UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

L'EXISTENCE DE STRUCTURES PRESQUE-KÄHLÉRIENNES SUR UNE VARIÉTÉ PRESQUE-COMPLEXE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

LEJMI MEHDI

NOVEMBRE 2006

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 -Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article **11** du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Avant de commencer, je tiens à remercier Monsieur Vestislav Apostolov, mon directeur de recherche. Ses conseils judicieux et son encouragement ont été précieux. Sa disponibilité et le temps qu'il a consacrés à répondre à mes questions ont facilité la rédaction de ce mémoire, sans oublier son soutien financier.

Enfin, je tiens à remercier mes parents pour tout ce qu'ils ont sacrifié pour moi, mon frère, ma soeur et tous mes amis qui m'ont grandement soutenu et encouragé constamment à réaliser mes rêves d'accomplir mes études supérieures.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Étant donnée une structure presque-complexe J sur une variété réelle de dimension paire, nous nous posons la question si J est localement calibrable, c'est à dire s'il existe localement une forme symplectique compatible avec J dans le sens que $\omega(\cdot, J\cdot)$ définit une métrique riemannienne J-invariante.

Dans ce contexte, A. Tomassini a donné des exemples explicites de structures presque-complexes en dimension 4 et 6 qui ne peuvent être calibrées localement par aucune forme symplectique. Ceux en dimension 4 vont s'avérer incorrects. Aussi, G. Tian et T. Rivière ont montré, avec un argument incomplet, qu'une structure presque-complexe en dimension 4 est toujours localement calibrable. J. Armstrong a affirmé la même chose sans donner de preuve.

Nous allons examiner ces constats et donner une preuve complète du fait que toute structure presque-complexe en dimension 4 est localement calibrable. Aussi, nous montrons qu'une structure presque-complexe sur une variété strictement approximativement kählérienne, en particulier S^6 avec sa structure presque-complexe canonique, ne peut être calibrée localement par aucune forme symplectique.

Finalement, nous rappelerons le théorème d'Armstrong qui affirme que ce ne sont pas toutes les structures presque-complexes en dimension supérieure ou égale à 12 qui peuvent être calibrées localement par une forme symplectique.

Mots clés : Structures presque-complexes ; variétés presque-kahlériennes ; variétés approximativement kählériennes.

INTRODUCTION

Chaque variété symplectique (M, ω) induit un espace de Fréchet, contractile et de dimension infinie de structures presque-complexes J calibrées par ω et définies par la propriété que la forme bilinéaire $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ est symétrique et définie positive (c'est à dire elle définit une métrique riemannienne sur M). Dans ce cas, (J, g, ω) est appelé une structure *presque-kählérienne.*

Il est naturel de se demander si une structure presque-complexe J donnée sur M peut être calibrée ou non par une forme symplectique ω. Cette question soulevée et étudiée en premier par Armstrong (Armstrong, 1998) peut être posée localement ou globalement et les réponses correspondantes sont assez différentes dans leur nature. Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'aspect local du problème en considérant la question suivante :

Question 1 *: Étant donné une structure presque-complexe J sur M, existe-t-il localement une forme symplectique ω telle que J est calibrée par ω?*

La motivation essentielle d'étudier avec plus de détails cette question vient de (Rivière et Tian, 2004) où plusieurs aspects de la théorie des applications pseudo-holomorphes sur des variétés symplectiques et complexes peuvent être étendus aux variétés presque-complexes, compactes et dont la strcuture presque-complexe peut être calibrée localement.

Comme exemple trivial, toute structure presque-complexe intégrable est localement calibrable (bien qu'il existe plusieurs variétés complexes qui ne sont pas symplectiques). En particulier, quand M est de dimension 2, la réponse à la question 1 est toujours affirmative. Armstrong (Armstrong, 1998) affirme (sans donner de preuve) que la réponse à la question 1 est aussi positive en dimension 4.

Dans le premier chapitre, nous donnons les deux résultats principaux de ce mémoire, ainsi que leurs preuves abrégées. Le premier stipule que toute structure presque-complexe en dimension 4 est localement calibrable. Le deuxième affirme que toute structure presque-complexe strictement approximativement kählérienne en dimension 6 est non-calibrable localement.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons les outils nécessaires pour pouvoir énoncer le théorème de Malgrange des systèmes différentiels elliptiques. En fait, la preuve du premier résultat est basée essentiellement sur ce théorème.

Au troisième chapitre, nous rappelons des notions sur les structures complexes sur un espace vectoriel. Nous définissons aussi un espace vectoriel symplectique, ainsi que le groupe symplectique défini sur cet espace.

Dans le quatrième chapitre, nous introduisons les variétés presque-complexes pour en donner des exemples par la suite. Nous énumérons plusieurs définitions importantes de variétés presque-complexes admettant d'autres propriétés. À la fin de ce chapitre, nous donnons une propriété clé des variétés presque-kählériennes.

Au cinquième chapitre, nous donnons un contre-exemple à un résultat de Tomassini (Tomassini, 2002) affirmant que certaines structures presque-complexes sur $\mathbb{R}^4$ ne sont pas localement calibrables. Nous expliquons la déficience de l'argument de Tian et Rivière (Riviére et Tian, 2004) pour donner une preuve complète du premier résultat.

Finalement, dans le sixième et dernier chapitre, nous nous intéressons aux variétés approximativement kählérienne pour montrer qu'une structure presque-complexe sur une variété strictement approximativement kählérienne est non-calibrable localement. Nous rappelons aussi un résultat important d'Armstrong (Armstrong, 1998) qui stipule que ce ne sont pas toutes les structures presque-complexes en dimension supérieure à 10 qui sont localement calibrable.

CHAPITRE I

DESCRIPTION DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

1.1 Calibration de structures presque-complexes en dimension 4

Le premier résultat principal montré dans ce mémoire est le suivant :

Théorème 1.1.1 — *Toute structure presque-complexe sur une variété de dimension* 4 *est localement calibrable.*

Une preuve de ce résultat est donnée dans (Rivière et Tian, 2004). Mais, étant donné que nous avons trouvé que les arguments dans (Rivière et Tian, 2004) sont incomplets (voir remarque 1.1.2 ci-dessous), nous donnons un argument alternatif basé sur le théorème de Malgrange de l'existence de solutions locales d'un système différentiel elliptique.

Démonstration du Théorème 1.1.1. Soit (M, J) une variété presque-complexe de dimension 4. Le fibré vectoriel des 2-formes réelles, $\wedge^2(M)$, se décompose par rapport à J comme une somme directe

$$\wedge^2(M) = \wedge^{inv}(M) \oplus \wedge^{anti}(M),$$

où $\wedge^{inv}(M)$ (respectivement $\wedge^{anti}(M)$) est le fibré vectoriel des 2-formes invariantes par rapport à J (respectivement anti-invariantes par rapport à J). Cette décomposition des 2-formes réelles induit une décomposition de la dérivée extérieure $d = d' + d''$ où $d'\colon \Omega^1(M) \to \Omega^{inv}(M)$ et $d''\colon \Omega^1(M) \to \Omega^{anti}(M)$. Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que pour tout x appartenant à M il existe un voisiange U de x et une 1-forme

$\alpha \in \Omega^1(U)$ tels que

$$d''\alpha = 0,\ d\alpha \wedge d\alpha > 0 \tag{1.1}$$

où le signe d'une 4-forme est déterminé par l'orientation induite par J. En effet, la 2-forme $\omega = d\alpha = d'\alpha$ va être symplectique et invariante par rapport à J. Il s'ensuit qu'en chaque point de U, le 2-tenseur $g(\cdot,\cdot)\colon = \omega(\cdot, J\cdot)$ est symétrique, hermitien sur $(T(M), J)$ et peut être diagonalisé par rapport à h où h est une métrique hermitienne quelconque sur (M, J). La condition $\omega \wedge \omega > 0$ implique que g a un déterminant positif par rapport à h. Puisqu'on est en dimension complexe 2, ceci veut dire que g est défini soit positif ou négatif au point donné (et donc par continuité partout sur U). La structure presque-complexe J est calibrée soit par ω ou $-\omega$.

Pour résoudre (1.1), nous notons d'abord que le symbole principal de d'' est l'application linéaire $\sigma_{(\xi)}(d'')(\alpha) = \frac{1}{2}(\xi \wedge \alpha - J^*\xi \wedge J^*\alpha)$, où ξ, $\alpha \in T_x^*(M)$ et J^* agit sur $T_x^*(M)$ par $(J^*\alpha)(X) = -\alpha(JX)$. Ainsi, en dimension 4, $\sigma_{(\xi)}(d'')\colon \wedge_x^1(M) \to \wedge_x^{anti}(M)$ est surjective pour tout $\xi \in T_x^*(M) \setminus \{0\}$. Nous pouvons associer à d'' un opérateur linéaire différentiel elliptique $P\colon \Omega^{anti}(M) \to \Omega^{anti}(M)$ d'ordre 2 défini par $P\colon = d''\delta^h$, où h est une métrique hermitienne sur (M, J) compatible avec J et $\delta^h\colon \Omega^2(M) \to \Omega^1(M)$ est la codifférentielle correspondante (c'est à dire l'opérateur adjoint formel de d par rapport au produit L_2 défini par h). En effet, le symbole principal de P est donné par $\sigma_{(\xi)}(P)(\Phi) = -|\xi|^2\,\Phi$, pour tout $\xi \in T_x^*(M)$, $\Phi \in \wedge_x^{anti}(M)$.

En termes de P, nous voulons montrer que pour tout $x \in M$ on peut trouver un voisiange U de x et une 2-forme anti-invariante $\Phi \in \Omega^{anti}(U)$, telle que

$$P(\Phi) = 0,\ d\delta^h(\Phi) \wedge d\delta^h(\Phi) > 0 \tag{1.2}$$

en chaque point de U. Puisque P est elliptique, il suffit de trouver une 2-forme $\Phi_0 \in \Omega^{anti}(U)$ lisse, qui vérifie (1.2) seulement en x (c'est à dire une solution infinitésimale de (1.2)). En effet, avec une telle Φ_0 nous pouvons considérer le système $P(\Psi) + P(\Phi_0) = 0$. Utilisant le théorème des fonctions implicites, il est montré dans (Malgrange, 1972) que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage U_ϵ de x et une solution $\Psi_\epsilon \in \Omega^{anti}(U_\epsilon)$ avec $\|\Psi_\epsilon\|_{C^{2,\alpha}} < \epsilon$ (où $\|\cdot\|$ est la norme de Hölder de $C^{2,\alpha}(U)$). Ainsi, pour un ϵ assez petit,

$\Phi = \Phi_0 + \Psi_\epsilon$ et $U = U_\epsilon$ vont satisfaire (1.2).

Nous avons donc réduit notre problème à vérifier qu'en chaque point $x \in M$, il existe toujours une solution infinitésimale Φ_0 (pour un coix convenable de h). Notons par $S^l(T_x^*(M)) \otimes \wedge_x^{anti}(M)$ l'espace des l-jets des éléments de $\Omega^{anti}(M)$ en x (S^l désigne la l-ème puissance tensorielle symétrique). Par le théorème de Borel, pour toute suite $(a_l)_{l\geq 0}$ où $a_l \in S^l(T_x^*(M)) \otimes \wedge_x^{anti}(M)$, il existe $\Phi \in \Omega^{anti}(M)$ dont le l-ème jet en x est a_l. Il suffit alors de montrer qu'il existe un jet $e = (a_0, a_1, a_2)$ d'ordre inférieur ou égal à 2 tel que $P(e) = 0$ et $d\delta^h(e) \wedge d\delta^h(e) > 0$ où les opérateurs différentiels linéaires d'ordre inférieur ou égal à 2 sont identifiés avec les applications linéaires induites sur l'espace des jets d'ordre inférieur ou égal à 2. En fait, nous allons chercher un jet e vérifiant une condition encore plus forte à savoir $(d\delta^h(e))_0 = 0$ où $(\cdot)_0$ désignant la partie primitive d'une 2-forme (c'est-à-dire la projection orthogonale sur $F^\perp$). En effet, $(d\delta^h(e))_0 = 0$ implique que $P(e) = 0$ et $d\delta^h(e) = \frac{1}{2}L^h(e)F$ où $L^h\colon \Omega^{anti}(M) \to C^\infty(M)$ correspond à l'opérateur $L^h(\Phi)\colon = h(d\delta^h\Phi, F)$. Il s'ensuit que $d\delta^h(e) \wedge d\delta^h(e) = \frac{1}{2}(L^h(e))^2 V_h$ ($V_h = \frac{F\wedge F}{2}$ est la forme de volume) est positive dès que $L^h(e) \neq 0$. Un calcul standard montre que L^h est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 dont le symbole principal est $\sigma_{(\xi)}(L^h)(\Phi) = -\Phi(\xi^\sharp, J\theta_h^\sharp) + 2\sum_{i=1}^{4} \Phi(JN(\xi^\sharp, e_i), e_i)$, où $\theta_h\colon = J\delta^h F$ est la forme de Lee de (h, J), $\sharp$ est l'isomorphime identifiant $T^*(M)$ à $T(M)$ par la métrique h, $\{e_i\}$ est est une base orthonormale de $T_x(M)$ et $4N(\cdot,\cdot) = [J\cdot, J\cdot] - J[J\cdot,\cdot] - J[\cdot, J\cdot] - [\cdot,\cdot]$ est le tenseur de Nijenhuis de J. Il s'ensuit que $\sigma_\xi(L^h)$ est non nul en x pour un choix convenable de h quitte à effectuer une transformation conforme $e^f h$ de h avec $f(x) = 0$ et $df(x) \neq 0$. Donc, nous pouvons commencer avec $e' = (a_0, a_1)$ tel que $L^h(e') \neq 0$. Le symbole principale de $(d\delta^h)$ est $\sigma_{(\xi)}(d\delta^h)(\Phi) = -\xi \wedge \iota_{\xi^\sharp}\Phi$. Par polarisation sur ξ, ceci induit une application linéaire de $S^2(T_x^*(M)) \otimes \wedge_x^{anti}(M)$ à l'espace des 2-formes primitives $\left(\wedge_x^2(M)\right)_0$. Le fait que cette application est *surjective* nous garantit l'existence d'un élément $a_2 \in S^2(T_x^*(M)) \otimes \wedge_x^{anti}(M)$ tel que $e = (a_0, a_1, a_2)$ vérifiant $\left((d\delta^h)(e)\right)_0 = 0$. Puisque $L^h(e) = L^h(e') \neq 0$, ceci conclut la preuve

Remarque 1.1.2—L'argument donné dans (Riviére et Tian, 2004) se pose sur un résultat dans (Olver, 1995) qui stipule que pour toute 2-forme non-dégénérée Ω avec $d\Omega \neq 0$, il existe un système local de coordonnées (x, y, z, t) tel que $\Omega = e^x(dx \wedge dy + dz \wedge dt)$. Nous notons que l'existence de telles coordonnées implique que Ω est conforme à une forme symplectique. Or, nous savons qu'il existe plusieurs 2-formes non-dégénérées qui ne vérifient cette condition. En effet, en dimension 4, on peut associer à chaque 2-forme Ω non-dégénérée une 1-forme θ appelée la forme de Lee, telle que $d\Omega = \theta \wedge \Omega$. Sous une transformation conforme $\widetilde{\Omega} = e^f \Omega$, la forme de Lee change à $\widetilde{\theta} = \theta + df$. Il s'ensuit que Ω est (localement) conformément symplectique si et seulement si $d\theta = 0$. Par exemple, la 2-forme $\Omega = e^{xz} dx \wedge dy + dz \wedge dt$ est non-dégénérée et a une forme de Lee non-fermée $\theta = e^{xz} dz$ et donc Ω n'est pas (localement) conformément symplectique.

Remarque 1.1.3— Le théorème (3.1) dans (Tomassini, 2002) affirme qu'il existe des structures presque-complexes sur $\mathbb{R}^4$ qui ne sont pas localement calibrables. Nous pouvons voir que l'affirmation est incorrecte en construisant des formes symplectiques qui vont calibrer ces structures presque-complexes. En effet, quand la fonction $f(x)$ dans ce théorème dépend seulement de x_3, la structure presque-complexe correspondante est même intégrable.

1.2 Non-calibration de structures approximativement kählériennes non-intégrables en dimension 6

La situation change dramatiquement en dimension supérieure à 4. En effet, il s'ensuit de (Bryant, 1982) que la structure presque-complexe standard sur S^6 n'est pas localement calibrable. A. Tomassini (Tomassini, 2002) a donné d'autres exemples explicites de structures presque-complexes qui ne sont pas localement calibrables. En dimension supérieure à 10, J. Armstrong (Armstrong, 1998) a montré qu'il existe un ensemble ouvert (de germes de) structures presque-complexes qui ne sont pas localement calibrables. Pour l'instant, nous n'avons aucun critère complet pour savoir si une structure presque-complexe donnée est localement calibrable ou non.

Le deuxième résultat principal de ce mémoire (découlant aussi de considérations encore plus générales dans (Bryant, 2006)) donne une réponse négative pour une classe spéciale de variétés presque-complexes de dimension 6, appelées *variétés strictement approximativement kählériennes* notées SNK, cf. (Butruille, 2005), (Reyes Carrion, 1998) et (Verbitsky, 2005).

Théorème 1.2.1— *La structure presque-complexe d'une variété strictement approximativement kählérienne de dimension* 6 *n'est pas localement calibrable.*

Rappelons qu'une structure presque-hermitienne (h, J) est approximativement kählérienne si la dérivée covariante de la 2-forme fondamentale correspondante $F(\cdot,\cdot) = h(J\cdot,\cdot)$ satisfait $D^hF = \frac{1}{3}dF$ (et elle est strictement approximativement kählérienne si J n'est pas intégrable). D'une façon équivalente, le tenseur de Nijenhuis N est en relation avec dF par (cf. (Kobayashi et Nomizu, 1963)) :

$$h(JN(X,Y),Z) = \frac{1}{3}dF(X,Y,Z); \quad \forall X,Y,Z \in T(M). \tag{1.3}$$

À part le cas kählérien ($N = 0$), nous avons comme exemples de ces variétés S^6 avec sa structure presque-complexe et la métrique canonique, la structure presque-complexe bi-invariante sur $S^3 \times S^3$ avec la structure presque-hermitienne 3-symétrique et aussi les espaces des twisteurs sur les variétés auto-duales d'Einstein de dimension 4, avec la strucutre presque-complexe anti-tautologique introduite par Eells et Salamon (Eells et Salamom, 1985).

Une propriété importante d'une variété strictement approximativement kählérienne de dimension 6 est que la 3-forme dF est la partie imaginaire d'une $(3,0)$-forme complexe Ψ qui ne s'annule nulle part sur (M, J) voir (Reyes Carrion, 1998). L'identité (1.3) peut s'écrire comme

$$N = \frac{1}{6}h^* \circ \Psi, \tag{1.4}$$

où N est le tenseur de Nijenhuis vu comme une application linéaire $N\colon \wedge^2(T^{1,0}(M)) \to T^{0,1}(M)$, la métrique hermitienne h^* induite donne un isomorphisme $h^*\colon \wedge^{1,0}(M) \to T^{0,1}(M)$, et la forme de volume complexe Ψ identifie $\wedge^2(T^{1,0}(M))$ avec $\wedge^{1,0}(M)$.

Le théorème 2 est alors un corollaire immédiat de la proposition suivante

Proposition 1.2.3— *Soit* (M, J) *une variété presque-complexe de dimension* 6. *Sup-*

posons qu'en un point x, le tenseur de Nijenhuis N ne s'annule pas et peut être écrit comme

$$N_x = h_x^* \circ \psi_x, \tag{1.5}$$

où $h_x^*\colon \wedge_x^{1,0}(M) \to T_x^{0,1}(M)$ est une forme réelle, symétrique, invariante par rapport à J^* et non-dégénérée sur $T_x^*(M)$ et $\psi_x \in \wedge_x^{3,0}(M)$ est une $(3,0)$-forme non nulle. Il s'ensuit que J n'est pas calibrée par aucune forme symplectique dans un voisinage de x.

