

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

COBORDISMES LAGRANGIENS DES NŒUDS
LEGENDRIENS

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR

BAPTISTE CHANTRAINE

OCTOBRE 2009

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

L'écriture, dit-on, est une activité solitaire. Je ne serai donc jamais écrivain car cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour sans l'aide que j'ai reçue des personnes que je veux remercier ici.

Tout d'abord, je veux témoigner ma reconnaissance à Olivier Collin, mon directeur. Je le remercie pour son accueil à mon arrivée à Montréal, son cours de géométrie différentielle qui m'a donné la passion de ce sujet, sa confiance en moi, son écoute et ses relectures attentives. Merci beaucoup.

J'ai aussi bien entendu bénéficié de la présence de collègues et amis qui m'ont tous beaucoup apporté lors de discussions passionnantes à n'importe quelle heure du jour et de la nuit.

Je pense en premier lieu à Rémi, justicier volant des nuits montréalaises. Je ne peux pas lui dire combien j'ai apprécié sa présence, son aide, ses conseils et tout ce qu'on a fait ensemble ces dernières années.

Je pense aussi aux longues marches nocturnes avec Clément qui m'a permis de vérifier mes arguments à force de les répéter alors que lui ne m'écoutait pas...Tu quoque Bronco!!!

Je remercie également Eveline pour sa relecture et ses commentaires pertinents mais surtout pour sa cuisine et nos discussions sérieuses qui arrivent à des moments surprenants.

Il y a aussi le prince des ténèbres, archange maudit, algébriste modern'style que le sculpteur surnomma, en français, Gabriel.

Je ne peux pas manquer de remercier Alexandre qui m'a patiemment expliqué la différence entre la géométrie et la topologie.

Il y'a évidemment Annie et ses innombrables qualités, en particulier celle d'avoir la tête dure lorsque je la laisse tomber lors de nos danses endiablées.

Je n'oublie pas Xavier qui m'a notamment permis de ne pas dormir tout le temps dans le canapé.

Je remercie Etienne pour nos discussions précises de topologie algébrique.

Et enfin je remercie Liam "Magic Man" Watson pour son intérêt et ses relectures patientes de mon anglais.

A vous tous un merci commun pour tous ces soupers, toutes ces bières et toutes ces soirées partagées ensemble...

Mon apprentissage mathématique a été grandement stimulé par toutes sortes de rencontres. Je remercie à ce titre l'Institut des Sciences Mathématiques de permettre une proximité avec toute la com-

munauté mathématique Montréalaise. Je remercie également Vestislav Apostolov, Steven Boyer, Octav Cornea et André Joyal pour avoir été toujours disponibles pour répondre à mes questions. J'ai aussi grandement bénéficié de mes rencontres avec John Etnyre et Tamás Kálmán, que je remercie chaleureusement pour avoir tout de suite cru en mon projet.

Je veux aussi remercier Paolo "as usual" Ghiggini dont les tartes sont aussi bonnes que les idées.

Je dois aussi remercier toutes les personnes qui m'ont aidé dans mes démêlés administratifs avec une mention spéciale à Manon Gauthier et Alexandra Haendrich.

Je veux ici donner une attention toute particulière à Claude Givet pour son "Chantraine, la culture c'est beau mais faites des Maths bon dieu !!"

Et comme il n'y a pas que les mathématiques dans la vie, je dois remercier toutes les personnes qui ont rendu ma vie à Montréal agréable. Je pense ici spécialement à Nicolas, Julien et Alina. Je remercie Elyse pour tout ce qu'elle m'a appris.

Je remercie aussi mes amis de longue date. Je pense à Toto mon frère et aussi à Jonathan, Christophe et Aurélien.

Je tient à remercier Karine pour avoir décidé de me supporter dans le moment le plus dur : la fin de la rédaction.

Je suis extrêmement reconnaissant du soutien de ma famille. J'embrasse chaleureusement ma mère Fabienne qui m'as toujours soutenu. Je remercie ma grand-mère Jeannine pour son soutien moral et matériel. Je pense aussi à ma grand-mère Colette et à mon grand père Jacques pour avoir toujours eu confiance en moi. Je pense aussi à mes deux frères : Romain et ses goûts cinématographiques étranges, et Rémi et sa naïveté réjouissante. J'embrasse également Catherine, Frédérique et tous mes cousins et cousines...

Je remercie tout ceux que j'ai involontairement oublié.

A vous tous un grand merci.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	vii
LISTE DES FIGURES	viii
RÉSUMÉ	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
PRÉLIMINAIRES DIVERS	6
1.1 Théorie des Nœuds	6
1.2 Quelques formules de Géométrie Différentielle	7
1.3 Notations et Conventions	8
CHAPITRE II	
GÉOMÉTRIE DE CONTACT ET VARIÉTÉS LEGENDRIENNES	9
2.1 Définitions Générales	10
2.1.1 Variétés de contact	10
2.1.2 Sous-variétés	13
2.2 Nœuds Legendriens	16
2.2.1 Invariants classiques	17
2.2.2 Diagrammes de nœuds legendriens	22
2.3 Dimension Trois	24
2.3.1 Tendu versus vrillé	24
2.3.2 Lutz, Eliashberg et Bennequin	25
2.3.3 Chirurgie	27
CHAPITRE III	
GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET VARIÉTÉS LAGRANGIENNES	29
3.1 Définitions Générales	29
3.2 Sous-variétés Lagrangiennes	31
3.2.1 Invariants algébriques des Lagrangiens	33
3.2.2 Déformations de lagrangiens	37
3.3 Symplectisation et Cobordismes Symplectiques	39

3.3.1	Structures de contact J -convexes	39
3.3.2	Remplissages symplectiques	41
3.3.3	Symplectisation	42
3.3.4	Cobordisme symplectique	45
CHAPITRE IV		
	COBORDISMES LAGRANGIENS	49
4.1	Définitions et Résultat Principal	49
4.1.1	Définitions fondamentales	49
4.1.2	Isotopies legendriennes et cylindres lagrangiens	51
4.2	Le Problème d’Immersion et les Invariants Classiques	55
4.2.1	Invariance du nombre de rotation	55
4.2.2	Comportement du nombre de Thurston-Bennequin	57
4.2.3	Le théorème de Gromov-Lee	60
4.3	Surfaces Lagrangiennes	63
CHAPITRE V		
	APPLICATIONS	66
5.1	La Conjecture de Thom Locale	66
5.2	Concordances Lagrangiennes et Chirurgies de Contact	71
5.3	Homologie de Contact	72
5.3.1	Cordes de Reeb	72
5.3.2	Algèbre de Chekanov	73
5.3.3	Disques formels	73
5.3.4	Courbes holomorphes	74
5.3.5	Différentielle et homomorphisme de chaîne	75
5.3.6	Homomorphismes induit par les concordances lagrangiennes	77
5.3.7	Exemple	80
	CONCLUSION	82
APPENDICE A		
	TRIVIALITÉ LOCALE DES STRUCTURES DE CONTACT ET SYMPLECTIQUES	87
A.1	Astuce de Moser	87
A.2	Cas symplectique	88
A.3	Cas contact	89

APPENDICE B	
COURBES HOLOMORPHES	91
BIBLIOGRAPHIE	103

LISTE DES TABLEAUX

5.1	Analogies entre cobordismes symplectiques et lagrangiens	82
-----	--	----

LISTE DES FIGURES

2.1	Nœud legendrien trivial	22
2.2	Mouvements de Reidemeister legendriens	23
3.1	Deux cercles lagrangiens isotopes dans \mathbb{C} , symplectiquement isotopes dans $\mathcal{N}(L_1)$ mais pas dans \mathbb{C}	38
3.2	Recollement de deux cobordismes symplectiques le long de leurs composantes isomorphes	47
4.1	Concordance (à gauche) et cobordisme lagrangiens (à droite)	50
4.2	f sur $\bar{\Sigma}$	58
4.3	γ réalisant la chirurgie lagrangienne	63
5.1	Cône au dessus d'une corde de Reeb	70
5.2	Bord des espaces de module de dimension 1 dans le cas $\mathbb{R} \times \gamma$	76
5.3	Bord des espaces de modules de dimensions 1 dans le cas d'une concordance	78
5.4	Exemple d'un tore de Clifford	83
B.1	Courbe Holomorphe	94
B.2	Edifice holomorphe de hauteur 3 représentant $A \in \pi_2(r; r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6)$	98
B.3	Exemple de Convergence	100

RÉSUMÉ

Nous proposons et commençons ici l'étude des cobordismes lagrangiens reliant deux nœuds legendriens dans la symplectisation d'une variété de contact (M, ξ) .

En étudiant l'homomorphisme naturel du groupe des contactomorphismes de (M, ξ) vers les symplectomorphismes de sa symplectisation, nous démontrons que l'existence d'un tel cobordisme ne dépend que de la classe d'isotopie des nœuds legendriens en question.

Nous étudions ensuite le comportement des invariants classiques sous la relation de cobordisme lagrangien.

A l'aide de l'inégalité de Bennequin et de ses généralisations, nous étudions les liens existants entre cette relation et la topologie des nœuds, notamment nous obtenons un critère pour calculer le 4-genre d'un nœud dans certaines situations. Nous en concluons notamment une nouvelle preuve de la conjecture locale de Thom.

Parmi les applications nous donnons le lien entre les cobordismes lagrangiens et les cobordismes symplectiques via les chirurgies legendriennes. Nous démontrons aussi l'existence d'un homomorphisme induit en homologie de contact incluant cette relation dans le tableau global de la théorie symplectique des champs.

Géométrie de contact et symplectique-Lagrangien-Legendrien

Conjecture locale de Thom-Homologie de contact

ABSTRACT

In the following we propose and initiate the study of Lagrangian cobordisms between Legendrian knots in the symplectisation of a contact manifold (M, ξ) .

Studying the natural homomorphism between the group of contactomorphisms of (M, ξ) and the group of symplectomorphisms of its symplectisation, we show that the existence of such a cobordism depends only on the isotopy classes of the Legendrian knots.

Next we study the behaviour of the classical invariants under this relation.

With the help of Bennequin's inequality and its generalisation, we study the link between this relation and the topology of knots. Among others, we obtain a way for computing the slice genus of a knot in some particular cases, which allows us to give a new proof of the local Thom conjecture.

Among applications we give the relation between lagrangian cobordisms and symplectic cobordisms via legendrian surgery. We also show the existence of a map in legendrian contact homology induced from a lagrangian cylinder, incorporating this relation into the global framework of symplectic field theory.

**Contact and symplectic geometry-Lagrangian-Legendrian
Local Thom conjecture-Contact Homology**

INTRODUCTION

Lorsque nous considérons certains systèmes (physiques, mathématiques...) il peut être parfois utile voire nécessaire de considérer l'espace des configurations comme étant plus grand que ce qu'il est réellement. Par exemple lorsque nous conduisons une voiture, nous pouvons considérer sa trajectoire comme étant une trajectoire dans le plan (en considérant la voiture comme étant un point). Cependant l'expérience du stationnement, montre qu'il existe des contraintes sur les trajectoires possibles d'un tel point. En fait, les contraintes viennent du fait que, par la position même des roues, la voiture doit être vue comme un point et un axe, et qu'elle ne peut se déplacer uniquement dans la direction prescrite par l'axe. C'est à dire que sa liberté de mouvement sur le plan est infinitésimalement de dimension 1 (et non 2). Donc si nous considérons la voiture comme étant un point et un axe (orienté), son espace de configurations est $\mathbb{R}^2 \times S^1$. La contrainte de déplacement se traduit par : *la variation infinitésimale de la trajectoire dans \mathbb{R}^2 est égale à la direction dans S^1* . En terme plus techniques on obtient que la trajectoire annule une certaine forme différentielle sur $\mathbb{R}^2 \times S^1$. La forme différentielle dans ce contexte est naturelle.

En fait $\mathbb{R}^2 \times S^1$ est un cas particulier d'un espace appelé l'espace des éléments de contact orientés. Un tel espace a toujours une forme différentielle canonique (en fait une classe conforme de telles formes si l'espace n'est pas muni d'un produit scalaire) qui détermine une distribution (canonique) d'hyperplans. De la propriété des formes définissant cette distribution et le théorème de Frobenius on déduit que cette distribution est *complètement non-intégrable*. Une distribution est *intégrable* si en chaque point il existe une sous-variété de même dimension que la distribution tangente à celle-ci. Complètement non-intégrable implique que les sous-variétés satisfaisant cette condition ont dimension au plus la moitié de celle de la distribution. Une telle distribution est appelée une structure de contact.

Donc en résumé *l'espace des éléments de contact orientés a une structure de contact canonique.*

Revenons à la trajectoire de la voiture. Nous avons que cette trajectoire (de dimension 1) doit toujours être tangente à la structure de contact (de dimension 2). Elle est donc une sous-variété tangente à la structure de dimension maximale, une telle sous-variété est appelée *sous-variété legendrienne*.

En résumé, *la trajectoire d'une voiture est legendrienne dans l'espace des éléments de contact du plan*.

Les variétés munies de structures de contact et leurs sous-variétés legendriennes apparaissent dans différents autres domaines de la physique :

- La propagation de la lumière par le principe de Huygens. L'espace étant encore une fois l'espace de éléments de contact.
- Les symétries de certaines équations différentielles, notamment celles des équations d'Hamilton (transformations de Legendre). L'espace étant cette fois-ci l'espace des jets d'une variété.
- La préquantification de certains systèmes mécaniques classiques. L'espace étant cette fois-ci un fibré en cercles au-dessus d'une variété symplectique.

Mais de manière plus surprenante dans les deux dernières décennies la géométrie de contact a eu une importance considérable en mathématiques fondamentales, plus particulièrement en topologie de basse dimension. En effet dans les années 80, Daniel Bennequin (Bennequin, 1983) a montré, avec sa célèbre inégalité, qu'il existe un lien entre la topologie des nœuds et les invariants associés à leurs représentants legendriens. Pas la suite, Yasha Eliashberg (Eliashberg, 1989) a démontré que l'étude de certaines structures de contact (dites vrillées) sur les variétés de dimension 3 est équivalente à la théorie homotopique des distributions de plans. Plus récemment Emmanuel Giroux (Giroux, 2002) a montré une correspondance entre les structures de contact et les décompositions en livre ouvert ce qui a conduit à différents résultats remarquables, entre autres :

- (i) Caractérisations des nœuds fibrés en terme des invariants d'Osváth-Szabó.
- (ii) Existence de remplissages symplectiques concaves des variétés de contact.

Dans cette thèse nous adoptons le point de vue qu'une variété de contact représente la bonne notion de bord d'une variété symplectique. En effet l'espace des formes de contact pour une structure de contact donnée admet une forme symplectique canonique (appelée la symplectisa-

tion). Ainsi le cobordisme trivial, entre une même variété de contact, admet une structure symplectique. Ceci suggère que l'étude de la catégorie dont les objets sont des variétés de contact de dimension donnée et dont les flèches sont des cobordismes avec une structure symplectique précise peut permettre d'inscrire la géométrie de contact dans une théorie des champs.

En fait, les différentes représentations de cette catégorie (où de certaines de ses sous-catégories) dans des catégories algébriques ont amené beaucoup de résultats concernant la topologie des structures de contact. Toutes ces représentations calculent, en général, certaines courbes holomorphes asymptotiques à certaines orbites associées à la structure de contact. La plus simple (mais définie seulement pour une certaine classe seulement de variétés de contact) est l'homologie de contact cylindrique. Elle a permis à Frédéric Bourgeois (Bourgeois, 2006) de détecter des sous-groupes non-triviaux du groupe fondamental de certains espaces de structures de contact. Viennent ensuite l'homologie de contact, la théorie symplectique rationnelle des champs, et la théorie symplectique des champs. Malheureusement ces deux dernières sont encore des théories conjecturelles, puisque les résultats de transversalité et de recollement sont à l'heure actuelle manquants. Ils forment cependant un des domaines actifs de la géométrie de contact et symplectique.

Dans cette thèse nous proposons et commençons l'étude d'une catégorie de cobordismes relatifs. C'est-à-dire que nous étudions certains cobordismes de sous-variétés legendriennes dans une variété de contact. Notre point de vue se concentre sur la dimension 3 et donc les sous-variétés legendriennes sont de dimension 1, appelées *nœuds legendriens*. La remarque, déjà bien connue, qui motive notre définition est que le relevé d'une sous-variété legendrienne dans la symplectisation est une sous-variété lagrangienne. Ainsi nous proposons d'étudier des cobordismes entre variétés legendriennes ayant la structure de sous-variétés lagrangiennes.

Ces définitions s'inscrivent dans la continuité des travaux de Youri Chekanov (Chekanov, 2002); Tobias Ekholm, John Etnyre et Michael Sullivan (Ekholm, Etnyre et Sullivan, 2005) qui ont démontré l'existence d'une théorie relative de l'homologie de contact, appelée homologie de contact legendrienne. Encore une fois cette théorie n'est bien définie que dans certaines variétés. Un des résultats de la thèse est qu'un cobordisme de genre 0 (une *concordance*) induit une application entre ces groupe d'homologies. Notons ici que Tamás Kálmán (Kálmán, 2005) connaît

dejà l'existence d'un tel homomorphisme (obtenu de manière combinatoire et explicite) pour une isotopie legendrienne et a obtenu de ce fait une version relative des résultats de Frédéric Bourgeois. Notons aussi que cet homomorphisme est le premier d'une série d'homomorphismes ou correspondances prévus dans le programme de la théorie symplectique des champs.

Nous donnons aussi une relation entre les concordances lagrangiennes et les cobordismes symplectiques.

Dans le domaine de la topologie des nœuds nous démontrons que le 4-genre d'un nœud est égal au genre d'une surface lagrangienne bordant celui-ci (si elle existe). Ceci nous permet de calculer le genre des nœuds algébriques.

Passons maintenant à l'organisation de la thèse.

La quantité de préliminaires nécessaires est grande mais peut facilement se séparer en trois parties. La première (chapitre 1) est un regroupement succinct des éléments que nous utilisons souvent dans la thèse qui n'ont pas de rapport direct avec les géométries de contact et symplectique, notamment une introduction aux invariants de nœuds et certaines techniques de calcul de géométrie différentielle. Nous profitons également de ce chapitre pour fixer certaines conventions de notations que nous utiliserons par la suite.

Viennent ensuite les préliminaires sur la géométrie de contact (chapitre 2). Dans ce chapitre nous nous sommes attachés à donner la saveur de la géométrie de contact de base. Certains concepts et résultats ne seront pas utilisés par la suite mais font partie, de l'avis de l'auteur, des éléments essentiels à cette théorie. Nous procédons également à une étude des sous-variétés legendriennes (et plus précisément des nœuds legendriens) qui, elle, sera essentielle par la suite.

Ensuite (chapitre 3) nous donnons les rudiments de la géométrie symplectique. Nous sommes ici un peu plus succincts et ne donnons que les éléments essentiels pour la suite du travail. Entre autres nous discutons des invariants algébriques associés aux sous-variétés lagrangiennes et décrivons en détail la catégorie des cobordismes symplectiques sus-citée.

Une fois les préliminaires terminés nous passons au noyau dur de la thèse (chapitre 4). Nous définissons ici les notions de cobordisme et concordance lagrangiens. Nous démontrons que

ces notions sont bien définies au niveau des classes d'isotopie de nœuds legendriens (i.e. les isotopies sont une congruence sur la catégorie des cobordismes lagrangiens). Nous étudions et caractérisons le comportement des invariants classiques sous ces relations. Et nous étudions le problème relié aux immersions lagrangiennes. Finalement nous étudions également les surfaces lagrangiennes dans les remplissages symplectiques et faisant le lien avec le 4-genre des nœuds.

Le chapitre 5 présente diverses applications de ces relations. La première concerne les nœuds algébriques et donne une nouvelle preuve de la conjecture de Thom locale. La seconde fait le lien entre les concordances et les cobordismes symplectiques via les chirurgies legendriennes. Enfin nous montrons l'existence d'un homomorphisme en homologie de contact legendrienne.

Nous terminons par deux appendices. Le premier concernant le calcul de Moser et ses applications. Et le second est un aperçu rapide de la théorie de courbes holomorphes, nécessaires au chapitre 5.

Chaque début de chapitre contient un plan détaillé de ce qui est fait à l'intérieur, lorsque nous ne donnons pas de preuve des résultats énoncés, nous renvoyons directement à la référence où cette preuve est faite. Nous avons toutefois essayé le plus possible de donner les preuves lorsque celles-ci permettent de développer une intuition sur les arguments originaux présentés dans cette thèse.

Chapitre I

PRÉLIMINAIRES DIVERS

1.1 Théorie des Nœuds

Nous donnons ici les quelques définitions et faits que nous utilisons dans la thèse concernant la théorie des nœuds classiques.

Tout d'abord une *surface de Seifert* pour un nœud $K \subset Y$ dans une 3-variété orientée est une surface compacte connexe et orientée $\Sigma \hookrightarrow Y$ telle que $\partial\Sigma = K$. Cette surface est toujours munie de l'orientation telle que (TK, n) (où n est normal à $\partial\Sigma$ pointant à l'extérieur) soit une base positive de $T\Sigma$. Par dualité d'Alexander, il existe toujours une surface de Seifert pour un nœud nul-homologue (voir (Rolfsen, 1990)). Nous pouvons donc donner la définition du genre d'un nœud :

Définition 1.1 Soit $K \subset Y$ un nœud nul-homologue.

(i) On appelle le *genre de Seifert* de K la quantité :

$$g(K) = \min\{g(\Sigma) \mid \Sigma \text{ surface de Seifert de } K\}$$

(ii) On peut se restreindre aux surfaces de Seifert dans une certaine classe d'homologie relative $A \in H_2(Y, K)$ auquel cas on le note $g(K, A)$.

Maintenant si K est dans S^3 nous pouvons définir son *4-genre* qui est le genre minimal d'une surface compacte connexe et orientable plongée dans D^4 dont le bord est K . On le note $g_s(K)$. Et de manière similaire nous pouvons définir $g_X(K)$ et $g_X(K, A)$, pour X une quatre variété

dont le bord est Y et K nul-homologue dans X (pas forcément dans Y). Evidemment si $i : Y \hookrightarrow X$ on a l'inégalité évidente :

$$g_X(K, i_*(A)) \leq g(K, A).$$

En général cette inégalité est stricte. En fait pour toute variété Y et nœud K il existe toujours un remplissage X tel que $g_X(K) = 0$ (il suffit d'éclater les points doubles d'un disque immergé).

Une *concordance* entre deux nœud K_0 et K_1 est un cylindre $C \subset Y \times [0, 1]$ tel que $\partial C = K_1 - K_0$.

Evidemment pour X remplissage de Y tel que $[K_1] = 0 \in H_1(X)$, C une concordance de K_1 vers K_2 et A une classe d'homologie dans $H_2(X, K_1)$, on a $g_X(K_1, A) = g_X(K_2, A + [C])$.

1.2 Quelques formules de Géométrie Différentielle

Dans toute la thèse nous utilisons le formalisme de Cartan de calcul de formes différentielles. Notamment sa caractérisation des dérivées extérieures de formes, donnée par la formule suivante :

si Ω est une forme différentielle de degré k . Sa dérivée extérieure évaluée sur $k + 1$ champs de vecteurs $V_1 \cdots V_{k+1}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} d\Omega(V_1, \dots, V_{k+1}) &= \sum_{i=1}^k (-1)^i V_i(\Omega(V_1, \dots, \widehat{V}_i, \dots, V_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Omega([V_i, V_j], V_1, \dots, \widehat{V}_i, \dots, \widehat{V}_j, \dots, V_{k+1}) \end{aligned}$$

En particulier pour une 1-forme α on obtient $d\alpha(V, W) = V(\alpha(W)) - W(\alpha(V)) - \alpha([V, W])$.

Nous utilisons abondamment la formule de Cartan qui caractérise les dérivés de Lie de formes différentielles :

$$\mathcal{L}_X \Omega = d(X \lrcorner \Omega) + X \lrcorner (d\Omega).$$

Notons que pour une forme fermée elle devient : $\mathcal{L}_X \Omega = d(X \lrcorner \Omega)$.

Dans la thèse nous étudions des structures de contact qui sont des distributions d'hyperplans sur une variété lisse. Considérons le fibré grassmannien $G^{n-1}(M)$, dont la fibre au dessus d'un

point p est l'ensemble des sous-espaces de codimension 1 de T_pM . Une distribution d'hyperplans est une section lisse de ce fibré (qui existe si et seulement si la classe d'Euler de TM est nulle). $G^{n-1}(M)$ est canoniquement isomorphe à $(T^*M \setminus M_0)/\mathbb{R}^*$. La distribution est co-orientable si son complémentaire est orientable (donc trivial car de dimension 1). Les distributions co-orientées sont en bijection avec les sections de $\tilde{G}^{n-1}(M) \simeq (T^*M \setminus M_0)/\mathbb{R}_+^*$. Le théorème de Frobenius dit qu'une distribution est intégrable si pour tout deux champs de vecteurs V, W dans la distribution, leur crochet $[V, W]$ reste dans la distribution. Par la formule de dérivation de Cartan c'est équivalent à dire que, pour toute forme locale α dont l'annulateur est la distribution, $d\alpha$ s'annule sur celle-ci où encore $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$.

1.3 Notations et Conventions

Nous fixons ici les notations qui auront cours la plupart du temps dans la thèse. Elles prédominent sauf mention exceptionnelle du contraire.

Tout d'abord α désignera toujours une 1-forme différentielle (locale ou non) et ω une 2-forme. Une distribution est généralement notée par ξ ou η .

Les lettres V, W sont généralement réservées pour des champs de vecteurs (lisses) sur une variété.

La lettre M désigne généralement une variété de dimension quelconque. Alors que Y est réservé pour une 3-variété et X pour une 4-variété.

Les sections lisses d'un fibré E sont notées $\Gamma(E)$.

La notation $\langle \dots \rangle_{\mathbb{K}}$ où \dots représente une famille de vecteurs désigne le sous-espace vectoriel sur \mathbb{K} engendré par \dots . Si \mathbb{K} n'est pas précisé alors il est égal à \mathbb{R} .

Le paramètre t dénote généralement la paramétrisation naturelle de \mathbb{R} .

Alors que s paramètre parfois $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ou parfois $[0, 1]$. Il varie cependant toujours entre 0 et 1.

Pour simplifier certains calculs nous considérons parfois le cercle comme \mathbb{R}/\mathbb{Z} et parfois comme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. La deuxième présentation étant paramétrée par θ .

Chapitre II

GÉOMÉTRIE DE CONTACT ET VARIÉTÉS LEGENDRIENNES

Dans ce chapitre nous donnons les bases de la géométrie de contact. Nous essayons de balayer rapidement les différents résultats qui forment les fondements du rôle de la géométrie de contact en la topologie de basse dimension.

Nous commençons tout d'abord (section 2.1) par donner les idées de base de la géométrie de contact ainsi que son lien avec les systèmes dynamiques. La référence principale pour cette partie est l'article de H. Geiges (Geiges, 2006) qui couvre une grande partie de la géométrie de contact. Ensuite (section 2.2) nous procédons à l'étude systématique des nœuds legendriens, la section sur les diagrammes planaires emprunte beaucoup à (Etnyre, 2005), la discussion sur le nombre de Thurston-Bennequin contient une nouvelle caractérisation en terme de la construction de Thom-Pontrjagin. Nous terminons ensuite (section 2.3) en donnant un aperçu de la géométrie et topologie de contact élémentaire en dimension trois et décrivons notamment la construction de chirurgie legendrienne, encore une fois tous les détails apparaissent dans (Geiges, 2006). Nous nous efforçons de donner des références pour les résultats simplement mentionnés ; si elles n'apparaissent pas c'est que la preuve est présente dans une des références sus-citées.

2.1 Définitions Générales

2.1.1 Variétés de contact

Définition 2.1 Soient M^{2n+1} une variété différentiable et ξ une distribution d'hyperplans sur M . On dit que ξ est une *structure de contact* si pour toute forme locale α telle que $\ker \alpha = \xi$, on a $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$. La paire (M, ξ) est alors appelée une *variété de contact*.

Par opposition au théorème de Frobenius, on obtient qu'une structure de contact est une distribution complètement non intégrable maximale.

Remarque 2.2 La forme α intervenant dans la définition n'est ni unique ni définie globalement; cependant nous utiliserons par la suite uniquement des distributions transversalement orientables, auquel cas la forme sera définie globalement et α sera appelée une *forme de contact*. Notons que cette condition implique que M est orientable.

Remarque 2.3 Sous les conditions de la remarque précédente et avec l'hypothèse supplémentaire que n soit impair on obtient que le signe de $\alpha \wedge (d\alpha)^n$, par rapport à une orientation donnée, ne dépend pas du choix de α . Nous dirons que la structure de contact est *positive (resp. négative)* si ce signe est $+$ (resp. $-$)

Définition 2.4 Soient (M, ξ) et (N, η) deux variétés de contact; elles sont *contactomorphes* (écrit $(M, \xi) \simeq (N, \eta)$) s'il existe un difféomorphisme $f : M \rightarrow N$ tel que $\eta = f_*\xi$

Définition 2.5 Deux structures de contact ξ et ξ' sont *isotopes* s'il existe une famille lisse ξ_t de structures de contact tel que $\xi_0 = \xi$ et $\xi_1 = \xi'$

Remarque 2.6 Un théorème de Gray (Gray, 1959) (voir appendice A) donne que les isotopies de contact sur les variétés fermées peuvent être réalisées sous forme d'isotopies ambiantes; plus précisément il existe une famille lisse f_t de difféomorphismes tels que $(f_t)_*\xi = \xi_t$; ainsi nous considérerons sans aucune distinction une isotopie comme étant soit une déformation de la distribution, soit une déformation de l'espace ambiant.

Deux structures de contact seront dites équivalentes ($\xi \sim \eta$) si elles sont isotopes.

Définition 2.7 Un difféomorphisme $f : M \rightarrow M$ est un *contactomorphisme* si $f_*\xi = \xi$.

On notera l'ensemble des contactomorphismes de (M, ξ) par $\text{Diff}_\xi(M)$. Son algèbre de Lie formelle sera notée $\text{ham}_\xi(M)$. Elle est formée des champs de vecteurs X tel que $\mathcal{L}_X\alpha = f \cdot \alpha$

Donnons une série d'exemples "canoniques" ou classiques de structures de contact :

Exemple.

$$1 : M = \mathbb{R}^{2n+1}, \xi_0 = \ker \alpha \text{ où } \alpha = dt - \sum_{i=1}^n y_i dx_i.$$

$$2 : M = S^{2n+1}, V \in \xi \text{ si } V \perp \frac{\partial}{\partial \theta} \text{ où } \theta \text{ est l'action de } S^1 \text{ sur } S^{2n+1}.$$

$$3 : M = \mathbb{R}^3, \xi = \ker \alpha \text{ où } \alpha = dz - \cos r d\theta.$$

Remarque 2.8 Les deux premiers exemples sont appelés structure standard sur \mathbb{R}^{2n+1} et S^{2N+1} respectivement. Un théorème de Darboux (Darboux, 1909) (voir appendice A) affirme que les structures de contact n'ont pas d'invariants locaux, i.e.

$$\forall p \in (M, \xi) \exists p \in \mathcal{U} - \text{ouvert t.q. } (\mathcal{U}, \xi|_{\mathcal{U}}) \simeq (\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_0),$$

ainsi le problème de déterminer si deux structures de contact sont les mêmes ou non vient de propriétés globales de la distribution.

