy$ (*Analyse du Bloc 5).*

- Elle donne de la pertinence à la simplification : trouver le facteur commun entre le numérateur et le dénominateur.

- Elle justifie chacune des étapes de la simplification, les éléments implicites sont ainsi décodés ($\frac{a^5}{a^2} = \frac{a^2 \times a^3}{a^2 \times 1}$, le facteur 1; l'exposant 1 dans $a = a^1$) (*Analyse du Bloc 5*).

- Elle axe sur l'importance de comprendre d'où viennent les lois sur les exposants, il faut être capable de les retrouver, de les raisonner, explicitant, quand c'est nécessaire, les conventions mathématiques en arrière (*Analyse du Bloc 5*).

- L'enseignante relance également les élèves sur une autre validation que l'utilisation de la calculatrice (les calculs versus le sens) (*Analyse du Bloc 5*).

Stratégie 2 : Renvoyer la validation aux élèves

Margolinas (1992) met de l'avant l'importance du rôle de l'enseignant en lien avec la validation lors des phases de retour sur les solutions, de conclusion. Elle précise que la phase de conclusion est une phase d'évaluation (et non de validation) quand l'enseignant délivre un jugement de validité sans appel sur la réponse de l'élève. Ce jugement n'appelle pas de réflexion de la part de l'élève sur la validité de sa procédure, l'élève sait tout de suite si sa procédure a marché ou pas, il n'a rien à faire pour valider. Nous pouvons remarquer que pour une partie de l'exploitation des exercices en classe, Nadia est dans une phase d'évaluation, certaines explications sur ce qui a été fait par les élèves ou des réponses à certaines tâches viennent de l'enseignante et ne sont pas renvoyées aux élèves *(Analyse des Blocs 1, 2, 4, 5 et 6).* De plus certaines explications prennent appui sur des stratégies développées dans les exercices précédents (idée du réinvestissement) mais sont menées par l'enseignante du début à la fin *(Analyse du Bloc 2*). Finalement dans la résolution de problèmes, la validation de stratégies s'appuie sur la stratégie validée par l'enseignante (*Analyse du Bloc 1*). Toutes ces stratégies freinent le recours à une activité de contrôle.

C'est quand la phase de conclusion se présente selon une phase de validation (Margolinas, 1992) qu'elle devient intéressante pour nous en ce qui a trait au développement d'une activité de contrôle, l'élève décidant lui-même de la validité de sa réponse et étant appelé à justifier pourquoi ça fonctionne ou non... Il est alors amené à justifier son travail, à vérifier sa démarche et le résultat obtenu. Nous en avons un exemple avec les formules erronées provenant de la résolution de problème (*Analyse du Bloc 1*), Nadia renvoie leur validation aux élèves. Même chose pour les formules produites, elle force une explication du *« Pourquoi? D'où viennent-elles? »*, leur validation et signification étant renvoyée aux élèves. Cette sollicitation des justifications se retrouve à plusieurs reprises dans l'expérimentation (*Analyse des Blocs 1, 2 et 5*).

Nadia force également des éclaircissements des propos des élèves pour les pousser à aller plus loin, pour mieux comprendre *« Qu'est-ce que ça veut dire? »* (*Analyse du Bloc 1*). Elle reprend la question d'un élève et la renvoie à l'élève qui a produit la démarche en question (*Analyse du Bloc 1*); elle sensibilise les élèves au fait qu'on ne peut pas dire n'importe quoi, renforçant ainsi l'importance de la justification (*Analyse du Bloc 5*). Pendant la résolution, l'enseignante repousse toute requête de validation de la part des élèves à son endroit sur leurs solutions en les renvoyant à la lecture de la tâche et en leur annonçant un retour différé (*Analyse du Bloc 1*).

On peut remarquer que l'analyse émergente permet de pousser, de creuser, d'enrichir l'analyse théorique.

Stratégie 3 : Faire des liens

Margolinas (1992) distingue également la phase de bilan qui permet la formulation publique des méthodes de résolution par les élèves qui doivent formuler leurs stratégies. Les connaissances mises en œuvre par les élèves sont alors portées à la classe toute entière pour être discutées et validées. L'enseignante procède ainsi (renvoie la validation aux élèves et ne se prononce pas sur leurs stratégies) essentiellement dans deux tâches bien précises : le problème des abeilles et l'introduction des exposants négatifs. Nous pouvons remarquer qu'elle dirige la discussion en classe en ayant préalablement repéré les stratégies utilisées (*Analyse des Blocs 1 et 5*), elle laisse la place à l'argumentation, à différents points de vue en encourageant une discussion (*Analyse du Bloc 1*).

Dans une telle phase, les élèves font des liens entre les différentes démarches ressorties. Comme nous pouvons le voir dans l'introduction des exposants négatifs, Nadia exploite les réponses des élèves et les amène à faire des liens entre les différentes écritures proposées (0,008 et -125) en axant sur le sens, sur un travail entre les différents registres de représentation (décimal, fraction, verbal), sur des écritures équivalentes (*Analyse du Bloc 5*). Elle utilise également les connaissances des élèves sur lesquelles elle revient (la commutativité de la multiplication, le travail sur les fractions en arithmétique : addition, multiplication et division de fractions, *Bloc 5).* Toutefois certains liens sont faits par l'enseignante ce qui freine le possible recours au contrôle : c'est elle qui fait des liens entre les différentes stratégies des élèves, qui identifient deux démarches comme étant similaires (*Analyse du Bloc 1*).

L'analyse émergente a également permis de mettre en évidence trois autres stratégies porteuses d'une activité de contrôle, c'est une nouvelle contribution :

- **L'effet clash**

Il s'agit de déstabiliser les élèves, de les mettre en doute de manière à forcer un retour sur la réponse (qui provient d'une anticipation) et/ou un retour sur la tâche. Les élèves s'attendent à quelque chose et ils sont surpris quand ce n'est pas ce qu'ils ont prévu qui sort (*Analyse du Bloc 5*).

- **Piquer la curiosité des élèves**

Elle pique la curiosité des élèves dans une des tâches (*Analyse du Bloc 1, Placement d'argent*) pour les pousser vers une stratégie plus efficace (passe par une reformulation du problème, par une mise en scène « moi je trouve ceci très vite, je serais gentille si je vous donnais le nombre d'années.... ») Dans une autre tâche (*Analyse du Bloc 5*), l'enseignante introduit les exposants négatifs en demandant aux élèves ce que vaut (5^{-3}), elle crée ainsi un effet de surprise face aux différents résultats obtenus (0,008, -125,....), elle sème ainsi le doute pour essayer de rendre les élèves sensibles à la contradiction et les pousser à la dépasser.

- **Tendre des « pièges »**

Nadia cherche à provoquer l'erreur en présentant aux élèves des expressions qui ne « marchent » pas (comme $5^2 + 5^3$). Elle cherche à travers cette stratégie à développer une sensibilité à l'erreur (*Analyse des Blocs 4 et 5*).

L'expérimentation nous renseigne de plus sur d'autres stratégies d'intervention qui favorisent le développement d'une activité de contrôle (c'est un grand apport ici) et que nous avons repris dans le tableau ci-dessous (en ombré nous avons indiqué les stratégies qui freinent le possible développement du contrôle). Nous avons ainsi des manières de faire plus précises que nous pouvons mettre en lien avec les composantes du contrôle.

Composante du contrôle	**Stratégie d'intervention**
Discernement/ Choix éclairé	- Laisser patauger les élèves pour qu'ils voient la pertinence d'aller vers une stratégie plus efficace (*Analyse du Bloc 1,* dans le problème du placement d'argent, les calculs un à un deviennent vite longs). L'enseignante procède à un choix éclairé des élèves pour le retour en fonction d'une intention reliée au contrôle (stratégie efficace) : - Importance pour l'enseignante d'aller chercher la façon dont chaque équipe a procédé, s'ils ont été bloqués. *(Analyse du Bloc 1).* - Repérer les élèves qui utilisent des stratégies intéressantes (du point de vue de l'efficacité) et

	ceux qui font des calculs un à un (non efficace). - Partir des stratégies incomplètes, ou plus ou-moins efficaces, ou plus ou moins erronées. - Dans le travail sur l'écriture, l'enseignante aligne les élèves sur un outil : la loi des signes (« si tu connais cette loi tu peux te débrouiller »). *(Analyse du Bloc 2).* - Dans le travail sur l'écriture, l'enseignante procède d'abord par des simplifications non efficaces, par exemple pour a^3/a^5 , elle divise le numérateur et le dénominateur successivement par a (façon de faire donnée par un élève) et demande ensuite aux élèves s'il n'y aurait pas eu une façon plus efficace de procéder : repérer le facteur commun le plus grand entre le numérateur et le dénominateur (*Analyse du Bloc 5*). - L'enseignante met en évidence que l'on peut utiliser les stratégies efficaces une fois que l'on est capable d'avoir recours aux fondements (on a compris d'où viennent les lois et qu'on peut les retrouver), on peut alors passer à l'utilisation d'une loi plus efficace et rapide (*Analyse du Bloc 5*).
Réinvestissement des stratégies	Certaines tâches vont être résolues individuellement sous <u>forme de quiz</u> pour voir le réinvestissement des élèves du point de vue des stratégies utilisées (*Analyse du Bloc 1).*
Validation des stratégies	- La validation des stratégies se fait par les élèves. - Présenter d'abord les stratégies les moins efficaces et aller en graduant vers les plus efficaces (*Analyse du Bloc 1*). Elle cherche ainsi à amener une réflexion en classe sur le sens de la réponse, sur l'efficacité de l'écriture, de la stratégie.
Vérification	- Présente l'importance de la vérification : être sûrs qu'on ne s'est pas trompé. Pour cela, elle présente un moyen de vérification autour de la

	simplification d'expressions avec des exposants : il en reste au dénominateur car c'est là qu'il y en avait le plus (*Analyse des Blocs 4 et 5*). - Elle demande aux élèves de valider en utilisant la calculatrice (pas de retour au sens) *(Analyse du Bloc 4).*
Flexibilité d'une écriture à l'autre	- L'enseignante pousse à écrire les expressions sous différentes formes (dans le même registre) par exemple $2^3 \times 2^5 = 4^4 = 2^4 \times 2^4 = 2^7 \times 2^1$ (*Analyse du Bloc 4*). - Elle utilise différents registres de représentation dans sa formulation (en mots, fractionnaire, décimal), amène ainsi une flexibilité dans le passage d'un registre à l'autre (*Analyse du Bloc 5*, 0,008 c'est 8 millièmes qu'on peut écrire aussi $8/_{1000}$). - Elle axe sur le trait de fraction vu comme une division (*Analyse du Bloc 5*, $a^2/_{a^5} = a^2 \div a^5$). - Nadia lit l'égalité des deux côtés, de droite à gauche $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{2+3+5}{7}$ et de gauche à droite *(si j'ai une addition de 3 termes au numérateur, je peux les séparer en 3 morceaux, chacun ayant le même dénominateur (Analyse du bloc 5).*
Engagement réfléchi	L'enseignante donne du sens aux propos des élèves. Elle récupère ce qu'un élève amène (si la base est entre 0 et 1, l'expression est plus grande que 1). Elle prouve ce résultat (donné par la calculatrice) en donnant du sens, en utilisant des expressions équivalentes *(elle justifie chacune des étapes (différents registres de représentation, division de fractions, ce qui est connu autour des exposants négatifs)* (*Analyse du Bloc 5*).

À travers ces stratégies d'intervention, nous pouvons remarquer que l'enseignante essaie de mettre en place une culture mathématique dans sa classe autour d'une communauté d'exploration, de recherche en mathématiques. Il nous semble que cette communauté n'est pas étrangère au développement du contrôle sur l'activité mathématique puisqu'on retrouve une culture qui encourage la construction de sens, l'exploration, la validation par les élèves, le discerment, le choix éclairé entre plusieurs stratégies,... Cette culture est mise de l'avant par l'enseignante devant les élèves :

> Nadia : Vous ne pouvez pas dire que vous ne comprenez pas, il n'y a rien à comprendre. Il y a des gens qui proposent des affaires, on arrive à des résultats, on cherche, on réfléchit ensemble. Quand on ne comprend pas, c'est bon parce que ça veut dire qu'on se pose des questions.

La classe devient une communauté d'exploration, de recherche surtout à deux reprises, dans la situation des abeilles et lors de l'introduction des exposants négatifs. Dans le problème des abeilles, l'enseignante part des productions des élèves, favorise un débat en classe, un espace d'échanges des différents points de vue, une validation de la part des élèves. Lors de l'introduction des exposants négatifs, Nadia plonge la classe dans une situation d'exploration et de découverte. Elle organise dans les deux cas la classe de telle façon à prendre en compte l'articulation et la clarification de points de vue multiples.

Ceci rejoint notre réflexion émise au point 2.3.1.2 du cadre théorique et provenant des travaux d'Hadamard (1945/1975). Nous avions remarqué que l'enseignement place souvent les élèves d'emblée devant la phase de finition dans la résolution d'un problème, on centre l'élève sur l'écriture de la démarche laissant sans doute trop vite de côté l'exploration du problème, l'émergence de questions, de nouveaux problèmes... Ainsi, face à la résolution d'une tâche, une place devrait être laissée aux différentes phases de découverte, de recherche, l'élève exerçant ainsi une activité de contrôle sur la tâche à effectuer. Nadia nous donne deux beaux exemples d'une telle organisation de la classe.

L'enseignante souligne toutefois que les élèves n'en sont pas arrivés là tous seuls et qu'il y a *une culture de la classe* (dans ses propres mots) à installer qu'elle caractérise de la façon suivante :

- Un professeur qui pose des questions *« Pourquoi tu penses que c'est ça? Est-ce qu'il y a quelqu'un qui peut expliquer pourquoi ça fonctionne? »*
- Un professeur qui n'a pas peur de se planter en avant de la classe et de provoquer une discussion même s'il ne sait pas où ça va aller.
- Partir de l'idée que les élèves savent des choses intuitivement et qu'ils ont déjà travaillé certains concepts.
- Encourager les stratégies des élèves.
- Se permettre d'aller vers leurs erreurs, de jouer avec au lieu de dire que ce n'est pas bon. Il faut amener les élèves à voir pourquoi ça ne marche pas.

C'est cette culture de la classe et dans la dynamique du groupe qui a permis aux élèves de se valider, de se poser des questions, de se « garocher » au tableau pour expliquer. Nadia précise qu'elle a installée cette culture dans sa classe depuis le début de l'année scolaire et que ce n'est pas toujours facile car les élèves sont habitués à ce que le professeur corrige et donne des notes, à se faire dire où ils ont fait l'erreur et à recevoir comme simples explications « ce n'est pas ce qu'il fallait faire ».

CONCLUSION

Notre problématique nous a amenée à nous attarder sur le *contrôle* exercé sur l'activité mathématique, nous avons procédé ainsi à une analyse de ce concept sous cinq perspectives différentes : sociologique, psychologique, en éducation, en mathématique et en didactique. À travers une recherche collaborative, nous avons cherché à caractériser les situations élaborées conjointement entre enseignante et chercheure, les stratégies d'intervention mises en place en classe, et le cadre de référence qui guide cette construction (sur quelle base sont faits les choix) et à mieux comprendre ce qu'il advient sur le plan du développement du contrôle chez les élèves du secondaire au cours de ces situations.

Nous reviendrons dans cette conclusion sur les points saillants qui ressortent de cette recherche, avant de cerner ses limites et ses retombées possibles.

Un bref retour sur nos résultats

Nous avions identifié dans la méthodologie de ce travail des questions auxquelles nous cherchions à répondre :

- Comment se caractérisent les situations élaborées conjointement en vue de développer un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves ?
- Comment se caractérisent les stratégies d'intervention mises en place en classe conjointement pour développer un tel contrôle chez les élèves ?
- Comment se manifeste l'activité de contrôle chez les élèves dans les situations élaborées ?

Comment se caractérisent les situations élaborées conjointement en vue de développer un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves?

Plusieurs tâches ont été proposées par la chercheure à l'enseignante comme base de discussion, la chercheure étant guidée dans ses choix par le cadre de référence sur le contrôle. Dans les rencontres de planification, ces tâches ont été redéfinies et retenues ou non conjointement par l'enseignante et la chercheure. Il en ressort un éclairage a posteriori autour de critères caractérisant les types detâches qui favorisent le développement du contrôle. Certains types de situations issus du cadre théorique sont ainsi repris par la chercheure et prennent forme en regard du travail sur les exposants. Nous retrouvons *des situations de choix,* ouvrant sur plusieurs interprétations du problème aboutissant à des réponses différentes; *des situations de validation* qui amènent l'élève à se prononcer sur le caractère vrai / faux ou parfois vrai d'un énoncé, et *des situations de vérification* qui incitent l'élève à vérifier le résultat et à procéder à un retour sur la tâche.

D'autres critères sont mis de l'avant conjointement par la chercheure et l'enseignante : des situations forçant un *choix éclairé*, *un discernement* entre plusieurs stratégies pour choisir la plus efficace et *des situations d'anticipation, de décision* qui obligent à poser une condition de validité du résultat avant de le connaître (en se donnant par exemple un ordre de grandeur du résultat).

L'apport de l'enseignante est ici important. De sa didactique praticienne, Nadia nous livre d'autres critères en lien avec les tâches qui favorisent le développement du contrôle, et que nous retrouvons également dans l'analyse théorique (cf. chapitre 2) apportant ainsi une redéfinition de ces critères : *des situations de contradiction*, vues comme des tâches « pièges » dans lesquelles on confronte l'élève à diverses difficultés et erreurs, et *des situations dans lesquelles les élèves ont à se prononcer sur des conjectures émises*. Nous pouvons remarquer de plus que l'enseignante modifie les questions dans les tâches, ce changement est intéressant du point de vue du contrôle puisque les *questions* sont *formulées* de façon à ne pas amener un calcul, une résolution mais plutôt à *favoriser un raisonnement, une réflexion*.

De nouveaux critères sont enfin livrés par l'enseignante autour d'un jeu sur certaines *variables didactiques*, comme l'*ajout de grands nombres*, de *gros exposants* pour contrer le calcul à mesure, forcer une réflexion et ainsi *amener* les élèves *vers* *une stratégie plus efficace*; dans le *choix* également de *certaines écritures qui causent des difficultés* aux élèves pour les *confronter, les amener* à percevoir ces erreurs et difficultés.

Comment se caractérisent les stratégies d'intervention mises en place en classe conjointement pour développer un tel contrôle chez les élèves?

La thèse contribue dans le domaine spécifique de l'algèbre, autour du travail sur les exposants, à expliciter les stratégies d'intervention qui favorisent le recours à une activité de contrôle. Une grande richesse de ces stratégies d'intervention est mise en évidence par l'analyse émergente. Nous avons dégagé cinq principes porteurs d'un développement d'une activité de contrôle et qui caractérisent la didactique praticienne de Nadia : 1) donner du sens ; 2) renvoyer la validation aux élèves *(qu'elle fait essentiellement dans deux tâches)*; 3) l'effet clash *(déstabiliser les élèves, les mettre en doute de manière à forcer un retour sur la réponse et/ou sur la tâche)*; 4) piquer la curiosité des élèves *(pour les pousser vers une stratégie plus efficace, les rendre sensibles à la contradiction et les pousser à la dépasser)*; 5) tendre des pièges (idée les surprendre, de provoquer une réflexion à travers une sensibilité à l'erreur).

Les stratégies d'intervention susceptibles de favoriser le contrôle sont présentes tout au long de la tâche : lors de la mise en route, pendant la résolution et pendant le retour. Par exemple, pendant la résolution Nadia repère les stratégies des élèves pour dégager celles qui témoignent de contrôle et celles qui témoignent de difficultés, ce qui lui permet de préparer son retour (on le voit essentiellement dans deux tâches). Elle procède ainsi à un choix éclairé des élèves en fonction d'une intention : partir des stratégies incomplètes ou plus ou moins efficaces ou plus ou moins erronées, la validation se faisant par la classe, les stratégies efficaces étant amenées en dernier. Dans le retour, elle axe sur un choix efficace, stratégique; elle récupère ce que les élèves disent et va plus loin; elle les pousse à vérifier; elle axe sur la flexibilité entre les écritures et elle fait des liens.

L'analyse émergente nous renseigne également sur certaines stratégies d'intervention qui ne favorisent pas le recours à une activité de contrôle. Ainsi dans l'institutionnalisation, le passage vers une stratégie plus efficace arrive assez vite sans que les élèves voient nécessairement la pertinence de ce passage, et parfois cette institutionnalisation est en rupture avec l'activité des élèves. Certaines conceptions sont également renforcées comme le fait que deux lettres différentes représentent deux nombres différents, les explications sont données par l'enseignante et ne permettent pas de les contrer.

Comment se manifeste l'activité de contrôle chez les élèves dans les situations algébriques élaborées?

Nous n'avons que partiellement répondu à cette question. En effet, étant donné la richesse des données provenant des verbatims sur les situations et stratégies d'intervention élaborées conjointement, le travail en lien avec notre premier objectif de recherche est devenu l'objectif central de cette thèse autour duquel gravite l'essentiel de l'analyse des résultats et de l'interprétation. L'analyse du développement du contrôle chez les élèves n'est ici abordé que partiellement de manière complémentaire, à travers quelques indicateurs de contrôle chez les élèves mis de l'avant dans les séances en classe. Plusieurs élèves sont en contrôle à la fois dans le processus de résolution de problème et dans le travail sur l'écriture à travers le passage vers une stratégie, une écriture efficace et à travers le réinvestissement de stratégies d'une tâche à l'autre.

Dans le travail sur la résolution de problèmes, les élèves valident et/ou invalident certaines stratégies, anticipent la réponse, interprètent de différentes façons un problème, vérifient leur résultat et retournent au problème. Chez les huit élèves dont nous avons tracé leur activité de contrôle, il en ressort une recherche de sens dans le processus de résolution de problèmes.

Dans le travail sur l'écriture, plusieurs élèves exercent un contrôle sémantique sur la notation exponentielle, trouvent un moyen pour valider des énoncés mathématiques, utilisent un contre exemple, décodent les éléments implicites, montrent une flexibilité dans le passage entre les différents registres, sont à la recherche de sens autour du symbolisme, sont à la recherche de sens sur les lois sur les exposants et ont également recours à un contrôle syntaxique. Chez les huit élèves analysés nous pouvons noter une évolution quant au contrôle syntaxique et sémantique sur l'écriture exponentielle.

Toutefois des indices de difficulté de contrôle se manifestent chez certains élèves : des difficultés autour du choix d'une stratégie efficace, et des difficultés autour de l'écriture. Plus précisément, des difficultés autour du symbolisme ont été repérées dans l'anticipation du signe d'une expression avec des exposants, dans l'interprétation des exposants négatifs, dans l'équivalence entre les écritures $-\frac{5}{6};\frac{-5}{6};\frac{5}{-6}$, des difficultés autour de l'interprétation de $-a$ (vu comme un nombre purement négatif), des exposants ayant un exposant 0, une base négative, dans la confusion entre les écritures x^2 et $2x$, dans des simplifications abusives $\left(\frac{4ab}{4ab}=0\right)$ et des difficultés dans les opérations sur les exposants ($5^2+5^3=5^5$ et $x+x^2=x^3$).

Cet aspect demandera à être exploré plus à fond dans un travail subséquent à la thèse.

Avant d'entrer sur la question des prolongements et retombées de cette recherche, il me semble important d'en cerner les limites.

Limites de notre recherche

La principale limite de notre recherche porte sur le travail qui s'est centré essentiellement sur les exposants, et qui demanderait à être étendu pour bien rendre compte des différentes composantes de l'algèbre en lien avec le développement du contrôle (par exemple la dimension algèbre comme outil de preuve ou de résolution d'équation qui sont ici absentes).

Du côté de l'enseignante, nous n'avons pas toujours été en mesure d'aller chercher les principes sous-jacents à ce qu'elle mettait de l'avant dans ses choix de situation ou d'intervention. Par exemple, Nadia nous a expliqué qu'elle considère trois statuts différents à la tâche : 1. des tâches qui vont être discutées en classe et qui peuvent être présentées dans le cours ou données en devoir et récupérées en cours; 2. les tâches qui servent à consolider la matière; 3. des exercices qui sont utilisés pour vérifier où en sont les élèves, s'ils réinvestissent ce qu'il ont vu jusqu'ici. Nous aurions aimé savoir sur quels choix reposent les exercices qu'elle repère comme faisant partie de l'introduction d'un concept ou d'une application de contenus, quels sont les critères, les caractéristiques de tels exercices.

Enfin, nous avons des données provenant du test écrit qui n'ont pu être exploitées à fond. Le questionnaire avait été construit avant la réalisation de cette expérimentation et le contenu abordé est très peu en lien avec la séquence, il présente donc des limites. C'est le cas des tâches 3, 6, 8, 9, 10 et 11 qui portent essentiellement sur la résolution d'équations, composante de l'algèbre qui n'a presque pas été traitée dans l'expérimentation (une seule période).

Nous avons également d'autres données qui portent sur le travail sur les polynômes et sur la résolution d'équation (une seule séance en classe) qui font suite au travail sur les exposants et que nous n'avons pas pu analyser à cause de la lourdeur de l'analyse. Ce travail aurait pu nous renseigner sur le possible développement du contrôle en lien avec d'autres tâches, d'autres composantes de l'algèbre.

