UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

UTILISATION DE TEXTES ANCIENS DANS L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES (DIDACTIQUE)

PAR

DAVID GUILLEMETTE

NOVEMBRE 2009

REMERCIEMENTS

Je souhaite particulièrement remercier mon directeur de recherche M. Louis Charbonneau, professeur au département de mathématiques de l'UQAM, pour son soutien, sa confiance et les nombreux entretiens passionnés et enrichissants qui ont animé nos rencontres. Son expertise et son ouverture d'esprit m'auront permis de mener à terme ce projet avec rigueur et enthousiasme. Aussi, je remercie l'ensemble des étudiants qui ont bien voulu se prêter à mes expérimentations et je salue la générosité et la disponibilité de leurs professeurs M. Marc Simard du Cégep André-Laurendeau et M. Daniel Rivard du Cégep régional de Lanaudière à Joliette qui m'ont chaleureusement accueilli. De plus, je remercie M. Joël Sakarovitch, professeur à l'Université René Descartes, de m'avoir inspiré pour cette recherche. Je remercie Christian Morasse, mon ami et collègue, pour son soutien et son écoute. Enfin, merci à ma conjointe Anne-Laure pour ses conseils, ses encouragements et son appui.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Ce mémoire relate une recherche qualitative concernant l'utilisation de textes anciens dans l'enseignement du calcul différentiel au niveau collégial. Basée sur des expériences positives associées à ce type d'activités dans le cadre d'un cours d'histoire des mathématiques, cette étude explore les éléments méthodologiques entourant l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Cette question de la méthodologie d'utilisation reste peu explorée. Dans ce mémoire, nous tenterons d'aller au-delà des expériences pratiques rapportées généralement de façon positive par de nombreuses études et nous nous pencherons plus précisément sur les éléments méthodologiques qui amènent ces expériences intéressantes en classe.

Trois questions feront l'objet de ce mémoire. D'abord, est-il possible de recréer ces expériences positives au travers d'une activité de lecture d'un texte ancien en classe en suscitant des réflexions métamathématiques chez l'étudiant pré universitaire dans le cadre du cours de calcul différentiel? Si tel est le cas, jusqu'à quel point ces réflexions peuvent-elles s'avérer profondes? Et surtout, quels éléments particuliers à la lecture de textes et au design de l'activité sont susceptibles de susciter ces réflexions?

Une activité de lecture d'un texte a été construite et menée en classe. Elle était suivie d'entrevues individuelles avec une vingtaine d'étudiants. L'analyse de ces entrevues nous aura permis d'observer les nombreuses réflexions métamathématiques qu'a suscitées l'atelier. Entre autres, nous avons noté des réflexions autour de l'historicité des notions abordées, de la rigueur ainsi que de la notation. Cependant, ces réflexions nous sont apparues peu profondes. Les participants nous ont semblé trop peu détachés de la prestation. Certains problèmes d'ordre méthodologique expliquent ce constat. À partir de l'expérimentation, il a été difficile de déterminer rigoureusement les éléments du design qui ont suscité les réflexions métamathématiques chez les étudiants. Il aurait été intéressant de reprendre l'activité sans la présentation du contexte sociohistorique ou encore sans la phase de lecture. Ce qui nous a amenés à nous questionner sur les liens étroits qu'entretiennent les phases de présentation du contexte sociohistorique et de lecture du texte ancien. Liens qui pourraient faire l'objet d'une étude ultérieure.

Mots clés : ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUES LECTURE TEXTES ANCIENS CALCUL DIFFÉRENTIEL MÉTHODOLOGIE

INTRODUCTION

C'est dans le cadre d'un échange étudiant que je me suis retrouvé à Paris pour faire ma dernière année au baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire. La capitale française est un véritable tourbillon de culture et de savoirs. Avoir la chance d'y étudier, c'est prendre part, pendant un moment, à un chaos prolifique et c'est aussi se laisser inspirer par la richesse historique et culturelle de lieux exceptionnels. C'est à l'École de Médecine au cœur de St-Germain-des-Prés que j'ai réussi, non sans difficulté, à m'inscrire à un cours d'histoire des mathématiques. Le cours s'adressant aux étudiants de troisième année de licence de mathématiques pures, j'appréhendais gravement son niveau de difficulté étant donné ma formation en éducation.

Mes premiers contacts avec l'histoire des mathématiques avaient été plutôt brefs et peu élaborés. J'avais entendu parler d'Euclide lors d'un cours de géométrie et de l'aspect didactique de son œuvre. Jusqu'alors, les éléments historiques entourant mes activités mathématiques s'étaient présentés plutôt comme des capsules apportant peu de réflexions. Appréciant grandement l'histoire en général, j'attendais impatiemment les enseignements de M. Joël Sakarovitch, professeur au département de mathématiques de l'Université René Descartes (Paris V).

J'aime qu'on me raconte les événements du passé qui m'apparaissent comme autant de repères pour m'expliquer le présent. J'aime les anecdotes et les récits historiques qui m'amènent à m'imaginer les différentes cultures et les différentes époques. En ce qui concerne l'histoire des mathématiques, j'ai un intérêt particulier pour les grands mathématiciens qui sont pour moi de grands héros. Je suis toujours grandement heureux d'associer de grandes découvertes à différents personnages et contextes historiques. M. Sakarovitch m'est apparu comme une véritable encyclopédie ambulante entourant l'histoire des mathématiques et des sciences en général. J'appréciais particulièrement le fait que son cours regorgeait littéralement de références historiques ou intellectuelles, d'anecdotes particulières et d'une foule d'informations factuelles entourant le développement des mathématiques et des sciences.

Une dimension particulière du cours était la lecture de textes anciens proposée durant les travaux pratiques. Ces textes, la plupart du temps des correspondances entre mathématiciens, rendaient compte d'éléments historiques et mathématiques vus durant le cours. D'abord, le fait de lire les écrits de grands penseurs comme Descartes, Leibniz ou Newton m'intéressait au plus haut point. Juste pour le plaisir narcissique d'avoir lu de tels auteurs. Aussi, l'interprétation des textes écrits dans un français ancien représentait un réel défi. En effet, en ce qui concerne le vocabulaire (mathématique ou non), la syntaxe et la structure de phrases, l'activité amène beaucoup de difficultés. Également, on arrive, au travers de ce type de lectures, à reconnaître la personnalité de l'auteur et à s'imaginer les relations entretenues entre les correspondants. Il est très agréable de se replonger dans le contexte historique et de s'imaginer ces grands hommes déambuler, dans leurs réflexions, dans les rues de Paris de leur époque et fréquenter de grands personnages.

D'un point de vue didactique, j'y ai vu une foule de situations intéressantes et surtout envisageables en classe. Les problèmes originaux présents dans les textes anciens sont riches, ouverts et nécessitent la plupart du temps des raisonnements peu conventionnels. Les mathématiciens de l'époque (XVI^e et XVII^e siècle) proposent des démarches très intuitives et omettent la plupart du temps d'appuyer clairement leurs raisonnements. Du moins, leur rapport au formalisme diffère énormément de nos démarches actuelles modernes. Cette forme de discours intuitif et ouvert force, d'une part, le lecteur d'aujourd'hui à réfléchir sur les concepts de rigueur et, d'autre part, suscite l'admiration devant une telle liberté et innovation face aux Anciens. Par ailleurs, les références constantes à des résultats ou à des penseurs de l'Antiquité peu connus peuvent aussi être une difficulté importante. Cependant, ces références piquent la curiosité. Ainsi, la lecture d'un texte peut en amener une autre ou encore pousser la recherche sur un auteur ou un concept.

Dans ce sens, l'histoire des mathématiques nous permet de situer les mathématiques modernes dans un continuum au niveau des théories, des techniques, de la rigueur ou encore de la notation. Ainsi, elle apporte un questionnement sur la nature des mathématiques et des sciences et leurs contributions au développement des individus, à la culture des sociétés et à la civilisation. De plus, l'histoire apporte une image plus humaine, plus riche et plus vivante des mathématiques. Personnellement, l'histoire des mathématiques se situe au cœur de mon amour pour le savoir, les sciences et la liberté. Elle m'inspire et me passionne.

La lecture de textes anciens est un sujet qui a souvent été abordé depuis les années soixante-dix surtout en France par l'entremise des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) (Weeks, 2008). Certains recueils de ces instituts rassemblent bon nombre d'activités se basant exclusivement sur l'histoire des mathématiques et des sciences (p. ex., Bulletin inter-IREM Épistémologie 1988; *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques,* IREM de Rennes 1995; *Faire des mathématiques à partir de leur histoire,* IREM de Basse-Normandie 1999; *Aux origines du calcul infinitésimal, History in Mathematics Education : The ICMI Study* 2000). Dans ce travail, nous élaborerons une nouvelle activité basée sur la lecture d'un texte ancien connu et analysé dans la classe de M. Sakarovitch. Nous tenterons d'observer et de décrire les réactions des étudiants face à certains éléments de ce cours d'histoire des mathématiques qui m'ont tant marqué et qui transparaîtront dans l'activité. Bien sûr, j'ai un enthousiasme certain à l'égard de ces éléments, mais en est-il de même pour les élèves plus jeunes qui n'étudient pas nécessairement les mathématiques ou la didactique des mathématiques? Leurs réactions et leurs réflexions autour de la lecture de textes anciens seront sans doute différentes des miennes et ne seront pas nécessairement positives. Nous nous questionnerons donc sur ces fameux éléments à la fois intrinsèques et extrinsèques au cours d'histoire des mathématiques de M. Sakarovitch qui m'ont tant fait apprécier la lecture de textes anciens et qui sont susceptibles de recréer le même effet chez les étudiants.

Bien entendu, le contexte dans lequel j'ai été amené à vivre ces expériences positives ne pourra jamais être recréé en classe. Le contexte d'échange étudiant, la ville de Paris ou la personnalité du professeur sont des facteurs sur lesquels nous n'avons, évidemment, aucun contrôle. Cependant, nous pouvons cibler quelques-uns de ces facteurs qui, à mon avis, m'ont permis de vivre ces expériences positives et qui pourraient être réanimés et recréés à l'intérieur d'une situation d'apprentissage en classe de mathématiques utilisant la lecture de textes anciens.

Ainsi, la présentation du contexte sociohistorique, la présence d'images et d'anecdotes autour du contexte d'émergence des notions mathématiques ou encore l'aspect original et novateur du texte sont des éléments que nous pourrons reproduire à l'intérieur d'une activité d'apprentissage en classe. Le mathématicien lui-même, auteur du texte, devra être intéressant de par sa personnalité, ses découvertes, ses relations ou ses mentors. L'époque à laquelle le mathématicien a vécu devra être riche et intéressante. Il devra être possible d'en ressortir plusieurs récits, références intellectuelles ou historiques. Aussi, il faudra choisir un thème fournissant une image plus humaine et plus vivante des mathématiques. Le texte et l'activité qui l'accompagne devront amener un certain questionnement sur ce que sont les mathématiques, leurs rôles, leur contexte d'émergence, les forces qui motivent leurs développements aujourd'hui et durant l'histoire et leurs utilités dans les sociétés modernes. Ces réflexions de nature épistémologique seront au cœur du design de cette activité.

Il faut comprendre aussi que mon enthousiasme pour la lecture de textes anciens ne tient pas seulement aux éléments historiques, épistémologiques ou purement mathématiques, mais aussi aux réflexions didactiques qui en émergent. Dans ce sens, il nous faudra aussi choisir un texte suscitant ce type de réflexions. La notation utilisée par l'auteur devra être intéressante et amener des réflexions sur son efficacité et sur son historicité. La rigueur démontrée par le mathématicien de l'époque se devra aussi d'être discutable au travers de la lecture et devra amener le lecteur à s'interroger sur ses propres pratiques mathématiques. De plus, il faudra que le vocabulaire utilisé sorte de l'ordinaire et pique la curiosité.