A partir de maintenant M est considérée comme étant orientée et la structure de contact co-orientée.

Définition 2.9 Soit α une forme de contact associée à (M, ξ) . Le *champ de Reeb* R_α associé à α est le champ de vecteurs vérifiant :

$$\begin{aligned} \alpha(R_\alpha) &= 1 \\ R_\alpha \lrcorner d\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Commençons par démontrer qu'un tel champ de vecteurs existe et est unique.

La définition de α implique que $d\alpha$ est non-dégénérée sur la distribution de contact, ainsi l'application :

$$\begin{aligned} \iota : \Gamma(TM) &\rightarrow \Omega^1(M) \\ X &\mapsto X\iota d\alpha \end{aligned}$$

est telle que $\dim(\ker \iota) = 1$. De plus, $\forall X \in \ker \iota$ t.q. $X \neq 0, \alpha(X) \neq 0$ et donc R_α est l'unique champ de vecteurs dans $\ker \iota$ tel que $\alpha(X) = 1$.

Soit ψ_t le flot du champ de Reeb, montrons que les ψ_t sont des contactomorphismes :

$$\mathcal{L}_{R_\alpha}\alpha(X) = R_\alpha(\alpha(X)) - \alpha(\mathcal{L}_{R_\alpha}(X)) = d\alpha(R_\alpha, X) + X(\alpha(R_\alpha)) = 0,$$

donc $\psi_t^*(\alpha) = \alpha$ et ψ_t est bien un contactomorphisme.

Remarque 2.10 On a en fait que $\psi_t^*(\alpha) = \alpha$ ce qui est beaucoup plus fort que $\psi_t^*(\alpha) = f\alpha$. Selon Gray (Gray, 1959) ces transformations sont appelées des contactomorphismes stricts.

De la même manière que pour les variétés symplectiques, il existe un homomorphisme d'algèbre de Lie entre les fonctions à valeurs réelles sur M et les contactomorphismes infinitésimaux. Nous en donnons ici la construction.

Soit $H : M \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^1 . Les propriétés suivantes définissent uniquement un champ de vecteurs non autonome X_s sur M (ici s représente le paramètre de $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) :

$$\begin{aligned} \alpha(X_s) &= H(\cdot, s) \\ dH_s &= dH_s(R_\alpha)\alpha - X_s\iota d\alpha \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le champ de vecteurs est défini uniquement car la première partie détermine sa composante le long de R_α et la seconde sa composante dans l'hyperplan de contact (car $d\alpha$ est non-dégénérée sur celui-ci). Le champ de vecteurs ainsi défini est un contactomorphisme infinitésimal. C'est une application immédiate de la formule de Cartan :

$$\mathcal{L}_{X_t}\alpha = X_t\iota d\alpha + d(X_t\alpha) = dH_t(R_\alpha)\alpha - dH_t + dH_t = dH_t(R_\alpha)\alpha.$$

Réciproquement, toute transformation infinitésimale de la structure de contact provient d'une telle fonction H , définie par $H(\cdot, t) = \alpha(X_t)$. En effet la deuxième condition de l'équation (2.2) est uniquement déterminée par le fait que le champ de vecteurs défini doit être de contact.

Cette correspondance permet de munir l'algèbre des fonctions sur M d'un crochet appelé *crochet de Lagrange* via la correspondance : $X_{\{H_1, H_2\}} = [X_{H_1}, X_{H_2}]$. Par analogie avec la géométrie symplectique, de telles fonctions sont appelées *Hamiltoniens de contact*. Remarquons cependant que dans ce cas la correspondance est bi-univoque et donc en particulier surjective. On vérifie également aisément que : $\{H_1, H_2\} = X_{H_1}(H_2) - R_\alpha(H_1)H_2$.

Evidemment toutes ces définitions ont un caractère moins canonique que leurs équivalentes symplectiques puisqu'elles dépendent du choix d'une forme de contact. Elles sont cependant utiles pour démontrer les propriétés de trivialité locale des invariants de la géométrie de contact (voir appendice A).

Maintenant pour simplifier certains calculs il est utile de remarquer qu'une variété de contact admet une famille de métriques compatibles. En effet ξ est un fibré symplectique avec la forme $d\alpha$, il existe donc une famille contractile de structures presque-complexes sur ξ . Être compatible implique que le tenseur $d\alpha(\cdot, J\cdot)$ définit une métrique J -invariante sur ξ . Définissons la métrique g_α sur $TM = \xi \oplus \langle R_\alpha \rangle$ par $d\alpha(\cdot, J\cdot) \oplus \alpha$ en considérant la décomposition comme étant orthogonale. La métrique ne dépend pas seulement de α mais également de J que nous avons enlevé de la notation pour l'alléger. Ainsi le groupe structurel de TM est réduit à $U(n) \times Id$.

2.1.2 Sous-variétés

L'étude des sous-variétés plongées dans une variété de contact et comment celles-ci interagissent avec la structure de contact est une des manières les plus efficaces pour différencier les variétés de contact (de la même manière que pour les variétés symplectiques). Nous donnons ici quelques définitions de ces différentes sous-variétés.

Définition 2.11 Soit L une variété de dimension n et $\gamma : L \hookrightarrow (M, \xi)$. On dira que L est une

sous-variété *legendrienne* si

$$\gamma_*(TL) \subset \xi \quad (2.3)$$

(en d'autres termes $\gamma^*(\alpha) = 0$ pour toute forme de contact).

Remarque 2.12 La définition de la distribution de contact implique que les sous-variétés legendriennes sont les sous-variétés satisfaisant 2.3 de dimension maximale. Les autres satisfaisant la même condition sont appelées *isotropes*.

Définition 2.13 Soit $\gamma^-, \gamma^+ : L \hookrightarrow M$ deux sous-variétés legendriennes. On dira qu'elles sont *isotopes* ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) s'il existe $H : L \times [0, 1] \rightarrow M$ lisse telle que :

$$(i) H(\cdot, 0) = \gamma^-$$

$$(ii) H(\cdot, 1) = \gamma^+$$

$$(iii) \forall t H(\cdot, t) : L \hookrightarrow M \text{ sous-variété legendrienne.}$$

Remarque 2.14 Un raffinement de l'argument de Gray cité précédemment, dû à Eliashberg, prouve que deux variétés legendriennes compactes sont isotopes si et seulement si $\exists \{f_t\}$ – contactomorphismes t.q. $f_0 = Id$ et $f_1 \circ \gamma_0 = \gamma_1$ (voir appendice A).

Surprenamment, les sous-variétés legendriennes existent en abondance dans les variétés de contact, i.e. $\forall f : L \hookrightarrow M, \exists f' : L \hookrightarrow M$ legendrienne aussi proche (au sens uniforme) de f que l'on veut (voir (Etnyre, 2005)). Dans la section 2.2 nous ferons une étude plus systématique des variétés legendriennes en dimension 3.

Soit $\Sigma \hookrightarrow M$ une hypersurface. Par le théorème de Frobenius la structure de contact est presque partout (au sens de la mesure) transverse au fibré tangent de Σ ainsi, si $\Gamma = \{p | T_p \Sigma = \xi_p\}$, il existe un fibré de rang 1 sur $\Sigma \setminus \Gamma$, défini par $(\xi \cap T\Sigma)^\perp$ (où l'orthogonal peut être pris avec une métrique quelconque). Ce fibré en droites induit un feuilletage singulier de Σ appelé le *feuilletage caractéristique*. Il est clair que deux structures de contact isotopes induisent des feuilletages caractéristiques équivalents ; ce qui est plus surprenant est que le type différentiable du feuilletage caractéristique sur une hypersurface compacte détermine la structure de contact (à isotopie près) au voisinage de Σ (le résultat est dû à E. Giroux (Giroux, 1991)).

Théorème 2.15 Soient Σ et Σ' deux sous-variétés de (M, ξ) telles que leurs feuilletages caractéristique soient difféomorphes. Alors il existe des voisinages tubulaires \mathcal{N} et \mathcal{N}' de Σ et Σ' respectivement telles que $(\mathcal{N}, \xi|_{\mathcal{N}})$ soit contactomorphe à $(\mathcal{N}', \xi_{\mathcal{N}'})$.

Démonstration

Soient ξ et ξ' deux structures de contact induisant des feuilletages difféomorphes.

Soit $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ un difféomorphisme envoyant Σ_ξ sur $\Sigma_{\xi'}$. Étendons ϕ à un difféomorphisme de $\mathcal{N}(\Sigma)$. Soient α et α' des formes de contact pour ξ et ξ' respectivement telles que α et $\alpha'' = \phi^* \alpha'$ induisent la même 1-forme sur Σ . Sur $\Sigma \times (-\epsilon, \epsilon)$, α et α' s'écrivent respectivement $\beta_t + u_t dt$ et $\beta'_t + u'_t dt$. La condition de contact s'écrit :

$$u'_t d\beta'_t + \beta'_t \wedge (du'_t - \frac{\partial \beta'_t}{\partial t}) \neq 0$$

Maintenant la famille de formes $\alpha_s = s\alpha + (1-s)\alpha'$ reste non-nulle proche de $\Sigma \times 0$ (car $\beta_0 = \beta'_0$) et donc définit une famille de structures de contact sur un voisinage de Σ reliant ξ à ξ' , un argument de type Moser termine la preuve (voir appendice A). ■

Espace de jets d'une variété :

Considérons maintenant l'espace des 1-jets de fonctions sur M . C'est le fibré vectoriel dont les sections locales sont engendrées par $s(x) = (df_x, f(x))$ où f est une fonction à valeurs réelles. L'espace de jets $\mathcal{J}^1(M)$ est donc identifié avec $T^*M \oplus \mathbb{R}_M$.

Une section de ce fibré est donc de la forme $s = (\lambda, f)$ et elle est dite *holonome* si $\lambda = df$. Les sections holonomes (modulo l'action évidente de \mathbb{R}) sont donc en bijection avec les formes exactes sur M .

Soit λ la forme canonique sur T^*M ($\lambda_\beta(X) = \pi^* \beta(X)$ voir la section 3.2). Considérons la forme $\alpha = dt - \lambda$, une section est holonome si $s^* \alpha = 0$. De plus α est une forme de contact sur $\mathcal{J}^1(M)$. Donc les sections holonomes sont exactement les sections legendriennes de la structure de contact induite. En particulier la section nulle est une sous-variété legendrienne de $\mathcal{J}^1(M)$.

En fait plus généralement si $j : L \rightarrow T^*M$ est une immersion lagrangienne exacte ($j^*(\lambda) = df$) alors $j_1 : L \rightarrow \mathcal{J}^1(M)$ définie par $j_1(p) = (j(p), f(p))$ est une immersion legendrienne. Si

sur les lacets basés sur les points doubles de l'immersion d'origine l'intégrale de la forme de Liouville n'est pas nulle, alors cette immersion est un plongement (voir 3.2 pour les définitions).

L'espace de jets d'une variété N est le modèle local d'une sous-variété legendrienne par le théorème suivant :

Théorème 2.16 *Soit $N \subset (M, \xi)$ une sous-variété legendrienne alors il existe \mathcal{U} un voisinage de N dans M et \mathcal{V} un voisinage de la section nulle de $\mathcal{J}^1(N)$ tels que $(\mathcal{U}, \xi|_{\mathcal{U}})$ et $(\mathcal{V}, \xi_0|_{\mathcal{V}})$ soient contactomorphes par un contactomorphisme φ satisfaisant $\varphi(N) = N_0$ où N_0 est la section nulle de $\mathcal{J}^1(N)$.*

2.2 Nœuds Legendriens

Dans cette section nous développons la théorie des nœuds legendriens qui nous sera nécessaire par la suite. Par un nœud legendrien nous sous-entendons aussi bien l'application $\gamma : S^1 \hookrightarrow (Y, \xi)$ que l'image $K = \gamma(S^1)$. Nous rappelons que la condition d'être legendrien s'exprime par $\gamma^*(\alpha) = 0$ ou bien $TK \subset \xi$. Rappelons aussi que le théorème 2.16 implique que la structure locale d'un nœud legendrien est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 2.17 *Soit K un nœud legendrien alors il existe un voisinage tubulaire $\mathcal{N}(K)$ de K contactomorphe à $S^1 \times D_\epsilon^2 = \{(s, y, z) | s \in S^1, y^2 + z^2 < \epsilon\}$ avec forme de contact $\alpha_0 = dz - yds$.*

Il existe aussi d'autres coordonnées locales qui peuvent être utiles en dimension 3.

Corollaire 2.18 *Soit K un nœud legendrien alors il existe un voisinage tubulaire $\mathcal{N}(K)$ contactomorphe à $S^1 \times D_\epsilon^2 = \{(s, y, z) | s \in S^1, y^2 + z^2 < \epsilon\}$ avec pour forme de contact $\alpha_0 = \sin(2\pi s)dy - \cos(2\pi s)dz$*

Ces deux systèmes de coordonnées sont reliés par une transformation de Dehn.

Les coordonnées du théorème 2.17 seront appelées les coordonnées de jets de K et celle du théorème 2.18 les coordonnées legendriennes de K .

2.2.1 Invariants classiques

De manière analogue aux invariants classiques des structures de contact (classe de Chern de $(\xi, d\alpha)$ et classe d'homotopie de ξ dans $G^2(TM)$) nous pouvons définir des invariants algébriques associés à un nœud legendrien.

Classe d'isotopie :

Une isotopie legendrienne étant *a fortiori* une isotopie lisse, la classe d'isotopie lisse du nœud est un invariant legendrien. Tous les invariants de nœuds classiques sont donc des invariants de nœuds legendriens. Il est évident cependant que ces invariants ne reflètent en rien les propriétés propres à la géométrie de contact de ces nœuds. Pour un nœud K nous dénotons son type d'isotopie lisse par $\mathcal{L}(K)$.

Thurston-Bennequin :

Le second invariant associé à un nœud legendrien est le Thurston-Bennequin, il est l'analogue relatif de la classe d'homotopie de ξ dans les champs de plans. L'étude du Thurston-Bennequin est le premier outil qui a permis de différencier des structures de contact dans \mathbb{R}^3 .

La structure de contact étant supposée co-orientée, un nœud legendrien vient avec une classe d'homotopie de trivialisations de son fibré normal canonique (un *repère*). Le repère canonique est donné par $tb_K = (J(TK), R_\alpha)$ pour J compatible avec $d\alpha$ sur ξ . Le choix de deux formes différentes donne une homotopie entre les deux champs de Reeb le long de K , et le choix de deux structures compatibles donne une homotopie entre les deux champs de vecteurs dans ξ (l'espace des structures compatibles étant contractile).

Une isotopie legendrienne donne un isomorphisme canonique entre les fibrés normaux et comme à chaque instant de l'isotopie nous avons un nœud legendrien nous obtenons une homotopie entre les deux trivialisations. Ainsi le Thurston-Bennequin est effectivement invariant sous isotopie legendrienne.

Remarquons que classiquement nous considérons le Thurston-Bennequin comme donnant une trivialisations du fibré structurel GL_3^+ mais qu'il peut être parfois utile de la considérer comme une trivialisations du type $U(n) \times \{1\}$ avec la métrique g_α .

Le Thurston-Bennequin admet plusieurs interprétations qui nous seront utiles par la suite. Nous allons donc les décrire ici.

Tout d'abord rappelons que la construction de Thom-Pontryagin associe à une classe de cobordisme de sous-variétés munies d'un repère de codimension 2 une classe d'homotopie d'applications de Y dans S^2 . Nous dénoterons l'ensemble des classes d'homotopie libre d'applications de Y dans S^2 par $[Y, S^2]$. Maintenant, si K est orienté, considérons l'application degré $d : [Y, S^2] \rightarrow H_1(Y; \mathbb{Z})/\text{Tor}(H_1(Y; \mathbb{Z}))$. La pré-image d'un élément $\beta \in H_1(Y; \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\text{div}(\beta)\mathbb{Z}$ où $\text{div}(\beta)$ est la divisibilité de β . Ainsi nous pouvons associer au Thurston-Bennequin un couple $(d(K), n)$.

On pourrait avoir tendance à penser que ces identifications ne sont pas canoniques (pour $d = 0$ elle semble dépendre du choix d'une surface de Seifert), mais en fait, bien que la construction de l'isomorphisme dépende de ces choix, l'isomorphisme lui-même n'en dépend pas (comme dans la preuve du théorème 2.19). Remarquons par ailleurs que si K est nul-homologue alors la divisibilité de $d(K)$ est 0 et donc $n \in \mathbb{Z}$.

Pour un nœud nul-homologue il existe également une autre manière d'associer un entier au Thurston-Bennequin. En effet le nœud étant nul-homologue il admet un repère donné par le choix d'une surface de Seifert Σ . Considérons le repère le long de K donné par (t, n) où t est un tangent unitaire à Σ orthogonal à K pointant à l'extérieur de Σ (de sorte que (TK, t) soit une base orientée de $T\Sigma$) et n est une normale orientée à Σ . Maintenant le repère tb_K vu dans la base (t, n) donne un élément de $SO(2)$. Ainsi la surface de Seifert permet d'associer à tb une classe d'homotopie d'applications $l : S^1 \rightarrow SO(2)$. Or $\pi_1(SO(2), Id) \simeq \mathbb{Z}$ canoniquement donc nous pouvons associer $tb(K) = [l] \in \mathbb{Z}$. Notons tout d'abord que ce nombre ne dépend pas du choix de la surface de Seifert¹. En effet le nombre $tb(K)$ est égal à l'intersection de $K + \epsilon R_\alpha$ avec Σ (i.e. $tb(K) = lk(K, K + R_\alpha)$) et en choisissant une autre surface de Seifert Σ' la différence entre les deux nombres définis est l'intersection $K + R_\alpha$ avec $S = \Sigma \cup \Sigma'$ qui est égale à 0 car S est fermée et K est nul-homologue.

Notons également que ce nombre ne dépend pas non plus du choix de l'orientation de K . En

¹En remerciant M. Hedden pour cette remarque

effet choisir l'orientation opposée force à changer l'orientation de Σ et donc les changements de signes s'annulent.

Nous pouvons également généraliser cette construction à des nœuds non nul-homologues. En effet choisissons $K_1 \cdots K_j$ des cercles représentant un ensemble générateur de $H_1(M; \mathbb{Z})$. Nous supposons en fait ici que $K_1 \cdots K_{j'}$ forment une base de la partie sans torsion. Et que les autres sont des éléments de torsion. Pour K un nœud legendrien choisissons S une surface orientée dont le bord est $K - \bigcup_{i \in I} K_i$ (plus précisément nous considérons des copies parallèles des K_i de manière à obtenir une surface plongée). Nous pouvons associer à tb un nombre comme étant le nombre d'intersection entre $K + \epsilon R_\alpha$ et S . Nous devons maintenant vérifier comment ce nombre dépend des différents choix que nous avons faits.

(i) Si nous avons choisi un cobordisme différent S' alors la différence entre les deux nombres est l'intersection entre $K + \epsilon R_\alpha$ et $S \cup S'$ qui est une surface fermée. Mais cette fois ci le nœud n'étant pas nul-homologue, ce nombre n'est pas zéro. En fait l'ambiguïté est modulo le nombre engendrant l'image de l'application $\cdot [K] : H_2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(M; \mathbb{Z})$. Ce nombre correspond à deux fois la divisibilité de $[K]$ dans $H_1(M; \mathbb{Z})/Tor(H_1(M; \mathbb{Z}))$ par dualité de Poincaré. Ainsi pour l'instant le nombre $tb(K)$ ne dépend pas du cobordisme modulo $2\text{div}(d([K]))$.

(ii) En choisissant un autre ensemble de générateurs nous pouvons construire un cobordisme entre les deux ensembles. L'ambiguïté est donc la même que en (i).

(iii) Pour la même raison que précédemment le nombre $tb(K)$ ne dépend pas du choix de l'orientation de K .

Ainsi de manière complètement générale nous pouvons associer à un nœud legendrien un couple : $tb(K) = (d(K), n(K)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\text{div}(d(K))\mathbb{Z}$.

Maintenant répondons à la question qu'il est naturel de se poser :

Théorème 2.19 *Les nombres $tb(K)$ et (d, n) donnés respectivement par la construction précédente et la construction de Thom-Pontryagin sont tels que $n(K) = n$. En particulier quand K est nul-homologue $tb(K) = n$.*

Démonstration Considérons la surface S plongée dans M telle que son bord soit K moins des

copies parallèles des K_i . Donnons un trivialisations τ_i de chaque K_i apparaissant dans le bord de S par la même procédure que précédemment. Considérons maintenant \tilde{S} une surface plongée dans $[0, 1] \times M$ telle que $p(\tilde{S}) = S$, $\partial\tilde{S} \cap \{1\} \times M = K$ et $\partial\tilde{S} \cap \{0\} \times M = -\bigcup K_i$.

Considérons s une extension des sections $R_\alpha|_K, \tau_i$ à tout $\mathcal{N}(\tilde{S})$ de sorte que $\tilde{S} + \epsilon s$ intersecte transversalement \tilde{S} .

Alors $n = \tilde{S} + \epsilon_s \cap \tilde{S}$ et $n(K) = K + [0, 1] \times R_\alpha \cap \tilde{S}$. En notant $\Sigma = \tilde{S} \cup -\tilde{S} \subset [0, 2] \times M$ et $\Sigma' = [0, 1] \times (K + \epsilon R_\alpha) \cup \tilde{S} + \epsilon s$ on obtient que $n(K) - n = \Sigma \cap \Sigma'$. Or par construction cette intersection est zéro car $\Sigma \sim [0, 2] \times K$. Ainsi $n(K) = n$. ■

Nombre de rotation :

Le troisième invariant classique associé à K est le nombre de rotation. Il dépend cette fois-ci d'une orientation de K ainsi que du choix d'une surface de Seifert (à moins que $c_1(\xi) = 0$), et nous supposons donc que K est nul-homologue. C'est l'analogue relatif de la classe de Chern de ξ . Σ est une surface orientable ayant le type d'homotopie d'un bouquet de cercles. Ainsi tout fibré orienté sur Σ est trivial, donc $\xi|_\Sigma$ est trivial. Soit τ un champ de vecteurs tangents à K déterminant l'orientation positive (unitaire pour la métrique g_α). Le nombre de rotation $r(K, [\Sigma])$ est défini comme étant la classe de Chern relative $c_1(\xi|_\Sigma, \tau) \in H^2(\Sigma, \partial\Sigma) \simeq \mathbb{Z}$ où la classe de Chern relative est l'obstruction primaire à étendre τ à une section non nulle de $\xi|_\Sigma$ (i.e. le nombre de zéros d'une extension générique de τ à Σ).

Encore une fois une isotopie legendrienne définit une homotopie entre les différentes sections et donc $r(K, [\Sigma])$ est invariant sous isotopie legendrienne.

La classe de Chern relative peut être vue comme la classe de Chern du fibré sur $\Sigma \bigcup_K D^2$ obtenu en recollant ξ au fibré trivial sur D^2 au moyen de la trivialisations τ .

Si on choisit une trivialisations τ' de $\xi|_\Sigma \simeq \Sigma \times \mathbb{C}$ alors τ décrit un chemin dans $S^1 \subset \mathbb{C}^*$.

La classe d'homotopie d'un tel chemin est exactement le nombre de rotation (en identifiant canoniquement $\pi_1(S^1)$ avec \mathbb{Z}). Ainsi si τ s'écrit $e^{i\theta(s)}$ alors $r(\gamma, [\Sigma]) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} d\theta$.

On pourrait être étonné que ce nombre ne dépende pas de la trivialisations choisie mais en fait deux trivialisations induisent la même sur le bord car $\pi_1(U(1), \text{Id})$ est abélien et le bord est un produit de commutateurs dans $\pi_1(\Sigma, x_0)$.

Si nous changeons l'orientation de K , le nombre de rotation change de signe. Et les nombres de rotations associés à deux surfaces de Seifert différentes Σ et Σ' sont évidemment reliés par la relation : $r(K, [\Sigma]) - r(K, [\Sigma']) = c_1(\xi|_{\Sigma \cup \Sigma'})$.

Exemple. Nous allons calculer tb et r pour le nœud legendrien trivial $\gamma(t) = (\cos t, 0, \sin t, 0)$ dans la sphère de contact standard. On suppose ce nœud orienté par sa paramétrisation. Une surface de Seifert pour ce nœud legendrien est donnée par le disque

$$D = \{(x, 0, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) | x^2 + y^2 \leq 1\} = \{r \cos \theta, 0, r \sin \theta, \sqrt{1 - r^2}\}.$$

Un petit déplacement de K dans la direction du champs de Reeb est donné par $\gamma_\epsilon = (\cos \eta \cdot \cos t, \sin \eta \cdot \cos t, \cos \eta \cdot \sin t, \sin \eta \cdot \sin t)$ pour $\cos \eta^2 + \sin \eta^2 = \epsilon^2$ et $\eta > 0$. Il intersecte D au point $(0, 0, \cos \eta, \sin \eta)$. Le signe de cette intersection est négatif car la matrice d'intersection est :

$$\begin{pmatrix} -\cos \eta & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta & 0 & \cos \eta \\ 0 & -\sin \eta & 0 & \sin \eta \end{pmatrix}.$$

Ainsi $tb(K) = -1$.

La structure de contact en un point $D_{(x,y)}$ de D est la droite complexe dans \mathbb{C}^2 engendrée par $(-y + i\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x)$ qui coïncide au bord avec $(-\sin t, \cos t)$ qui est $T_p K$. Ainsi la structure est gratuitement trivialisée le long de D est la trivialisatoin coïncide avec $T_p K$ au bord, et donc $r(K, D) = 0$.

Ces invariants sont les seuls invariants topologico-algébriques des classes d'isotopies legendriennes. D'après les travaux de Fuchs et Tabachnikov (Fuchs et Tabachnikov, 1997) tb et r sont aussi les seuls invariants de type fini (au sens de Vassiliev) propres aux nœuds legendriens. Ils classifient certains types topologiques de nœuds dans (S^3, ξ_0) appelés *simples*. Précisément un type lisse \mathcal{L} est dit *simple* si deux représentants K_1 et K_2 legendriens de \mathcal{L} sont legendrien-isotopes exactement quand $tb(K_1) = tb(K_2)$ et $r(K_1) = r(K_2)$. Par exemple le nœud trivial est simple (Eliashberg et Fraser, 1998), les nœuds toriques et figures huit également (Etnyre

et Honda, 2001). Mais en utilisant des techniques plus sophistiquées tel que l'homologie de Chekanov-Eliashberg (Chekanov, 2002) ou bien la classification des sommes connexes legendriennes (Etnyre et Honda, 2003) il existe une infinité d'exemples de types lisses de nœud non simples. De plus les exemples de ce dernier article sont indistinguables par tous les types d'invariants algébriques existant jusqu'à présent.

2.2.2 Diagrammes de nœuds legendriens

Comme pour la théorie des nœuds classiques il existe une théorie de diagrammes planaires équivalente. Nous considérons ici les nœuds dans \mathbb{R}^3 muni de la structure de contact standard $\xi_0 = \ker(dz - ydx)$. Pour cette forme de contact le champ de Reeb est $\frac{\partial}{\partial z}$. Soit K un nœud legendrien. A K nous pouvons associer deux projections : $\Pi(K)$ et $\pi(K)$ où $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2_{(x,z)}$ et $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2_{(x,y)}$. La première projection est appelée le *front d'onde* (ou front) de K et la seconde est la *projection lagrangienne*.

Front d'onde : Le front d'onde d'une variété legendrienne est ce que nous observons lorsque nous garons une voiture en créneau. En effet de l'équation $\alpha_0(TK) = 0$ on obtient que $\dot{\gamma}_3 = \gamma_2 \dot{\gamma}_1$ où $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ est une paramétrisation d'un nœud legendrien. Et donc γ_2 est uniquement déterminé par la tangente du front $\frac{\dot{\gamma}_3}{\dot{\gamma}_1}$. Ceci a deux conséquences immédiates :

- le front d'un nœud legendrien n'a pas de tangente verticale,
- le type de croisement est déterminé par la tangente.

A la place des tangentes verticales on observe des points de rebroussement comme par exemple :

Exemple. $\gamma(t) = (\cos(t), -3 \sin(t) \cos(t), \sin^3(t))$ est legendrien et son front d'onde est $(\cos(t), \sin^3(t))$ (voir figure 2.1).

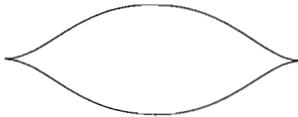


Figure 2.1 Nœud legendrien trivial

De manière réciproque un diagramme planaire (lisse) est le front d'onde d'un nœud legendrien s'il n'a pas de tangente verticale, auquel cas le nœud legendrien est déterminé par $\gamma(t) =$

$(\gamma_1(t), \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_3(t)}, \gamma_3(t))$. Evidemment en général ce relevé n'est pas un nœud, car on veut la condition additionnelle $\int_0^{2\pi} \dot{\gamma}_2(t) = 0$ qui est réalisée en rajoutant des arcs $x = \text{constante}$ et $z = \text{constante}$ à ce relevé au niveau des points de rebroussement.

Le front d'onde est particulièrement utile car il réduit le problème d'isotopie legendrienne à un problème combinatoire. Cependant ce problème est évidemment hautement non-trivial. Toutefois il permet de définir plusieurs invariants de nœuds legendriens simplement en vérifiant que l'objet défini est invariant sous les trois mouvements de Reidemeister illustrés par la figure 2.2. En effet le théorème suivant classe le problème d'isotopie legendrienne :

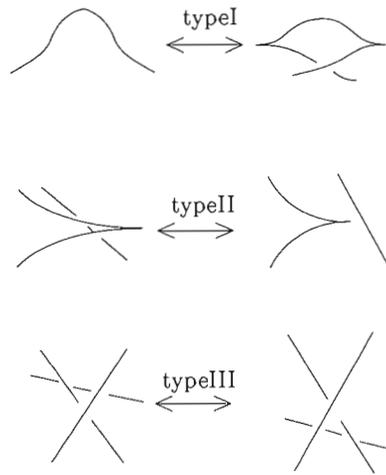


Figure 2.2 Mouvements de Reidemeister legendriens

Théorème 2.20 (*Świątkowski, 1992*) Deux fronts génériques P_1 et P_2 de nœuds legendriens représentent des nœuds isotopes s'ils diffèrent par une composition d'isotopies ambiantes et de mouvements de type RI, RII, RIII ainsi que leur rotation de 180° .

Il est également facile de calculer le nombre de Thurston-Bennequin et de rotation en termes du front d'onde. En effet le champ de Reeb étant $\frac{\partial}{\partial z}$, pour calculer $lk(K, K + \epsilon R_\alpha)$ il suffit de remarquer que ce nombre change par rapport à la torsion de la moitié du nombre de points de rebroussement. Et donc :

$$tb(K) = w(\Pi(K)) - \frac{1}{2} \# \{p.d.r. \Pi(K)\}$$

De même le nombre de rotation se calcule facilement. Si K est orienté alors le front d'onde de K est également orienté ; notons D le nombre de points de rebroussement descendants de $\Pi(K)$ et M le nombre de points de rebroussement montants. Alors $r(K) = \frac{1}{2}(D - M)$.