Retombées et prolongements de notre recherche

Cette thèse a des retombées importantes sur le plan de la recherche en didactique des mathématiques : d'une part par la mise en évidence d'une didactique de l'intervention en algèbre visant le développement du contrôle sur l'activité mathématique (sous quatre composantes : ce que recouvre le contrôle, une caractérisation des situations susceptibles de développer, les stratégies d'intervention contribuant à un tel développement et des indicateurs de contrôle chez les élèves). D'autre part par la mise en évidence du croisement entre didactique de recherche et praticienne à la base de la construction des situations (les deux perspectives ici éclairées, explicitées).

Sur le plan de la pratique et au-delà des situations, des exercices développés, les résultats obtenus dans cette recherche viennent éclairer une didactique praticienne qui a été explicitée par l'enseignante et dont elle a pris conscience, contribuant pour elle à la mieux comprendre, une explicitation notamment de la dimension contrôle par elle et de ce qu'elle faisait en ce sens.

À travers l'analyse de la thèse, nous avons tenté une première caractérisation des contributions de l'enseignante et de la chercheure dans la conception et dans la réalisation des situations que nous n'avons pas pu pousser plus profondément étant donné la richesse des autres données sur les situations et les interventions.

Les contributions de la didactique de recherche et de la didactique praticienne tournent d'une part autour des arguments invoqués sur le choix des tâches et d'autre part sur leur modification. *Dans la résolution de problèmes*, il est important pour l'enseignante de favoriser une mise en situation, de choisir un problème dans lequel les élèves puissent s'engager, elle anticipe les différentes procédures de résolution, elle gradue les problèmes selon leur complexité, et propose d'en faire moins mais de mieux travailler. Elle axe également sur une préparation des élèves aux apprentissages ultérieurs, sur une variation du contenu (des bases différentes) et elle s'attarde sur les savoirs mathématiques que les problèmes permettent de travailler. La chercheure quant à elle insiste sur l'importance de ne pas influencer les écritures des élèves et de travailler sur ce qu'ils vont amener, elle explicite également son cadre de référence en lien avec les tâches traitées et elle apporte des situations problèmes intéressantes du point de vue du contrôle.

Dans le travail sur l'écriture et sur *la résolution de problèmes*, l'enseignante met l'accent sur les tâches quiz qui permettent de voir si les élèves réinvestissent ce qui a été vu précédemment. La modification de la question est, comme nous l'avons vu une contribution de l'enseignante, elle vise ainsi à ce que les élèves quittent le calcul et axe sur une réflexion, sur un raisonnement. L'enseignante apporte de plus toute son expertise sur les difficultés, les erreurs des élèves. La chercheure se réfère quant à elle aux difficultés et erreurs des élèves provenant de la recherche, de ses connaissances didactiques du domaine.

Dans le travail sur l'écriture, l'enseignante et la chercheure ont un souci commun, celui de dépasser la technique. La chercheure axe sur des intentions didactiques : donner du sens aux concepts, ne pas se restreindre aux aspects calculatoires. L'enseignante rentre dans le cadre de référence de la chercheure, même si elle n'utilise pas toujours les mêmes mots, dans sa volonté de faire en sorte que les élèves soient critiques face au sens de la réponse donnée par la calculatrice. Chercheure et enseignante ont ainsi un souci commun de contrer le calcul, de forcer une réflexion, de dépasser la technique et de donner du sens au symbolisme.

Nous pouvons de plus remarquer que dans la réalisation de ces situations la didactique praticienne de l'enseignante est porteuse d'une activité de contrôle comme nous l'avons vu précédemment (souci de donner des numéros pièges, d'axer sur le sens, de piquer la curiosité des élèves, de les déstabiliser, les dérouter et de leur renvoyer la validation).

L'enseignante nous renseigne également lors des séances de planification sur certains indicateurs de contrôle chez les élèves, tels leur sensibilité à la contradiction, leur perception des erreurs (dans leur réaction explicite « ça ne marche pas, ça n'a pas d'allure. »). Il s'agit là d'une piste future de recherche sur laquelle nous aimerions revenir dans le futur sous l'angle notamment de la rationalité des acteurs engagés dans une telle recherche collaborative.

Au niveau encore des prolongements de notre recherche, nous avons restreint l'analyse à la partie sur les exposants, il serait intéressant comme nous le précisions précédemment de poursuivre ce travail autour du travail sur les polynômes, sur la résolution d'équations, sur d'autres composantes de l'algèbre, ce qui nous donnerait une idée plus précise du développement du contrôle sous les différentes catégories relevées. Ce travail permettrait de préciser, de raffiner, d'enrichir une didactique d'intervention en algèbre visant le développement du contrôle. Il serait également intéressant, compte tenu des difficultés observées dans cette recherche en lien avec le contrôle sur l'écriture algébrique, de s'intéresser aux difficultés, erreurs et conceptions des élèves autour de l'écriture symbolique à travers une recherche collaborative avec un enseignant intéressé par cet objet de recherche.

Ce travail m'a permis de mettre le doigt sur un concept qui est, comme nous l'avons vu, central dans l'activité mathématique. Dans la formation dispensée aux futurs enseignants au primaire et au secondaire, ce concept de contrôle prendra toute sa place, ce qui me permettra de l'éclairer à un autre niveau, auprès des étudiants à l'université et autour de différents contenus.

RÉFÉRENCES

Artigue, M. (1993). Connaissances et métaconnaissances – une perspective didactique. Dans M. Baron A. Robert A. (Dir.), *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques* (p.29-54). Cahier de DIDIREM, IREM, Paris.

Artigue, M. (2002). Le calcul. Sous la direction de Jean-Pierre Kahane (p.171-262), *L'enseignement des sciences mathématiques*. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Éditions Odile Jacob.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et de validation. *Educational Studies in Matematics*, *18*, 147-176.

Barry, S. (2009). *Analyse des ressources mises à contribution par enseignant et chercheur dans l'élaboration de scénarios d'enseignement en dénombrement visant le développement de la modélisation en secondaire 1.* Thèse de doctorat non publiée, Université du Québec à Montréal.

Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Revue des Sciences de l'Éducation, 20*(1), 175-198.

Bednarz, N. (2009). *Recherches collaboratives en enseignement des mathématiques : une nouvelle entrée sur la conception d'activités mathématiques à l'intersection de pratique en classe et recherche.* Actes de la CIEAEM 61, plénière (p.5-29). L'activité mathématique dans la pratique de la classe et comme objet de recherche en didactique. Deux perspectives complémentaires. Montréal : Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM).

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. *Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : Didactique des mathématiques, formation normale des enseignants.* École normale supérieure Marrakech.

Bednarz, N., Desgagné, S., Diallo, P., Poirier, L. (2001). Approche collaborative de recherche: une illustration en didactique des mathématiques. Dans P. Jonnaert et S. Laurin (Dir.) *Les didactiques des disciplines, un débat contemporain.* (p.177-207). Presses de l'Université du Québec.

Bednarz, N., Poirier L., Desgagné S. et Couture, C. (2001). Conception de séquences d'enseignement en mathématiques : une nécessaire prise en compte des praticiens. Dans A. Mercier, G. Lemoyne et A. Rouchier (Dir.), *Le génie didactique. Usages et mésusages des théories d'enseignement* (p.43-266). De Boeck Université.

Bednarz, N. et Saboya, M. (2007). Questions didactiques soulevées par l'enseignement de l'algèbre auprès d'une élève en difficulté au secondaire : une étude de cas. *Actes de l'ACFAS 2005*. Montréal (Québec).

Bednarz, N., Auclair, M., Barette, M.A., Lafontaine, J., Péloquin, M.E., Rodrigue, I., Leroux, C. et Morelli, C. (2008). Une expérience de collaboration enrichissange en enseignement des mathématiques. *Vie pédagogique*, 147, 43-51.

Blais, M. et Martineau, S. (2006). L'analyse inductive générale : description d'une démarche visant à donner un sens à des données brutes. Recherches qualitatives, 26(2), 1-18.

Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit X, 5*, 5-17.

Breton, G. (1994). *Carrousel mathématique 2.* Deuxième secondaire, tome 2. Montréal, Québec : Centre Éducatif et Culturel inc.

Breton, G. et Morand, J.C. (1995). *Carrousel mathématique*, troisième secondaire, tome1.

Brousseau, G. (1975). *Étude de l'influence des conditions de validation sur l'apprentissage d'un algorithme.* IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques, 7* (2), 33-115.

Brun, J. et Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et Recherche*, *3*, 261-186. Éditions universitaires Fribourg.

Butlen, D., Lagrange, M. et Perrin, M.J. (1989). *Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6eme en difficulté.* Cahier de DIDIREM n°5, IREM, Paris.

Butlen, D. et Pezard, M. (1990-91). Calcul mental, calcul rapide. *Grand N, 47*, 35-59.

Chalancon, F., Coppé, S. et Pascal, N. (2002). Les vérifications dans les équations, inéquations et en calcul littéral. *Petit x, 58*, 23-41.

Chevalier, A. (1985). La résolution d'un problème non routinier en géométrie. *Petit x, 9*, 41-62.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (2e partie). *Petit x, 19*, 43-72.

Cipra, B. (1985). *Erreurs... et comment les trouver avant le prof... ».* Ed. InterEditions, Paris.

Confrey, J. (1994). « Voix et perspective » : à l'écoute des innovations épistémologiques des étudiants et des étudiantes. *Revue des sciences de l'éducation, Vol. XX (1)*, 115-133.

Coppé, S. (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé.* Thèse de doctorat inédite. Université de Lyon.

Cortés, A. et Kavafian, N. (1998-1999). Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations. *Petit x, 51*, 47-73.

Côté, R., Gagnon, M., Perreault, N et Roegiers, X. (2002). *Leximath (lexique mathématique de base).* Éditions Beauchemin.

Coulibaly, M. (1987). *Les décimaux en quatrième : analyse et conceptions.* Mémoire de DEA inédit. Université Joseph Fourier. Grenoble.

De Champlain, D., Mathieu, P. et Tessier, H. (1999). *Petit lexique mathématique.* Modulo.

Delord, R., Terracher, P.H. et Vinrich, G. (1993). *Mathématiques 3e*. Hachette Éducation.

Delorme, J. (1985). *Étude de la compréhension de problèmes additifs chez des enfants de difficulté en mathématiques.* Mémoire de DEA, Université de Paris VIII.

Denzin, N.K. et Lincoln, T.S. (édit) (1994). *Handbook of Qualitative Research.* Thousand Oaks, California : Sage Publications.

Desgagné, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative : illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives, 18,* 77-105.

Desgagné, S. (2001). La recherche collaborative : nouvelle dynamique de recherche. Dans M. Anadon et M. L'Hostie (Dir.), *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation* (p.51-76). Les Presses de l'Université Laval.

Desgagné, S., Bednarz, N., Couture, C., Poirier, L. et Lebuis, P. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation, vol. XXVII, 1,* 33-64.

Dib, M. (2000-01). Validation dans l'environnement papier crayon. *Grand N, 68*, 41-60.

Douady, R. (1985). The interplay between different settings. Tool-Object dialectic in the extension of mathematical ability. *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. V*ol. II, 33-52.

Giddens, A. (1987) *La constitution de la société : éléments de la théorie de la structuration.* Paris : Presses universitaires de France.

Goetz, J. P. et LeCompte M.D. (1984). *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research.* San Diego, California : Academic Press, Inc.

Grenier, D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième.* Thèse de doctorat inédite. Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Grisvard, C. et Léonard, F. (1983). *Comparaison de nombres décimaux.* Bulletin de l'APMEP, n. 340, 450-459.

Hadamard, J. (1945/1975). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris, Gauthier-Villars.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. Dans Gisèle Lemoyne (Éd.). *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : complexité et diversité des cadres d'étude.* Volume 30 (1).

Janvier, C. (1994). *Le volume. Mais où sont les formules ?* Modulo. Canada.

Jullien, M. (1989-90). Le calcul algébrique au collège. Étude d'un exemple. *Petit x, 24*, 73-77.

Kargiotakis, G. (1996) *Contribution à l'étude de processus de contrôle en environnement informatique : le cas des associations droites-équations*. Thèse de doctorat inédite. Université Paris VII - Denis Diderot.

Kouki, R. (2007). L'articulation syntaxes/sémantique au Coeur des analyses didactiques au niveau de l'algèbre élémentaire? *Actes du colloque international EMF 2006*. Sherbrooke (Québec).

Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in school children. Dans J. Kilpatrick et I. Wirszup (Dir.). *Chicago and London.* The University of Chicago Press.

Laborde, C. (1996). Duas utilizações complementares da dimensão social nas situações de aprendizado da Matemática. Dans C. Garnier, N. Bednarz et I. Ulanovskaya (Dir.). *Após Vygotsky e Piaget. Perspectivas social e constructivista escolas russa e occidental* (29-46).

Lalande, A. (1960). *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. Société française de philosophie. Presses Universitaires de France.

Landry, M. (1999). *Développement d'habiletés en résolution de problèmes en algèbre chez des élèves du secondaire*. Thèse de doctorat inédite. Université du Québec à Montréal.

Larousse-Bordas (1997). *Encyclopédique universelle en 16 volumes.* Paris : Édition du Club France Loisirs.

Le Robert (1996). Illustré d'aujourd'hui. Paris : Édition du Club France Loisirs.

Lee, L. et Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematic*, *20*, 41-54.

Lenfant, A. (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires.* Thèse de doctorat inédite. Université Paris 7.

Léonard, F. et Grisvard, C. (1981). *Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs.* Bulletin de l'APMEP, 327, 47-60.

Lieberman, A. (1986). Collaborative research : Working with, not working on... *Educational leadership, 43 (5)*, 29-32.

Margolinas, C. (1989). *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques.* Thèse de doctorat inédite. Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Margolinas, C. (1992). Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 12, 1,* 113-158.

Mary, C. (1999). *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire.* Thèse de doctorat inédite. Université de Montréal.

Mashiach Eizenberg, M. et Zaslavsky, O. (2003). Cooperative problem solving in combinatorics : the inter-relations between control processes and successful solutions. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 389-403.

Mason, J. (1994). *L'esprit mathématique.* De Boeck Université.

Milhaud, N. (1997-98). Le travail personnel des élèves. *Petit x, 47*, 59-70.

M.E.L.S (Ministère de l'Éducation des loisirs et des sports), Gouvernement du Québec (2003). *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, premier cycle.* Québec : Ministère de l'Éducation.

M.E.L.S (Ministère de l'Éducation des loisirs et des sports), Gouvernement du Québec (2006). *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, deuxième cycle..* Québec : Ministère de l'Éducation.

Nantais, N. (1992). *La mini-entrevue : un nouvel outil d'évaluation de la compréhension mathématique au primaire.* Les publications de la faculté des sciences de l'éducation. Université de Montréal.

Ngono, B. (2007). Enseignement des mathématiques auprès de publics spécifiques ou dans des contextes difficiles. *Actes du colloque EMF 2006.* Sherbrooke (Québec).

Nimier, J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens (L'heuristique mathématique).* IREM de Lyon.

Oliveira, I. (2003) L'enseignement de la proportion simple au Brésil : stratégies avant et après l'enseignement formel. *Actes du Colloque du GDM 2003 – Groupe de didactique des mathématiques*, Montréal : UQAM.

Oliveira, I., Bednarz, N. et Lajoie, C. (2007). Développer une conduite rationnelle sur la proportionnalité : Analyse d'une pratique d'enseignement au secondaire en regard du jugement porté sur la reconnaissance de situations proportionnelles. *Actes du colloque EMF 2006.* Sherbrooke (Québec).

Pallascio, R. (2005). Les situations problèmes : un concept central du nouveau programme de mathématiques. Vie pédagogique, 136, 32-35.

Peltier Babier, M.L. (2007). Comment les professeurs enseignant les mathématiques à des élèves de milieux socialement défavorisés résolvent-ils la contradiction entre réussite immédiate et apprentissage? *Actes du colloque EMF 2006.* Sherbrooke (Québec).

Perkins, D.N., et Simmons R. (1988). Patterns of Misunderstanding : An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research. 58 (3)*, 303-326.

Perrin, M.J. (1992). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherche en didactique des mathématiques, 13.1.*

Piaget, J. (1974). Recherches sur la contradiction. Avec la collaboration de A. Blanchet, G. Cellerier, C. Dami. M. Gainotti-Amann, Ch. Giliéron, A. Henriques-Christophides, M. Labarthe, J. De Lannoy, R. Maier, D. Maurice, J. Montangero, O. Mosimann, C. Othenin-Girard, D. Uzan, Th. Vergopoulo. *Les différentes formes de la contradiction. Volume 2.* Presses Universitaires de France. Paris.

Polya, G. (1945/1965). *Comment poser et résoudre un problème.* Éditions Jacques Gabay.

Richard, J. F. (1998). *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions.* Université de Paris VII.

Robert, A. (1993). *Présentation du point de vue de la didactique des mathématiques sur les métaconnaissances.* Dans M. Baron et A. Robert (Dir.), *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques* (p.19-27). Cahier de DIDIREM, IREM, Paris.

Robert, A. et Tenaud, I. (1988). Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(1)*, 31-70.

Rogalsky, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherche en didactique des mathématiques.* 23 (3), 343-388 : La Pensée Sauvage.

Savoie-Zajc, L. (2000). La recherche qualitative/interprétative en éducation. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (Dir.), *Introduction à la recherche en éducation.* Sherbrooke : CRP. (225-247).

Schmidt, S. (1994). *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problèmes.* Thèse de doctorat inédite. Université du Québec à Montréal.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Smith, J.P et Hungwe, K. (1998). Conjecture and verification in research and teaching: conversations with young mathematicians. *For the learning of mathematics, 19 (3)*, 40-46.

Thiberghien, G., Le Taillanter, D., Friemel, E., Gruner, J.R., Julo, J. et Verdier, G. (1974). Contrôle des connaissances et contrôle de l'activité d'étude. *Revue française de pédagogie, 28*, 5-10.

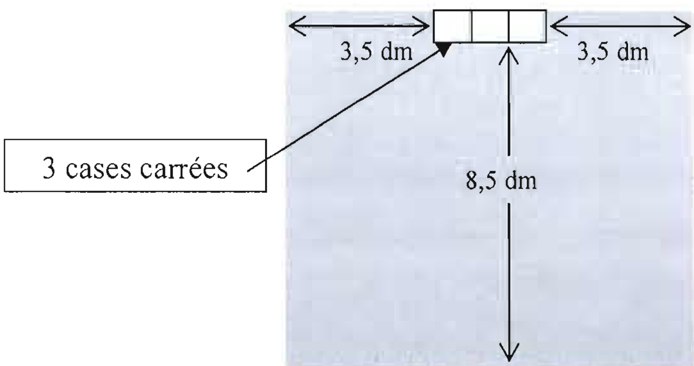
Vivier, J. (1988). La tâche de l'élève et l'auto-contrôle. *Revue française de pédagogie, 82*, 61-64.

APPENDICE A
LISTE DES PROBLÈMES DU QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Le questionnaire est constitué de treize problèmes. Il a été passé aux élèves à deux moments, au début et à la fin de l'intervention.

Problème 1[90] : Il y a 578 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que les deux trains ont le même nombre de wagons, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des 2 locomotives?
Explique comment tu as fait pour trouver.

Problème 2[91] **: Le coffre à jouets**
Je veux construire un coffre à jouets. Ce coffre a deux caractéristiques : le fond de mon coffre est carré et dans ce fond, il y a 3 cases carrées dans lesquelles Mathilde va pouvoir ranger ses perles. Voici le plan du fond du coffre (le dessin n'est pas à l'échelle) :



Il manque des dimensions. Peux-tu m'aider à les trouver?

[90] Cette situation est tirée et modifiée de Bednarz, Radford, Janvier et Lepage (1992).
[91] Ce problème a été inspiré d'une situation provenant d'un manuel français (Delord, Terracher et Vinrich, 1993) de troisième (élèves de 14-15 ans), (voir appendice B à cet effet) modifié après consultation avec les professeurs de la section en didactique des mathématiques de l'UQAM.

Problème 3[92] :

Trois sortes d'articles de sport ont été comptées dans un entrepôt. Pour les raquettes et les hockeys on a compté en tout 288 articles. S'il y a 5 fois plus de raquettes que de ballons et 48 hockeys de plus que de raquettes, combien y a-t-il d'articles de sport de chaque sorte dans l'entrepôt?

Explique comment tu as fait pour trouver.

Problème 4[93] :

On a donné ce problème à Brigitte : Je vais au magasin et j'achète le même nombre de livres que de disques. Les livres coûtent 2 dollars chacun et les disques coûtent 6 dollars chacun. Je dépense 40 dollars en tout.

a) Brigitte a résolu le problème et a répondu ceci : $2L + 6D = 40$. Explique dans tes mots ce que signifie cette équation.

b) Julie a résolu le problème de la façon suivante :

$2x + 6y = 40$

Puisque $x = y$, je peux écrire $2x + 6x = 40$ donc $8x = 40$.

Cette dernière équation indique que huit livres coûtent 40$ donc un livre coûte 5$.

Trouve ce qui est incorrect dans ce que dit et ce que fait Julie. ***Explique pourquoi.***

Problème 5[94] :

Au restaurant, une tasse de café et trois croissants coûtent 2,70$. Deux tasses de café et deux croissants coûtent 3$. Trois tasses de café et un croissant coûtent 3,50$. Trouve le prix d'une tasse de café et d'un croissant. ***Explique comment tu as fait pour trouver.***

---

[92] Ce problème provient des notes de cours du MAT2028, didactique de l'algèbre (session automne 2004), cours de deuxième année à l'UQAM destiné aux futurs enseignants de mathématiques au secondaire.

[93] Cette situation est tirée de Bednarz et Dufour-Janvier (1992).

[94] Ce problème provient du travail de thèse de Schmidt (1994) que nous avons traité au point 1.3.2.1 de la problématique.

Problème 6[95] :

Mélanie a-t-elle commis des erreurs en résolvant cette équation :

$$4x + 3 = 2(7x - 1)\ ?$$

	Dis-moi ce qui est incorrect	Mets ce qu'elle aurait dû écrire
$4x + 3 = 2(7x - 1)$		
$4x + 3 = 14x - 1$		
$3 = 10x - 1$		
$4 = 10x$		
$\frac{2}{5} = x$		
$2{,}5 = x$		

Problème 7[96] :

a) Résous l'équation suivante : $0{,}8x - 0{,}2(0{,}4x + 6) = 6$

b) Vérifie que $x = 10$ est solution de cette équation.

Problème 8[97] :

Résous l'équation suivante :

$$x + \frac{x}{4} = 6 + \frac{x}{4}$$

---

[95] Cette situation a été inspirée par deux livres du secondaire, Breton (1994, page 248) et Delord, Terracher et Vinrich (1993, exercice 15 page 70).

[96] Nous nous sommes inspirée de la situation proposée par Hitt (2004), mais l'équation a été adaptée à des élèves de secondaire 3.

[97] Cette résolution d'équation est tirée de Bednarz et Dufour-Janvier (1992), traitée dans la problématique au point 1.3.2.1.

Problème 9[98] **:**

Alexandre a résolu l'équation ci-dessous. Aide-le à continuer.

$$2x + 3 = 3(x - 2) - x + 9$$
$$2x + 3 = 3x - 6 - x + 9$$
$$2x - 3x + x = -6 + 9 - 3$$
$$0x = 0$$

Problème 10[99] **:**

Résous l'équation suivante :

$$5(2 + x) + 5\,(2 - x) = 4$$

Problème 11 :

Que vaut (2r + 1) dans l'expression 4(2r + 1) + 7 = 35.

Explique comment tu as fait pour trouver.

Problème 12[100] **:**

L'énoncé $(a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6$ est-il toujours vrai, jamais vrai ou parfois vrai ?

Explique.

---

[98] Cette situation a été inventée par les chercheurs.

[99] Les chercheurs ont aménagé cette équation afin de vérifier l'engagement réfléchi des élèves quant à l'interprétation de 20 = 4.

[100] Cette situation provient de Lee et Wheeler (1989) dont nous avons parlé au point 2.1.5.2.2 du cadre théorique.

Problème 13[101] **:**

Un enseignant donne à ses élèves l'expression algébrique suivante :

$$\boxed{2(x-4) - x + 1 - (-x^2 - 5)}$$

Les élèves se regardent, perdus.... « Wow ! C'est bien compliqué ! » Élodie s'exclame alors « regardez, je l'ai transformé et je l'ai écrite comme ça : $\mathbf{x^2 + x - 2}$ ». Marc répond « ben moi je l'ai transformé aussi et j'ai trouvé $\mathbf{(x-1)(x+2)}$! »

« C'est super ! » dit l'enseignant. Ce dernier est très content, il te propose à toi de répondre à trois questions.

a) Laquelle de deux écritures, celle d'Élodie ou de Marc vas-tu utiliser pour savoir à peu près combien vaut l'expression algébrique quand x vaut 10. Pourquoi ?

b) Si tu veux résoudre $2(x-4) - x + 1 - (-x^2 - 5) = 0$, laquelle des équations vas-tu choisir de résoudre : $x^2 + x - 2 = 0$ (celle d'Élodie) ou $(x-1)(x+2) = 0$ (celle de Marc) ? Pourquoi ?

c) Si tu veux remplacer x par 1 dans l'expression algébrique de l'enseignant, ça risque d'être long.... Laquelle des deux autres expressions vas-tu plutôt choisir ? Pourquoi ?