Démonstration. Puisque h_x^* est invariante par rapport à J_x^*, symétrique et non-dégénérée, il existe une base $\{\alpha_1, \alpha_2, , \alpha_3\}$ de $\wedge_x^{1,0}(M)$, avec la base duale $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ de $T_x^{1,0}(M)$, telle que $h_x^* = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (Z_i \otimes \overline{Z}_i + \overline{Z}_i \otimes Z_i)$ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\psi_p = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ (puisque N_x est non nul, au moins l'un des $\lambda_i > 0$). La condition (1.5) nous donne

$$N(Z_1, Z_2) = \lambda_3 \overline{Z}_3,\ N(Z_2, Z_3) = \lambda_1 \overline{Z}_1,\ N(Z_3, Z_1) = \lambda_2 \overline{Z}_2. \tag{1.6}$$

Supposons que J est calibrée par une forme symplectique ω autour de x. La structure presque-kählérienne satisfait, cf. (Kobayashi et Nomizu, 1963)

$$(D_X^g \omega)(Y, Z) = -2g(JN(Y, Z), X),$$

où D^g est la connexion de Levi-Civita associée à g. En prenant la permutation cyclique sur X, Y, Z et utilisant le fait que ω est fermée, nous obtenons $\underset{X,Y,Z}{\sigma}(g(JN(Y,Z),X)) = 0$. Par rapport à la base locale vérifiant (1.6), ceci implique que $-i \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \left\|\overline{Z}_j\right\|_g^2 = 0$ ce qui est absurde. $\square$

Remarque 1.2.4 — La preuve de la proposition (1.2.3) montre encore un peu plus : il n'existe aucune métrique presque-hermitienne g, définie au voisinage de x, telle que la 2-forme fondamentale ω de (g, J) satisfait $(d\omega)^{3,0} = 0$, où $(d\omega)^{3,0}$ est la projection de $d\omega$ sur $\wedge^{3,0}(M)$.

CHAPITRE II

SYSTÈMES ELLIPTIQUES

2.1 Opérateurs différentiels linéaires

Nous introduisons les opérateurs différentiels linéaires pour donner par la suite la définition du symbole d'un opérateur différentiel. Ce dernier est un outil important dans la classification des opérateurs différentiels. Pour plus de détails, voir (Narasimhan, 1968).

Définition 2.1.1. — *Soit M une variété C^∞ de dimension n, E et F deux fibrés vectoriels complexes lisses sur M. Un opérateur différentiel linéaire P est une application $\mathbb{C}$-linéaire*

$$\begin{aligned} P\colon C^\infty(E) &\rightarrow C^\infty(F) \\ Supp(Ps) &\subset Supp(s)\ \forall s \in C^\infty(E) \end{aligned}$$

Exemple 2.1.2. — Si $\Omega^p(M)$ dénote le fibré des p-formes réelles sur M, alors la dérivée extérieure $d\colon \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ est un opérateur différentiel linéaire.

Pour vérifier que d est un opérateur différentiel, nous considérons $\alpha \in \Omega^p(M)$ avec $\alpha|_U \equiv 0$ où $U \subset M$ avec $Supp(\alpha) = M \setminus U$. Nous allons montrer que $(d\alpha)(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Ce qui est équivalent à $Supp(d\alpha) \subset Supp(\alpha)$.

Soit $x \in U$ et $f \in C^k(M)$ avec $f \equiv 1$ dans un voisinage de $M \setminus U$ ne contenant pas x et $\equiv 0$ partout ailleurs d'où $\alpha = f\alpha$. Nous avons $d\alpha = df \wedge \alpha + fd\alpha$. Or, $f(x) = 0$ et $\alpha(x) = 0$. Par conséquent, $(d\alpha)(x) = 0$ et donc $Supp(d\alpha) \subset Supp(\alpha)$.

Théorème de Peetre 2.1.3. *— Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et P un opérateur différentiel linéaire de $U \times R^r$ à $U \times R^s$ ($R = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Pour chaque sous ensemble relativement compact $U' \Subset U$, il existe un entier $m \geq 0$ et des applications $a_\alpha \in C^\infty$ de U' à l'espace des applications linéaires de R^r dans R^s (matrices $s \times r$) tel que pour tout $u \in C^\infty(U', r)$ et $x \in U'$ on a :*

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $D^\alpha(u) = \left(\frac{\partial^{|\alpha|} u_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \cdots, \frac{\partial^{|\alpha|} u_r}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)$.

Remarques :

1. Si on utilise des coordonnées locales sur $\mathbb{R}^n$, un opérateur différentiel d'ordre k sur une fonction $u = (u_1, \cdots, u_r)$ s'écrit comme :

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, D^l u) D^\alpha u + f(x, D^l u),$$

avec $|l| \leq k$.

2. Nous disons que l'opérateur est *quasi-linéaire* si a_α et f ne dépendent que de $D^l u$ d'ordre au plus $k-1$ c'est à dire $|l| \leq k-1$. Dans ce cas, P est linéaire en son plus grand ordre de dérivation. Dans le cas où cette condition ne serait pas satisfaite, on dit que l'opérateur est *entièrement non-linéaire*.

Exemple 2.1.4. *— La courbure de Gauss K,* d'une surface $M\colon = \{(x, y, u(x, y)) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ où $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, est donnée par la relation :

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 - K(x, y)(1 + u_x^2 + u_y^2) = 0$$

avec la notation $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ etc. L'opérateur $L\colon u \to u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 - K(x, y)(1 + u_x^2 + u_y^2)$ est entièrement non-linéaire.

Définition 2.1.5. *— Soit U un ouvert de M et soit P un opérateur différentiel linéaire de $U \times \mathbb{C}^r$ à $U \times \mathbb{C}^s$, donné par*

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x).$$

Il existe un unique opérateur linéaire P^* de $U \times \mathbb{C}^s$ à $U \times \mathbb{C}^r$, appelé l'adjointe formelle de P, tel que

$$\int_U \langle P(u)(x), v(x)\rangle \, dx = \int_U \langle u(x), P^*(v(x)\rangle \, dx \quad \forall\, u \in C_0^\infty(U,r),\ v \in C_0^\infty(U,s)$$

où $C_0^\infty(U)$ est l'ensemble des applications $C^\infty(U)$ à support compact dans U.

Nous utilisons le produit scalaire hermitien $\langle u, v\rangle$ entre deux vecteurs dans $\mathbb{C}^r$ défini par $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{r} u_i \overline{v}_i$ où $u = (u_1, ..., u_n)$ *et* $v = (v_1, ..., v_n)$. En fait, P^* est donnée par la formule

$$(P^*v)(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha((\overline{a_\alpha(x)})^t v(x)).$$

Ceci se déduit facilement de la formule

$$\int_U \varphi(x)\overline{D^\alpha \Psi(x)}dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha \varphi(x)\overline{\Psi(x)}dx, \quad \varphi, \Psi \in C_0^\infty(U). \tag{2.1}$$

Dans le cas général où $P\colon C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ est un opérateur différentiel linéaire entre les sections lisses de deux fibrés vectoriels complexes (resp. réels) E et F, le produit hermitien standard de $\mathbb{C}^n$ est remplacé par une métrique hermitienne (resp. riemannienne).

Exemple 2.1.6. — Si $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $P(u) = \frac{d}{dx}(u)$ alors $P^*u = -\frac{d}{dx}(u)$. Ceci peut être déduit de la formule (1.1) et donc

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^* = -\left(\frac{d}{dx}\right)$$

Définition 2.1.7. — *Pour un opérateur linéaire différentiel $P\colon C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ d'ordre k, nous pouvons lui associer, en chaque point $x \in M$ et pour tout $\xi \in T_x^*(M)$, une application linéaire appelée symbole principale $\sigma_{(\xi)}(P, x) \in End(E_x, F_x) = E_x^* \bigotimes F_x$. Écrivons en coordonnées locales $Pu = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\, D^\alpha u$, où les a_α sont des matrices de format $\dim E_x \times \dim F_x$, nous avons alors :*

$$\sigma_{(\xi)}(P; x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \,;\ \ \xi^\alpha = \prod_{j\in J} \xi^{\alpha_j},\ \alpha = (\alpha_j)_{j\in J}$$

Cette définition dépend des coordonnées locales alors nous devons donner une définition invariante.

Définition 2.1.8. — *Soient E_x et F_x les fibres de E et F en $x \in M$, soit $u \in C^\infty(E)$ avec $u|_x = z$, et soit $\varphi \in C^\infty(M)$ tel que $\varphi(x) = 0$, $d\varphi(x) = \xi$, alors $\sigma_{(\xi)}(P, x) \colon E_x \to F_x$ est l'endomorphisme*

$$\sigma_{(\xi)}(P; x)z = \frac{1}{k!} P(\varphi^k u)|_x.$$

Exemples 2.1.9. —

1. La dérivée extérieure $d \colon \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ est un opérateur différentiel d'ordre $k = 1$ et donc pour $x \in M$, $\varphi \in C^\infty(M)$ tel que $\varphi(x) = 0$, $d\varphi(x) = \xi \in T_x^*(M)$ et $\alpha \in \Omega^p(M)$ nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_{(\xi)}(d)\alpha|_x &= d(\varphi\alpha)|_x \\ &= d\varphi(x) \wedge \alpha|_x + \varphi(x) d\alpha|_x \\ &= \xi \wedge \alpha|_x. \end{aligned}$$

2. Soit E un fibré vectoriel sur M, alors la dérivée covariante $D \colon \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$ satisfait pour $\varphi \in C^\infty(M)$, $v \in \Omega^0(E)$

$$D(\varphi v) = d\varphi \otimes v + \varphi D v,$$

alors

$$\sigma_{(\xi)}(D)v = \xi \otimes v.$$

3. Notons par $\delta^g \colon \Omega^{p+1}(M) \to \Omega^p(M)$ l'adjointe formelle de la dérivée extérieure, appelée aussi la codifférentielle. Dans le cas d'une variété riemannienne (M, g), la métrique riemannienne g induit un produit euclidien sur chaque fibre de $\wedge^p(M)$, par $g(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_p) = \det(g(\alpha_i^\sharp, \beta_j^\sharp))$ où $\sharp$ est l'isomorphisme musical identifiant $T^*(M)$ à $T(M)$ par $\alpha(X) = g(\alpha^\sharp, X)$. Ce produit sera désigné par $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'adjointe formelle δ^g par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donnée par la formule suivante (voir (Besse, 1987)) :

$$(\delta^g \alpha)(X_1, \cdots, X_p) = -\sum_{i=1}^{n} (D_{e_i}\alpha)(e_i, X_1, \cdots, X_p)$$

où D^g est la dérivée covariante associée à la métrique g, $(e_i)_{i=1,\cdots,n}$ est une base locale orthonormale de champs de vecteurs, $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $X_i \in T(M)$.

Nous avons alors $\sigma_\xi(\delta^g)(\alpha) = -\iota_{\xi^\sharp}\alpha$ où ι est la contraction de α par $\xi^\sharp$ avec $\xi \in T_x^*(M) \setminus \{0\}$. En effet, si $\alpha \in \Omega^p(M)$, $\varphi \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}
\delta^g(\varphi\alpha)(X_1, \cdots, X_{p-1}) &= -\sum D_{e_i}(\varphi\alpha)(e_i, X_1, \cdots, X_{p-1}) \\
&= \varphi\delta^g(\alpha)(X_1, \cdots, X_{p-1}) - \sum \alpha(D_{e_i}\varphi)(e_i, X_1, \cdots, X_{p-1}) \\
&= \varphi\delta^g(\alpha)(X_1, \cdots, X_{p-1}) - \sum \alpha((D_{e_i}\varphi)e_i, X_1, \cdots, X_{p-1}) \\
&= \varphi\delta^g(\alpha)(X_1, \cdots, X_{p-1}) - \alpha(\sum (D_{e_i}\varphi)e_i, X_1, \cdots, X_{p-1}) \\
&= \varphi\delta^g(\alpha)(X_1, \cdots, X_{p-1}) - (\iota_{d\varphi^\sharp}\alpha)(X_1, \cdots, X_{p-1})
\end{aligned}$$

donc

$$\delta^g(\varphi\alpha) = \varphi\delta^g(\alpha) - \iota_{d\varphi^\sharp}\alpha,$$

d'où $\sigma_{(\xi)}(\delta^g)(\alpha) = -\iota_{\xi^\sharp}\alpha$.

En fait, plusieurs propriétés d'un opérateur différentiel dépendent seulement de l'ordre le plus élevé de dérivation apparaîssant dans l'opérateur. Le symbole principal est un outil algébrique invariant qui permet de s'y référrer. Le symbole a plusieurs propriétés algébriques évidentes mais utiles :

1. $\sigma_{(\xi)}(P + Q; x) = \sigma_\xi(P; x) + \sigma_\xi(Q; x)$.
2. $\sigma_{(\xi)}(PQ; x) = \sigma_\xi(P; x)\sigma_\xi(Q; x)$.
3. $\sigma_{(\xi)}(P^*; x) = (-1)^k\sigma_\xi(P; x)^*$ (*l'adjointe hermitienne de* $\sigma_\xi(P; x)$).

2.2 Opérateurs elliptiques

Définition 2.2.1. — *Un opérateur différentiel linéaire P est appelé elliptique si pour tout $\xi \in T_x^*(M)$, $\xi \neq 0$ l'application $\sigma_{(\xi)}(P)\colon E_x \to F_x$ est un isomorphisme (en particulier,* $\dim E_x = \dim F_x$*). On dit que P est un opérateur elliptique.*

Exemples 2.2.2. —

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit *l'opérateur de Laplace*

$$\begin{aligned}
\Delta\colon U \times \mathbb{C}^r &\to U \times \mathbb{C}^r \\
(u_1, \cdots, u_r) &\mapsto (\Delta u_1, \cdots, \Delta u_r)
\end{aligned}$$

avec $\Delta u_i = -(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n^2})$.

Si $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in T_x^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, alors $\sigma_{(\xi)}(P) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^2 & & 0 & 0 \\ & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & \\ 0 & 0 & & \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^2 \end{bmatrix}$.

Nous avons que pour tout $\xi \in T_x^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $\sigma_\xi(P)$ est un isomorphisme et donc Δ est un opérateur elliptique.

2. *Le laplacien riemannien* : Soit $d\colon \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ la dérivée extérieure sur les p-formes sur une variété riemannienne (M, g). Notons par $\delta^g\colon \Omega^{p+1}(M) \to \Omega^p(M)$ la codifférentielle définie dans l'exemple (2.1.9), le laplacien riemannien $\Delta^g\colon \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ est défini comme suit :

$$\Delta^g = d\delta^g + \delta^g d.$$

C'est un opérateur elliptique. En effet, nous avons que le symbole du Laplacien riemannien pour $\alpha \in \Omega_x^p(M)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{(\xi)}(d\delta^g + \delta^g d)(\alpha) &= -\xi \wedge \iota_{\xi^\sharp}\alpha - \iota_{\xi^\sharp}(\xi \wedge \alpha) \\ &= -\xi \wedge \iota_{\xi^\sharp}\alpha - (\iota_{\xi^\sharp}\xi) \wedge \alpha - (-1)^1 \xi \wedge \iota_{\xi^\sharp}\alpha \\ &= -\xi \wedge \iota_{\xi^\sharp}\alpha - |\xi|^2 \alpha + \xi \wedge \iota_{\xi^\sharp}\alpha \\ &= -|\xi|^2 \alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, $\sigma_{(\xi)}(d\delta^g + \delta^g d)$ est un automorphisme de $\Omega_x^p(M)$ pour tout $\xi \in T_x^*(M) \setminus \{0\}$ et donc le Laplacien riemannien est un opérateur elliptique.

3. *L'opérateur de Cauchy-Riemann* est donné par $Pu = \overline{\partial} u = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})u = 0$. Le symbole principal associé est

$$\sigma_{(\xi)}(\overline{\partial}) = \left[\tfrac{1}{2}(\xi_1 + i\xi_2).\right]$$

Nous déduisons que $\overline{\partial}$ est un opérateur elliptique.

4. *L'opérateur de Beltrami :* Soit M une variété réelle lisse de dimension 2.

   Une métrique riemannienne s'écrit localement dans une carte (U, φ) comme

$$g^U = E(x,y)dx \otimes dx + 2F(x,y)(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + G(x,y)dy \otimes dy$$

   avec $EG - F^2 > 0$.

   L'opérateur de Beltrami intervient dans le problème classique de l'existence des *coordonnées isothermes* $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$, pour lesquelles la métrique prend la forme

$$g^U = f(u,v)(du \otimes du + dv \otimes dv)$$

   avec $f > 0$, il suffit de résoudre

$$Ls = 0$$

   où $s(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ et L l'opérateur de Beltrami donné par

$$L = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\left(F\frac{\partial}{\partial x} - E\frac{\partial}{\partial y}\right)}{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\left(F\frac{\partial}{\partial y} - G\frac{\partial}{\partial x}\right)}{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

   alors

$$\sigma_{(\xi)}(L) = \begin{bmatrix} \xi_1^2 + \frac{E}{G}\xi_2 - \frac{2F}{G}\xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_1^2 + \frac{E}{G}\xi_2 - \frac{2F}{G}\xi_1\xi_2 \end{bmatrix}$$

   Si

$$G\xi_1^2 + E\xi_2 - 2F\xi_1\xi_2 = \left((\pm G)^{\frac{1}{2}}\xi_1 - \frac{F}{(\pm G)^{\frac{1}{2}}}\xi_2\right)^2 + (EG - F^2)(\frac{\xi_2}{(\pm G)^{\frac{1}{2}}})^2 = 0$$

   alors nécessairement $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Donc, l'opérateur de Beltrami est un opérateur elliptique.

Remarques :

1. L'opérateur P est *elliptique sous-déterminé* en x (plus de composantes que d'équations) si $\sigma_{(\xi)}(P;x)$ est surjective pour tout $\xi \in T_x^*(M) \setminus \{0\}$. Nous avons que PP^* est elliptique en x.

2. L'opérateur P est *elliptique sur-déterminé* en x (plus d'équations que de composantes) si $\sigma_{(\xi)}(P;x)$ est injective pour tout $\xi \in T_x^*(M) \setminus \{0\}$. Nous avons que P^*P est elliptique en x.

Définition 2.2.3. — *Pour un opérateur différentiel non-linéaire P, sa linéarisation en u est l'opérateur linéaire*

$$Pv = \frac{d}{dt}(P(u+tv))|_{t=0}.$$

Définition 2.2.4. — *Un opérateur non-linéaire est elliptique en (x, u) (elliptique en x pour la fonction u) si sa linéarisation en u est elliptique en x.*

Exemples 2.2.5. —

1. Reprenons l'exemple (2.1.4) où la courbure de Gauss $K(x, y)$ est introduite par $L(u) = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 - K(x,y)(1 + u_x^2 + u_y^2) = 0$. La linéarisation de L en u est

$$Pv = u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy} + u_{xx}v_{yy} + \text{termes d'ordre inférieur} \qquad (2.2)$$

   Nous pouvons déduire, à partir de (2.2), que L est elliptique précisemment aux points où $K(x, y) > 0$.