Il s'agit donc d'autant de points qui ont su capter mon intérêt durant les activités de lectures de textes anciens de M. Sakarovitch. Le choix du texte et le design de l'activité d'apprentissage devront donc être faits de façon judicieuse et devront être le plus possible en correspondance avec ces éléments. Ici, l'objectif est bel et bien de recréer avec des étudiants québécois ces expériences positives vécues lors de mon séjour en France. Expériences positives étant liées à certaines réflexions spécifiques autour de l'histoire, des mathématiques et de l'apprentissage des mathématiques dans le cadre d'une activité de lecture de textes anciens.

Dans le premier chapitre, nous situerons le sujet à l'intérieur d'une problématique actuelle concernant l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques pour cibler précisément nos questions de recherche. Ensuite, dans le chapitre II, nous élaborerons une activité d'apprentissage basée sur la lecture d'un texte ancien et décrirons les éléments d'ordre méthodologique entourant l'expérimentation conçue afin d'aborder ces questions de recherche. Le chapitre III sera consacré à l'analyse des entrevues réalisées à la suite de cette activité. Enfin, dans le chapitre IV, nous tenterons de répondre à nos questions de recherche et nous poserons un regard critique sur la méthodologie employée pour situer clairement les limites de l'étude.

D'autre part, le lecteur du présent mémoire devra être averti de l'utilisation à la fois du « je » et du « nous » au travers des différents chapitres. Comme cette étude se base sur des expériences personnelles vécues, l'utilisation du « je » se veut une référence directe à ces histoires de vie, lesquelles ont motivé en grande partie l'élaboration de cette recherche. Quant au « nous », son utilisation est motivée par le besoin d'objectivité et de neutralité.

CHAPITRE I

LA PROBLÉMATIQUE

Dans ce premier chapitre, nous résumerons d'abord quelques éléments de littérature autour de l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques et plus particulièrement autour de l'utilisation de textes anciens. Ce qui nous amènera à situer la problématique pour ensuite élaborer précisément nos questions de recherches.

1.1 Revue de la littérature

Comme mentionné en introduction, l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques est un sujet couramment abordé depuis plus d'une trentaine d'années. Bon nombre de revues, livres, et recueils abondent d'exemples d'utilisation et d'expériences positives en classe de toutes sortes. Aussi, plusieurs d'entre eux abordent la lecture de textes anciens et fournissent de nombreuses situations d'apprentissage et activités en classe. Les quelques références mentionnées en introduction en sont de parfaits exemples. De plus, plusieurs ouvrages tendent à rassembler des activités dans le but de confectionner une sorte d'outil de référence pour l'enseignant. Le mémoire de Pascale Roy de l'UQAM (2006) illustre bien ces préoccupations. Cependant, nous remarquerons, en parcourant la littérature, que peu de ces études s'intéressent à la façon d'utiliser ces situations et à la méthodologie permettant d'en évaluer l'impact chez les étudiants. La question du « comment » reste très peu abordée. Il semble y avoir une faiblesse au niveau méthodologique. En effet, il y a peu de réflexions autour de la manière de mener les activités afin de reproduire les expériences positives en question. Dans la prochaine section, nous prendrons connaissance de quelques éléments de la littérature autour de cette problématique. Nous nous limiterons à des articles postérieurs au livre *History in Mathematics Education : The ICMI Study* (2000) qui manifestent une préoccupation explicite en ce qui concerne la méthodologie.

Guliker, Iris, et Klaske Blom. 2001. « A historical angle: A survey of recent literature on the use and value of the history in geometrical education ». *Educational Studies in Mathematics*, no 47, pp. 223-258.

L'article rapporte les résultats d'une enquête sur les études parues surtout dans les années 90 concernant l'utilisation de l'histoire dans enseignement des mathématiques (particulièrement de la géométrie). Les auteurs mentionnent une réelle effervescence du milieu de la recherche et un réel intérêt de la part des enseignants pour l'utilisation de l'histoire. Les auteurs rapportent que la grande majorité des publications sur le sujet se contentent de décrire des expériences (généralement positives) d'enseignants sans fournir de pistes pour l'application en classe ou de réflexions sur la méthodologie employée. À travers leurs lectures, ils ont mis en relief les raisons amenant les enseignants à utiliser l'histoire, les difficultés et les réticences de certains et les différentes façons de le faire. Selon eux, les cas d'utilisation de l'histoire sont isolés et il semble exister un certain fossé entre les études « générales » sur l'utilisation de l'histoire et les expériences pratiques rapportées par d'autres. Selon eux, il faut clairement se questionner de façon globale sur le « comment ». Il faut créer des liens entre la méthodologie utilisée et les expériences positives rapportées.

Weeks, Chris. 2008. « Interview with Evelyne. Barbin ». *HPM Newsletter*, no 67 mars, pp. 1-4.

En entrevue, Évelyne Barbin décrit le contexte d'émergence des IREM en France au début des années 70. Elle mentionne son enthousiasme pour la lecture de textes anciens qui, selon elle, suscite l'intérêt des étudiants et qui, surtout, produit un « choc culturel » en amenant des réflexions épistémologiques sur le sujet. Elle mentionne aussi que l'intérêt de l'histoire ne réside pas dans l'introduction de capsules anecdotiques, mais plutôt dans son intégration véritable au travers des activités d'apprentissage. L'histoire doit être intrinsèque à la démarche pédagogique de l'enseignant et non simplement plaquée. Elle aborde aussi les difficultés liées à une telle entreprise. Ce genre d'activités requiert, évidemment, une bonne connaissance de l'histoire et demande beaucoup d'efforts pour s'approprier le contexte historique, épistémologique et scientifique.

Les prochains articles présentés concernent les recherches doctorales de Uffe Thomas Jankvist. Celles-ci sont axées sur sa préoccupation de développer des outils méthodologiques propres à l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques.

Jankvist, Uffe Thomas. 2008a. « Proceeding HPM2004 & ESU4: Emperical researche on using history of mathematics in mathematics education ». *HPM Newsletter*, no 67 mars, pp. 15-18.

Dans ce résumé de recherches, Jankvist met de l'avant le manque d'études empiriques approfondies autour de l'utilisation de l'histoire soulevé sept ans auparavant par Guliker et Blom. Jankvist a passé en revue l'ensemble des études sur le sujet dans le History and Pedagogy of Mathematics 2004 (HPM2004) et le Fourth European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education (ESU4). Sur les 78 articles qui y sont rassemblés, seulement sept d'entre eux se voulaient de près ou de loin des études empiriques. Quatre l'étaient réellement. Il constate que ce genre de recueil ne vient pas véritablement en aide aux enseignants. Pour Jankvist, la problématique est réelle puisque le programme scolaire danois prévoit d'emblée l'utilisation de l'histoire en classe en tant que *but*. Il est possible d'en dire de même au Québec, nous aborderons plus loin ce point. Reste à savoir si les étudiants sont capables ou non de réflexions métamathématiques. De plus, la plupart des études parues ont tendance à privilégier l'histoire comme un *outil* et ne font que rapporter des expériences personnelles positives vécues en classe. Selon Jankvist, il faut s'interroger sur la manière de transférer ces expériences positives. La question de la méthodologie est posée. Ces questions avaient aussi été soulevées par Arcavi en juin 2007 lors d'une conférence en Islande.

Jankvist, Uffe Thomas. 2007. « Empirical research in the field of using history in mathematics education ». *Nordic Studies in Mathematics Education*, vol. 12, no 3, pp. 83-105.

Dans cet article, Jankvist s'interroge sur le rôle et l'influence que pourraient avoir les recherches empiriques actuelles portant sur le « pourquoi » et le « comment » de l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Il tente de mettre en avant les possibles bénéfices qu'amènerait l'augmentation du nombre de ce type d'études. En introduction, l'auteur souligne la critique de Guliker et Blom concernant le manque de recherches empiriques sur le sujet mentionné plus haut. Il mentionne que tout le monde semble convaincu des vertus de l'utilisation de l'histoire et qu'il nous faut maintenant enquêter sur son efficacité. Dans ce contexte, il met en relief la dépendance entre le cadre méthodologique de recherche et le type d'utilisation de l'histoire qui peut être perçue comme un *but* ou comme un *outil*. Ainsi, l'histoire utilisée comme un *outil* est vue comme un appui au point de vue motivationnel et cognitif pour l'enseignement de concepts spécifiques. L'histoire perçue comme un *but* n'a pas cet aspect d'aide, mais plutôt celui d'*objectif* en tant que tel. Dans ce second cas, ce sont l'historicité des notions et les réflexions épistémologiques qui sont ciblées. Il s'agit des réflexions métamathématiques dont Michelle Artigues discute dans *Épistémologie et didactique* (1990). Pour chacun de ces objectifs, le cadre méthodologique devra nécessairement différer.

Dans le programme danois d'éducation, l'utilisation de l'histoire est prescrite en tant qu'*objectif*. En effet, les programmes exigent un ancrage des réflexions métamathématiques aux différentes notions abordées. Jankvist se questionne alors sur la capacité des étudiants à faire de telles réflexions. Si oui, jusqu'à quel point et de quelles façons? Cet ancrage est-il possible? Comment s'en assurer? Évidemment, ces questions concernent l'histoire vue comme un *but*.

Pour l'expérimentation, deux modules d'enseignements ont été construits et ont été donnés par l'enseignant titulaire du groupe. Un premier portant sur le développement récent (années 40) des ordinateurs et de la détection des erreurs de codage est prétexte à des réflexions et discussions sur l'attribution du crédit lié aux découvertes scientifiques dans un contexte historique. Le module préparait aussi le terrain au débat épistémologique autour des mathématiques construites ou découvertes. Le second module d'enseignement portait sur l'invention du système de cryptage élaboré par Rivest, Shamir et Adleman (RSA) au milieu des années soixante-dix. Encore ici, l'historicité des notions mathématiques mises de l'avant était abordée au cours d'une discussion sur l'attribution des découvertes pour ces avancées en matière de cryptographie et d'une seconde sur les forces et mécanismes sociaux et scientifiques qui ont rendu publiques ces découvertes. Dans ce dernier débat, la question des besoins en recherche fondamentale en mathématiques alimentant les développements technologiques était soulevée. Des textes originaux ont été utilisés pour amener les réflexions métamathématiques et d'autres textes ont été fournis pour aborder directement le sujet mathématique. Ces réflexions métamathématiques ont été relevées à partir de discussions enregistrées, de parties filmées du cours, d'entrevues, de questionnaires distribués en début et en fin d'expérimentation, mais, surtout, à partir de courtes réflexions écrites par les étudiants. Jankvist mentionne que si l'objectif de l'étude avait été l'histoire vue comme un *outil*, ces éléments méthodologiques auraient sans doute été différents.

La création de deux modules est motivée par le réarrangement des consignes autour des réflexions écrites. Ce réarrangement était nécessaire pour assurer l'ancrage, dans les deux cas, des réflexions métamathématiques aux notions mathématiques abordées. De plus, l'étude d'une même population pour les deux modules, donc sur une période de temps plutôt longue (une année), permettait d'observer (à partir de questionnaires) l'évolution de l'attitude des participants envers les mathématiques et de leurs conceptions autour des notions. De plus, le fait d'opérer les outils de méthodologie sur deux modules permet de constater leur aspect « réutilisable ». Les résultats obtenus à partir des textes des étudiants autour de la capacité de ces derniers à faire des réflexions métamathématiques sont positifs et seront détaillés plus loin. Aussi, Jankvist observe un réel ancrage des réflexions métamathématiques à l'intérieur des notions mathématiques abordées.