---

[101] Cette situation est inspirée de celle présentée par Lenfant (2002), voir le point 2.1.5.5 du cadre théorique.

APPENDICE B
ANALYSE DES PROBLÈMES DU QUESTIONNAIRE

Problème 1 :

Ce problème vise à vérifier si l'élève exerce une activité de contrôle en interprétant la réponse obtenue, en revenant au problème. Nous avons choisi de modifier le problème tiré de l'étude de Bednarz, Radford, Janvier et Lapage (1992) :

> « Il y a 588 passagers à transporter entre deux villes. On dispose de deux trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En supposant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotives? » (p.5)

Tout d'abord, nous avons simplifié la relation entre le nombre de wagons des locomotives, il n'y a plus 8 wagons d'écart entre les deux trains, mais ils ont tous les deux le même nombre de wagons. En effet, voulant vérifier si l'élève revenait sur son résultat, il était important que celui-ci ne soit pas bloqué dans la résolution du problème et puisse se rendre à la fin de la résolution. Ensuite, nous avons changé le nombre total de passagers par 578 obtenant ainsi un nombre de wagons qui ne tombe pas juste, ce résultat permet alors de voir si l'élève vérifie sa réponse et revient au problème (en arrondissant le résultat trouvé). Différents types résolutions peuvent ressortir dans ce cas. Par exemple, une résolution arithmétique de ce problème consisterait dans un premier temps à transformer le problème en considérant une seule locomotive ayant des wagons pouvant contenir $12 + 16 = 28$ passagers. Les 588 passagers seront alors partagés dans $578 \div 28 = 20{,}64$ wagons. On peut alors conclure qu'il faut 21 wagons ayant une capacité de 28 passagers chacun. Nous allons, dans un deuxième temps, revenir aux wagons de 12 et de 16 passagers, en sectionnant nos 21 wagons pouvant contenir 28 passagers, nous allons en obtenir 21 d'une capacité de 12 personnes et 21 d'une capacité de 16 passagers.

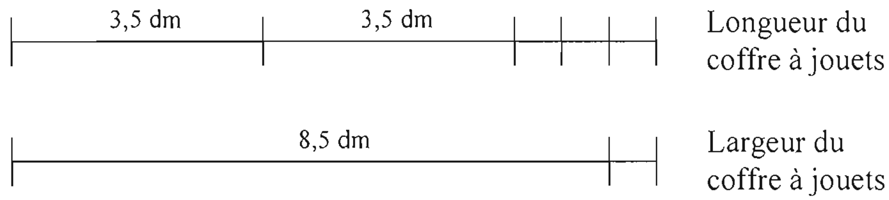
Une résolution algébrique serait de poser x le nombre de wagons à 16 places, comme les deux trains ont le même nombre de wagons, il y aura également x wagons à 12 places. Le nombre total de passagers que peuvent porter les deux trains est $12x + 16x$. Par ailleurs, nous avons 578 passagers à placer dans les deux trains, on peut alors écrire l'égalité suivante : $12x + 16x = 578$. La résolution de cette équation nous amène à x = 20,64 wagons donc 21 wagons à 12 places et 21 wagons à 16 passagers.

Une autre résolution serait d'y aller par essais contrôlés. On peut d'abord essayer avec 10 wagons de 12 et de 16 places, ces wagons peuvent transporter $10 \times 12 + 10 \times 16 = 280$ passagers. Ce nombre de wagons n'est pas suffisant, il faut alors essayer plus avec, par exemple 15 wagons de 12 places et 15 wagons pouvant contenir 16 passagers, etc.

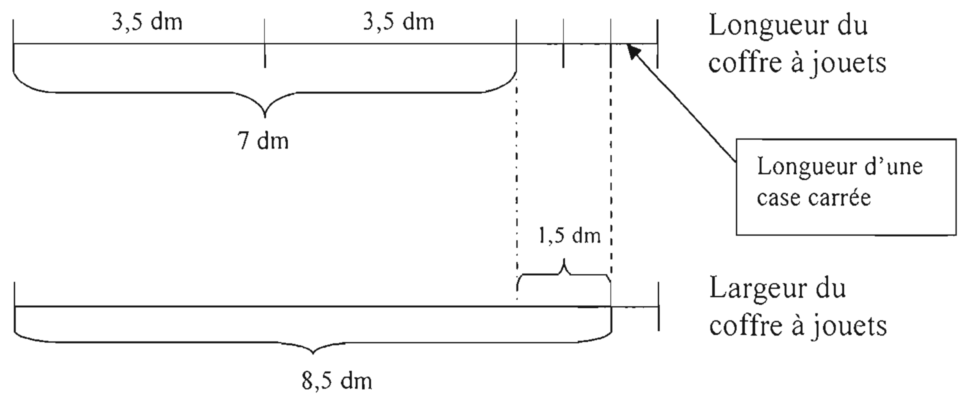
Problème 2 :

Ce problème met de l'avant une autre composante du contrôle qui est le discernement, le choix éclairé de l'inconnue. En effet, le problème demande de trouver les dimensions pour construire le coffre à jouets d'après le dessin fourni. Pour s'engager dans le problème, l'élève doit remarquer qu'il ne connaît ni les dimensions des cases carrées ni celles du coffre qui est lui aussi carré. Si on résout le problème algébriquement, on peut choisir x la longueur du côté d'une case carrée, la longueur du coffre à jouets est alors de 3,5 + 3,5 + $3x$ dm et sa largeur de 8,5 + x dm. Comme le coffre à jouets est carré, on a l'égalité entre ces deux dimensions $3.5 + 3{,}5 + 3x = 8{,}5 + x$, en résolvant cette équation on obtient x = 0,75. La mesure du côté de chaque case carrée est de 0,75 dm, on peut alors trouver la longueur du côté du coffre à jouets, soit 9,25 dm (provenant de 3,5 + 3,5 + 3.0,75 ou plus simplement de 8,5 + 0,75).

Nous pouvons également résoudre ce problème avec le support d'une illustration. Pour mieux expliciter le raisonnement utilisé, nous allons utiliser un dessin. Comme le coffre est carré, sa longueur (qui est de 3,5 + 3,5 + et sa largeur seront égales :



En soustrayant 7 dm (provenant de 3,5 + 3,5) de 8,5 dm, on obtient 1,5 dm qui correspondent à deux fois la mesure du côté d'une case carrée :

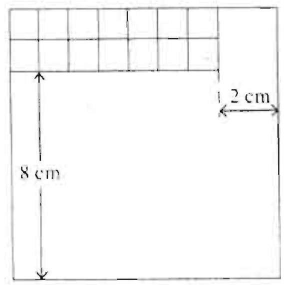


Le côté d'une case carrée mesure donc $1{,}5 \div 2 = 0{,}75$ dm et le côté du coffre mesure 9,25 dm. D'autres choix d'inconnues sont possibles, x la longueur du côté de la base carrée $[x-(3{,}5\times 2)]\div 3 = x - 8{,}5$ mais ce n'est pas le choix le plus efficace.

Pour réussir ce problème, l'élève doit donc d'une part prendre en compte toutes les caractéristiques (les cases et le coffre sont carrés), les dimensions connues et choisir stratégiquement l'inconnue. De plus, une autre composante du contrôle s'exerce ici quand l'élève vérifie son résultat en revenant au problème où il est demandé de trouver <u>les</u> dimensions manquantes.

La situation qui a été source d'inspiration pour inventer le coffre à jouets est le problème ci-dessous provenant d'un manuel scolaire français (Delord, Terracher et Vinrich, 1993) pour les élèves de troisième (14-15 ans) :

La boîte du pêcheur (d'après l'IREM de Poitiers, Repères 8 – Topiques)
Mon oncle, qui est pêcheur et bricoleur, veut se fabriquer une boîte à pêche pour son petit matériel ayant les caractéristiques suivantes : 14 cases carrées pour les hameçons disposées en deux rangées comme le dessin ci-contre. Il veut que sa boîte soit carrée, et ne sait pas quelle taille il faut donner aux 14 cases. Pouvez-vous l'aider à faire le plan du fond de sa boîte? (Mathématiques, 3[e], exercice 40 p.72).



Problème 3 :

Ce problème demande un engagement réfléchi sur les données en considérant la contrainte pour deux des items, le nombre de raquettes et le nombre de hockeys qui comptabilisent en tout 288 articles. Nous pouvons remarquer d'après les solutions d'élèves[102] *(provenant d'une recherche sur la résolution de problèmes algébriques par les élèves du secondaire)* qui s'engagent algébriquement dans le problème, qu'ils prennent en compte le nombre de ballons dans l'équation. Ainsi si x représente le nombre de ballons[103], $5x$ est le nombre de raquettes et $5x + 48$ est le nombre de hockeys. Comme pour les raquettes et les hockeys il y a 288 articles, alors on peut

[102] Ces solutions sont dans les notes de cours de MAT2028, didactique de l'algèbre (session automne 2004), cours dispensé à l'UQAM dans le cadre de la formation des futurs enseignants en mathématiques au secondaire, et tirés de la recherche de Bednarz et Janvier (1992).

[103] Nous aurions pu prendre d'autres générateurs, comme le nombre de raquettes ou le nombre de hockeys, mais les relations ne sont pas directes.

écrire $5x + 5x + 48 = 288$. Plusieurs élèves prennent en considération le nombre de ballons et résolvent l'équation $x + 5x + 5x + 48 = 288$. L'activité de contrôle assure ainsi un engagement réfléchi pour ne prendre en compte que deux des grandeurs dans l'équation. Une autre composante du contrôle apparaît lorsque l'élève vérifie son résultat en revenant au problème où il est demandé le nombre de chacun de ces trois articles.

Problème 4 :

Chacune des questions de cette situation vise à exercer une composante différente du contrôle. Ainsi, dans la première question, on demande à l'élève d'interpréter l'équation $2L + 6D = 40$, répondre correctement à cette question demande un engagement réfléchi sur l'écriture, sur le sens de cette écriture algébrique. Cette situation a été expérimentée (Bednarz et Dufour-Janvier, 1992) auprès d'élèves de secondaire 3 (14-15 ans). Les chercheures rapportent que plusieurs élèves interprètent cette équation de la façon suivante : *« 2 livres + 6 disques = 40$ »* ou *« le prix de 2 livres plus celui de 6 disques, c'est égal à 40$ »* au lieu de *« un certaib nombre de livres à 2$ et le même nombre de livres à 6$ m'ont coûté en tout 40$ »*. La lettre est ainsi associée à un objet et pas à un nombre. Ils ne voient pas que 2L représente le prix des livres, 2 étant un taux 2$/livre et L étant le nombre de livres et non pas un livre.

Dans la deuxième question, être en contrôle sur la tâche permet de détecter l'erreur. En effet, il ne s'agit pas de huit livres qui coûtent 40 dollars. Puisque chaque livre coûte 2$ et chaque disque 6$ et qu'il y a le même nombre de livres que de disques, chaque lot constitué d'un livre et d'un disque coûtera 8$, c'est le prix de tous ces lots qui est de 40$, ce prix étant obtenu par le nombre de ces lots (qui est égal au nombre de livres et donc au nombre de disques) qu'on multiplie par le prix d'un lot. L'erreur détectée par les élèves est la substitution, ainsi on n'a pas le droit d'écrire que $x = y$ car ce sont deux lettres différentes :

« $2x + 6x = 40$. Elle fait une erreur. Le x est le nombre de livres et le y est le nombre de disques, ce n'est pas la même chose, ce ne sont pas des livres.
$x = y$. C'est incorrect car le prix n'est pas le même, alors ce n'est pas la même chose (ici le x devient le prix des livres et y le prix des disques), elle ne peut pas dire que x est égal à y.

De mettre des livres et des disques ensemble, c'est incorrect, car sinon on arrive à la conclusion que tous les articles ont la même valeur et ce n'est pas vrai.

On ne peut pas parce que les disques coûtent plus chers que les livres.

L = D (ici une autre version était présentée à l'élève avec L et D), ce n'est pas égal parce que L vaut 2$ et D vaut 6$, alors il ne faut pas dire ça. » (p. 30-31).

La substitution implique l'acceptation que deux lettres différentes puissent représenter la même valeur.

Problème 5 :

Ce problème vise à regarder si les élèves sont sensibles à la contradiction (l'énoncé présente des données contradictoires) et si c'est le cas comment ils dépassent la contradiction. Pour l'analyse de ce problème, nous pouvons nous rapporter au point 1.3.2.1 de la problématique.

Problème 6 :

Nous touchons ici à une nouvelle composante de l'algèbre, la résolution d'équations. L'activité de contrôle s'exerce ici dans la perception des erreurs portant sur la compréhension de la manipulation algébrique. La résolution d'une équation est donnée et on demande à l'élève de dire ce qui est incorrect dans cette résolution. Nous avons introduit des erreurs classiques que font plusieurs élèves comme des erreurs dans la distributivité : $2(7x-1) = 14x-1$, les élèves appliquent la multiplication par 2 à la première expression $7x$, mais laissent la deuxième expression inchangée. De plus, certains élèves ressentent un malaise à avoir le x du côté gauche de l'égalité, étant habitués à écrire $x = a$ et non $a = x$, on peut se questionner ici sur le sens donné à l'égalité. Nous avons également simplifié la fraction $4/10$ directement, passant de $4 = 10x$ à $2/5 = x$, quelques élèves diront peut-être qu'il manque une étape $4/10 = x$, comme nous l'avons vu dans la problématique au point 1.3.3, certains élèves voient la résolution d'équations comme un procédé mécanique dénué de sens. Finalement, nous avons introduit une erreur sur la compréhension des différentes écritures fractionnaire et décimale, certains élèves percevant $2/5$ comme étant équivalent à 2,5. Certaines de ces erreurs ont été répertoriées par Booth (1984).

Problème 7 :

Cette situation a été inspirée de celle présentée par Hitt (2004) :

a) Résoudre l'inégalité : $0{,}2\,(0{,}4x + 15) - 0{,}8x \leq 0{,}12$

b) Vérifier que $x = 10$ est un élément de l'ensemble solution.

Elle a été réalisée sur une population de 300 étudiants de 4^e secondaire. La situation a été conçue pour faire apparaître une erreur sur la multiplication de décimaux compris entre zéro : $0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}8$ et $0{,}2 \times 15 = 0{,}30$.

Ces erreurs amènent à un trouver un intervalle solution excluant le nombre 10. C'est à la lecture de la deuxième question qu'une activité de contrôle peut s'exercer. En effet, en découvrant que 10 est un élément de l'ensemble solution, l'élève peut être, dans un premier temps, sensible à la contradiction et, dans un deuxième temps, peut dépasser cette contradiction en revenant sur la résolution et en détectant les erreurs. Sur les 300 étudiants, 229 d'entre eux n'ont pas résolu correctement l'inégalité et seulement 13 d'entre eux changeront de stratégie après avoir décelé une contradiction.

Pour notre questionnaire, nous avons modifié l'énoncé pour le rendre accessible à des élèves de secondaire 3, ces derniers n'ayant pas encore étudié les inégalités.

Problème 8 :

Se référer au point 1.3.2.1 de la problématique pour l'analyse de cette situation. L'activité de contrôle permet un engagement réfléchi dans la résolution de cette équation.

Problèmes 9 et 10 :

Ces deux situations cherchent à détecter le sens qu'accorde l'élève à la notion d'équation et à sa résolution (comme égalité conditionnelle). Le contrôle assure ici un engagement réfléchi dans l'interprétation des écritures $0.x = 0$ (déjà donnée dans l'énoncé) et $20 = 4$ (obtenue après la résolution de l'équation). Comme nous l'avons vu dans la problématique au point 1.1.1, l'interprétation de ces égalités (dans les cas où il n'y a pas de solution ou une infinité de solutions) pose des difficultés aux élèves, ces derniers étant portés à croire que la résolution d'une équation aboutit à une et une seule solution. L'activité de contrôle permet ici de donner du sens à la résolution d'équation en interprétant $0.x = 0$ comme « on cherche un nombre qui multiplié par zéro donne zéro, n'importe quel nombre vérifie cet énoncé, il y a donc une infinité de solutions, l'égalité étant toujours vraie » et dans l'interprétation $20 = 4$ comme « 20 n'est jamais égal à 4, ce qui signifie que l'égalité de départ (puisqu'elles sont toutes équivalentes), $5(2+x)+5(2-x)=4$ n'est jamais vraie, on ne peut pas trouver de nombre vérifiant une telle égalité. »

Problème 11 :

Dans la résolution de cette équation, l'activité de contrôle permet le discernement, le choix éclairé d'une stratégie de résolution efficace. Ainsi, il suffit pour trouver la valeur de l'expression $(2r + 1)$ dans l'équation $4(2r+1)+7=35$, de soustraire 7 de 35 et de diviser le résultat obtenu par 4. Sans exercer de contrôle, l'élève trouverait la valeur de l'inconnue r de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 4(2r+1)+7 &= 35 \\ 8r+4+7 &= 35 \\ 8r+11 &= 35 \\ 8r &= 24 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

Cette valeur serait ensuite injectée dans l'expression $2r + 1$, pour trouver le résultat 7. Cette stratégie est moins efficace que la première et plus coûteuse en temps.

Problème 12 :

Cette situation est la seule qui s'inscrit dans la dimension de l'algèbre de la généralisation à des fins de preuve. Une activité de contrôle permet ici de vérifier dans quels cas l'égalité donnée est vraie en utilisant des exemples numériques. L'analyse de cette situation se trouve au point 2.1.5.2.2 du cadre théorique, équation tirée de la recherche de Lee et Wheeler (1989). Il faut revenir ici au sens de l'écriture exponentielle (c'est une erreur que les élèves font souvent).

Problème 13 :

Cette situation est inspirée de celle de Lenfant (2002)[104]. L'activité de contrôle permet un choix éclairé sur les différentes formes d'écriture d'une même expression. En effet, suivant la tâche (ce que l'on veut faire de cette expression), les différentes formes, bien que mathématiquement équivalentes, ne présentent pas le même intérêt.

---

[104] Voir dans le cadre théorique le point 2.1.5.5. Nous avons adaptée la situation à des élèves de secondaire 3.

L'élève a recours à des métaconnaissances quand il explique pourquoi telle ou telle transformation peut être ou non a priori intéressante. Pour des élèves de secondaire 3, il faut partir du fait que les trois expressions sont équivalentes. Pour chacune des trois questions, il faut associer une forme d'expression avec un type d'utilisation. Ainsi, dans la première question où on demande d'estimer l'ordre de grandeur de l'expression pour $x = 10$, l'expression développée $x^2 + x - 2$ est commode, le nombre $x - 2$ étant négligeable devant x^2 pour $x = 10$. Pour la deuxième question où on demande la résolution de l'équation $2(x-4) - x + 1 - (-x^2 - 5) = 0$, l'écriture factorisée est la plus rapide pour résoudre une équation du type A(x) = 0, l'expression vaut 0 quand au moins un des facteurs vaut 0. L'expression factorisée est également la plus efficace pour calculer la valeur de l'expression pour $x = 1$ car cette valeur annule un des facteurs (troisième question).

APPENDICE C
PROTOCOLE D'ENTREVUE

Il était important que les élèves comprennent l'objectif de l'entrevue qui n'est pas d'enseigner, mais de comprendre leur processus de pensée. Ainsi, nous finissions souvent l'entrevue en disant *« Ok c'est beau, j'ai bien compris maintenant ce que tu voulais me dire. »* Dans les cas où les élèves nous demandaient *« est-ce que j'ai bon, c'est quoi la solution ou la réponse...* » nous leur répondions *« Qu'est-ce que tu en penses? Je veux juste comprendre ce qui se passe quand tu fais ce problème, ce n'est pas la réponse qui est importante... On va travailler tout ça dans le cours... »*

En entrevue, nous sommes revenus sur trois situations du questionnaire écrit. Une première situation portait sur les métaconnaissances :

Un enseignant donne à ses élèves l'expression algébrique suivante :

$$2(x-4)-x+1-(-x^2-5)$$

Les élèves se regardent, perdus.... « Wow ! C'est bien compliqué ! » Élodie s'exclame alors « regardez, je l'ai transformé et je l'ai écrite comme ça :
$\mathbf{x^2+x-2}$ ». Marc répond « ben moi je l'ai transformé aussi et j'ai trouvé
$\mathbf{(x-1)(x+2)}$! »

« C'est super ! » dit l'enseignant. Ce dernier est très content, il te propose à toi de répondre à trois questions.
a) Laquelle de deux écritures, celle d'Élodie ou de Marc vas-tu utiliser pour savoir à peu près combien vaut l'expression algébrique quand x vaut 10. Pourquoi ?
b) Si tu veux résoudre $2(x-4)-x+1-(-x^2-5)=0$, laquelle des équations vas-tu choisir de résoudre : $x^2+x-2=0$ (celle d'Élodie) ou $(x-1)(x+2)=0$ (celle de Marc) ? Pourquoi ?
c) Si tu veux remplacer x par 1 dans l'expression algébrique de l'enseignant, ça risque d'être long.... Laquelle des deux autres expressions vas-tu plutôt choisir ? Pourquoi ?

Sur un carton, nous avons écrit en gros les trois écritures identifiées respectivement par Élodie, Marc et l'enseignant. La tâche leur a été de nouveau posée de la façon suivante :

« Si je te demandais de trouver vite, sans calculatrice, ce que vaut ceci *(nous avons montré l'écriture de l'enseignant)* quand x vaut 10, laquelle choisirais-tu parmi les deux autres ? Pourquoi? »

Quand nous sentions que les élèves ressentaient des difficultés vis-à-vis des différentes écritures, nous leur demandions de dire ce qu'ils comprenaient de chacune d'elles. Pour les deux autres questions, la tâche était posée de la façon suivante :

« Un élève te demande de trouver les solutions de cette équation *(les valeurs pour lesquelles l'égalité qui est là est vérifiée)*, laquelle choisirais-tu? Pourquoi? »

« Si on te demande vite de calculer ceci *(on montrait l'écriture de l'enseignant)* quand x vaut 1, laquelle choisirais tu? Pourquoi? »

Dans certains cas (quand le temps le permettait), nous sommes revenus plus globalement sur ces écritures en demandant « Trouves-tu que certaines manières d'écrire parmi toutes celles-ci sont plus intéressantes que d'autres? Qu'est-ce qui te fait dire cela? »

Dans la résolution de problèmes, la situation visant la sensibilité à la contradiction et le dépassement de celle-ci est le suivant :

Au restaurant, une tasse de café et trois croissants coûtent 2,70$. Deux tasses de café et deux croissants coûtent 3$. Trois tasses de café et un croissant coûtent 3,50$. Trouve le prix d'une tasse de café et d'un croissant. Explique comment tu as fait pour trouver.

Dans un premier temps, on demandait à l'élève de reformuler le problème pour quelqu'un d'autre, de manière à ce que celui-ci le comprenne et puisse le résoudre. Du temps était alloué à l'élève pour regarder le problème, puis l'énoncé lui était retiré et il lui était demandé de raconter l'histoire dans ses mots. Dans un deuxième temps, la feuille lui était remise et nous lui demandions *« maintenant peux-tu résoudre le problème? »* Quatre cas peuvent alors se présenter :

- Si l'élève a tenté des essais sans voir aucune contradiction, nous lui demandions *« Peux-tu m'expliquer ce que tu as fait? »*
- Si l'élève était bloqué, notre intervention consistait à lui dire *« Qu'est-ce qui t'embête dans ce problème? »*
- Dans les cas où les élèves résolvaient et s'apercevaient qu'il y a quelque chose qui ne marchait pas, nous lui demandions d'expliciter ses pensées *« Qu'est-ce qui t'embête? Qu'est-ce qui ne fonctionne pas? »*
- Pour les élèves qui étaient déjà sensibles à la contradiction, nous essayions de comprendre sa démarche *« Je veux être sûre de comprendre ce que tu as fait, peux-tu m'expliquer ce que tu as fait ? »*

Certains élèves avaient écrit sur leur questionnaire qu'il leur manquait des données. Dans ce cas, nous leur demandions de nous expliquer pourquoi *« Pourquoi tu dis cela? »*

Dans la composante de l'algèbre touchant à la résolution d'équation, nous avons demandé en entrevue la situation visant un engagement réfléchi lié au sens de l'écriture algébrique :

Alexandre a résolu l'équation ci-dessous. Aide-le à continuer. $2x + 3 = 3(x - 2) - x + 9$ $2x + 3 = 3x - 6 - x + 9$ $2x - 3x + x = -6 + 9 - 3$ $0.x = 0$

Pour cette situation, nous remettions à l'élève la réponse qu'il avait donné dans le questionnaire et on lui demandait *« peux-tu m'expliquer ce que tu as fait? »*.

Dans le cas où la réponse de l'élève était $x = 0$, nous lui demandions d'abord *« Pourquoi tu me dis que x = 0 est solution? Comment tu le sais? »*, ensuite *« est-ce que cela se pourrait qu'un autre nombre soit solution? »*. Nous nous attendions à ce que l'élève essaie les valeurs données dans l'équation (dans ce sens la situation numéro sept [105] que nous aurions vu auparavant allait nous aider). Nous nous attendions à intervenir de la façon suivante *« est-ce que pour cette valeur de x, l'égalité est vérifiée? »*.