2. Soit l'équation

$$uu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

   Sa linéarisation en u est

$$Pv = uv_{xx} + v_{yy} + u_{xx}v = 0,$$

   en un point x,

$$\sigma_{(\xi)}(P) = \left[u\xi_x^2 + \xi_y^2.\right]$$

   Ainsi, P est elliptique si $u > 0$, mais il ne l'est pas si $u \leq 0$ et donc $u(x) \equiv 1$ est une *solution elliptique* tandis que $u(x) \equiv -1$ est une *solution non-elliptique.*

Théorème de Malgrange 2.2.6. — *Soit P un opérateur différentiel elliptique linéaire d'ordre 2. Supposons qu' en un point $x \in M$, la section Φ_0 vérifie $P(\Phi_0)(x) = 0$ (Φ_0 est appelée aussi une solution infinitésimale), alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisiange U_ϵ de x et une solution Φ_ϵ telle que $\|\Phi_\epsilon - \Phi_0\|_{C^{2+\alpha}} < \epsilon$ (où $\|\cdot\|$ est la norme de Hölder de $C^{2+\alpha}(U_\epsilon)$).*

Le théorème de Malgrange fait interveinr l'espace de Hölder $C^{\alpha+k}(U)$ qui est un espace complet relativement à la norme $\|.\|_{C^{m+\alpha}}$. Rappelons la défintion de cet espace.

Définition 2.2.7. — *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $0 < \alpha < 1$. Nous disons que $f\colon U \to \mathbb{R}$ est Hölder continue d'ordre α si :*

$$\sup_{\substack{x,y\in U\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \lneqq \infty$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $C^{\alpha+k}(U)$ l'ensemble des fonctions sur U, à valeurs réelles, dont les dérivées d'ordre $\leq k$ sont Hölder continues d'ordre α. Cet espace de Banach est muni de la norme :

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}} = \sum_{|i|\leq k} \sup \left|D^i f(x)\right| + \sum_{|i|\leq k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{\left|D^i f(x) - D^i f(y)\right|}{|x-y|^{\alpha}}$$

La preuve du théorème de Malgrange (Malgrange, 1972) utilse la notion de *solution fondamentale* d'un opérateur différentiel linéaire. En fait, *une solution fondamentale* d'un opérateur L à coefficients constants est *une distribution* K sur $\mathbb{R}^n$ telle que $LK = \delta_0$, où δ_0 est le point de masse à l'origine c'est à dire δ_0 vaut 1 en 0 et zéro sinon. Rappelons qu'on appelle *distribution* toute fonctionnelle linéaire continue sur $C_0^\infty(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $C_0^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions $C^\infty(U)$ à support compact. Notons par $\mathfrak{D}(U) = \{f \in C^\infty(U) \mid \exists K \text{ compact}, K \subset U, \operatorname{supp}(f) = K\} = \bigcup_{K \subset U \text{ compact}} \mathfrak{D}_K(U)$ où $\mathfrak{D}_K(U) = \{f \in C^\infty(U) \mid \operatorname{supp}(f) = K\}$. La topologie sur $\mathfrak{D}(U)$ est la topologie limite inductive stricte sur les $\mathfrak{D}_K(U)$ alors que la topologie sur $\mathfrak{D}_K(U)$ est donnée par les normes :

$$\begin{aligned} d_r\colon \mathfrak{D}_K(U) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto d_r(f) = \sup_{|\alpha|\leq r} \sup_{x\in U} |D^\alpha f(x)|\,. \end{aligned}$$

Théorème de Malgrange–Ehrenpreis 2.2.8. — *Soit*

$$L = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha D^\alpha$$

un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants. L possède alors une solution fondamentale.

Le principal outil utilisé, pour prouver l'existence locale d'une solution fondamentale, est *la transformée de Fourier*. Elle va nous permettre de définir une solution fondamentale mais nous devons d'abord introduire les espaces L^p.

Définition 2.2.9. — *Soit p un réel ≥ 1 et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des fonctions Lebesgue mesurables sur U à valeurs complexes, tel que $|f|^p$ est intégrable, forme un espace vectoriel. Le quotient de cet espace par le sous espace des fonctions nulles presque partout est un espace de Banach, noté $L^p(U)$, relative à la norme*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarques :

1. $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions mesurables qui sont bornées à l'extérieur d'un ensemble de mesure nulle.
2. Si $p = 2$ et $f, g \in L^2(U)$, nous posons

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_U f(x)\overline{g(x)}dx.$$

   $L^2(U)$ est un espace d'Hilbert relatif à ce produit scalaire.

Définition 2.2.10. — *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La transformation de Fourier $\widetilde{f}$ de f est défini par*

$$\widetilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} f(x)dx$$

où $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ et $\langle x, \xi\rangle = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Avant de donner la preuve du Théorème de Malgrange–Ehrenpreis (Folland, 1995), nous aurons besoin de la proposition suivante qui est une propriété importante de la transformée de Fourier ainsi que la formule d'inversion.

Proposition 2.2.11. — *Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} \widetilde{f}(\xi)d\xi.$$

Proposition 2.2.12. — *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a un support compact, alors $\widetilde{f}$ peut être prolongée à une fonction holomorphe entière sur $\mathbb{C}^n$. Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $\widetilde{f}(\xi)$ décroit rapidement quand $|\Re e(\xi)| \to \infty$ et $|\Im m(\xi)|$ reste bornée.*

Maintenant, nous pouvons donner une preuve du théorème de Malgrange–Ehrenpreis :

Démonstration. Nous définissons une fonctionnelle linéaire K sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle K, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\Im m(\xi_n)=\phi(\xi')} \frac{\widetilde{f}(-\xi)}{P(\xi)} d\xi_n d\xi' \tag{2.3}$$

tel que pour chaque ξ' fixé avec $\xi' = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, nous considérons $P(\xi) = P(\xi', \xi_n) = \sum\limits_{|\alpha|\leq k} c_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha$ comme un polynôme en une seule variable complexe ξ_n. Le problème avec (2.4) est que le polynôme P a des zéros, alors $\widetilde{f}/P$ n'est pas une fonction localement intégrable malgré que $\widetilde{f}$ peut être prolongée à une fonction holomorphe entière sur $\mathbb{C}^n$ puisque $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour que l'intégrale ait un sens, nous allons déformer le contour de l'intégration et ainsi éviter les zéros de P et c'est ce que la fonction Φ nous le permet de faire. En effet, soit $\lambda_1(\xi'), \cdots, \lambda_k(\xi')$ les zéros de $P(\xi)$, nous introduisons la fonction ϕ dont l'existence est garantie par le lemme suivant :

Lemme 2.2.13. — *Il existe une fonction mesurable $\Phi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to [k, -k]$ tel que pour tout $\xi' \in \mathbb{R}$,*

$$\min\left\{\left|\Phi(\xi') - \Im m(\lambda_j(\xi'))\right| : 1 \leq j \leq k\right\} \geq 1$$

Maintenant, il faut voir que $\langle K, f\rangle$ est bornée et déduire ainsi que K est une distribution (pour une application linéaire, la continuité est équivalente à être bornée). Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.14. — *Soit $g(z)$ un polynôme monique de degré k d'une variable complexe z, tel que $g(0) \neq 0$. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les zéros de g. Il s'ensuit $|g(0)| \geq (\frac{d}{2})^k$ avec $d = \min|\lambda_j|$.*

Si nous appliquons ce lemme à $g(z) = P(\xi', \xi_n + z)$, nous obtenons que :

$$|g(0)| = |P(\xi)| \geq 2^{-k} \text{ quand } \Im m(\xi_n) = \phi(\xi').$$

De plus, d'après la proposition (2.2.12), $\widetilde{f}(\xi)$ décroit rapidement quand $|\Re e(\xi)|$ tend vers ∞ et $|\Im m(\xi)|$ reste bornée. Nous déduisons alors que l'intégrale converge absolument et donc K est une distribution.

De plus,

$$\begin{aligned}
\langle LK, f\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\Im m(\xi_n)=\Phi(\xi')} \widetilde{f}(-\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\xi)d\xi \\
&= f(0) \quad \text{(par la formule d'inversion)} \\
&= \langle \delta, f\rangle .
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème de Malgrange–Ehrenpreis. □

Avec une solution fondamentale K, nous pouvons résoudre l'équation $Lu = f$ non seulement quand $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mais quand f est une distribution quelconque à support compact ; dans ce dernier cas, la solution u va être une distribution. Il suffit de poser $u = K * f$ où $*$ est le produit de convolution défini par

$$f * g\,(x) = \int f\,(x-y)\,g(y)\,dy$$

avec f, g des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi,

$$Lu = LK * f = \delta * f = f$$

d'où le corollaire suivant

Corollaire 2.2.15. — *Si L est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants et $f \in C_0^\infty(\Omega)$, il existe $u \in C^\infty(\Omega)$ tel que $Lu = f$.*

Nous utiliserons aussi dans la preuve du théorème de Malgrange le théorème des fonctions implicites entre deux espaces de Banach, cf. (Jost, 1999).

Théorème des fonctions implicites 2.2.16. — *Soit f une application C^1 d'un ouvert U de $E_1 \times E_2$ dans F, avec E_1, E_2 et F des espaces de Banach. Si, en un point*

$(a,b) \in E_1 \times E_2$, l'application f est différentiable en direction de E_2 et la différentielle $(D_2 f)(a,b)$ dans cette direction est un isomorphisme, alors il existe une application ϕ de classe C^1 définie sur un ouvert U_1de E_1 contenant a_1 à valeurs dans un ouvert U_2 de E_2 contenant a_2 telle que pour tout $(y_1,y_2) \in U_1 \times U_2$ on ait

$$f(y_1, y_2) = f(a,b) \Leftrightarrow y_2 = \phi(y_1)$$

et pour tout $x \in U_1$ on a

$$D\phi(x) = -\left[D_2 f(x, \phi(x))\right]^{-1} \circ D_1 f(x, \phi(x))$$

Démonstration. Le théorème des fonctions implicites est une conséquence directe du théorème d'inversion locale entre deux espaces de Banach. Ce dernier est une application du théorème du point fixe de Banach. En effet, si on considère $f\colon E \to F$ une application C^1 entre deux espaces de Banach telle que $f'(x_0)$ est un isomorphisme avec $x_0 \in E$, nous pouvons réduire notre problème au cas où $E = F$ et $x_0 = 0$ et trouver par la suite une boule $B_r(0)$ de rayon $r > 0$ et de centre 0 pour laquelle

$$\begin{aligned} g_y\colon \overline{B}_r(0) &\to \overline{B}_r(0) \\ x &\mapsto y + x - f(x), \qquad y \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(0), \end{aligned}$$

admet un point fixe. Ce point est précisemment la solution à l'équation $f(x) = y$. Nous obtenons alors un inverse local de f. Il reste à voir que cet inverse local est continu et différentiable. Le théorème d'inversion locale entre deux espaces de Banach est ainsi montré.

Maintenant, nous allons chercher à utiliser le théorème d'inversion locale pour montrer le théorème des fonctions implicites. Il faut alors construire une application différentiable C^1, de différentielle bijective.

Soit l'application

$$\begin{aligned} \mu\colon U &\to E_1 \times F \\ (y_1, y_2) &\mapsto (y_1, f(y_1, y_2)), \end{aligned}$$

μ est de classe C^1 et

$$D\mu(a,b)(h,k) = (h, D_1 f(a,b)(h) + D_2 f(a,b)(k))$$

Nous pouvons voir que $D\mu(a,\, b)$ est bijective. Nous pouvons alors appliquer le théorème d'inversion locale à μ en (a,b). Ainsi, la fonction réciproque associe clairement à un couple $(x_1,\, x_2)$ un couple $(x_1,\, \phi(x_1,\, x_2))$ et en fixant x_1, nous en déduisons le théorème.

$\square$

Maintenant que nous avons tous les outils, nous pouvons présenter la preuve du théorème de Malgrange.

Démonstration du théorème 2.2.6. Le système $P(u) = 0$ s'écrit en coordonnées locales dans un voisinage V de 0 (sans perte de généralité, nous allons considérer 0 au lieu de x) comme suit :

$$\sum_{i \le j} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_j B_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + C(x)u(x) = 0$$

La preuve du théorème peut se décomposer en deux étapes :

1. Nous allons montrer d'abord que l'opérateur différentiel suivant

   $$L(\phi) = \sum_{i \le j} A_{ij}(0) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$$

   est sujectif direct (il admet un inverse à droite linéaire continu) de $C^{\alpha+2}(B)$ dans $C^{\alpha}(B)$ où $B \Subset V$ est une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 (pour la norme euclidienne, notée $|.|$).

   Soit $\alpha \in (0,1)$ fixé et ρ une fonction $\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, à support compact dans $2\overset{\circ}{B}$, avec $\rho \equiv 1$ au voisinage de B. Étant donné $f \in C^{\alpha}(B)$, soit $\overline{f}$ le prolongement de f défini, pour $x \notin B$, par

   $$\overline{f}(x) = \rho(x) f\left(\frac{xr^2}{|x|^2}\right)$$

où r est le rayon de B . L'application $\overline{f} \in C^\alpha(2B)$ est de support compact dans $\overset{\circ}{2B}$. Nous obtenons ainsi, via ρ, un prolongement continue

$$\begin{aligned} \sigma\colon C^\alpha(B) &\rightarrow C_0^\alpha(2B) \\ f &\mapsto \overline{f} \end{aligned}$$

Soit K une solution fondamentale de L c'est à dire une distribution sur $\mathbb{R}^n$ telle que $LK = \delta.id$ où δ est de masse 1 en 0. Le produit de convolution avec K donne lieu à une application continue $K*\colon C_0^\alpha(2B) \rightarrow C^{2+\alpha}(2B)$.
Soit $i\colon C^{2+\alpha}(2B) \rightarrow C^{2+\alpha}(B)$ l'inclusion naturelle (par restriction), alors l'opérateur inverse à droite de L noté par S est défini par $S = i \circ K * \circ\sigma$.
On conclut que l'opérateur L est surjectif direct de $C^{2+\alpha}(B)$ dans $C^\alpha(B)$.

2. Maintenant, soit $E = S(C^\alpha(B))$ c'est à dire l'image de S dans $C^{2+\alpha}(B)$. Nous allons montrer que E est un sous-espace complet de $C^{2+\alpha}(B)$.
Soit $(\phi_j)_{j\in J}$ une suite de Cauchy dans E. Soit $(\gamma_j)_{j\in J}$ la suite définie par $S(\gamma_j) = \phi_j$ pour tout j avec $\gamma_j \in C^\alpha(B)$. Montrons que $(\gamma_j)_{j\in J}$ est une suite de Cauchy.
L est une application k-lipschitzienne entre $C^{2+\alpha}(B)$ et $C^\alpha(B)$. Soit $\frac{\epsilon}{k} > 0$, puisque $(\phi_j)_{j\in J}$ est de Cauchy, il existe des entiers N, M tels que pour tous $n > N, m > M$ on a $\|\phi_n - \phi_m\|_{C^{2+\alpha}} < \frac{\epsilon}{k}$. Nous avons que

$$\begin{aligned} \|\gamma_n - \gamma_m\|_{C^\alpha} &= \|L \circ S(\gamma_n) - L \circ S(\gamma_m)\|_{C^\alpha} \\ &= \|L(\phi_n) - L(\phi_m)\|_{C^\alpha} \overset{L \text{ est } k\text{-lipschitzienne}}{\leq} k\,\|\phi_n - \phi_m\|_{C^{2+\alpha}} \\ &< k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon. \end{aligned}$$

La suite $(\gamma_j)_{j\in J}$ est une suite de Cauchy dans $C^\alpha(B)$ qui est complet, alors la suite $(\gamma_j)_{j\in J}$ converge disons vers γ. L'espace $C^{2+\alpha}(B)$ est complet aussi, alors la suite $(\phi_j)_{j\in J}$ converge dans $C^{2+\alpha}(B)$ disons vers ϕ. Nous affirmons que $\phi \in E$. En effet, $\phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} S(\gamma_n) \overset{S \text{ est continue}}{=} S(\lim_{n\to\infty} \gamma_n) = S(\gamma)$ donc $\phi = S(\gamma) \in E$.
Nous concluons alors que E est un espace de Banach et que L définit un isomorphisme entre E et $C^\alpha(B)$.

Fixons maintenant B et considérons le système suivant

$$P(\Psi) + P(\Phi_0) = 0$$

où Φ_0 est la solution infinitésimale. Soit $\epsilon > 0$, nous voulons trouver une solution Ψ_ϵ et un voisinage U_ϵ tel que $||\Psi_\epsilon||_{C^{\alpha+2}(U_\epsilon)} < \epsilon$, ainsi $\Phi = \Psi_\epsilon + \Phi_0$ et U_ϵ sont la solution et le voisinage dont le théorème de Malgrange affirme l'existence. Considérons l'application

$$\varphi\colon\ [0,1] \times E \to C^\alpha(B)$$

définie par

$$\varphi(t,\Psi)(x) = \sum_{i \leq j} A_{ij}(tx)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum tB_j(tx)\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}(x) + t^2C(tx)\Psi(x) + D(x).$$

Cette application possède les propriétés suivantes :

- Elle est de classe C^1.
- $\varphi(0,0) = D(0)$ où $D(x) = P(\Phi_0)(x)$, alors $\varphi(0,0) = 0$
- La dérivéé partielle $\frac{\partial\varphi}{\partial\Psi}|_{(0,0)} = \sum\limits_{i \leq j} A_{ij}(0)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ est surjective directe d'après la première étape.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un $\delta > 0$ ($\delta < \epsilon$) pour lequel $|t| < \delta$ et Ψ_t tel que $||\Psi_t||_{C^{\alpha+2}(B)} < \delta$.

Posons $\Psi_\epsilon(y) = t^2\Psi_t(x)$ où $y = tx \in B_t = tB$.

Nous avons alors $\frac{\partial\Psi_\epsilon}{\partial y_j}(y) = t\frac{\partial\Psi_t}{\partial x_j}(x)$, $\frac{\partial^2\Psi_\epsilon}{\partial y_j \partial y_i}(y) = \frac{\partial^2\Psi_t}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ d'où $||\Psi_\epsilon||_{C^{\alpha+2}(B_t)} < \delta$ (en fait $|t| << 1$).

Aussi, la fonction $\Psi_\epsilon(y)$ satisfait

$$\sum_{i \leq j} A_{ij}(y)\frac{\partial^2\Psi_\epsilon}{\partial y_i \partial y_j}(y) + \sum B_j(y)\frac{\partial\Psi_\epsilon}{\partial y_j}(y) + C(y)\Psi_\epsilon(y) + D(y) = 0$$

Ainsi, Ψ_ϵ et B_t sont la solution et le voisinage recherchés.

CHAPITRE III

STRUCTURES COMPLEXES ET FORMES SYMPLECTIQUES SUR UN ESPACE VECTORIEL

3.1 Espaces vectoriels symplectiques

L'exemple typique d'un espace vectoriel symplectique est l'espace $\mathbb{R}^{2n}$ avec la forme antisymétrique non-dégénérée :

$$\omega_0(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x})^t \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} (\overrightarrow{y}) \text{ où } \overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ et } I_n \text{ l'identité sur } \mathbb{R}^n$$

Plus généralement, *un espace vectoriel symplectique* est une paire (V, ω) qui consiste d'un espace vectoriel réel V de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée ω. *Une transformation linéaire symplectique* d'un espace vectoriel (V, ω) est un isomorphisme d'espace vectoriel $\Psi : V \to V$ qui préserve la structure symplectique dans le sens que :

$$\Psi^*\omega = \omega,$$

où $(\Psi^*\omega)(v, w) := \omega(\Psi v, \Psi w)$ pour tout $v, w \in V$.

Le théorème suivant affirme que tous les espaces vectoriels symplectiques de même dimension sont isomorphes.

Théorème 3.1.1. — *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$. Il existe alors une base $\{u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n\}$ telle que $\omega(u_j, u_k) = \omega(v_j, v_k) = 0$, $\omega(u_j, v_k) = \delta^j_k$. Une telle base est appelée une base symplectique. De plus, il existe un isomorphisme* *d'espaces vectoriels* $\Psi \colon \mathbb{R}^{2n} \to V$ *tel que* $\Psi^*\omega = \omega_0$.