Projection Lagrangienne : La projection lagrangienne d'un nœud legendrien K est donnée par $\pi(K)$ où $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\langle x, y \rangle}$. Elle est nécessairement une immersion car $\frac{\partial}{\partial z}$ n'est jamais dans la distribution de contact et ne peut donc pas être tangent à K . Le fait que sur K on ait $dz = ydx$ implique que la forme ydx restreinte à $\pi(K)$ est exacte. Réciproquement si $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ est une immersion telle que $i^*(ydx) = dg$, alors l'application $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\gamma(s) = (i(s), g(s))$ est une immersion legendrienne. C'est un plongement si pour tout point double p on a :

$$\int_l ydx \neq 0,$$

où l est un des deux arcs sur S^1 reliant les deux points allant sur p .

Tamas Kálmán a étudié les propriétés de la projection lagrangienne dans (Kálmán, 2005). Le Thurston-Bennequin de K est donné par $tb(K) = w(\pi(K))$ et le nombre de rotation est donné par $r(K) = rot(\pi(K))$ où rot est le degré de l'application de Gauss.

2.3 Dimension Trois

La géométrie de contact a longtemps été développée en dimension 3, ainsi peu de résultats de classification existent en dimension supérieure. Dans cette section nous supposons donc que Y est toujours de dimension trois et orientée. On note l'ensemble des structures de contact positives par $\text{Cont}(Y)$.

2.3.1 Tendru versus vrillé

L'ensemble des structures de contact sur une même 3-variété peut être séparé en deux classes distinctes :

Définition 2.21 Une structure de contact ξ sur Y est dite *vrillée* s'il existe un disque plongé $D \hookrightarrow Y$ tel que le feuilletage caractéristique ait pour lieu singulier $\Gamma = \partial D \cup \{*\}$.

Définition 2.22 Une structure de contact est *tendue* si elle n'est pas vrillée.

Il est clair que ces définitions décomposent $\text{Cont}(Y)$ en deux ensembles disjoints, néanmoins rien ne nous dit qu'un de ces deux ensembles n'est pas vide. En fait nous ne savons pour l'instant même pas pour quelles classes de variétés $\text{Cont}(Y) \neq \emptyset$.

Une structure de contact sur une 3-variété est une distribution de plan qui "tourne" suffisamment pour l'empêcher d'être intégrée par des surfaces. Ainsi étant donnée une 3-variété il peut être "facile" de construire une structure de contact simplement en partant dans n'importe quelle direction en faisant "vriller" la structure de contact (ici nous considérons qu'il n'y a pas de problème pour bien faire cette manoeuvre de manière cohérente pour que le processus se referme bien, on peut imaginer que Y est \mathbb{R}^3 par exemple). Ce processus va généralement donner lieu à une structure de contact vrillée ; en effet l'existence d'un disque vrillé implique que la structure de contact tourne de 180° le long de ce disque. Une structure tendue peut donc être vue comme une structure de contact qui tourne le moins possible.

2.3.2 Lutz, Eliashberg et Bennequin

Les premiers résultats en direction d'une classification des structures de contact sont dus à Robert Lutz dont le résultat le plus marquant est le suivant :

Théorème 2.23 (Lutz, 1977) *Soit M une variété fermée. Alors dans chaque classe d'homotopie de distributions de plans, il existe une structure de contact positive.*

De plus, bien que la définition de vrillée n'existât pas encore, il démontre que ces structures de contact peuvent être vrillées. Ainsi, si on note l'ensemble des structures de contact positives vrillées par $\text{Cont}_{OT}(M)$, il existe une application $i : \pi_0(\text{Cont}_{OT}(M)) \rightarrow \pi_0(G^2(TM))$ qui est surjective.

Un résultat de Y. Eliashberg vient compléter le théorème précédent :

Théorème 2.24 (Eliashberg, 1989) *Deux structures de contact positives vrillées homotopes (en tant que distributions de plans) sont isotopes.*

Ainsi l'application précédente est un isomorphisme.

Remarque 2.25 En fait Eliashberg démontre que l'application d'inclusion est une équivalence d'homotopie, donc l'étude homotopique des distributions de plans se réduit à l'étude des structures de contact vrillées.

Terminons cette section en mentionnant le premier résultat qui a relié la géométrie de contact et la topologie. Il apparaît dans la thèse de Daniel Bennequin (Bennequin, 1983) et permet de relier le genre d'un nœud aux invariants classiques :

Théorème 2.26 *Soit K un nœud legendrien dans (\mathbb{R}^3, ξ_0) ou (S^3, ξ_0) et Σ une surface de Seifert pour K alors*

$$tb(K) + |r(K)| \leq -\chi(\Sigma) = 2g(\Sigma) - 1. \quad (2.4)$$

Cette inégalité est désormais connue sous le nom d'inégalité de Bennequin. Elle admet de nombreuses généralisations dont une nous sera particulièrement utile dans la section 4.3. Elle amène à deux conclusions :

- (i) Pour un nœud legendrien dans l'espace standard le Thurston-Bennequin est borné. Il existe donc un nombre que nous notons $TB(\mathcal{L}(K))$ qui est le Thurston-Bennequin maximal d'un représentant legendrien de $\mathcal{L}(K)$.
- (ii) Le genre d'un type de nœud \mathcal{L} est minoré par $\frac{tb(K) + |r(K)| + 1}{2}$, pour K un représentant legendrien de \mathcal{L} .

Entre autres choses cette inégalité permet de différencier des structures de contact sur \mathbb{R}^3 . Effectivement dans l'exemple 3 le cercle $\{(\cos \theta, \sin \theta, 0)\}$ est un nœud legendrien trivial avec $tb = 0$, ce qui contredit l'inégalité de Bennequin. Ainsi cette structure de contact n'est pas équivalente à la structure standard.

Remarque 2.27 En fait le disque $\{(x, y, 0) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ est un disque vrillé. Le même calcul montre donc qu'aucune structure vrillée ne peut satisfaire l'inégalité de Bennequin.

2.3.3 Chirurgie

A partir d'une 3-variété de contact (Y, ξ) et un nœud legendrien K dans Y il existe différentes manières de construire des nouvelles variétés de contact. Nous allons ici être intéressés à ce qui est appelé la chirurgie de legendrienne.

Nous avons vu dans la section 2.2 qu'un nœud legendrien admet un voisinage canonique appelé coordonnées de jets. La forme de contact dans ce voisinage est conformément équivalente à $\alpha_0 = dz - yds$. Nous voulons ici effectuer une chirurgie de pente -1 par rapport au repère $tb(K)$ discuté précédemment.

Faisons d'abord un changement de coordonnées sur $S^1 \times A(r_1, r_2)$ où $A(r_1, r_2)$ est l'anneau déterminé par $r_1 < r_2$. Considérons les coordonnées cylindriques $(s, y, z) = (s_1, r \cos(2\pi s_2), r \sin(2\pi s_2))$. La forme de contact devient :

$$\alpha_0 = \sin(2\pi s_2)dr + 2\pi r \cos(2\pi s_2)(ds_2 - ds_1).$$

Nous allons maintenant effectuer une chirurgie de pente -1 par rapport au repère $tb(K)$. C'est-à-dire que nous allons construire la variété

$$Y((K, tb), -1) := Y \setminus S^1 \times D_{\epsilon-\eta} \bigcup_{\varphi} S^1 \times D_{\epsilon},$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi : S^1 \times A(\epsilon - \eta, \epsilon) &\xrightarrow{\cong} S^1 \times A(\epsilon - \eta, \epsilon) \\ (s_1, r, s_2) &\rightarrow (s_2 - s_1, r, s_2) \end{aligned}$$

En effet la longitude canonique est donnée par $(s, 1, 0)$ et le méridien par $(0, 1, s)$. Nous devons maintenant vérifier que $\varphi^*(\alpha_0)$ s'étend à une forme de contact sur tout $S^1 \times D_{\epsilon}$, de sorte à avoir une structure de contact sur $Y((K, tb), -1)$. Or $\varphi^*(\alpha_0) = \sin(2\pi s_2)dr - 2\pi r \cos(2\pi s_2)(2ds_2 - ds_1)$, que nous écrivons $\alpha_0 + 2\pi r \cos(2\pi s_2)ds_2$. En coordonnées Cartésiennes elle devient :

$$\varphi^*(\alpha_0) = dz - ydx + \frac{y}{y^2 + z^2}(ydz - zdy).$$

Si g est un fonction sur $[0, \epsilon]$ valant 0 proche de 0 et $\frac{1}{t}$ proche de 1, on obtient que $\alpha = dz - ydx + yg(x^2 + y^2)(ydz - dy)$ est une forme de contact qui étend $\varphi^*(\alpha_0)$ à tout le tore solide. On obtient donc une variété de contact.

Maintenant la structure de contact définie par α sur le tore solide est tendue. La classification des structures tendues sur le tore solide dans (Honda, 2000) implique que c'est l'unique (à isotopie près) structure tendue remplissant $\varphi_*^{-1}(\xi)$. La variété de contact $(Y((K, tb), -1), \xi')$ ainsi obtenue est appelée la *chirurgie de legendrienne de Y le long de K*.

Chapitre III

GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET VARIÉTÉS LAGRANGIENNES

L'objet de cette thèse est de définir une relation de cobordisme entre variétés legendriennes en tenant compte de la structure symplectique sur la symplectisation de M , par une remarque faite en introduction la structure naturelle pour un cobordisme semble être celle de sous-variété lagrangienne. Nous rappelons dans ce chapitre quelques faits de la géométrie symplectique. Nous commençons tout d'abord (section 3.1) par rappeler les définitions et motivations de base de la géométrie symplectique. Ensuite (section 3.2) nous rappelons différents faits importants concernant les plongements lagrangiens et les différentes relations d'équivalence existantes. Enfin nous donnons (section 3.3.3) l'interaction entre la géométrie de contact et symplectique, nous définissons en définissant notamment la relation de cobordisme symplectique.

Les deux références de base sur la géométrie symplectique sont (Arnol'd, 1974) et (McDuff et Salamon, 1998)

3.1 Définitions Générales

Définition 3.1 Une variété M de dimension m est dite symplectique si elle est munie d'une 2-forme différentielle ω fermée et non-dégénérée .

Remarque 3.2 La condition ω non-dégénérée force m à être pair car une forme différentielle est antisymétrique.

L'exemple naturel de variété symplectique en mécanique classique est l'espace cotangent d'un espace de configurations muni de $\omega = d\lambda$ (voir section 3.2). En géométrie complexe les formes

symplectiques apparaissent naturellement comme les formes kählériennes associées à certaines métriques.

En un sens, une forme symplectique permet de faire une forme de géométrie énumérative. En effet l'existence d'une structure symplectique réduit le groupe structurel de TM à $Sp(n)$. De plus il existe toujours une structure presque-complexe (dite *adaptée*) sur M telle que $\omega(\cdot, J\cdot)$ soit une métrique J -invariante sur M . On note celle-ci g_ω par analogie avec le chapitre précédent. L'ensemble de telles structures (voir (Gromov, 1985)) est contractile. En particulier définir $c_1(M, \omega) := c_1(TM, J)$ n'est pas un abus. Le célèbre théorème de compacité de Gromov (Gromov, 1985) pour les courbes holomorphes associées à de telles structures presque-complexes a ouvert la voie à l'étude des invariants de Gromov-Witten qui est de la géométrie énumérative dans les variétés symplectiques.

Une forme symplectique étant non dégénérée, elle définit un isomorphisme entre l'espace tangent et l'espace cotangent. Ces isomorphismes sont appelés les *isomorphismes musicaux* :

$$\# : TM \rightarrow T^*M$$

$$\flat : T^*M \rightarrow TM$$

définis par les propriétés :

$$X^\#(Y) = \omega(X, Y)$$

$$\omega(\alpha^\flat, Y) = \alpha(Y).$$

Notons que si J est une structure presque-complexe adaptée à ω alors ces deux isomorphismes sont ceux définis par la métrique composés avec J .

Définition 3.3 Un difféomorphisme ϕ de M est un symplectomorphisme s'il préserve la structure symplectique, i.e. $\phi^*(\omega) = \omega$.

L'ensemble des difféomorphismes symplectiques est noté $\text{Diff}_\omega(M)$. Son algèbre de Lie formelle est notée $\text{symp}_\omega(M)$.

Au vu des isomorphismes musicaux et de la formule de Cartan, l'algèbre infinitésimale des transformations symplectiques est la sous-algèbre des champs de vecteurs duale de l'algèbre des 1-formes fermées. La sous-algèbre correspondant aux formes exactes donne lieu aux difféomorphismes hamiltoniens. Plus précisément on a la définition suivante :

Définition 3.4 Soit $H : M \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Le champ de vecteurs défini par $X_t = (dH_t)^\flat$ est appelé le *champ de vecteurs hamiltonien* associé à H . Tout difféomorphisme apparaissant comme le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien est appelé un *difféomorphisme hamiltonien*.

L'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens est noté $\text{Ham}_\omega(M)$ et l'algèbre des champs de vecteurs Hamiltonien est noté $\mathfrak{ham}_\omega(M)$.

Remarque 3.5 Soit X_t un champ de vecteurs hamiltonien. Le flot qu'il engendre n'est pas un groupe à un paramètre, du fait que la fonction hamiltonienne dépend du temps. L'équation $\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \phi_t^H(p) = X_{t_0}$ définit cependant des difféomorphismes symplectiques.

Un champ de vecteurs sur une variété symplectique est appelé un *champ de Liouville* si son flot exponentie ω , i.e. $\mathcal{L}_{X_t}\omega = \omega$. Remarquons que le théorème de Stokes implique qu'une forme symplectique sur une variété fermée ne peut être exacte. En effet si $\omega = d\lambda$ alors $\omega^n = d(\lambda \wedge \omega^{n-1})$ et donc ω ne peut être non-dégénérée. Si M admet un champ de Liouville alors $d(X_t\omega) = \omega$ et donc M ne peut être fermée. Réciproquement le dual d'une primitive de ω , si elle est exacte, est un champ de Liouville, en effet $\mathcal{L}_{\lambda^\flat}\omega = d(\lambda^\flat\omega) = d\lambda = \omega$.

Quand bien même les champs de Liouville n'existent pas globalement sur les variétés fermées, ils ont un intérêt capital pour faire le lien entre les géométries symplectique et de contact, car l'existence locale d'un champ de Liouville au voisinage d'une hypersurface donne un découpage de M le long d'une hypersurface de contact (voir 3.3.3).

3.2 Sous-variétés Lagrangiennes

Dans cette section nous allons discuter les propriétés de base de la topologie des sous-variétés lagrangiennes d'une variété symplectique.

Rappelons qu'une sous-variété $f : L \hookrightarrow (M^{2n}, \omega)$ est *lagrangienne* si elle est de dimension n et que $f^*\omega = 0$.

Remarquons que L est lagrangienne si et seulement si $\forall X, Y \in TL, \omega(X, Y) = 0$ et si et seulement si $g_\omega(X, JY) = 0$. Donc une sous-variété est lagrangienne si et seulement si $J(TL) = TL^\perp$ par rapport à une métrique compatible.

Discutons d'abord le modèle locale d'une telle sous-variété :

Cotangent d'une variété :

Soit M une variété lisse de dimension quelconque. Son fibré cotangent est muni d'une forme canonique appelée forme de Liouville λ définie par la propriété suivante :

$$\lambda_\alpha(X) = \pi^*(\alpha)(X),$$

où $\pi : T^*M \rightarrow M$ est la projection naturelle.

Si (q_1, q_2, \dots, q_n) est une carte de M et $p_i = dq_i$ alors en coordonnées locales $\lambda = \sum p_i dq_i$. La 2-forme $\omega_0 = d\lambda$ est évidemment fermée et non-dégénérée. C'est donc une forme symplectique sur T^*M .

La définition de λ implique que si α est une 1-forme sur M , vue comme section de T^*M ($\alpha : M \hookrightarrow T^*M$) alors $\alpha^*(\lambda) = \alpha$. Or un plongement de M dans T^*M est lagrangien si le tiré en arrière de λ est fermé. Ainsi les formes différentielles qui sont lagrangiennes sont exactement les formes fermées sur M .

En particulier la section nulle de T^*M est une sous-variété lagrangienne de T^*M . C'est le modèle standard des variétés lagrangiennes par le théorème suivant :

Théorème 3.6 (Weinstein, 1971) *Soit $L \subset (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne compacte. Alors il existe un voisinage \mathcal{U} de L dans M et un voisinage \mathcal{V} de la section nulle de T^*L ainsi qu'un symplectomorphisme $\phi : (\mathcal{U}, \omega|_{\mathcal{U}}) \simeq (\mathcal{V}, \omega_0|_{\mathcal{V}})$.*

Pour la preuve nous renvoyons à l'appendice A.

Terminons cette discussion en donnant une définition qui nous sera utile pour la suite de la section :

Définition 3.7 Une sous-variété lagrangienne L d'une variété symplectique exacte $(M, \omega = d\lambda)$ est dite exacte si $i^*\lambda = df$, c'est à dire la forme de Liouville est exacte au lieu d'être fermée.

Notons que dans le fibré cotangent d'une variété les graphes de formes différentielles qui sont lagrangiennes exactes sont précisément les formes exactes.

Remarque 3.8 La définition précédente s'applique également a des immersions lagrangiennes.

3.2.1 Invariants algébriques des Lagrangiens

Dans cette section nous allons associer à un plongement lagrangien deux homomorphismes invariants sous isotopie symplectique.

Aire symplectique :

Le plus simple à définir des deux est l'aire symplectique d'un plongement. Considérons $L \subset M$ une sous-variété lagrangienne fermée. Définissons une application $\omega_L : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante.

A une classe $[u] \in \pi_2(M, L)$ associons $\omega_L([u]) = \int_{D^2} u^*(\omega)$. En choisissant u un représentant lisse de la classe d'homotopie.

La forme ω_L est bien définie car ω est fermée et L annule ω , ainsi une homotopie entre u et u' décrit une boule $f : B^3 \rightarrow M$ que l'on peut choisir lisse par morceaux et dont le bord est formé de quatre parties : deux parties D_1 et D_2 étant des disques sur L , u et $-u'$ Donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B^3} f^*(d\omega) = \int_{D_2} (u^*(\omega) - u'^*(\omega) + D_1^*(\omega) + D_2^*(\omega)) \\ &= \int_{D^2} u^*(\omega) - \int_{D_2} u'^*(\omega). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \int_{D^2} u^*(\omega) = \int_{D^2} u'^*(\omega).$$

Remarquons que lorsque la variété symplectique est exacte l'aire symplectique n'est rien d'autre que la restriction de l'intégration de λ sur le noyau de l'homomorphisme $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ et que si le lagrangien est exact alors $\omega_L \equiv 0$.

Indice de Maslov : (voir (Viterbo, 1987))

Pour définir l'indice de Maslov nous devons d'abord étudier $\Lambda(\mathbb{C}^n)$ l'espace des n -plans lagrangien dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$. Ici \mathbb{C}^n est vu comme l'espace vectoriel symplectique standard avec la forme $\sum dx_i \wedge dy_i$ (i.e. comme $T^*\mathbb{R}^n$).

$U(n)$ agit transitivement sur $\Lambda(\mathbb{C}^n)$ via l'action naturelle. Le stabilisateur de cette action est $O(n)$ agissant diagonalement sur $\mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$. Ainsi $\Lambda(\mathbb{C}^n) \simeq U(n)/O(n)$. Maintenant, lorsque $n > 2$, la suite exacte de fibration :

$$\pi_1(O(n), Id) \rightarrow \pi(U(n), Id) \rightarrow \pi_1(\Lambda(\mathbb{C}^n), P_0) \rightarrow \pi_0(O(n), Id) \rightarrow \pi_0(U(n), Id)$$

devient :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\Lambda(\mathbb{C}^n), P_0) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

comme \mathbb{Z} n'as pas de torsion il vient :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\Lambda(\mathbb{C}^n), P_0) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Alors $\pi_1(\Lambda(\mathbb{C}^n), P_0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où à \mathbb{Z} (car $\text{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Pour déterminer dans lequel des deux cas nous sommes, considérons $\tilde{\Lambda}(\mathbb{C}^n)$ la grassmannienne des lagrangiens orientés. C'est un revêtement double de $\Lambda(\mathbb{C}^n)$, il est connexe car c'est $U(n)/SO(n)$ par la même action que précédemment. Le morphisme de fibration suivant :

$$\begin{array}{ccccc} SO(n) & \longrightarrow & U(n) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{\Lambda}(\mathbb{C}^n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ O(n) & \longrightarrow & U(n) & \xrightarrow{\pi} & \Lambda(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

donne en homotopie et après les mêmes factorisations que précédemment :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{\pi}_*} & \pi_1(\tilde{\Lambda}(\mathbb{C}^n), \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p_* & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1(\Lambda(\mathbb{C}^n), \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}$$

De plus, notons que le chemin

$$l(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix}$$

est envoyé par $\tilde{\pi}_*$ sur un chemin qui n'est pas un lacet et sur un lacet par π_* . Ainsi comme l'image de p_* est un sous-groupe d'indice 2 et que $\pi_1(\tilde{\Lambda}(\mathbb{C}^n), \mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}$ on obtient $\pi_1(\Lambda(\mathbb{C}^n), P_0) \simeq \mathbb{Z}$ avec pour générateurs l'image du chemin $l(\theta) \in U(n)$.

Si $n = 1$, l'espace des lagrangiens est exactement $\mathbb{R}P^1$ donc $\pi_1(\Lambda(\mathbb{C}), *) \simeq \mathbb{Z}$.

Si $n = 2$ la suite exacte donne :

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\Lambda(\mathbb{C}^2), P_0) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

mais l'inclusion de $O(2)$ dans $U(2)$ est ici nulle sur le π_1 (car elle factorise par $SU(2) = S^3$) donc on a encore le même isomorphisme.

Pour la suite nous aurons besoin d'une description plus explicite de cet isomorphisme. Tout d'abord, du fait que l'action de $U(n)$ est transitive, on peut déduire qu'il n'y a pas de choix imposer pour P_0 . Nous allons donc choisir le point de base comme étant \mathbb{R}^n . Définissons $\Sigma_0(i\mathbb{R}^n) = \{P \in \Lambda(\mathbb{C}^n) \mid P \cap i\mathbb{R}^n \neq \{0\}\}$. C'est une sous variété algébrique de codimension 1. Elle admet une co-orientation canonique décrite de la manière suivante :

supposons que V est une direction transverse de la strate de dimension maximale. Choisissons $P(t)$ $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ un chemin de plans tel que $\frac{d}{dt}|_{t=0}P(t) = V$ et $\{P(t)\} \cap \Sigma_0(i\mathbb{R}^n) = P(0)$. Chacun des $P(t)$ peut être vu comme le graphe d'une application linéaire $f(t) : i\mathbb{R}^n \rightarrow i\mathbb{R}^n$. Par la discussion faite dans la section 3.2 (plus particulièrement la discussion sur le cotangent d'une variété) $f(t)$ est la différentielle de dQ_t , une forme quadratique sur $i\mathbb{R}^n$. Cette forme quadratique est non-dégénérée lorsque $t \neq 0$. On dit que la direction V est positive si la signature augmente lorsque t croit et passe par 0 et négative sinon.

Remarquons que le complémentaire de $\Sigma_0(i\mathbb{R}^n)$ est contractile car il est identifié, comme précédemment, avec les formes quadratiques sur \mathbb{R}^n . Pour un lacet $\gamma : (I, \{0, 1\}) \rightarrow (\Lambda(\mathbb{C}^n), \mathbb{R}^n)$ on associe $\mu([\gamma]) = \gamma \cdot \Sigma_0(i\mathbb{R}^n)$, où “ \cdot ” dénote l'intersection homologique (ici $\Sigma_0(i\mathbb{R}^n)$ n'a pas de bord en tant que sous-variété algébrique). Alors $\mu : \pi_1(\Lambda(\mathbb{C}^n), \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{Z}$

est exactement l'isomorphisme désiré. En effet, l'image par la projection de $l(\theta)$ est la famille de plans

$$P(\theta) = \langle (e^{i\theta}, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0) \dots (0, \dots, 0, 1, 0) \rangle$$

qui intersecte une seule fois $\Sigma(i\mathbb{R}^n)$ lorsque $\theta \in [0, \pi]$, la forme quadratique (après perturbation) associée est $(\tan(\theta + \frac{\pi}{2})) \oplus \text{Id}_{n-1}$ sur $i\mathbb{R}^n = i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}^{n-1}$ et les signes se correspondent donc.

Nous pouvons maintenant définir l'indice de Maslov associé à un plongement lagrangien. Si $[u] \in \pi_2(M, L)$ choisissons encore une fois un représentant lisse u de $[u]$. Le disque D^2 étant contractile il existe à homotopie près une unique trivialisation :

$$(u^*(TM), u^*(\omega)) \stackrel{\phi}{\simeq} (D^2 \times \mathbb{C}^n, \omega_0).$$

Cet isomorphisme nous permet d'associer à u un lacet de lagrangiens dans \mathbb{C}^n par $\gamma(t) = \phi(T_{u(e^{2\pi it})}L)$. L'indice de Maslov de u est par définition $\mu(u) := \mu(\gamma)$. L'indépendance vis-à-vis du choix du représentant est évidente. Et c'est un homomorphisme $\mu : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{Z}$.

L'indice de Maslov n'est généralement pas un homomorphisme de $\pi_1(L)$ car si $[A] \in \pi_2(M)$ alors $\mu([u] + [A]) = \mu([u]) + 2c_1([A])$. Cependant la parité de l'indice de Maslov ne dépend pas du choix du disque bordant un lacet elle est donc définie sur le noyau de $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ (notons cependant que pour les lagrangiens orientables cet indice est toujours pair).

Pour la suite nous aurons également besoin de la remarque suivante :

L'inclusion $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}$ induit une inclusion $j : \Lambda(\mathbb{C}^n) \rightarrow \Lambda(\mathbb{C}^{n+1})$ défini par $j(P) = \langle P, 1 \rangle$. L'application induite en homotopie est l'identité car $j(\Sigma(i\mathbb{R}^n)) \subset \Sigma(i\mathbb{R}^{n+1})$ et la forme quadratique associée a seulement une valeur propre égale à 1 en plus, donc le changement de signature est le même.

Remarque 3.9 Notons également que nous pouvons considérer l'aire symplectique et l'indice de Maslov comme des homomorphismes avec domaine $H_2(M, L)$ (voir section 4.2)

3.2.2 Déformations de lagrangiens

Il existe différentes notions d'équivalence de plongements lagrangiens. La première qui semble naturelle serait de dire que deux plongements L_1 et L_2 sont *lagrangiens isotopes* s'il existe une famille lisse à un paramètre L_t de plongements lagrangiens allant de L_1 à L_2 .

Bien que naturelle, une telle relation ne préserve pas nécessairement certaines quantités associées au lagrangien. Effectivement l'aire symplectique $\omega : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas préservée en générale par une telle isotopie, comme par exemple pour les deux lagrangiens de la figure 3.1. Notons cependant que les nombres de Maslov $\mu : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{Z}$ sont conservés.

Une notion plus restrictive d'isotopie serait de demander que la famille L_t soit engendrée par des difféomorphismes symplectiques ambiants, i.e. L_1 et L_2 sont *symplectiquement isotopes* s'il existe une famille lisse ϕ_t de symplectomorphismes telle que $\phi_0 = Id$ et $\phi_1(L_1) = L_2$.

Le fait que ϕ_t préserve la forme symplectique implique que l'aire symplectique est conservée. En effet si L' est symplectiquement isotope à L alors $\omega_L = \omega_{L'}$. L'identification entre les groupes d'homotopie étant celle donné par l'isotopie. En effet si $u : (D^2, S^1) \rightarrow (M, L)$ alors $u' = \phi \circ u : (D^2, S^1) \rightarrow (M, L')$ donc :

$$\begin{aligned} \omega_L([u]) &= \int_{D^2} u^*(\omega) = \int_{D^2} u^* \circ \phi^*(\omega) \\ &= \int_{D^2} (\phi \circ u)^*(\omega) = \omega_{L'}([u']). \end{aligned}$$

Un exemple d'une telle déformation est donné de la manière suivante. Soit X une variété avec $H^1(X) \neq 0$. Considérons une forme α fermée et non exacte. Sur $T^*(X)$ considérons la forme $\tilde{\alpha} = \pi^*(\alpha)$. Par dualité symplectique (ou musicale) elle définit un champ de vecteurs X sur T^*M . Le flot de X est symplectique puisque :

$$\mathcal{L}_X \omega = d(X \lrcorner \omega) = d\tilde{\alpha} = 0,$$

la première égalité étant la formule de Cartan, la seconde la définition de la dualité musicale et la dernière venant du fait que α est fermée.

La définition de dualité symplectique implique que $X_p = \alpha_{\pi(p)}$. Le flot de X est donc linéaire dans les fibres $\phi_t(p) = p + t\alpha$. Ainsi il déforme la section nulle vers le graphe de α . La forme α n'étant pas exacte, la notion d'isotopie symplectique ne préserve la notion d'exactitude des lagrangiens.

Une manière de construire des flots symplectiques préservant l'exactitude est de considérer l'homomorphisme $C^\infty(M \times S^1) \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ défini par la dualité symplectique et la différentielle. On dira que L_1 et L_2 sont *hamiltonien isotopes* s'il existe $H : M \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\phi_1^H(L_1) = L_2$. Si la variété symplectique est exacte alors la notion d'exactitude de plongements lagrangiens est préservée par de telle isotopie.

Il existe un avantage non négligeable à cette notion : la possibilité d'étendre un difféomorphisme hamiltonien local à toute la variété. Par exemple considérons le cercle de rayon 1 dans \mathbb{C} . C'est une sous variété lagrangienne de \mathbb{C} . En considérant son voisinage de Darboux, on voit que localement le cercle de rayon 1 et le cercle de rayon $1 + \epsilon$ sont symplectiquement isotopes dans $S^1 \times (-\eta, \eta)$ par l'isotopie précédente (voir figure 3.1). Cependant il ne sont pas symplectiquement isotopes dans \mathbb{C} car l'aire symplectique n'est pas préservée. La déformation locale n'est cependant pas hamiltonienne. Si on avait pris une déformation hamiltonienne donnée par H , comme on peut étendre H à tout \mathbb{C} , la déformation aurait pu être étendue.

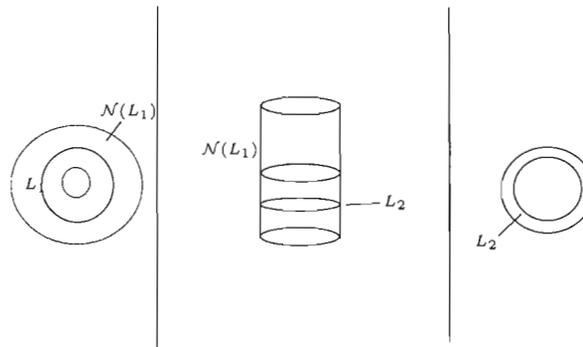


Figure 3.1 Deux cercles lagrangiens isotopes dans \mathbb{C} , symplectiquement isotopes dans $\mathcal{N}(L_1)$ mais pas dans \mathbb{C}

3.3 Symplectisation et Cobordismes Symplectiques

Dans cette section nous donnerons différentes notions de remplissage et de convexité de structures de contact. Tout d'abord nous donnerons la notion de structure de contact J -convexe comme bord d'une variété presque-complexe. Ensuite nous définirons la notion de bord ω -convexe d'une variété symplectique. Ces deux notions sont reliées d'une manière qui doit être traitée avec soin comme nous le verrons dans la section 5.1. L'avantage de la première notion est de permettre de donner de manière relativement explicite la distribution d'hyperplans, la seconde a l'avantage de simplifier la vérification que la structure est de contact. Finalement nous utiliserons ces notions pour définir une notion de cobordisme entre variétés de contact, et nous énoncerons les propriétés de la catégorie ainsi construite. Rappelons qu'un des buts de la thèse est de donner les notions équivalentes dans le cas relatif à une sous-variétés legendrienne.