Dans le cas où l'élève avait répondu que la résolution était finie, nous leur demandions de nous expliquer pourquoi *« Pourquoi dis tu cela? Qu'est ce que tu veux dire? »* Nous nous attendions à ce que l'élève dise qu'il faut trouver une valeur pour x, dans ce cas-ci, nous leur demandions *« quelle est la valeur de x dans ce cas? »* Nous revenions alors au cas précédent sûrement ($x = 0$).

[105] La situation est la suivante :
a) Résous l'équation suivante : $0{,}8x - 0{,}2(0{,}4x + 6) = 6$.
b) Vérifie que $x = 10$ est solution de cette équation.

APPENDICE D
LISTE DE PROBLÈMES REJETÉS ET LES ARGUMENTS RELATIFS À UN TEL CHOIX

Amsterdam
En allant à Amsterdam, j'ai croisé un homme avec sept femmes. Chaque femme avait sept sacs, chaque sac avait sept chats, chaque chat avait sept chatons. Chatons, chats, sacs, femmes, combien allaient à Amsterdam?

Ce problème a été choisi par la chercheure car il requiert un temps d'arrêt, un engagement réfléchi dans la lecture de l'énoncé. En effet, pour résoudre ce problème il ne faut rien calculer puisqu'il n'y a qu'une seule personne qui va à Amsterdam, celle qui présente le problème.

Bande de papier
Pliez mentalement en deux parties égales une longue bande de papier. Refaites cela deux fois. Combien y a-t-il de plis? Combien y en aurait-il si vous faisiez cela 10 fois en tout?

Ce problème nécessite une prise de décision sur ce qui est le plus approprié à considérer pour la résolution (le nombre de morceaux permet de trouver le nombre de plis).

Lors de la rencontre, l'enseignante rejette ces deux situations qui ont plus leur place en secondaire 1.

> Nadia : Bon, le problème d'Amsterdam puis les bandes de papier, ça c'est plus de secondaire 1 mettons, je les enlèverai.

Problème du magasin
Un magasin accorde un rabais de 20% et facture la taxe de vente de 15%. Qu'est-ce que la caissière devrait d'abord calculer, le rabais ou la taxe? Pourquoi? Explique.

Ce problème sollicite une réflexion (pour anticiper le résultat) plutôt qu'un calcul. Il force de plus un passage à une généralisation, à une preuve. Nadia met de côté ce problème invoquant un manque de temps.

Nadia : on n'aura pas le temps de tous les faire *(les problèmes).*

Les problèmes retenus sont : les Robots, les abeilles et les bactéries (voir chapitre IV)

APPENDICE E
DOCUMENT DE RÉVISIONS DISTRIBUÉ AUX ÉLÈVES PAR L'ENSEIGNANTE AVANT L'EXPÉRIMENTATION

Ce document portait sur le contenu vu en algèbre par l'enseignante. Dans deux des exercices, le calcul des valeurs numériques d'expressions algébriques était requis :

Calcule la valeur numérique des expressions suivantes si $x = -3$.

a) x^2 b) $-x^2$ c) $3x^2$ d) $-2x^3$ e) $(5x)^2$

f) $5x^2$ g) $(-3x)^2$ h) $-(-2x)^2$ i) $(2x)^0$

Calcule la valeur numérique des expressions suivantes si $a = 3$; $b = -2$ et $c = -1$

a) $3a^2b$ b) $ab + bc$ c) $-2a^3b^2c$ d) $4a \div 3bc$

e) $3a^2b \div 18\ bc$ f) $\dfrac{a^2 - b^2}{ab - c}$

Plusieurs autres exercices demandaient d'effectuer des opérations d'expressions algébriques et ensuite de réduire, nous présentons ci-dessous quelques exemples :

a) $2x + 6x =$ b) $2xy - 5x =$ c) $\dfrac{3a^2b}{5} - \dfrac{2a^2b}{3} =$

d) $2xy - 5x =$ e) $(2a^2 - a) - (-a^2 + 5a) =$

f) $(-99ba^2 + 45ab) + (-25a - 31b + 7) - (-29a^2b - 39ba - 25a - 5b - 56) =$

g) $(\dfrac{xy}{2} - 5) + (-\dfrac{xy}{6} - y + 9) - (3xy - 12) =$

Enfin deux exercices portaient sur la résolution d'équations comme :

a) $2x + 5\dfrac{x}{3} = 1$ b) $x + 5 = x - 3$ c) $\dfrac{2x+3}{5} = 4$

d) $-2(x + 4) + (6x + 20) = (x + 6) + 3(x + 2)$

e) $\dfrac{2x-5}{3} - \dfrac{3x+1}{4} = \dfrac{x}{6} - \dfrac{7-5x}{12}$

APPENDICE F
EXPLOITATION EFFECTIVE (EN CLASSE) DU PROBLÈME DES ROBOTS (BLOC 1)

I) Analyse de l'intervention autour du problème des robots lors de la séance du 8 mars

Dans l'exploitation du problème des robots, nous pouvons distinguer trois moments clés : la formulation du problème par les élèves, la résolution en équipes et le retour sur le problème. Nous avons relevé au fur et à mesure les stratégies d'intervention effectives en classe intéressantes du point de vue du contrôle, et celles qui freinent ce possible développement. De plus, nous avons en parallèle analysé l'engagement et la résolution des élèves du point de vue du contrôle.

Notre expérimentation a débuté avec la situation des robots lors de la séance du 8 mars 2006. Les élèves ont été placés en équipes pouvant aller jusqu'à 4 personnes. Dans un premier temps, nous leur avons demandé de lire individuellement le problème, un élève étant par la suite désigné pour raconter dans ses propres mots la situation. Il leur a été également demandé, lors de la résolution, de ne pas effacer mais de barrer pour que nous puissions avoir des traces de leur raisonnement. Nous reprenons sous forme de vignette les extraits significatifs de cette séance, en mettant en évidence des éléments (dans les commentaires) qui seront repris lors de l'analyse.

Sur l'entrée dans le problème des robots	
Extrait	**Commentaires**
Nadia : je vous passe le premier problème. Voici comment ça fonctionne, le premier problème, je vais vous laisser un dix minutes, vous le lisez, on va vous demander si vous comprenez le problème	Dans la présentation de la tâche par Nadia, nous pouvons constater un intérêt : - à voir s'ils comprennent le problème
et j'aimerais ça que vous écrivez votre solution. Fais que vous avez tout cet espace là, tout en arrière pour écrire. Si vous avez besoin d'une autre feuille... bon, ce n'est pas si long que ça quand même vous allez voir. Si vous avez besoin d'une autre feuille pour écrire d'autres choses parce que vous vous êtes dit « ça ce n'est pas bon, on barre puis on recommence, ok? » Puis là pendant ce temps là Mireille et moi on va se promener et on va regarder les différentes solutions, tout ça puis ça se peut qu'on vous donne une acétate pour écrire votre solution dessus	- à voir la démarche de l'élève (écrire la solution / ne pas barrer / acétate pour écrire la solution) - à repérer les stratégies des élèves (en circulant entre les rangées)
mais on ne revient pas tout de suite sur ce problème là, c'est au prochain cours. Fait que ne vous demandez pas « c'est-tu bon c'est-tu pas bon, est-ce que je l'ai? » On ne vous répondra pas tout de suite. C'est correct? (8 mars, 6-18)	- un retour différé annoncé (de sorte que toute la requête de validation de la part des élèves à l'endroit de l'enseignante sur leur solution soit aussi différée)
Autour de la reformulation par les élèves	
Nadia : Bon Claude, qu'est-ce que ça raconte, qu'est-ce que tu as compris? Qu'est-ce que ça dit cette affaire là? Dans tes mots.	- Sollicite la reformulation du problème par l'élève dans ses mots
Claude : c'est genre un expert là, il construit des robots. **Nadia** : il construit des robots.	- Reformule en écho à l'élève. Nadia reprend les propos de l'élève. En procédant ainsi, elle ramène également la formulation au groupe.
Claude : non mais... il est en train de construire un robot ça va	Dans cette reformulation par l'élève, on peut remarquer

valoir 5 minutes puis après ça il en construit un autre. Puis là le gars il a trouvé, genre, qu'un robot il peut en faire deux. **Nadia** : ouais. **Claude** : ok c'est ça. Ah ok, après il va voir sa supérieure puis elle est en réunion, puis il doit l'attendre trois heures, puis là la supérieure elle est alarmée. (8 mars, 39-48)	qu'il reprend toutes les informations ponctuelles de la situation (construit un robot, 5 minutes pour cela, découverte, possibilité d'en faire deux, ...) mais que les liens entre toutes les données ne sont pas là.
Nadia : Ok. Est-ce qu'il y en a qui veulent expliquer un peu mieux qu'est-ce que c'est qui se passe? Miranda?	- L'enseignante relance vers un autre élève / se prononce sur la formulation de l'élève précédent (il n'y a pas de renvoi de la validation de celle-ci en groupe).
Miranda : Ben en fait c'est que un robot ça va toujours comme se multiplier de plus en plus parce qu'un robot il va en fabriquer 2 puis après ça il va s'en aller mais les deux robots ils vont en fabriquer deux autres, fait que c'est ça. (8 mars, 50-54)	Il est intéressant de remarquer que cette élève simule l'action : *un robot en fait 2, il va s'en aller mais les deux robots vont en fabriquer deux autres*. Elle met de plus en évidence la structure multiplicative qui émerge : *ça va toujours se multiplier de plus en plus.*
Nadia : ok. Est-ce qu'il y en a qui ont des questions là dessus, qui n'ont pas compris ce qui se passe ? Est-ce que vous avez compris ce que Miranda a dit, c'est clair ?	- Un renvoi au groupe sur la compréhension de la formulation, sa clarté
Carmen : la supérieure elle a peur qu'il y en ait trop c'est ça ?	- Un indice d'anticipation (de l'ordre de grandeur) de la part d'une élève de la classe. On ne sait pas ce que l'élève entend par « trop », est-ce que par exemple, un millier de robots représentent *trop* de robots?
Nadia : ah ben là je ne peux pas te répondre. **Carmen** : oui mais c'est quoi le rapport, c'est quoi que ce serait ? **Nadia** : il faut que tu relises tout est là dedans. (8 mars, 55-63)	- Refuse de répondre à la requête de validation sur ce qu'elle avance. - Renvoie l'élève à la tâche, elle peut elle-même répondre à la question.

Dans l'analyse de cette première phase portant sur la reformulation du problème, des stratégies d'intervention sont mises en évidence (certaines d'entre elles ayant déjà été explicitées lors de la planification et en quelque sorte confirmées dans l'action), stratégies susceptibles ou non de favoriser le développement d'une activité de contrôle chez les élèves. Nous pouvons également relever des indices d'une activité de contrôle chez certains élèves, ou, chez d'autres, des difficultés de contrôle sur le processus de résolution sous l'angle de la représentation qu'il se construit du problème.

Stratégies d'intervention	**Indicateurs de contrôle chez les élèves**
- Reformulation du problème par les élèves/ dans leurs mots. (Va chercher la représentation que les élèves se construisent du problème ; force une telle représentation) - Circuler entre les rangées, demander aux élèves d'écrire toute leur démarche, de ne pas barrer. (Repère les stratégies des élèves, va chercher les stratégies possibles des élèves). - Un retour différé annoncé, repousser toute requête de validation de la part des élèves à son endroit sur leur solution - Repousser la requête d'une élève sur la validité de ce qu'elle avance, renvoyer celle-ci au problème (Une validation qui n'est pas prise en charge par l'enseignante). - Validation indirecte de la formulation de l'élève, pas de renvoi de validation au groupe *(une stratégie qui freine le possible développement du contrôle)*	Un indice d'anticipation de l'ordre de grandeur de la réponse avant toute résolution (Carmen). Indicateurs de contrôle sur le processus de résolution (sous l'angle de la construction d'une représentation) : - Peu en contrôle sur les relations entre les données dans sa formulation : les informations factuelles de la situation sont présentes mais les liens entre toutes ces données ne sont pas là (Claude). - Un indice de contrôle : mise en évidence de la structure multiplicative du problème (Miranda)

L'enseignante va conclure cette phase de formulation du problème et amorcer la phase de résolution.

Conclusion sur la formulation et amorce de la résolution	
Extrait	**Commentaires**
Nadia : bon, fait que vous répondez à la question, je pense que tout le monde a compris la situation. Vous répondez à la question, parlez-vous-en, essayez de déceler pourquoi elle panique, qu'est-ce qui se passe dans la situation. Vous trouvez une solution, vous écrivez tout. (8 mars, 65-68)	- Une mise en route orientée sur le *pourquoi*.

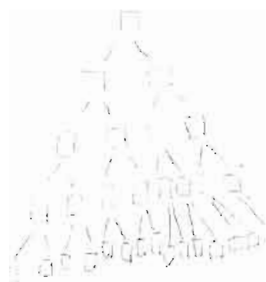
Les élèves résolvent le problème en équipe, nous circulons dans la classe, observant les stratégies utilisées et les échanges produits à l'intérieur des équipes. Leurs productions sont ensuite recueillies et nous retranscrivons sur un transparent (qui sera utilisé au prochain cours) les différentes démarches à des fins d'explication et de validation en grand groupe.

II) Analyse du retour sur le problème des robots

La période suivante (15 mars 2006) débute par un bref rappel de la situation des robots, les différentes stratégies mises en évidence après analyse sont présentées aux élèves.

Une analyse des productions des élèves

Nous avons noté que la majorité des élèves se sont approprié la situation problème en faisant une représentation en arbre comme dans l'exemple suivant :



Presque tous les élèves trouvent le nombre de périodes de 5 minutes qu'il y a en 3 heures (après avoir transformé les 3 heures en 180 minutes) :

$60 \cdot 3 = 180$

$180 \div 5 = 36$

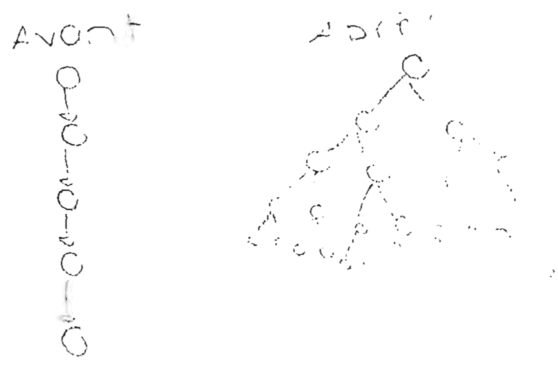
D'après l'analyse des productions, nous avons répertorié 12 élèves sur 30 qui laissent des traces dans leurs copies d'anticipation de l'ordre de grandeur : *« elle panique car elle voit qu'il y a une surcharge de robots », « ...trop de robots », « ...beaucoup de robots », « ... un nombre gigantesque de robots ».* De plus, nous pouvons remarquer que 7 élèves[106] sur 30 répondent à l'autre question du problème *« Combien de robots l'expert s'attend-il qu'elle trouve ? ».* Quelques élèves donnent

[106] Ces élèves sont Carmelle, Geneviève, Éva, Jennifer *(1 équipe)* et Claude, Mathieu, Derreck *(faisant partie de deux équipes différentes).*

des réponses en mots « *Il croyait avoir seulement doublé la production mais elle fait beaucoup plus que doubler. Il pense qu'elle va trouver 2 fois plus de robots* ». Ce qu'ils notent de la façon suivante :

ce qu'il croyait : $2a$
ce qu'il en est : 2^a

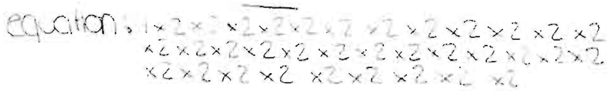
Des représentations en arbre illustrent les deux situations, linéaire et exponentielle.



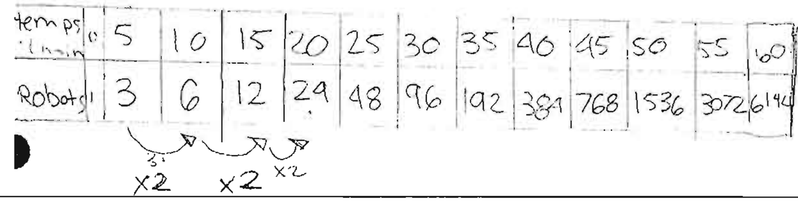
Nous avons pu distinguer différentes stratégies utilisées pour la résolution du problème des robots que nous avons répertorié dans le tableau ci-dessous :

Stratégie 1 (14 élèves) Recours à l'exponentielle	**Stratégie 2 (5 élèves)** Calculs effectués au long.
<u>Réponses</u> : 68 719 476 730 (2 élèves) 68 719 476 740 (2 élèves)[107] $6{,}871\times10^{10}$ (1 élève) $6{,}871947674\times10^{10}$ (4 élèves) $2^{36}-1$ = 68 719 476 730 (2 élèves) 68 719 476 740 000 000 000 (2 élèves) 6,872 (1 élève) : l'élève ne perçoit pas que sa réponse n'a pas d'allure.	$1\times2=2$, $2\times2=4$, $4\times2=8$, $8\times2=16$, $16\times2=32$, etc. <u>Réponse</u> : 68 719 476 730 (certains remarquent qu'ils obtiennent deux réponses différentes, cette dernière et 68 719 476 740).
Stratégie 3 (2 élèves) Utilisation de l'écriture au long	**Stratégie 4 (2 élèves)** Les élèves précisent qu'il faut

107 On peut remarquer que dépendamment des calculatrices, les élèves trouvent soit 40 unités soit 30 unités.

<table>
<tr><td></td><td>additionner le nombre de robots obtenu à chacune des étapes.

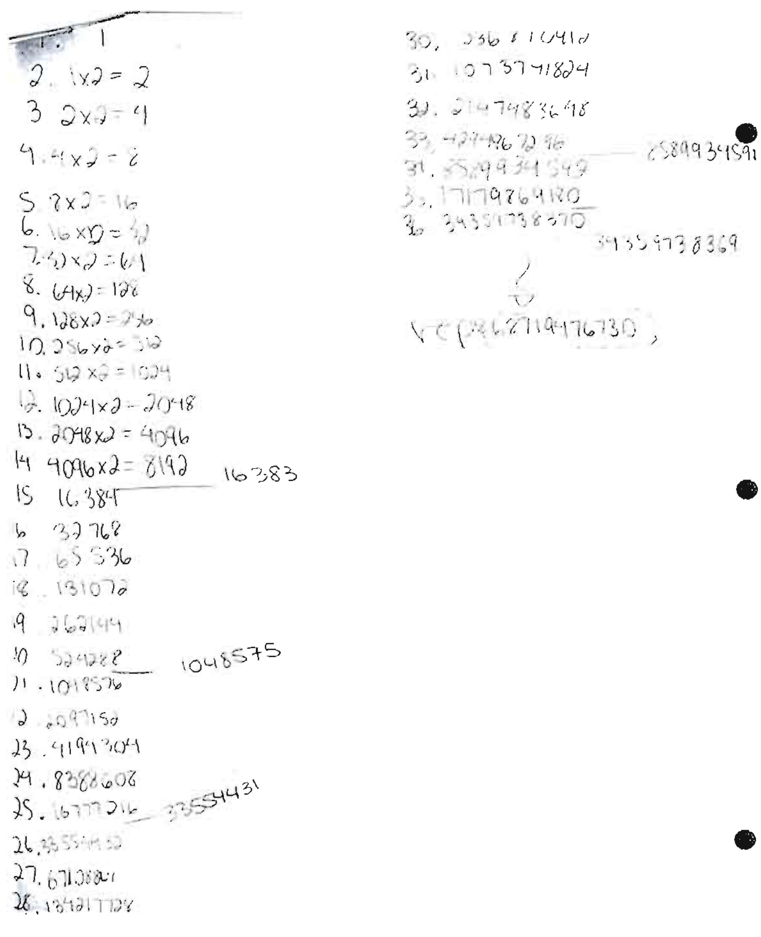
Un de ces élèves écrit :
$1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{36}$

L'autre élève fait des multiplications successives jusqu'à la fin :
1.2 = 2, 2.2 = 4, 4.2 = 8, 8.2 = 16, etc. et précise qu'il faut ajouter chacun des résultats obtenus.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Stratégie 5 (3 élèves)
Les élèves procèdent à des multiplications successives mais ils comptent dans leur deuxième étape le premier robot et les deux robots qu'il fabrique donc en tout 3 robots, ce sont ces trois robots qui serviront pour générer le reste des robots (qu'on va doubler).
<u>Réponse</u> : 103 079 215 104 robots
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Réponses erronées (5 élèves)
(pas de contrôle)
36^2 (2 élèves)
(2.n).39 = R (2 élèves)
(36.n) . 2 (1 élève)</td></tr>
</table>

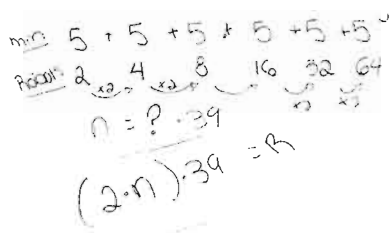
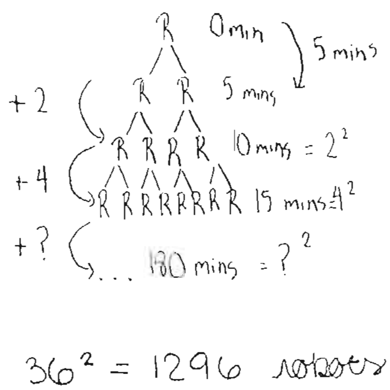
Les productions des élèves permettent de les situer sur le plan du contrôle. Pour certains il y a le passage vers une écriture plus efficace (l'exponentielle, stratégie 1 et 4). Cependant, nous pouvons noter chez deux élèves des difficultés autour du calcul de l'exponentielle avec la calculatrice (réponse obtenue 68 719 476 740 000 000 000) et une absence de questionnement pour un autre élève quant à la réponse 6,72 robots (stratégie 1). D'autres élèves ont perçu la structure multiplicative du problème mais n'utilisent pas une stratégie efficace de calcul (stratégies 2 et 5). Les deux équipes qui ont procédé par le calcul de multiplications successives (stratégie 2) sont arrivées à trouver la formule $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ qu'ils verbalisent en mots pour l'une des équipes :

> « Nous remarquons que nous devons pendant 36 phases multiplier le chiffre par 2. Pour le total de tous les chiffres des autres phases en haut, tu enlèves un et tu sais le total avant le chiffre que tu as enlevé un. *(Sandra)* »

Nous constatons une verbalisation d'une régularité numérique hors contexte comme nous pouvons le voir dans la production de cette élève :



L'autre équipe arrive à la conclusion après avoir effectué tous les calculs que ça revient à l'addition « simplifiée » 2 . 2^{36}. *(Nicolas).* Nous n'avons pas de traces pour comprendre comment l'élève a procédé pour en arriver à cette expression. Ces élèves sont toutefois sur une relation entre les nombres, quittant par ce fait tout lien avec le contexte. En ce qui concerne les démarches erronées, les copies des productions des élèves sont les suivantes :

Exemple 1	Exemple 2
	

Dans le premier exemple, les élèves de la classe n'ont pas réussi à retracer le raisonnement sous-jacent comme nous allons le voir ci après. Sur leur copie, l'équipe précise que « *nous avons résolu le problème par l'algèbre.* » Nous pouvons constater dans ces deux exemples l'écriture de la situation sous la forme d'une suite arithmétique mettant en relation les minutes *(représentant le rang)* et le nombre de robots *(représentant les termes)*, et la recherche d'une règle algébrique entre les minutes et le nombre de robots.

Une analyse du retour collectif en classe

L'enseignante commence par dire aux élèves qu'elle a remarqué qu'une grande majorité d'entre eux étaient partis d'une représentation de la situation en arbre.

Mise en route du retour sur le problème des robots	
Extrait	**Commentaires**
Nadia : (...) je sais qu'il y en a beaucoup d'entre vous quand je me promenais vous avez commencé par faire un petit dessin pour comprendre un petit péu ce qui se passait, donc il y en a beaucoup on retrouvait des dessins comme ça *(Nadia montre sur acétate une représentation de la situation en arbre).* Et puis vous vous êtes peut-être aperçu que ça va être long de dessiner ça 36 fois parce qu'il y a 36 périodes de 5 minutes. Donc 36 périodes de 5 minutes fait que là il y en a qui se sont dits « ça va être long à dessiner », fait que là vous vous êtes mis à faire autre chose un peu plus... mathématique qui prenait moins de place aussi parce que ça c'est mathématique mais ça prend de la place quand même, ce n'est pas très efficace (15 mars, 14-25).	- L'enseignante fait une synthèse de ce qu'elle a vu en circulant dans les rangées (c'est elle qui montre le support en arbre utilisé, elle ne demande pas aux élèves d'expliquer ce qu'ils ont fait). - Elle expose ce qu'on pu constater les élèves : la non efficacité de ce recours à l'arbre pour trouver combien il va y avoir de robots, et le passage qu'ils ont été amenés à faire à une stratégie plus efficace qu'elle qualifie de plus mathématique (là encore c'est elle qui explique, les élèves ne sont pas sollicités dans cette explication).