Le *complément symplectique* d'un sous espace $W \subset V$ est défini comme le sous espace

$$W^\omega = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \; \forall w \in W\}.$$

Le complément symplectique n'est pas nécessairement transversal à W.

Définition 3.1.2. — *Un sous espace* W *est appelé :*

- *isotrope si* $W \subset W^\omega$.
- *coisotrope si* $W^\omega \subset W$.
- *symplectique si* $W \cap W^\omega = 0$.
- *lagrangien si* $W = W^\omega \neq 0$.

Le lemme suivant montre que W est symplectique si et seulement si W^ω est symplectique. Il montre aussi que chaque sous espace lagrangien a la moitié de la dimension de V et que W est isotrope si et seulement si W^ω est coisotrope. Pour plus de détails voir (McDuff et Salamon, 1998).

Lemme 3.1.3. — *Pour tout sous espace* $W \subset V$

$$\begin{aligned} \dim W + \dim W^\omega &= \dim V \\ W^{\omega\omega} &= W \end{aligned}$$

Corollaire 3.1.4. — *Si* V *est un espace vectoriel réel de dimension* $2n$ *alors une forme bilinéaire anti-symétrique* ω *sur* V *est non-dégénérée si et seulement si son* n*-ème puissance extérieure est non nulle*

$$\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0$$

Démonstration. Supposons d'abord que ω est dégénérée. Soit $v \neq 0$ tel que $\omega(v, w) = 0$ pour tout $w \in V$. Maintenant, choisissons une base $\{v_1, \cdots, v_{2n}\}$ de V telle que $v_1 = v$. Nous avons alors $\omega^n(v_1, \cdots, v_{2n}) = 0$. Inversement, supposons que ω est non-dégénérée. Puisque ω_0^n est une forme de volume, il en résulte que $\omega^n \neq 0$. $\square$

3.2 Le groupe linéaire symplectique

Les transformations linéaires symplectiques de (V, ω) forment un groupe noté $Sp(V, \omega)$. Puisque tous les espaces vectoriels symplectiques de même dimension sont isomorphes, il suffit de considérer le cas où $V = \mathbb{R}^{2n}$ et $\omega = \omega_0$. Dans ce cas, les éléments de $Sp(V, \omega) = Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ sont les matrices réelles Ψ, d'ordre $2n$, qui satisfont $\Psi^t J_0 \Psi = J_0$ où $J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$. Les matrices de déterminant 1 qui vérifient cette condition sont appelées des *matrices symplectiques.*

Nous pouvons identifier $\mathbb{R}^{2n}$ avec $\mathbb{C}^n$ en posant $z_i = (x_i, y_i)$. En effet, la multiplication par J_0 dans $\mathbb{R}^{2n}$ correspond à la multiplication par i dans $\mathbb{C}^n$. Avec cette identifcation, le groupe linéaire complexe $GL(n, \mathbb{C})$ est un sous groupe de $GL(2n, \mathbb{R})$ et $U(n)$ sous groupe de $Sp(2n)$. En effet, *la représentation réelle* de $GL(n, \mathbb{C})$ est donnée par

$$A + iB \to \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

avec $A + iB \in GL(n, \mathbb{C})$

Lemme 3.2.1. —

$$Sp(2n) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = O(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = U(n).$$

Démonstration. Pour une matrice réelle Ψ d'ordre $2n$, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi &\in GL(n, \mathbb{C}) \Leftrightarrow \Psi J_0 = J_0 \Psi \\ \Psi &\in Sp(2n) \Leftrightarrow \Psi^t J_0 \Psi = J_0 \\ \Psi &\in O(2n) \Leftrightarrow \Psi^t \Psi = I \end{aligned}$$

N'importe quelles deux de ces conditions impliquent la troisième. Le sous groupe $O(2n) \cap GL(n, \mathbb{C})$ consiste des matrices

$$\Psi = \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix} \in GL(2n, \mathbb{R})$$

qui satisfont $X^tY = Y^tX$, $X^tX + Y^tY = E_n$. Ceci est précisement la condition sur $U = X + iY$ pour être unitaire. □

Notons que si $P = P^t \in Sp(2n)$ est une matrice symétrique et définie positive, alors $P^\alpha \in Sp(2n)$ pour tout $\alpha > 0$.

Proposition 3.2.2. — *Le quotient $\frac{Sp(2n)}{U(n)}$ est contractile.*

Démonstration. Chaque matrice $\Psi \in Sp(2n)$ peut être décomposée d'une façon unique comme

$$\Psi = PQ,$$

où P est une matrice symétrique, définie positive et Q est une matrice orthogonale. Nous avons que

$$P = (\Psi\Psi^t)^{\frac{1}{2}}$$

est symplectique. L'application

$$\begin{aligned} \alpha \colon Sp(2n) \times [0,1] &\rightarrow Sp(2n) \\ (\Psi, s) &\mapsto (\Psi\Psi^t)^{-\frac{s}{2}}\Psi \end{aligned}$$

est une rétraction de $Sp(2n)$ dans $U(n)$. □

Remarque : Le groupe unitaire $U(n)$ est un sous groupe compact maximal de $Sp(2n)$, cf. (McDuff et Salamon, 1998).

3.3 Structures complexes

Une *structure complexe* sur un espace vectoriel réel V est un endomorphisme linéaire $J : V \rightarrow V$ tel que $J^2 = -I$ où I est l'identité sur V. Muni d'une telle structure J, l'espace vectoriel réel V devient un espace vectoriel complexe où la mltiplication par $i = \sqrt{-1}$ correspond à l'action de J :

$$(a + ib, v) \mapsto av + bJv$$

En particulier, V est de dimension paire.

Réciproquement, soit V un espace vectoriel complexe de dimension complexe n et J l'endomorphisme linéaire de V défini par :

$$JX = iX, \qquad X \in V$$

Si nous considèrons V comme un espace vectoriel réel de dimension réel $2n$, alors J est une structure complexe sur V.

Proposition 3.3.1. — *Soit J une structure complexe sur un espace vectoriel réel de dimension $2n$. Il existe alors des vecteurs $X_1, \cdots, X_n$ de V tels que $\{X_1, \cdots, X_n, JX_1, \cdots, JX_n\}$ est une base de V.*

Soit $\mathbb{C}^n$ l'espace vectoriel complexe. Si on pose

$$z_k = x_k + i\, y_k, \qquad x_k, y_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \cdots, n$$

alors $\mathbb{C}^n$ peut être identifié avec l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{2n}$. L'identification de $\mathbb{C}^n$ avec $\mathbb{R}^{2n}$ est faite par la correspondance $(z_1, \cdots, z_n) \to (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$. La structure complexe de $\mathbb{R}^{2n}$ induite par celle de $\mathbb{C}^n$ envoie $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \to (-y_1, \cdots, -y_n, x_1, \cdots, x_n)$ et elle est appelée *la structure complexe canonique* de $\mathbb{R}^{2n}$. En termes de la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, la structure complexe est donnée par la matrice

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n. L'espace des structures complexes sur V est noté par $\mathcal{J}(V)$.

Proposition 3.3.2. — *Soit V un espace vectoriel réel de dimension $2n$ et soit $J \in \mathcal{J}(V)$. Il existe alors un isomorphisme d'espaces vectoriels $\Psi \colon \mathbb{R}^{2n} \to V$ tel que $\Psi J_0 = J\Psi$.*

Démonstration. Soit V^c la complexification de V et notons par $E^{\pm} = \ker(I \pm iJ) = \mathfrak{Im}(I \mp iJ)$ les espaces propres de J. Alors $V^c = E^+ \oplus E^-$ et donc $\dim_{\mathbb{C}} E^{\pm} = n$.

Choisissons une base $w_j = u_j + iv_j$, $j = 1, ..., n$, de E^+. Les vecteurs $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n$ forment alors une base de V et

$$Ju_j = -v_j, \quad Jv_j = u_j$$

La transformation recherchée $\Psi : \mathbb{R}^{2n} \to V$ est donnée par

$$\Psi\zeta = \sum_{j=1}^{n}(\xi_j u_j - \eta_j v_j)$$

pour $\zeta = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n)$. □

Maintenant, nous pouvons se demander à quoi ressemble l'espace $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$.

Proposition 3.3.3. — *L'espace $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ est difféomorphe à l'espace homogène $\frac{GL(2n,\mathbb{R})}{GL(n,\mathbb{C})}$. Cette espace a deux composantes. La composante $\mathcal{J}^+(\mathbb{R}^{2n})$ qui contient J_0 est difféomorphe à l'espace homogène $\frac{GL^+(2n,\mathbb{R})}{GL(n,\mathbb{C})}$ et équivalent par homotopie à $\frac{SO(2n)}{U(n)}$. C'est l'espace de toutes les structures sur $\mathbb{R}^{2n}$ avec une orientation fixe. Dans le cas où $n = 2$, cette espace est équivalent par homotopie à S^2.*

Démonstration. Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} \Gamma\colon GL(2n,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \\ A & \mapsto & A^{-1}J_0A \end{array}$$

Cette application est surjective par la proposition (3.3.2). Le noyau consiste de toutes les matrices qui commutent avec J_0 en conséquence $GL(n, \mathbb{C})$. L'espace $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$, identifié à l'espace homogène $\frac{GL(2n,\mathbb{R})}{GL(n,\mathbb{C})}$, a donc deux composantes distinguées par le déterminant ± 1. Les autres affirmations sont des résultats connus dans la théorie d'homotopie, cf. (Dubrovin, Fomenko et Novikov, 1986). □

Soit V un espace vectoriel réel et V^* son espace dual. Une structure complexe J sur V induit une structure complexe sur V^*, notée aussi J, comme suit :

$$J\alpha(X) = -\alpha(JX), \quad \forall X \in V, \alpha \in V^*.$$

Soit V un espace vectoriel réel de dimension $2n$ avec une structure complexe J et V^c la complexification de V c'est à dire $V^c = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. J est alors étendue d'une façon unique à un endomorphisme complexe linéaire de V^c, qu'on note aussi J, satisfaisant aussi la propriété $J^2 = -I$ où I est l'identité sur V^c. Les valeurs propres de J sont i et $-i$. On pose :

$$V^{1,0} = \{Z \in V^c; JZ = iZ\}, \qquad V^{0,1} = \{Z \in V^c; JZ = -iZ\}$$

nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 3.3.4. — *Soit V un espace vectoriel réel de dimension paire et J une structure complexe sur V. Soit $V^c = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ alors*

1. $V^{1,0} = \{X - iJX; X \in V\}$ et $V^{0,1} = \{X + iJX; X \in V\}$
2. $V = V^{1,0} \bigoplus V^{0,1}$
3. *La conjugation complexe dans V^c définit un isomorphisme linéaire réel entre $V^{1,0}$ et $V^{0,1}$ où la conjugation complexe dans V^c est l'endomorphisme linéaire réel défini par :*

$$Z = X + iY \to \overline{Z} = X - iY, \qquad X, Y \in V$$

Soit V^* l'espace dual de V. Sa complexification V^{*c} est l'espace dual de V^c. Nous obtenons alors la décomposition en somme directe par rapport aux valeurs propres $\pm i$ de la structure presque-complexe J sur V^*

$$V^{*c} = V_{1,0} + V_{0,1}$$

Nous déduisons alors la proposition suivante :

Proposition 3.3.5. —

1. $V_{1,0} = \{\alpha \in V^{*c}; J^*\alpha = -i\alpha\}$
2. $V_{0,1} = \{\alpha \in V^{*c}; J^*\alpha = i\alpha\}$

L'espace tensoriel $\overset{p,q}{\bigotimes} V^c$ (respectivement $\overset{p,q}{\bigotimes} V^{*c}$) peut être décomposé en une somme directe de produits tensoriels d'espaces vectoriels dont chacun est identique à $V^{1,0}$ ou à $V^{0,1}$ (respectivement $V_{1,0}$ ou $V_{0,1}$). En particulier, les algèbres extérieures $\wedge V_{1,0}$ et $\wedge V_{0,1}$ peuvent être considérées comme des sous espaces de $\wedge V^{*c}$ d'une manière très naturelle : notons par $\wedge^{p,q}V^{*c}$ le sous espace de $\wedge V^{*c}$ engendré par $\alpha\wedge\beta$, où $\alpha \in \wedge^p V_{1,0}$ et $\beta \in \wedge^q V_{0,1}$. Nous déduisons alors la proposition suivante

Proposition 3.3.6. — *L'algèbre extérieure $\wedge V^{*c}$ peut être décomposée comme suit*

$$\wedge V^{*c} = \sum_{r=0}^{n} \wedge^r V^{*c}, \qquad \wedge^r V^{*c} = \sum_{p+q=r} \wedge^{p,q} V^{*c}.$$

La conjugation complexe dans V^{*c}, étendue d'une manière naturelle à $\wedge V^{*c}$, donne un isomorphisme linéaire réel entre $\wedge^{p,q}V^{*c}$ et $\wedge^{q,p}V^{*c}$.

Si $\{Z_1, \cdots, Z_n\}$ est une base de l'espace vectoriel complexe $V_{1,0}$, alors $\{\overline{Z_1}, \cdots, \overline{Z_n}\}$ est une base de $V_{0,1}$ et l'ensemble des éléments $Z_{j_1} \wedge \cdots \wedge Z_{j_p} \wedge \overline{Z_{k_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{Z_{k_q}}$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$ et $1 \leq k_1 < \cdots < k_q \leq n$, forment une base de $\wedge^{p,q}V^{*c}$ sur $\mathbb{C}$.

Un *produit scalaire hermitien* sur un espace vectoriel réel V muni d'une structure complexe J est un produit scalaire h tel que :

$$h(JX, JY) = h(X, Y), \qquad X, Y \in V$$

Par conséquent, $h(JX, X) = 0$ pour tout $X \in V$.

Proposition 3.3.7. — *Soit h un produit scalaire hermitien sur un espace vectoriel réel V de dimension $2n$ muni d'une structure complexe J. Il existe alors des éléments $X_1, \cdots, X_n$ de V tels que $\{X_1, \cdots, X_n, JX_1, \cdots, JX_n\}$ est une base orthonormale de V relativement au produit scalaire h.*

Démonstration. Nous allons utiliser l'induction sur la dimension de V. Si X_1 un vecteur unitaire, alors $\{X_1, JX_1\}$ est orthonormal. Soit W le sous-espace engendrée par X_1 et JX_1 et soit $W^{\perp}$ son complément orthogonal tel que $V = W + W^{\perp}$. Nous avons alors que $W^{\perp}$ est invariant par J. Par l'hypothèse d'induction, $W^{\perp}$ a une base orthonormale de la forme $\{X_2, \cdots, X_n, JX_2, \cdots, JX_n\}$. □

Si h_0 est le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^{2n}$ c'est à dire le produit scalaire pour lequel la base naturelle de $\mathbb{R}^{2n}$ est orthonormale, alors h_0 est un produit scalaire hermitien relatif à la structure complexe canonique J_0 de $\mathbb{R}^{2n}$ dans le sens que

$$h_0(J_0X, J_0Y) = h_0(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Proposition 3.3.8. — *Il y a une bijection naturelle entre l'ensemble des produits scalaires hermitiens dans $\mathbb{R}^{2n}$ relatifs à la structure complexe canonique J_0 et l'espace homogène $\frac{GL(n,\mathbb{C})}{U(n)}$. Cette correspondance est définie par un élément $S \in GL(n,\mathbb{C})$ qui correspond au produit scalaire scalaire hermitien h défini par*

$$h(X, Y) = h_0(SX, SY), \qquad X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$$

où h_0 est le produit scalaire hermitien canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.

Démonstration. Un élément S de $GL(n,\mathbb{C})$ envoie un produit scalaire hermitien h de $\mathbb{R}^{2n}$ (relaitf à J_0) en un produit scalaire hermitien h' comme suit :

$$h'(X, Y) = h(SX, SY), \qquad X, Y \in \mathbb{R}^{2n} \tag{3.1}$$

(Remarquons que le groupe $GL(n,\mathbb{C})$, considéré comme un sous-groupe de $GL(2n,\mathbb{R})$, agit sur $\mathbb{R}^{2n}$). Nous considérons $GL(n,\mathbb{C})$ comme un groupe de transformations agissant sur l'ensemble des produits scalaires hermitiens dans $\mathbb{R}^{2n}$ (relatif à J_0) de la manière décrite en (3.1). Il suffit de montrer que cette action est transitive et que le sous-groupe isotrope de $GL(n,\mathbb{C})$ en h_0 est $U(n)$. Étant donné deux produits scalaires hermitiens h et h' de $\mathbb{R}^{2n}$, par la proposition (3.3.1), il existe deux bases orthonornales de $\mathbb{R}^{2n}$: $\{e_1, \cdots, e_n, J_0e_1, \cdots, J_0e_n\}$ relatif à h et $\{e'_1, \cdots, e'_n, J_0e'_1, \cdots, J_0e'_n\}$ relatif à h'. L'élément de $GL(2n,\mathbb{R})$ défini par :

$$Se'_k = e_k, \; SJ_0e'_k = J_0e_k, \qquad k = 1, \cdots, n$$

est un élément de $GL(n,\mathbb{C})$ et envoie h en h', ceci prouve la transitivité de l'action. Le sous-goupe isotrope de $GL(n,\mathbb{C})$ en J_0 est évidemment l'intersection $GL(n,\mathbb{C}) \cap O(2n) = U(n)$. $\square$

Proposition 3.3.9. — *Soit h un produit scalaire hermitien sur un espace vectoriel réel V muni d'une structure complexe J. Nous avons que h peut être étendu d'une manière unique à une forme bilinéaire symétrique, noté aussi h, de V^c, et satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $h(\overline{Z}, \overline{W}) = \overline{h(Z, W)}$.
2. $h(Z, \overline{Z}) > 0 \quad \forall Z \neq 0 \in V^c$.
3. $h\,(Z, \overline{W}) = 0 \quad \forall Z \in V^{1,0}$ *et* $W \in V^{0,1}$.

Inversement, chaque forme bilinéaire symétrique complexe h sur V^c satisfaisant les conditions 1, 2 *et* 3 *est l'extension naturelle d'un produit scalaire hermtien de V.*

À chaque produit scalaire hermitien h sur V relativement à une structure complexe J, nous lui associons un élément $\varphi \in \wedge^2 V^*$ comme suit :

$$\varphi(X, Y) = h(JX, Y), \qquad X, Y \in V.$$

Nous pouvons vérifier que φ est anti-symétrique

$$\begin{aligned} \varphi(Y, X) &= h(JY, X) = h(X, JY) = h(JX, J^2 Y) \\ &= -h(JX, Y) = -\varphi(X, Y) \end{aligned}$$

Aussi, on peut voir que φ est aussi invariante par J. Puisque $\wedge^2 V^*$ peut être considéré comme un sous-espace de $\wedge^2 V^{*c}$, φ peut être considéré comme un élément de $\wedge^2 V^{*c}$. En d'autres mots, φ est étendue d'une manière unique à une forme bilinéaire anti-symétrique sur V^c, notée aussi par φ. Nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 3.3.10. — *Soit φ une forme bilinéaire anti-symétrique sur V^c associée au produit scalaire hermitien h de V. Alors $\varphi \in \wedge^{1,1} V^{*c}$.*

3.4 Structures complexes calibrées

Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Une structure complexe $J \in \mathcal{J}(V)$ est dite *calibrée* par ω si

$$\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w), \qquad \forall\ v, w \in V \tag{3.2}$$

$$\omega(v, Jv) > 0, \qquad \forall\ v \in V, v \neq 0. \tag{3.3}$$

L'espace de toutes les structures complexes calibrées par ω est noté par $\mathcal{J}(V, \omega)$.
Nous avons déjà remarqué qu'un produit scalaire hermitien induit une 2-forme anti-symétrique non-dégénérée qui calibre la structure complexe. Maintenant, étant donné (V, ω) un espace vectoriel symplectique et une structure complexe J calibrée par ω alors

$$g(v, w) = \omega(v, Jw)$$

définit un produit scalaire (g est symétrique et définie positive) sur V. De plus, g est J-invariante c'est à dire $g(X, Y) = g(JX, JY)$ $\forall X, Y \in V$. Aussi, la forme $h : V \times V \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(v, w) = \omega(v, Jw) + i\omega(v, w)$$

est un produit scalaire hermitien sur (V, J). Dans ce cas, V est considéré comme un espace vectoriel complexe avec la structure complexe donnée par J.
Nous allons montrer que l'espace $\mathcal{J}(V, \omega)$ est un espace contractile.