En discussion, le chercheur constate que le sujet mathématique abordé doit être suffisamment accessible aux étudiants pour que ceux-ci puissent s'engager dans des réflexions épistémologiques et historiques. Deuxièmement, les sujets doivent faire en sorte que le débat puisse sortir du cadre limité par le sujet et qu'il puisse être porté sur les mathématiques en général. Celles-ci étant vues comme un tout. Troisièmement, la nature du sujet devra permettre un ancrage des réflexions métamathématiques à l'intérieur même des notions abordées. Encore là, si l'histoire était perçue comme un *outil*, ces éléments auraient, bien entendu, différé. En lien avec les critiques de Guliker et Blom (2001), Jankvist se demande alors ce qui, à l'intérieur même de l'expérimentation, a pu faire en sorte que les étudiants soient capables de telles réflexions métamathématiques. Il mentionne que Tzanakis et Arcavi (2000) aussi se questionnent sur la manière de recréer ces expériences positives et ce qui en fait des expériences positives. Comme arguments motivationnels, Jankvist souligne que les thèmes abordés dans les deux modules d'enseignements semblaient proches du quotidien des étudiants, ce qui pourrait avoir facilité les réflexions visées. Ces éléments de réflexions fournis par Jankvist semblent tenir plus de l'histoire vue comme un *outil* et seront détaillés plus loin. Il ne semble pas fournir d'autres explications et souligne ceci comme une limite de son étude ciblant l'histoire vue comme un *but*. Il fournit alors de nombreuses questions d'élargissement; pourquoi l'histoire semble-t-elle motiver l'apprentissage des mathématiques? De quelle façon? Comment peut-elle rendre les mathématiques moins effrayantes? Comment peut-elle fournir une dimension multiculturelle? Quels effets aura cette dimension dans le cadre du cours de mathématiques? Les étudiants les plus doués en mathématiques sont-ils plus susceptibles de fournir des réflexions métamathématiques?

Jankvist, Uffe Thomas. 2008b. « History of modern mathematics and/or moderns applications of mathematics in mathematics education ». *Texte fourni par l'auteur, devrait paraître dans Proceeding HPM 2008.*

Dans ce texte, Jankvist tente de soutenir l'emploi de thèmes récents dans l'histoire des mathématiques. Il tente de montrer que l'histoire moderne des mathématiques et les applications récentes des mathématiques peuvent amener les étudiants à des réflexions métamathématiques. L'étude a été réalisée avec un groupe de 26 étudiants de fin de deuxième année de « upper secondary » ($\approx$17 ans) qui ont participé au premier module d'enseignement portant sur la correction de codes. Pour le deuxième module d'enseignement portant sur le code RSA, trois étudiants ont quitté le groupe. Les 23 étudiants restants ont participé plusieurs mois après le premier cas. Chaque module s'étalait sur 15 leçons doublées de 90 minutes chacune.

Ses expériences ont montré que l'histoire récente des mathématiques perçue en tant qu'*objectif* permet à l'élève de faire le parallèle « temps-espace » entre le moment de la découverte des concepts et celui de son utilisation actuelle. Il a pu être discuté que le développement des concepts mathématiques s'est effectué simultanément à deux endroits différents en utilisant des notions découvertes auparavant. Jankvist remarque aussi que l'histoire récente permet de s'expliquer, dans des contextes plus familiers, les forces et les mécanismes qui enclenchent l'évolution des mathématiques et comment cette évolution interagit avec les sociétés et les cultures. Enfin, les exemples d'applications modernes des mathématiques illustrent aux élèves le besoin de recherche fondamentale.

Du côté de l'histoire perçue comme un *outil*, les modules d'enseignements élaborés permettent à Jankvist de se prononcer seulement sur les effets motivationnels et affectifs de l'utilisation de l'histoire moderne des mathématiques en classe. Il observe, au travers des réponses des élèves en entrevues, que les sujets récents dans l'histoire des mathématiques semblaient intéresser plus les élèves. Le fait que les personnages de l'histoire soient plus près de la réalité des élèves semble avoir un effet sur la motivation de ces derniers. En effet, cela rapprocherait l'activité de leur quotidien. De plus, il trouve motivant de connaître l'aspect appliqué des mathématiques qui sont souvent perçues comme un ensemble de formules et de concepts intransigeants, sans rapport ou lien avec la réalité.

Enfin, Jankvist ajoute quelques réflexions autour des effets cognitifs que l'utilisation de l'histoire perçue comme un *outil* peut amener dans ce cas précis. Il parle du concept de distance en mathématiques qui, avec ces modules d'enseignements, prend une définition plus complexe que la simple définition euclidienne classique. L'activité permet aussi d'aborder certaines propriétés intéressantes des nombres premiers gravitant autour des concepts abordés.

Bref, il mentionne que l'utilisation de l'histoire moderne des mathématiques et des applications récentes de concepts mathématiques peut clairement, dans le cas de l'utilisation de l'histoire perçue comme un *objectif*, s'avérer très positive et, d'une certaine façon, meilleure que l'histoire plus ancienne. En plus, il semble y avoir un effet positif sur la motivation et sur le côté affectif. Enfin, il mentionne que ceci ne constitue pas une raison de rejeter l'histoire classique et antique des mathématiques en classe.

Jankvist, Uffe Thomas. 2008c. « Evaluating a teaching module on the early history of error correcting codes ». *Texte fourni par l'auteur, devrait paraître dans Proceeding HPM 2008.*

Dans ce texte, Jankvist discute particulièrement des résultats du premier module d'enseignement autour de la question de la capacité des élèves à élaborer des réflexions métamathématiques, du niveau de profondeur de ces réflexions et de l'ancrage de ces réflexions dans le sujet abordé à l'intérieur du module. Ce module a duré environ 2 ou 3 mois.

Les réponses à ces questions sont fournies à partir des quatre petites réflexions écrites par les élèves (séparés en six groupes) durant le module et à partir de la grande réflexion écrite à la fin du module. Dans cette dernière réflexion, les élèves devaient rappeler les évènements historiques mentionnés au cours du module et préciser leur pensée sur ce que l'on peut apprendre à partir de l'histoire des mathématiques.

Dans la première petite réflexion, les élèves devaient établir des liens entre les démarches et notations modernes et celles figurant dans les textes des mathématiciens de l'époque. Ils devaient en montrer l'équivalence. Dans la seconde petite réflexion, les élèves devaient souligner, dans le texte de l'époque, les résultats mathématiques utilisés par les mathématiciens pour élaborer leurs découvertes. Jankvist remarque que plusieurs élèves semblent avoir mélangé les notions élaborées par les mathématiciens et les notions déjà établies utilisées par les mathématiciens pour construire leurs découvertes. Il mentionne au passage que les élèves ont nécessairement ancré leurs réflexions métamathématiques à l'intérieur du sujet abordé. La troisième petite réflexion portait sur les liens entre les objets mathématiques inventés et la technologie. Aucun élève ne put fournir des réflexions satisfaisantes pour cette question difficile. Dans la dernière petite réflexion, les élèves devaient se questionner sur la personne qui devrait recevoir le crédit de la découverte des notions en question et surtout sur l'importance d'accorder ce crédit.

Pour la réflexion finale, l'ensemble des groupes a pu fournir différents éléments pertinents concernant les évènements historiques mentionnés au cours du module. Une majorité s'est prononcée sur le « pourquoi » et le « comment » des ces évènements. Aussi, Jankvist remarque que les réponses semblent illustrer que les élèves perçoivent l'utilisation de l'histoire plutôt comme un *outil* que comme un *objectif* en tant que tel. En effet, les étudiants mentionnent généralement que l'histoire permet une compréhension plus profonde des sujets abordés.

En conclusion, il mentionne que l'enthousiasme de l'enseignant peut affecter beaucoup les résultats de ce genre de modules d'enseignements utilisant l'histoire. Il croit que ce n'est pas le cas dans cette étude. En effet, il semblerait que l'enseignante en question concentrait clairement ses enseignements sur les notions mathématiques abordées. Il remarque que les élèves ont souligné le caractère humain des progrès mathématiques et que des personnes sont à l'origine des découvertes mathématiques. Jankvist l'observe lorsque les élèves ont relevé surtout le « pourquoi » et le « comment » des développements historiques dans leur dernière réflexion. De plus, ceci implique des réflexions métamathématiques ancrées dans le sujet abordé de la part des élèves.

Jankvist, Uffe Thomas. 2008d. « A teaching module on the history of public-key cryptography and RSA ». *BSHM Bulletin*, vol. 23, no 2, pp. 157-168.

Dans ce texte, Jankvist discute particulièrement des résultats du deuxième module d'enseignements autour de la question de la capacité des élèves à élaborer des réflexions métamathématiques, le niveau de profondeur de ces réflexions et l'ancrage des réflexions dans le sujet abordé à l'intérieur du module. La question de la construction d'un tel module pour susciter ces réflexions est aussi commentée par Jankvist. Par réflexions métamathématiques, il entend la discussion de sujets tels; les forces et mécanismes qui sont au cœur du développement des mathématiques, l'interaction entre ces développements et celui des sociétés et des cultures et l'aspect obsolète que peuvent revêtir certains résultats.

Comme pour le premier module d'enseignements, les notions mathématiques ont été présentées aux élèves avec les notations modernes et l'histoire des notions était présentée en parallèle à partir d'exposés magistraux et de lecture de textes originaux. Ce parallèle permettait d'atteindre l'objectif d'utiliser aussi l'histoire comme un *outil*. De nombreux exercices mathématiques ont aussi été fournis. En plus, ils devaient lire et travailler les notions mathématiques issues d'une lecture d'une correspondance de Fermat. Le module a duré six mois durant la troisième année du « upper secondary school » au Danemark avec les 23 étudiants restants du groupe du premier module. Ils étaient tous âgés d'environ 18 ans. Il y a eu 14 leçons doublées de 90 minutes qui ont été menées par le professeur chargé du groupe. Les étudiants devaient produire trois petites réflexions et une grande réflexion finale. Cette dernière a été faite en groupes (six au total).

Dans la première réflexion, les étudiants devaient discuter de la vision de Hardy prônant avec ardeur l'étude des mathématiques pures et rejetant le manque de rigueur associé aux mathématiques appliquées. Cette discussion devait aborder le développement des clés publiques et du système RSA et les besoins en recherche fondamentale. Ils devaient aussi reconnaître si les mathématiciens d'aujourd'hui partagent la vision de Hardy. Jankvist remarque que les étudiants ont bien mis en relief les éléments centraux relatifs aux mathématiques pures et ceux relatifs aux mathématiques appliquées et semblent avoir été surpris des applications possibles des mathématiques à des fins guerrières.

Dans la seconde réflexion, les étudiants ont été amenés à discuter des forces intrinsèques et extrinsèques aux mathématiciens qui animent le développement de la théorie des nombres et de la cryptographie. Ils devaient aussi comparer les motivations entourant les mathématiciens de l'époque et celles entourant les mathématiciens contemporains. Jankvist remarque que, pour les étudiants, les mathématiciens anciens faisaient des mathématiques pour le plaisir, comme un passe-temps. Les motivations des mathématiciens modernes sont plus extrinsèques comme l'argent et la guerre.

Dans la troisième réflexion, les étudiants étaient amenés à faire une recherche sur le web autour des agences de renseignements actives en ce moment et à comparer les motivations des agents œuvrant pour ces organismes avec celles des chercheurs universitaires. D'un point de vue « sociologique », ils devaient trouver des différences entre ces deux communautés de scientifiques. Enfin, ils devaient donner leur opinion sur qui devrait recevoir le crédit de la découverte des clés publiques et du système de cryptographie RSA. Jankvist remarque que pour les élèves, les scientifiques travaillant dans des agences de renseignements le font pour l'argent et ne reçoivent pas de reconnaissances publiques comme les chercheurs universitaires. Il met aussi en relief que les étudiants sont divisés quant à leur opinion concernant le crédit à accorder.