L'enseignante fait ensuite un retour sur les différentes stratégies. Elle choisit tout d'abord des élèves ayant utilisé la deuxième stratégie (calculs un à un tout au long) pour amorcer le retour.

Autour de la deuxième stratégie :

Extrait	Commentaires
Nadia : il y en a qui ont fait des fois 2, de grosses séries de calculs tout le long de la feuille. Ça marchait quand même. Donc ça c'est correct. *(L'enseignante fait référence à la stratégie 2)* (…) Il y en a qui ont mis ça tout de suite en exposant parce qu'ils se sont dit « fois 2, fois 2, fois 2, 36 fois, ça fait *2 exposant 36* ». C'était pas beaucoup de personne, il y en a plusieurs qui se sont aperçus que c'était tous pareil, que ça faisait un exposant *(Nadia montre l'écriture* 2^{36} *utilisée dans la stratégie 1)*, ok? (15 mars, 41-48)	- L'enseignante relève la lourdeur et le peu d'efficacité de faire tous les calculs et met de l'avant l'utilité de l'écriture exponentielle : elle valide la stratégie 1 comme plus efficace que la stratégie 2 (c'est elle qui montre les deux stratégies, qui les compare, et montre l'intérêt de l'une par rapport à l'autre).
Nadia : j'ai eu ici des explications en mots « On doit pendant 36 phases multiplier le chiffre par 2 pour le total de tous les chiffres des autres phases en haut si tu enlèves 1 et tu sais le total avant le chiffre que tu as enlevé 1 ». Qu'est-ce que ça veut dire? Je ne sais pas qui a écrit ça là… Est-ce que la personne elle se reconnaît, elle ne veut pas le dire? **Sandra** : non c'est moi, c'est correct, ça va aller. **Nadia** : qu'est-ce que tu voulais dire là dedans Sandra? **Sandra** : on a fait la liste tout le monde puis là… ben, on a fait fois 2, fois 2, fois 2 puis là on a multiplié et on a écrit ce que ça donnait puis là moi je devais faire *(on n'entend pas)* je me suis aperçue que le total de toute la série ça donnait le même chiffre que ce qui était en bas. Ce qui était en haut donnait le même chiffre que ce qui était en bas moins 1. **Nadia** : moins 1 tout le temps, donc c'est ça que tu as écrit. **Sandra** : ouais. **Nadia** : ok. Fait ça fait du sens quand on voit toute ta série de chiffres là, mais là tout seul comme ça. **Sandra** : ouais. (15 mars, 46-63)	- L'enseignante demande des éclaircissements sur les explications données dans une des copies. - Sandra est axée sur une relation entre les nombres, sa verbalisation est une verbalisation hors contexte. - L'enseignante fait signe qu'elle a compris la démarche de l'élève.

Plus loin dans la séance, l'autre équipe ayant résolu avec la stratégie 2 explicite sa démarche.

Extrait	Commentaires
Nicolas : ce qu'il faut faire c'est 2 à la 36 fois 2 moins 1.	
Nadia : moins 1, ça ça va avec le moins 1 de Sandra tantôt c'est ça?	- L'enseignante fait des liens entre les stratégies des élèves.
Nicolas : oui.	
Nadia : ok. Pourquoi fois 2? Je te répète juste la question d'Émilie là.	- Elle sollicite une justification : l'enseignante reprend la question d'un élève *« Pourquoi fois 2? »*
Nicolas : parce que…moi j'ai fait tous les calculs, ensuite je les ai tous additionnés puis je me suis rendu compte que ça donnait toujours le chiffre d'après moins 1.	
Nadia : ouais, ok. Ça c'est que Sandra disait tantôt « quand je les ai additionnés, je me suis aperçue que ça donnait toujours le chiffre d'après moins 1. »	- L'enseignante reprend les propos de l'élève précédemment.
Nicolas : donc après en avoir additionné une coupe je me suis dit que ça ne donnait rien de continuer donc j'ai fait la formule. (15 mars, 133-142)	- Nicolas généralise la formule à partir de quelques cas particuliers.

L'enseignante revient ensuite plus particulièrement sur la stratégie 1 et l'interprétation du résultat obtenu avec la calculatrice.

Retour autour de la stratégie 1

Extrait	Commentaires
Nadia : ok. Donc là le 2 exposant 36, ceux qui ont pitonné ça sur la calculatrice, ça donnait quelque chose qui ressemblait comme ça là. *Nadia montre sur l'acétate le résultat de cette opération :* $2^{36} = 6.871947674 \cdot 10^{10}$ **Nadia** : 6 virgule 87 quelque chose, puis là c'était peut-être pas	

toujours écrit comme ça là, des fois il y avait un petit 10 écrit en haut là. Donc ça c'est la notation scientifique on va en reparler plus tard dans l'année, mais ça veut dire qu'on fait fois 10 exposant 10 et là je vous avais marqué sur le tableau 10 exposant 10 qu'est-ce que ça voulait dire, ben c'est 1 avec 10 zéros après là, un gros méchant nombre. Fait que quand je fais 10 exposant 10, ça veut dire que je multiplie par 10 tout le temps, donc ça faisait un gros gros nombre de robots et c'est pour ça que la madame elle était inquiète. (64-73)	- L'enseignante prend là encore en charge l'explication de la stratégie et se prononce sur la question *« Pourquoi la supérieure panique-t-elle? »*.

Nadia présente également quelques démarches erronées à des fins de validation en classe.

Autour des démarches erronées

Extrait	Commentaires
Nadia : On a eu d'autres choses aussi, il y a des gens qui ont une formule comme ça là *36n fois 2* ou *(2n) fois 39*. *(...)* Est-ce que ça c'est bon cette formule là? Moi je vous pose cette question, on a eu ces formules là qui sont apparues, est-ce que ces formules là sont bonnes pour calculer le nombre de robots? Pourquoi? Sam toi tu dis non. Pourquoi elle n'est pas bonne?	- L'enseignante renvoie la validation des formules à la classe en insistant sur le *pourquoi*.
Sam : la première je ne sais pas *((2n).39)*, mais la dernière *(36^2)* c'est sûr qu'elle n'est pas bonne. **Nadia** : la dernière n'est pas bonne pourquoi? *(Nadia montre la deuxième formule).*	- L'enseignante insiste sur le *pourquoi,* renvoie la validation au groupe.
Sam : c'est 2 à la 36 et non 36 à la 2, sinon ça ne peut pas marcher.	- L'argument de l'élève repose sur le fait que 1296 robots ne sont pas assez de robots, argument qui repose sur le fait que l'on doit avoir beaucoup de robots
Nadia : 2 à la 36 et 36 à la 2 ce n'est pas pareil, vraiment pas là,	- L'enseignante explicite les propos de Sam au reste de la

on voit la différence entre les deux réponses. *(Nadia montre les deux résultats sur l'acétate : $36^2=1296$ et $6,87.10^{10}$).* Oui, Christine.	classe
Christine : mais pourquoi 2n entre parenthèses fois 39? D'où il vient le 39?	
Nadia : bon, c'est quoi ce 39? Il vient d'où? Peut-être que la personne elle a mal calculé combien qu'il y avait de 5 minutes en 3 heures, ça c'est une affaire. Mais pourquoi ce n'est pas 2n pourquoi c'est… 2n ça voudrait dire quoi?	- Nadia utilise la question de Christine pour renvoyer la validation de la première formule au groupe
Silence dans la classe.	
Un élève : deux fois… *(il s'arrête là).*	
Nadia : deux fois le nombre de…	- L'enseignante remet les élèves en contexte
Miranda : ben deux fois le nombre de robots qui se sont faits par robot…	- Miranda tente une explication en contexte.
Nadia : ouais….	
Christine : mais il y a le nombre de périodes après, 39.	- Christine essaie de donner du sens en contexte
Nadia : ben le « n » ça veut dire quoi vous pensez? C'est un nombre de quelque chose, il faut que ce soit un nombre de robots, êtes-vous d'accord? Fait ça ça représente quoi d'abord cette formule là dans la situation, ça dit quoi?	- Renvoie de l'enseignante à la situation
Christine : deux fois le nombre de robots par 39 minutes, ben…	- L'élève essaie d'expliciter une formule qui n'a pas de sens en contexte, le 39 qui représente le nombre de périodes de 5 minutes devient 39 minutes.
Nadia : ok, fait qu'on fait deux fois le nombre de robots, est-ce que c'est logique? *Silence.* Ben on fait deux fois le nombre de robots à chaque fois non? Et le fois 39 c'est… mettons le nombre de périodes de 5 minutes donc ils font 39 fois, je double 39 fois les… robots, est-ce que c'est bon cette formule là ou ce n'est pas bon?	- L'enseignante tente une explication en contexte pour déstabiliser les élèves - Elle renvoie encore une fois la validation de la formule au groupe
Sam : c'est pas bon. *(Il parle très doucement, Nadia ne l'entend pas, mais il parle à côté de la caméra).*	
Nadia : qu'est-ce qui ne marche pas avec et si c'est bon pourquoi?	- Insistance sur le *pourquoi*, elle renvoie là encore à la

Silence dans la classe. **Nadia** : c'est-tu bon ou c'est pas bon le 2n.39? Ou bien le 36n.2, ça revient au même, les deux dans le fond c'est la même chose, c'est-tu bon ou c'est pas bon? *Silence dans la classe.* **Nadia** : toi tu dirais oui. Il y en a d'autres qui appuient Christine, c'est-tu bon ou ce n'est pas bon? Vous avez 50% de chances de l'avoir. Oui, François? *Les élèves commencent à parler...* **François** : non ce n'est pas bon. **Nadia** : pourquoi ce n'est pas bon? **François** : trop long à expliquer là. *Des rires.* **François** : parce que le 2n tu ne le multiplies pas à chaque fois, à la place tu multiplies par 39. **Nadia** : ouais. **François** : juste à la place de multiplier à chaque fois, puis ça donne un plus gros nombre, tu multiplies juste par 39, ça donne un plus petit résultat. (15 mars, 74-126).	validation par le groupe. - Le résultat obtenu n'est pas assez grand, il faut dans ce cas utiliser une exponentielle, multiplier le 2n par lui-même 39 fois pour avoir le nombre de robots et non pas juste multiplier 2n par 39. Sa validation repose sur le fait qu'on doit arriver à un nombre plus grand (résultat amené par l'enseignante au départ du retour).

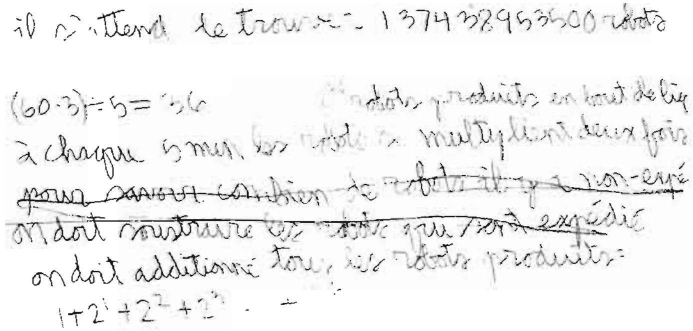
L'intervention de François amène l'enseignante à revenir à l'écriture 2^{36} à des fins de validation en classe.

Deuxième retour autour de la stratégie 1

Extrait	Commentaires
Nadia : ok et l'autre là haut? Là c'est 2 exposant 36. Oui, Nicolas? **Nicolas** : c'est pas bon. **Nadia** : c'est pas bon, vas-y pourquoi. **Nicolas** : parce que ça donne juste la dernière série de robots qui a été construite.	- Nicolas avance que 2^{36} représente seulement la dernière série de robots (c'est une réponse partielle au problème). L'élève donne du sens à cette écriture en contexte.
Nadia : ça donne juste la dernière série de robots qui a été	- L'enseignante reformule les explications de l'élève et

construite, ça veut dire que je multiplie par 2 la dernière série de robots que j'ai… ok, ok… (15 mars, 127-132)	fait signe de comprendre.

L'intervention de Nicolas repose sur la stratégie 4 utilisée juste par 2 élèves. Ils ont repéré que 2 représente le nombre de robots produits par le premier robot, 2^2 le nombre de robots fabriqués par ces deux robots, etc. 2^{36} représentant alors le nombre de robots construits par les 2^{35} robots précédents. Pour obtenir le nombre de robots total au bout des 3 heures, il faut alors ajouter tous ces robots (sans oublier le premier robot) :



La validation de cette démarche pousse encore une fois les élèves à revenir au problème, à interpréter l'écriture exponentielle 2^{36} dans le contexte.

Autour de la stratégie 4

Extrait	Commentaires
Nicolas : c'est bon mais c'est long. **Nadia** : c'est bon mais c'est long. Mais est-ce que c'est vrai qu'il	

faut additionner tous les robots? *Certains élèves font signe que oui avec la tête.* **Nadia** : oui hein? Parce que sinon on aura juste la dernière bâche de robots qu'on aura faites, on n'aura pas tous les autres avant. Christine, as-tu une question, un commentaire? **Christine** : je ne sais, je ne suis pas sûre mais je ne pense pas que c'est bon parce que… on additionne à chaque fois le 2 à la 1, 2 à la 2, 2 à la 3… **Nadia** : ouais. **Christine** : et à la fin on arrive à 2 à la 36 mais 2 à la 36 ce n'est pas le nombre de robots qu'il y a eu? **Nicolas** : c'est dans la dernière série, dans les derniers robots. **Nadia** : qu'est-ce qu'on pourrait faire pour répondre à notre affaire, pour savoir si c'est bon ou si ce n'est pas bon là? Pourrait-on faire quelque chose pour vérifier? Parce que Christine elle n'est pas sûre, elle dit peut-être que…non j'ai juste besoin de ça, puis là on dit qu'on pourrait additionner, fait que comment on pourrait être sûr. Qu'est-ce qu'on pourrait faire comme stratégie pour essayer d'être sûr de ça? Nicolas? **Nicolas** : on pourrait comparer nos premiers calculs à notre dessin. **Nadia** : on pourrait comparer nos premiers calculs à notre dessin, ça c'est bon. (15 mars, 150-170)	- L'enseignante renvoie la validation de la démarche de Nicolas au reste de la classe - L'enseignante valide en reprenant les arguments de l'élève - Christine amène une explication hors contexte (sur les nombres) - Nicolas valide sa démarche. - L'enseignante pousse les élèves à trouver un moyen de vérifier que la démarche est bonne, la vérification provenant du doute émis par Christine. - L'élève donne une piste de vérification par une deuxième résolution, l'arbre.

On peut remarquer que les élèves ne donnent pas de véritables arguments à l'appui pour valider ou invalider. Dans le cas de la stratégie erronée (voir le retour ci-dessous), l'élève confronte à une autre solution trouvée qu'on a instituée comme bonne précédemment, on ne peut donc avoir deux réponses différentes à un même problème. Ici, l'élève revient à la signification de 2^{36}, laissant voir qu'il a interprété le problème différemment. Une discussion s'installe dans la classe dans laquelle on ne discerne plus les propos des uns et des autres, la solution du problème étant alors validée par la chercheure (elle s'appuie pour ce faire sur une représentation en arbre tel que proposé par Nicolas).

Extrait	Commentaires
C : ok, donc pourquoi on additionne les robots? Si on regarde bien, ça c'est l'arbre que vous avez tous fait. Là vous avez le premier robot qui est ici *(elle montre sur l'arbre la première croix dessinée).* L'expert construit son robot et son robot il est là, mais son robot qui est ici il construit d'une façon spéciale, c'est que celui là il est capable de construire deux robots et les deux robots quand ils sont faits, chacun d'entre eux.... en fabriquent encore deux et chacun d'entre eux va dans sa boite et la production s'arrête là pour ces robots. Si on regarde le premier, le premier il fabrique deux robots puis il s'en va dans sa boite. Donc si on regarde ici, combien de robots on a, produits jusqu'à maintenant? **Plusieurs élèves**: 3. **C** : on en a trois, ici on en a un le premier qui a fabriqué les deux autres et lui il est parti dans la boite, donc là si on regarde le total, on en aurait 3 de robots. Le premier il est dans la boite, mais les deux autres sont actifs. Lui il va partir et il va en faire 2, lui il part il en fait deux. Combien ils en font en tout ces deux là? **Plusieurs élèves** : 4. **C** : ils en font 4 ça veut dire qu'on multiplie le résultat précédent par 2, c'est 2 fois 2 ou 2 à la 2. Donc jusqu'ici combien de robots on a? **Plusieurs élèves** : 7. **C** : oui 7, donc on fait le premier ensuite les deux qui sont là plus les quatre qui sont ici, ok? Et ainsi de suite. Là si on regarde à la prochaine étape, on sait que l'on va avoir deux fois plus de robots qu'à l'étape précédente et ceux-là s'en vont dans la boite donc c'est 2 fois 2 fois 2, donc 2 fois plus que ce qu'il y avait précédemment c'est 2 exposant 3 et si on compte à ce stade ci combien il y a de robots, il ne faut pas oublier tous ceux qui sont là avant, qui sont dans leur boite, ça fait $2 + 2^2 + 2^3$ c'est bon? Et si on va jusqu'au bout, combien de périodes on a de 5 minutes? **Plusieurs élèves** : 36. **C** : donc à la dernière étape il y aura 2 exposant 36 robots de construits mais là il ne faut pas oublier tous les autres robots qui sont dans leur boite. (151-201)	La chercheure revient au contexte et au support de la représentation (qu'on avait peut-être trop perdu de vue selon elle).

APPENDICE G
EXPLOITATION EFFECTIVE (SÉANCE EN CLASSE) DU PROBLÈME DES BACTÉRIES (BLOC 1)

Ce problème a été résolu par les élèves individuellement lors de la séance du 15 mars et il a été traité en classe la séance d'après le 16 mars. Nous reprenons ci-dessous l'extrait correspondant à la première séance (15 mars), séance où le problème a été distribué aux élèves.

Mise en route sur le problème des bactéries	
Extrait	**Commentaires**
Nadia : ok, bon maintenant.... Il ne reste pas beaucoup de temps, on vous passe un problème à faire, ce problème là vous allez le faire de façon individuelle ok? C'est un problème qui ressemble à ceux que vous avez fait avant, mais celui-là c'est très important de le faire seul. Vous écrivez toute votre démarche, vous n'effacerez rien, tout ça là. Et C, elle va les ramasser après parce qu'elle veut juste voir selon tout ce qu'on a fait où on en est avec ça. C'est correct? Donc vous faîtes ça tout seul, vous avez droit à votre calculatrice c'est certain ça là mais vous faîtes ça seul. N'oubliez pas d'écrire votre nom, votre prénom si possible. *(Distribution du problème C-difficile).* C'est individuel, je ne suis pas supposée d'entendre parler. (15 mars, 511-520).	- L'enseignante précise que ce problème a la même structure que les deux autres. - Elle insiste sur l'importance d'avoir toute la démarche des élèves. - Elle indique aux élèves la raison de faire le problème seul et de le ranger dans le classeur (pour la recherche).

Dans la troisième séance de l'expérimentation (16 mars), l'enseignante revient sur la situation des bactéries. Nous avons analysé les productions des élèves.

<table>
<tr>
<td>Stratégie 1 (7 élèves)
Les élèves cherchent $2^{\text{nbre de jours}} = 33\ 000\ 000$

<u>Réponses</u> : 25 jours. On peut voir que certains élèves calculent avec la calculatrice jusqu'à trouver une réponse qui dépasse 33 millions, la plupart font les calculs successifs.

Nicolas fait un lien avec les logs tels qu'expliqués par l'enseignante et il réussit!</td>
<td>Stratégie 2 (4 élèves)
Ces élèves se distinguent de ceux ayant procédé avec la stratégie 1, on voit apparaître un questionnement sur le contexte, faut-il compter ou pas le premier jour?
« si je compte que le premier jour, ils ne se multiplient pas ça me donne 25 jours. Si je compte qu'ils se multiplient dès le premier jour, ça ne va prendre que 24 jours. » Deux élèves utilisent une écriture au long pour contrôler le nombre de jours : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 ...$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Stratégie 3 (1 élève)
L'élève trouve un nombre décimal de jours qui est erroné : 34,9 jours et 34,95 jours. La réponse donnée est toutefois un nombre entier de jours : 34 jours.
Elle ajoute de plus les bactéries obtenues jusqu'ici.</td>
<td>Stratégie 4 (5 élèves)
Les élèves ajoutent les bactéries multipliées jour après jour.

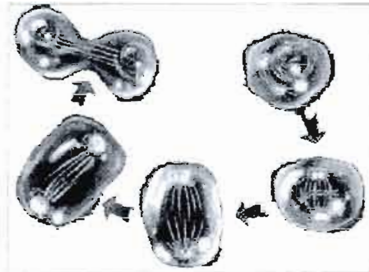
5 élèves font la démarche suivante :
$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{34} = 33553916$
et trouvent 25 jours.</td>
</tr>
<tr>
<td>Stratégie 5 (2 élèves)
Ils ajoutent et doublent le nombre précédent :
Jour 1 : 2
Jour 2 : 4+2 = 6
Jour 3 : 12+6=18
Jour 4 : 36+18=54 etc.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Stratégie 6 (9 élèves)
3 élèves calculent la racine carrée de 33 millions, ce qui leur donne 5745 jours.
4 élèves barrent leur démarche la trouvant infructueuse et ne donnent pas de réponse finale.
Un élève trouve deux résultats : 6 jours et 25 jours.

Une élève calcule $33000000 \div 2 = 16500000\,jours$</td>
</tr>
</table>

Certains élèves font le passage vers l'écriture la plus efficace (l'exponentielle), d'autres font les calculs à mesure (stratégie1 et 4) (un contrôle axé sur les calculs à mesure). La stratégie 2 permet de voir que les élèves se questionnent sur le contexte donnant place à plusieurs interprétations possibles. Dans la stratégie 3, l'élève a arrondit son résultat (indice de contrôle). Dans la stratégie 5, les élèves perçoivent la structure multiplicative mais ajoutent les bactéries obtenues jour après jour. Les élèves ayant utilisé les stratégies 6 n'exercent pas de contrôle sur cette tâche.