Proposition 3.4.1. — *$\mathcal{J}(V, \omega)$ s'identifie naturellement avec l'espace des matrices symplectiques, symétriques et définies positives.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que $V = \mathbb{R}^{2n}$ et $\omega = \omega_0$. Une matrice $J \in \mathbb{R}^{2n}$ est une structure complexe compatible si et seulement si

$$J^2 = -I,\ (3.2) \Rightarrow J^t J_0 J = J_0,\ (3.3) \Rightarrow \langle v, -J_0 J v \rangle > 0\ \forall\ v \neq 0$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien. Les deux premières identités impliquent que

$$(J_0 J)^t = -J^t J_0 = J^t J_0 J^2 = J_0 J$$

Ainsi, $P = -J_0 J$ est symétrique, définie positive et symplectique. Inversement, si une matrice P a ses propriétés, nous pouvons vérifier que $J = -J_0^{-1} P \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Par conséquent, d'après le lemme (3.2.2), $\mathcal{J}(V, \omega)$ est contractile. $\square$

CHAPITRE IV

STRUCTURES PRESQUE-COMPLEXES CALIBRÉES SUR UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE

4.1 Variétés presque-complexes

Soit M une variété réelle C^{∞} de dimension $2n$. Une *structure presque-complexe* J sur M est un champ lisse d'endomorphismes du fibré tangent TM tel que $J^2 = -I$, où I dénote la transformation identité. Si une telle structure J existe sur M, alors (M, J) est dite une *variété presque-complexe.*

Soit g une métrique riemannienne sur M. Nous disons que J et g sont *compatibles* si

$$g(X,Y) = g(JX, JY), \qquad \forall X, Y \in T(M). \tag{4.1}$$

Nous disons alors que (M, g, J) est une *variété presque-hermitienne.* Nous pouvons alors définir la 2-forme *fondamentale* $\omega \in \Omega^2(M)$, où $\Omega^p(M)$ désigne l'espace des p-formes réelles sur M, par

$$\omega(X,Y) = g(JX, Y), \qquad \forall X, Y \in T(M).$$

Cette 2-forme est non-dégénérée et donc (par le corollaire (3.1.4)) $\omega^n \neq 0$. En fait, la non-dégénérescence de ω signifie que chaque espace tangent $(T_x(M), \omega_x)$ est un espace vectoriel symplectique. Notons aussi que ω^n définit une *orientation* sur M. Or, toute variété presque-complexe a une orientation naturelle car $GL(n, \mathbb{C}) \subset GL^+(2n, \mathbb{R})$. Sur une variété presque-hermitienne, ces deux orientations coincident.

Une 2-forme non-dégénérée ω et une structure presque-complexe J sont dites *compatibles* si

$$\omega(X,Y) = \omega(JX, JY), \qquad \forall X, Y \in T(M)$$

et

$$\omega(X, JX) > 0, \qquad \forall X \neq 0 \in T(M).$$

Nous pouvons alors définir une métrique riemannienne g par

$$g(X,Y) = \omega(X, JY), \qquad \forall X, Y \in T(M).$$

Par définition, g satisfait aussi (4.1).

Une 2-forme non-dégénérée ω et une métrique riemannienne g sont dites *compatibles* si

$$\phi(\omega)^2 = -I$$

où $\phi \colon T^*(M) \bigotimes T^*(M) \longrightarrow End(T(M))$ est l'isomorphisme défini par g ; dans ce cas $J = \phi(\omega)$. Rappelons que nous pouvons identifier $T_x^*(M)$ avec $T_x(M)$ avec une forme bilinéaire non-dégénérée h ; en effet, nous avons les isomorphismes musicaux suivants :

$$\begin{array}{rcll} T_x(M) & \longrightarrow & T_x^*(M) & \\ s_0 & \longmapsto & s_0^\flat & \text{avec } \; s_0^\flat(s) = h\left(s_0, s\right) \\ T_x^*(M) & \longrightarrow & T_x(M) & \\ s_0^* & \longmapsto & (s_0^*)^\sharp & \text{avec } \; s_0^*(s) = h\left((s_0^*)^\sharp, s\right) \end{array}$$

En somme, nous avons les définitions suivantes :

Définition 4.1.1. —

1. *Une 2-forme non-dégénérée ω et une structure presque-complexe J sont compatibles si*

   $$\omega\left(X,Y\right) = \omega\left(JX, JY\right), \qquad \forall X, Y \in T(M)$$

   et

   $$\omega\left(X, JX\right) > 0, \qquad \forall X \neq 0 \in T(M).$$

   ω induit alors une métrique riemannienne g définie par $g(\cdot,\cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$.

   La structure (J, ω, g) est dite une structure presque-hermitienne.

2. *Une métrique riemannienne g et une structure presque-complexe J sont compatibles si*
$$g(X,Y) = g(JX,JY), \qquad \forall X,Y \in T(M).$$
g induit la 2-forme fondamentale ω définie par $\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot)$. La structure (J,g,ω) est dite aussi une structure presque-hermitienne.

3. *Soit (J,g,ω) une structure presque-hermitienne. Si ω est fermée c'est à dire $d\omega =$ 0, alors (J,g,ω) est dite une structure presque-kählérienne.*

4. *Si une 2-forme non-dégénérée et fermée ω (appelée aussi une forme symplectique) et une structure presque-complexe J sont compatibles, alors nous disons que J est calibrée par ω.*

5. *Si une forme symplectique ω est J-invariante c'est à dire $\omega(\cdot,\cdot) = \omega(J\cdot,J\cdot)$ et que la métrique induite n'est pas riemannienne (elle est pseudo-riemannienne), alors nous disons que J est faiblement calibrée par ω.*

6. *Si une métrique riemannienne g est compatible avec une forme symplectique ω, alors nous disons que g est calibrée par ω.*

Ainsi, il existe une bijection entre les 2-formes non-dégénérées compatibles avec J et les métriques riemanniennes compatibles avec J. Étant donné une structure presque-complexe J, choisissons une métrique riemannienne g sur M et définissons la métrique riemanneinne suivante
$$h(X,Y) = \frac{1}{2}(g(X,Y) + g(JX,JY))$$
Nous pouvons vérifier alors que h et J sont compatibles : h est *une métrique hermitienne* sur M et elle induit une 2-forme non-dégénérée compatible avec J. Nous déduisons alors à partir de cette remarque et de la proposition (3.4.1) la proposition suivante

Proposition 4.1.2. — *Soit M une variété de dimension $2n$.*

1. *Pour chaque 2-forme non-dégénérée ω sur M, il existe une structure presque-complexe J qui est compatible avec ω. L'espace $\mathcal{J}(M,\omega)$ de telles structures presque-complexes est contractile.*

2. *Pour chaque structure presque-complexe J sur M, il existe une 2-forme non-dégénérée ω compatible avec J. L'espace de telles formes est contractile.*

Remarquons aussi qu'une *structure presque-hermitienne* (J, g) sur une variété correspond à la réduction du groupe de structure du fibré tangent $T(M)$ de $GL(2n, \mathbb{R})$ à $U(n)$. Ainsi, les structures presque-hermitiennes correspondent à des sections du fibré $\frac{GL^+(2n,\mathbb{R})}{U(n)}$ (l'orientation est fixé) qui est homotpe au fibré des 2-formes non-dégénérées $\frac{GL^+(2n,\mathbb{R})}{Sp(2n)}$ ainsi qu'à $\frac{GL^+(2n,\mathbb{R})}{GL(n,\mathbb{C})}$ dont les sections correspondent aux structures presque-complexes (proposition (3.3.3)) qui est équivalent par homotopie à $\frac{SO(2n)}{U(n)}$. Donc, pour savoir s'il existe une structure presque-hermitienne sur une variété orientée M donnée, il suffit de prendre une métrique g sur M et se demander si le fibré associé $\frac{SO(2n)}{U(n)}$ admet une section non nulle.

Ceci est un problème topologique subtil et ce ne sont pas toutes les variétés orientées de dimension paire qui admettent une structure presque-complexe. Par exemple, nous savons que S^2 et S^6 sont les seules sphères qui en admettent (Husemoller, 1974). En fait, toutes les hypersurfaces orientées de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^7$ admettent une structure presque-complexe induite par le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^7$. Les produits vectoriels n'existent dans aucun autre espace euclidien à l'exception de $\mathbb{R}$.

Exemples 4.1.3. —

1. Soit une hypersurface orientée $S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Soit $\nu\colon S \to \mathbb{R}^3$ l'application de Gauss qui associe à chaque point $x \in S$ le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur $\nu(x) \perp T_x(S)$. La structure presque-complexe J est donnée alors par la formule

$$J_x u = \nu(x) \times u$$

Soit la 2-forme non dégénérée $\omega \in \Omega^2(S)$ définie par

$$\begin{aligned} \omega_x(v, w) &= \langle J_x v, w \rangle \\ &= \langle \nu(x) \times v, w \rangle \\ &= \langle \nu(x), v \times w \rangle \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la métrique riemannienne sur S induite par celle de $\mathbb{R}^3$. Nous pouvons vérifier alors que ω est compatible avec J.

2. De la même manière, le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^7$ induit sur tout point x d'une hypersurface orientée $S \hookrightarrow \mathbb{R}^7$ une structure presque-complexe. En particulier sur S^6, une structure presque-complexe est construite à partir des nombres de Cayley, cf. (McDuff et Salamon, 1998).

Remarque : Une *structure symplectique* sur une variété lisse M est une 2-forme non-dégénérée fermée $\omega \in \Omega^2(M)$. (M, ω) est dite alors une *variété symplectique* et ω une *forme symplectique*. L'exemple le plus simple d'une variété symplectique est $\mathbb{R}^{2n}$ avec la forme symplectique canonique $\omega^{can} = dx_1 \wedge dx_2 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$.

Définition 4.1.4. — *Un symplectomorphisme d'une variété symplectique (M, ω) dans une variété (N, ω') est un difféomorphisme $\Psi \colon M \to N$ qui préserve la forme symplectique $\omega = \Psi^* \omega'$. Nous disons que ω est symplectomorphe à ω'.*

Si ω est localement symplectomorphe à ω^{can} alors $d\omega = 0$. L'inverse de cette affirmation est donnée par le théorème de Darboux, voir (McDuff et Salamon, 1998).

Théorème de Darboux 4.1.5. — *Chaque forme symplectique ω sur M est localement symplectomorphe à la forme canonique ω^{can}.*

Soit (M, J) est une variété presque-complexe. Par la proposition (3.3.4), nous avons

$$T^{\mathbb{C}}(M) = T(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0}(M) \oplus T^{0,1}(M) \tag{4.2}$$

où $T^{1,0}(M)$ et $T^{0,1}(M)$ sont les espaces propres de J correspondant aux valeurs propres i et $-i$ respectivement. En effet, si $X \in T^{\mathbb{C}}(M)$, alors $X^{1,0}$ et $X^{0,1}$ sont les composantes de X dans la décomposition (4.2) avec

$$X^{1,0} = \frac{1}{2}(X - iJX) \text{ et } X^{0,1} = \frac{1}{2}(X + iJX).$$

Par la décompostion (4.2), $T^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \wedge^{1,0}(M) \oplus \wedge^{0,1}(M)$ où $\wedge^{1,0}(M)$ est l'annulateur de $T^{0,1}(M)$ et $\wedge^{0,1}(M)$ est l'annulateur de $T^{1,0}(M)$. Nous définissons $\wedge^{p,q}(M)$ est l'espace engendré par les produits extérieurs des éléments de $\wedge^p(\wedge^{1,0}(M))$ avec des éléments de

$\wedge^q(\wedge^{0,1}(M))$. Puisque $\wedge^{p,q}(M)$ est le conjugué à $\wedge^{q,p}(M)$, $\wedge^{p,q}(M) \oplus \wedge^{q,p}(M)$ et $\wedge^{p,p}(M)$ sont alors tous les deux des complexifications d'espaces vectoriels réels notées $[\![\wedge^{p,q}(M)]\!]$ et $[\wedge^{p,p}(M)]$ respectivement. En général, nous notons l'espace vectoriel réel sous-jacent d'un espace vectoriel complexe V par $[\![V]\!]$ et si V est la complexification d'un espace vectoriel réel W, nous notons alors $[V] = W$. Par exemple, $[\![\mathbb{C}]\!] = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ et $[\mathbb{C}] = \mathbb{R}$. Nous avons les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :

$$\wedge^{2k}(M) = \bigoplus_{p=0}^{k-1} \left[\!\left[\wedge^{2k-p,p}(M)\right]\!\right] \oplus \left[\wedge^{k,k}(M)\right]$$

$$\wedge^{2k+1}(M) = \bigoplus_{p=0}^{k} \left[\!\left[\wedge^{2k+1-p,p}(M)\right]\!\right]$$

Chacun des espaces vectoriels se trouvant à droite est irréductible sous l'action de $GL(n, \mathbb{C})$ (qui est le groupe de structure d'une variété presque-complexe).

Soit (M, J) une variété presque-complexe. Le fibré vectoriel des 2-formes réelles $\wedge^2(M)$ s'écrit comme une somme directe

$$\wedge^2(M) = \wedge^{inv}(M) \oplus \wedge^{anti}(M)$$

où $\wedge^{inv}(M)$ (respectivement $\wedge^{anti}(M)$) est le fibré vectoriel des 2-formes J-invariantes (respectivement J-antivariantes). Rappelons que $\omega \in \Omega^2(M)$ est dite J-invariante si $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ alors qu'elle est J-anti-invariante si $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$. La complexification de ces fibrés vectoriels réels nous donne les isomorphismes suivants :

$$\wedge^{inv}(M) = [\wedge^{1,1}(M)], \; \wedge^{anti}(M) = [[\wedge^{0,2}(M)]].$$

Remarque : Nous remarquons, qu'en général, pour une variété presque-complexe M de dimension $n = 2k$, $\dim \wedge^2_x(M) = \frac{n(n-1)}{2}$, $\dim \wedge^{inv}_x(M) = k^2$ et $\dim \wedge^{anti}_x(M) = k(k-1)$. Une variété presque-complexe possède aussi les propriétés suivantes

Proposition 4.1.6. — *Si $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ l'espace des formes de degré (p, q) sur une variété presque-complexe, alors*

$$d\alpha \in \Omega^{p-1,q+2} \oplus \Omega^{p,q+1} \oplus \Omega^{p+1,q} \oplus \Omega^{p+2,q-1}$$

Lemme 4.1.7. — *Soit (ω, J, g) un triplet de structure presque-hermitienne sur une variété M, alors pour tous $X, Y, Z \in T_x(M)$ nous avons que :*

1. $(D^g_X J)J + J(D^g_X J) = 0$.
2. $\langle (D^g_X J)Y, Z \rangle + \langle Y, (D^g_X J)Z \rangle = 0$.
3. *La 3-forme $d\omega \in \Omega^3(M)$ est donnée par*

$$d\omega(X, Y, Z) = \langle (D^g_X J)Y, Z \rangle + \langle (D^g_Y J)Z, X \rangle + \langle (D^g_Z J)X, Y \rangle$$

où D^g est la dérivée covariante associée à la métrique g.

Démonstration. La première affirmation découle en différentiant $J^2 = -Id$. La deuxième est déduite en différentiant l'identité $\langle JY, Z \rangle + \langle Y, JZ \rangle = 0$. La troisième résulte de l'identité suivante :

$$d\omega(X, Y, Z) = \underset{X,Y,Z}{\sigma}(D^g_X(\omega(Y, Z)) + \omega([X, Y], Z)).$$

où σ est la permutation cyclique. □

4.2 Structures presque-complexes intégrables

En général, étant donnés deux tenseurs T et S de type $(1,1)$ sur une variété M, nous pouvons construire la torsion de T et S, qui est un tenseur de type $(1,2)$. Dans le cas où J est une stucture presque-complexe et $S = T = J$, nous définissons la *torsion de J* comme étant le tenseur N, de type $(1,2)$, appelé *le tenseur de Nijenhuis* et défini par

$$4N(X, Y) = \{[JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]\}$$

où $X, Y \in T(M)$ et $[\cdot, \cdot]$ les crochets de Lie. Nous avons alors les propriétés suivantes de N :

1. N est un tenseur c'est à dire $N(fX, gY) = fgN(X, Y)$ pour tous $X, Y \in T(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$.

2. $N(X, JX) = 0$ pour tout $X \in T(M)$.
3. Le tenseur de Nijenhuis est naturelle dans le sens que $N(\Phi^*X, \Phi^*Y) = \Phi^*N(X,Y)$ où $\Phi \in Diff(M)$.
4. $N_{J_0} = 0$, où J_0 est la structure presque-complexe standard sur $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.
5. $N(X,Y) = -N(Y,X)$.
6. $JN(X, JY) = JN(JX, Y) = N(X,Y)$.

Remarque : Le tenseur N peut être vu comme une section de $Hom(\wedge^{1,0}(M), \wedge^{0,2}(M)) \simeq \wedge^{1,0}(M) \otimes \wedge^{0,2}(M)$ c'est à dire que le tenseur réel N vit dans un espace isomorphe à $[[Hom(\wedge^{1,0}(M), \wedge^{0,2}(M))]]$.

Définition 4.2.1. — *Une structure presque-complexe J sur M est intégrable s'il existe un atlas $\{\alpha, U_\alpha\}$ sur M tel que*

$$d\alpha(x)J_x = J_0 d\alpha(x) \tag{4.3}$$

où $x \in U_\alpha \subset M$ et J_0 est la structure presque-complexe standard.

Remarques :

1. Nous avons déjà noté que chaque structure complexe J sur un espace vectoriel V est isomorphe à la structure complexe standard J_0 c'est à dire il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\Psi \colon \mathbb{R}^{2n} \to V$ tel que $J\Psi = \Psi J_0$ et donc (4.3) est vraie en chaque point de M pour n'importe quelle structure presque-complexe (qui n'est pas nécessairement intégrable). La condition d'intégrabilité dit que (4.3) est vraie dans un voisinage de x et ceci pour tout $x \in M$.
2. Soit $\{\beta, U_\beta\}$ une autre carte autour de x. L'égalité (4.3) implique que $d(\beta \circ \alpha^{-1})(\alpha(x))$ commute avec J_0 et donc $d(\beta \circ \alpha^{-1}) \in Gl(n, \mathbb{C})$ ou, de manière équivalente, que $\beta \circ \alpha^{-1}$ est holomorphe. L'inverse est vrai, c'est à dire si les fonctions de transitions sont holomorphes alors l'endomorphisme suivant définit une structure presque-complexe intégrable :

$$\begin{aligned} J_x \colon T_x(M) &\to T_x(M) \\ [\alpha, \xi] &\mapsto [\alpha, J_0\xi] \end{aligned}$$

Nous considérons que $T_x(M)$ est l'ensemble des classes d'équivalence $[\alpha, \xi]$ avec $x \in U_\alpha$ et $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ sous la relation d'équivalence $[\alpha, \xi] \sim [\beta, \eta]$ si et seulement si $\eta = d(\beta \circ \alpha^{-1})(\alpha(x))\xi$.