Enfin, pour la grande réflexion finale, les étudiants devaient écrire sur l'histoire des notions abordées dans le module. Ils devaient rassembler les éléments appris autour du « qui » et du « quand » dans un premier temps et les éléments appris autour du « pourquoi » et du « comment » dans un second temps. Il leur demandait ensuite de mentionner ce que l'on pouvait apprendre de chacun d'eux. Les réponses des élèves indiquent clairement un ancrage des éléments mathématiques au travers de leurs réflexions métamathématiques. Les étudiants ont aussi mentionné des différences dans les deux parties de la réflexion et ont souligné que la question du « pourquoi » et du « comment » fournit une réflexion plus grande sur les forces qui encouragent la recherche en mathématiques. Ils sont donc capables, selon Jankvist, non seulement de réflexion mathématique, mais aussi de remettre en question la présentation historique elle-même.

En conclusion, Jankvist souligne la capacité des étudiants à faire des réflexions métamathématiques. Pour y arriver, le design du module d'enseignement et le choix du sujet semblent devoir répondre à certains critères. Ainsi, les élèves ont été amenés à faire ces réflexions de façon personnelle à l'écrit et ensuite en groupe pour la réflexion finale. Cette méthode assure que l'histoire ne soit pas réduite à des capsules anecdotiques. Le sujet mathématique doit être suffisamment accessible aux étudiants pour permettre l'engagement de ces derniers dans des réflexions métamathématiques. Le module d'enseignement doit aussi montrer que les mathématiques ne sont pas qu'une longue liste de formules. Les mathématiques évoluent intimement avec l'évolution des sociétés et des cultures. De plus, il est bien que le sujet fasse référence à d'anciens résultats mathématiques afin de mettre en relief que ces derniers ne deviennent pas obsolètes. Il doit aussi être possible de discuter des forces intrinsèques et extrinsèques qui ont animé la découverte des résultats discutés. Il doit alors être possible de discuter de l'aspect appliqué ou pur des mathématiques. Pour Jankvist, la réflexion écrite est l'outil idéal pour que les étudiants fassent ce genre de réflexions et qu'ils les poussent aux mathématiques en général. La combinaison de ces réflexions et d'un accent important sur les mathématiques en classe permet l'ancrage des réflexions métamathématiques dans le sujet abordé. Reste, selon l'auteur, à se questionner sur les changements en ce qui concerne les conceptions des étudiants autour des notions abordées qui seraient survenus lors d'une telle expérience.

Nous terminerons cette revue de littérature par une dernière communication qui tente de situer la place de l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques dans le programme de formation au Québec.

Charbonneau, Louis. 2006. « Histoire des mathématiques et les nouveaux programmes au Québec : un défi de taille ». ***Recueil de textes L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés : Actes du colloque EMF*** **(Sherbrooke : Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, 27-31 mai 2006), dans le thème 3 (sous la forme d'un CD), 11 p.**

Dans cette communication, le chercheur tente d'examiner la forme et l'importance que prend l'histoire dans le programme de formation québécois en mathématiques autant au niveau primaire que secondaire. Il remarque que l'histoire des mathématiques y occupe une place importante et que la présence d'éléments culturels et historiques fait partie intégrante de l'application du programme. Au primaire, le programme prescrit que l'élève devra établir des liens entre les besoins des sociétés et l'évolution de la mathématique ou de la technologie. Au premier cycle du secondaire, le programme indique, dans la présentation de la matière, que les élèves devront, par l'entremise de l'histoire, saisir mieux le sens et l'utilité des mathématiques, découvrir que l'évolution des mathématiques est liée à des besoins ressentis dans les sociétés et découvrir que les savoirs mathématiques sont le fruit de longs travaux de chercheurs. Dans la section *contenu de formation*, le programme indique que : « Les élèves devront être amenés à situer les concepts mathématiques dans un contexte historique et social, à voir leur évolution et à cerner les problématiques qui ont suscité leur développement et les concepts comblés par ce processus. » (p. 248) Dans l'esprit du programme, on remarque que l'histoire vise à placer les mathématiques dans un contexte sociohistorique et culturel plus large. Elle permet d'humaniser les mathématiques et d'y associer le visage de mathématiciens ayant œuvré à leurs développements. Dans le second cycle, le programme fournit des repères culturels encore plus précis et nombreux.

1.2 Cadre théorique et questions de recherche

Comme mentionnée précédemment, au cœur du programme de formation québécois, l'histoire des mathématiques occupe une place importante. Il y est souligné l'importance pour l'élève de reconnaître l'apport des mathématiques à la science, aux technologies et à la culture des sociétés et des individus. Les éléments culturels et historiques font partie intégrante de l'application du programme. Le caractère obligatoire de l'insertion de repères culturels dans l'enseignement est nouveau et caractéristique de ce programme. Ce dernier y présente l'histoire comme un moyen de dynamiser les mathématiques par la prise de conscience de son aspect évolutif (Charbonneau, 2006).

Mais, comment répondre à ces prescriptions à travers lesquelles l'histoire semble apparaître comme un *objectif* véritable? À la fin des années 90, l'important rapport de Guliker et Blom souligne le réel intérêt des enseignants et des chercheurs pour la chose, mais rapporte aussi l'écart considérable qui sépare les études théoriques sur l'utilisation de l'histoire et les études décrivant différents cas d'utilisation particuliers. La question du « comment » devra, selon eux, réconcilier ces démarches. Dernièrement, Arcavi rappelait aussi cette problématique actuelle en juin 2007 lors d'une conférence (Jankvist, 2008a).

Ainsi, tout le monde s'entend pour juger favorablement l'histoire dans l'enseignement des mathématiques, mais peu d'études montrent réellement son efficacité ou mettent en relief une certaine méthodologie d'application. À ce stade, il nous semble important de mettre de l'avant que cette méthodologie diffèrera selon les buts que nous poursuivons avec l'utilisation de l'histoire. Pour Jankvist (2007), il est possible de cibler deux visées différentes. En effet, l'histoire peut s'avérer un *outil* intrinsèque à l'activité d'apprentissage. Dans cette perspective, elle serait vue comme un appui au niveau motivationnel et cognitif pour l'enseignement de concepts particuliers. Autrement, l'histoire peut s'avérer être un *objectif en tant que tel*. Dans ce cas, l'activité mathématique ne viserait pas principalement l'acquisition de notions particulières, mais la mise en relief de l'historicité de ces notions, une réflexion épistémologique ou encore l'exploration des mécanismes de découvertes des concepts.

En ce sens, il est clair que le programme de formation de l'école québécoise prescrit l'utilisation de l'histoire en tant qu'*objectif*. C'est aussi dans cette dimension que nous poursuivrons nos réflexions au cours de ce travail.

Ainsi, nous considérons que l'histoire, en tant qu'*objectif*, au sens de Jankvist, vise essentiellement les réflexions métamathématiques chez l'apprenant. Tentons de clarifier ce que nous entendons par réflexions métamathématiques. Pour Évelyne Barbin (1988), les réflexions dites métamathématiques sont celles qui s'articulent autour de concepts qui englobent les notions spécifiques visées. Elle mentionne spécialement les concepts de rigueur et de notation qui, d'emblée, apparaissent intemporels et immuables aux étudiants. Les réflexions métamathématiques issues de l'utilisation de l'histoire amènent une certaine historicité à ces concepts et contribuent à humaniser l'activité mathématique en la situant dans un continuum relatif au contexte sociohistorique et culturel. À partir de ses lectures de Guliker et Blom, Jankvist (2008d) raffinera cette définition de réflexions métamathématiques en ajoutant les réflexions autour des forces et mécanismes qui sont au cœur du développement des mathématiques. L'apprenant se questionne alors sur les motivations intrinsèques et extrinsèques qui animent les mathématiciens, ces motivations étant variables selon le climat scientifique de l'époque, le mathématicien lui-même ou la culture d'origine de ce dernier. Il ajoute aussi les réflexions sur l'impact de ce développement sur les sociétés et les cultures. Enfin, Jankvist propose d'inclure aussi les réflexions sur l'aspect obsolète que peuvent revêtir certains résultats mathématiques. Pour lui, les exemples d'applications modernes des mathématiques aident à illustrer les besoins en recherche fondamentale et montre que certains résultats en apparence inutiles peuvent devenir le bassin prolifique de solutions capitales à certains problèmes actuels.

Somme toute, à la dimension d'historicité de ce type de réflexions que souligne Barbin, s'ajoutent, avec Jankvist, les échanges importants qu'entretiennent les mathématiciens, leurs résultats et les sociétés. Nous entendrons donc par réflexions métamathématiques, *les réflexions qui, au travers d'une activité mathématique, touchent l'historicité des notions abordées, l'historicité de la notation et de la rigueur associée, les mécanismes sous-jacents à la découverte des concepts explorés, les forces intrinsèques et extrinsèques qui animent les mathématiciens découvreurs et les liens entre le développement de ces concepts et le développement des sociétés et des cultures*. Il s'agit d'une définition construite par accumulation d'éléments choisis issus de nos lectures. Elle ne peut être associée à la définition classique que l'usage a retenu en épistémologie et logique des mathématiques.

À ce stade, il nous apparaît opportun de souligner le lien étroit entre les éléments historiques, épistémologiques, mathématiques ou didactiques qui ont suscité mon enthousiasme lors de la lecture de textes anciens en France et les objectifs liés à la production de réflexions métamathématiques chez les étudiants. Mes lectures portant essentiellement sur le développement du calcul infinitésimal (il s'agissait du thème constituant le fil conducteur du cours de M Sakarovitch pour explorer différentes époques) ont amené justement chez moi ce type de réflexions. Notre hypothèse est que les facteurs m'ayant amené à vivre des expériences positives en classe sont ceux ayant provoqué chez moi des réflexions métamathématiques. En sera-t-il de même chez les étudiants? En quoi les réactions seront-elles différentes?

Ainsi, plus précisément, *peut-on, au travers de la lecture d'un texte ancien en classe, susciter des réflexions métamathématiques chez l'étudiant pré universitaire dans le cadre du cours de calcul différentiel?* Nous tenterons de vérifier s'il est possible de recréer les expériences positives en classe décrites plus tôt avec de jeunes apprenants et de vérifier si ces derniers effectueront comme moi de telles réflexions au travers de la lecture d'un texte d'une autre époque mathématique. *Si tel est le cas, jusqu'à quel point ces réflexions peuvent-elles s'avérer profondes?* Sans doute, ces réflexions se manifesteront différemment chez l'élève que chez moi, lors de mes expériences personnelles. Cette comparaison et la mise en évidences des divergences dans les réactions nous permettront d'évaluer la profondeur des réflexions des étudiants. Ainsi, les réflexions des participants seront jugées profondes si elles se rapprochent de celles que j'ai moi-même faites lors du cours de M. Sakarovitch. Une liste de mes réflexions et de mes observations sera faite au prochain chapitre (*voir* art. 2.1.3). *De plus, quels sont les éléments particuliers à la lecture de textes et au design de l'activité qui sont susceptibles de susciter ces réflexions?* En fait, par la même occasion, nous tenterons de reconnaître parmi les facteurs qui ont été mis en relief précédemment et qui ont su stimuler mon intérêt ceux qui sont véritablement porteurs de réflexions métamathématiques chez l'élève. En d'autres mots, il nous faudra souligner les éléments du cadre méthodologique qui ont suscité ces réflexions.