3.3.1 Structures de contact J -convexes

Nous commençons par cette notion car, historiquement, c'est la première notion de remplissage de structure de contact, apparaissant dans l'étude des domaines d'holomorphic. A partir de maintenant nous nous restreignons aux variétés symplectiques de dimension 4.

Soit (X, J) une variété presque-complexe de dimension 4 compacte avec bord $\partial X = Y$ une 3-variété. Considérons la distribution d'hyperplans définie par $\xi = TX \cap J(TX)$. Ici ξ est définie comme noyau de la 1-forme $\alpha(X) = g(JX, \vec{n})$, où g est une métrique quelconque sur X et \vec{n} est le champ de vecteurs normal à Y . Par analogie avec le cas intégrable nous appellerons α la *forme de Levi* de ξ . Si ξ est une structure de contact (i.e. la forme de Levi est une forme de contact) alors on dit que ξ est J -convexe.

Remarque 3.10 Si (X, J) est une variété complexe alors α est forme de contact si et seulement s'il existe une fonction holomorphe $\overset{\circ}{X} \rightarrow \mathbb{C}$ qui ne peut être étendue de manière continue à aucun point du bord (voir (Hörmander, 1990)).

Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse telle que Y est un niveau régulier de f , alors $\alpha(X) = g(\nabla f, JX) = df(JX) = d^c f(X)$ et donc ξ est convexe si et seulement si $dd^c f$ est non

dégénérée sur ξ . En particulier $dd^c f$ est une forme symplectique au voisinage de Y . Une fonction ayant cette propriété globalement ($dd^c f$ forme symplectique) est appelée *strictement pluri-sousharmonique* (spsh).

L'étude des fonctions spsh est d'une importance capitale en géométrie de contact, symplectique et complexe. Pour cette dernière elle garantit l'existence d'un plongement holomorphe de la variété dans \mathbb{C}^m (voir (Hörmander, 1990)). Pour la seconde elle donne l'existence d'une structure presque-Kählérienne sur la variété, et pour la première elle est utile car elle fournit le type de remplissage le plus fort possible pour une variété de contact et implique la non-annulation de beaucoup d'invariants de différent types (voir entre autre (Eliashberg, Givental et Hofer, 2000)). En particulier les définitions suivantes seront importantes pour la suite :

Définition 3.11 (i) Une variété complexe (X, J) est dite Stein si elle admet une fonction spsh.
(ii) Une variété de contact est Stein-remplissable si elle est isotope à $(Y, \xi = TY \cap J(TY))$ où Y est la pré-image d'une valeur régulière c de f ; une fonction propre, spsh et admettant un minimum global m sur (X, J) une variété de Stein. La variété compacte $X_{\leq c} = f^{-1}([m, c])$ munie de la structure kählérienne définie par f est appelée un *remplissage de Stein* de (Y, ξ) .

Exemple. La fonction $\rho : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\rho(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j$ satisfait :

$$d\rho = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j)$$

et donc :

$$d^c \rho = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j).$$

En conséquence :

$$dd^c \rho = \sum_{j=1}^n idz_j \wedge d\bar{z}_j = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$$

qui est la forme kählérienne standard sur \mathbb{C}^n . Donc ρ est spsh, ses lignes de niveau sont les sphères de rayon r et la structure de contact induite est la structure standard. Ainsi (S^{2n-1}, ξ_0) est Stein-remplissable. Son remplissage de Stein est évidemment D^{2n} .

Dans la section 5 nous aurons besoin d'étudier des déformations de cette structure en modifiant son champs de Liouville transverse.

3.3.2 Remplissages symplectiques

Le théorème de Giroux (Giroux, 2002) sur la correspondance entre les structures de contact et les décompositions en livre ouvert a considérablement simplifié les correspondances entre certains remplissages symplectiques. Nous ne parlerons donc que de deux notions de remplissages symplectiques.

Soit (X, ω) une variété symplectique à bord Y . On dira que Y est une *composante ω -convexe* (resp. *ω -concave*) s'il existe un champ de Liouville V (i.e $\mathcal{L}_V \omega = \omega$) défini au voisinage de Y pointant à l'extérieur (resp. à l'intérieur) de X .

Si Y a une structure de contact ξ on dira que ξ est *dominée* par ω si $\omega|_\xi > 0$ (si $\omega|_\xi < 0$ on dira que ω *anti-domine* ξ).

Remarquons qu'un bord convexe d'une variété symplectique possède une structure de contact canonique définie par $\alpha = V\omega|_Y$. En effet les formules de Cartan nous donnent :

$$d\alpha = d(V\omega) = \mathcal{L}_V \omega,$$

et donc $d\alpha$ est non-dégénérée sur $\ker \alpha$. Ainsi $\ker \alpha$ est une distribution de contact. En résumé : *Les hypersurfaces transverses à un champ de Liouville local ont des structures de contact canoniques.*

Dans la section 3.3.3 nous verrons que la réciproque est également vraie.

Donnons maintenant les définitions des différents remplissages symplectiques :

Définition 3.12 (i) Une variété symplectique (X, ω) est un *remplissage symplectique faible* d'une variété de contact (Y, ξ) si :

- (a) Y est le bord de X
- (b) ω domine ξ

(ii) Une variété symplectique (X, ω) est un *remplissage symplectique* d'une variété de contact (Y, ξ) si :

- (a) Y est le bord de X

(b) Le bord de X est convexe et la structure de contact canonique est isotope à ξ

Le résultat le plus surprenant concernant les remplissages symplectiques est due à Eliashberg (Eliashberg, 1990a) et donne un critère pour déterminer si une structure de contact est tendue :

Théorème 3.13 *Soit (X, ω) un remplissage symplectique faible de (Y, ξ) , alors ξ est tendue.*

Evidemment il est naturel de se demander si toute structure tendue apparaît comme le bord convexe d'une variété symplectique, ce n'est cependant pas le cas et un premier exemple à été donné par John Etnyre et Ko Honda (Etnyre et Honda, 2002) et depuis la recherche de tels exemples fait l'objet d'une importante littérature.

Retournons brièvement au cas des fonctions strictement pluri-sousharmoniques. Remarquons en fait les deux choses suivantes. Tout d'abord ∇f est un champ de Liouville :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nabla f} dd^c f(V, W) &= d(\nabla f \iota dd^c f)(V, W) \\ &= V(dd^c f(\nabla f, W)) - W(dd^c f(\nabla f, V)) - dd^c f(\nabla f, [V, W]) \\ &= V(d^c f(W)) - W(d^c f(V)) - d^c f([V, W]) \\ &= dd^c f(V, W) \end{aligned}$$

Ensuite remarquons que la structure de contact définie par les tangentes complexes est exactement la même que celle définie par la forme $\nabla V \omega$. Ceci est évident car $\omega = dd^c f$ et donc $\alpha(V) = \nabla \iota dd^c f(V) = \omega(\nabla(f), V) = g_\omega(\nabla(f), JV) = df(JV)$ et donc on a $\alpha(V) = 0 \Leftrightarrow V, JV \in \text{Ker}(df) \Leftrightarrow V, JV \in TY \Leftrightarrow V$ est une tangente complexe. Donc par la discussion précédente un remplissage de Stein est un remplissage symplectique (en particulier ξ est tendue).

3.3.3 Symplectisation

Soit (M, ξ) une variété de contact et considérons l'espace

$$E = \{(p, \lambda) | p \in M, \lambda : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } \ker \lambda = \xi_p\} \subset T^* M,$$

l'espace des formes de contact. Munissons E de la topologie naturelle le rendant un \mathbb{R}^* -fibré localement trivial.

Une forme de contact locale est alors vue comme une section locale de ce fibré.

Une forme de contact (si il en existe) au sens de forme différentielle est une section globale de ce fibré.

E admet une 1-forme canonique λ définie par $\lambda_{(p,\lambda)}(X) = \lambda(\pi_*(X))$ où π est la projection (c'est la restriction de la forme de Liouville standard si on voit E comme un sous-ensemble de T^*M). On note que la 2-forme $d\lambda$ est une forme symplectique sur E :

si α est une section locale de π , alors $\lambda = t\alpha$. Il s'en suit que $d\lambda = dt \wedge \alpha + t d\alpha$, qui est non-dégénérée si ξ est une structure de contact. En effet $TE = \xi \oplus \langle R\alpha, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$ et la somme précédente est une somme directe par rapport à cette décomposition. La seconde partie est non dégénérée sur ξ et la première est non-dégénérée sur $\langle R\alpha, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$. Notons que cette construction la construction de (E, λ) s'applique à n'importe quelle distribution et que la condition de contact est équivalente à $d\lambda$ symplectique.

La variété E est appelée la *symplectisation* de (M, ξ) . Si ξ est transversalement orientable alors ce fibré est trivial, une de ses composantes connexes est $E_0 \simeq \mathbb{R}_+^* \times M \simeq \mathbb{R} \times M$ où le premier isomorphisme est donné par le choix d'une forme globale α et le second est simplement le logarithme. Après cette identification λ devient $e^t\alpha$ et ainsi, pour une variété de contact transversalement orientable la symplectisation de (M, ξ) sera $(\mathbb{R} \times M, d(e^t\alpha))$. La discussion précédente donne que la variété symplectique ne dépend pas du choix d'une forme de contact.

Maintenant nous allons énoncer quelques unes des propriétés des variétés de contact qui peuvent être reformulées en termes de géométrie symplectique :

Proposition 3.14 *Soit $f : M \rightarrow M$ un contactomorphisme. Alors $F : E \rightarrow E$ défini par $F(p, \alpha) = (f(p), (f^*)^{-1}(\alpha))$ est un symplectomorphisme*

Démonstration Tout d'abord le fait que f soit un contactomorphisme implique que la fonction est bien définie sur son codomaine. La preuve montre simplement que l'on peut relever les

difféomorphismes de M à des symplectomorphismes de T^*M :

remarquons que $\pi \circ F = f \circ \pi$ et calculons :

$$\begin{aligned}
 F^* \lambda_{(p,\alpha)}(V) &= \lambda_{(f(p),(f^{-1})^*(\alpha))}(dF(V)) \\
 &= (f^{-1})^*(\alpha)_{f(p)}(d\pi \circ dF(V)) \\
 &= \alpha_p(df^{-1} \circ df \circ d\pi(V)) \\
 &= \alpha_p(d\pi(V)) = \lambda_{(p,\alpha)}(V).
 \end{aligned}$$

Et donc $F^*(d\lambda) = d\lambda$. ■

Maintenant si V est un champ de contact alors, par la proposition 3.14, V se relève en un champ symplectique \tilde{V} . Nous allons maintenant vérifier que ce champ de vecteurs est hamiltonien. C'est un application immédiate des formules de Cartan, une fois que nous avons remarqué que la preuve de la proposition précédente nous donne en fait $\mathcal{L}_{\tilde{V}}\lambda = 0$. Alors

$$0 = d(\lambda(V)) + V \iota d\theta = d(\lambda(V)) + V \iota \omega,$$

donc le champ de vecteurs \tilde{V} est hamiltonien.

Nous avons donc obtenu deux homomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{ham}_\xi(M) & \longrightarrow & \mathfrak{ham}_\omega(E) \\
 \exp \downarrow & & \exp \downarrow \\
 \text{Diff}_\xi(M) & \longrightarrow & \text{Ham}_\omega(M)
 \end{array}$$

où les applications \exp sont restreintes à leur domaines de définitions.

Notons cependant que si ces homomorphismes sont naturels, la fonction hamiltonienne associée au champ de vecteurs \tilde{V} n'est pas donnée de manière évidente. En fait, si nous choisissons une forme de contact α et que V est engendré par un hamiltonien de contact H , alors le calcul précédent en coordonnées $\mathbb{R} \times M$ donne :

$$\tilde{V}_{(t,p)} = (t - g_t(p), V_p) \text{ et } \tilde{H}(t,p) = e^t H(p),$$

où $g_t(p)$ est telle que $\mathcal{L}_V e^t \alpha = g_t \cdot e^t \alpha$.

Notons également que les homomorphismes au niveau des algèbres préservent le crochet de Lie et donc ce sont des homomorphismes d'algèbres de Lie. Ainsi ils induisent (après un choix de forme de contact) une correspondance entre le crochet de Lagrange et le crochet de Poisson.

3.3.4 Cobordisme symplectique

Définition 3.15 Soient (Y, ξ) et (Y', ξ') deux variétés de contact. On dira que Y et Y' sont symplectiquement cobordantes s'il existe une variété symplectique (X, ω) t.q $\partial X = Y' - Y$ avec Y' un bord convexe et Y un bord concave. Sous ces conditions nous noterons $Y \prec_X Y'$ (ou bien $Y \prec Y'$). Evidemment ces conditions dépendent de ξ, ξ' et ω mais nous ne le notons pas pour alléger la notation.

Remarque 3.16 Evidemment le cobordisme symplectique n'est pas une relation d'équivalence ; la relation n'est pas symétrique car l'existence d'un champ de Liouville impose des restrictions sur le volume de (X, ω) au bord. Cependant cette relation est transitive et reflexive comme la discussion suivante le prouve.

Remarque 3.17 Pour éviter des confusions notons que même si Y' est un bord convexe de X la structure de contact n'est pas nécessairement tendue car l'autre composante de bord est concave. On ne peut effectivement appliquer le théorème 3.13 uniquement dans le cas de bords convexes.

Vérifions tout d'abord que \prec est réflexive. Soit (Y, ξ, α) une variété de contact alors $(\mathbb{R} \times Y, d(e^t \alpha))$ est une variété symplectique d'après la discussion précédente.

De plus $\frac{\partial}{\partial t}$ est un champ de Liouville :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} d(e^t \alpha)(X, Z) \\
 &= d\left(\frac{\partial}{\partial t} \iota d(e^t \alpha)\right)(X, Z) + \frac{\partial}{\partial t} \iota dd(e^t \alpha)(X, Z) \\
 &= X(d(e^t \alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t}, Z\right)) - Z(d(e^t \alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right)) - d(e^t \alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t}, [X, Z]\right) \\
 &= X(e^t \alpha(Z)) - Z(e^t \alpha(X)) - e^t \alpha([X, Z]) \\
 &= d(e^t \alpha)(X, Z)
 \end{aligned}$$

Donc $([0, 1] \times Y, d(e^t \alpha))$ est un cobordisme symplectique entre Y et Y .

Pour la transitivité considérons deux cobordismes symplectiques (X, ω) et (X', ω') . On aimerait être capable de recoller deux variétés symplectiques le long d'une de leur composante de bord contactomorphe si l'une d'entre elles est convexe et l'autre est concave. Ceci est fait en plusieurs étapes.

Premièrement remarquons que si (X, ω) a un bord convexe ou concave alors il en est de même pour $c\omega$, $c \in \mathbb{R}$. Ensuite considérons le difféomorphisme $\psi : (-\epsilon, 0] \times Y \rightarrow \mathcal{N}(Y)$ donné par le flot du champ de Liouville V . Alors $\psi^*(\omega) = d(e^t \alpha)$ car $\mathcal{L}_V \omega = \omega$ où $\alpha = V\omega$. Ainsi le voisinage d'un bord convexe d'une variété symplectique est symplectomorphe à $(-\epsilon, 0] \times s$, où s est une section de la symplectisation.

De même le voisinage d'un bord concave est symplectomorphe à $[0, \epsilon) \times s'$. Si (X, ω) et (X', ω') sont des cobordismes symplectiques tels que Y soit bord convexe de X et concave de X' , comme Y est compacte on peut multiplier la forme symplectique ω' de sorte que la section s' soit au dessus de s . Appelons W la partie comprise entre s et s' . Maintenant si ψ et ψ' dénotent les symplectomorphismes ainsi induits nous pouvons construire la variété symplectique :

$$(X', \omega'') = (X, \omega) \sqcup (W, d\lambda) \sqcup (X', c\omega) / (\psi \sqcup \psi')$$

qui est un cobordisme symplectique entre Y_1 et Y_2 . Ainsi la relation de cobordisme symplectique est transitive (voir figures 3.2).

Remarque 3.18 La construction précédente permet aussi de recoller un cobordisme symplectique à un remplissage symplectique. En fait un remplissage symplectique est équivalent à un cobordisme symplectique partant de la sphère standard (par le théorème de Darboux). Ainsi la relation de remplissage symplectique est préservée le long d'un cobordisme symplectique.

Chirurgie et anse symplectique :

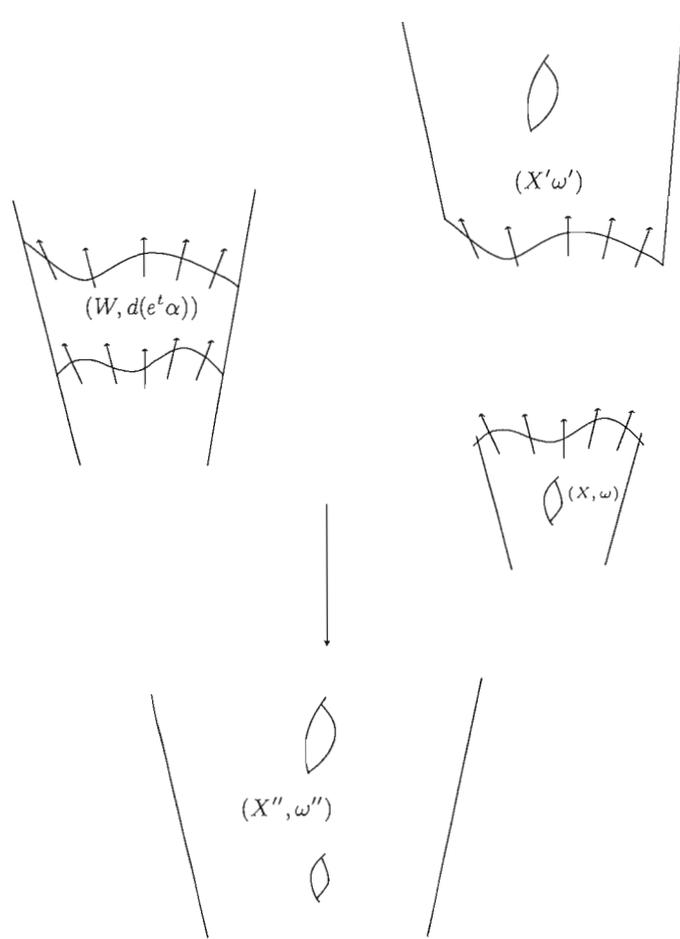


Figure 3.2 Recollement de deux cobordismes symplectiques le long de leurs composantes isomorphes

Nous allons maintenant donner le premier exemple non-trivial de cobordisme symplectique. Nous verrons que la procédure décrite dans la section 2.3.3 peut être réalisée par un recollement de 2-anse symplectique. Considérons K un nœud legendrien dans Y et considérons la 2-anse $D^2 \times D^2$ comme un voisinage de $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^2 \oplus i\mathbb{R}^2$. Nous voulons réaliser la chirurgie legendrienne sur K comme un recollement de anse sur $[0,1] \times Y$. C'est-à-dire nous voulons construire $[0,1] \times Y \sqcup D^2 \times D^2 / \varphi$, où

$$\varphi : S^1 \times D^2 \simeq \mathcal{N}(K) \subset Y \times \{1\}.$$

Nous devons choisir φ de sorte que les formes symplectiques et les champs de Liouville coïnci-

dent afin d'obtenir un cobordisme symplectique. Pour ce faire il faut qu'il existe une primitive aux formes symplectiques qui se recollent bien.

Construisons donc $\phi : [0, \epsilon) \times S^1 \times D^2 \xrightarrow{\cong} [0, \epsilon) \times \mathcal{N}(K)$, où les intervalles $[0, \epsilon)$ correspondent aux directions données par les champs de Liouville. La primitive de la forme symplectique sur $[0, \epsilon) \times \mathcal{N}(K)$ est donnée par $e^t \alpha_0$ où α_0 est la forme de contact des coordonnées legendriennes.

La forme de Liouville de \mathbb{C}^2 s'écrit sur $[0, \epsilon) \times S^1 \times D^2$ comme

$$e^t(y(\cos \theta dt - t \sin \theta d\theta) + z(\sin \theta dt + t \cos \theta d\theta)) = e^t((y \cos \theta + z \sin \theta)dt + t(z \cos \theta - y \sin \theta)d\theta).$$

Le même calcul que dans la section 2.3.3 montre que le recollement peut être fait en préservant la forme de Liouville. Ainsi nous obtenons :

Proposition 3.19 (*Weinstein, 1991*) *Si K est un nœud legendrien dans (Y, ξ) alors $Y \prec Y_K(-1)$.*

Si de plus nous supposons que Y est une variété Stein-remplissable, alors on peut procéder à ce recollement de manière à préserver les structures complexes et trouver une fonction spsh sur la nouvelle variété (voir (Eliashberg, 1990b)) ainsi :

Théorème 3.20 *Si K est legendrien dans (Y, ξ) Stein-remplissable alors $Y_K(-1)$ est Stein-remplissable.*

Chapitre IV

COBORDISMES LAGRANGIENS

Dans ce chapitre nous définissons les deux notions fondamentales de la thèse i.e. les concordances et cobordismes lagrangiens. La définition précise est donnée dans la section 4.1 et nous y démontrons également le théorème principal permettant d'étudier ces relations sur les classes d'isotopies legendriennes de nœuds legendriens. Ensuite nous procédons à l'étude du comportement des invariants classiques sous à relations dans la section 4.2. Nous en profitons aussi pour complètement résoudre le problème d'immersion et de plongement de variétés non-orientables à l'aide du théorème de Gromov-Lee. Finalement, section 4.3, nous discutons le lien entre ces relations et le 4-genre des nœuds et nous obtenons un critère pour le calculer dans certaines situations.

4.1 Définitions et Résultat Principal

4.1.1 Définitions fondamentales

Dans tout le chapitre (Y, ξ, α) sera une variété de dimension trois avec une structure de contact définie globalement par α et (X, ω) sera sa symplectisation.

Soient γ^- et γ^+ deux nœuds legendriens dans Y .

Fixons également une surface $\tilde{\Sigma}$ fermée orientable de genre g . Soient p^+ et p^- deux points de Σ et notons $\Sigma = \tilde{\Sigma} \setminus \{p^-, p^+\}$. Pour $T \in \mathbb{R}$ choisissons des coordonnées sur Σ autour de p^+ et p^- de la forme $(T, \infty) \times S^1$ et $(-\infty, -T) \times S^1$ respectivement. Et notons la partie compacte $\Sigma \setminus ((T, +\infty) \times S^1 \cup (-\infty, -T) \times S^1)$ par $\bar{\Sigma}$.

Nous allons maintenant donner les deux concepts qui nous occuperont pour le reste de la thèse.

Ils semblent à première vue différents mais nous verrons dans la section 4.2 qu'en fait ils sont soumis exactement aux mêmes rigidités.

Définition 4.1 (i) On dira que γ^- est lagrangien-cobordant à γ^+ ($\gamma^- \prec_{\Sigma} \gamma^+$) s'il existe un plongement lagrangien $i : \Sigma \hookrightarrow X$ et $T \in \mathbb{R}$ tel que

$$i|_{(-\infty, -T) \times S^1} = (-\infty, -T) \times \gamma^- \text{ et } i|_{(T, \infty) \times S^1} = (T, \infty) \times \gamma^+.$$

(ii) On dira que γ^- est lagrangien-concordant à γ^+ ($\gamma^- \prec \gamma^+$) si $\gamma^- \prec_{\Sigma} \gamma^+$ où Σ est un cylindre.

La figure 4.1 illustre schématiquement les deux concepts :

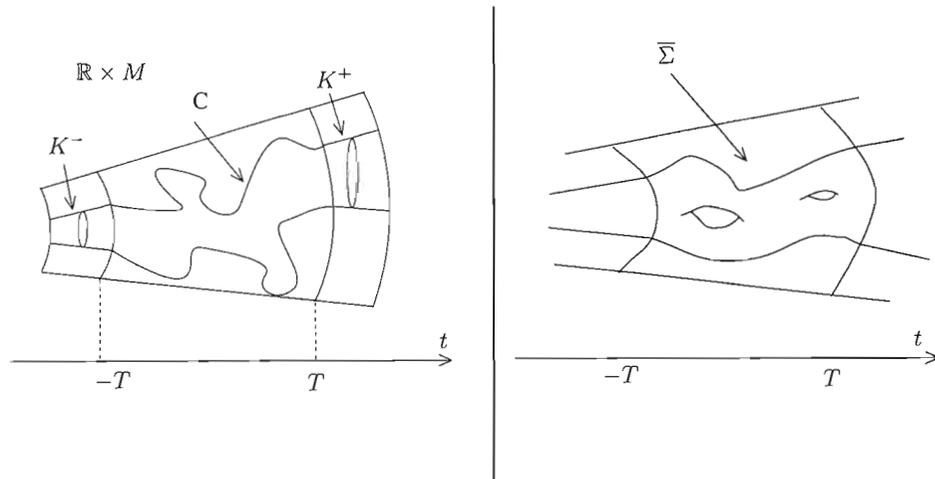


Figure 4.1 Concordance (à gauche) et cobordisme lagrangiens (à droite)

Remarquons que si γ est legendrien, alors sa pré-image dans X par rapport à la projection est un cylindre dont l'espace tangent est engendré par $\frac{\partial}{\partial t}$ et TK . Or $\omega(\frac{\partial}{\partial t}, TK) = \alpha(TK)$ donc ce cylindre est lagrangien exactement quand K est legendrien. Ainsi un nœud legendrien est toujours lagrangien concordant à lui même ; cependant rien ne nous dit que deux nœuds isotopes sont concordants. En effet, le graphe d'une isotopie legendrienne n'a aucune raison, a priori, d'être un cylindre lagrangien. En fait nous pouvons donner une caractérisation complète

des isotopies dont le graphe est un lagrangien :

Soit $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow Y$ une isotopie legendrienne, considérons $\Gamma(H) : S^1 \times [0, 1] \hookrightarrow X$ le graphe de H que nous considérerons comme un cylindre lagrangien trivial à l'extérieur de $[0, 1]$. Le tangent à $\Gamma(H)$ est engendré par $V = \frac{\partial H}{\partial \theta}$ et $W = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t}$. Alors $\Gamma(H)$ est lagrangien si et seulement si $V \perp J(W)$. Or $J(W) = R_\alpha + J(\frac{\partial H}{\partial t})$ et donc $\langle V, J(W) \rangle = \langle V, J(\frac{\partial H}{\partial t}) \rangle$. Si on écrit $\frac{\partial H}{\partial t} = \lambda R_\alpha + \mu W_\xi$, où $W_\xi \in \xi$, on obtient $d\alpha(V, W_\xi) = 0$ et donc $W_\xi \in \langle \frac{\partial H}{\partial \theta} \rangle$; c'est à dire que l'isotopie est composée de reparamétrisations de $H(\cdot, t)$ et de translation le long de R_α .

On rappelle que, infinitésimalement, les isotopies legendriennes sont engendrées par les champs de vecteur $X(\theta)$ le long de γ tels que $\mathcal{L}_X \alpha = f\alpha$ alors que les isotopies dont le graphe est un cylindre sont engendrées par ceux tels que $\mathcal{L}_X \alpha = 0$. Il n'est donc pas évident que les relations de concordance et de cobordisme soient bien définies au niveau des classes d'isotopies de nœuds legendriens. Avant de formuler le résultat nous permettant de descendre ces relations aux classes d'isotopies, nous allons faire quelques remarques sur la nature de ces relations.

Remarque 4.2 Le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ est un champ de Liouville, donc toute translation dans la direction t préserve les lagrangiens, nous pouvons donc recoller deux cobordismes lagrangiens ; les relations de concordance et de cobordisme sont donc transitives.

Remarque 4.3 Les notations dans la définition 4.1 suggèrent une non-symétrie de ces relations. En effet l'application $\phi : X \rightarrow X$ telle que $\phi(t, p) = (-t, p)$ n'est pas un symplectomorphisme, donc nous ne pouvons pas nous attendre à ce que la relation de cobordisme soit une relation symétrique. La notation choisie est celle de (Eliashberg, Givental et Hofer, 2000) pour les cobordismes symplectiques.

4.1.2 Isotopies legendriennes et cylindres lagrangiens

Formulons le résultat essentiel à l'étude des cobordismes lagrangiens :

Théorème 4.4¹ Soit H une isotopie legendrienne entre γ^- et γ^+ . Alors $\gamma^- \prec \gamma^+$. De plus le

¹Dans (Ekholm, 2006) T. Ekholm démontre un résultat similaire où il fixe la graphe de l'isotopie et permet

cylindre C réalisant la concordance peut être choisi de sorte que \overline{C} soit aussi proche (au sens uniforme) de $\Gamma(H)$ que désiré.

Il y a deux preuves sensiblement différentes de ce résultat, les deux donnant lieu à des cylindres pouvant être utiles suivant la situation étudiée.

Démonstration

1. Soit ϕ_t le flot de contactomorphismes réalisant l'isotopie legendrienne. Soit V_s le champs de contact associé à l'hamiltonien de contact H_s . Notons W_s le champ hamiltonien sur $\mathbb{R} \times Y$ associé à V_s , comme décrit dans la section 3.3.3 et φ_t le flot associé à W_t . Rappelons que, par construction, $\varphi_{t_0}(p, \lambda) = (\phi_{t_0}(p), (\phi_{t_0}^*)^{-1}(\lambda))$ et donc

$$\varphi_{t_0}(p, t\lambda) = (\phi_{t_0}(p), (\phi_{t_0}^*)^{-1}(t\lambda)) = (\phi_{t_0}(p), t(\phi_{t_0}^*)^{-1}(\lambda)).$$

On en déduit que la sous-variété lagrangienne $\varphi(\mathbb{R} \times K^-)$ est \mathbb{R} invariante sous translation dans la direction t et se projette sur K^+ ainsi $\varphi(\mathbb{R} \times K^-) = \mathbb{R} \times K^+$. Considérons maintenant l'hamiltonien F_s associé à W_s (on rappelle que $F_s(t, p) = e^t H_s(p)$). Choisissons T suffisamment grand de sorte que :

1. Pour tout $t > T$, $s \in [0, 1]$ et $p \in M \pi_{\mathbb{R}}$ on ait $\varphi_s(t, p) > -T/2$
2. Pour tout $t < -T$ $s \in [0, 1]$ et $p \in M \pi_{\mathbb{R}}$ on ait $\varphi_s(t, p) < T/2$

Et choisissons une fonction $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lisse telle que :

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & (t < -T/2) \\ 1 & (t > T/2) \end{cases}$$

Considérons le flot hamiltonien ψ_s associé à la fonction $\tilde{F}(p, t) := \eta(t) \cdot F(p, t)$. Pour $t > T$ il coïncide avec φ et pour $t < -T$ il est égal à l'identité. Donc $\psi_1(\mathbb{R} \times K^-)$ est un cylindre lagrangien coïncidant avec $\mathbb{R} \times K^-$ quand $t < -T$ et $\mathbb{R} \times K^+$ quand $t > T$. C'est donc une concordance entre γ^- et γ^+ . ■

à la forme symplectique de changer sur un ensemble compact de X .