Extrait	Commentaires
Nadia : donc le problème, juste pour s'en rappeler un peu ça disait que la bactérie C-difficile *(Nadia lit l'énoncé du problème)* « une bactérie qui cause la diarrhée et d'autres maladies intestinales. Il s'agit aussi de l'infection la plus communément répandue dans les hôpitaux et les établissements de soins de longue durée. Pour prévoir les répercussions de cette épidémie, des chercheurs étudient leur propagation. Pour cela, ils placent deux bactéries du C. difficile dans une culture pour les observer. Ils notent que le nombre de bactéries double tous les jours. Au bout de combien de jours va-t-on dépasser les 33 millions de bactéries? » Alors qu'est-ce que vous avez faite là? Il y en a qui ont fait quelque chose? Carmen qu'as-tu fait toi pour résoudre ça?	- Nadia lit l'énoncé du problème pour remettre les élèves dans le bain. - L'enseignante désigne une élève en particulier (elle ne sait pas à l'avance ce que cette élève a fait mais c'est une élève qui participe beaucoup et qui pose des questions).
Carmen : ben moi j'ai juste faite au début il y avait deux bactéries donc j'ai fois 2 jusqu'à ce que ça donne 33 millions et j'ai trouvé 25 jours.	- L'élève perçoit la structure multiplicative du problème stratégie 1)
Nadia : ok 25 jours est-ce qu'il y en a qui ont eu ça aussi? Il y en a-t-il qui ont fait autre chose? Christine.	- L'enseignante essaie de détecter les différentes stratégies qui ont pu ressortir dans la classe.
Christine : ben moi j'ai mis deux… deux bactéries le jour 1 puis au deuxième jour j'ai mis 2 à la 2 parce que ça double puis le troisième jour 2 à la 3 et etc.	- L'élève explicite sa stratégie, elle obtient le même résultat que l'élève précédente mais le raisonnement utilisé est différent (elle revient au contexte, elle explicite pas à pas

Nadia : ok donc toi tu as regardé 2 à la combien qui donnait 33 millions? **Christine** : oui. **Nadia** : ok c'est beau. Marie.	les calculs à effectuer). - L'enseignante met l'accent sur la ressemblance entre les deux stratégies et fait signe qu'elle comprend ce qu'elles ont fait et relance une autre élève.
Marie : ben moi j'ai fait la même chose pour les abeilles que C avait fait au tableau l'autre fois. **Nadia** : ok fait tu as fait la même chose c'est-à-dire que tu as additionné ou tu as faite des dessins?	- L'enseignante demande plus de précisions à Marie
Marie : j'ai fait l'arbre là, j'ai mis deux puis là je suis descendue et ça me donnait 4 donc 2 à la 2 et là j'avais 4 plus les deux premières et là j'ai mis 6.	- Marie précise qu'elle a additionné les bactéries obtenues jour après jour.
Nadia : ok donc toi tu as additionné toutes les bactéries à chaque étape.	- L'enseignante reformule ce que l'élève a fait
Marie : et là je me suis découragée, je pensais que ça allait aller à l'infini, que ça n'allait jamais donner 33 millions, fait que j'ai arrêté à 16 jours.	- On sent ici que l'élève ne perçoit pas le sens de l'écriture exponentielle (qui monte très vite dans le cas où la base est plus grande que 1), elle abandonne sa stratégie
Nadia : ok. Nicolas. **Nicolas** : ben moi je pense que la technique de Marie elle n'est pas bonne.	- Nicolas invalide la stratégie de Marie
Nadia : *Rires.* Laquelle technique, pas sa technique du dessin, laquelle des techniques tu penses?	- L'enseignante demande des précisions sur ce qui n'est pas correct dans ce qu'a fait Marie
Nicolas : ben l'arbre ce n'est pas ben bon ici parce que la première bactérie continue à se multiplier.	- Nicolas précise qu'avec la stratégie de Marie la première continue à se multiplier.
Nadia : ouais ok c'est le fait qu'elle ait additionné les autres bactéries avant qui t'agace un petit peu hein? Est-ce qu'il y en a d'autres qui ont fait comme ça qui ont additionné les bactéries à chaque...? Miranda aussi tu as fait ça. *(Elle lève la main).* C'est pour ça que C elle vous a fait la petite acétate qui est là parce que ce que Nicolas il dit il a raison dans le fond ça c'est un cas où on n'avait pas à additionner tout parce que la première bactérie une	- L'enseignante reformule les propos de Nicolas sans se prononcer. Elle demande au reste de la classe s'ils ont fait comme Marie, Miranda lève la main. - La validation se fait par l'enseignante et elle demande si

fois qu'elle est séparée elle est disparue celle là là, elle est séparée en deux, fait que je ne la compte plus, voyez-vous? 	les élèves comprennent. L'explication se fait sur deux images qui présentent la mitose : 
Carmen : ah ouais, une se transforme en deux. **Nadia** : la première elle se transforme en deux fait qu'elle n'est plus là, elle n'existe plus, je ne peux plus la compter et ces deux là après… **Carmen** : elle s'est comme coupée en deux là.	- Carmen fait signe qu'elle comprend la situation
Nadia : ouais et ces deux là après, quand ils se coupent en deux ils deviennent quatre là, je ne les ai plus ces deux là j'en ai quatre et c'est tout. Je n'ai pas les deux autres qui étaient avant, ok? Des fois il faut additionner et des fois il ne faut pas, c'est ça qui est difficile à cerner un petit peu. Mais dans ce cas là si on sait ça c'est sûr qu'on ne les additionnera pas parce qu'on pense à notre affaire. Fait que son dessin ce n'est pas ça qui n'était pas bon, ton dessin c'est correct pour réfléchir à ce qui se passe mais on n'a pas besoin d'additionner parce que ta première quand elle se splite en deux, l'autre elle n'est plus là elle est rendue deux. Oui, Miranda.	- L'enseignante reprend les explications dans les mots de l'élève. Elle met l'accent sur l'importance de bien comprendre la situation pour bien cerner l'enjeu d'additionner ou pas. Elle met l'accent sur le fait que le dessin est correct (c'est une bonne représentation pour bien comprendre la situation).
Miranda : comment on fait pour savoir si c'est de la mitose ou pas?.	- Miranda demande comment faire pour savoir s'il faut ou pas additionner.
Nadia : quand si c'est de la mitose ou pas, ben ça c'est le texte, c'est le sens de la question, c'est…	- L'enseignante met l'accent sur l'importance de bien comprendre l'énoncé et la question de la situation

Carmen : ils disent qu'ils doublent parce que… c'est la mitose. **Nadia** : oui mais les abeilles aussi ça faisait fois 5 puis là il fallait les compter tout d'un coup là. Les robots, c'était comme la mitose mais les robots ils ne disparaissaient pas, ils en faisaient deux. Tu vois-tu Miranda, ben ça ça ressemble à l'affaire des robots mais les robots c'était un peu comme la mitose hein? Mais ce n'était pas tout à fait de la mitose parce que le premier robot il ne se splite pas en deux là, il reste là puis les deux autres se font… **Miranda** : *on n'entend pas ce qu'elle dit.* **Nadia** : oui c'est ça, eux autres cette bactérie quand elle splite elle n'est plus là, elle n'existe plus. **Miranda** : ok. **Nadia** : donc c'est un peu le sens de la situation, tes connaissances générales, tu sais, ta logique normale de tous les jours qui fait que tu vas te dire que ben je le compte ou je ne le compte pas. **Miranda** : ok (16 mars, 1-92)	- L'enseignante fait un retour sur les Robots et les Abeilles pour montrer les ressemblances et les distinctions entre ces situations. - L'élève fait signe qu'elle a compris. - L'enseignante soulève que dans les situations à résoudre il est important d'utiliser toute notre culture, mathématique et autre, notre compréhension du phénomène en jeu.

APPENDICE H
LES TÂCHES PROPOSÉES PAR LA CHERCHEURE DANS LE BLOC 3 ET NON DISCUTÉES AVEC L'ENSEIGNANTE

Tâches proposées	Analyse préalable en regard du contrôle
Trouve deux valeurs pour *a* et *b* qui font que 1) $m^a . m^b = m^6$ 2) $m^a \div m^b = m^2$	- Engagement réfléchi : déceler les valeurs possibles et voir qu'il y en a plusieurs selon les contraintes imposées.
Sachant que $5^7 = 5^m \times 5^n$ et que m et n sont des entiers naturels, détermine toutes les valeurs possibles de m et de n. Idem pour $7^{10} = 7^m \times 7^n \times 7^n$ où $m > n$	
Dans quels cas a-t-on $a^2 . b^3 = a^5$?	- Engagement réfléchi sur le sens de l'écriture, travailler la conception que *a* doit être forcément différent de *b*.
Parmi les valeurs de *a* suggérées, lesquelles font en sorte que l'expression a^2 représente une valeur inférieure à a^{-2}? 2 -2 ½ 0 -1	- Engagement réfléchi sur les différentes valeurs possibles de la base. Réinvestissement de ce qu'ils connaissent sur la base décimale.

APPENDICE I
ANALYSE DES TÂCHES PROPOSÉES AUX ÉLÈVES LORS DE LA SÉANCE DU 2 MAI AUTOUR DE LA SIMPLIFICATION D'EXPRESSIONS AVEC DES EXPOSANTS

I. Le scénario effectif autour de la division d'exposants (séance du 2 mai)

Après avoir présenté les tâches suivantes aux élèves :

Tâche 1 : Je connais un dixième et $1/10^2$ puis-je trouver en utilisant ces résultats la valeur de $10/10^3$?

Tâche 2 : Simplification de $\frac{2^3}{2^7}$?

3ième tâche : L'enseignante laisse les élèves en suspens sur la deuxième tâche et les lance sur une tâche connue, elle va ainsi chercher tous les élèves, leurs connaissances initiales pour les amener plus loin.

Extrait	Commentaires
Nadia : Comment je fais pour simplifier $\frac{24}{60}$? Nicolas : On divise par 6, on obtient $4/10$ et on divise ensuite par 2 donc $2/5$. Christine : on peut diviser par 12. Nadia précise qu'il y aurait d'autres façons de simplifier et reprend pour le reste de la classe la simplification effectuée par Nicolas et s'assure que tous les élèves suivent :	- Choix stratégique, efficace du facteur commun le plus grand pour simplifier. Stratégie d'intervention : Importance du facteur commun au numérateur et au dénominateur pour

$\frac{24(\div 6)}{60(\div 6)}=\frac{4(\div 2)}{10(\div 2)}=\frac{2}{5}$. Carmen : Aurait-on pu prendre n'importe quel autre nombre pareil en haut et en bas comme 5 par exemple? Nadia : Bon ce que je veux vous faire remarquer là dedans, moi quand je vois 24, si je sais que 24 et 60 ça se divise en 6, là c'est un petit raisonnement que je vais vous demander de collaborer, ok? Si je sais que 24 et 60 ça se divise en 6 c'est parce que je sais que 24 c'est 6 fois quelque chose et 60 c'est 6 fois quelque chose, êtes-vous d'accord? au lieu d'écrire 24 sur 60, j'aurais pu dire que 24 c'est 6 fois 4 et 60 c'est 6 fois 10, là je m'aperçois que j'ai un facteur commun entre eux et là c'est pour ça que je peux dire que je divise en 6, il reste 4, je divise en 6 il reste 10. Mais 4 dixièmes je sais encore que dans le fond c'est 2 fois 2 sur 2 fois 5 comme ça je m'aperçois que 2 c'est un facteur qui est commun aux deux, donc ici en haut je peux diviser en 2 il reste 1, 2 divisé en 2 il reste 1 et ici 2 divisé en 2 ça fait 1 puis il reste le 5. $\frac{24}{60}=\frac{\cancel{6}\times 4}{\cancel{6}\times 10}=\frac{4}{10}=\frac{\cancel{2}\times 2}{\cancel{2}\times 5}=\frac{2}{5}$.	simplifier (elle l'écrit). Cette élève amène l'enseignante à préciser ses explications : 24 ne se divise pas par 5, il faut choisir un nombre diviseur à la fois du numérateur et du dénominateur. À donner du sens. L'enseignante attire l'attention des élèves sur un raisonnement important qui va être clé pour la suite. On peut remarquer que Nadia met l'emphase sur ce que nous avions discuté dans la planification : l'importance du facteur 1 et le raisonnement sur le facteur commun.

4[ième] tâche : la simplification de cette fraction dans le numérique où l'enseignante explicite clairement les étapes auxquelles on procède pour simplifier une fraction vont lui permettre d'introduire la simplification d'expressions avec des fractions et des exposants :

« Bon, fait que là là je vais vous dire de penser à ça les fractions quand on les réduit qu'est-ce qui se passe, on va faire la même affaire en algèbre, ok? »
<u>*Stratégie d'intervention*</u> : réinvestissement de ce qui a été fait avec les fractions.

Extrait	**Commentaires**
Nadia : Si je vous dis $a^5 \div a^2$	
Marc : il faudrait que l'on sache le a c'est quoi?	Difficultés à opérer sans nombres (Marc).
Nadia : Ben, on ne sait pas, mais on peut écrire $a^5 \div a^2$ comme une fraction $a^5 \div a^2 = \frac{a^5}{a^2}$ et on fait la même chose qu'on fait avec les fractions, y a-t-il un facteur commun entre les deux?	L'enseignante écrit ceci au tableau, nous pouvons remarquer qu'elle montre que le trait de fraction a le sens division également.
Miranda : par a.	Trouve un facteur commun mais pas le plus efficace (Miranda).
Marc : mais il faudrait que l'on sache c'est quoi a.	Nous notons chez cet élève une insécurité à opérer sans nombres (Marc).
Nadia : ça peut être n'importe quel nombre. On peut écrire $\frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a}$	
Marie : ça peut être aussi $\frac{a \times a^2 \times a^2}{a \times a}$.	Elle montre une certaine flexibilité dans l'écriture des exposants.
Les élèves commencent à parler.	
Nadia : Minute, on va y arriver, vous anticipez trop, les nerfs, il faut qu'on prenne notre temps pour réfléchir. Fait que Marie ce que tu dis c'est vrai, c'est que dans le fond moi quand je vois ça,	Elle ramène les élèves à l'ordre. Elle reprend les explications de Marie et énumère d'autres possibilités et procède à un choix éclairé

au lieu d'écrire a exposant 5 je peux écrire plein d'affaires c'est a exposant 3 fois a à la 2, je pourrais a à la 2 fois a à la 3, a à la 4 fois a, ok ? Je peux écrire tout ça. Alors moi je choisis, comme on sait que le facteur commun c'est a, je choisis de dire je vais mettre a fois a à la 4. $a^5 \div a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \times a^4}{a \times a}$.	entre toutes ces écritures.
Marie : a tout seul c'est a à la 1 ?	Décode les éléments implicites.
Nadia : Si je divise a par a, qu'est-ce qui va rester? Marc : 1.	L'enseignante continue alors en se ramenant à l'exemple précédent pour montrer qu'on fait le même raisonnement.
Nadia : Si je divise par a ici et par a ici qu'est-ce que ça fait? Un élève : ça s'annule.	L'enseignante reformule sa question car elle sait que c'est un passage délicat (les élèves disent que c'est 0, c'est ce qui arrive).
Nadia : ça ne s'annule pas, ça se simplifie. Ça fait 1 fois a à la 4 puis a fois 1. Ça fait $\frac{1 \times a^4}{a \times 1}$. On a $a^5 \div a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a(\div a) \times a^4}{a(\div a) \times a} = \frac{1 \times a^4}{1 \times a} = \frac{a^4}{a} = \frac{a \times a^3}{a \times 1}$ Ghila : pourquoi a fois 1?	Nadia ne renvoie pas cette réponse au reste de la classe, c'est elle qui valide. Elle insiste sur le facteur 1 (décode les éléments implicites) et écrit les facteurs communs. On peut remarquer que l'enseignante écrit dans une des étapes $1 \times a$ au dénominateur et à une autre étape $a \times 1$ (commutativité de la multiplication), ce qui fait intervenir une élève.

Nadia : ben parce que a si je le mets en avant c'est comme a fois 1, a puis a fois 1 c'est la même affaire. L'enseignante finit ses explications et les élèves remarquent que ça revient à faire la loi de Ly : $a^5 \div a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a(\div a)\times a^4}{a(\div a)\times a} = \frac{1\times a^4}{1\times a} = \frac{a^4}{a} = \frac{a(\div a)\times a^3}{a(\div a)\times 1} = \frac{a^3}{1} = a^3$ a^{5-2}	Met l'accent sur la commutativité de la multiplication.

L'intervention de Miranda suite à ce résultat montre bien que l'élève est en contrôle sur le résultat :

« Ça fait a^{-3} *parce que dans le fond le plus gros est en dessous? »*

Après cette question, l'enseignante est très contente et félicite les élèves (elle les encourage à poursuivre) :

« Ouais, c'est ça là. Ah, vous êtes géniaux! On avait peur que ça ne marche pas bien (ce qu'elle et la chercheure ont planifiée) »

Carmen explicite également un choix éclairé dans la stratégie à choisir pour réduire les fractions qui dépend de la nature de l'expression (avec des nombres ou avec des lettres) :

« Quand on veut simplifier des fractions avec des exposants, quand il y a le chiffre on peut faire genre juste le calcul, mais quand il y a une lettre on a à faire tous les exposants, ben c'est facile. »

4ième tâche : L'enseignante utilise l'intervention de Miranda pour introduire la division d'exposants quand l'exposant le plus gros est au dénominateur.

Extrait	Commentaires
Nadia : Si j'ai $\frac{a^3}{a^7}$? Est-ce que je peux prendre *a*, a^2, a^3, a^4? Ok, je continue, je divise encore, dans le fond combien de fois je vais faire ça? Je vais faire ça tant et aussi longtemps qu'il me reste quelque chose d'un des deux côtés, ok? Bon, tant que j'en ai en haut, vu qu'en haut il y en a moins qu'en bas, je vais le faire aussi longtemps que j'en ai encore des affaires écrites en haut, tant qu'il y a des *a* je peux continuer. La minute qu'il n'y aura plus de *a* en haut ou en bas, c'est là j'arrête. Fait que je vais le faire une fois, ça m'en enlève 1, je vais le faire deux fois, ça va m'en enlever 2, je vais le faire une troisième fois et quand je l'aurais faite une troisième fois, je vais avoir enlevé tous les *a* qui sont ici là *(Nadia montre le numérateur).* Dans le fond, moi je me suis dit « au lieu de le faire fois *a* et recommencer, recommencer, je sais déjà que je peux mettre *a* à la 3 comme facteur commun pour lui et pour lui *(le numérateur et le dénominateur)*, ok? Elle écrit au long : $\frac{a^3}{a^7}=\frac{a\times a\times a}{a\times a\times a\times a\times a\times a\times a}=\frac{a^3\times 1}{a^3\times a^4}$ Marie : « pourquoi on ne peut pas faire comme avant $a^1\times a^2$? » Élève : c'est plus long. Nadia reprend les étapes comme Marie le souhaite pour lui montrer que ça revient au même :	L'enseignante reprend la démarche comme tout à l'heure en faisant participer les élèves. Elle les amène toutefois à une simplification « éclairée », à choisir dès le départ le plus grand diviseur commun du numérateur et du dénominateur.

$\frac{a^3}{a^7} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a} = \frac{a \times a^2}{a \times a^6} = \frac{1 \times a^2}{1 \times a^6}$ et finit la résolution. Ghila : c'est bien plus court avec la loi de Ly. C : c'est important que vous compreniez la démarche parce qu'après on va vous en donner des plus compliqués et il va falloir que vous réfléchissiez bien à ce que vous faîtes.	

L'enseignante encourage ensuite les élèves en leur disant que ce sont des champions et elle leur donne une autre expression à réduire.

5ième étape : réduction de $\frac{x^5 y^4}{x^3 y^6}$. Les élèves s'exclament tous surpris par cette expression.

Extrait	**Commentaires**
Nadia demande à Marc de réduire la fraction, l'élève va au tableau. Résolution de Marc : il commence par écrire $\frac{x^5 y^4}{x^3 y^6} = \frac{xxxxx}{}$, certains élèves de la classe lui disent de ne pas faire la démarche mais d'utiliser directement la loi de Ly.	L'élève revient au sens de l'écriture exponentielle.
Nadia : On fait la loi de Ly quand on est vraiment bons, quand on est sûrs de ne pas se tromper. La technique de Ly on sait qu'elle marche mais on ne sait pas encore pourquoi.	L'enseignante insiste sur le sens de la démarche.

Marc écrit l'exponentielle au long :	
$\frac{x^5y^4}{x^3y^6}=\frac{xxxxxyyyy}{xxxyyyyyy}$. Ok, ben là vu qu'on peut prendre le 3 (x^3) vu qu'il y en a 5 (x^5) ici, ben on prend les 3 puis on pogne les 3 en haut évidemment. Ici il y a 4 y et ici 6 y fait qu'on peut prendre tous les y en haut et on peut prendre 4 y en bas.	
Nadia : est-ce qu'il est bien parti Marc? Est-ce qu'il a raison?	
Les élèves : oui.	Nadia demande à la classe de valider, elle s'assure de ce que tout le monde comprenne comment il procède.
Nadia : ok fait que là tout le monde comprend où il s'en va.	
Les élèves : oui.	
Marc essaie ensuite de reprendre la démarche comme expliquée par Nadia mais il est tout perdu parce qu'il se retrouve avec des lettres différentes et il ne sait comment procéder. Il écrit alors certaines expressions entre parenthèses mais finit par abandonner sa démarche :	
$\frac{x^5y^4}{x^3y^6}=\frac{xxxxxyyyy}{xxxyyyyyy}=\left(\frac{x^3.x^2}{x^3}\right)\left(\frac{y^4}{}\right)$:	
Marc : je suis tout mélangé là.	
Nadia : Mais vous ne le laissez pas faire, laissez-le finir. Continue, on te suit. Laissez le finir avant de vous obstiner là.	

Marc : fait que c'est égale environ à…. Je suis tout mélangé là. Nadia : ok c'est beau, ne les écoute pas, fais ce que tu voulais faire. Marc : ça fait x à la 3 fois x à la 2… Nadia : continue, ne leur parle pas, laissez-le finir. Marc : ouais, sur x à la 3 puis là il y a… mais à cause que vu qu'ici il y en a deux *(x et y),* on ne peut pas faire comme ça *(il montre l'exemple avec les a).* Mais je peux mettre des parenthèses. Nadia : oui tu peux mettre des parenthèses, certain. Fais comme tu veux. Là pendant ce temps là essaie donc de le faire vous de votre place pour voir à quoi vous arrivez. Vous êtes arrivés à quelque chose? Tu abandonnes Marc? Ok, Nicolas vient nous montrer ça. Nicolas écrit au tableau : $\frac{x^5 y^4}{x^3 y^6} = \frac{xxxxxyyyy}{xxxyyyyyy} = \frac{x^3.x^2.y^4}{x^3.y^4.y^2}$ Nadia : Mais pourquoi il l'écrit de même là, pourquoi est-ce qu'il l'écrit dans cet ordre là. Pourquoi qu'il met des x à la 3, des y à la 4?	L'enseignante insiste pour que l'élève aille jusqu'au bout de sa démarche avant de la valider, de prendre des interventions d'autres élèves de la classe. Nadia désigne alors Nicolas pour qu'il vienne finir la résolution commencée par Marc. L'enseignante demande à la classe des explications sur la démarche qu'a produit un autre élève au tableau : pourquoi a-t-il fait ça, qu'est-ce que ça signifie?

Anne-Julie : ben pour enlever x à la 3 après il va juste rester x à la 2 puis après enlever les 2 y à la 4 fait qu'il va juste rester les trucs à la 2.... y à la moins 2. <u>Intervention de Carmen</u> : qui porte sur le fait qu'on peut ne pas écrire les facteurs communs puisqu'on sait qu'ils vont disparaître. Nadia demande à Nicolas de finir la simplification et d'expliquer ensuite ce qu'il a fait. Nicolas écrit : $\frac{x^5 y^4}{x^3 y^6} = \frac{xxxxxyyyy}{xxxyyyyyy} = \frac{x^3.x^2.y^4}{x^3.y^4.y^2} = \frac{x^2}{y^2} = x^2 y^{-2}$ Nadia : ok, fait que là Carmen elle dit « pourquoi on irait faire ça parce qu'on sait en l'écrivant comme ça $\frac{x^5 y^4}{x^3 y^6} = \frac{xxxxxyyyy}{xxxyyyyyy}$, on sait que ça on va le diviser en x, diviser en x , il reste 1, divise en x, divise en x, il reste 1, divise en x, divise en x, il reste 1, fait qu'à la fin tu sais qu'il va juste te rester x à la 2 ici puis... y fois y fois y fois y fois y, on va les diviser en haut puis en bas il va rester y à la 2 en bas. Est-ce que ça va? L'enseignante demande aux élèves de s'arrêter à $\frac{x^2}{y^2}$ et de ne	Nadia demande aux élèves s'ils comprennent ce que Nicolas vient d'écrire. Ils répondent affirmativement. Pour s'en assurer, elle demande à Anne-Julie d'expliquer. L'élève a bien compris la façon de procéder. L'élève montre qu'elle n'a plus besoin d'écrire les facteurs communs. Elle veut aller à une étape plus loin. L'enseignante reprend l'intervention de Carmen, elle insiste sur le facteur 1.

pas donner pour l'instant l'expression avec des exposants négatifs puisqu'elle n'a pas encore expliqué pourquoi la loi de Ly fonctionne.	

Après s'être assurée que les élèves ont bien compris, l'enseignante leur donne un autre exemple, cette fois-ci avec des additions au numérateur et au dénominateur qui sont source, comme nous l'avons vu dans l'analyse de la planification de grosses difficultés chez les élèves.

6$^{\text{ième}}$ étape : Simplification de $\frac{10^5+10^8+10}{10^2}$.

Extrait	**Commentaires**
Laure : Ben je ne suis pas sûre là mais ce que je ferais c'est comme 10 à la 5, ben 5 moins 2 puis 8 moins 2 puis 10 ben… 10 à la 1 moins 2 puis après ça ferait puis là je ne peux pas les mettre ensemble parce que c'est des additions parce que la loi des exposants ne marche pas, fait que ça ferait 10 à la 3 plus 10 à la 6 plus 10 à la moins 1.	Elle décompose en trois additions et applique dans chaque cas la loi de Ly, le résultat final est donné sous forme d'addition (c'est excellent!). Contrôle exercé sur la simplification d'expressions avec des additions au numérateur.
Marc : est-ce qu'on peut écrire 10^{13}?	Cet élève fait l'erreur telle que discutée dans la planification.
Les autres élèves : non parce que c'est des plus.	Invalidation par la classe.
Nadia : Tu vois il y a un plus, et qu'est-ce qu'on avait dit dans ce temps là « il y a un plus qui gâche le party. » Le plus m'empêche de tout mettre ensemble.	L'enseignante ramène la classe à ce qu'ils avaient vu précédemment en lien avec les exposants.

Marie : est-ce que ça ça veut dire que c'est égale à $\frac{10^5}{10^2}+\frac{10^8}{10^2}+\frac{10}{10^2}$?	
Nadia : Quand j'ai quelque chose comme ça (elle montre le deuxième morceau), quand j'ai une somme de même sur un dénominateur c'est comme si j'avais splité la fraction en trois ici. Fait que dans le fond ça ici c'est le même principe : $\frac{10^5+10^8+10}{10^2}=\frac{10^5}{10^2}+\frac{10^8}{10^2}+\frac{10}{10^2}$.	L'enseignante répond en posant une autre question, qui ramène les élèves aux fractions sans les exposants : $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{5}{7}$, on additionne des fractions qui ont le même dénominateur, on obtient donc $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{2+3+5}{7}$. La réduction se fait avec les élèves. L'enseignante axe beaucoup sur le facteur 1, arrive à $10^3+10^6+\frac{1}{10}$ et demande si on peut encore réduire.
Un élève : au lieu de 1/10 on pourrait écrire -10. Nadia : vous voyez il y en a qui ont commencé à dire que c'est moins 10, c'est moins quelque chose, c'est pour ça que je ne veux pas d'exposant négatif, voyez-vous, parce que vous vous trompez, ça ne donne pas la bonne affaire.	Cette intervention fait réagir vivement l'enseignante qui sent une confusion causée par l'introduction trop hâtive de la loi de Ly (les exposants négatifs). Elle interdit alors d'écrire des exposants négatifs tant qu'elle n'aura pas expliqué *pourquoi* on a des exposants négatifs.