CHAPITRE II

LE CADRE MÉTHODOLOGIQUE

Au regard des différents textes anciens qui ont été lus dans le cours de M. Sakarovitch, il nous fallait en choisir un qui serait l'objet de référence pour la construction d'une activité d'apprentissage. Dans ce second chapitre, nous décrirons deux textes susceptibles de remplir cette tâche. Aussi, nous expliquerons la sélection d'un seul d'entre eux. Ensuite, nous proposerons une activité d'apprentissage basée sur la lecture de ce texte et préciserons les éléments d'ordre méthodologique qui nous permettront ultérieurement de répondre à nos questions de recherche. Enfin, nous décrirons la réalisation de ces expérimentations avec les étudiants.

2.1 Le choix du texte

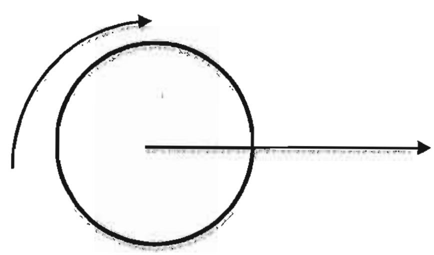
Plusieurs textes anciens ont été lus et analysés dans le cadre du cours d'histoire des mathématiques de M Sakarovitch. Parmi ces textes, deux d'entre eux m'ont particulièrement intéressé et sont susceptibles d'être utilisés pour la construction d'une activité d'apprentissage. Il nous faudra en choisir un qui réponde le plus fidèlement à mes intérêts et qui m'aura permis de vivre ces expériences positives décrites plus tôt.

2.1.1 Premier texte susceptible d'être utilisé

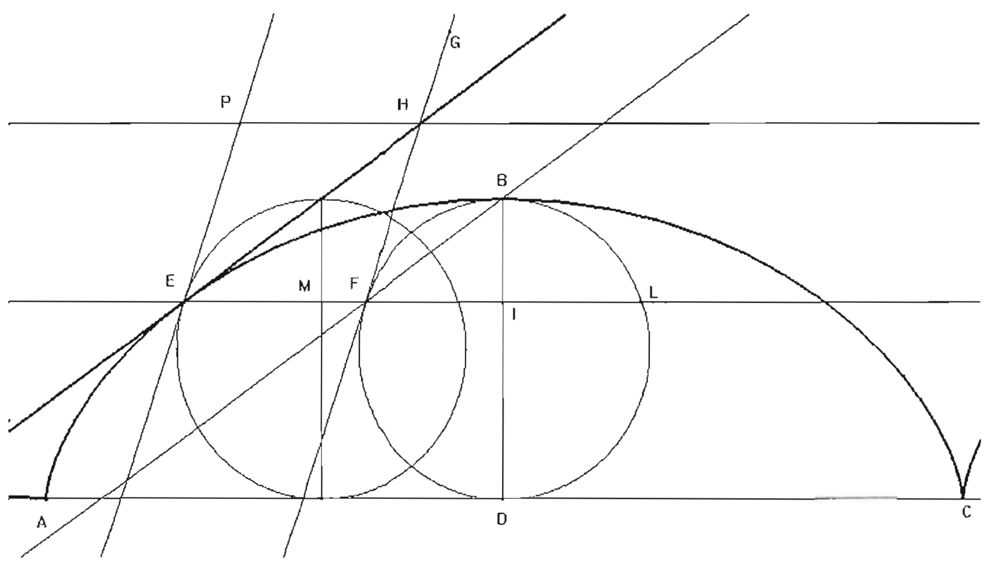
Le premier texte est de Gilles Personne de Roberval. Le texte a été écrit vers 1636 et présente une approche particulière pour la détermination de tangentes. Ce texte s'intitule : *Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes* (IREM de Basse-Normandie, 1999).

L'extrait choisi (*voir* app. A) propose de trouver un moyen de « donner les touchantes des lignes courbes par des mouvements mêmes mêlés ». Roberval prendra l'exemple de la roulette (cycloïde). Il spécifie qu'au départ « nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétés spécifiques, qui nous fassent connaître des mouvements qui les décrivent ». Son approche est cinématique, il construit son raisonnement sur les mouvements spécifiques qui engendrent la courbe. Son principe de base est que la tangente à une courbe correspond à la direction instantanée du mouvement du point décrivant la courbe en chaque position. Bref, pour Roberval il faut réussir, en étudiant les propriétés génériques de la courbe, à « tirer la ligne de direction du mouvement » pour tracer la tangente.

Pour Roberval, la cycloïde est issue de deux mouvements. Le premier est horizontal et le second est circulaire. C'est la combinaison de ces deux mouvements, « mouvements mêlés », qui dessine la courbe. Il précise que ces mouvements sont choisis uniformes, « que son mouvement circulaire sera proportionné à son mouvement droit ».



Après avoir construit la courbe en ayant mis en lumières ces éléments, il décrit les étapes à suivre (sans justification générale) afin de tirer la tangente en un point de la cycloïde. À partir de la « roulette » ABC ayant B comme sommet (ici, le mot « roulette » n'est pas défini, il appelle simplement ainsi sa construction), il trace l'axe BD perpendiculaire à AC. Pour trouver la « touchante » en un point E quelconque de la roulette, il trace le cercle de diamètre $\overline{BD}$ et tire la droite EF parallèle à AC, où F est l'intersection avec le demi-cercle situé dans le même demi-plan par rapport à BD que le point E.



Enfin, il tire FG « touchante » au cercle en F. En prenant le point H sur FG, tel que $\overline{FH}$ est congru à $\overline{EF}$, on tire EH, la « touchante » recherchée. Aucune justification n'est fournie.

Il termine en précisant que Fermat tire cette « touchante » simplement en traçant EH parallèle à FB. Il est aisé de montrer l'équivalence de ces deux constructions.

En résumé, de façon intuitive, Roberval identifie clairement les éléments caractéristiques qui définissent mécaniquement la courbe. Il souligne, à sa manière, les droites qui supportent les vecteurs pouvant être associés aux mouvements dans une perspective cinématique. Pour combiner ces mouvements (sommation des vecteurs), il construit la bissectrice de l'angle formé par ces droites, car les deux mouvements sont supposés uniformes. Dans la figure ci-dessus, la tangente correspond à la bissectrice de l'angle PEF formé par les droites EF et EP.

2.1.2 Deuxième texte susceptible d'être utilisé

Le second est un texte très connu de Fermat à travers lequel il fournit une méthode élégante de résolution de problème d'optimisation faisant appel à des principes proches du calcul différentiel en pleine émergence à l'époque. L'extrait est issu du texte : *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum (sur la méthode d'adégalation, 1629/1637)* (IREM de Basse-Normandie, 1999).

Le texte de Fermat (*voir* app. B) propose une méthode générale pour trouver le minimum et le maximum dans des situations où plusieurs grandeurs sont en relation. La règle à suivre pour y arriver est décrite au tout début de façon globale. D'abord, il propose de mettre le problème en équations : « On exprimera d'abord la quantité minimale ou maximale en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. » Il substitue ensuite $(a + e)$ à « l'inconnue primitive a ». Ici, Fermat emploie des objets de nature infinitésimale de façon intuitive et sans justification. Il « adégalise » ensuite les deux expressions obtenues, celle en a et celle en $(a + e)$. En effet, elles sont presque égales puisque e se veut une valeur infiniment petite.

Dans cette nouvelle équation, il retrouve des termes qui sont tous en e ou en une puissance de e, « affecté de e ». Il peut alors diviser chaque membre autant de fois qu'il veut par e afin d'obtenir au moins un terme sans e. Il considère ensuite la valeur de e comme nulle et élimine ainsi les termes en e ou en puissance de e. La résolution de l'équation restante en a fournit les solutions maximum ou minimum.

Dans le premier extrait, il donne un exemple simple d'application de sa méthode : « Soit à partager la droite AC en E, en sorte que le rectangle AEC soit maximum. »

Il pose $m\overline{AC} = b$ et a la longueur d'un des segments engendrés par le point E ($\overline{AE}$ ou $\overline{EC}$). L'autre est donc $b - a$. On cherche alors le maximum de $ba - a^2$.

En suivant sa méthode explicitée plus tôt, il substitue $a + e$ à a comme longueur du premier segment. Le second segment devient alors $b - a - e$ et le nouveau produit devient $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$.

Ainsi :

$ba - a^2 \approx ba - a^2 + be - 2ae - e^2$	(Adégalation[1])
$be \approx 2ae + e^2$	(En supprimant les termes semblables)
$b \approx 2a + e$	(En divisant chaque membre par e)
$b = 2a$	(En supprimant les termes en e)

Ainsi, l'aire du rectangle sera maximale dans le cas où $b = 2a$. Cette conclusion n'est suivie d'aucune justification.

En résumé, Fermat recherche le maximum de la fonction f telle que, $f(x) = x(b - x) = bx - x^2$ où $f(x)$ correspond à l'aire du rectangle en fonction de la mesure d'un côté x en posant b comme étant le demi-périmètre de ce même rectangle.

De façon moderne, on aurait $f'(x) = b - 2x$ et

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow b - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{2}.$$

Bien entendu, comme $f''\left(\frac{b}{2}\right) \langle\ 0$, alors $\left(\frac{b}{2}, f\left(\frac{b}{2}\right)\right)$ est un maximum de f.

Plus précisément, en se rapprochant de la méthode de Fermat, à partir de la définition de la dérivée;

$$f'(x) = \lim_{e \to o}\left(\frac{f(x+e) - f(x)}{e}\right)$$

Avec $f'(x) = 0$;

$$0 = \lim_{e \to o}\left(\frac{f(x+e) - f(x)}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \lim_{e \to o}\left(\frac{\left(bx - x^2 - be - 2ex - e^2\right) - \left(bx - x^2\right)}{e}\right)$$

---

[1] Le mot *adégalisation* est parfois utilisé dans certains ouvrages comme dans *Mathématiques au fil des âges,* volume issu de l'I.R.E.M. Groupe Épistémologie et Histoire (1987). Le mot *adégalation* sera utilisé dans ce travail.

$$\Leftrightarrow 0 = \lim_{e \to o}\left(\frac{-2ex + be - e^2}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \lim_{e \to o}(-2x - e + b)$$

$$\Leftrightarrow 0 = -2x + b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b}{2}$$

Nous comprenons aujourd'hui que les racines de la dérivée première correspondent à un maximum, à un minimum ou à un point d'inflexion de la fonction. De façon intuitive et sans aucune justification, Fermat effectue, à sa manière, cette correspondance.

2.1.3 Éléments susceptibles d'interpeler le lecteur

Les deux textes comportent plusieurs éléments mathématiques, métamathématiques et historiques qui m'ont marqué pour diverses raisons et qui sont susceptibles d'interpeller le lecteur. Ces éléments sont, à la fois, issus de mes lectures des deux textes et des documents fournis lors du cours *Histoire des mathématiques* de M. Sakarovitch qui a eu lieu à l'hiver 2005 à l'Unité de Formation et de Recherche (UFR) de Mathématiques et d'Informatiques de l'Université René Descartes. En voici une liste où nous commentons chacun de ces éléments.

Gilles Personne de Roberval : Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes (Extraits, vers 1636).

« **Gilles Personne de Roberval** » : Il s'agit d'un mathématicien et physicien français né en 1602 à Roberval dans l'Oise et mort à Paris en 1675. D'origine modeste, il sera appuyé par le seigneur et le curé de la paroisse. Il est reconnu pour son caractère acharné. Il fut professeur de mathématiques au Collège Royal (Collège de France) après avoir reçu des enseignements dans de nombreux voyages à travers la France. À Paris, il entrera en contact avec plusieurs autres savants comme Mersenne, Pascal, Descartes et Torricelli. Il prend part de façon importante aux débats scientifiques avec ses contemporains. Roberval donne une interprétation cinématique d'une courbe en la considérant comme une résultante de deux mouvements dans des directions différentes. Roberval est connu pour la balance qui porte son nom et ses nombreuses contributions en mathématiques et en astronomie. Il fait partie en 1666 des sept savants qui fondent l'Académie des sciences.