Le théorème suivant affirme que le tenseur de Nijenhuis est l'obstruction à l'intégrabilité d'une structure presque-complexe.

Théorème de Newlander-Nirenberg 4.2.2. — *Une structure presque-complexe J est intégrable si et seulement si $N = 0$.*

Remarque : Si pour une variété presque-hermitienne (M, J, g), la structure presque-complexe est intégrable, alors (M, J, g) est dite *une vairiété hermitienne.*

Lemme 4.2.3. — *Soit (M, J, g) une variété presque-hermitienne. Soit D^g la connexion de Levi-Civita induite par la métrique g. Nous avons alors les équivalences suivantes :*

1. $D^g J = D^g \omega = 0$.
2. *J est intégrable et ω est fermée.*

Dans ce cas, (M, J, g) est dite une variété kählérienne.

Démonstration. Prouvons d'abord que (1) $\Rightarrow$ (2). Si $D^g J = 0$ alors d'après le lemme (4.1.7) $d\omega = 0$. Puisque $D^g_X(JY) = (D^g_X J)Y + JD^g_X Y$ et $[X, Y] = D^g_X Y - D^g_Y X$, alors le tenseur de Nijenhuis peut être exprimé de la manière suivante

$$4N(X,Y) = J(D^g_Y J)X - J(D^g_X J)Y - (D^g_{JY} J)X + (D^g_{JX} J)Y.$$

Puisque $\nabla J = 0$ alors $N = 0$.

Prouvons maintenant que (2) $\Rightarrow$ (1). En utilisant le lemme (4.1.7), nous avons que

$$\begin{aligned}\langle 4N(X,Y), Z\rangle &= \left\langle J(D^g_Y J)X - J(D^g_X J)Y - (D^g_{JY} J)X + (D^g_{JX} J)Y, Z\right\rangle \\ &= \left\langle J(D^g_Y J)X + (D^g_{JX} J)Y, Z\right\rangle + \left\langle -J(D^g_X J)Y - (D^g_{JY} J)X +, Z\right\rangle \\ &= d\omega(JX, Y, Z) + d\omega(X, JY, Z) - 2\left\langle (D^g_Z J)X, JY\right\rangle. \qquad (4.4)\end{aligned}$$

Si $N = 0$ et $d\omega = 0$, alors $D^g J = 0$. □

Le théorème suivant formule une propriété clé des variétés presque-kählériennes. Rappelons qu'une structure presque-hermitienne (J, ω, g) est dite presque-kählérienne si ω est fermée.

Théorème 4.2.4. — *Soit (M, ω, J, g) une variété presque-kählérienne, alors les identités suivantes sont satisfaites :*

$$g((D^g_X J)Y, Z) = -2g(J(N(Y,Z)), X) = -2\omega(N(Y,Z), X). \tag{4.5}$$

Nous obtenons alors par le lemme (4.1.7)

$$\underset{X,Y,Z}{\sigma}(g(J(N(X,Y)), Z)) = \underset{X,Y,Z}{\sigma}(\omega(N(X,Y), Z)) = 0, \tag{4.6}$$

où σ est la permutation cyclique.

Démonstration. Par (4.4) et puisque $d\omega = 0$, nous avons

$$4\langle N(X,Y), Z\rangle = -2\left\langle (D^g_Z J)X, JY\right\rangle.$$

Puisque $JN(X, JY) = N(X, Y)$, alors

$$4\langle J(N(X, JY)), Z\rangle = -2\left\langle (D^g_Z J)X, JY\right\rangle,$$

d'où (en remplaçant JY par Y)

$$\left\langle (D^g_Z J)X, Y\right\rangle = -2\langle J(N(X,Y), Z)\rangle = -2\omega(N(X,Y), Z).$$

Nous obtenons alors l'égalité (4.5).

Ainsi,

$$0 = d\omega(X,Y,Z) \overset{\text{lemme 4.1.7}}{=} \underset{X,Y,Z}{\sigma}\left(\left\langle (D^g_X J)Y, Z\right\rangle\right) = -2\underset{X,Y,Z}{\sigma}(\langle J(N(X,Y)), Z\rangle),$$

d'où l'égalité (4.6). $\square$

CHAPITRE V

CALIBRATION DE STRUCTURES PRESQUE-COMPLEXES EN DIMENSION 4

D'abord, nous donnons des contre-exemples aux exemples explictes de structures presque-complexes (en dimension 4) de Tomassini (Tomassini, 2002) affirmant qu'elles ne sont localement calibrées par aucune forme symplectique. En fait, le résultat central de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1. — *Toute structure presque-complexe J sur une variété réelle de dimension 4 est localement calibrée par une 2-forme symplectique ω.*

La preuve de Rivière et Tian (Riviére et Tian, 2004) étant déficiente, nous allons donné un argument alternatif basé sur le théorème de Malgrange (2.2.6).

5.1 Contre-exemple à un résultat de Tomassini

Nous notons d'abord que toute structure presque-complexe *integrable* est localement calibrable. En particulier, une structure presque-complexe sur une variété de dimension 2 est localement calibrable.

L'exemple donné par Tomassini en dimension 4 est le suivant :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}(0) \neq 0$.

Posons $J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ f(x) & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -f(x) & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons que J est une structure presque-complexe sur $\mathbb{R}^4$.

Tomassini affirme que J ne peut être calibrée localement par aucune forme symplectique. Nous remarquons d'abord que pour $f(x) = f(x_3)$, la structure presque-complexe J est intégrable. En effet, pour une base $\{e_i\}_{1\leq i\leq 4}$ de $T_{(0)}(\mathbb{R}^4)$, l'exemple de Tomassini peut se lire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Je_1 &= f(x_3)e_2 + e_3 \\ Je_2 &= e_4 \\ Je_3 &= -e_1 - f(x_3)e_4 \\ Je_4 &= -e_2 \end{aligned}$$

Nous pouvons voir que $N(e_i, e_j) = 0$ pour tout $1 \leq i < j \leq 4$. En effet,

$$\begin{aligned} 4N(e_1, e_2) &= [Je_1, Je_2] - [e_1, e_2] - J\,[Je_1, e_2] - J\,[e_1, Je_2] \\ &= [f(x_3)e_2 + e_3, e_4] - [e_1, e_2] - J\,[f(x_3)e_2 + e_3, e_2] - J\,[e_1, e_4] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4N(e_1, e_3) &= [Je_1, Je_3] - [e_1, e_3] - J\,[Je_1, e_3] - J\,[e_1, Je_3] \\ &= [f(x_3)e_2 + e_3, -e_1 - f(x_3)e_4] - [e_1, e_3] - J\,[f(x_3)e_2 + e_3, e_3] - J\,[e_1, -e_1 - f(x_3)e_4] \\ &= -f'(x_3)e_4 - J(-f'(x_3)e_2) \\ &= -f'(x_3)e_4 + f'(x_3)Je_2 \\ &= -f'(x_3)e_4 + f'(x_3)e_4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4N(e_1, e_4) &= [Je_1, Je_4] - [e_1, e_4] - J\,[Je_1, e_4] - J\,[e_1, Je_4] \\ &= [f(x_3)e_2 + e_3, -e_2] - [e_1, e_4] - J\,[f(x_3)e_2 + e_3, e_4] - J\,[e_1, -e_2] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4N(e_2,e_3) &= [Je_2, Je_3] - [e_2,e_3] - J\,[Je_2,e_3] - J\,[e_2,Je_3] \\ &= [e_4, -e_1 - f(x_3)e_4] - [e_2,e_3] - J\,[e_4,e_3] - J\,[e_2, -e_1 - f(x_3)e_4] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4N(e_2,e_4) &= [Je_2, Je_4] - [e_2,e_4] - J\,[Je_2,e_4] - J\,[e_2,Je_4] \\ &= [e_4, -e_2] - [e_2,e_4] - J\,[e_4,e_4] - J\,[e_2,-e_2] \\ &= 0, \end{aligned}$$

et finalement,

$$\begin{aligned} 4N(e_3,e_4) &= [Je_3, Je_4] - [e_3,e_4] - J\,[Je_3,e_4] - J\,[e_3,Je_4] \\ &= [-e_1 - f(x_3)e_4, -e_2] - [e_3,e_4] - J\,[-e_1 - f(x_3)e_4, e_4] - J\,[e_3,-e_2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Plus généralement, nous allons exhiber des formes symplectiques compatibles avec J pour toute $f(x_3)$. Les formes symplectiques recherchées doivent satisfaire les propriétés suivantes :

1. ω est fermée.
2. $\omega \in \Omega^{inv}(M)$
3. $\omega \wedge \omega|_{(0)} > 0$.

La dernière condition implique que le déterminant de la métrique g, définie par $g(\cdot,\cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$, est positif par rapport à une métrique hermitienne h choisie au départ. Puisqu'on est en dimension complexe égale à 2, la métrique g est définie positive ou négative en ce point et donc par continuité sur tout le voisinage.

Soit $(dx_i)_{1\leq i\leq 4}$ une base de $T_{(0)}(\mathbb{R}^4)$; Puisque l'action de J sur $T^*_{(0)}(\mathbb{R}^4)$ est donnée par $J^* = -J^T$, nous avons que

$$\begin{aligned} Jdx_1 &= dx_3 \\ Jdx_2 &= -f(x_3)dx_1 + dx_4 \\ Jdx_3 &= -dx_1 \\ Jdx_4 &= -dx_2 + f(x_3)dx_3 \end{aligned}$$

Une base de $\Omega^{inv}_{(0)}(M)$ est donnée alors par $\{dx_1 \wedge dx_2 + Jdx_1 \wedge Jdx_2,\ dx_1 \wedge Jdx_1,$ $dx_2 \wedge Jdx_2,\ dx_1 \wedge Jdx_2 + dx_2 \wedge Jdx_1\}$. Afin de simplifier les calculs pour la suite, nous utilisons la base suivante $\{dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4,\ dx_1 \wedge dx_3,\ dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3,$ $f(x_3)dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_4\}$. La forme ω recherchée s'écrit alors comme :

$$\begin{aligned}\omega &= A(x)(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) + B(x)(dx_1 \wedge dx_3) + C(x)(dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3) + \\ &\quad D(x)(f(x_3)dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_4),\end{aligned}$$

où $A(x), B(x), C(x)$ et $D(x) \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. Le fait que $d\omega = 0$ nous donne le système suivant (on note par $A_{x_1} = \frac{\partial A}{\partial x_1}$ etc) :

$$\begin{aligned} A_{x_3} - B_{x_2} + C_{x_1} + f(x_3)D_{x_3} + Df'(x_3) &= 0 \\ A_{x_4} - C_{x_2} + f(x_3)D_{x_4} + D_{x_1} &= 0 \\ A_{x_1} + B_{x_4} - C_{x_3} &= 0 \\ A_{x_2} + C_{x_4} - D_{x_3} &= 0 \end{aligned}$$

tandis que la troisième condition nous donne

$$B(0)(D(0) + C(0)) - A^2(0) > 0.$$

Si nous posons par exemple $A = C = D_{x_4} = D_{x_1} = 0$ et $B(x) = g(x_2)f'(x_3)$, nous obtenons la solution suivante :

$$D(x) = g'(x_2).$$

Ainsi, la 2-forme :

$$\omega = g(x_2)f'(x_3)dx_1 \wedge dx_3 + g'(x_2)(f(x_3)dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_4)$$

avec la condition

$$g(0)f'(0)g'(0) > 0$$

est une forme symplectique compatible avec J. Ainsi, J est calibrée par ω ou $-\omega$.

5.2 La preuve du théorème 1 donnée par Rivière–Tian

Concernant la preuve de Rivière et Tian, rappelons l'énoncé de leur théorème (Rivière et Tian, 2004)(Lemme A.1.) : Soit J une structure presque-complexe C^∞ sur une boule ouverte B^4 de $\mathbb{R}^4$, alors il existe un rayon $0 < r < 1$ et une 2-forme ω sur $B_r(0)$ tel que :

1. $d\omega = 0$.
2. Pour tout $X \in \mathbb{R}^4$, $X \neq 0, \omega(X, JX) > 0$.
3. Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^4$ $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$.

Pour voir ce qui fait défaut dans la preuve, introduisons d'abord la forme de Lee.
Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension 4. Soit φ l'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi\colon \wedge^1(V^*) &\to \wedge^3(V^*) \\ \theta &\mapsto \theta \wedge \omega, \end{aligned}$$

nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 5.2.1. — *Pour une forme non-dégénérée, l'application φ est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $B = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ une base symplectique de V (voir théorème (3.1.1)), alors $\omega = u_1^* \wedge v_1^* + u_2^* \wedge v_2^*$ où $B^* = \{u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*\}$ est la base duale à B de $V^* = \wedge^1(V^*)$. Les images des vecteurs de la base B^* par l'application φ sont linéairement indépendants. Puisque $\dim \wedge^1(V^*) = \dim \wedge^3(V^*)$, φ est alors un ismorphisme d'espaces vectoriels. $\square$

Corollaire 5.2.2. — *Il existe une unique 1-forme θ tel que $d\omega = \theta \wedge \omega$.*

Corollaire 5.2.3. —*Soit (J, g, ω) une structure presque-hermitienne.*

1. *$\theta = 0$ si et seulement si $d\omega = 0$.*
2. *Si $\widetilde{g} = e^f g$, la nouvelle forme fondamentale est $\widetilde{\omega} = e^f \omega \Rightarrow \widetilde{\theta} = \theta + df$.*

Remarque :

1. La structure presque-hermitienne(J, g, ω) est dite *conformément presque-kählérienne* si $d\theta = 0$.

2. $\theta = J(\delta^g \omega)$ où l'opérateur δ^g est la codifférentielle de g.

Démonstration. Soit $\{e_1, e_2, Je_1, Je_2\}$ une base orthonormée de $T_p^*(M)$ pour laquelle $\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot) = e_1 \wedge Je_1 + e_2 \wedge Je_2$. Nous avons que $d\omega = \theta \wedge \omega$. Ceci implique que $\iota_{\omega^\sharp} d\omega = \iota_{\omega^\sharp}(\theta \wedge \omega) = |\omega|^2 \theta = 2\theta$ où ι est la contraction et $|\cdot|$ est la norme relative à la métrique g. Ainsi, (D est la dérivée covariante associée à g)

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{1}{2}\iota_{\omega^\sharp} d\omega \\
&= \frac{1}{2}\left(d\omega(e_1^\sharp, Je_1^\sharp, \cdot) + d\omega(e_2^\sharp, Je_2^\sharp, \cdot)\right) \\
&= \left(\left(D_{e_1^\sharp}\omega\right)(Je_1^\sharp, \cdot) - \left(D_{Je_1^\sharp}\omega\right)(e_1^\sharp, \cdot) + \left(D_{e_1^\sharp}\omega\right)(Je_2^\sharp, \cdot) - \left(D_{Je_2^\sharp}\omega\right)(e_2^\sharp, \cdot)\right) \\
&= \left(-J\left(D_{e_1^\sharp}\omega\right)(e_1^\sharp, \cdot) - J\left(D_{Je_1^\sharp}\omega\right)(Je_1^\sharp, \cdot) - J\left(D_{e_1^\sharp}\omega\right)(e_2^\sharp, \cdot) - J\left(D_{Je_2^\sharp}\omega\right)(Je_2^\sharp, \cdot)\right) \\
&= J(\delta^g \omega).
\end{aligned}
$$

□

Revenons maintenant à la preuve de Rivière et Tian. Ils introduisent autour de l'origine la 2-forme $\widehat{\Omega}(X,Y) = \Omega_0(X,Y) + \Omega_0(JX, JY)$ où $\Omega_0 = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ est la forme symplectique standard et J est la structure presque-complexe tel que $J(0) = J_0$. Cette 2-forme vérifie les conditions 2 et 3 du théorème. Ensuite, ils supposent que $d\widehat{\Omega} \neq 0$ dans un voisinage de 0 (si $d\widehat{\Omega}|_0 = 0$, nous pouvons considérer $\widetilde{\Omega} = e^{x_1}\widehat{\Omega}$ et donc $d\widetilde{\Omega}|_0 = dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4$). Par la suite , ils affirment, à partir du fait erroné que toutes les 2-formes non fermées de rang 2 c'est à dire $\widehat{\Omega} \wedge \widehat{\Omega} \neq 0$ dans $\mathbb{R}^4$ sont localement équivalentes (Olver, 1995)(p.369), qu'il existe un système de coordonnées (x, y, z, t) au voisinage de 0 tel que $\widehat{\Omega} = e^x(dx \wedge dy + dz \wedge dt)$ (dans ce cas $d\widehat{\theta} = 0$). Cette dernière affirmation est fausse car une 2-forme non fermée ω_1 avec $d\theta_1 \neq 0$ n'est pas équivalente à une 2-forme non fermée avec $d\theta_2 = 0$. En fait, pour une 2-forme non-dégénérée "générique", la forme de

Lee n'est pas fermée. Par exemple, la 2-forme $\Omega = e^{xz}dx \wedge dy + dz \wedge dt$ est non-dégénérée et a une forme de Lee non-fermée $\theta = e^{xz}dz$.

5.3 Preuve du théorème 1.

Soit (M, J) une variété presque-complexe de dimension 4. Soit h une métrique hermitienne compatible avec J.

La décomposition du fibré des 2-formes réelles $\wedge^2(M) = \wedge^{inv}(M) \oplus \wedge^{anti}(M)$ induit une décomposition de la dérivée extérieure $d\colon \Omega^1(M) \to \Omega^2(M)$ en une somme de deux opérateurs différentiels $d'\colon \Omega^1(M) \to \Omega^{inv}(M)$ et $d''\colon \Omega^1(M) \to \Omega^{anti}(M)$.

La preuve est divisée en 4 étapes correspondantes aux 4 lemmes suivants :

Lemme 5.3.1. — *J est localement calibrable si et seulement pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U et $\alpha \in \Omega^1(U)$ tels que*

$$d''\alpha = 0,\ d\alpha \wedge d\alpha > 0$$

Lemme 5.3.2. — *Soit $\delta^h\colon \Omega^2(M) \to \Omega^1(M)$ la codifférentielle de la dérivée extérieure d relative à une métrique presque hermitienne quelconque. L'opérateur différentiel linéaire $d'' \circ \delta^h\colon \Omega^{anti}(M) \to \Omega^{anti}(M)$ est alors elliptique.*

Lemme 5.3.3. —*Il existe une solution infinitésimale $\Phi_0 \in \Omega^{anti}(M)$ vérifiant*

$$(d''\delta^h\Phi_0)(x) = 0 \tag{5.1}$$

$$(d\delta^h\Phi_0 \wedge d\delta^h\Phi_0)|_x > 0 \tag{5.2}$$

Lemme 5.3.4. —*Pour chaque point $x \in M$, il existe un voisinage U et une forme $\Phi \in \Omega^{anti}(M)$ vérifiant*

$$d''\delta^h(\Phi) = 0,\ d\delta^h(\Phi) \wedge d\delta^h(\Phi) > 0 \tag{5.3}$$

Démonstration du lemme 5.3.1. — En fait, la 2-forme $\omega = d\alpha$ va être symplectique et compatible avec la structure presque-complexe J. Le 2-tenseur $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ est symétrique et hermitien, alors il peut être diagonalisé par rapport à la métrique hermitienne

h c'est à dire il existe une base $\{e_1, e_2, Je_1, Je_2\}$ de $T_x^*(M)$ telle que $g|_x = \gamma(x)(e_1 \otimes e_1 + Je_1 \otimes Je_1) + \eta(x)(e_2 \otimes e_2 + Je_2 \otimes Je_2)$ et donc $\omega = \gamma(x)(e_1 \wedge Je_1) + \eta(x)(e_2 \wedge Je_2)$. La condition de signe $\omega \wedge \omega > 0$ (rappelons que le signe de $d\alpha \wedge d\alpha$ est déterminée par rapport à la forme de volume $V_h = \frac{F \wedge F}{2}$ où $F(\cdot,\cdot) = h(J\cdot,\cdot)$) implique que g a un déterminant positif par rapport à h. Ceci implique que $\gamma(x)\eta(x) > 0$ pour tout $x \in U$ et donc g est soit défini positif ou défini négatif sur U. Ainsi, la structure presque-complexe J est localement calibrée par ω ou $-\omega$.