L'enseignante demande alors aux élèves de simplifier individuellement deux autres expressions $\frac{2xy+6y}{2y}$ et $\frac{4ab+12a^2b^3+16a^3b^2}{4ab}$. Nous ramassons les copies pour en faire un retour sur leurs réponses la séance d'après. D'après l'analyse des productions des élèves pour la réduction de $\frac{2xy+6y}{2y}$ nous pouvons remarquer une grande confusion. Un seul élève simplifie correctement, les autres font différentes erreurs que nous avons répertoriées dans le tableau ci-dessous :

Bonne simplification (3 + *x)* ***1 seul élève (Nicolas)***	Les élèves séparent en 3 morceaux : $\frac{2x}{2y}+\frac{y}{2y}+\frac{6y}{2y}$ ***3 élèves (Émilie, Anne-Julie et Éva)***
Les + deviennent des $\times$. On peut distinguer trois cas : 1. Dès le début de la simplification : $\frac{2xy+6y}{2y}=\frac{2x7y}{2x}$ (concaténation, pas de contrôle sur l'écriture) ***2 élèves (Christine et Marc)*** 2. Après avoir bien séparé en deux morceaux et simplifié en faisant des erreurs ***2 élèves (Cathy et Léa)*** 3. Juste au moment de donner la réponse finale $3+x=3x$ (cette première écriture n'est pas achevée). ***2 élèves (François et Mathieu)***	Confusion $2x = xx$ et $6y = yyyyyy$ ***6 élèves (Christine, Carmen, Sandra, Dominique, Zaïa, Marie)*** Difficultés causées par le facteur numérique (le 2 et le 6) : $\frac{2xy(\div 2)}{2y(\div 2)}=\frac{x^2}{y}$ et $6y(\div 2)=y^3$ ***(Julie)*** D'autres écrivent : $\frac{6y}{2y}=4y$ (ils font en fait *6y - 2y).* ***4 élèves (Patricia, Miranda, Stéphanie, Ly).***
Plusieurs séparent en deux morceaux, simplifient correctement et à la fin font disparaître le dénominateur : $\frac{xy}{y}+\frac{3y}{y}=xy+3y$ ***5 élèves (Élie, Ghila, Anna, Claude, Sam)***	***2 élèves (Geneviève, Steve) écrivent :*** « je ne comprends pas ».

Ces exercices requièrent un certain contrôle syntaxique qui, malheureusement, n'est pas présent chez une grande majorité des élèves, ces derniers opèrent sur l'expression sans maîtriser les règles sous jacentes. En ce qui concerne la deuxième expression $\frac{4ab+12a^2b^3+16a^3b^2}{4ab}$, elle est mieux réussie que la première. Deux élèves simplifient correctement *(Nicolas et Marie)*, 7 autres élèves *(Anne-Julie, Geneviève, François, Sam, Claude, Ly et Laure)* arrivent au bon résultat mais oublient le chiffre 1 provenant de $\frac{4ab}{4ab}$.

II. Analyse de la 2ième séance (mercredi 3 mai)

Pour la deuxième séance portant sur la division d'exposants, la chercheure a recompilé différentes réponses erronées des élèves à la simplification de $\frac{2xy+6y}{2y}$.

Nadia montre les différentes réductions obtenues et demande à la classe de les valider (mais c'est elle qui finit par les valider). Elle commence par leur dire que les productions des élèves ne sont pas très fructueuses :

> « Il y a eu de bonnes discussions mais en même temps, ce qu'il y a là ce n'est pas solide là. »

Retour sur les différentes réponses erronées recueillies des élèves

Extrait	Commentaires
Premier résultat discuté : « certains ici ont écrit : $\frac{2xy+6y}{2y}=\frac{2x7y}{2y}$ qu'est-ce qu'elle a fait cette personne là?	
Julie : elle a ajouté le *y de 2xy* aux *6y*.	
Nadia : oui, elle a fait... il y a 6*y* et *y* là ça donne *7y* mais là c'est devenu un *x (fois)* tout d'un coup, là ici on a un plus *(+)* puis là vous arrivez là et il y a un *x (fois)* il n'y a plus de +.	C'est l'enseignante qui explique ce que l'élève a fait et valide en même temps.
Marie : moi ça me mélange.	

L'enseignante présente une autre démarche à des fins de validation :	
$\frac{2xy+6y}{2y}=\frac{2x}{2y}+\frac{y}{2y}+\frac{6y}{2y}$, Nadia explique la provenance de l'erreur de l'élève « ça c'est probablement parce que hier on avait dit hein c'est comme une fraction on peut la séparer en morceaux, sauf qu'ici le *xy* ça va ensemble. Ok?	
Autre démarche présentée : $\frac{\cancel{2}xy+6\cancel{y}}{\cancel{2y}}=x6y$, « Il y a *2y* ici qui a disparu ici avec le *2y* en haut probablement fait qu'il restait 6 puis *xy* tout collé ensemble. »	
Intervention d'un élève : « Ben ça ça marche ».	
Nadia : non ça ne marche pas, d'abord ces deux affaires là *(2xy + 6y)* on ne peut pas les additionner ensemble, pourquoi? Pourquoi on ne peut pas additionner ça ensemble?	Elle valide mais renvoie le *pourquoi* à la classe.
Un élève : parce que *xy* et *y* ce n'est pas la même chose.	
Une autre élève : mais on ne peut pas non plus diviser *xy* par *y*.	
L'enseignante montre alors une autre démarche : $\frac{2xy+6y}{2y}=\frac{2xy}{2y}+\frac{6y}{2y}=\frac{xy.xy}{yy}+\frac{yyyyyy}{yy}$	On sent une confusion chez certains élèves.
Discussion autour d'une autre démarche : $\frac{2xy+6y}{2y}=\frac{2xy}{2y}+\frac{6y}{2y}=\frac{xy}{y}+\frac{3y}{1y}=\frac{xy+3y}{1}$, c'est l'enseignante qui explique comment l'élève a procédé, le dénominateur *y* a disparu à la fin de la simplification.	La discussion sur cette partie a été analysée précédemment (voir point 4.4).

Présentation de la bonne façon de faire

<u>1ère étape de la réduction</u> : séparer en deux morceaux : $\frac{2xy+6y}{2y}=\frac{2xy}{2y}+\frac{6y}{2y}$.

Nadia rappelle le parallèle qu'elle avait fait dans le cours précédent avec les fractions : $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}$ et insiste sur l'importance de garder ces mêmes règles qui marchent pour les fractions en arithmétique pour les fractions en algèbre car

> « sinon on serait dans le trouble, ok? Bon donc moi dans le fond, qu'est-ce que j'ai là bas *(elle montre l'expression à réduire)*, c'est comme si j'avais additionné ici $\frac{2+3}{7}$ et là ce que je veux faire c'est revenir en arrière et les re séparer en deux morceaux, ok? Fait ici qu'est-ce que ça veut dire? Ça veut dire que dans le fond j'ai $\frac{2xy}{2y}+\frac{6y}{2y}$ donc chaque terme de la somme en haut je la divise par le dénominateur, est-ce que ça vous comprenez ça? »

2ième étape : Simplifier chacun des morceaux

L'enseignante montre que dans $\frac{2xy}{2y}$ il y a des « affaires » qu'on peut diviser mais pas d'autres. Carmen et Anne-Julie interviennent se questionnant sur l'écriture : « est-ce que $2xy = 2x.2y$? » Les explications de l'enseignante reposent sur l'arithmétique : « si je vous avais dit 2 fois 5 fois 8 vous faîtes comment? » Cet exemple éclaire les élèves qui affirment bien comprendre : « Ah!! Le x c'est le 5 et le y c'est le 8. » (Anne-Julie). Carmen réplique en disant que précédemment l'enseignante leur a expliqué que $2x = x + x$. L'enseignante répond que dans ce cas-ci :

> « $2xy$ ça veut dire j'ai deux fois la quantité xy, deux fois la quantité xy c'est $xy + xy$. J'ai deux fois la quantité xy, c'est ça que ça dit ça. » (On est ici sur un travail sur une certaine flexibilité de l'écriture : $2xy = 2.x.y = xy + xy$).

La chercheure amène alors une réflexion sur le choix éclairé sur l'écriture à choisir ici :

> « Sauf que là si on fait ça, si on se ramène et on écrit $2xy$ comme $xy + xy$, ça va être plus long pour simplifier, si vous y allez avec des additions, il faut encore que vous sépariez en morceaux, vous créez plein de petits morceaux qu'il faut après réduire. Ici c'est mieux de laisser les produits tels quels et de ne pas les transformer en des additions. »

L'enseignante continue ensuite la réduction de $\frac{2xy}{2y}$ en regardant les facteurs communs. La simplification de $\frac{6y}{2y}$ se déroule de cette même façon.

<u>3^{ième} étape</u> : Discussion autour de la réponse finale $x + 3$.

Carmen demande si $x + 3$ équivaut à $3x$. L'enseignante reprend les explications sur la distinction entre les deux, les élèves ont l'air de bien comprendre. On peut remarquer que cette erreur est très résistante chez les élèves comme le dénote leut grand questionnement. À ce stade, l'enseignante encourage les élèves :

> « C'est normal, en algèbre, on ne comprend jamais du premier coup puis au mois de juin vous allez vous dire « comment ça je ne comprenais rien! »

Réduction de $\frac{4ab + 12a^2b^3 + 16a^3b^2}{4ab}$

L'enseignante simplifie cette expression en plusieurs étapes :

> « Je peux séparer en trois fractions. *Nadia écrit :* $\frac{4ab}{4ab} + \frac{12a^2b^3}{4ab} + \frac{16a^3b^2}{4ab}$. Ça c'est la première étape que je devrais voir sur votre feuille, on sépare en trois morceaux, là maintenant que j'ai séparé en trois morceaux, je me retrouve avec trois expressions où il y a seulement des fois dedans, comme ça je vais pouvoir simplifier des choses qui vont ensemble tandis que quand j'ai des plus on ne peut pas mélanger ça. Hein, on a vu les + qui gâchent le party, ce sont ces plus là. Donc je me dis je vais m'occuper d'abord des morceaux séparés parce que là je suis capable de faire quelque chose avec eux. »

Une discussion a lieu autour de $\frac{4ab}{4ab}$, certains élèves disent qu'il faut « tout enlever », d'autres élèves disent que ça donne 1. L'enseignante tranche et explique pourquoi ça donne 1 en donnant plusieurs exemples.

> « ça fait 1, il y en a beaucoup hier qui ont marqué 0 mais dans le fond quand je fais 4 divisé en 4, 1, *a* divisé en *a*, 1, *b* divisé en *b*, 1. »

À ce stade, l'intervention de Carmen ramène la classe vers le sens accordé à l'écriture (elle est restée focalisée là-dessus, elle essaie de comprendre, on sent qu'un apprentissage est en train d'avoir lieu) :

> « Juste que je suis toute foquée parce que vous m'avez dit tantôt que *2x* ça donnait $x + x$. *(...) Là 4ab* ça donnerait 4 fois *a* fois *b*, mais je sais que c'est fois mais je ne comprends pas pourquoi. »

Geneviève tente une explication : « c'est $a + a + a + a$ ». L'enseignante répond que c'est plutôt $ab+ab+ab+ab$. Sandra fait alors remarquer que c'est comme *2xy* (lien avec ce qui précède et qui a été institué comme connu). L'enseignante procède ensuite à la réduction des deux autres membres de l'expression. Elle verbalise chacune des étapes en insistant à chaque fois sur

- une écriture de l'exponentielle au long.
- le facteur commun entre le numérateur et le dénominateur
- importance du facteur 1 obtenu après certaines divisions.

Elle prend soin d'écrire toutes les étapes comme nous le voyons dans cet exemple $\frac{b^3}{b} = \frac{b.b.b}{b.1.1} = \frac{1.b.b}{1}$.

<u>Discussion autour de l'écriture finale</u> $1 + 3ab^2 + 4a^2b$

Arrivée à ce résultat, l'enseignante demande si on peut additionner toutes ces « affaires ». Plusieurs élèves répondent que non car on a un + qui gâche le party. L'intervention de Carmen ramène à se pencher encore une fois sur le sens de l'écriture exponentielle et sur les termes semblables (ici ab^2 *et* a^2b): « les deux derniers ça se fait. » L'enseignante souligne le fait que l'on n'a pas le même nombre de part et d'autre, l'élève semble satisfaite.

<u>Retour sur la réduction</u>

Marie propose une autre façon de simplifier :

> « Pourquoi on fait toute cette démarche là parce que moi ce que j'avais fait c'est le truc de Ly. »

L'enseignante dans sa réponse axe sur le sens, l'importance de la démarche et de comprendre ce qu'on fait pour éviter de faire des erreurs et un moyen pour dépasser le blocage :

> « Parce que là on a vu des choses, hier j'en ai vu plein qui mettait 0 ici *(pour* $\frac{4ab}{4ab}$*)*, quand on prend des trucs, des fois on prend des raccourcis puis on oublie des affaires. (...) Si tu n'es sûre, dans le fond toi tu as ton truc, tu te dis « je pense que je comprends le truc là, ok? » et tu essaies. Mais mettons que tu arrives et que tu n'es pas sûre là, tu ne peux pas dire « ah je ne me rappelle plus du truc », paniquer puis ne rien faire, tu vas essayer de dire « ok, on va y aller étape par étape » puis là ça va te rappeler ton truc et tu vas être correct. »

Pour être bien sûre, Marie demande de réduire $\frac{12a^2b^3}{4}$ et fait signe de bien comprendre. Miranda explicite alors ce qu'elle fait pour mieux opérer (stratégie de contrôle, elle décode les implicites) :

> « Moi je suis toute mélangée avec les exposants, fait que moi j'ai écrit quand j'ai *a*, *a* à la 1, *b* à la 1. »

Carmen revient encore une fois sur le sens de l'écriture pour s'assurer qu'elle a bien compris (ce qui est le cas). On sent chez cette élève une nécessité de bien comprendre ce qu'elle fait :

> « Je sais que je suis pesante là mais j'ai de la misère $3ab^2$ ça va être quoi la même chose que *a* fois *b* fois *b* plus *a* fois *b* fois *b* plus *a* fois *b* fois *b*? »

III. Analyse des 4 séances en classe (8, 10, 11 et 16 mai)

Dans les séances du 8, du 16 et une partie du 11 mai, l'enseignante corrige les exercices faisant partie du prochain bloc (sur le contrôle syntaxique).

Analyse de la séance du 10 mai

Retour sur les exposants négatifs

L'enseignante veut ici expliquer la loi sur les exposants négatifs : $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$.

Elle revient alors sur ce que les élèves ont vu sur les exposants positifs, on va prolonger la suite « logique » dans les exposants négatifs :

Nadia : J'étais partie en disant si j'ai 5 exposant 2, ben 5 exposant 2 je sais que 5 fois 5, ok? Si je divise en 5 évidemment. Si je divise en 5 ici ça donne 1, 5 divisé en 5 ça donne 1. On s'apercevait qu'ici qu'est-ce qui se passait? L'exposant diminue de 1 donc on avait dit c'est pour garder la suite logique pour que les lois des exposants marche et tout et tout ben on n'avait pas le choix, il fallait que 5 exposant 0 donne 1 parce qu'on divisé en 5, si je continuais à diviser en 5 ben là je vais aller dans les exposants négatifs, si je divise en 5 encore, qu'est-ce que j'obtiens ici? J'obtiens 1 divisé en 5 j'obtiens un cinquième et si je continue ma suite logique on va avoir 5 exposant quoi? (moins 1). Donc en mathématiques c'est souvent des raisons comme ça, c'est que pour préserver toutes les manières de diviser qu'on a, pour préserver ces choses là, pour qu'il n'y ait rien qui change quand on apporte de nouveaux nombres ben il faut que l'on suive cette suite logique là et dans le fond ça donne ça parce qu'on n'a pas le choix que ça donne ça parce que sinon ça ruinerait un peu les règles que l'on a jusqu'à maintenant d'opérations. Fait que c'est ça la raison, ce n'est pas plus difficile que ça, ce n'est pas une raison super fabuleuse, extraordinaire, c'est ça.

$$5^2 = 5 \times 5 \qquad \div 5$$

$$5^1 = 5$$

$$5^0 = 1$$

$$5^{-1} = \frac{1}{5}$$

L'enseignante fait ensuite le lien avec les différents résultats que les élèves avaient donné sur les exposants négatifs. Ainsi quand on fait 5^{-4}, on fait divisé en 5, divisé en 5, divisé en 5, divisé en 5 mais c'est quoi qu'on divise en 5? C'est le 1 et c'est 1 à cause de ce qui est ici (la suite logique). Elle donne alors l'exemple $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$. Marie demande alors s'il faut écrire comme réponse finale $\frac{1}{625}$, ce à quoi l'enseignante répond qu'elle peut choisir entre les deux écritures ($\frac{1}{625}$ ou $\frac{1}{5^4}$), parce que 625 n'est pas un grand nombre mais si on a 7^{13} on ne le calcule pas, on le laisse tel quel, l'essentiel étant de ne pas laisser une expression avec des exposants négatifs ou des résultats comme 0,01679 ou 13 milliards 568 mille 376.

Autour de l'écriture $\frac{1}{2^{-3}}$

<u>Différentes réponses des élèves</u> :

- Laure anticipe que la réponse sera positive car 2^{-3} ça donne un nombre à virgule donc 1 sur un nombre à virgule positif va être positif.
- Zaïa donne comme réponse 2^3, elle se réfère à l'exemple précédent $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$ donc ici ce sera le contraire.

L'enseignante valide cette réponse en justifiant chacune des étapes :

$$\frac{1}{2^{-3}} = 1 \div 2^{-3} = 1 \div \frac{1}{2^3} = 1 \times \frac{2^3}{1} = 2^3$$

Justification 1ère égalité : barre de fraction c'est comme une division
Justification 2^{ième} égalité : loi des exposants négatifs
Justification 3^{ième} égalité : diviser une fraction c'est comme multiplier par l'inverse.

Autour de $\left(\frac{3}{5}\right)^3$

Réponse de Sam : $\frac{9}{125}$. Réponse de Marc : $\frac{9}{15}$. Il y a des discussions dans la classe, l'enseignante finit par faire toute la démarche au tableau : $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3^3}{5^3}$.

Autour de $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3$

Réponse de Ghila : $\left(\frac{3}{5}\right)^6$ (on ajoute les exposants). Carmen demande ce qui arriverait s'il n'y avait pas de parenthèses. L'enseignante répond qu'à ce moment l'exposant est attribué au numérateur et pas au dénominateur. Marie demande si on peut écrire $\frac{3^6}{5^6}$ et le calculer.

Autour de $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

Réponse de Christine : $\left(\frac{5}{3}\right)^2$. François dit que Christine a raison.

Réponse de Julie : $\frac{5^2}{3^2}$. Plusieurs élèves voient l'équivalence avec l'écriture proposée par Christine.

Réponse de Miranda : $\frac{5^{-2}}{3^{-2}}$. Nicolas invalide l'écriture, en arrière des arguments d' « esthétique » :

> **Nicolas** : Ben 5 à la moins 2 sur 3 à la moins 2 ça donne vraiment quelque chose de fucké c'est genre 1 neuvième sur 1 vingt-cinquième donc... je ne pense pas que c'est bon.

Carmen répond que c'est ça même si donne quelque chose de « fucké ».

Nadia reprend les propos de Nicolas devant toute la classe et explique que Nicolas trouve que ça donne une fraction qui est laide $\frac{1/9}{1/25}$, c'est des fractions de fractions, le summum des fractions! Nadia décortique alors l'écriture en utilisant le fait que la barre de fraction c'est comme une division $\frac{1/9}{1/25} = \frac{1}{9} \div \frac{1}{25}$.

> Nadia : « Fait que j'ai un neuvième fois 25 uniėmes donc ça ça fait 25 neuvièmes puis 25 neuvièmes c'est 5 exposant 2 sur 3 exposant 2. »

$\frac{1/9}{1/25} = \frac{1}{9} \div \frac{1}{25} = \frac{1}{9} \times \frac{25}{1} = \frac{5^2}{3^2}$. Les élèves sont fascinés! L'enseignante les félicite tous car ils avaient tous raison. À la demande de Jennifer, l'enseignante explique ce qui s'est passé en montrant les déplacements survenus :

> Nadia : oui. Oui ça là là logiquement ça fait 3 exposant moins 2 fait qu'avec la règle qu'on a, 3 exposant -2 ça va se ramasser au dénominateur parce que c'est ça qu'elle disait notre petite loi. Puis 5 exposant -2 lui il va être en bas mais on vient de voir que quand on a quelque chose qui est en bas qu'est-ce qui se passe? Il s'en va en haut dans le fond, ça fait switcher ces deux là quand j'ai une fraction exposant négatif ben celui qui est en haut se ramasse en bas et celui qui est en bas se ramasse en haut.

Carmen fait alors le lien avec la résolution d'équations : « c'est comme la résolution d'équations, le moins devient un plus... c'est vrai tu changes de signe quand tu changes de bord. » Elle explicite un autre « truc ». L'enseignante les met en garde car les formules qu'on apprend sont facilement oubliées, c'est beaucoup mieux de comprendre ce qui se passe pour pouvoir le retrouver. Elle explique que c'est important de ne pas avoir des exposants négatifs car ce n'est pas facile à calculer, il faut toujours se ramener à des exposants positifs où là il s'agit de multiplier et c'est beaucoup plus facile que de diviser.

Autour de $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

Les élèves voient très vite que ça donne 3 demies. L'enseignante écrit alors $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1} = \frac{3}{2}$.

Autour de $\left(\frac{-4}{3}\right)^{-3}$

Sandra donne la réponse suivante : $\left(\frac{-4}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{-4}\right)^{3} = \frac{3^3}{-4^3}$. L'enseignante continue la démarche $\left(\frac{-4}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{-4}\right)^{3} = \frac{3^3}{-4^3} = \frac{27}{-64} = \frac{-27}{64}$ et explique qu'en mathématiques il y a une convention selon laquelle on ne laisse pas le signe moins au dénominateur et on le met au numérateur. Réaction des élèves : ce n'est pas égale!

Autour de $\left(\frac{1}{5^{-3}}\right)^{-2}$:

Réponse de Miranda : on le change de bord, 5 à la 3 à la 2.

Réponse de Ghila : $\left(\frac{1}{5^{-3}}\right)^{-2} = \frac{(1)^{-2}}{\left(5^{-3}\right)^{-2}}$. Les élèves sont tous d'accord avec l'écriture mais une grande partie d'entre eux se trompent en prétendant que $(5^{-3})^{-2}=5^{-6}$. Miranda voit que $1^{-2} = 1$.

Jennifer demande de le faire en changeant de bord (on voit ici que les élèves choisissent de le faire de différentes façons) : $\left(\frac{1}{5^{-3}}\right)^{-2} = (5^{-3})^2 = 5^{-6} = \frac{1}{5^6}$. La chercheure intervient alors pour dire qu'on aurait pu le faire d'une troisième façon : $(5^3)^{-2} = 5^{-6} = \frac{1}{5^6}$ (un élève dit qu'il trouve cette façon plus facile).

Autour de $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

Les élèves rouspètent en voyant les lettres, ils demandent si c'est bien des maths de 3 car tout le monde dit que les maths de 3 sont faciles mais ils trouvent ça bien compliqué.

Réponse de Marie : $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$. Les élèves sont d'accord.

Autour de $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^{-2}$

Réponse de Christine : $\left(\frac{y^2}{x^3}\right)^2$, les élèves finissent en cœur la simplification $\frac{y^4}{x^6}$. L'enseignante les félicite en leur disant que ce sont des champions, on sent qu'ils sont tous très contents!

Autour de $\left(\frac{x^3z^{-4}}{y^2}\right)^{-2}$

Réponse d'Émilie : $\left(\frac{x^3z^{-4}}{y^2}\right)^{-2} = \left(\frac{y^2}{x^3z^{-4}}\right)^2$. Julie continue la simplification $\left(\frac{x^3z^{-4}}{y^2}\right)^{-2} = \left(\frac{y^2}{x^3z^{-4}}\right)^2 = \frac{y^4}{x^6z^{-8}}$. Des élèves demandent d'où vient le moins 8. Pour continuer les élèves précisent qu'il faut virer de bord l'exposant négatif (Marc), le monter en haut (Miranda). Les élèves rouspètent, pourquoi ne pas laisser le négatif au dénominateur? Nadia répond que c'est un caprice de mathématicien... Devant les difficultés des élèves, l'enseignante reprend la démarche et souligne le fait qu'il est important de comprendre pour pouvoir reprendre la démarche quand on est bloqués (stratégie de contrôle).

$$\left(\frac{x^3z^{-4}}{y^2}\right)^{-2}=\left(\frac{y^2}{x^3z^{-4}}\right)^2=\frac{y^4}{x^6z^{-8}}=\frac{y^4}{x^6\frac{1}{z^8}}=\frac{y^4}{\frac{x^6}{1}\times\frac{1}{z^8}}=\frac{y^4}{x^6/z^8}=y^4\div\frac{x^6}{z^8}$$

François propose plutôt d'écrire $\frac{y^4}{x^6 \div z^8}$ et on n'aurait ainsi plus de signe moins! Sans vraiment répondre à l'intervention de l'élève, Nadia continue la réduction $\frac{y^4.z^8}{x^6}$. Une fois cette démarche effectuée, l'enseignante demande aux élèves de comparer les deux expressions équivalentes $\frac{y^4}{x^6.z^{-8}}$ et $\frac{y^4.z^8}{x^6}$. Julie répond que dès le début elle l'avait fait comme ça.