« **1636** » : Pour les problèmes de « quadratures et de touchantes », la méthode de double réduction à l'absurde (utilisées par Euclide et Archimède) est très lourde et ne donne pas de méthodes générales de découvertes. Elle force l'admiration, mais on sent un certain manque de fécondité. À partir du XVII^{e} siècle, de nouvelles idées voient le jour et de nouvelles méthodes se mettent en place. Ces nouveaux éléments relèvent d'heuristiques différentes, et plus prometteuses, qui seront vérifiables dans les cas connus des Anciens. À la fin du siècle, les mathématiciens auront accumulé beaucoup de résultats qui apparaissent comme les prémices du calcul moderne. Les deux démarches coexisteront jusqu'au début du XVIII^{e} siècle en attente de critères de validation et de la conceptualisation rigoureuse du calcul différentiel et intégral.

« **Touchante** » : Il s'agit du mot utilisé pour tangente. Le mot « touchante » m'apparaît plus près des modèles spontanés des étudiants.

« **Axiome, ou principe d'invention** » : Typique des discours de l'époque, il y a un désir de créer une théorie générale applicable dans une classe élargie de problèmes. Dans ce sens, Roberval énonce son principe qu'il reprend dans plusieurs exemples d'application.

« **Règle générale** » : Roberval s'intéresse aux caractéristiques de la courbe et aux différents critères qui l'engendrent. Ce sont ces éléments qui lui permettront de tirer la touchante.

« **La roulette ou trochoïde** » : Le mot roulette, utilisé par les savants de l'époque (à partir du Père Marin Mersenne), rend compte de l'aspect mécanique de la courbe en question. Quant au mot trochoïde, il s'agit d'un mot spécifiquement utilisé par Roberval pour parler de la roulette. La cycloïde et ses propriétés ont été l'objet de défis constants entre mathématiciens (Galilée et le paradoxe de la roue, Pascal et les défis lancés, Wren et la rectification, Bernoulli et le brachistochrone, Huygens et le pendule isochronique).

« **Deux mouvements étant uniformes** » : Le mot uniforme semble rendre compte de l'aspect simultané, régulier et constant des mouvements en question.

« **Le point x est un point de la Roulette** » : Roberval a besoin de montrer que le point fait partie de la courbe au lieu de simplement le poser comme tel. Cette partie du texte apparaît discutable.

« **Trouver les deux directions de son mouvement droit et de son mouvement circulaire** » : Il donne une interprétation cinématique d'une courbe en la considérant comme résultante de deux mouvements dans des directions différentes. L'utilisation de la cinématique pour l'étude des tangentes est clairement liée à l'étude de la chute des corps et des mouvements des projectiles. La trajectoire d'un projectile possède en chaque point une tangente que l'on trouve en composant les deux vitesses, horizontale et verticale. L'idée de cette méthode vient de Galilée et de Torricelli.

« **M. Fermat tire cette touchante en cette façon** » : Roberval fait référence à Pierre de Fermat connu pour son grand théorème et lui aussi appartenant au groupe des correspondants du Père Marin Mersenne. Il est intéressant d'illustrer l'équivalence de la méthode de Roberval et de celle de Fermat.

Pierre de Fermat : Méthode pour la recherche du maximum et du minimum. (Premier extrait sur la méthode d'adégalation, 1629/1637)

« **Pierre de Fermat** » : Né le 20 août 1601 à Beaumont-de-Lomagne, Fermat est une figure incontournable des mathématiques du XVII^{e} siècle. Il s'agit d'un mathématicien « amateur », il publie très peu et ses principales découvertes sont inscrites dans les marges des livres qu'il a étudiés. Fils d'un riche marchand, Fermat poursuit des études de droit à Toulouse, Bordeaux et Orléans. Il deviendra conseillé du roi au Parlement de Toulouse et enfin notable à la chambre de l'Édit de Castres. Co-inventeur avec Descartes de la géométrie analytique, initiateur avec Pascal du calcul des probabilités, il est aussi l'artisan de la renaissance de la théorie des nombres. Ce touche-à-tout bien de son époque s'est aussi intéressé aux sciences physiques. On lui doit le Principe de Fermat en optique.

« **1629/1637** » : (*voir* 1636 plus haut)

« **Recherche du maximum et du minimum** » : Les étudiants de niveau collégial doivent faire appel au calcul différentiel pour résoudre des problèmes d'optimisation à travers l'étude de différentes fonctions. Ils sont donc familiers avec ce type de problèmes.

« **Toute la théorie** » : Encore là, il y a un désir de fournir des méthodes générales de résolution pouvant s'appliquer à toute une branche de problèmes. Fermat propose sa méthode des *maxima* et *minima*. C'est la première apparition sous forme littérale d'un élément d'origine infinitésimale que l'on néglige en réalisant l'*adégalation* de grandeurs d'ordres supérieurs. Sa méthode permet de trouver les extremums d'une fonction polynomiale $P(a)$. Il calcule $P(a+e)=P(a)+e\cdot P_1(a)+e^2\cdot P_2(a)+\ldots$, l'extremum étant atteint par la racine de $P_1(a)$. Enfin, pour la détermination de tangentes à des courbes non algébriques, il propose de substituer aux ordonnées des courbes celles des tangentes et aux arcs de courbes les longueurs correspondantes des tangentes, idée qui est bien à l'origine du calcul différentiel moderne.

« **Qu'elle ait une, deux ou trois dimensions** » : Ici, Fermat considère différentes espèces de grandeurs. En effet, il était nécessaire à l'époque d'éviter de manipuler des grandeurs dites de dimensions différentes, c'est-à-dire liées aux concepts de segments, de surfaces ou de solides.

« *e* » : Cet élément est clairement d'origine infinitésimale et est utilisé par Fermat apparemment de manière intuitive. Il est facile de faire des liens avec les outils modernes du calcul différentiel.

« **Adégalation** » : L'utilisation d'une expression de Diophante rend compte de la grande influence des Grecs dans l'activité mathématique des savants de l'époque. Il y a une grande inventivité et liberté des mathématiciens qui suivront par rapport à l'autorité des Anciens. Il s'agit d'un mot élégant donnant une certaine « saveur » intéressante au texte.

« **Diophante** » : Diophante d'Alexandrie est un mathématicien grec qui vécut à Alexandrie entre 150 et 350 de notre ère. Il est connu pour ses études sur les équations diophantiennes qui sont des équations dont les membres sont des polynômes à coefficients entiers et dont on cherche des solutions entières et qui sont parmi les sujets les plus difficiles des mathématiques. D'ailleurs, on ne sait en traiter qu'un petit nombre et on a démontré que le cas général est indécidable. Dans la droite ligne des pythagoriciens, il a laissé un traité sur les nombres polygonaux. Redécouverts 15 siècles plus tard, ses ouvrages vont susciter la renaissance de l'arithmétique. De plus, le fils de Fermat publiera en 1670 une version annotée par son père de l'*Arithmetica* de Diophante.

« **Que le rectangle AEC soit maximum** » : Avec seulement trois points, il s'agit d'une façon spéciale et non conventionnelle aujourd'hui de nommer un rectangle et de parler de son aire.

« **En divisant tous les termes et supprimez *e*** » : Cette partie peut soulever quelques interrogations puisqu'il manipule la valeur e comme une quantité petite et qu'il la considère nulle ensuite. Il s'agit d'un paradoxe qui suscitera de vifs débats qui poseront la nécessité du fondement et de la conceptualisation du calcul différentiel et intégral.

« **Il est impossible de donner une méthode plus générale** » : Pour Fermat, tout problème de minimum et de maximum pouvant être traité avec des polynômes (ce qu'il appelle « termes de degrés quelconques ») pourra être résolu avec cette méthode.

Il sera intéressant d'observer si les participants à une activité d'apprentissage basée sur la lecture d'un de ces textes relèveront les mêmes éléments que moi. Sans doute, il y aura des divergences. Nous nous pencherons sur ces divergences plus loin.

2.1.4 Choix définitif du texte

Les deux extraits m'ayant particulièrement touché, il nous faudra en choisir un seul, étant donné le peu de temps accordé pour l'expérimentation en classe. De plus, la combinaison de ces deux lectures à l'intérieur d'une même activité aurait pu être riche et intéressante, mais elle aurait rendu la tâche plus longue et complexe et ne nous aurait pas nécessairement permis d'atteindre plus efficacement nos objectifs de recherche. En effet, ces deux textes ont indépendamment suscité, chez moi, des réflexions et des expériences positives en tant qu'étudiant. Enfin, nous avons arrêté notre choix sur le texte portant sur la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat. Ce dernier m'apparaissant plus riche au niveau des anecdotes et récits entourant le personnage. De plus, les éléments mathématiques et l'approche de Fermat semblent plus près des notions abordées à l'intérieur du cours de calcul différentiel au niveau collégial. En effet, il semble aisé de faire un lien entre la démarche de Fermat et l'application de la notion de dérivée. D'un autre côté, l'approche cinématique de Roberval est intéressante, mais plus éloignée et plus difficile à réconcilier avec les techniques modernes.

2.2 Design de l'activité d'apprentissage et de la collecte de données

Nous décrirons maintenant l'activité de lecture construite autour du texte choisi et décrit dans la section précédente. Nous décrirons aussi la méthodologie utilisée afin de recueillir les informations nécessaires pour traiter les questions de recherches.

2.2.1 L'activité d'apprentissage

À partir du texte de Fermat, nous avons construit une activité d'apprentissage. Les étudiants visés devront être en fin d'apprentissage du calcul différentiel et donc de niveau collégial (cours MAT 103 ou NYA) pour que la lecture du texte soit accessible et significative. L'activité comporte trois parties; la première consiste en une brève présentation du contexte sociohistorique et mathématique de l'époque de Fermat, la seconde est consacrée à la lecture individuelle du texte et la dernière se veut un retour en grand groupe autour de cette lecture.

Le contexte sociohistorique et mathématique de l'époque sera présenté à partir d'un document PowerPoint (*voir* app. C). Ce dernier contient plusieurs images évocatrices du climat sociohistorique et scientifique de l'époque de Fermat. En effet, le but étant de recréer, en quelque sorte, l'atmosphère et le climat du cours de M Sakarovitch qui m'a marqué. Ce document présente plusieurs images de Fermat, de différents mathématiciens de l'époque, de la ville de Paris et de Toulouse ou encore de documents anciens. Il nous faudra donc observer si les étudiants auront été sensibles à ces éléments du contexte dans leurs commentaires autour de l'appréciation de l'activité de lecture.

Nous y avons inclus différents éléments biographiques de Fermat, dont ses correspondances avec différents savants de l'époque et des références à son dernier théorème et à toute la mouvance qui l'entoure. Aussi, le climat scientifique qui régnait alors y est décrit. L'émergence de l'Académie des sciences et la tendance des savants de l'époque pour la recherche de méthodes globales pour la résolution d'un ensemble de problèmes y sont mentionnées. Bien entendu, nous y situons le texte à lire dans la trame de l'élaboration et du développement du calcul différentiel. Ainsi, l'extrait de texte choisi sera présenté comme un exemple supportant la théorie des *maxima et minima* de Fermat. Cette présentation devra durer une vingtaine de minutes

Plusieurs autres éléments du contexte sociohistorique seront abordés durant la présentation. Pour chaque diapositive du document PowerPoint, quelques idées et thèmes généraux seront fournis (*voir* app. C). Aucun texte suivi ne sera écrit pour la présentation. Celle-ci ne sera faite qu'à partir de ces idées globales pour éviter une mécanisation de cette partie de l'activité. Mécanisation qui serait due à une trop grande pratique et répétition de ce texte et qui nous éloignerait de l'atmosphère du cours de M. Sakarovitch.