Démonstration du lemme 5.3.2. —Nous allons montrer que l'opérateur :

$$d'' \circ \delta^h : \Omega^{anti}(M) \to \Omega^{anti}(M)$$

est elliptique. D'abord, l'opérateur $d'' = \pi \circ d$, où $\pi\colon \wedge^2(M) \to \wedge^{anti}(M)$ est la projection définie par $\pi(\alpha \wedge \beta) = \frac{1}{2}(\alpha \wedge \beta - J\alpha \wedge J\beta)$, admet le symbole suivant

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{(\xi)}(d'')\colon \Omega_x^1(M) & \to & \Omega_x^{anti}(M) \\ \alpha & \mapsto & \dfrac{1}{2}(\xi \wedge \alpha - J\xi \wedge J\alpha) \end{array}$$

Rappelons que le symbole de d est le suivant :

$$\sigma_{(\xi)}(d)\,(\theta) = \xi \wedge \theta,$$

alors que $\sigma_{(\xi)}(\delta^h)\,(\Phi) = -\iota_{\xi^\sharp}\,\Phi$ où ι est la contraction de Φ par $\xi^\sharp$ où $\xi \in T_x^*(M) \setminus \{0\}$ (Voir chapitre II).

Soit $\Phi \in \Omega_x^{anti}(M)$, $\Phi = \lambda\varphi + \mu\, J\varphi$ où $\lambda,\mu \in \mathcal{C}^\infty(U)$ avec U est un voisiange de x et $\{\varphi = e_1 \wedge e_2 - J\,e_1 \wedge J\,e_2, J\varphi = e_1 \wedge J\,e_2 + J\,e_1 \wedge e_2\}$ une base de $\wedge_x^{anti}(M)$ où $\{e_1,e_2,J\,e_1,J\,e_2\}$ est une base orthonormale de $T_x^*(M)$, le symbole de $d'' \circ \delta^h$ est :

$$\sigma_{(\xi)}(d'' \circ \delta^h)(\Phi) = \frac{1}{2}(-\xi \wedge \iota_{\xi^\sharp}\Phi + J\xi \wedge J\iota_{\xi^\sharp}\Phi).$$

Pour simplifier ce symbole, nous allons regarder d'abord Les endormorphismes duaux par rapport à la métrique. Soit I l'endomorphisme dual de φ par rapport à la métrique h c'est à dire $\varphi(X,Y) = h(I(X),Y)$ avec $X,Y \in T_x(M)$. Nous avons ($T_x(M)$ est identifié à $T_x^*(M)$) :

$$\begin{aligned}
h(I(e_1), e_2) &= \varphi(e_1, e_2) = 1 \Rightarrow I(e_1) = e_2 \\
h(I(e_2), e_1) &= \varphi(e_2, e_1) = -1 \Rightarrow I(e_2) = -e_1 \\
h(I(Je_1), Je_2) &= \varphi(Je_1, Je_2) = -1 \Rightarrow I(Je_1) = -Je_2 \\
h(I(Je_2), Je_1) &= \varphi(Je_2, Je_1) = 1 \Rightarrow I(Je_2) = Je_1
\end{aligned}$$

Nous avons que $I^2(e_i) = -e_i$ et donc $I^2 = -Id$.

De même, soit K l'endomorphisme dual de $J\varphi$ par rapport à la métrique h c'est à dire $J\varphi(X,Y) = h(K(X),Y)$ avec $X,Y \in T_x(M)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
h(K(e_1), Je_2) &= \varphi(e_1, Je_2) = 1 \Rightarrow K(e_1) = Je_2 \\
h(K(e_2), Je_1) &= \varphi(e_2, Je_1) = -1 \Rightarrow K(e_2) = -Je_1 \\
h(K(Je_1), e_2) &= \varphi(Je_1, e_2) = 1 \Rightarrow K(Je_1) = e_2 \\
h(K(Je_2), e_1) &= \varphi(Je_2, e_1) = -1 \Rightarrow K(Je_2) = -e_1
\end{aligned}$$

Donc, $K^2 = -Id$. Nous remarquons aussi que $K = J \circ I$, $J = I \circ K$ et $I = K \circ J$.

Maintenant, si nous retournons au calcul du symbole, nous remarquons que si $\Phi = \varphi$ alors

$$\begin{aligned}
2\sigma_{(\xi)}(d'' \circ \delta^h)(\varphi) &= -\xi \wedge \iota_{\xi^\sharp}\varphi + J\xi \wedge J\iota_{\xi^\sharp}\varphi \\
&= -\xi \wedge I(\xi^\sharp) + J\xi \wedge J \circ I(\xi^\sharp) \\
&= -\xi \wedge I(\xi^\sharp) + J\xi \wedge K(\xi^\sharp) \\
&= -(\xi \wedge I(\xi^\sharp) - J\xi \wedge K(\xi^\sharp)) \\
&= -|\xi|^2 \varphi
\end{aligned}$$

De même si $\Phi = J\varphi$ alors

$$\begin{aligned}
2\sigma_{(\xi)}(d'' \circ \delta^h)(J\varphi) &= -\xi \wedge \iota_{\xi^\sharp} J\varphi + J\xi \wedge J\iota_{\xi^\sharp} J\varphi \\
&= -\xi \wedge K(\xi^\sharp) + J\xi \wedge J \circ K(\xi^\sharp) \\
&= -\xi \wedge K(\xi^\sharp) - J\xi \wedge I(\xi^\sharp) \\
&= -(\xi \wedge K(\xi^\sharp) + J\xi \wedge I(\xi^\sharp)) \\
&= -|\xi|^2 J\varphi
\end{aligned}$$

Cela peut être déduit en observant que

$$\begin{aligned}
\varphi &= e_1 \wedge e_2 - Je_1 \wedge Je_2 \\
&= e_1 \wedge I(e_1) - Je_1 \wedge K(e_1) \\
&= e_2 \wedge I(e_2) - Je_2 \wedge K(e_2) \\
&= Je_1 \wedge I(Je_1) - J(Je_1) \wedge K(Je_1) \\
&= Je_2 \wedge I(Je_2) - J(Je_2) \wedge K(Je_2),
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
J\varphi &= e_1 \wedge Je_2 + Je_1 \wedge e_2 \\
&= e_1 \wedge K(e_1) + Je_1 \wedge I(e_1) \\
&= e_2 \wedge K(e_2) + Je_2 \wedge I(e_2) \\
&= Je_1 \wedge K(Je_1) + J(Je_1) \wedge I(Je_1) \\
&= Je_2 \wedge K(Je_2) + J(Je_2) \wedge I(Je_2).
\end{aligned}$$

Nous déduisons que

$$\begin{aligned}
2\sigma_{(\xi)}(d'' \circ \delta^h)(\Phi) &= -\xi \wedge \iota_{\xi^\sharp} \Phi + J\xi \wedge J\iota_{\xi^\sharp} \Phi \\
&= -|\xi|^2 \Phi,
\end{aligned}$$

alors $\sigma_{(\xi)}(d'' \circ \delta^h)$ est un automorphisme de $\wedge_x^{anti}(M)$ pour tout $\xi \in T_x^*(M) \setminus \{0\}$. Il en résulte que $d'' \circ \delta^h$ est un *opérateur elliptique*. En fait, le symbole de $d'' \circ \delta^h$ correspond au symbole de Laplacien (voir chapitre II).

Par conséquent, l'opérateur $d''\delta^h\colon \Omega^{anti}(M) \longrightarrow \Omega^{anti}(M)$ est linéaire elliptique d'ordre 2.

Démonstration du lemme 5.3.3. —Introduisons d'abord les coordonnées normales $(x_1, ..., x_4)$ pour lesquels $(D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j})(p) = \delta_{ij}$ et donc $D^k u = \sum_{|\alpha|=k} D^{|\alpha|}u$.
Il suffit alors de trouver une suite de jets $\Phi_0(x), (D\Phi_0)(x), \cdots$ vérifiant (5.1) et (5.2)(pour un coix convenable de h). En effet, par le lemme de Borel, en ayant choisi convenablement les jets d'ordre ≤ 2, nous obtenons un Φ_0 qui vérifie ces conditions. Rappelons alors le lemme de Borel :

Lemme de Borel 5.3.5. — *Étant donné des constantes réelles c_α, avec α un n-uplet d'entiers positifs, il existe un $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que*

$$\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(0) = c_\alpha \,\forall\alpha.$$

Notons par $S^l(T_x^*(M)) \otimes \wedge_x^{anti}(M)$ l'espace des l-jets des éléments de $\Omega^{anti}(M)$ en x (S^l désigne la l-ème puissance tensorielle symétrique). Par le théorème de Borel, pour toute suite $(a_l)_{l\geq 0}$ où $a_l \in S^l(T_x^*(M)) \otimes \wedge_x^{anti}(M)$, il existe $\Phi \in \Omega^{anti}(M)$ dont le l-ème jet en x est a_l. Il suffit alors de montrer qu'il existe un jet $e = (a_0, a_1, a_2)$ d'ordre inférieur ou égal à 2 tel que $P(e) = 0$ et $d\delta^h(e) \wedge d\delta^h(e) > 0$ où les opérateurs différentiels linéaires d'ordre inférieur ou égal à 2 sont identifiés avec les applications linéaires induites sur l'espace des jets d'ordre inférieur ou égal à 2. En fait, nous allons chercher un jet e vérifiant une condition encore plus forte à savoir $(d\delta^h(e))_0 = 0$ où $(\cdot)_0$ désignant la partie primitive d'une 2-forme (c'est-à-dire la projection orthogonale sur $F^\perp$). En effet, $(d\delta^h(e))_0 = 0$ implique que $P(e) = 0$ et $d\delta^h(e) = \frac{1}{2}L^h(e)F$ où

$$\begin{aligned} L^h\colon \Omega^{anti}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \Phi &\longmapsto \left\langle d\delta^h\Phi, F\right\rangle. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $d\delta^h(e) \wedge d\delta^h(e) = \frac{1}{2}(L^h(e))^2 V_h$ ($V_h = \frac{F\wedge F}{2}$ est la forme de volume) est positive dès que $L^h(e) \neq 0$. Regardons d'abord l'ordre de l'opérateur différentiel L^h qui est a priori égal à 2. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\left\langle d\delta^h\Phi, F\right\rangle &= \sum D_{e_i}(\delta^h\Phi)(Je_i) \\
&= \left(\sum e_i(\delta^h\Phi(Je_i))\right) + \sum(\delta^h\Phi)((D_{e_i}J)(e_i)) \\
&= -\left(\sum e_i(J\delta^h\Phi(e_i))\right) + \left\langle \delta^h\Phi, \sum(D_{e_i}F)(e_i,\cdot)\right\rangle \\
&= \delta^h(J\delta^h\Phi) - \left\langle \delta^h\Phi, \delta^h F\right\rangle \\
&= \delta^h(J\delta^h\Phi) + \left\langle \delta^h\Phi, J\theta_h\right\rangle \quad \text{où } \theta_h = J(\delta^h F) \text{ est la forme de Lee.}
\end{aligned}$$

mais le terme $\delta^h(J\delta^h\Phi)$ peut s'écrire comme

$$\begin{aligned}
\delta^h(J\delta^h\Phi) &= \delta^h(J\delta^h\Phi) - \delta^h\delta^h(J\Phi) \text{ nous rappelons que } (\delta^h)^2 = 0 \\
&= \delta^h(J\delta^h\Phi - \delta^h J\Phi) \\
&= \delta^h\left(-J\sum(D_{e_i}\Phi)(e_i,\cdot) + \sum D_{e_i}(J\Phi)(e_i,\cdot)\right) \\
&= \delta^h\left(-J\sum(D_{e_i}\Phi)(e_i,\cdot) + \sum(D_{e_i}J)\Phi(e_i,\cdot) + J\sum(D_{e_i}\Phi)(e_i,\cdot)\right) \\
&= \delta^h\left(\sum(D_{e_i}J)\Phi(e_i,\cdot)\right) \\
&= \delta^h\left(\sum\Phi(e_i,(D_{e_i}J)\cdot)\right) \\
&= \delta^h\left(\sum\left\langle(D_{e_i}J)\cdot,(i_{e_i}\Phi)^\sharp\right\rangle\right)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule suivante (Kobayashi et Nomizu, 1996) :

$$D_X F = \frac{1}{2}\left(X^\flat \wedge J\theta_h + (JX)^\flat \wedge \theta_h\right) + 2N_{JX}$$

où $X \in T(M)$, $\flat$ est l'isomorphisme musical identifiant $T(M)$ à $T^*(M)$ et $N_X(\cdot,\cdot) = \langle N(\cdot,\cdot), X\rangle$ avec N le tenseur de Nijenhuis, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\langle(D_{e_i}J)\cdot,(\iota_{e_i}\Phi)^\sharp\right\rangle &= D_{e_i}F(\cdot,(\iota_{e_i}\Phi)^\sharp) \\
&= \frac{1}{2}\left((e_i)^\flat \wedge J\theta_h((\iota_{e_i}\Phi)^\sharp,\cdot) + (Je_i)^\flat \wedge \theta_h((\iota_{e_i}\Phi)^\sharp,\cdot)\right) + 2\left\langle N(\cdot,(\iota_{e_i}\Phi)^\sharp), Je_i\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left((e_i)^\flat \wedge J\theta_h((\iota_{e_i}\Phi)^\sharp,\cdot) + (Je_i)^\flat \wedge \theta_h((\iota_{e_i}\Phi)^\sharp,\cdot)\right) - 2\Phi\left(JN(\cdot,e_i),e_i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\Phi(e_i,J\theta_h^\sharp)(e_i)^\flat(\cdot) - \Phi(e_i,\theta_h^\sharp)(Je_i)^\flat(\cdot)\right) - 2\Phi\left(JN(\cdot,e_i),e_i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(J\Phi(e_i,\theta_h^\sharp)(e_i)^\flat(\cdot) - \Phi(e_i,\theta_h^\sharp)(Je_i)^\flat(\cdot)\right) - 2\Phi\left(JN(\cdot,e_i),e_i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\Phi(e_i,\theta_h^\sharp)(Je_i)^\flat(\cdot) - \Phi(e_i,\theta_h^\sharp)(Je_i)^\flat(\cdot)\right) - 2\Phi\left(JN(\cdot,e_i),e_i\right) \\
&= -2\Phi\left(N(\cdot,e_i),Je_i\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\left\langle d\delta^h\Phi, F\right\rangle = \left\langle \delta^h\Phi, J\theta_h\right\rangle - 2\delta^h \sum \Phi\left(JN(\cdot, e_i), e_i\right).$$

Nous déduisons alors que l'ordre de L^h est 1.

Puisque $\sigma_{(\xi)}(\delta^h)(\alpha) = -\iota_{\xi^\sharp}\alpha$, le symbole de L^h est

$$\begin{aligned}\sigma_{(\xi)}(L^h)(\Phi) &= \langle -\iota_{\xi^\sharp}\Phi, J\theta_h\rangle + 2\iota_{\xi^\sharp}\left(\sum \Phi\left(JN(\cdot, e_i), e_i\right)\right)\\ &= -\Phi(\xi^\sharp, J\theta_h^\sharp) + 2\left(\sum \Phi\left(JN(\xi^\sharp, e_i), e_i\right)\right),\end{aligned}$$

alors pour un choix convenable de h, $\sigma_{(\xi)}(L^h)$ est non nul. En effet, supposons que $\sigma_{(\xi)}(L^h;x)(\Phi(x)) = 0$; soit $\widetilde{h} = e^f h$ avec $f(x) = 0$ et $df(x) = J(\iota_{\xi^\sharp}\Phi)(x)$, alors $\sigma_{(\xi)}(L^{\widetilde{h}};x)(\Phi(x)) = \langle(\iota_{\xi^\sharp}\Phi)(x), (\iota_{\xi^\sharp}\Phi)(x)\rangle$ (puisque $\widetilde{h}(x) = h(x) = \langle\cdot,\cdot\rangle$ et que $\widetilde{\theta} = \theta + df$).

Nous pouvons ainsi commencer avec $e' = (a_0, a_1)$ tel que $L^h(e') \neq 0$. Le symbole principale de $(d\delta^h)$ est $\sigma_{(\xi)}(d\delta^h)(\Phi) = -\xi \wedge \iota_{\xi^\sharp}\Phi$. Par polarisation sur ξ, nous avons

$$\begin{aligned}\sigma_{(\xi,\eta)}(d\delta^h)(\Phi) &= \frac{1}{2}\left(-(\xi+\eta)\wedge \iota_{(\xi+\eta)^\sharp}\Phi + \xi\wedge\iota_{\xi^\sharp}\Phi + \eta\wedge\iota_{\eta^\sharp}\Phi\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\xi\wedge\iota_{\eta^\sharp}\Phi + \eta\wedge\iota_{\xi^\sharp}\Phi\right).\end{aligned}$$

Ceci induit une application linéaire de $S^2(T_x^*(M))\otimes\wedge_x^{anti}(M)$ à l'espace des 2-formes primitives $\left(\wedge_x^2(M)\right)_0$. Le fait que cette application est *surjective* nous garantit l'existence d'un élément $a_2 \in S^2(T_x^*(M))\otimes\wedge_x^{anti}(M)$ tel que $e = (a_0, a_1, a_2)$ vérifiant $\left((d\delta^h)(e)\right)_0 = 0$. Puisque $L^h(e) = L^h(e') \neq 0$, ceci conclut la preuve du lemme.

Démonstration du lemme 5.3.4. —Par le théorème de Malgrange (2.2.6), étant donné une 2-forme $\Phi_0 \in \Omega^{anti}(M)$ qui vérifie (5.3) au point x (c'est à dire une solution infinitésimale de (5.3)) alors por tout $\epsilon > 0$, il existe une solution Φ_ϵ et et un voisinage U_ϵ tel que

$$\|\Phi_\epsilon - \Phi_0\|_{C^{2,\alpha}} < \epsilon,$$

mais

$$\begin{aligned}|\Phi_\epsilon(p) - \Phi_0(p)| &\leq \sup_{x\in U_\epsilon}|\Phi_\epsilon(x) - \Phi_0(x)| \leq \|\Phi_\epsilon - \Phi_0\|_{C^{2,\alpha}} < \epsilon\\ |(D\Phi_\epsilon)(p) - (D\Phi_0)(p)| &\leq \sup_{x\in U_\epsilon}|(D\Phi_\epsilon)(x) - (D\Phi_0)(x)| \leq \|\Phi_\epsilon - \Phi_0\|_{C^{2,\alpha}} < \epsilon\\ \left|(D^2\Phi_\epsilon)(p) - (D^2\Phi_0)(p)\right| &\leq \sup_{x\in U_\epsilon}\left|(D^2\Phi_\epsilon)(x) - (D^2\Phi_0)(x)\right| \leq \|\Phi_\epsilon - \Phi_0\|_{C^{2,\alpha}} < \epsilon\end{aligned}$$

alors pour un ϵ assez petit, nous avons $(d\delta^h\Phi \wedge d\delta^h\Phi)|_x > 0$ (où $\Phi = \Phi_\epsilon$).