L'enseignante donne ensuite l'expression suivante $\left(\frac{8a^3b^2c}{2a^4bc^{-1}}\right)^{-2}$ à simplifier. Les élèves le font sur une feuille que l'on ramasse. Si on regarde les productions des élèves, on peut remarquer que la majorité d'entre eux choisissent de procéder ainsi :

$\left(\frac{8a^3b^2c}{2a^4bc^{-1}}\right)^{-2}=\left(\frac{2a^4bc^{-1}}{8a^3b^2c}\right)^2$, on peut remarquer un grand nombre de bonnes simplifications (Christine, Miranda, Anne-Julie, Sandra, Cathy, Laure, Marc, Ly, Sam, Nicolas, Julie, François et Carmen). D'autres élèves font des erreurs dues essentiellement à la simplification des nombres et au traitement de

c^{-2} (Jennifer, Marie, Patricia, Anna, Léa, Dominique, Éva et Geneviève). Quelques autres élèves ont plutôt simplifié en « distribuant » l'exposant négatif $\left(\dfrac{8a^3b^2c}{2a^4bc^{-1}}\right)^{-2} = \dfrac{8^{-2}a^{-6}b^{-4}c^{-2}}{2^{-2}a^{-8}b^{-2}c^{2}}$. Ghila, Zaïa, Élie et Daniel font plusieurs erreurs qui reflètent des difficultés dans la simplification de cette expression. On peut remarquer qu'il y a une façon de simplifier qui est préférée à d'autres (choisie par le plus grand nombre d'élèves) et qu'elle est source de moins d'erreurs.

Analyse de la séance du 11 mai

Lors de cette séance en classe, Nadia corrige la simplification de cette expression. Elle fait un retour sur les productions des élèves et annonce qu'ils ont réduit de deux façons différentes mais comme la majorité d'entre eux ont résolu de la première façon, c'est de cette façon qu'elle procède en reprenant chacune des étapes. Il n'y a pas vraiment de questions de la part des élèves.

APPENDICE J
ANALYSE DE L'ÉTAPE DE CO-SITUATION

L'analyse des verbatims des deux premières rencontres de co-situation *(8 novembre 2005 et 15 décembre 2005)* nous a permis de mettre en évidence les cadres de référence sous jacents de la chercheure et de l'enseignante, avant toute construction conjointe des situations, cadres de référence qui risquent fort d'être mobilisés dans la construction des situations élaborées et expérimentées par la suite. Nous reviendrons tout d'abord sur ce qui ressort de cette analyse, avant d'entrer sur l'analyse des situations élaborées.

L'analyse qualitative que nous avons réalisée a permis d'identifier trois grandes catégories de sens (regroupant chacune des sous-codes) émergeant du codage du verbatim de ces deux premières rencontres.

A. Le projet qui habite la chercheure et l'enseignante au départ, sur les raisons pour lesquelles elles s'engagent dans ce projet

Le codage a fait ressortir que l'enseignante et la chercheure sont habitées par deux projets parallèles. Nadia s'interroge sur l'enseignement d'un certain contenu (l'algèbre, plus spécifiquement la partie de son programme portant sur le travail sur les opérations sur les polynômes et sur les exposants) et elle cherche des situations, des activités intéressantes en lien avec l'enseignement de ce contenu avec les élèves en secondaire 3. Dans l'extrait suivant, on note un questionnement de la part de l'enseignante sur ce qu'elle fait dans cette partie de son enseignement avec lequel elle est mal à l'aise (en comparaison de ce qu'elle fait dans d'autres domaines). Elle veut aller vers quelque chose qui dépasse la technique, qui puisse intéresser les élèves (« des activités le fun »).

Trouver des situations intéressantes en algèbre (E)

Nadia : Mais il faut que moi mon idée pourquoi je suis intéressée avec ton affaire c'est parce que je trouve ça plate. Tu sais quand tu enseignes l'algèbre là en secondaire 3 c'est des manips, additions, soustractions de polynômes puis tu sais il n'y a pas vraiment d'activités le fun à faire avec eux c'est... voici ce que c'est avec des flèches de couleur puis j'apprends la technique puis... Puis je ne suis pas bien là-dessus, parce qu'avec plein d'affaires, je fais plein de belles activités puis ici c'est plate, on fait de la drill puis c'est plate, alors je me suis dit ben est-ce qu'on peut trouver quelque chose... (8 novembre 2005, 87-94)

(...)

C : comme tu dis c'est les petites flèches à faire pour la double distributivité...

Nadia : ouais, là j'ai des traits de couleur, c'est tout joli là mais... *(Redit son malaise par rapport à ce qu'elle fait).*

C : ok.

Nadia : ça reste que c'est de la technique, c'est juste que je mets l'emballage plus beau là. *(Souci de dépasser la technique).* (8 novembre 2005, 100-104)

Pour la chercheure il s'agit de développer des situations qui favorisent le développement du contrôle en algèbre.

Trouver des situations qui vont aider à développer le contrôle (C)

C : (...) J'aimerais essayer de bâtir une espèce de... situations qui vont aider les élèves à acquérir ce contrôle là. Donc l'anticipation, la vérification, tous ces trucs là, c'est pour ça que j'avais besoin de toi. (8 novembre 2005, 12-15)

L'enseignante et la chercheure sont embarquées dans le projet avec deux motivations différentes, deux entrées différentes avec toutefois un point commun sur lequel elles se rejoignent : dépasser la technique.

Prendre en compte la manipulation (C et E)

C : ben le truc, moi ce que j'avais prévu peut-être c'est au début essayer de trouver des activités avec eux, des problèmes comme ça qui peuvent les faire embarquer, mais après c'est sûr qu'on va devoir être obligées d'aller vers la drill. *(Les deux reconnaissent l'importance de la manipulation en algèbre et* *expriment une contrainte du programme pour l'enseignement, la dimension syntaxique du contrôle sous-jacente pour la chercheure.)*

Nadia : ben on n'a pas le choix de toute façon en algèbre, il y a un bout comme ça là. (8 novembre 2005, 95-98)

Le cadre de référence qui habite la chercheure et la pratique de l'enseignante, sa didactique praticienne, son mode de fonctionnement sont par ailleurs explicités dans la rencontre de co-situation.

B. Un cadre de référence sur le contrôle explicité

Dans l'extrait suivant, la chercheure associe (en parlant des élèves qui n'ont pas de contrôle) le contrôle à l'anticipation, la vérification, l'engagement réfléchi, le retour au problème chez les élèves du secondaire.

Différentes composantes du contrôle : 1. anticipation, 2. retour sur le problème, vérification, 3. engagement réfléchi.

C : ok, alors ce que moi je suis en train de faire dans mon doctorat, c'est qu'on a remarqué au début que les élèves, bon avec les études et des trucs comme ça, c'est un truc qu'on a lu, c'est que les élèves ils n'ont pas de contrôle quand ils font l'activité mathématique c'est-à-dire que ils n'anticipent pas dans un problème, en général, ils n'anticipent pas avec l'ordre de grandeur ou ils ne vérifient pas leur résultat, ils ne reviennent pas sur le problème et puis en général il n'y a pas trop d'engagement réfléchi, *(Un certain cadre de référence sur le contrôle qu'elle explicite à l'enseignante),* ils y vont un peu à la va vite comme ça. (8 novembre 2005, 6-12).

Un développement à long terme du contrôle

La chercheure souligne que le contrôle se développe sur du long terme.

C : (...) parce que là comme c'est développer ce truc là, que les élèves anticipent, vérifient, qu'ils aient un engagement réfléchi, je pense que ça va être sur du long terme. Ça ne va pas être juste, je viens là, je le fais là, je crois que ça demande d'insister, insister... (8 novembre 2005, 104-111)

C. Une didactique praticienne explicitée (E)

Plusieurs éléments permettent de saisir le cadre de référence de l'enseignante : son rapport aux élèves, aux contraintes, à l'enseignement et son cadre didactique.

a) Sur l'apprentissage, une connaissance des élèves

Nadia présente sa connaissance, sa perception, le regard qu'elle porte sur ses élèves et sur ses groupes. Dans l'extrait suivant, elle décrit le côté vulnérable de ses élèves, ils ont peur d'écrire quelque chose de faux, peur de montrer qu'ils ne sont pas bons.

Difficulté à s'engager, peur d'écrire quelque chose de faux

Nadia : en fait, ils (les élèves) sont… c'est sûr qu'ils ont de la misère à s'engager, c'est sûr à peu près à n'importe quel niveau.

C : même international?

Nadia : même les élèves forts, puis les élèves forts d'autant plus que ils s'engagent moins parce qu'ils ont peur d'écrire des affaires fausses, ils veulent toujours avoir tout bon. *(Une difficulté dans leur engagement écrit dans la tâche : n'écrivent que s'ils sont sûrs, peur d'écrire des choses fausses).*

C : ouais, d'accord.

Nadia : ils n'écrivent pas nécessairement… ils ne vont pas s'engager facilement à moins d'être sûrs parce qu'ils vont dire je ne comprends rien, puis ils n'écrivent rien. Là il faut les convaincre d'écrire quelque chose « oui mais je ne serais pas bon » … (8 novembre 2005, 46-63)

Difficultés avec le mélange algèbre / géométrie

Nadia met de l'avant une autre difficulté des élèves reliée au passage d'un cadre algébrique à un autre (géométrique).

Nadia : tu vois parce que moi après ça je revenais sur données manquantes, heu… là ce qu'ils ont de la difficulté c'est qu'on mélange algèbre avec de la géométrie, puis c'est là que ça l'a… mais comme j'en ai fait un peu, je pense que peut-être qu'ils vont être mieux le deuxième coup qu'on passe là. (8 novembre 2005, 61-64)

Une ouverture à des approches particulières, différentes pour les élèves

Dans cet autre extrait, l'enseignante explicite la manière d'apprendre de ses élèves.

Nadia : (...) les élèves de l'international c'est des élèves déjà qui ont des façons pas mal particulières d'apprendre parce qu'on fait des trucs spéciaux. Moi déjà je leur fais faire des projets, ce n'est pas un enseignement de remplir des tableaux heu...

C : traditionnel là.

Nadia : oui, c'est ça, je ne suis pas déjà traditionnelle fait que je n'aurai pas de problèmes avec ça puis les multi sports, eux autres, ils aiment tout le temps faire toutes sortes de choses différentes, eux autres sont motivés. Ils sont bruyants, mais ils sont motivés. (8 novembre 2005, 241-249)

Une connaissance différentiée des groupes d'élèves

Nadia fait une différentiation sur ses quatre groupes d''élèves : international (2 groupes), sports étude (1 groupe) et régulier (1 groupe). Les groupes à l'international et le multi sport sont vus comme des groupes très forts en comparaison du groupe régulier.

Nadia : oui, c'est juste que international je fais des résolutions de systèmes, je ne les fais pas au régulier, mais heu... c'est parce que mes groupes international sont vraiment forts là, c'est des groupes qui ont des moyennes de 85, 90 pour cent et mon multi-sport que je fais juste le régulier, ils ont une moyenne à peu près équivalente là, très très forts. Un groupe, mon groupe régulier, eux autres c'est comme une moyenne de 62, ils ne sont vraiment pas forts. (8 novembre 2005, 38-43)

(...)

Nadia : mais ils sont très très gentils par exemple *(les élèves du groupe régulier)*. Ils sont très discrets, très gentils, ils ne sont pas tanants du tout. Ils ne sont pas forts mais ils sont fins là. (8 novembre 2005, 341-342)

Une connaissance des groupes guidant les critères de choix pour l'expérimentation

Nadia choisit le groupe dans lequel aura lieu l'expérimentation, un des deux groupes à l'international.

> Nadia : j'ai un groupe là, mon groupe 32, eux là ils sont très très agréables, ils embarquent dans n'importe quoi, ils discutent, 31 ben ils sont pas pire mais tu as comme 6 ou 7 élèves qui sont toujours « mais à quoi ça sert? »
>
> C : ah oui.
>
> Nadia : c'est la seule chose que je ne comprends pas parce que normalement les élèves du PEI ils sont toujours curieux de tout, n'importe quoi, n'importe comment. (8 novembre 2005, 135- 141)
>
> (...)
>
> C : Comme tu as deux groupes de PEI, tu voudrais qu'on prenne lequel?
>
> Nadia : moi je te dis, le 32 là tu aurais plus de chances d'avoir des choses intéressantes, ils discutent, ils sont brillants...(15 décembre 2005, 148-152)

L'enseignante ne choisit pas le groupe sport étude pour l'expérimentation parce qu'il est trop bruyant.

> Nadia : le multi sports le problème c'est parce que quand ils s'emballent dans quelque chose, ils ne s'arrêtent plus, ils s'engueulent, ils s'engueulent, ils font des maths, mais c'est comme s'ils étaient dans un aréna, ils gueulent là. C'est comme faire deux cours en un, c'est vraiment... Mais ils sont intéressants par contre, ils sont très très sympathiques, très gentils. Puis l'autre affaire du multi sport c'est parce c'est 27 gars. (15 décembre 2005, 186-194)

Un deuxième élément de la pratique de Nadia ressort pendant la rencontre en lien avec la référence au temps.

c) Référence au temps

La condition temps est vue comme favorable par Nadia, elle prévoit le nombre de périodes qu'elle peut consacrer à la partie sur les exposants pour l'expérimentation.

Un temps favorable en référence au groupe et à son fonctionnement

> Nadia : j'ai du temps en masse, j'ai du temps parce qu'au lieu de 4 périodes j'en ai 6, avant c'était 4 périodes puis moi j'en ai 6 périodes par 9 jours.

C : pour la même matière, oui, là tu as le temps.

Nadia : ce n'est pas grave ça passe vite avec eux autres. (8 novembre 2005, 353-356)

(...)

Une estimation du temps d'enseignement de la séquence

Nadia : ce n'est pas très gros dans le fond, un coup qu'on découvre la formule ça ne prend pas 3 cours à découvrir quand même puis un cours pour qu'ils se pratiquent un peu, qu'on fait des résolutions de problèmes, bon. Ça c'est 3 ou 4 cours puis... fait que là j'ai 32 périodes, mettons qu'il reste 28 puis ici si je dis que je mets à peu près 8 à 10 périodes, j'ai du temps en masse. Je peux te donner... on peut faire 6 à 8 périodes là-dessus *(sur les exposants)*, je n'ai pas de problème avec ça. (15 décembre 2005, 97-103)

Un troisième élément porte sur son rapport à l'enseignement.

c) L'enseignement : mode de fonctionnement, stratégies d'intervention

Nadia présente son mode de fonctionnement en classe, ses stratégies d'intervention. Nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas de routine et qu'elle prend soin de varier son enseignement, elle explicite ainsi les principes sous-jacents à son enseignement. Elle ne se voit pas comme une enseignante traditionnelle, elle cherche à briser l'habitude pour stimuler ses élèves.

Nadia : je ne suis pas déjà traditionnelle (8 novembre 2005, 241)

Varier le fonctionnement

C : et comment tu fonctionnes en classe? Est-ce que tu corriges les devoirs au début, est-ce qu'il y a une certaine routine ou...?

Nadia : non, ça dépend. Moi je fais tout ce qu'il ne faut pas faire pour une gestion de classe idéale là. La seule chose, moi c'est que ça parle un peu parfois. Bon, je n'ai pas toujours le contrôle sur le placotage, mais j'ai pas trop de discussion mais, ça change des fois je vais corriger le devoir, des fois je vais commencer je mets un problème « vous me faîtes ça », là ils sont là « ah, ok. » Là, ils essaient quelque chose, bon. Des fois ils ont des notes de cours au début, des fois ils ont des notes de cours à la fin, des fois ils n'ont pas de notes de cours, ça dépend là.

Briser l'habitude pour stimuler les élèves

C : je me disais que tu faisais peut-être les choses très structurées, tu sais, il y a des profs, correction du devoir... on corrige les exercices.

Nadia : non, c'est bien trop plate, il ne faut pas qu'ils s'habituent. Il ne faut pas qu'ils s'habituent, ils ont le temps de dormir. Comme ça, ils ne dorment pas dans mon cours. Ils ne peuvent pas m'accuser que c'est plate dans mes cours. (8 novembre 2005, 411-431)

Travailler la division et la multiplication (sur les exposants) simultanément

Nadia explicite ses idées sur l'enseignement des opérations, elle traite la division en même temps que la multiplication, elle le fait ensemble car l'un dépend de l'autre.

Nadia : Mais division je pense qu'on peut le faire en même temps qu'on fait multiplication, je ne pense pas que ce soit un problème là. Parce que si toi mettons tu le fais comme ça dans ta tête, parce que moi je le faisais un peu comme ça aussi, multiplier, diviser dans le fond c'est le même principe, c'est la même opération dans le fond, ce n'est pas...

C : c'est juste que tu cherches quelque chose de différent.

Nadia : quand tu divises, c'est une multiplication dans le fond à l'envers là, c'est juste ça. On pourrait mettre division là et on pourrait mettre propriétés des exposants là si tu veux ou... ce n'est pas... (15 décembre 2005, 74-82)

Dans le prochain extrait, l'enseignante rapporte une situation vécue en classe et nous pouvons ainsi entrevoir la façon dont elle intervient avec les élèves. Elle exploite les productions des élèves.

Les mettre sur une situation à résoudre (représenter le graphique) avant d'avoir introduit le contenu. Prise en compte des productions des élèves, retour sur celles-ci.

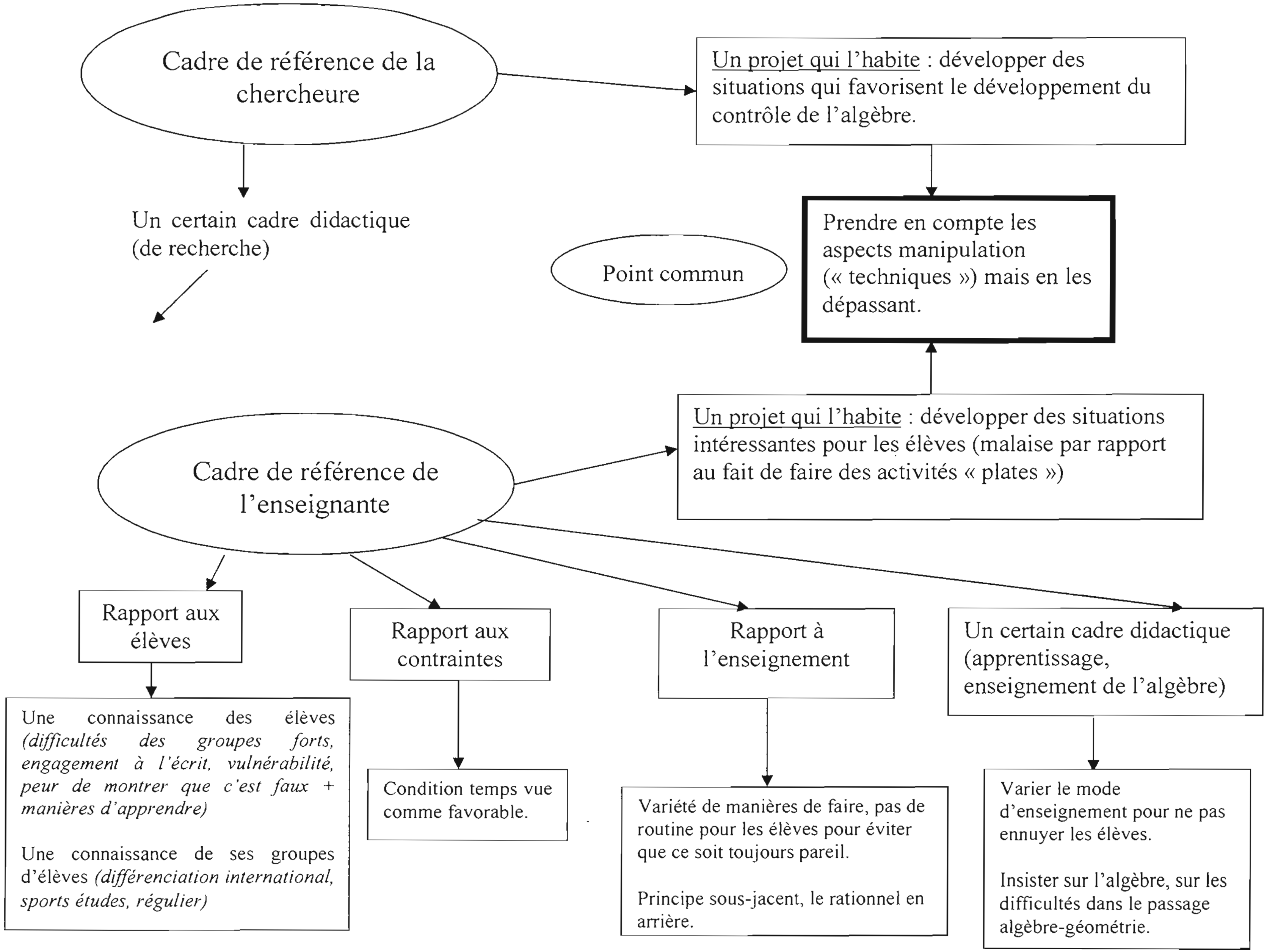
Nadia : ouais, tu sais comme le truc là vol Paris-Montréal qu'on fait en variable et fonction là *(elle fait référence à un cours au BES à l'UQAM)*. Les gens qui font la ligne qui descend, ou ils font le vol de l'avion. Puis je leur ai fait faire le graphique avant de faire les relations puis dans tous mes groupes personne n'avait rien produit, c'était toute comme ça... personne n'avait eu le bon graphique, puis là je ramassais ce qu'ils faisaient, puis là je les mettais. Puis là quand j'avais mis toutes les différentes versions que j'avais vues, je disais « je vous dis tout de suite, personne n'a bon. » *(L'enseignante cherche à les*

« provoquer » pour le stimuler à chercher). Puis là ils ont dit « Hein, on n'a bon? » et tout ça là. Puis dans ce groupe là j'ai dit « s'il y a un qui réussit… » Parce que j'en ai un qui est très brillant, tu sais, je n'ai même pas rien dit encore puis il trouve la formule avant tout le monde puis… très très brillant, puis je m'attendais lui peut-être il va trouver, tout le monde se tournait vers lui « oh oui Nicolas il va trouver, vas-y Nicolas. » Puis finalement ce n'est pas lui, c'est un autre petit gars au fond de la classe, il a l'air d'un rockeur, les cheveux comme ça puis il parle « oh madame! » comme ça *(d'une voix très grave).* Puis à un moment donné, là je mets tout ça puis je disais « personne ne l'a bon » puis il lève la main et il dit « madame, moi je pense que je le sais c'est quoi, je pense que ça fait quelque chose comme ça. » Puis il tourne là. Et là je lui dis « purée pourquoi tu ne l'as pas écrit? » il dit « Ben parce que je n'étais pas sûr puis… » (On peut noter ici un apprentissage dans l'action : surprise par la réponse d'un élève).

C : comme quoi…

Nadia : Puis là il y a un cours entre autres, je disais, ça faisait deux jours qu'on dessinait des graphiques puis j'ai dit « il serait temps qu'on ramasse nos idées puis qu'on écrive un peu des notes de cours par exemple et là ils disaient « ah non, est-ce qu'on peut continuer à faire des graphiques, à aller au tableau puis discuter puis…» C : c'est ça bien, tu les habitues, c'est un peu ça que je veux, qu'ils aillent au tableau, qu'ils participent et tout et ils sont déjà habitués. (15 décembre 2005, 156-184)

Dans la page qui suit, un schéma synthèse met en évidence les cadres de référence qui habitent la chercheure et l'enseignante, cadres de référence qui risquent fort d'être mobilisés dans la construction des situations élaborées et expérimentées par la suite.


Cadre de référence de la chercheure
Un projet qui l'habite : développer des situations qui favorisent le développement du contrôle de l'algèbre.
Un certain cadre didactique (de recherche)
Point commun
Prendre en compte les aspects manipulation (« techniques ») mais en les dépassant.
Un projet qui l'habite : développer des situations intéressantes pour les élèves (malaise par rapport au fait de faire des activités « plates »)
Cadre de référence de l'enseignante
Rapport aux élèves
Rapport aux contraintes
Rapport à l'enseignement
Un certain cadre didactique (apprentissage, enseignement de l'algèbre)
Une connaissance des élèves (difficultés des groupes forts, engagement à l'écrit, vulnérabilité, peur de montrer que c'est faux + manières d'apprendre)
Une connaissance de ses groupes d'élèves (différenciation international, sports études, régulier)
Condition temps vue comme favorable.
Variété de manières de faire, pas de routine pour les élèves pour éviter que ce soit toujours pareil.
Principe sous-jacent, le rationnel en arrière.
Varier le mode d'enseignement pour ne pas ennuyer les élèves.
Insister sur l'algèbre, sur les difficultés dans le passage algèbre-géométrie.