Par la suite, les étudiants seront invités à faire la lecture de l'extrait de façon individuelle. Cependant, nous leur mentionnerons qu'ils pourront toujours nous consulter au besoin si des difficultés apparaissaient. Nous tolèrerons alors que les étudiants discutent ponctuellement entre eux lors de la lecture tout en insistant sur le fait que chacun devra s'approprier le contenu individuellement. Nous circulerons dans la classe afin de répondre aux différentes interrogations et de guider les élèves dans la lecture. Le tout devra se dérouler comme cela avait lieu dans le cours de M. Sakarovitch. Cette phase de lecture durera une vingtaine de minutes.

Enfin, la dernière phase de l'activité consistera en un retour en grand groupe sur la lecture. Les étudiants pourront alors échanger et réagir suite à la lecture de l'extrait. Avec le groupe, nous reprendrons la démarche de Fermat d'un côté du tableau et résoudrons le problème avec les outils modernes de l'autre. Enfin, nous tenterons d'établir, avec le groupe, les liens entre les deux démarches décrites plus haut (*voir* art. 2.1.2).

2.2.2 La collecte de données

À la suite de cette activité en classe, de courtes entrevues individuelles sont prévues. Ces entrevues d'une durée d'environ cinq à dix minutes seront réalisées individuellement dans un espace fermé près de la classe de mathématiques immédiatement après l'activité. Une dizaine d'étudiants devront être interrogés. Ces participants seront sélectionnés sur une base volontaire au tout début de l'activité de lecture. Ces entrevues individuelles viseront à recueillir les impressions des élèves quant à l'activité qu'ils viendront de vivre. Ces entrevues semi-structurées se voudront ouvertes et conviviales. Il s'agira d'entretiens menés par quelques questions générales sur l'activité de lectures. Ainsi, nous nous efforcerons d'aborder chacune des questions planifiées tout en laissant les participants élaborer autour des thèmes qui sembleront les toucher ou les interpeller particulièrement.

L'ensemble de ces questions sera donc le moyen pour nous d'observer, au travers des interventions des participants, si des réflexions métamathématiques sont issues de l'activité de lecture de texte ancien. Le cas échéant, nous pourrons évaluer la profondeur de ces réflexions. Ces questions nous permettront aussi de déceler les éléments particuliers à la lecture de textes anciens qui semblent avoir suscité ces réflexions chez les participants. Enfin, nous pourrons mettre en relief les éléments du cadre de présentation du texte qui ont soutenu ces réflexions, si, toutefois, réflexions il y aura. Enfin, nous tenterons d'arrimer ces éléments à ceux qui ont engendré chez moi les expériences positives décrites en introduction. Une lecture attentive des entrevues réalisées nous permettra de répondre à nos questions de recherche.

2.2.3 Questions abordées lors des entrevues individuelles

Voici la liste des sept questions qui devront être abordées lors de chacune des entrevues individuelles qui suivront l'activité de lecture.

Globalement, que retiens-tu de cet atelier d'apprentissage?

À partir de cette question, nous cherchons à connaître les éléments qui auront interpellé le participant de façon générale durant l'atelier d'apprentissage. Nous nous intéressons aux éléments historiques, mathématiques ou métamathématiques qui seront soulevées par le participant. Nous pourrons alors relever des préférences dans les thèmes abordés durant l'atelier et orienter l'entretien vers les éléments significatifs pour le participant. Si jamais les participants manifestent des réflexions du type recherché, il nous faudra connaître les éléments de la prestation qui semblent les avoir interpellés. Nous tenterons de mettre en relief les éléments significatifs de l'atelier pour le participant. De façon précise, l'apprenant ciblera les passages ayant suscité un intérêt important.

Quels éléments de la présentation PowerPoint t'ont frappé?

Avec cette question, nous nous concentrerons sur les aspects historiques de l'atelier d'apprentissage. Nous amènerons ainsi le participant à se prononcer sur ces aspects afin d'en observer l'appréciation globale et de relever les éléments l'interpellant. D'une certaine façon, nous nous assurerons qu'au cours de l'entrevue cette partie de la prestation sera abordée par chacun des participants. Aussi, nous pourrons évaluer leur niveau de compréhension du contexte d'émergence du calcul différentiel et des forces qui ont motivé sa création.

Thèmes possiblement discutés :

— Mathématiciens de l'époque

— Balbutiement et création du calcul

— Éléments biographiques autour de Fermat

— Autour du dernier théorème de Fermat

— Mathématiques du XVII^{e} siècle

— Europe du XVII^{e} siècle

Quels éléments t'ont frappé durant la lecture du texte?

À partir de cette question, nous observerons les éléments significatifs pour le participant liés à la lecture de textes anciens. Il nous faudra observer les liens que pourront faire les participants entre ces éléments qui les interpellent lors de la lecture et les réflexions métamathématiques recherchées. Il nous faudra donc discuter avec eux de la notation, de la rigueur et du vocabulaire autour de la démarche de Fermat.

Thèmes possiblement discutés :

— Difficultés liées à la lecture (vocabulaire et notation)

— Référence à d'autres mathématiciens

— Aspect intuitif de la démarche

— Acceptabilité de la démarche (réflexions sur la rigueur)

Quels éléments t'ont frappé durant la phase de retour en grand groupe?

À partir de cette question, nous observerons différents éléments significatifs pour le participant autour de cette phase de l'activité. La réconciliation des méthodes sera particulièrement discutée.

Thèmes possiblement discutés :

— Liens entre la démarche de Fermat et la démarche moderne

— Aspect intuitif de la démarche de Fermat

— Efficacité de la notation moderne

— Évolution générale des méthodes en mathématiques

Qu'as-tu appris concernant les mathématiques en général?

Nous nous intéressons particulièrement, avec cette question, aux réflexions de nature épistémologique que pourraient faire les participants. La nature même de l'activité mathématique et des processus de découvertes en mathématiques pourrait être remise en question à la suite d'une telle activité. C'est ce type de réflexions métamathématiques précises que nous tenterons d'observer par cette question. Nous pourrons alors observer à quel point les réflexions peuvent être profondes au point où elles engendrent certains changements des conceptions, croyances ou préjugés autour des mathématiques, des mathématiciens et des processus de construction des savoirs.

Qu'as-tu appris concernant le calcul différentiel?

Nous nous intéressons, avec cette question, aux éléments de réflexions qui seront posés par le participant à l'intérieur de son cursus scolaire actuel. Nous pourrons déceler le rapport de pertinence entre l'atelier à nature historique et l'apprentissage du calcul différentiel et de ses fondements aux yeux de l'apprenant. Cette question est, au final, une « sous-question » de la précédente. Ainsi, s'il nous est difficile d'aborder des questions de nature épistémologique avec les participants de façon globale sur les mathématiques, nous tenterons de le faire en réduisant le champ de portée de la question en le restreignant au calcul différentiel.

Que peut apporter ce genre de lecture à l'intérieur d'un cours de mathématiques, ce genre d'activités a-t-il sa place dans un cours de mathématiques?

Cette dernière question nous permettra d'évaluer l'appréciation de la valeur didactique de l'activité de la part des participants. Nous pourrons observer si les participants qui auront perçu positivement l'activité de lecture la reconnaissent comme un simple appui motivationnel et didactique ou comme une véritable expérience porteuse de réflexions profondes autour de l'historicité des notions abordées et des mathématiques en général.

2.3 Réalisation de l'activité d'apprentissage et de l'expérimentation

La réalisation de cette activité a eu lieu à deux reprises, à une semaine d'intervalle. Le protocole entourant l'activité de lecture et les entrevues semi-structurées a été entièrement respecté lors des deux expérimentations.

2.3.1 Contexte de réalisation

L'activité a eu lieu à deux reprises au printemps 2008, d'abord au Cégep André-Laurendeau dans une classe de 30 étudiants du secteur des sciences de la nature et ensuite au Cégep régional de Lanaudière à Joliette dans une classe de 11 étudiants du secteur des sciences humaines. Pour réaliser les deux prestations, les professeurs du cours de calcul différentiel nous ont laissé une heure avec la classe. Comme le temps qui nous était imparti était plutôt réduit, nous avons alors mentionné aux élèves de se concentrer surtout sur l'exemple que fournit Fermat pour illustrer sa méthode et non pas sur le paragraphe dans lequel il en fait une description globale au début du texte. Autrement, les activités se sont déroulées comme prévu.

Le fait d'avoir effectué deux fois l'activité avec des groupes différents nous permettait de confirmer la faisabilité et l'efficacité de l'atelier de lecture, d'être plus à l'aise lors de la prestation et des entrevues individuelles et d'observer des réactions différentes face aux éléments qui pourraient diverger entre les deux groupes ou entre les deux prestations. Dans le cadre de cette recherche qualitative, le fait de faire deux fois l'expérimentation (prestation et entrevues) nous permet d'obtenir une dynamique de discussion différente, plus riche et féconde.

Comme il avait été impossible pour nous de trouver des groupes à l'automne, les expérimentations ont dû avoir lieu au printemps. Ainsi, comme le cours se donne habituellement à la première session des programmes, donc à l'automne, les étudiants ayant participé aux expérimentations sont donc majoritairement ceux ayant échoué à ce cours auparavant.

Les courtes entrevues d'une durée d'environ cinq à dix minutes ont été réalisées individuellement dans un bureau fermé adjacent à la classe de mathématiques immédiatement après la prestation. Ainsi, parmi les 30 étudiants de la première prestation, neuf se sont porté volontaires pour les entrevues individuelles. Pour la seconde prestation, les 11 étudiants y ayant assisté ont été interrogés. Chacune des prestations et les 20 entrevues individuelles réalisées ont été enregistrées à partir d'un magnétophone portatif. Le tout a été retranscrit pour en faciliter l'analyse. Un premier document contient, pour les deux prestations, la retranscription de la phase de présentation du contexte sociohistorique et de la phase de retour en grand groupe (*voir* app. D). La retranscription, dans un second document, de l'ensemble des entrevues réalisées est disponible auprès de l'auteur pour consultation. La taille de ce document le rendait difficile à joindre en annexe.

2.3.2 Différences entre les deux prestations

Les deux expérimentations ont eu lieu le vendredi en après-midi à la place d'une période qui devait être consacrée à la révision pour la fin de la session. Les professeurs responsables de ces groupes devaient établir une entente avec leurs étudiants respectifs pour assurer une présence obligatoire de ces derniers. L'expérimentation (prestation et entrevue) s'est déroulée, autant au niveau de la forme que du contenu, de la même façon lors de chacune des séances.

Cependant, nous notons quelques légères différences au niveau du déroulement des ateliers compte tenu des dynamiques différentes des groupes de participants. En effet, la seconde prestation avait un caractère plus intime et plus convivial étant donné le nombre restreint d'étudiants. D'ailleurs, nous remarquons que notre ton était plus familier et moins rigoureux que lors de la première prestation. Les étudiants semblaient plus enclins à participer et à se manifester, surtout lors de la plénière, compte tenu du caractère plus soudé du petit groupe. Évidemment, nous semblions plus à l'aise et décontracté lors de cette seconde prestation, étant convaincu alors de la faisabilité de l'atelier.

Pour ce qui est de la présentation historique, le contenu était essentiellement le même. Cependant, nous remarquons que la seconde prestation contenait un nombre légèrement plus important de commentaires anecdotiques tout au long de la présentation.