Nous déduisons alors que J est localement calibrée par $\pm d\delta^h\Phi$ d'où le théorème 1.

CHAPITRE VI

STRUCTURES PRESQUE-COMPLEXES NON-CALIBRABLES EN DIMENSION 6

6.1 Introduction

La situation change en dimension supérieure à 4. En particulier, en dimension 6, nous savons d'après (Bryant, 1982) la structure presque-complexe standard de S^6 n'est pas localement calibrable. Nous donnerons une autre démonstration de ce résultat. Aussi, Tomassini a donné d'autres exemples explicites qui ne sont pas calibrables. Le résultat principal de ce chapitre stipule qu'une structure presque-complexe sur une variété strictement approximativement kählérienne n'est pas localement calibrable.

6.2 L'Exemple de Tomassini

Rappelons l'exemple de Tomassini en dimension 6 voir (Tomassini, 2002). Soit la structure presque-complexe J sur $\mathbb{R}^6$ définie par :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(2\pi x_5) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sin(2\pi x_5) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomassini affirme que cette structure presque-complexe ne peut être calibrée par aucune forme symplectique ω. En effet, une telle structure n'est pas compatible avec aucune forme symplectique qui induirait une métrique riemannienne g ; si $(e_i)_{1\leq i\leq 6}$ est une base de $T_{(0)}(\mathbb{R}^6)$, nous avons qu'à l'origine le tenseur de Nijenhuis satisfait :

- $4N(e_1, e_2) = -2\pi e_3$.
- $N(e_6, e_1) = 0$.
- $N(e_2, e_6) = 0$.

Si nous supposons que (J, g, ω) est une structure presque-kählérienne, alors (toujours à l'origine),

$$\begin{aligned} \underset{e_1,e_2,e_6}{\sigma} g(J(N(e_1,e_2)),e_6) &= -\frac{\pi}{2} g(Je_3, e_6) \\ &= -\frac{\pi}{2} g(e_6, e_6) \\ &= 0 \text{ (par le théorème (4.2.4)).} \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que g est une métrique riemannienne. Nous concluons que J n'est pas calibrée localement par aucune forme symplectique. Mais en faisant des calculs semblables à ceux de la section (5.1), nous pouvons construire des formes symplectiques J-invariantes, exemple :

$$\omega = (x_3 f''(x_1) - p'(x_4))dx_1 \wedge dx_4 + f'(x_1)dx_1 \wedge dx_6 + (k'(x_2) - h'(x_5))dx_2 \wedge dx_5 + f'(x_1)dx_3 \wedge dx_4$$

où $f, p, h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f'(0) \neq 0$ et $h'(0) \neq k'(0)$. Soit g la métrique définie par

$$g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$$

Nous remarquons qu'à l'origine, la métrique $g = (g_{ij})$ est donnée par la matrice

$$\begin{bmatrix} -p'(0) & 0 & f'(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k'(0) - h'(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f'(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p'(0) & 0 & f'(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k'(0) - h'(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f'(0) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons voir d'abord que $\det(g_{ij}) = (f'(0))^4(h'(0) - k'(0))^2 > 0$ c'est à dire g est non-dégénérée mais nous aurons comme valeurs propres (chacune de multiplicité algébrique 2) :

- $\lambda = k'(0) - h'(0)$.
- $\lambda = \frac{-p'(0) \pm \sqrt{(p'(0))^2 + 4(f'(0))^2}}{2}$. Dans ce cas, indépendement du signe de $p'(0)$ et $f'(0)$ ($p'(0)$ peut être aussi égale à 0), nous aurons deux valeurs propres de signes opposées.

Nous concluons alors que la métrique induite g est forcément pseudo-riemannienne. Par conséquent, J est *faiblement calibrable mais n'est pas calibrable.* La question naturelle qu'on peut se poser est la suivante :

Question : *Existe-t-elle une structure presque-complexe sur $\mathbb{R}^6$ qui n'est pas faiblement calibrable ?*

6.3 Variétés approximativement kählériennes

Nous nous sommes intéressés à des variétés spéciales en dimension 6 appelées les variétés approximativement kählériennes ou "nearly Kähler" qu'on notera NK. Les variétés NK sont l'un des types de variétés dans la classification Gray-Hervella, cf. (Butruille, 2005) et (Armstrong, 1998)

Définition 6.3.1. — *une variété presque-hermitienne (M, J, h) est appelée approximativement kählérienne (NK) si sa forme fondamentale $F(\cdot,\cdot) = h(J\cdot,\cdot)$ vérifie $D^hF = \frac{1}{3}dF$ où D^h est la connexion de Levi-Civita associée à h.*

Une variété kählérienne est une variété approximativement kählérienne. Mais ce qui nous intéresse sont les variétés dont la structure presque-complexe est non-intégrable, appelées les *variétés strictement approximativement kählériennes* ou encore "strictly nearly Kähler" notées SNK, cf. (Verbitsky, 2005).

En dimension 6, nous avons la propriété importante suivante :

Proposition 6.3.2. *—En dimension* 6*, une structure presque-complexe* J *peut être compatible avec au plus une métrique SNK.*

Proposition 6.3.3. *—Si le tenseur* $(D^h_X J)Y$ *est anti-symétrique par rapport à* $X, Y \in T(M)$*, alors* (h, J) *est NK.*

Démonstration. Puisque le $(3,0)$-tenseur $D^h_X F(Y,Z)$ est totalement anti-symétrique (c'est à dire il définit une 3-forme), nous avons par l'identité $D^h_X F(Y,Z) = h((D^h_X J)Y, Z)$ que l'endormorphisme $D^h J$ est anti-symétrique. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} dF(X,Y,Z) &= h((D^h_X J)Y,Z) + h((D^h_Y J)Z,X) + h((D^h_Z J)X,Y) \quad \text{par le lemme (4.1.7)} \\ &= h((D^h_X J)Y,Z) - h((D^h_Y J)X,Z) - h((D^h_X J)Z,Y) \quad \text{car } (\nabla_X J)Y = -(\nabla_Y J)X \\ &= h((D^h_X J)Y,Z) + h((D^h_X J)Y,Z) + h((D^h_X J)Y,Z) \\ &= 3h((D^h_X J)Y,Z) \\ &= 3(D^h_X F)(Y,Z), \end{aligned}$$

d'où $dF = 3D^h F$ □

Remarque — Dans une variété NK, nous pouvons voir que $D^h F$ est parallèle relativement à la connexion hermitienne canonique $\overline{D^h}$ (définie par $\overline{D^h}_X Y = D^h_X - \frac{1}{2}J(D^h_X J)$ où D^h est la connexion de Levi-Civita). Ce qui implique $\overline{D^h} dF = \overline{D^h}(3D^h F) = 0$. Nous avons donc que dF est de norme constante (non-nulle dans le cas d'une variété SNK). Sur une variété SNK de dimension 6, nous pouvons alors construire une $(3,0)$-forme Ψ avec $|\Psi| = 1$ (par rapport à la métrique hermtienne canonique). Donc, le groupe de structure admet une réduction à $SU(3)$. Ainsi, nous avons cette propriété importante d'une variété SNK, voir (Reyes Carrion, 1998).

Proposition 6.3.4. *—Soit* (M, J, h) *une variété SNK de dimension* 6 *et* F *sa forme fondamentale. Il existe une* $(3,0)$*-forme complexe* Ω *qui s'annule nulle part et dont* dF *est la partie imaginaire (avec* $F(\cdot,\cdot) = h(J\cdot,\cdot)$*). En fait,* $\Omega = JdF + idF$ *(avec*

$JdF(\cdot,\cdot,\cdot) = -dF(J\cdot,\cdot,\cdot))$

Exemples 6.3.5. — Voici une liste d'exemples connus de variété SNK de dimension 6.

1. La sphère de dimension 6, $S^6 \subset \mathbb{R}^7$, munie d'une structure presque complexe induite par le produit vectoriel de $\mathbb{R}^7$ et la métrique standard (induite par le produit euclidien de $\mathbb{R}^7$).
2. $S^3 \times S^3$ avec la structure presque-complexe envoyant ξ_i à ξ_i', ξ_i' à $-\xi_i$ où ξ_i, ξ_i', $i = 1, 2, 3$ est une base des 1-formes invariantes à gauche dans la première et la deuxième composante. La métrique SNK est la métrique 3-symétrique.
3. Étant donné une variété riemannienne auto-duale d'Einstein M de dimension 4 avec une constante d'Einstein $\lambda > 0$, nous pouvons définir son espace twisteur $Tw(M)$ comme l'espace total du fibré des sphères unitaires dans $\wedge^2_-(M)$; D'après (Eells et Salamom, 1985), $Tw(M)$ peut être muni d'une structure presque-complexe non-intégrable J_- (la structure *anti-tautologique*). Par un résultat de (Mushkarov, 1989), cette structure presque-complexe est de type NK. Notons que Friedrich et Kurke (Friedrich et Kurke, 1982) et N. J. Hitchin (Hitchin, 1981) ont démontré que les seules 4-variétés autoduales d'Einstein compactes sont S^4 avec la métrique standard et $\mathbb{C}P^2$ avec la métrque Fubini-Study. Les espaces twisteurs correspondants sont $\mathbb{C}P^3$ et l'espace drapeau $F(1, 2)$. La structure presque-complexe J_- induit une structure SNK sur ces deux espaces symétriques.

Théorème 6.3.6. — *Une structure presque-complexe sur une variété strictement approximativement kählérienne de dimension* 6 *n'est calibrée localement par aucune forme symplectique.*

Le théorème découle aussi de considérations encore plus générales dans (Bryant, 2006). Soit (M, J, h) une variété SNK. La structure presque-complexe J est non-intégrable.

Soit N le tenseur de Nijenhuis, nous avons que

$$\begin{aligned}
4N(X,Y) &= J(D^h_Y J)X - J(D^h_X J)Y - (D^h_{JY}J)X + (D^h_{JX}J)Y \\
&= -J(D^h_X J)Y - J(D^h_X J)Y + (D^h_X J)JY - (D^h_Y J)JX \text{ car } (D^h_X J)Y = -(D^h_Y J)X \\
&= -J(D^h_X J)X - J(D^h_X J)Y - J(D^h_X J)Y + J(D^h_Y J)X \\
&= -4J(D^h_X J)Y,
\end{aligned}$$

où $F(\cdot,\cdot) = h(J\cdot,\cdot)$, $(D^h_X F)(Y,\cdot)^\sharp$ est le champ de vecteur dual à la 1-forme $(D^h_X F)(Y,\cdot)$.
Nous déduisons que

$$JN(X,Y) = (D^h_X J)Y = (D^h_X F)(Y,\cdot)^\sharp.$$

Sur une variété SNK, nous avons que $dF = 3D^h F$ alors

$$h(JN(X,Y),Z) = \frac{1}{3}dF(X,Y,Z), \;\; \forall X,\, Y,\, Z \in T(M). \tag{6.1}$$

Aussi, M admet, par la proposition (6.3.4), une $(3,0)$-forme complexe Ψ dont dF est la partie imaginaire, alors $(6,1)$ peut s'écrire comme

$$N = \frac{1}{6}h^* \circ \Psi, \tag{6.2}$$

où N est le tenseur de Nijenhuis vu comme une application linéaire $N\colon \wedge^2(T^{1,0}(M)) \to T^{0,1}(M)$, la métrique hermitienne h^* induite donne un isomorphisme $h^*\colon \wedge^{1,0}(M) \to T^{0,1}(M)$, et la forme de volume complexe Ψ identifie $\wedge^2(T^{1,0}(M))$ avec $\wedge^{1,0}(M)$.
Le théorème (6.3.6) est alors un corollaire immédiat de la proposition suivante

Proposition 6.3.7.— *Soit (M,J) une variété presque-complexe de dimension 6. Supposons qu'en un point x, le tenseur de Nijenhuis N ne s'annule pas et peut être écrit comme*

$$N_x = h^*_x \circ \psi_x, \tag{6.3}$$

où $h^*_x\colon \wedge^{1,0}_x(M) \to T^{0,1}_x(M)$ est une forme réelle, symétrique, invariante par rapport à J^* et non-dégénérée sur $T^*_x(M)$ et $\psi_x \in \wedge^{3,0}_x(M)$ est une $(3,0)$-forme non nulle. J n'est calibrée alors par aucune forme symplectique dans un voisinage de x.

Démonstration. Puisque h_x^* est invariante par rapport à J_p^*, symétrique et non-dégénérée, il existe une base $\{\alpha_1, \alpha_2, , \alpha_3\}$ de $\wedge_x^{1,0}(M)$, avec la base duale $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ de $T_x^{1,0}(M)$, telle que $h_x^* = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (Z_i \otimes \overline{Z}_i + \overline{Z}_i \otimes Z_i)$ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\psi_x = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ (puisque N_x est non nul, au moins l'un des $\lambda_i > 0$). La condition (6.3) nous donne

$$N(Z_1, Z_2) = \lambda_3 \overline{Z}_3,\ N(Z_2, Z_3) = \lambda_1 \overline{Z}_1,\ N(Z_3, Z_1) = \lambda_2 \overline{Z}_2 \tag{6.4}$$

Supposons que J est calibrée par une forme symplectique ω autour de x. La structure presque-kählérienne satisfait $\underset{X,Y,Z}{\sigma}(g(JN(Y, Z), X)) = 0$ (théorème (4.2.4)).

Par rapport à la base locale vérifiant (6.4), ceci implique que $-i \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \left\|\overline{Z}_j\right\|_g^2 = 0$ une contradiction. □

Remarque 6.3.8— La preuve de la proposition (6.3.7) montre encore un peu plus : il n'existe aucune métrique presque-hermitienne g, définie au voisinage de x, telle que la 2-forme fondamentale ω de (g, J) satisfait $(d\omega)^{3,0}$=0, où $(d\omega)^{3,0}$ est la projection de $d\omega$ sur $\wedge^{3,0}(M)$.

6.4 Calibration en dimension supérieure ou égale à 12

Théorème d'Armstrong 6.4.1 — *Ce ne sont pas toutes les structures presque-complexes en dimension réelle plus grande ou égale à* 12 *qui admettent localement une structure presque-kählérienne.*

Démonstration. N'importe quel tenseur algébrique $T \in [[Hom(\wedge^{1,0}(M), \wedge^{0,2}(M))]]$ peut être réalisé comme un *tenseur de Nijenhuis* en un point d'une variété presque-complexe. Étant donné un tenseur $T \in [[Hom(\wedge^{1,0}(M), \wedge^{0,2}(M))]]$, nous pouvons définir l'application suivante

$$\begin{aligned} \Phi_T \colon [\wedge^{1,1}(M)] &\rightarrow [[\wedge^{3,0}(M)]] \\ \Phi_T(\omega)(X, Y, Z) &= \underset{X,Y,Z}{\sigma} \omega(T(X, Y), Z) \end{aligned}$$

cette application envoie n'importe quelle 2-forme réelle J-invariante sur une 3-forme réelle. Si (J, ω) est une structure presque kählérienne alors $\Phi_T(\omega) = 0$ (théorème (4.2.4)).

Or, $\dim\left[\wedge^{1,1}(M)\right] = k^2$ et $\dim\left[\left[\wedge^{3,0}(M)\right]\right] = \frac{k(k-1)(k-2)}{3}$ où $\dim_{\mathbb{R}} M = 2k$. Si pour $k \geq 6$, nous montrons que Φ_T est injective pour un tenseur générique T alors $\Phi_T(\omega) = 0$ implique que $\omega = 0$ en contradiction avec le fait que ω est non-dégénérée. Ainsi, ce que nous avons besoin est juste d'un exemple de tenseur T pour lequel Φ_T est injective. Avec un programme Maple, nous pouvons générer un tel exemple et vérifier que Φ_T est injective. Armstrong a réussi à implémenter un tel programme dans sa thèse de doctorat (Armstrong, 1998). $\square$

Notons aussi que les produits d'un des exemples cités en (6.3.5) avec des variétés riemanniennes donnent des exemples de variétés presque-complexes non localement calibrables en chaque dimension plus grande que 6.

CONCLUSION

La question de calibration locale d'une structure presque-complexe donnée, qu'on a soulevé dans ce mémoire, reste encre ouverte. En fait, le cas des variétés presque-complexes de dimension 8 et 10 reste encore à traîter et on se demande s'il n'y a pas un critère générale pour vérifier si une structure presque-complexe est localement calibrable ou non. Comme l'a fait J. Armstrong, nous avons essayé de détecter une obstruction à la calibration locale d'une structure presque-complexe. Mais cette propriété des structures presque-kählérienne décrite dans le théorème (4.2.4) demeure pour l'instant la clé de cette obstruction.

RÉFÉRENCES

Armstrong, J. (1998). « Almost-Kähler Geometry ». D. Phill. Thesis, Oxford university.

Besse, A.L. (1987). « Einstein Manifolds ». Springer-Verlag.

Bryant, R. (2006). « Remarks on the geometry of almost complex 6-manifolds ». Asian J. Math. 10 (2006), 561–606

Bryant, R. (1982). « Submanifolds ans special structures on the octonians ». J. Differential Geometry, 17 (1982), 185–232

Butruille, J.B. (2005). « Variétés de Gray et géométries spéciales en dimension 6 ». Thèse de doctorat, École Polytechnique Paris.

Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T., et Novikov, (1986).« Modern Geometry Part III ». Springer-Verlag.

Eells, J. et Salamon, S. (1985).« Twistorial construction of harmonic maps of surfaces into four-manifolds ». Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 12 (1985), 589–640.

Folland, G.B. (1995).« Introduction to Partial Differential Equations ». Princeton University Press, Scond Edition.

Friedrich, Th. and Kurke, H. (1982). « Compact four-dimensional self-dual Einstein manifolds with positive scalar curvature ». Math. Nachr. 106 (1982), 271–299.

Gallot, S. Hulin, D. and Lafontaine, J. (1987). « Riemannian Geometry ». Springer-Verlag.

Jost, J. (1999). « Postmodern Analysis ». Springer, Second Edition.

Jost, J. (2000). « Riemannian Geometry and Geometric Analysis ». Springer-Verlag.

Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1963). « Foundations of Differential Geometry ». vol. 2, Interscience, New York.

Hitchin, N.J. (1981). « Kählerian twistor spaces ». Proc. London Math. Soc. 43 (1981), 133–150.

Husemoller, D. (1974). « Fibres bundles ». Springer-Verlag.

Malgrange, B. (1972). « Equations de Lie ». I. J. Differential Geometry, 7 (1972), 117–141

McDuff, D. and Salamon, D. (1998). « Introduction to Symplectic Topology ». Oxford Mathematical Monographs.

Mushkarov, O. (1989). « Almost Hermitian structures on twistor spaces and their type ». Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 37 (1989), 285–297

McDuff, D. and Salamon, D. (1998). « Introduction to Symplectic Topology ». Oxford Mathematical Monographs.

Narasimhan, R. (1968). « Analysis on Real and Complex Manifolds ». Advanced Studies in Pure Mathematics.

Nirenberg, L. (1973). « Lectures on linear partial differential equations ». American Mathematical Society.

Olver, P. (1995). « Equivalence, invariants and symmetry ». Cambridge University Press, Cambridge.

Reyer Carrion, R. (1998). « A generalization of the notion of instanton ». Differential Geom. Appl. 8 (1998) 1–20

Riviére, T. and Tian, G. (2004). « The singular set of J-holomorphic maps into projective algebraic varities ». J. reine angew. Math. 570 (2004) 47–87.

Tomassini, A. (2002). « Some examples of non calibrable almost complex structures ». Forum Math. 14 (2002) 869–876.

Verbitsky, M (2005). « Hodge theory on nearly Kähler manifolds ». math.DG/0510618.

Verbitsky, M (2005). « An intinsic volume functional on almost-complex 6-manifolds and nearly Kähler geometry ». math.DG/0507179.