2. La preuve est facile une fois que la situation est correctement posée. Elle utilise la description de Weinstein des lagrangiens dans le fibré cotangent d'une variété.

Préliminaire :

Nous pouvons tout d'abord supposer (à une petite perturbation près) qu'à chaque instant sous l'isotopie H il existe toujours un arc qui est fixé. Notons par $f : Y \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ l'hamiltonien de contact de sorte que ϕ_t^f soit l'isotopie ambiante telle que $\phi_t^f(\gamma^-) = H(\cdot, t)$. Pour $t \in [0, 1]$ nous dénoterons \mathcal{N}_t^Y et \mathcal{N}_t^X les voisinages canoniques de γ_t et $[0, 1] \times \gamma_t$ respectivement. Par compacité de $[0, 1]$ nous pouvons découper l'intervalle $[0, 1]$ en intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de sorte que :

- (i) Il existe un arc fixé α_i par l'isotopie sur $[t_i, t_{i+1}]$
- (ii) Pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$ $\gamma_t \in \mathcal{N}_{t_i}^Y$ et $[t_i, t_{i+1}] \times \gamma_t \in \mathcal{N}_{t_i}^X$.

Si nous arrivons à réaliser un cylindre C_i , pour tout i , tel que $C_i \cap \{t_i\} \times Y = \gamma_{t_i}$ et $C_i \cap \{t_{i+1}\} \times Y = \gamma_{t_{i+1}}$, nous pouvons alors les recoller pour obtenir un cylindre réalisant la concordance.

Preuve :

Nous sommes maintenant dans la situation suivante : H est une isotopie de la section nulle de $\mathcal{J}^1(S^1)$ dans \mathcal{N}_0 un voisinage de la section nulle. Le cylindre $[0, 1] \times \gamma^+$ est un cylindre lagrangien dans $\mathcal{V}_0 = [0, 1] \times \mathcal{N}_0^Y$ qui, par hypothèse, est dans le voisinage canonique de \mathcal{N}_0^X . De plus ce cylindre coïncide avec la section nulle sur $[0, 1] \times \alpha$.

Le but de la preuve est d'obtenir un cylindre C' coïncidant avec $[0, \epsilon] \times \gamma^-$ proche de 0 et $[1 - \epsilon, 1] \times \gamma^+$ proche de 1. Pour ce faire il suffit de perturber le "carré" $D := [0, 1] \times \gamma^+ \setminus \alpha$ de la sorte : supposons tout d'abord que la projection $\pi : \mathcal{V}_0 \rightarrow [0, 1] \times S^1$ restreinte à D est injective. On peut alors voir D comme le graphe d'une section de $T^*([0, 1] \times S^1)$. Cette section étant lagrangienne, elle décrit une forme fermée sur D donc exacte. On peut donc voir $D = \Gamma(dg)$.

Prenons maintenant un fonction $\eta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\eta(s, t) = \begin{cases} 0 & (t < \epsilon) \\ 1 & (t > 1 - \epsilon) \\ \eta \leq 1 & \forall t \end{cases}$$

où la seconde copie de $[0, 1]$ paramétrise $S^1 \setminus \alpha$. Le graphe de $d(\eta g)$ est maintenant un carré lagrangien qui, recollé avec $[0, 1] \times \alpha$, réalise l'isotopie.

La preuve est donc terminée si nous sommes capable de montrer que la projection est toujours injective. Tout d'abord remarquons que la projection $[0, 1] \times \gamma_2 \rightarrow [0, 1] \times S^1$ est injective si et seulement si $\gamma_2 \subset \mathcal{J}^1(S^1) \rightarrow S^1$ l'est. Il faut donc vérifier que la projection $\gamma_2 \subset \mathcal{J}^1(S^1) \rightarrow S^1$ est injective. Comme l'isotopie reste tout le temps dans N_Y , le degré de cette projection reste égal à 1. Par la caractérisation des isotopies legendriennes dans $\mathcal{J}^1(S^1)$ la seule possibilité pour briser l'injectivité est un mouvement de type RI. Or supposons que l'isotopie effectue un mouvement de type RI. Nous allons voir que nous pouvons décomposer l'isotopie en plusieurs morceaux de sorte que les projections soient à chaque fois injectives. Notons t_0 le supremum des t tels que la projection est injective. Comme l'injectivité est une condition ouverte on a que γ_{t_0} ne se projette pas de manière injective, ce qui veut dire que le mouvement de type RI est réalisé. Ainsi il faut montrer qu'il existe un t entre 0 et t_0 de sorte que le découpage de l'intervalle en t donne des projections injectives. Supposons le contraire i.e. il existe une suite $t_n < t_0$ convergeant vers t_0 telle que pour tout n la projection γ_{t_0} sur γ_{t_n} dans \mathcal{N}_{t_n} est non-injective. Ceci implique que la projection $f_{t_n}^{-1}(\gamma_{t_0})$ sur γ^- est non injective. Donc le front d'onde de $f_{t_n}^{-1}(\gamma_{t_0})$ diffère toujours d'un mouvement de Reidemeister de type I de γ^- , ce qui contredit le fait que $f_{t_n}^{-1}$ converge vers $f_{t_0}^{-1}$ de manière C^∞ .

La preuve du théorème est désormais complète en remarquant que les quantité $\epsilon > 0$ citées plus haut peuvent être choisies arbitrairement petites, rendant donc le cylindre arbitrairement proche du graphe de l'isotopie originale. ■

Ainsi le théorème nous permet de considérer la relation de cobordisme lagrangien comme une relation définie sur les classes d'isotopies de nœuds legendriens. Au vu des remarques précédentes différentes questions semblent se dégager :

1. Existe-t-il deux nœuds legendriens non-isotopes mais néanmoins concordant ?
2. Si $\gamma_0 \prec \gamma_1$ et $\gamma_1 \prec \gamma_0$; est-ce que $\gamma_0 = \gamma_1$ (dans les classes d'isotopies) ?
3. Comment les invariants classiques se comportent-ils sous la relation de cobordisme ?

Dans la section 4.2 nous donnons une réponse complète à la dernière question. Nous verrons en effet que le nombre de rotation est invariant sous ces relations et que la différence entre les nombres de Thurston-Bennequin est caractérisée par le genre du cobordisme.

La deuxième question, probablement la plus dure de toutes, reste pour le moment sans réponse complète. S'il existe une réponse affirmative à cette question nous pourrions réellement considérer la relation de cobordisme (et de concordance) comme un ordre partiel sur les classes d'isotopies de nœuds legendriens ; ce qui justifierait complètement la notation.

4.2 Le Problème d'Immersion et les Invariants Classiques

La définition de concordance lagrangienne étant une restriction de la concordance classique pour les nœuds dans les 3-variétés, il est clair que les restrictions topologiques à l'existence d'une concordance classique sont également des restrictions à l'existence d'une concordance lagrangienne, donc le type de topologie du nœud legendrien peut changer en accord avec ces restrictions. La question du comportement du nombre de rotation et du Thurston-Bennequin est cependant plus subtile ; la prochaine sous-section traitera du cas du nombre de rotation et la suivante de celui du Thurston-Bennequin.

4.2.1 Invariance du nombre de rotation

Dans cette section nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.5 *Soit Σ une surface lagrangienne reliant γ^- à γ^+ , deux nœuds legendriens nul-homologues. Soit également $[S]$ une classe d'homologie dans $H_2(Y, \gamma^-)$. Alors $[S \cup \Sigma]$ est canoniquement associée à une classe d'homologie $[S']$ dans $H_2(Y, \gamma^+)$ et l'on a $r(\gamma^-, [S]) = r(\gamma^+, [S'])$.*

La proposition est facilement démontrée une fois que nous avons établi une correspondance entre l'indice de Maslov de γ^- , vu comme lacet sur Σ , et son nombre de rotation. Pour ce faire nous allons avoir besoin d'une discussion un peu plus générale que celle faite dans 3.2.1. En effet remarquons que si S est une surface dont le bord est $\gamma^- \subset \{-T\} \times Y$, alors $TY|_S$ est un fibré avec groupe de structure $Sp(n)$ sur un espace ayant le type d'homotopie d'un 1-squelette, ce fibré est donc trivialisable. Nous pouvons donc définir comme en 3.2.1 $\mu(\gamma^-, [S])$. La seule différence est, cependant, que ce nombre peut dépendre de la trivialisatoin choisie.

Mais remarquons que deux trivialisations diffèrent par un homomorphisme $f : \pi_1(S, x_0) \rightarrow \pi_1(Sp(n), Id)$. Or $[\partial S] \in \pi_1(S, x_0)$ est un produit de commutateurs et donc $f([\partial S]) = 1$, car $\pi_1(Sp(n), Id)$ est abélien. Donc les trivialisations restreintes au bord sont homotopes et l'indice de Maslov est bien défini.

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.6 *Soit S une surface de Seifert pour γ^- que l'on voit plongée dans $\{-T\} \times Y \subset \mathbb{R} \times Y$. Alors $2r(\gamma^-, [S]) = \mu(\gamma^-, [S])$*

Démonstration Le fibré symplectique se scinde en somme directe

$$T(\mathbb{R} \times Y) = \xi \oplus \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, R_\alpha \right\rangle .$$

Pour alléger les notations nous allons considérer ces fibrés comme hermitiens (avec le choix d'une structure presque-complexe compatible (voir la section 3.3.3)). Et donc nous avons

$$T(\mathbb{R} \times Y) = \xi \oplus \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_{\mathbb{C}} .$$

Maintenant une trivialisatoin hermitienne τ de $\xi|_S$ donne trivialement une trivialisatoin τ' de $T(\mathbb{R} \times Y)|_S$. La première associe à γ^- une application $f : S^1 \rightarrow S^1$ (rappelons que γ^- est orienté) définie par $f(s) = \tau(T_s \gamma^-)$. La seconde associe à γ^- une application $f' : S^1 \rightarrow \Lambda(\mathbb{C}^2)$.

Si $p : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1 \simeq \Lambda(\mathbb{C}^1)$ est la projection canonique, ces deux applications sont reliées par $f' = i \circ p \circ f$, où i est l'inclusion $\Lambda(\mathbb{C}^1) \rightarrow \Lambda(\mathbb{C}^2)$ discutée en 3.2.1. Sur les groupes

d'homotopies p induit la multiplication par 2 et i un isomorphisme. On obtient donc le lemme.

■

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 4.5 :

Démonstration Considérons f' l'application précédente et notons par g' l'application définie de la même manière en considérant, cette fois, $S' = S \cup \Sigma$ (que l'on lisse) et γ^+ .

Il suffit maintenant de remarquer que, si on étend la trivialisatoin τ' à S' , Σ définit une application $\Sigma \rightarrow \Lambda(\mathbb{C}^2)$ réalisant une homologie entre f' et g' . Comme $\pi_1(\Lambda(\mathbb{C}^2)) \simeq H_1(\Lambda(\mathbb{C}^2))$, on conclut que $\mu(\gamma^-, [S]) = \mu(\gamma^+, [S'])$. En appliquant le lemme précédent on conclut. ■

4.2.2 Comportement du nombre de Thurston-Bennequin

Tel que défini dans la section 2.2, le Thurston-Bennequin est la classe d'homotopie de trivialisatoin donné par $tb = (JT\gamma, R_\alpha)$. La discussion faite dans cette section associe à tb le couple $(d, n) \in H_1(Y) \oplus \mathbb{Z} / \text{div}(d)\mathbb{Z}$. Ces nombres étaient construits en choisissant une famille de cercles K_i générateurs de $H_1(M; \mathbb{Z})$. Fixons maintenant S le cobordisme entre K^- et une famille de copies parallèles des K_i . Considérons une perturbation de S de sorte que $S \cup \bar{\Sigma}$ soit lisse, où Σ est un cobordisme lagrangien entre γ^- et γ^+ .

Théorème 4.7 *Si $\gamma^- \prec_\Sigma \gamma^+$ alors les nombres associés au Thurston-Bennequin de γ^- et γ^+ satisfont : $n^+ - n^- = 2g(\bar{\Sigma})$*

Démonstration On rappelle que n^- est égal $S \cdot S$ où la perturbation de S est prise par extension de $R_\alpha|_{K^-}$ et de τ , où τ est la trivialisatoin de Seifert le long des K_i . Et donc de la même manière on a $n^+ = (S \cup \bar{\Sigma}) \cdot (S \cup \bar{\Sigma})$. Maintenant les deux perturbations diffèrent par $\bar{\Sigma} \cdot \bar{\Sigma}$, où la perturbation correspond à $J(\nabla f)$ pour f la fonction donnée figure 4.2 et ayant $2g(\bar{\Sigma})$ points critiques d'indice -1 . En effet ce champ de vecteurs est orthogonal à $\bar{\Sigma}$, car Σ est lagrangienne. Ainsi $n^+ - n^- = 2g(\bar{\Sigma})$. On notera que le signe a changé car l'orientation le long d'un point d'intersection est déterminée par le signe $\omega \wedge \omega(V, W, V_1, W_1)$, où (V, W) est une base orthogonale positive de $T_p(\Sigma)$. Comme Σ est lagrangienne on obtient dans les

coordonnées de Weinstein :

$$\begin{aligned}\omega_0 \wedge \omega_0(V, W, V + H(f)V, W + H(f)W) &= -\omega_0(V, H(f)V) \cdot \omega_0(W, H(f)W) \\ &= -\det(H(f)) \text{Vol}(\Sigma)\end{aligned}$$

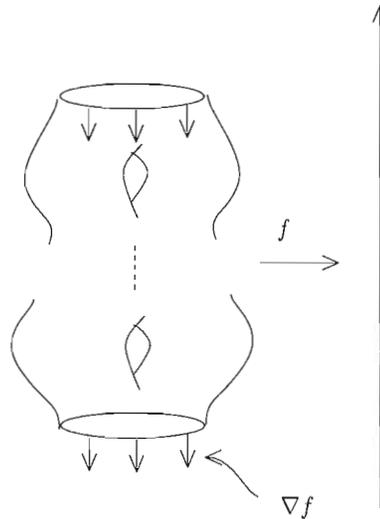


Figure 4.2 f sur $\bar{\Sigma}$

Notons que la Proposition 4.7 implique dans le cas particulier d'une concordance que le nombre de Thurston-Bennequin est invariant.

Ceci termine la discussion sur le comportement des invariants classiques sous cobordismes et concordances lagrangiennes. Il ressort de la discussion qu'il n'y a pas formellement de différences entre les deux notions puisque les nombres de Thurston-Bennequin de deux nœuds cobordants lagrangiens déterminent le genre de la surface réalisant le cobordisme. Le nombre de rotation et le Thurston-Bennequin forment les premières obstructions à l'existence d'un cobordisme lagrangien.

En fait le nombre de rotation est l'obstruction complète à l'existence d'une immersion lagrangienne exacte entre deux nœuds legendriens. Ceci est un théorème classique de Gromov et Lee dont nous rappelons l'énoncé précis dans la prochaine section.

Mais d'abord faisons un récapitulatif des obstructions que nous avons obtenues. Considérons que nous avons γ^- et γ^+ deux nœuds legendriens. Pour déterminer s'ils peuvent être lagrangien

cobordant ou non on doit d'abord vérifier (dans l'ordre) les hypothèses suivantes :

1. $r(\gamma^-) = r(\gamma^+)$
2. $tb(\gamma^+) - tb(\gamma^-)$ pair et positif (si négatif on échange leurs rôles)
3. $g_s(\mathcal{L}(K^+)) - g_s(\mathcal{L}(K^-)) \geq tb(\gamma^+) - tb(\gamma^-)$

Notons toutefois que pour d'un point de vue topologique, la différence entre les 4-genres n'est cependant pas suffisante pour assurer l'existence d'un cobordisme lisse de genre désiré. Par exemple il existe des nœuds ayant $g_s(K) = 1$ n'admettant aucune concordance avec le nœud trèfle (par exemple 6_2 de la table de Rolfsen, voir (Livingston, 2004)). Pour avoir une obstruction exacte on pose :

Définition 4.8 Soit K^- et K^+ deux nœuds lisses homologues dans Y . On définit leur genre de cobordisme comme étant :

$$g_{cob}(K^-, K^+; M) = \min(g(S) | S \hookrightarrow [0, 1] \times Y, \partial(S) = K^+ - K^-).$$

Au delà des propriétés évidentes de symétries et de réflexivité, l'auteur ne connaît que très peu sur le comportement de cet invariant. Il satisfait une inégalité du triangle (généralement stricte) :

$$g_{cob}(K_1, K_3; M) \leq g_{cob}(K_1, K_2; M) + g_{cob}(K_2, K_3; M).$$

Remarquons également que si $M = S^3$ et que K_0 est le nœud trivial alors :

$$g_{cob}(K, K_0) = g_s(K).$$

Maintenant le point 3. de la liste précédente peut être remplacé par :

$$3bis. g_{cob}(K^-, K^+, Y) \geq tb(K^+) - tb(K^-)$$

Les points 1, 2 et 3bis. décrivent l'ensemble complet d'obstructions que l'on pourrait qualifier de *classiques* à l'existence d'un cobordisme lagrangien entre deux nœuds legendriens. Par classique, nous entendons ici venant de la topologie et de la topologie algébrique. De plus rappelons que tb et r forment les seuls invariants de type fini pour les nœuds legendriens (voir (Fuchs et Tabachnikov, 1997)). En un sens ceux ci décrivent complètement l'aspect algébrique du problème d'existence de cobordisme lagrangien entre nœuds legendriens.

4.2.3 Le théorème de Gromov-Lee

Le théorème de Gromov-Lee peut être traduit de la manière suivante :

Les immersions lagrangiennes satisfont toutes les formes possibles du h-principe.

Dans cette section nous allons donner certaines définitions de base du h-principe pour arriver à une formulations plus précise du théorème de Gromov-Lee.

Tout d'abord remarquons que si $f : L \looparrowright M$ est une immersion lagrangienne, alors f induit un isomorphisme $F : T^{\mathbb{C}}L := TL \otimes \mathbb{C} \simeq f^*TM$ par la relation $F(a + ib)V = \text{adf}(V) + bJdf(V)$ (rappelons que L est lagrangien si et seulement si $TL \perp J(TL)$). Cette remarque motive les définitions suivantes :

Définition 4.9 Soit L une variété de dimension n

- (i) Une application de fibré $F = (f, g)$ de $T^{\mathbb{C}}L$ vers TM est appelée une *immersion lagrangienne formelle* si F est un isomorphisme complexe sur chaque fibre
- (ii) Une immersion lagrangienne formelle est dite *holonome* si $F = (f, df^{\mathbb{C}})$ (i.e. elle provient d'une vraie immersion lagrangienne).

Supposons maintenant que A est un sous-complexe simplicial de M . On dit qu'une immersion lagrangienne formelle F est *holonome près de A* s'il existe un voisinage $\mathcal{N}(A)$ de A tel que $F|_{\mathcal{N}(A)}$ est holonome.

La question de savoir si les immersions lagrangiennes satisfont le h-principe revient à demander si une immersion lagrangienne formelle holonome près de A peut être homotopée (rel A) à une immersion holonome. Evidemment le fait que ω s'annule sur L lorsqu'il s'agit d'une immersion lagrangienne implique des restrictions cohomologiques sur les immersions pouvant satisfaire cette propriété. La condition induite en cohomologie est $0 = f^*(\omega) \in H^2(M, L; \mathbb{R})$. Donnons un sens plus précis à $f^*(\omega)$. Sur une chaîne lisse par morceaux $c : \Delta^2 \rightarrow M$ à bord dans L , $f^*(\omega)(c) = \int_{\Delta^2} u^*(c)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Gromov-Lee :

Théorème 4.10 (Gromov-Lee) Soit $F = (f, g)$ une immersion lagrangienne formelle holonome près de A dans une variété symplectique exacte $(M, \omega = d\lambda)$. Si $f^*(\omega) = 0 \in H^2(M, L; \mathbb{R})$ alors F peut être homotopée (rel. A) à une immersion holonome. En particulier dans la classe d'homotopie de f il existe une immersion lagrangienne.

Pour terminer la discussion nous allons démontrer quelles sont les conditions du théorème dans le cas d'un cobordisme lagrangien.

Soit Σ une surface dans $(\mathbb{R} \times Y, d(e^t \alpha))$ telle que $\Sigma \cap (-\infty, -T) \times Y = (-\infty, -T) \times \gamma^-$ et $\Sigma \cap (T, \infty) \times Y = (T, \infty) \times \gamma^+$, avec γ^+ et γ^- legendriens. Considérons également $\bar{\Sigma} = \Sigma \cap (-T - \epsilon, T + \epsilon) \times Y$. Tout d'abord la condition homologique est trivialement satisfaite, car $H^2(\bar{\Sigma}, \partial\bar{\Sigma})$ est engendrée par une triangulation de $\bar{\Sigma}$ et

$$\int_{\bar{\Sigma}} \omega = e^{T+\epsilon} \cdot \left(\int_{\gamma^+} \alpha \right) - e^{-T-\epsilon} \cdot \left(\int_{\gamma^-} \alpha \right) = 0.$$

Maintenant afin de ne travailler qu'avec des fibrés triviaux, choisissons une surface de Seifert S pour γ^- qui permet de trivialisier ξ le long de γ^- et γ^+ (au moyen de $S' = S \cup \Sigma$). Ainsi $\xi|_{\gamma^{\pm}} \simeq S^1 \times \mathbb{C}$.

Ces trivialisations induisent des trivialisations de $TX|_{\gamma^{\pm}} \simeq S^1 \times \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, où le deuxième facteur correspond à $\frac{\partial}{\partial t}$. Comme précédemment nous pouvons étendre la trivialisations le long de Σ , de manière à obtenir $\phi : TN|_{\Sigma} \simeq \Sigma \times \mathbb{C}^2$. Maintenant si Σ est le produit $\{\epsilon, -\epsilon\} \times \gamma_i$ au bord, on a que Σ est une immersion lagrangienne formelle holonome près de $\partial\Sigma$ si et seulement si les trivialisations induites au bord s'étendent à l'intérieur de Σ . Les trivialisations au bord sont données (via ϕ) par :

$$\begin{aligned} \psi : T^{\mathbb{C}}\{-\epsilon, \epsilon\} \times S^1 &\rightarrow \Sigma \times \mathbb{C}^2 \\ T_p \gamma^{\pm} &\mapsto \phi(T_p \gamma_i) \\ \frac{\partial}{\partial t} &\mapsto (p, 0, 1) \end{aligned}$$

La seule obstruction pour étendre ces trivialisations est donc que les applications $f_i : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^* \sim U(1)$ soient homotopes. Si on écrit $f_i(s) = r_i(s) \cdot e^{i\theta_i(s)}$, ces applications sont homotopes

si et seulement si $\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \theta_i(s) ds$ ne dépend pas de $i = 1, 2$. Or

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \theta_1(s) ds = c_1(\xi|_S, \tau_S) = r(\gamma^-, [S])$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \theta_2(s) ds = c_1(\xi|_{S'}, \tau_{S'}) = r(\gamma^+, [S']).$$

On obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire 4.11 *Soit Σ un cobordisme entre deux nœuds legendriens γ^- et γ^+ dans (M, ξ) . Alors Σ est homotope à une immersions lagrangienne si et seulement si*

$$r(\gamma^-, [S]) = r(\gamma^+, [S \cup \Sigma])$$

avec S surface de Seifert pour γ^- .

Remarquons que, contrairement au cas des lagrangiens fermés (Lalonde, 1992), il y a ici une obstruction algébrique à éliminer les point doubles d'une telle immersion de manière lagrangienne provenant de la différence des Thurston-Bennequin de γ^+ et γ^- .

Remarquons aussi que cette situation résolverait complètement le problème de cobordisme lagrangien si nous avions permis aux surfaces lagrangiennes d'être non orientables. En effet la construction de Polterovitch (Polterovich, 1991) et Lalonde, Sikorav (Lalonde et Sikorav, 1991) permet de remplacer un point double d'une immersion lagrangienne par un tube donnant lieu à une surface lagrangienne (non orientables si le point double est de signe positif). Rappelons brièvement la construction.

Un point double transverse p d'une immersion lagrangienne dans une variété symplectique admet le modèle local suivant : il existe un voisinage \mathcal{U} de p dans (M, ω) diffeomorphe à un ouvert \mathcal{V} de 0 dans $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \oplus i\mathbb{R}^2$ tel que L corresponde à $\mathbb{R}^2 \cup i\mathbb{R}^2 \cap \mathcal{V}$. Dans \mathcal{U} remplaçons L par l'image de $(\cos(s)\gamma_1(t), \sin(s)\gamma_1(t), \cos(s)\gamma_2(t), \sin(s)\gamma_2(t))$, où $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ est une paramétrisation de la courbe de la figure 4.3 :

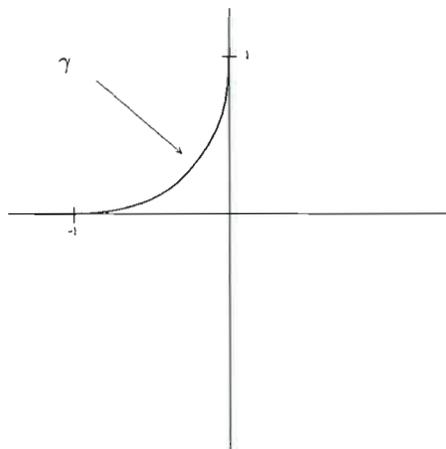


Figure 4.3 γ réalisant la chirurgie lagrangienne

On obtient une surface lagrangienne L' , coïncidant avec L à l'extérieur de \mathcal{U} , ayant un point double en moins. Nous pouvons faire de même avec tous les points doubles de L (que l'on peut supposer transverses) pour obtenir un plongement lagrangien d'une surface non-orientable.

Avec cette remarque nous pouvons donc formuler le corollaire suivant :

Corollaire 4.12 *Soient γ^- et γ^+ deux nœuds legendriens nul-homologues dans (Y, ξ) et Σ un cobordisme entre les deux tel que $r(\gamma^-, [S]) = r(\gamma^+, [S \cup \Sigma])$. Alors il existe un plongement lagrangien de Σ' dans $\mathbb{R} \times Y$ reliant γ^- à γ^+ , où Σ' est une surface possiblement non-orientable.*

4.3 Surfaces Lagrangiennes

Supposons maintenant que nous avons une surface lagrangienne $\Sigma \hookrightarrow X$. Supposons de plus que $\partial\Sigma = \gamma$ est un nœud legendrien dans $\partial X = Y$. En recollant une anse de Weinstein comme décrit dans le théorème 3.20 et en remarquant que $D^2 \times \{0\}$ est un disque lagrangien on obtient une surface lagrangienne fermée Σ' dans $X(\gamma, -1)$. Cette surface est lisse car nous pouvons lisser le long de γ par le lissage lagrangien exact de Lalonde (Lalonde, 1992). L'auto-intersection d'une telle surface est $\Sigma' \cdot \Sigma' = -\chi(\Sigma') = 2g(\Sigma) - 2$. De plus par la description de la chirurgie on sait que $\Sigma' \cdot \Sigma' = tb(\gamma) - 1$. Si on suppose que X est un remplissage de Stein,

l'inégalité de Lisca-Matic (Lisca et Matić, 1998) donne :

$$2g(\Sigma) - 1 + |r(\gamma)| \leq 2g(\mathcal{L}(\gamma), [\Sigma]) - 1.$$

Par définition de $g(\mathcal{L}(\gamma), [\Sigma])$ il satisfait $g(\mathcal{L}(\gamma), [\Sigma]) \leq g(S)$ pour toute surface S dans la même classe d'homologie que Σ . Donc $r(\gamma) = 0$, le genre de Σ est minimal parmi les surfaces plongées dans X bordant γ et $tb(\gamma) = 2g_s(\mathcal{L}(\gamma), [\Sigma]) - 1$ est maximal (noté $TB(\mathcal{L}(K))$) dans la Section 2.2.1). Nous avons donc obtenu le théorème suivant :

Théorème 4.13 *Soit $f : (\Sigma, \partial\Sigma) \hookrightarrow (X, M)$ une surface lagrangienne où X est une variété de Stein avec bord de contact M . Supposons que $f(\partial\Sigma) = K$ soit legendrien. Alors*

$$tb(K, \Sigma) = 2g(\Sigma) - 1 = TB(\mathcal{L}(K)).$$

$$r(K, \Sigma) = 0.$$

$$g(\Sigma) = \min\{g(\Sigma') \mid \partial\Sigma' = K'\}.$$

On obtient donc le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 4.14 *Si un nœud legendrien K dans S^3 borde une surface lagrangienne Σ dans D^4 alors $g(\Sigma) = g_s(\mathcal{L}(K)) = 2TB(\mathcal{L}(K)) - 1$*

Pour un nœud lisse, le calcul du genre et du 4-genre est généralement un problème difficile. Le premier est complètement caractérisé par les invariants d'Osváth-Szabó (voir (Ozsváth et Szabó, 2004)) tandis ce que le second est peu connu dans le sens où il n'existe pas d'invariant permettant de toujours le calculer. Le corollaire 4.14 permet de le calculer dans certains cas précis. Cependant il ne le caractérise pas complètement puisqu'il existe certains types lisses de nœud $\mathcal{L}(K)$ où aucun représentant legendrien n'as un Thurston-Bennequin égale à $2g_s - 1$ (par exemple un nœud torique négatif (Etnyre et Honda, 2001)). Dans le chapitre suivant, nous allons cependant expliciter une classe de nœuds où ce corollaire s'applique.

Remarquons également que ce corollaire donne des restrictions sévères quand à la possibilité de trouver des surfaces lagrangiennes plongées et bordant un nœud legendrien. Rappelons que

le théorème de Gromov-Lee donne comme seule obstruction à l'existence d'un lagrangien immergé que le nombre de rotation soit égal à zéro, cette condition pouvant toujours être réalisée par une suite de stabilisations. L'obstruction primaire à défaire les point doubles d'une telle immersion est donc donnée par le nombre de Thurston-Bennequin d'un tel nœud legendrien.

Correspondance entre les surfaces lagrangiennes et les cobordismes avec le nœud trivial : Nous voulons maintenant rapidement établir la proposition suivante, qui est l'analogie du résultat établissant qu'une variété de contact est remplissable si et seulement si elle est symplectiquement cobordante à (S^3, ξ_0) .

Proposition 4.15 *Soit K un nœud legendrien dans (S^3, ξ_0) et K_0 le nœud legendrien trivial. Alors : K est le bord d'une surface lagrangienne si et seulement si $K_0 \prec_{\Sigma} K$.*

Démonstration

\Leftarrow C'est le sens le plus simple. Soit Σ un cobordisme lagrangien entre K_0 et K . Remarquons que $K_0 = \{(\cos \theta, 0, \sin \theta, 0)\}$ borde le disque $D = \{(x, 0, y, 0)\}$ qui est lagrangien alors un lissage de $\bar{\Sigma} \cup D$ (possible car les indices de Maslov correspondent) donnent une surface lagrangienne dans D^4 dont le bord est K .

\Rightarrow Supposons que K soit le bord de Σ lagrangienne. Nous pouvons supposer que Σ ne rencontre pas $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ (en perturbant un peu Σ dans son voisinage de Weinstein si c'est le cas). Nous pouvons, encore par une perturbation exacte, supposer que la fonction $\rho(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$ restreinte à Σ a un minimum non-dégénéré en p . Considérons le plongement $T_p \Sigma : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$. Comme Σ est lagrangien on a que $T_p \Sigma$ est un sous espace lagrangien de \mathbb{C}^2 et donc donne un isomorphisme symplectique $T^*(T_p \Sigma) \simeq \mathbb{C}^2$ et comme p est un minimum non dégénéré, il existe un ouvert \mathcal{U} autour de p dans Σ tel que \mathcal{U} soit le graphe d'une 1-forme exacte df . En changeant f par \tilde{f} qui est égale à zéro autour de zéro, on transforme Σ en $\tilde{\Sigma}$ telle que $\tilde{\Sigma} \cap D_{\epsilon}^4 = T_p \Sigma$. Considérons maintenant $\Sigma_0 = \tilde{\Sigma} \setminus \{(0, 0)\}$ et le symplectomorphisme $(\mathbb{R} \times S^3, d(e^t \alpha_0)) \simeq (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \omega_0)$. On obtient une concordance entre K_1 et K , où K_1 est l'intersection d'un plan lagrangien avec la sphère. Le nœud K_1 est alors isotope à K_0 car l'élément de $U(n)$ envoyant $T_p \Sigma$ sur $\{(x, 0, y, 0)\}$ se restreint à un contactomorphisme de la sphère. ■

Chapitre V

APPLICATIONS

Dans ce chapitre nous allons donner les différentes applications des concordances et cobordismes lagrangiens. Dans un premier temps (section 5.1) nous allons donner des exemples explicites de surfaces lagrangiennes dans la boule de dimension 4 permettant de redémontrer la conjecture de Thom locale sur le 4-genre des nœuds algébriques. Ensuite (section 5.2) nous montrerons comment une surface lagrangienne permet de construire un cobordisme entre les chirurgies legendriennes correspondantes. La troisième sous-section (5.3) donne ce qui est peut-être l'application la plus prometteuse aux yeux de l'auteur. En effet, un cylindre lagrangien est la manifestation géométrique de certaines applications en homologie de contact. Malgré la longueur apparente de la section, elle contient en fait très peu de détails si l'on considère le travail demandé pour définir précisément toutes ces notions et nous renvoyons à (Chekanov, 2002) et (Ekholm, Etnyre et Sullivan, 2005) ainsi qu'aux références citées à l'appendice B pour les détails.

5.1 La Conjecture de Thom Locale

Dans cette section nous détaillons une classe d'exemples de nœuds legendriens apparaissant comme le bord de surfaces lagrangiennes dans D^4 et déduisons comme corollaire une preuve de la conjecture de Thom locale, prouvée à l'origine par la théorie de jauge dans (Kronheimer et Mrowka, 1993).

Dans toute cette section nous considérerons (D^4, j) comme remplissage de Stein de S^3 avec sa structure j -convexe. C'est à dire que la structure de contact sur S^3 est définie par $\xi = TS^3 \cap$

jTS^3 où “ j ” est le j standard dans $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$. Evidemment cette structure de contact est isotope à la structure standard et la métrique Kählérienne induit la métrique standard.

Considérons un polynôme $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

1. $P(0) = 0$.
2. $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ est une singularité isolée de P .
3. P est irréductible.

Comme $(0, 0)$ est une singularité isolée, il existe un $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que tout point p différent de $(0, 0)$ dans la boule de rayon ϵ est un point régulier de P . En particulier la pré-image de n'importe quelle valeur non-nulle intersectée avec D_ϵ^4 est une surface lisse. Si cette surface est transverse à S_ϵ^3 , alors son bord est $P^{-1}(w) \cap S^3$ et c'est une sous-variété de dimension 1. Cette sous-variété est un nœud K car le polynôme est irréductible. Les nœuds apparaissant de cette manière sont appelés des *nœuds algébriques*. Nous allons maintenant énoncer quelques propriétés de ces nœuds.

Tout d'abord il existe deux fibrations associées à de tels polynômes, elles sont toutes les deux appelées fibrations de Milnor (voir (Milnor, 1968) pour les preuves).

La première est la fibration :

$$P : D_\epsilon^4 \setminus P^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (5.1)$$

Et la seconde est :

$$\begin{aligned} \tilde{P} : S_\epsilon^3 \setminus (P^{-1}(0) \cap S_\epsilon^3) &\rightarrow S^1 \\ (z_1, z_2) &\rightarrow \frac{P(z_1, z_2)}{\|P(z_1, z_2)\|} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ces deux fibrations sont équivalentes dans le sens suivant : il existe une équivalence d'homotopie (de diagrammes de fibrations) entre P et $P|_{P^{-1}(S_\eta^1)}$ et une équivalence de fibration entre \tilde{P} et $\tilde{P}|_{P^{-1}(S_\eta^1)}$. Ainsi $g(P^{-1}(\eta)) = g(\tilde{P}^{-1}(1))$ (ici S_η^1 est le cercle de rayon $\eta < \epsilon$ dans \mathbb{C}).

La deuxième remarque importante ici est qu'un tel nœud algébrique contient toute l'information sur la topologie de la singularité qui le définit. En effet, la surface singulière est isotope au cône au dessus du nœud algébrique.

Nous noterons Σ la pré-image d'une valeur régulière de P et $\tilde{\Sigma}$ la pré-image d'une valeur régulière de \tilde{P} . Remarquons $\tilde{\Sigma}$ est une surface de Seifert de K . Par ailleurs Σ est une courbe i -complexe (c'est-à-dire que $i(T\Sigma) = T\Sigma$) et en utilisant la condition $j(V) \perp i(V)$ ($\forall V \in T\Sigma$), on obtient que $j(T\Sigma) \perp T\Sigma$. Ici la relation d'orthogonalité est obtenue par rapport à la métrique standard dans \mathbb{C}^2 qui est Kählérienne pour la structure complexe j . Ainsi nous obtenons que Σ est une surface lagrangienne dans \mathbb{C}^2 . Hélas, le bord de cette surface n'est pas un nœud legendrien. En effet pour avoir K legendrien il faudrait avoir :

$$j(TK) \in TS_\epsilon^3$$

$$\text{ou encore } i(TK) \perp TS_\epsilon^3$$

Toutefois, nous pouvons modifier la structure de contact par une isotopie de sorte que le nœud K soit legendrien. Pour être sûr que nous ne changeons pas la classe d'isotopie de structure de contact nous pouvons, par exemple, vérifier que D_ϵ^4 est toujours un remplissage symplectique de la structure de contact. Nous allons donc modifier le champ de Liouville de sorte qu'il reste transverse à S^3 , ce qui a pour effet de changer la structure de contact sans changer sa classe d'isotopie.

Rappelons que les champs de Liouville sont en bijection (par dualité musicale) avec les primitives de ω_0 . Ainsi, λ étant une primitive canonique de ω_0 , les champs de Liouville sont en bijection avec les formes fermées (donc exactes) sur \mathbb{C}^2 . Pour $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on note par V^f le dual harmonique de $\lambda + df$. Nous voulons vérifier deux chose :

1. $TK \in \ker V^f \omega_0$
2. $V^f \pitchfork S_\epsilon^3$

Examinons tout d'abord la première condition. Soit $\gamma(s)$ une paramétrisation de K . On veut :

$$\omega_0(V^f, \dot{\gamma}(s)) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + df)(\dot{\gamma}(s)) \Leftrightarrow \lambda(\dot{\gamma}(s)) = -df(\dot{\gamma}(s))$$

En particulier il nous faut $\int_0^{2\pi} \lambda(\dot{\gamma}(s)) ds = 0$, ce qui est trivialement réalisé car Σ est lagrangien donc λ est fermée sur Σ et K est nul-homologue sur Σ . Ainsi les valeur de la fonction f sont prescrites sur K :

$$f(\gamma(s_0)) = -\int_0^{s_0} \lambda(\dot{\gamma}(s)) ds.$$

Pour que la deuxième condition soit réalisé il faut que

$$\begin{aligned}
 & g_{\omega_0}(V^f, \frac{\partial}{\partial r}) > 0 \\
 \iff & \omega_0(V^f, R_\alpha) > 0 \\
 \iff & \lambda(R_\alpha) + df(R_\alpha) > 0 \\
 \iff & 1 > -df(R_\alpha)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Cette condition implique que la variations de f le long de R_α doit être inférieure à 1. Nous allons définir la fonction f sur le lieu singulier $\phi_\alpha(K)$ et vu que sa variation doit être petite nous pouvons la choisir constante, par exemple. Cependant le problème peut arriver si il existe des *cordes de Reeb* sur K , c'est-à-dire une trajectoire de R_α reliant deux points différents de K . Une telle corde de Reeb est donnée par une intersection consistant en 2 points ou plus entre une droite j -complexe et le nœud.

Soit D une telle droite. Notons $l(r)$ la longueur de la corde en question, dont la valeur sera $l(r) = \int_r \lambda$. Pour pouvoir étendre la fonction en respectant la condition sur sa dérivée directionnelle il nous faut :

$$\begin{aligned}
 & l(r) > f(x_0) - f(x_1). \\
 \iff & \int_r \lambda > \int_{s_0}^{s_1} \lambda(\dot{\gamma}) ds. \\
 \iff & \int_C \lambda > 0,
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

où C est le cercle lisse par morceau formé de la corde de Reeb et de l'arc sur K reliant x_0 à x_1 , les extrémité de la cordes.

Maintenant rappelons que $P^{-1}(0)$ à le type topologique du cône au dessus de K . Et que si l'intersection de la droite D avec $P^{-1}(0)$ ne consiste pas en uniquement $(0, 0)$ alors c'est une variété algébrique réelle ayant le type topologique d'un cône au dessus de 2 points (cette variété est une variété lisse a l'extérieur de 0 car P est complexe). Ainsi $D \cap P^{-1}(0)$ consiste en deux arcs se rencontrant en 0. Ces deux arcs bordent un "morceau" de disque symplectique sur D et un "morceau" de disque lagrangien sur $P^{-1}(0)$ (voir figure 5.1). Ces deux morceaux se recollent pour donné un disque D' singulier, lisse par morceau, formé d'une partie lagrangienne et d'une partie symplectique. Ainsi $\int_{D'} \omega_0 > 0$. Or $\int_{D'} \omega_0 = \int_{\partial D'} \theta > 0$ et cette propriété ne

change pas par une petite variation de 0. Donc en choisissant δ suffisamment proche de 0 on obtient la propriété 5.4. Nous pouvons donc définir f sur le lieu singulier $\phi_\alpha(K)$ et l'étendre en une fonction lisse au reste de \mathbb{C}^2 ce qui nous donne l'existence de la structure de contact désirée.

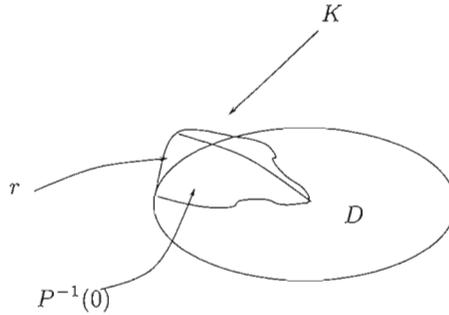


Figure 5.1 Cône au dessus d'une corde de Reeb

La discussion précédente implique donc que pour tout nœud algébrique K , il existe une structure de contact ξ' isotope à ξ_0 sur S^3_ϵ telle que l'intersection transverse de Σ avec S^3_ϵ soit une représentation legendrienne de $\mathcal{L}(K)$. Comme ξ' est isotope à ξ_0 on obtient le théorème suivant :

Théorème 5.1 *Soit K un nœud algébrique. Il existe une représentation legendrienne de K dans (S^3, ξ_0) qui est le bord d'une surface lagrangienne S de même genre que la fibre de Milnor.*

■

Donc par le Théorème 4.14 nous avons $tb(K) = TB(\mathcal{L}(K)) = 2g(\Sigma) - 1$ et $r(K) = 0$, où K est le représentant legendrien en question. Et donc, nous obtenons une nouvelle preuve de :

Corollaire 5.2 (*conjecture local de Thom*) (Kronheimer et Mrowka, 1993) *Soit K un nœud algébrique avec fibre de Milnor Σ alors $g_s(\mathcal{L}(K)) = g(\Sigma)$.*

■

5.2 Concordances Lagrangiennes et Chirurgies de Contact

Dans cette section nous démontrons que lorsque deux nœuds sont lagrangien-concordants il existe naturellement un cobordisme symplectique entre les leurs chirurgies legendriennes. La construction est explicite. Soient γ^- et γ^+ deux nœuds legendriens concordants par un cylindre lagrangien C . Considérons $\overline{C} \in [-T, T] \times Y$ comme précédemment. Choisissons un isomorphisme $\phi : \mathcal{N}(\overline{C}) \simeq [-T, T] \times S^1 \times D_\epsilon^2$, qui fait correspondre la forme symplectique ω à la forme canonique sur $T^*([-T, T] \times S^1)$. Notons $\tilde{X} = [-T, T] \times Y \setminus ([-T, T] \times S^1 \times D_{\epsilon-\eta})$.

Soit ψ le difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \psi : [-T, T] \times S^1 \times A_{(\epsilon-\eta, \epsilon)} &\xrightarrow{\cong} [-T, T] \times S^1 \times A_{(\epsilon-\eta, \epsilon)} \\ (s_1, t, r, s_2) &\mapsto (s_2 - s_1, t, r, s_2) \end{aligned}$$

(voir la section 2.3.3).

Nous voulons construire une forme symplectique sur $X(C) := \tilde{X} \sqcup [-T, T] \times S^1 \times A_{(\epsilon-\eta, \epsilon)}/\psi$ et vérifier que cette structure induit un cobordisme lagrangien entre les deux chirurgies legendriennes.

La primitive de la forme symplectique sur X , restreinte à $[-T, T] \times S^1 \times A_{(\epsilon-\eta, \epsilon)}$, s'écrit $\lambda_0 = r \cos(2\pi s_2) ds_1 + r \sin(2\pi s_2) dt$. Et donc

$$\begin{aligned} \psi^*(\lambda_0) &= r \cos(2\pi s_2)(ds_2 - ds_1) + r \sin(2\pi s_2) dt \\ &= r \cos(2\pi s_2) ds_1 + r \sin(2\pi s_2) dt - r \cos(2\pi s_2) ds_2 \\ &= \omega_0 - r \cos(2\pi s_2) ds_1 \end{aligned}$$

En coordonnées cartésiennes on peut écrire comme en 2.3.3

$$\psi^*(\lambda_0) = y ds + z dt - \frac{y}{y^2 + z^2} (y dz - z dy).$$

Le même argument que précédemment nous permet de conclure que l'on peut étendre cette forme à une forme de Liouville sur $X(C)$. La dérivée de cette forme de Liouville est donc une forme symplectique sur $X(C)$. Pour voir que c'est effectivement un cobordisme entre $Y((\gamma^-, tb_{\gamma^-}), -1)$ et $Y((\gamma^+, tb_{\gamma^+}), -1)$, il suffit de remarquer que la construction ici présente

et celle donnée à la section 2.3.3 coïncident au bord (car les concordances sont triviales en $-T$ et T). Ainsi nous avons démontré :

Théorème 5.3 *Si $K^+ \prec K^-$, alors $Y((K^-, tb_{K^-}), -1) \prec Y((K^+, tb_{K^+}), -1)$*

5.3 Homologie de Contact

Fuchs et Tabachnikov ont démontré que les seuls invariants de type fini pour les nœuds legendriens sont le nombre de rotation et le Thurston-Bennequin. La fin du 20^{ème} a vu une prolifération de nouvelles constructions d'invariants algébriques provenant de l'idée d'Andras Floer de faire une théorie de Morse sur des variétés de dimension infinie pour des fonctionnelles bien choisies.

La motivation originale de cette étude du point de vu de la géométrie de contact et symplectique vient de la conjecture d'Arnold sur le nombre d'orbites périodiques de certains systèmes dynamiques. Cependant la littérature montre que ce travail est d'une portée bien plus grande. L'homologie de contact relative (ou *Homologie de Contact Legendrienne*) est un des outils les plus efficaces pour obtenir de l'information sur la topologie des espaces de plongements legendriens.

Dans cette section nous allons rapidement décrire les définitions de base de cette homologie et expliquer comment une concordance donne lieu a des applications entre les algèbres associées.

5.3.1 Cordes de Reeb

Nous supposons maintenant que nous sommes dans la symplectisation de \mathbb{R}^3 avec la forme de contact $\alpha_0 = dz - ydx$. Le champ de Reeb pour cette forme de contact est alors simplement $\frac{\partial}{\partial z}$. Aucune de ses orbites n'est donc périodique. Soit γ un nœud legendrien dans \mathbb{R}^3 et L son cylindre lagrangien trivial dans la symplectisation.

Une *corde de Reeb* est une trajectoire $r : ([0, l(r)], \{0, l(r)\}) \rightarrow (M, K)$ de R_α .

Remarque 5.4 Le flot de Reeb étant ici très simple, les cordes de Reeb sont en bijection avec les point doubles de la projection lagrangienne de K .

On note par \mathcal{R} l'ensemble des cordes de Reeb. Une corde de Reeb est dite non-dégénérée si le point double associé sur projection lagrangienne est transverse. Par une petite isotopie de K , nous pouvons supposer que toutes les cordes de Reeb sont non dégénérées. Un nœud legendrien ayant cette propriété est dit *régulier*.

5.3.2 Algèbre de Chekanov

Dans tout ce qui suit, γ sera supposé régulier et donc, en particulier, ses cordes de Reeb existent en nombre fini, $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_l\}$. Par $\mathcal{A}(K)$ on désignera l'algèbre unitaire non-commutative sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ librement engendrée par \mathcal{R} . Ici comme les nœuds sont supposés orientés, il existe un isomorphisme canonique entre $H^1(K)$ et \mathbb{Z} . L'anneau formant les coefficients de \mathcal{A} est donc le l'algèbre du groupe $H^1(K)$.

Fixons maintenant quelques notations qui vont nous faciliter la tâche par la suite :

si \mathcal{R} est l'ensemble (fini) des cordes de Reeb génériques de K , on dénote le monoïde libre sur \mathcal{R} par $\mathbf{F}(\mathcal{R})$. On voit ce monoïde comme l'ensemble des mots sur l'alphabet \mathcal{R} .

Pour $m \in \mathbf{F}(\mathcal{R})$ on note par $l(m)$ la longueur du mot et par $m(i)$ ($i \in \{1 \dots l(m)\}$) sa $i^{\text{ème}}$ lettre.

Nous dénoterons également par $m_{<i}$ le mot formé des $i - 1$ premières lettres de m et, de la même manière $m_{>i}$ celui formé des $l(m) - i$ dernières. Et finalement pour m' un autre mot nous noterons $m_i(m') = m_{<i}m'm_{>i}$, i.e. la $i^{\text{ème}}$ lettre est remplacé par m' .

Un élément de l'algèbre de Chekanov de K est donc $\sum_{m \in \mathbf{F}(\mathcal{R})} a_m \cdot e^{k_m \cdot m}$, avec $a_m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ presque tous nuls.

5.3.3 Disques formels

Notons par D_n le disque de Poincaré où l'on a enlevé les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité ρ_i . Soient γ^+ et γ^- deux nœuds legendriens et \mathcal{R}^+ et \mathcal{R}^- leur ensemble de cordes de Reeb respectif.

Soient C une concordance (possiblement trivial) de γ^- vers γ^+ , $r \in \mathcal{R}^+$ et $m \in \mathbf{F}(\mathcal{R}^-)$ de longueur $n - 1$.

Un disque formel sur C de r vers m et une application continue $u : (D_n, \partial D_n) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, C)$ telle que :

1. la projection de u sur l'axe O_z n'admet un prolongement continu en aucun des points ρ_i .
2. Si f est la projection de u sur \mathbb{R}^3 , alors

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \Pi(r)$$

$$\lim_{x \rightarrow \rho_i} f(x) = \Pi(m(i)).$$

3. Si a est la projection de u sur \mathbb{R} , alors

$$\lim_{x \rightarrow 1} a(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \rho_i} a(x) = -\infty.$$

4. Lorsque nous parcourons le bord de D_n dans le sens positif la valeur de z augmente quand on passe 1 et diminue pour toute les autres racines de l'unité.

On note les classes d'homotopie de tels disques par $\pi_2(r; m)$. Dans l'annexe B on décrit une application :

$$CZ : \pi_2(r; m) \rightarrow \mathbb{Z}$$

Si on suppose que C est un cobordisme orienté entre γ^- et γ^+ , il existe une autre application :

$$k : \pi_2(r; m) \rightarrow \mathbb{Z} \simeq H_1(C),$$

qui consiste à prendre l'image du bord et la fermer pour obtenir un lacet en suivant γ^+ ou γ^- dans le sens positif. L'image par k d'un élément $A \in \pi_2(r; m)$ est notée k_A .

5.3.4 Courbes holomorphes

Choisissons J une structure presque-complexe \mathbb{R} invariante (à l'infini si la concordance n'est pas triviale) telle que $J(\xi) = \xi$. Soit j une structure conforme sur D_n . Une application $u : D_n \rightarrow M$ sera dite *holomorphe* si sa restriction à $\overset{\circ}{D}_n$ satisfait :

$$du \circ j = J \circ du \tag{5.5}$$

Nous renvoyons à l'appendice B pour les notations et résultats concernant ces courbes.

Rappelons que $\widehat{\mathcal{M}}_A(r; m)$ est l'espace quotient modulo l'action de \mathbb{R} et les reparamétrisations conformes des courbes holomorphes reliant r à m représentant A s'appuyant sur une concordance trivial. Egalement $\widetilde{\mathcal{M}}_A(r; m')$ est l'ensemble des courbes s'appuyant sur une concordance quelconque, modulo les reparamétrisations conformes.

5.3.5 Différentielle et homomorphisme de chaîne

Différentielle Pour une structure régulière J , on définit l'application suivante sur les générateurs de l'algèbre de Chekanov :

$$\begin{aligned} \partial : \mathcal{A}(K) &\rightarrow \mathcal{A}(K) \\ r &\rightarrow \sum_{\substack{m \in \mathbf{F}(\mathcal{R}) \\ A \in \pi_2(r; m) \\ CZ(A)=1}} e^{k_A} \cdot \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_A(r; m) \cdot m. \end{aligned} \quad (5.6)$$

On étend ensuite cette application par linéarité et la règle de Leibniz pour les produits, $\partial(ab) = a\partial(b) + \partial(a)b$ (voir la remarque 5.10).

En combinant les résultats de compacité de Gromov, de recollement de Floer et de transversalité on peut montrer :

Théorème 5.5 (*Chekanov, 2002*)(*Ekhholm, Etnyre et Sullivan, 2005*) $(\mathcal{A}(K), \partial)$ est un algèbre différentielle.

Démonstration Les éléments apparaissant dans $\partial \circ \partial$ sont exactement les édifices de hauteur 2 formés de courbes holomorphes de dimension zéro. Ils constituent donc exactement le bord de la compactification des espaces de module de dimension 1 et existent donc nécessairement en nombre pair (voir figure B.3).

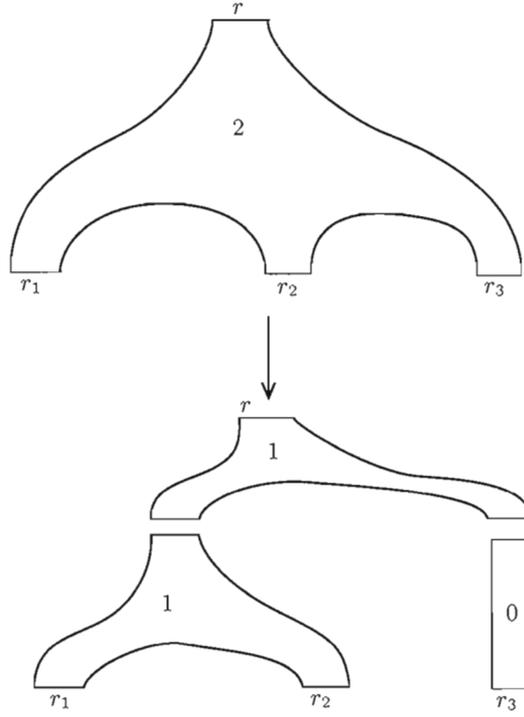


Figure 5.2 Bord des espaces de module de dimension 1 dans le cas $\mathbb{R} \times \gamma$.

Plus précisément calculons

$$\begin{aligned}
 \partial \circ \partial(r) &= \partial \left(\sum_{\substack{m \in \mathbf{F}(\mathcal{R}) \\ A \in \pi_2(r; m) \\ CZ(A)=1}} e^{k_A} \cdot \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_A(r; m) \cdot m \right) \\
 &= \sum_{\substack{m \in \mathbf{F}(\mathcal{R}) \\ A \in \pi_2(r; m) \\ CZ(A)=1}} e^{k_A} \cdot \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_A(r; m) \cdot \sum_{\substack{i=1 \dots l(m) \\ m_i \in \mathbf{F}(\mathcal{R}) \\ A_i \in \pi_2(m(i); m_i) \\ CZ(A_i)=1}} e^{k_{A_i}} \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_{A_i}(m(i); m_i) m_i(m_i) \\
 &= \sum_{m' \in \mathbf{F}(\mathcal{R})} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbf{F}(\mathcal{R}) \\ m_0 | m_i(m_0) = m' \\ A \in \pi_2(r, m), A' \in \pi_2(m(i); m_0) \\ CZ(A) = CZ(A') = 1}} e^{k_A + k_{A'}} \cdot \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_A(r, m) \cdot \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_{A'}(m(i); m_0) \right) \cdot m'
 \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{\substack{m \in \mathbf{F}(\mathcal{R}) \\ m_0 | m_i(m_0) = m' \\ A \in \pi_2(r, m), A' \in \pi_2(m(i); m_0) \\ CZ(A) = CZ(A') = 1}} e^{k_A + k_{A'}} \cdot \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_A(r, m) \cdot \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_{A'}(m(i); m_0) = 0 \text{ par la formule B.3}$$

■

Nous avons maintenant muni $\mathcal{A}(K)$ d'une structure d'algèbre différentielle et nous pouvons considérer l'homologie de cette algèbre. Evidemment le complexe lui même dépend de plusieurs choix de paramètres et pour obtenir un invariant efficace de K nous devons montrer que l'homologie ne dépend pas de ces choix.

Théorème 5.6 (*Chekanov, 2002*)(*Ekhholm, Etnyre et Sullivan, 2005*)

(i) Une isotopie entre deux nœuds réguliers γ_0 et γ_1 induit un isomorphisme entre les groupes d'homologie de $(\mathcal{A}(K_0), \partial_0)$ et $(\mathcal{A}(K_1), \partial_1)$.

(ii) Le choix de deux structures presque-complexes régulières induit un homomorphisme d'algèbre différentielle graduée qui donne l'identité sur les groupes d'homologies.

Définition 5.7 L'homologie de $(\mathcal{A}(K), \partial)$ est appelée l'homologie de contact legendrienne de K . Elle est notée $HCL(K)$.

5.3.6 Homomorphismes induit par les concordances lagrangiennes

Maintenant supposons que nous avons un cylindre lagrangien C tel que $K^- \prec_C K^+$. Nous voulons définir un homomorphisme de chaîne au niveau des algèbres $\mathcal{A}(K^+)$ et $\mathcal{A}(K^-)$. Il doit être défini de la même manière que la différentielle est définie. C'est à dire en étudiant des courbes holomorphes s'appuyant sur le cylindre C . Mais ici C n'est plus nécessairement trivial, il n'existe donc plus d'action de \mathbb{R} sur les espaces de modules. Nous considérons donc ci des espaces de modules rigides $(\widetilde{\mathcal{M}}_A(r; m'))$.

Définition 5.8 Définissons sur les générateur l'application suivante

$$f : \begin{array}{l} \mathcal{A}(K^+) \rightarrow \mathcal{A}(K^-) \\ r \mapsto \sum_{\substack{m' \in \mathbf{F}(\mathcal{R}) \\ A \in \pi_2(r; m') \\ CZ(A) = 0}} e^{k_A} \cdot \# \widetilde{\mathcal{M}}_A(r; m') \cdot m', \end{array} \quad (5.7)$$

que l'on étend de manière à avoir un homomorphisme d'algèbres, $f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \cdot f(r_2)$, (voir remarque 5.10).

Pour avoir un homomorphisme bien défini au niveau de l'homologie de contact il faut (vu que nous sommes sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) que f commute avec ∂ . Ceci se fait encore une fois en étudiant les espaces de modules de dimension 1 et en regardant leurs dégénérescences. La figure 5.3 montre comment les espaces de dimension 1 se brisent, si ceux sont des variétés.

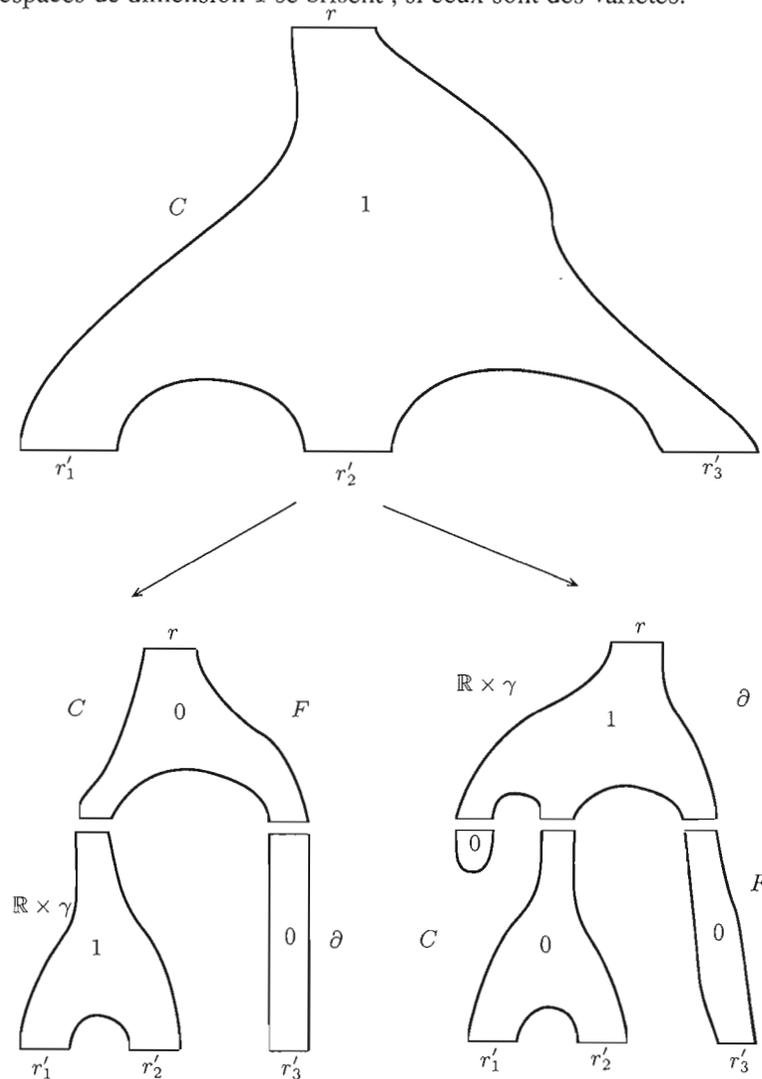


Figure 5.3 Bord des espaces de modules de dimensions 1 dans le cas d'une concordance

La partie de gauche est la contribution $f \circ \partial$ et celle de droite est $\partial \circ f$. Ainsi nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.9 *Si J est régulière pour C alors $f \circ \partial + \partial \circ f = 0$ et donc f descend à un homomorphisme :*

$$f: HCL(K^+) \rightarrow HCL(K^-)$$

Démonstration La preuve est complètement contenue dans la remarque précédente, du moins formellement et est essentiellement identique à celle de $\partial^2 = 0$. Nous écrivons ici les sommes nécessaires en enlevant les indices sous les symboles de sommations. Les indices sont sur tous les paramètres donnant des espaces de modules de dimension 0. Nous les enlevons pour simplifier les notations qui apparaissent lourdes dans la preuve de 5.5 et l'appendice B. D'un coté nous avons :

$$\begin{aligned} f \circ \partial(r) &= f \left(\sum_m e^{k_A} \cdot \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_A(r; m) \cdot m \right) \\ &= \sum_m e^{k_A} \cdot \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_A(r; m) \cdot e^{k_{A_1} + \dots + k_{A_n}} \left(\prod_i \#_2 \widetilde{\mathcal{M}}_{A_i}(m(i); m'_i) \right) \cdot \prod_i m'_i \\ &= \sum_{m' = \prod m'_i} e^{k'_A} \left(\#_2 \widehat{\mathcal{M}}_A(r; m) \cdot \prod_i \#_2 \widetilde{\mathcal{M}}_{A_i}(m(i); m'_i) \right) m' \end{aligned}$$

Tandis ce que de l'autre nous avons :

$$\begin{aligned} \partial \circ f(r) &= \partial \left(\sum_m e^{k_A} \#_2 \widetilde{\mathcal{M}}_A(r; m) \right) \\ &= \sum_m e^{k_A} \cdot \#_2 \widetilde{\mathcal{M}}_A(r; m) \sum_{m'_i} e^{k_{A_i}} \#_2 \widetilde{\mathcal{M}}_{A_i}(m(i); m'_i) m_i(m'_i) \\ &= \sum_{m' = m_i(m'_i)} e^{k'_A} \left(\#_2 \widetilde{\mathcal{M}}_A(r; m) \cdot \#_2 \widetilde{\mathcal{M}}_{A_i}(m(i); m'_i) \right) m' \end{aligned}$$

La formule B.5 donne que la différence de ces deux équations est nulle. ■

Remarque 5.10 Les figures 5.2 et 5.3 peuvent éclairer le fait que ∂ satisfait Leibniz et que f est un homomorphisme d'algèbre.

Sur C il n'existe pas de courbes triviales donc, pour procéder au recollement d'une courbe, nous devons avoir une courbe non-triviale pour chaque extrémité négative de la courbe sur $\mathbb{R} \times K$, ce qui donne la formule d'homomorphisme d'algèbre. D'un autre côté pour obtenir un recollement non-trivial dans $\mathbb{R} \times K$ il suffit qu'une seule courbe soit non-triviale sur une des extrémités. Si on en recolle plus, nous obtenons un espace de dimension supérieure à 1, ainsi ∂ doit satisfaire la propriété de Leibniz.

Donnons maintenant quelques propriétés de base de l'application f_C :

Proposition 5.11 *Soit ϕ un difféomorphisme symplectique à support compact et considérons $C' = \phi(C)$. Alors en homologie de contact $f_C = f_{C'}$.*

Démonstration Comme ϕ est à support compact il préserve les extrémités de C et donc C' est également une concordance entre K^- et K^+ . La preuve de la proposition tient donc au fait que si J est régulière pour C alors $\tilde{J} = \phi^*(J)$ est régulière pour C' . Les courbes holomorphes correspondantes sont également en correspondance biunivoque car :

$$d(\phi \circ u) \circ i = d\phi \circ du \circ i = d\phi \circ J \circ du = \tilde{J}d\phi \circ du = \tilde{J} \circ d(\phi \circ u).$$

Ainsi les applications au niveau du complexe de chaînes sont les mêmes. Les différentielles étant également les mêmes pour ces structures on conclut la preuve. ■

5.3.7 Exemple

Donnons ici un exemple simple de calcul. Considérons K un nœud legendrien avec un nombre fini d'orbites de Reeb non-dégénérées. Les seules courbes holomorphes dans un espace de dimension zéro sur le cylindre trivial sont les courbes triviales, car ce sont les seules pour lesquelles l'action de \mathbb{R} n'est pas libre. Donc pour toute J régulière l'application précédente est l'identité sur les complexes.

Sans vraiment compliquer le raisonnement nous pouvons considérer le cylindre lagrangien suivant :

$$C : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

$$(t, \lambda) \mapsto (t, \phi_{f(t)}(\gamma(\theta)))$$

Où f est un fonction lisse valant 0 pour $t < -T$ et 1 pour $t > T$ et ϕ est le flot du champ de Reeb. Le cylindre C est effectivement lagrangien car :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mapsto \phi_{f(t)*}(TK)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto f(t)R_\alpha + \frac{\partial}{\partial t}$$

Et donc $C^*(e^t\alpha) = 0$ si bien que C est lagrangien.

Les cordes de Reeb sont également en bijection canonique. Ainsi les algèbre $\mathcal{A}(K^+)$ et $\mathcal{A}(K^-)$ se correspondent. Maintenant si J est régulière pour le cylindre trivial, $\varphi^*(J)$ est régulière et \mathbb{R} -invariante à l'infini pour C , où $\varphi(p, t) = (\phi_{f(t)}(p), t)$ est un symplectomorphisme. Ainsi les courbes holomorphes dans l'application sont uniquement les images des courbes triviales. L'application sur les algèbres est donc l'identité. Et ainsi l'application en homologie de contact est également égale à l'identité.

CONCLUSION

Analogies et différences avec les cas non-relatif : Tel que remarqué dans l'introduction, les relations de cobordisme et concordance lagrangiens seraient les analogues naturels de la relation de cobordisme symplectique. Les propriétés démontrées au fil de la thèse permettent certaines analogies avec les relations de cobordismes symplectiques que nous présentons dans le tableau 5.1 :

Cas symplectique		Cas relatif	
Définition	Résultat	Définition	Résultat
(Y, ξ) symplectiquement remplissable	(Y, ξ) tendue S^3 cobordant Y	K bordent une surface lagrangienne	K n'est pas une stabilisation K_0 cobordant à K
(Y, ξ) Stein remplissable	$HC(Y, \xi)$ bien définie	K bordent un lagrangien exacte	HCL(K) admet une augmentation ¹
$(Y^-, \xi^-) \prec_X (Y^+, \xi^+)$	Propriété de remplissage conservée	$K^- \prec_\Sigma K^+$	Propriété de cobordisme conservée
Cobordisme symplectique exact	Homomorphisme en homologie de contact	Concordance (et cobordisme) exacts	Homomorphisme en homologie legendrienne

Tableau 5.1 Analogies entre cobordismes symplectiques et lagrangiens

Cependant il existe certaines différences notables entre les propriétés des cobordismes symplectiques et celles des cobordismes lagrangiens. Nous avons mentionné dans le chapitre 3 qu'il existait toujours un remplissage concave d'une variété de contact. L'analogue relatif pour les nœuds legendrien dans S^3 serait de dire qu'un nœud legendrien borde toujours une surface lagrangienne dans la partie positive de sa symplectisation. Cependant ce n'est en fait que rarement le cas. En effet tout d'abord les discussions faites plus tôt impliquent que si K est le bord d'une surface lagrangienne Σ dans la partie positive de la symplectisation alors $r(K) = 0$ et $tb(K) = 1 - 2g(\Sigma)$ ce qui donne des restrictions sur les présentations de ces nœuds.

¹ Ceci fait partie du travail de T.Ekholm, K.Honda et T.Kalman (Ekholm, Honda et Kálmán,)

De plus supposons qu'un nœud K est le bord d'une surface Σ dans D^4 ainsi que le bord d'une surface Σ' dans la partie positive de la symplectisation. Alors le lissage $\Sigma \cup \Sigma'$ donne une surface lagrangienne orientable fermée dans \mathbb{C}^2 , c'est donc un tore. Vu que la surface doit être de genre minimum dans la partie D^4 on obtient que $g(\Sigma) = 0$ et $g(\Sigma') = 1$. Et donc $tb(K) = g_s(l(K)) = 0$ et $r(K) = 0$. Ainsi les restrictions sont ici sévères sur la possibilité d'être le bord d'une surface lagrangienne dans la partie positive de la symplectisation. Nous discuterons dans le paragraphe sur la généralisation quelles notions pourraient avoir des résultats similaires dans ce cas-ci.

Terminons en discutant un exemple où ce phénomène apparaît :

Exemple. : Considérons deux courbes simples fermées c_1 et c_2 dans \mathbb{C} . L'application $L = c_1 \times c_2 : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ donne lieu à un tore lagrangien. Les homomorphismes ω_L et μ sont donnés par :

$$\omega_L([c_i]) = \mathcal{A}(c_i)$$

$$\mu([c_i]) = 2$$

Ces tores ne sont pas exacts, en fait ils admettent tous au moins deux feuilletages en courbes holomorphes différents.

Maintenant nous aimerions trouver des courbes c_i suffisamment bien choisies de sorte que l'intersection de T avec la sphère de rayon 1 soit un nœud legendrien. En prenant la courbe γ 5.4 nous obtenons que $\gamma \times \gamma \cap S^3 = \{(\cos(\theta), 0, \sin(\theta), 0)\}$ qui est le nœud legendrien trivial.

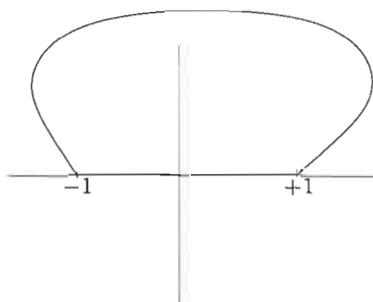


Figure 5.4 Exemple d'un tore de Clifford

Notons que si γ' est la rotation de 90 degrés de γ alors $\{\gamma' \times \gamma'\} \cap S^3 = \{(0, \cos(\theta), 0, \sin(\theta))\}$. De la même manière que précédemment l'intersection de T et T' consiste en deux disques s'intersectant en un point. Nous pouvons effectuer la chirurgie décrite en 4.2.3 pour enlever ce point d'intersection et obtenir un tube lagrangien dont le bord est l'entrelacs de Hopf.

Généralisation de certains résultats :

Dimensions supérieures

Comme précisé en introduction nous avons choisi de concentrer nos résultats sur les nœuds legendriens dans les variétés de contact de dimension 3. Cependant certains résultats s'étendent clairement à des sous-variétés legendriennes en dimension quelconque.

Tout d'abord les relations de cobordisme et de concordance sont bien définies sur les classes d'isotopies legendriennes en dimension quelconque puisque la première preuve du théorème 4.4 n'emprunte rien à la dimension 3. L'invariance du nombre de Maslov d'un lacet est également évidente. Cependant un cobordisme de dimension plus grande ne peut pas nécessairement être muni d'un repère, donc nous ne pouvons pas en déduire le comportement du Thurston-Bennequin dans ce cas-ci.

L'homologie de contact est définie pour n'importe quelle sous-variété legendrienne d'un espace de jet et les preuves mentionnées s'étendent directement à ce cas-ci. Dans le paragraphe suivant nous donnons plus de détails sur les généralisations possibles de nos applications en homologie de contact.

Homologie de contact

Dans cette section nous allons discuter des différentes applications et généralisations possibles de ce qui a été discuté dans la section 5.3.

Tout d'abord, sans aucun effort, le morphisme en homologie de contact legendrienne est défini de la même manière pour n'importe quelle variété de contact admettant un champ de Reeb sans orbites fermées. Toutefois la conjecture de Weinstein implique qu'une telle variété ne peut être compacte. Pour généraliser ceci nous pouvons accepter des variétés compacts admettant

un champ de Reeb sans orbites périodiques contractiles. En effet les résultats de l'appendice B restent vrais dans ce contexte, dû aux restrictions homologiques induites.

Il existe encore une classe un peu plus large de variétés où cette construction fonctionne. En fait pour toute variété de contact ayant une homologie de contact cylindrique bien définie (il est conjecturé que c'est le cas pour toute variété tendue) alors la construction précédente fonctionne.

Pour généraliser cette construction à des variétés ayant une dynamique de Reeb plus compliquée, il faut considérer cette construction où les structures algébriques sont des modules sur l'homologie de contact. A l'heure actuelle l'auteur est loin d'avoir les détails d'une telle construction.

Maintenant discutons un peu pourquoi nous n'avons pas défini l'application f pour des cobordismes lagrangiens au lieu des concordances.

Une des propriétés utilisées pour étudier la dégénérescence des courbes holomorphes était qu'une concordance est nécessairement exacte. Ainsi il ne pouvait y avoir concentration de courbure. Rien n'implique cependant qu'un cobordisme lagrangien est exact. T. Ekholm, K. Honda et T. Kalman dans (Ekholm, Honda et Kálmán,) étudient à l'heure actuelle la relation de cobordisme lagrangien exact et définissent un homomorphisme en homologie de contact équivalent au nôtre.

Encore une fois nous pouvons éventuellement généraliser cette relation en demandant une certaine forme de monotonie des cobordismes. C'est-à-dire si un cobordisme lagrangien Σ satisfait : $\omega_\Sigma = C\mu_\Sigma$, où C est une constante positive suffisamment grande pour que nous puissions éviter les concentrations de courbure le long d'un disque. Notons que la concentration de courbure le long d'une sphère n'est jamais un problème car la symplectisation satisfait le principe du maximum pour les courbes holomorphes et donc n'admet aucune courbe holomorphe fermée.

Toute la théorie présentée ici est une infime partie de la théorie symplectique des champs. L'image globale de tout ceci serait l'étude des courbes holomorphes de genre quelconque dans un cobordisme symplectique dont le bord s'appuierait sur un lagrangien entre deux sous-variétés

legendriennes. Cette fois la courbe holomorphe aurait des points marqués sur le bord (correspondant à des cordes de Reeb) et à l'intérieur (correspondant à des cycles de Reeb). Bien que la difficulté d'une telle image est énorme, l'auteur aimerait petit à petit comprendre quelles structures algébriques ressortent de ce contexte. Evidemment le projet est ambitieux si on ne se limite pas à certains cas précis. Mais comprendre au moins la structure de module sur l'homologie de contact dans le cas présent serait intéressant.

APPENDICE A

TRIVIALITÉ LOCALE DES STRUCTURES DE CONTACT ET SYMPLECTIQUES

Dans cette section nous allons donner les idées des démonstrations des différents résultats à caractère local énoncés le long de cette thèse. Les preuves exposées ici sont en général différentes des preuves originales. Elles reposent toutes sur le même principe qui est d'étendre certaines transformations de structures comme des isotopies ambiantes. Les détails complets apparaissent dans (Geiges, 2006) et (Eliashberg et Mishachev, 2002).

A.1 Astuce de Moser

L'idée de base est de vouloir réaliser des déformations de tenseurs (formes différentielles ici) comme des isotopies ambiantes. C'est-à-dire pouvoir répondre à la question suivante :

Si Ω_t est une famille de formes différentielles pouvons nous trouver une famille f_t de difféomorphismes telle que $f_t^(\Omega_0) = \Omega_t$?*

Evidemment ce n'est généralement pas le cas, mais sous des hypothèses raisonnables de non-dégénérescence des formes Ω_t nous pouvons avoir suffisamment d'information pour répondre à cette question.

Pour la suite nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme A.1 (voir (Kobayashi et Nomizu, 1996)) *Si f_t est le flot de difféomorphismes induit*

par un champ de vecteurs V_t dépendant du temps alors :

$$\frac{d}{dt} f_t^*(\Omega_t) = f_t^*(\dot{\Omega}_t + \mathcal{L}_{V_t} \Omega_t).$$

A.2 Cas symplectique

Dans cette section nous allons démontrer les théorèmes suivants :

Théorème A.2 (Darboux)

Soient (M, ω) une variété symplectique et $p \in M$. Notons ω_0 la forme symplectique standard sur \mathbb{R}^{2n} ($\omega = dp \wedge dq$). Alors il existe des ouverts $\mathcal{U} \subset M$ autour de p et $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^{2n}$ autour de 0 ainsi qu'un symplectomorphisme

$$\psi : (\mathcal{U}, \omega|_{\mathcal{U}}) \rightarrow (\mathcal{U}', \omega_0|_{\mathcal{U}'}).$$

Théorème A.3 (Weinstein)

Soit L une sous-variété lagrangienne compacte de (M, ω) . Alors il existe des voisinages tubulaires \mathcal{N} de L dans M et \mathcal{N}' de la section nulle dans T^*N ainsi qu'un symplectomorphisme

$$\psi : (\mathcal{N}, \omega) \rightarrow (\mathcal{N}', \omega_0)$$

qui envoie N sur la section nulle.

La preuve du premier théorème est un cas particulier de celle du second. Nous démontrons donc seulement le théorème de Weinstein.

Démonstration Tout d'abord remarquons que la forme symplectique étant non-dégénérée l'application

$$\begin{aligned} TL \otimes N(L) &\rightarrow \mathbb{R} \\ X \otimes Y &\mapsto \omega(X, Y) \end{aligned}$$

est non-dégénérée, car L est lagrangienne. Ainsi nous obtenons un difféomorphisme :

$$\phi : N(L) \simeq T^*L.$$

Et donc nous obtenons un difféomorphisme

$$\varphi : \mathcal{N}_0(L) \rightarrow \mathcal{N}'_0$$

où \mathcal{N}'_0 est un voisinage de la section nulle dans T^*L . Par construction ce difféomorphisme satisfait $(\varphi^{-1})^*(\omega)|_{L_0} = \omega_0$.

Considérons maintenant la famille de formes différentielles $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t(\varphi^{-1})^*(\omega)$. Elle est constante sur la section nulle et M est compacte donc il existe un voisinage \mathcal{N}_1 de la section nulle où cette famille forme une famille de formes symplectiques. Nous voulons maintenant trouver un flot ψ_t engendré par V_t tel que $\omega_t = \psi_t^*(\omega_0)$. Par la formule précédente nous obtenons :

$$\dot{\omega}_t = \psi_t^*(\mathcal{L}_{V_t}\omega) \quad (\text{A.1})$$

$$= \psi_t^*(d(V_t\iota\omega)) \quad (\text{A.2})$$

Maintenant en remarquant que ω_t est exacte pour tout t et en choisissant V_t comme le dual musical d'une primitive de ω_t on obtient le théorème (avec $\psi = \psi_1 \circ \varphi$). ■

A.3 Cas contact

Dans cette section nous voulons prouver les théorèmes suivants :

Théorème A.4 (Gray) *Soit ξ_t une famille lisse de structures de contact sur une variété compacte M alors il existe une isotopie ϕ_t de M telle que $\xi_t = (\phi_t)_*(\xi_0)$.*

Théorème A.5 (Eliashberg) *Soit L_t une famille lisse de sous-variétés legendriennes compactes de (M, ξ) . Alors il existe une famille lisse de contactomorphismes ϕ_t telle que $L_t = \phi_t(L_0)$.*

Théorème A.6 (Darboux) *Soit α une forme de contact alors pour tout p dans M il existe un voisinage \mathcal{U} de p et un voisinage \mathcal{U}_0 de 0 dans \mathbb{R}^{2n+1} ainsi qu'un difféomorphisme $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_0$ tel que $\alpha = \varphi^*(\alpha_0)$.*

Théorème A.7 *Soit L une sous variété legendrienne compacte de M alors il existe un voisinage tubulaire \mathcal{N} de L contactomorphe à un voisinage tubulaire de la section nulle dans $\mathcal{J}^1(L)$.*

Encore une fois les preuves des théorèmes A.4 et A.6 sont des cas particuliers de celles des théorèmes A.5 et A.7 respectivement. Nous commençons par la preuve de A.5

Démonstration Nous voulons trouver une isotopie de contact ϕ_t telle que $\phi_t(L_0) = L_t$. Comme les isotopies de contact sont engendrées par les hamiltoniens de contact nous cherchons donc une famille de fonctions H_t telle que le flot hamiltonien de H_t soit l'isotopie désirée.

Pour simplifier considérons $j_t : L_0 \hookrightarrow M$ réalisant l'isotopie legendrienne. Le champ de contact associé à H_t est donné par :

$$\begin{aligned}\alpha(V_t) &= H_t \\ V_t \lrcorner d\alpha &= dH_t(R_\alpha)\alpha - dH_t\end{aligned}$$

De plus celui-ci doit coïncider le long de $j_t(L_0)$ avec $W_t = \frac{d}{dt}j_t(p)$. Donc les valeurs de H_t sont prescrites le long de j_t par $\alpha(W_t)$. Ainsi pour tout $U \in TL_t$ nous devons avoir $dH_t(U) = d(\alpha(W_t))(U)$, la deuxième équation donne donc $d\alpha(W_t, U) = -d(\alpha(W_t))(U)$ (on rappelle que L_t est legendrien) et donc $(W_t \lrcorner d\alpha) + d(W_t \lrcorner \alpha)(U) = 0$. Il faut donc que $j_t^*(\mathcal{L}_{V_t}\alpha) = 0$, or $j_t^*\alpha = 0$ ou encore que $\frac{d}{dt}j_t^*(\alpha) = 0$ et donc la formule de la section A.1 permet de conclure. Les conditions étant satisfaites, il suffit maintenant juste d'étendre la fonction H_t à tout M en la fixant égale à 0 hors d'un voisinage tubulaire des L_t .

Démontrons maintenant le théorème A.7

Démonstration De la même manière que dans la preuve du théorème de Weinstein, il suffit de montrer que si α_t est une famille de formes de contact dans un voisinage de la section nulle dans $\mathcal{J}^1(L)$ alors cette famille est réalisée par une isotopie.

Encore une fois l'isotopie ϕ_t doit satisfaire $\frac{d}{dt}\phi_t^*(\alpha_0) = \dot{\alpha}_t$ et donc $\phi_t^*(\mathcal{L}_{V_t}\alpha_0) = \dot{\alpha}_t$. La formule de Cartan nous donne :

$$\phi_t^*(V_t \lrcorner d\alpha_0 + d(V_t \lrcorner \alpha_0)) = \dot{\alpha}_t .$$

On obtient donc : $\phi_t^*(\dot{\alpha}_t + d\alpha_t(V_t) + V_t \lrcorner d\alpha_t) = 0$ ce que nous donne :

$$\dot{\alpha}_t + d(\alpha_t(V_t)) + V_t \lrcorner d\alpha_t = 0.$$

Maintenant V_t est déterminé du fait que les α_t sont des formes de contact. ■

APPENDICE B

COURBES HOLOMORPHES

Dans cette appendice nous allons énoncer les principaux résultats concernant les courbes holomorphes en géométrie de contact.

Tout d'abord fixons les notations :

(Y, ξ, α) est une variété de contact telle que R_α n'a pas d'orbites périodiques.

Supposons de plus que nous avons $\gamma : S^1 \hookrightarrow Y$ un nœud legendrien générique (i.e. les cordes de Reeb sont non-dégénérées). La symplectisation de (Y, ξ) est $(\mathbb{R} \times Y, d(e^t \alpha))$.

Choisissons J une structure presque-complexe sur ξ et étendons-la à une structure presque-complexe, que l'on note encore J , sur $\mathbb{R} \times Y$, en fixant $J(R_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t}$. On notera par la suite \mathcal{J} l'espace de telles structures.

Par D_n on note le disque unité dans \mathbb{C} moins les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité. Si j est une structure conforme sur D_n , on dit qu'une application $u : D_n \rightarrow \mathbb{R} \times Y$ est holomorphe si elle satisfait :

$$du_p \circ j = J \circ du_p. \quad (\text{B.1})$$

à l'intérieur de D_n . Tout d'abord remarquons que si $u = (f, a)$ alors cette équation est équivalente à :

$$df \circ j = \pi \circ J \circ df \quad (\text{B.2})$$

$$f^*(\alpha) = da \quad (\text{B.3})$$

où $\pi : T(\mathbb{R} \times Y) \rightarrow \xi$ est la projection orthogonale par rapport à la métrique $g_\omega(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$.

Cette remarque donne donc une correspondance biunivoque entre les applications f satisfaisant B.2 telles que $f^*(\alpha)$ est exacte et les courbes holomorphes dans $\mathbb{R} \times Y$ modulo l'action de \mathbb{R} .

Nous nous intéresserons ici aux courbes holomorphes ayant certaines propriétés au bord. Tout d'abord le bord de D_n a n composantes connexes et nous supposons que chacune d'entre elles est envoyée sur un cylindre lagrangien C réalisant une concordance (i.e. trivial à l'infini). Ainsi une courbe holomorphe est une application continue :

$$u : (D_n, \partial D_n) \rightarrow (\mathbb{R} \times Y, C)$$

telle que $u|_{\circlearrowleft_{D_n}}$ satisfait B.1.

A une courbe holomorphe $u = (f, a)$ nous allons associer deux quantités appelées énergies : tout d'abord nous avons l'*énergie symplectique* (ou la $d\alpha$ -énergie) qui est par définition

$$E_{d\alpha}(u) := \int_{D^2} f^*(d\alpha).$$

Remarquons que ce n'est pas l'analogie de l'énergie symplectique dans une variété compacte.

Ensuite nous avons l'*énergie de contact* (ou α -énergie). Pour la définir notons $\mathcal{C} = \{\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi \text{ à support compact et positive, } \int_{\mathbb{R}} \phi = 1\}$

On définit maintenant $E_\alpha(u) := \sup_{\phi \in \mathcal{C}} \int_M (\phi \circ a) da \wedge f^*(\alpha)$.

L'*énergie totale* d'une courbe holomorphe est $E(u) := E_\alpha(u) + E_\omega(u)$.

Maintenant une courbe holomorphe u a une énergie totale finie si et seulement si à chaque point marqué du bord elle converge vers une corde de Reeb dans le sens suivant (voir (Bourgeois et al., 2003) et (Hofer, Wysocki et Zehnder, 1996)) :

le théorème d'uniformisation implique qu'autour de chaque point marqué sur le bord, il existe un voisinage biholomorphe à $(T, \infty) \times [0, 1]$ avec la structure complexe induite par i .

1. **Convergence positive** : Il existe $r \in \mathcal{R}$ et un champ de vecteurs V le long de $(T, \infty) \times r$ tel que $u(t, s) = \exp(t, V(r(s)))$ et $\frac{\partial V}{\partial t} = e^{-\delta t} V_0$ et $V(t, s) = e^{-\delta t} V_1$ où V_0 et V_1 sont des vecteurs unitaires

2. **Convergence négative :** Il existe $r \in \mathcal{R}$ et un champ de vecteur V le long de $(-\infty, -T) \times r$ tel que $u(t, s) = \exp(t, V(-r(s)))$ et $\frac{\partial V}{\partial t} = e^{\delta t} V_0$ et $V(t, s) = e^{\delta t} V_1$

Remarque B.1 Soit $\rho : [0, l(r)] \rightarrow M$ est une paramétrisation unitaire d'une corde de Reeb r . Le disque (D_2, i) est biholomorphe à $([0, l(r)] \times \mathbb{R}, i)$ et

$$\begin{aligned} u : [0, l(r)] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times Y \\ (s, t) &\rightarrow (r(s), t) \end{aligned}$$

est une application holomorphe que nous appellerons courbe triviale. La convergence citée plus haut est équivalente à dire que la courbe holomorphe converge à l'infini vers une courbe triviale dans la norme de Sobolev :

$$\|u\|^2 = \int e^{\delta t} (\|u\|^2 + \|du\|^2),$$

où δ est un fonction valant 1 vers ∞ et -1 vers $-\infty$.

Donc nous nous intéresserons uniquement aux courbes u à énergie finie qui auront une unique convergence positive en 1 et $n - 1$ convergence négatives aux autres points marqués.

Rappelons que, pour $r \in \mathcal{R}$ et $m \in \mathbf{F}(\mathcal{R})$, on note $\pi_2(r; m)$ les classes d'homotopie d'applications de D_n dans $\mathbb{R} \times Y$ s'appuyant sur C et convergeant vers r en $+\infty$ et vers m en $-\infty$. Aussi l'orientation de L donne une application canonique $\pi_2(r; m) \rightarrow \mathbb{Z} \simeq H_1(\mathbb{R} \times Y, C)$.

Nous dirons qu'une courbe holomorphe *représente* $A \in \pi_2(r; m)$ si la classe d'homotopie de u est A et u converge vers r en $+\infty$ et m en $-\infty$ (en particulier u a une énergie finie). Une fois cette convergence établie, l'énergie prend une forme plus agréable (voir (Bourgeois et al., 2003)) :

$$\begin{aligned} E_\omega(u) &= l(r) - \sum_{i=1}^{l(m)} l(m(i)) \\ E_\alpha(u) &= l(r) \\ E(u) &= 2l(r) - \sum_{i=1}^{l(m)} l(m(i)) \end{aligned}$$

Maintenant pour $A \in \pi_2(r; m)$ et $C = \mathbb{R} \times \gamma$ on note :

$$\mathcal{M}_A(r; m) = \left\{ (u, j) \left| \begin{array}{l} j \text{ structure conforme sur } D_n \\ u : D_n \rightarrow \mathbb{R} \times Y \text{ holomorphe} \\ u \text{ représente } A \end{array} \right. \right\} / \sim$$

où \sim est l'équivalence conforme (i.e. $(u, j) \sim (u', j') \iff \exists \phi : D_n \xrightarrow{\cong} D_n$ tel que $j' \circ d\phi = d\phi \circ j$ et $u' = u \circ \phi$). On note également $\widehat{\mathcal{M}}_A(r; m) = \mathcal{M}_A(r; m)/\mathbb{R}$ où l'action de \mathbb{R} correspond aux translations dans la direction t .

Pour un cylindre non-trivial C l'espace des courbes holomorphes à énergie finie convergeant vers $r \in \mathcal{R}$ en $+\infty$ et $m' \in \mathbf{F}(\mathcal{R}')$ en $-\infty$ et représentant $A \in \pi_2(r; m')$ modulo équivalence conforme est noté par $\widetilde{\mathcal{M}}_A(r; m')$. Notons que la condition au bord implique qu'il n'y a plus d'action évidente de \mathbb{R} .

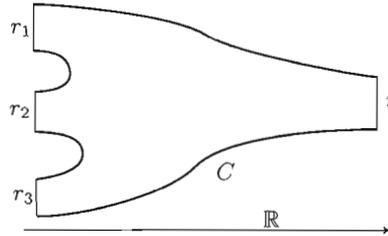


Figure B.1 Courbe Holomorphe

Nous allons maintenant discuter la dimension de ces espaces de modules :

Indice d'une courbes (Ekhholm, Etnyre et Sullivan, 2005)

Tout d'abord le flot de Reeb est formé de contactomorphismes, il préserve la structure de contact. Mais de plus, comme $\mathcal{L}_{R_\alpha} \alpha = 0$, son action sur ξ préserve $d\alpha$ et donc sa dérivée agit sur ξ par isomorphisme symplectique.

Si u est une courbe holomorphe à énergie finie, l'application sous-jacente f admet une compactification \bar{f} définie sur D avec n arcs spéciaux l_i qui sont envoyés sur des cordes de Reeb. Nous pouvons trivialisier le fibré ξ le long de D , ce qui donne une trivialisatation symplectique de $T(\mathbb{R} \times Y)$ le long de D_n . Cette configuration permet d'associer au disque holomorphe un lacet dans $\Lambda(\mathbb{C}^2)$ de la manière suivante : à chaque composante connexe de $\partial(D_n)$ on associe le chemin correspondant à $T_{u(p)}C$. A chaque corde de Reeb correspondant à ρ_i on transporte $T_{l_i(0)}C$ par le flot de Reeb. On le relie au lacet suivant de la manière suivante : si l_i est

paramétré par $[0, 1]$, on relie les deux chemin par un chemin c paramétré par $[0, 1]$ de sorte que $c(t) \notin \Sigma(l_i(t))$ (voir (Viterbo, 1987)).

Ceci associe à D un lacet γ dans $\Lambda(\mathbb{C}^2)$ et nous notons $CZ(u) = \mu(\gamma)$.

Cet indice ne dépend que de la classe d'homotopie de u on note donc $CZ(A) = CZ(u)$ pour $u \in A \in \pi_2(r; m)$. L'indice de Maslov ainsi défini calcule la "dimension" des espaces de modules dans le sens virtuel des indices d'opérateurs (voir par exemple (Ekholm, Etnyre et Sullivan, 2005)). Nous mentionnerons seulement qu'il correspond à l'indice de l'opérateur linéarisé provenant de l'équation B.1 et donc calcule la dimension de l'espace tangent l'espace de module lorsque cet opérateur est surjectif.

Théorèmes de transversalité. Il y a différents théorèmes nécessaires quant à la transversalité de courbes holomorphes dans la théorie, ils ont tous la même saveur et représentent respectivement le degré 1, 0 et -1 de la théorie. Ils sont tous dérivés des résultats de (Floer, Hofer et Salamon, 1995). Le premier d'entre eux est :

Théorème B.2 *Si C est un cylindre trivial $\mathbb{R} \times \gamma$. Il existe une sous-ensemble de seconde catégorie de Baire, \mathcal{J}_{reg} , de \mathcal{J} tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_{reg}$, $\widehat{\mathcal{M}}_A(r; m)$ est une variété lisse de dimension $CZ(A) - 1$.*

Le théorème suivant traite le cas où le cylindre est non trivial :

Théorème B.3 *Soit C une concordance quelconque. Il existe un sous-ensemble de seconde catégorie Baire, \mathcal{J}_{reg} , de \mathcal{J} tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_{reg}$ $\widetilde{\mathcal{M}}_A(r; m)$ est une variété lisse de dimension $CZ(A)$.*

Les deux théorèmes précédents sont suffisants pour démontrer les propriété algèbre de ∂ et f_C définis dans la section 5.3. Pour l'invariance nous avons besoin d'un théorème qui traite les dégénérescence des courbes holomorphes lorsque nous changeons les paramètres. Cependant nous ne donnerons pas les détails ici (voir (Ekholm, Etnyre et Sullivan, 2005)).

N'importe quelle J dans un des ensembles \mathcal{J}_{reg} des théorème précédents sera dite *régulière*.

Compacité de Gromov. Le théorème révolutionnaire de Gromov sur la convergence des suites de courbes holomorphes à énergies bornées est le point de départ de toute la théorie de Floer symplectique ainsi que de la géométrie énumérative de Gromov-Witten. Dans le présent contexte (pas d'orbite périodique, variété symplectique exacte et lagrangien exact) il se lit de la manière suivante :

les suites de courbes holomorphes dans une classe d'homologie donnée convergent vers des orbites brisées.

Pour donner le sens précis de cette convergence nous devons donner la définition suivante :

Définition B.4 Édifices holomorphes dans $(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R} \times \gamma)$

Un édifice holomorphe de hauteur k représentant $A \in \pi_2(r; m)$ est la donnée de

$$\{(u^1, j^1), \dots, (u^k, j^k)\}$$

où :

1. (u^1, j^1) est une courbe holomorphe dans $\mathbb{R} \times Y$ représentant $A_1 \in \pi_2(r; m_1)$
2. (u^i, j^i) est une famille de courbes holomorphe $(u_1^i, j_1^i) \dots (u_{k_i}^i, j_{k_i}^i)$ représentant $A_j^i \in \pi_2(r_j^i; m_j^i)$
3. Pour tout i , $k_i = \sum_{l=1}^{k_{i-1}} l(m_l^{i-1})$
4. Pour tout i , $r_1^i \dots r_{k_i}^i = m_1^{i-1} \dots m_{k_{i-1}}^{i-1}$
5. A chaque niveau i au moins une courbe (u_k^i, j_k^i) est non-triviale
6. $m_1^k \dots m_{k_k}^k = m$
7. $A_1 + \sum A_l^2 + \dots + \sum A_l^k = A$

Édifices holomorphes dans $(\mathbb{R} \times Y, C)$

Un édifice holomorphe de hauteur $k^+ |1| k^-$ représentant $A \in \pi_2(r, m)$ est la donnée de :

- (i) Un édifice holomorphe dans $(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R} \times \gamma^+)$ de hauteur k^+ représentant $A^+ \in \pi(r, m^+)$
- (ii) $k = l(m^+)$ courbes holomorphes dans $(\mathbb{R} \times Y, C)$ représentant $A_l \in \pi_2(r_j, m_j)$
- (iii) $k' = \sum l(m_j)$ édifices holomorphes dans $(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R} \times \gamma^-)$ de hauteur au plus k^- (avec au moins un de hauteur exactement k^-) représentant $A^- \in \pi(r_l, m_l^-)$ tels que :

1. $r_1 \dots r_k = m^+$
2. $r_1 \dots r_{k'} = m_1 \dots m_k$
3. $A^+ + \sum A_l + \sum A_l^- = A$

Remarque B.5 Il y a évidemment une relation d'équivalence d'édifices holomorphes donnée par les reparamétrisations conformes de chaque composante. De plus il existe une commutativité des courbes triviales dans les édifices holomorphes de hauteur k . Nous ne rentrerons pas dans les détails de cette relation car nous n'utiliserons que les édifices de "petite" hauteur où ces phénomènes n'apparaissent pas.

Remarque B.6 La définition est quelque peu hermétique. Elle diffère de la définition générale d'édifice holomorphe dans (Bourgeois et al., 2003) car nous ne nous intéressons qu'aux courbes ayant la topologie du disque et un seul marqueur à l'infini. De manière moins rigoureuse, mais peut-être plus claire, on peut penser à un édifice holomorphe comme un empilement de courbes holomorphes dont chaque marqueur positif des niveaux inférieur correspond à un marqueur négatif du niveau précédent, de sorte que nous pouvons recoller le tout pour obtenir une courbe représentant la classe d'homotopie désirée (voir figure B.2)

Le théorème énoncé ici est la généralisation du théorème de Gromov (Gromov, 1985) telle qu'énoncé dans (Bourgeois et al., 2003) (encore une fois avec les modifications dues au fait que notre situation est plus simple) :

Théorème B.7 (Bourgeois et al., 2003)

Cas du cylindre trivial

(I) La première partie décrit l'ensemble des édifices de hauteur k comme contenant la limite des courbes holomorphes.

Soit $(u_n, j_n) \in \mathcal{M}_A(r; m)$ une suite, alors il existe un édifice holomorphe de hauteur k $U := \{(u_1, j_1) \dots, (u_k, j_k)\}$ représentant A telle que (u_n, j_n) admet une sous-suite convergente vers U dans le sens suivant :

Il existe $k - 1$ arcs sur D_n séparant D_n en k -composantes connexes, chacune étant identifiée, à D_{k_i} (la marqueur positif correspondant à l'arc précédent), tel que sur chaque composante

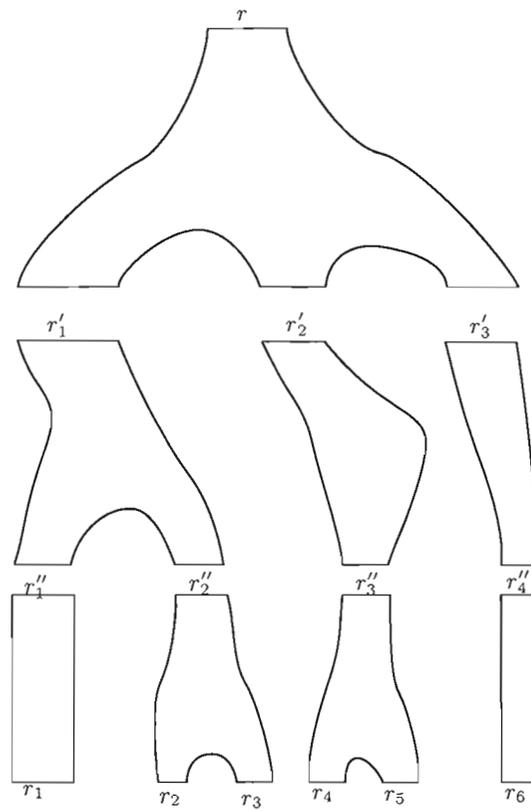


Figure B.2 Edifice holomorphe de hauteur 3 représentant $A \in \pi_2(r; r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6)$

$u_n|_{D_{k_i}}$ converge uniformément sur les compacts vers u_i et $j_n|_{D_{k_i}}$ converge vers j_i (voir figure plus bas).

(II) L'ensemble des édifices de hauteur k , $k \in \{1 \cdots CZ(A)\}$, représentant A est compact pour la convergence définie plus haut : une suite U_n d'édifices converge si la hauteur est constante à partir d'un certain rang et chacun des termes converge comme précédemment.

Cas d'une concordance quelconque

(I) Soit (u_n, j_n) une suite dans $\widetilde{\mathcal{M}}_A(r^-; m^+)$, alors il existe un édifice holomorphe U de hauteur $k^-|1|k^+$ représentant A tel que (u_n, j_n) admet une sous-suite convergeant vers U de la même manière que précédemment (rappelons qu'une concordance est triviale pour $\|t\|$ suffisamment grand)

(II) L'ensemble des édifice de hauteur $k^-|1|k^+$ est compact pour la convergence séquentielle mentionnée précédemment.

La forme simple que prend ici le théorème de Gromov est dû à quelques faits. Tout d'abord fixer une classe $A \in \pi_2(r; m)$ permet de dire que l'énergie d'une suite est constante. Ensuite le fait qu'il n'y ait pas d'orbites périodiques du champ de Reeb empêche un édifice d'être formé d'un disque dont le bord est une orbite (on aurait pu aussi demander qu'aucune orbite ne soit contractile et autoriser ainsi les variétés compactes). Enfin les phénomènes de concentration de courbure ne peuvent avoir lieu, car la variété symplectique est exacte (donc il n'y a pas de sphère holomorphe) et les concordances lagrangiennes sont nécessairement exactes (donc il n'y a pas de disques holomorphes).

Remarquons maintenant deux conséquences du théorème de compacité :

1. Il existe une compactification de $\mathcal{M}_A(r; m)$ formée d'édifices.
2. Pour un J régulier, les espaces $\widehat{\mathcal{M}}_A(r; m)$ avec $CZ(A) = 1$ sont de dimension 0. Il ne peuvent dégénérer qu'en des édifices de hauteur 1, autrement on autoriserait des espaces non-vides avec $CZ(B) = -1$, ce qui est impossible par régularité. Ainsi ils sont eux-mêmes compacts et consistent donc en un nombre fini de points.
3. De la même manière, pour un J régulier, les espaces $\widehat{\mathcal{M}}_A(r; m)$ avec $CZ(A) = 2$ ne peuvent dégénérer qu'en des édifices de hauteur au plus 2 et donc leurs bords consistent en des

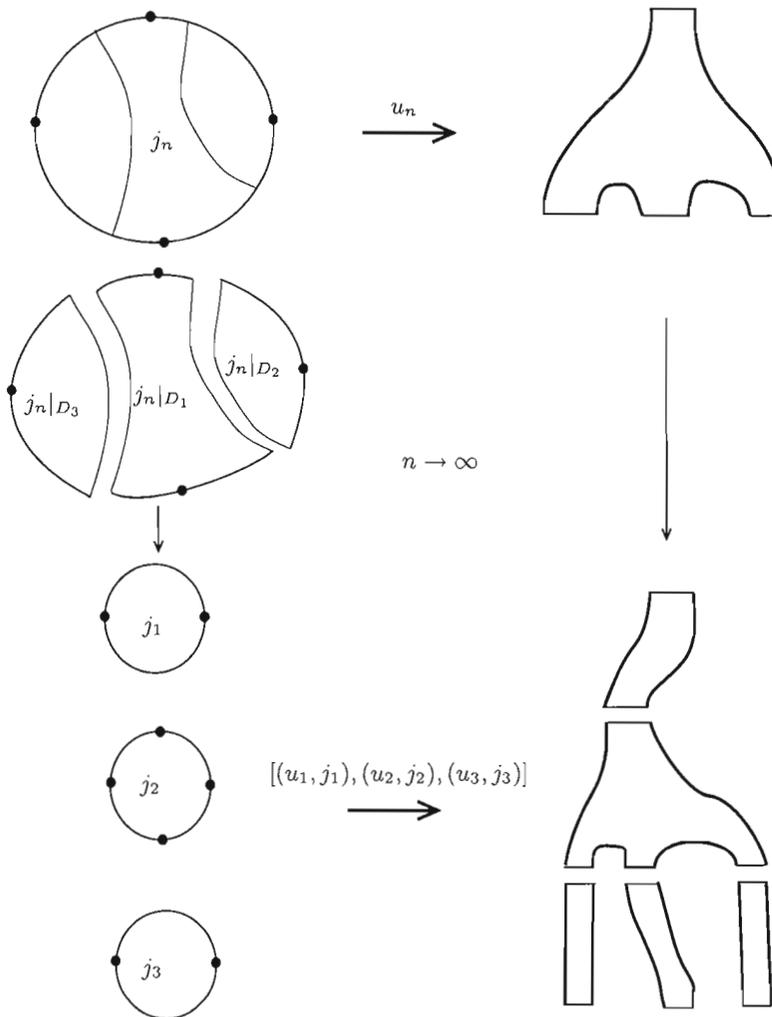


Figure B.3 Exemple de Convergence

trajectoire brisées apparaissant dans $\partial \circ \partial$.

Recollement de Floer

Le théorème de Floer est une réciproque au théorème de Gromov. Il complète la description de la compactification des espaces de courbes holomorphes dans notre contexte. Essentiellement il dit que tout édifice de hauteur k représentant A est limite d’une suite de courbes holomorphes.

Dans ce qui suit une courbe holomorphe (u, j) est vue comme le niveau d’un édifice holomorphe, en supposant que toutes les autres composantes connexes de ce niveau sont triviales.

Théorème B.8 (Bourgeois, 2003) Pour tout r_i lettre de m , il existe une application

$$gl : \mathcal{M}_{A_1}(r; m) \times (0, \delta_0) \times \mathcal{M}_{A_2}(r_i; m') \rightarrow \mathcal{M}_{A_1+A_2}(r, m_i(m'))$$

telle que $gl((u_1, j_1), \delta, (u_2, j_2))$ converge vers l'édifice $\{(u_1, j_1), (u_2, j_2)\}$ quand δ tend vers 0

En appliquant ce théorème de manière inductive on obtient :

$$\partial \overline{\mathcal{M}}_A(r; m) = \bigcup_{m_i, r_i} \prod_i \mathcal{M}_{A_i}(r_i, m_i)$$

Remarque B.9 Le théorème de recollement ainsi que la partie (I) du théorème de Gromov suffisent pour en déduire la partie (II).

La deuxième version du théorème de recollement permet une réciproque à la deuxième partie du théorème B.7 :

Théorème B.10 (Bourgeois, 2003) Pour tout r_i lettre de m il existe des applications

$$gl : \widetilde{\mathcal{M}}_{A_1}(r; m) \times (0, \delta_0) \times \mathcal{M}_{A_2}(r_i; m') \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{A_1+A_2}(r, m_i(m'))$$

et

$$gl : \mathcal{M}_{A_1}(r; m) \times (0, \delta_0) \times \widetilde{\mathcal{M}}_{A_2}(r_i; m') \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{A_1+A_2}(r, m_i(m'))$$

telle que $gl((u_1, j_1), \delta, (u_2, j_2))$ converge vers l'édifice $\{(u_1, j_1), (u_2, j_2)\}$ quand δ tend vers 0

Conséquences Nous concluons cette section en donnant les conséquence de tout les théorèmes énoncés qui sont utiles dans la section 5.3.

La compactification des espaces de module de dimension 1 dans le cas des cylindre triviaux est une variété compacte de dimension 1. Son bord consiste donc en un nombre pair de points. Cette compactification admet une description explicite. En effet, comme $CZ(A) = 2$, les édifices holomorphes sont nécessairement de hauteur 2 au bord (chaque composante ayant indice 1) ainsi on obtient :

$$\partial \left(\overline{\widehat{\mathcal{M}}_A(r; m)} \right) = \bigcup_{\substack{m' \in \mathbf{F}(\mathcal{R}) \\ A_1 \in \pi_2(r; m'(i)), A_2 \in \pi_2(m'(i), m'') \\ CZ(A_1) = CZ(A_2) = 1 \\ m'_i(m'') = m \\ A_1 + A_2 = A}} \widehat{\mathcal{M}}_{A_1}(r; m') \times \widehat{\mathcal{M}}_{A_2}(m'(i), m'')$$

Et donc nous obtenons :

$$\sum_{\substack{m' \in \mathbf{F}(\mathcal{R}) \\ A_1 \in \pi_2(r; m'(i)), A_2 \in \pi_2(m'(i), m'') \\ CZ(A_1) = CZ(A_2) = 1 \\ m'_i(m'') = m \\ A_1 + A_2 = A}} \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_{A_1}(r; m') \cdot \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_{A_2}(m'(i), m'') = 0 \quad (\text{B.4})$$

De la même manière la compactification de l'ensemble des courbes holomorphes de dimension 1 représentant A dans le cas d'une concordance C quelconque est formée d'édifices de hauteur $1|1|0$ ou de hauteur $0|1|1$ où les composante s'appuyant sur $\mathbb{R} \times K$ ont indice 1 et celles sur C ont indice 0. Ainsi :

$$\begin{aligned} \partial \left(\overline{\widetilde{\mathcal{M}}_A(r^+; m^-)} \right) = & \bigcup_{\substack{m' \in \mathbf{F}(\mathcal{R}^+) \\ A^+ \in \pi_2(r, m'), A_i^- \in \pi_2(m'(i), m_i^-) \\ CZ(A_i^-) = CZ(A^+) - 1 = 0 \\ m_1^- \dots m_{l(m')}^- = m^-}} \widehat{\mathcal{M}}_{A^+}(r, m') \times \prod_i \widetilde{\mathcal{M}}_{A_i^-}(m'(i), m_i^-) \\ & \bigsqcup \bigcup_{\substack{m' \in \mathbf{F}(\mathcal{R}^-) \\ A^+ \in \pi_2(r, m'), A_i^- \in \pi_2(m'(i), m_i^-) \\ CZ(A^+) = CZ(A_i^-) - 1 = 0 \\ m'_i(m_i^-) = m}} \widetilde{\mathcal{M}}_{A^+}(r, m') \times \widehat{\mathcal{M}}_{A_i^-}(m'(i), m_i^-). \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{\substack{m' \in \mathbf{F}(\mathcal{R}^+) \\ A^+ \in \pi_2(r, m'), A_i^- \in \pi_2(m'(i), m_i^-) \\ CZ(A_i^-) = CZ(A^+) - 1 = 0 \\ m_1^- \dots m_{l(m')}^- = m^-}} \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_{A^+}(r, m') \cdot \prod_i \#_2 \widetilde{\mathcal{M}}_{A_i^-}(m'(i), m_i^-) \\ & + \sum_{\substack{m' \in \mathbf{F}(\mathcal{R}^-) \\ A^+ \in \pi_2(r, m'), A_i^- \in \pi_2(m'(i), m_i^-) \\ CZ(A^+) = CZ(A_i^-) - 1 = 0 \\ m'_i(m_i^-) = m}} \#_2 \widetilde{\mathcal{M}}_{A^+}(r, m') \cdot \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_{A_i^-}(m'(i), m_i^-). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

BIBLIOGRAPHIE

- Arnol'd, V. I. 1974. *Mathematical methods of classical mechanics*. T. 60, série *Graduate Texts in Mathematics*. New York : Springer-Verlag. Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, Corrected reprint of the second (1989) edition.
- Bennequin, D. 1983. *Entrelacements et équations de Pfaff*. Coll. « Third Schnepfenried geometry conference, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982) ». T. 107, série *Astérisque*, p. 87–161. Paris : Soc. Math. France.
- Bourgeois, F. 2003. *A Morse-Bott approach to contact homology*. Coll. « Symplectic and contact topology : interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001) ». T. 35, série *Fields Inst. Commun.*, p. 55–77. Providence, RI : Amer. Math. Soc.
- . 2006. « Contact homology and homotopy groups of the space of contact structures », *Math. Res. Lett.*, vol. 13, no. 1, p. 71–85.
- Bourgeois, F., Y. Eliashberg, H. Hofer, K. Wysocki, et E. Zehnder. 2003. « Compactness results in symplectic field theory », *Geom. Topol.*, vol. 7, p. 799–888 (electronic).
- Chekanov, Y. 2002. « Differential algebra of Legendrian links », *Invent. Math.*, vol. 150, no. 3, p. 441–483.
- Darboux, G. 1909. « Sur certains systèmes d'équations différentielles linéaires », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, vol. 26, p. 449–471.
- Ekhholm, T. 2006. « Rational Symplectic Field Theory over \mathbb{Z}_2 for exact Lagrangian cobordisms », *ArXiv Mathematics e-prints*.
- Ekhholm, T., J. Etnyre, et M. Sullivan. 2005. « The contact homology of Legendrian submanifolds in \mathbb{R}^{2n+1} », *J. Differential Geom.*, vol. 71, no. 2, p. 177–305.
- Ekhholm, T., K. Honda, et T. Kálmán. —. Invariant of exact lagrangian cobordism, *à paraître*.
- Eliashberg, Y. 1989. « Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds », *Invent. Math.*, vol. 98, no. 3, p. 623–637.
- Eliashberg, Y. 1990a. *Filling by holomorphic discs and its applications*. Coll. « Geometry of low-dimensional manifolds, 2 (Durham, 1989) ». T. 151, série *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, p. 45–67. Cambridge : Cambridge Univ. Press.
- . 1990b. « Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2 », *Internat. J. Math.*, vol. 1, no. 1, p. 29–46.

- Eliashberg, Y. et M. Fraser. 1998. *Classification of topologically trivial Legendrian knots*. Coll. « Geometry, topology, and dynamics (Montreal, PQ, 1995) ». T. 15, série *CRM Proc. Lecture Notes*, p. 17–51. Providence, RI : Amer. Math. Soc.
- Eliashberg, Y., A. Givental, et H. Hofer. 2000. « Introduction to symplectic field theory », *Geom. Funct. Anal.*, no. Special Volume, Part II, p. 560–673. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999).
- Eliashberg, Y. et N. Mishachev. 2002. *Introduction to the h-principle*. T. 48, série *Graduate Studies in Mathematics*. Providence, RI : American Mathematical Society.
- Etnyre, J. B. 2005. *Legendrian and transversal knots*. Coll. « Handbook of knot theory », p. 105–185. Elsevier B. V., Amsterdam.
- Etnyre, J. B. et K. Honda. 2001. « Knots and contact geometry. I. Torus knots and the figure eight knot », *J. Symplectic Geom.*, vol. 1, no. 1, p. 63–120.
- . 2002. « Tight contact structures with no symplectic fillings », *Invent. Math.*, vol. 148, no. 3, p. 609–626.
- . 2003. « On connected sums and Legendrian knots », *Adv. Math.*, vol. 179, no. 1, p. 59–74.
- Floer, A., H. Hofer, et D. Salamon. 1995. « Transversality in elliptic Morse theory for the symplectic action », *Duke Math. J.*, vol. 80, no. 1, p. 251–292.
- Fuchs, D. et S. Tabachnikov. 1997. « Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space », *Topology*, vol. 36, no. 5, p. 1025–1053.
- Geiges, H. 2006. *Contact geometry*. Coll. « Handbook of differential geometry. Vol. II », p. 315–382. Elsevier/North-Holland, Amsterdam.
- Giroux, E. 1991. « Convexité en topologie de contact », *Comment. Math. Helv.*, vol. 66, no. 4, p. 637–677.
- . 2002. « Géométrie de contact : de la dimension trois vers les dimensions supérieures ». In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, p. 405–414, Beijing. Higher Ed. Press.
- Gray, J. W. 1959. « Some global properties of contact structures », *Ann. of Math. (2)*, vol. 69, p. 421–450.
- Gromov, M. 1985. « Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds », *Invent. Math.*, vol. 82, no. 2, p. 307–347.
- Hofer, H., K. Wysocki, et E. Zehnder. 1996. « Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations. I. Asymptotics », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, vol. 13, no. 3, p. 337–379.
- Honda, K. 2000. « On the classification of tight contact structures. I », *Geom. Topol.*, vol. 4,

- p. 309–368 (electronic).
- Hörmander, L. 1990. *An introduction to complex analysis in several variables*. T. 7, série *North-Holland Mathematical Library*. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., third édition.
- Kálmán, T. 2005. « Contact homology and one parameter families of Legendrian knots », *Geom. Topol.*, vol. 9, p. 2013–2078 (electronic).
- Kobayashi, S. et K. Nomizu. 1996. *Foundations of differential geometry. Vol. I*. Coll. « Wiley Classics Library ». New York : John Wiley & Sons Inc. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.
- Kronheimer, P. B. et T. S. Mrowka. 1993. « Gauge theory for embedded surfaces. I », *Topology*, vol. 32, no. 4, p. 773–826.
- Lalonde, F. 1992. « Suppression lagrangienne de points doubles et rigidité symplectique », *J. Differential Geom.*, vol. 36, no. 3, p. 747–764.
- Lalonde, F. et J.-C. Sikorav. 1991. « Sous-variétés lagrangiennes et lagrangiennes exactes des fibrés cotangents », *Comment. Math. Helv.*, vol. 66, no. 1, p. 18–33.
- Lisca, P. et G. Matić. 1998. « Stein 4-manifolds with boundary and contact structures », *Topology Appl.*, vol. 88, no. 1-2, p. 55–66. Symplectic, contact and low-dimensional topology (Athens, GA, 1996).
- Livingston, C. 2004. « The concordance genus of knots », *Algebr. Geom. Topol.*, vol. 4, p. 1–22 (electronic).
- Lutz, R. 1977. « Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 27, no. 3, p. ix, 1–15.
- McDuff, D. et D. Salamon. 1998. *Introduction to symplectic topology*. Coll. « Oxford Mathematical Monographs ». New York : The Clarendon Press Oxford University Press, second édition.
- Milnor, J. 1968. *Singular points of complex hypersurfaces*. Coll. « Annals of Mathematics Studies, No. 61 ». Princeton, N.J. : Princeton University Press.
- Ozsváth, P. et Z. Szabó. 2004. « Holomorphic disks and genus bounds », *Geom. Topol.*, vol. 8, p. 311–334 (electronic).
- Polterovich, L. 1991. « The surgery of Lagrange submanifolds », *Geom. Funct. Anal.*, vol. 1, no. 2, p. 198–210.
- Rolfsen, D. 1990. *Knots and links*. T. 7, série *Mathematics Lecture Series*. Houston, TX : Publish or Perish Inc. Corrected reprint of the 1976 original.
- Świątkowski, J. 1992. « On the isotopy of Legendrian knots », *Ann. Global Anal. Geom.*, vol. 10, no. 3, p. 195–207.

- Viterbo, C. 1987. « Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d'action et indice des systèmes hamiltoniens », *Bull. Soc. Math. France*, vol. 115, no. 3, p. 361–390.
- Weinstein, A. 1971. « Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds », *Advances in Math.*, vol. 6, p. 329–346 (1971).
- . 1991. « Contact surgery and symplectic handlebodies », *Hokkaido Math. J.*, vol. 20, no. 2, p. 241–251.

INDEX

- ω -convexe
 - Structure de contact, 42
- $\mathcal{A}(K)$, 74
- $\text{Diff}_\xi(M)$, 11
- $\text{Diff}_\omega(M)$, 31
- D_n , 74
- $\mathbf{F}(\mathcal{R})$, 74
- $HCL(K)$, 78
- $\text{Ham}_\omega(M)$, 32
- $\mathfrak{ham}_\omega(M)$, 32
- $\mathfrak{ham}_\xi(M)$, 11
- $\mathcal{L}(K)$, 18
- Π , 23
- $\Pi(K)$, 23
- \mathcal{R} , 73
- R_α , 12
- $TB(\mathcal{L}(K))$, 27
- \mathfrak{b} , 31
- $\text{Cont}(Y)$, 25
- $\text{Cont}_{OT}(M)$, 26
- $\#$, 31
- $g(K)$, 6
- $g(K, A)$, 6
- $g_X(K, A)$, 6
- g_α , 14
- $g_{cob}(K^-, K^+; M)$, 60
- $g_s(K)$, 6
- $\mathcal{J}^1(M)$, 16
- $\pi(K)$, 23
- $r(K, [\Sigma])$, 21
- $\text{symp}_\omega(M)$, 31
- tb_K , 18
- $tb(K)$, 19
- Chirurgie
 - Legendrienne, 28
- Cobordisme symplectique, 46
- Concordance, 7
- Contact
 - Forme de, 11
 - Structure de, 10
 - J -convexe, 40
 - équivalence de, 11
 - Isotopie de, 11
 - Variété de, 11
 - variété de
 - symplectisation d'une, 44
- Contactomorphisme, 11
- Coordonnées de Jet, 17
- Coordonnées legendriennes, 17
- Crochet de Lagrange, 13
- Feuilletage caractéristique, 15

- Fonction strictement pluri-sousharmonique, 41
- Forme de Levi, 40
- Front d'onde, 23
- Genre
 - 4-boule, 6
 - de Cobordisme, 60
 - de Seifert, 6
- Hamiltonien, 32
 - Champ de vecteurs, 32
 - de contact, 14
 - Difféomorphisme, 32
- Holonome, 61
- Homologie de contact legendrienne, 78
- Isomorphismes musicaux, 31
- Isotopie
 - hamiltonienne, 39
 - Lagrangienne, 38
 - Symplectique, 38
- Isotrope
 - Sous-variété, 15
- Lagrangien
 - Aire symplectique de, 34
 - Immersion
 - formelle, 61
- Lagrangien-cobordant, 51
- Lagrangien-concordant, 51
- Lagrangienne
 - Projection, 23
- Sous-variété, 33
 - Exacte, 34
- Legendrienne
 - Isotopie, 15
 - Sous-variété, 14
- Liouville
 - Champ de, 32
 - Forme de, 33
- Maslov
 - Indice de, 35
- Nœud
 - Algébrique, 68
- Nœud Legendrien
 - Front d'un, 23
 - Nombre de rotation d'un, 21
 - Thurston-Bennequin d'un, 18
- Nombre de rotation, 21
- Reeb
 - Champs de, 12
 - Corde de, 73
- Remplissage
 - Symplectique, 42
- Remplissage symplectique, 42
- Repère, 18
- Simple, 22
- Stein
 - Remplissage, 41
 - Variété, 41

Structure presque-complexe compatible, 31

Surface de Seifert, 6

Symplectique

 Forme, 30

 Variété, 30

Symplectisation, 44

Symplectomorphisme, 31

Tendue

 Structure de contact, 25

Thurston-Bennequin, 18

Vrillée

 Structure de contact, 25