Certains éléments comme la référence au cercle de Marin Mersenne, l'Université à l'époque de Fermat ou l'aspect amateur du mathématicien étaient soulignés de façon plus insistante, revenaient à plusieurs reprises et étaient accompagnés de plusieurs commentaires variés. Aussi, nous notons que notre approche semblait plus didactique lors de la seconde prestation. Nous répétions plusieurs fois certains éléments plus mathématiques de la présentation, nous fournissions plusieurs exemples numériques et notre ton semblait moins formel, surtout lors du passage entourant le grand théorème de Fermat. Par contre, la partie de la présentation, où nous décrivions le renouveau scientifique du XVII[e] siècle, nous apparaît plus élaborée lors de la première prestation. En effet, la création de l'Académie des sciences et le début de l'institutionnalisation de la recherche scientifique n'ont pas été mentionnés aussi clairement lors de la seconde prestation. L'accent était plutôt mis sur la distance que prennent les savants de l'époque par rapport aux Anciens. Enfin, nous remarquons plusieurs commentaires lors de la seconde prestation qui relient l'activité de lecture du texte et le principe des *maxima* et *minima* de Fermat au contenu du cours de calcul différentiel suivi par les étudiants. Ainsi, nous mentionnions et insistions à plusieurs reprises, durant la seconde prestation, que l'activité explore les balbutiements du calcul différentiel. Ce lien n'était qu'effleuré à la fin de la première prestation.

Durant de la plénière, les étudiants étaient invités à reconstruire avec nous la méthode de Fermat et à créer des liens avec les méthodes modernes de calcul. Nous remarquons que, lors de la première prestation, la résolution du problème proposé par Fermat a d'abord été faite de façon moderne avec la notation actuelle. À l'inverse, durant la seconde prestation, le principe des *maxima* et *minima* a d'abord été analysé sur l'exemple proposé et a été suivi d'un questionnement autour des méthodes modernes à utiliser pour enfin effectuer le rapprochement entre les deux approches. Aussi, nous notons, comme mentionné auparavant, une plus grande participation de la part des étudiants lors de la seconde prestation.

CHAPITRE III

L'ANALYSE DES ENTREVUES

À partir de la retranscription des deux prestations (présentation du contexte sociohistorique et plénière) et des entrevues réalisées lors des deux expérimentations, nous enchaînerons, dans ce troisième chapitre, avec l'analyse des commentaires et interventions des participants de l'étude. Dans un premier temps, nous passerons en revue l'ensemble des questions abordées lors des entrevues, pour en dégager globalement les réactions. Ensuite, nous tâcherons d'analyser plus en profondeur les entretiens en considérant les réponses particulières à chacun des participants.

3.1 Analyse question par question

Afin d'analyser les entrevues réalisées, nous avons commencé par une relecture rapide de l'ensemble des entretiens réalisés. Les commentaires pour chacune des questions ont été inventoriés dans un tableau résumé (*voir* app. E). Afin d'organiser cette analyse préliminaire, les commentaires ont été groupés sous trois grands axes d'observations différents : les considérations historiques, les considérations mathématiques et les considérations didactiques. Dans cette section, nous nous en tiendrons strictement à ce qui a été mentionné par les participants sans risquer de compléter leur discours. Par exemple, si une partie des étudiants ont exprimé avoir apprécié tel élément de l'activité, il ne sera pas extrapolé que les autres participants ne l'ont pas apprécié. À moins que ces derniers l'aient explicitement souligné durant les entretiens.

Question 1 : Globalement, que retiens-tu de cet atelier d'apprentissage?

Étudiants de la première prestation :

Nous remarquons plusieurs commentaires sur Fermat et ses résultats (grand théorème, son aspect amateur, sa passion pour les mathématiques, les origines du calcul, évolution, écriture dans les marges), et ce, de la part de tous les participants. Un seul étudiant rapporte l'aspect étrange de la démarche et l'utilisation spéciale du e.

Étudiants de la seconde prestation :

La majorité des commentaires autour de cette question (21 sur les 31 relevés) touchent Fermat et le contexte historique. Presque tous les étudiants (9 sur 11) ont émis un ou des commentaires entourant l'histoire. Trois participants ont relevé son aspect amateur. L'accent est mis sur l'historicité des mathématiques (évolution, anecdotes et personnages derrière des découvertes). Deux étudiants mentionnent la multiplicité des méthodes pour résoudre un problème. Nous notons aussi plusieurs commentaires (4) positifs sur l'originalité de la démarche du cours et l'intérêt suscité.

Question 2 : Quels éléments de la présentation PowerPoint t'ont frappé?

Étudiants de la première prestation :

Pour la grande majorité des étudiants (7 sur 9), nous notons un rapport positif à l'histoire. Plusieurs remarques (4 étudiants) au grand théorème de Fermat et à son aspect amateur (4 étudiants). L'ensemble des étudiants, sauf un, ont mentionné quelque aspect de la vie de Fermat (son enfance, lieu de naissance, passion pour les nombres, aspect amateur, études de droit, lien avec Descartes). Deux étudiants mentionnent les correspondances entre mathématiciens.

Étudiants de la seconde prestation :

Nous remarquons plusieurs commentaires (13) diversifiés entourant la vie de Fermat (famille riche, aspect amateur, maladie, grand théorème, livre de Diophante). Nous notons aussi bon nombre de commentaires (14) sur le contexte mathématique de l'époque (correspondances entre mathématiciens, références au cercle de Marin

Mersenne, mathématiques à l'Université à l'époque). Nous sentons un réel engouement pour cette partie de l'atelier. Nous observons aussi un rapport positif à l'histoire au travers de la plupart des interventions et un seul commentaire mentionne le lien entre les personnages abordés à l'intérieur d'un autre cours en histoire offert dans le programme du participant.

Question 3 : Quels éléments t'ont frappé durant la lecture du texte?

Étudiants de la première prestation :

Cinq étudiants ont mentionné des difficultés liées à la lecture, mais un d'entre eux mentionne qu'avec un peu d'aide, la tâche devient envisageable. De plus, la partie portant sur l'exemple était plus simple pour deux participants. Le français et les tournures de phrases, « style XVII^e siècle », leur ont causé des difficultés. Les participants ont noté la façon dont Fermat nomme le rectangle (4 étudiants), le mot *adégalé* (2 étudiants), le fait de représenter un carré par une ligne (1 étudiant) et l'idée d'un rectangle maximal (1 étudiant). Deux étudiants ont noté l'idée bizarre de rajouter un *e*. Enfin, une personne semble avoir apprécié le défi que cela posait.

Étudiants de la seconde prestation :

Huit étudiants ont mentionné avoir eu de la difficulté lors de la lecture (8 sur 11) et en particulier dans le premier paragraphe (4 sur 11). La façon dont le texte est écrit, les termes différents, les phrases qui « coupent sec », les sous-entendus, l'absence de justification et le fait que ce soit en ancien français sont des sources de difficultés. Dans ce groupe, les participants ont, comme pour les étudiants de la première prestation, noté à plusieurs reprises le mot « adégalé » (3 participants). Ils ont aussi noté la façon de décrire l'aire maximale d'un rectangle (2 participants) et le segment appelé droite (1 participant). Deux étudiants mentionnent que le dessin semble avoir aidé. Ils ont noté l'utilisation étrange du petit *e* (2 participants), un seul étudiant du groupe mentionne l'aspect intuitif de la démarche de Fermat. Encore là, un étudiant a apprécié le défi que la lecture du texte posait.

Question 4 : Quels éléments t'ont frappé durant la phase de retour en grand groupe?

Étudiants de la première prestation :

Peu de commentaires ont été émis entourant la plénière. Deux participants ont mentionné de l'intérêt et un autre avoir eu de la difficulté.

Étudiants de la seconde prestation :

Cinq étudiants sur onze ont apprécié cette partie de l'atelier. Ils étaient contents de finalement comprendre la démarche ou ont simplement manifesté de l'intérêt. Ils ont trouvé les explications claires et ont mentionné la nécessité de notre intervention au tableau pour comprendre. Enfin, un étudiant mentionne l'aspect déroutant du fait d'ajouter un *e* pour résoudre le problème.

Question 5 : Qu'as-tu appris concernant les mathématiques en général?

Étudiants de la première prestation :

La plupart des commentaires (12 sur les 19 relevés) sont de nature historique, les participants mettent l'accent sur une certaine historicité des mathématiques, le personnage de Fermat et l'évolution des méthodes. D'autres (deux participants) se sont dits surpris que des découvertes mathématiques soient parfois dues au hasard et « qu'on va encore découvrir des choses en mathématiques ». Aussi, un étudiant mentionne que « les maths ne sont pas juste des calculs », ce qui confirme le caractère intransigeant des mathématiques pour certains.

Étudiants de la seconde prestation :

Encore là, la plupart des commentaires (8 sur 15 relevés) sont de nature historique. Les étudiants (6) soulignent particulièrement la comparaison de méthodes éloignées dans le temps et de l'aspect évolutif de ces méthodes. Un étudiant mentionne la recherche de méthode globale à l'époque. Trois participants mentionnent la possibilité de résoudre un problème de plusieurs façons. Un étudiant souligne l'intervention de l'intuition et du hasard dans la recherche en mathématiques.

Question 6 : Qu'as-tu appris concernant le calcul différentiel?

Étudiants de la première prestation :

Les participants ont surtout mis l'accent sur l'exemple d'application que constitue l'extrait du texte de Fermat (6 sur 9). Ils mentionnent que cela les a éclairés au sujet de la résolution de problème d'optimisation à l'aide de la dérivée. Deux étudiants admettent n'avoir rien appris de nouveau.

Étudiants de la seconde prestation :

Les étudiants retiennent qu'il y a plusieurs façons de résoudre un problème. (3 étudiants). Deux étudiants mentionnent la situation à optimiser et le résultat associé au premier exemple de Fermat. Un étudiant mentionne la provenance de la formule (il voulait peut-être parler du théorème fondamental du calcul). Globalement, ils ne semblent pas relever de nouveaux apprentissages, mais perçoivent plutôt l'activité comme une façon originale d'aborder le calcul différentiel.

Question 7 : Que peut apporter ce genre de lecture à l'intérieur d'un cours de mathématiques, ce genre d'activités a-t-il sa place dans un cours de mathématiques?

Étudiants de la première prestation :

Plusieurs mentionnent de l'intérêt pour l'activité (6 personnes). Les participants ont aimé connaître les origines du calcul différentiel, mais ils disent aussi avoir besoin de pratique pour s'améliorer. Une personne mentionne qu'elle aurait aimé que cela se fasse en début de cours, car, selon elle, « on voit l'évolution ».

Étudiants de la seconde prestation :

L'ensemble des étudiants a, sous différents angles, manifesté de l'intérêt pour l'activité. Ils ont aimé connaître les origines du calcul différentiel (8 sur 11 participants). Cet intérêt est souvent lié à la présence de l'histoire dans l'activité, « l'histoire apporte de la motivation », « c'est moins abstrait », « tu sais qui est derrière ça », « on voit l'évolution »... Ils mentionnent aussi l'originalité de la démarche d'enseignement, le fait que ça change de l'ordinaire et le défi qu'amène une telle lecture. Les participants ont apprécié voir la matière sous un autre angle et faire des liens. Plusieurs (4 sur 11) croient que cela n'amène que des connaissances générales et que ça ne les rendra pas meilleurs en mathématiques. Ils ont besoin de pratique et ça ne les aidera pas pour l'examen. Deux étudiants auraient aimé que l'activité se fasse en début de session. Un autre mentionne qu'elle s'appliquerait plus au secondaire et qu'elle a un style réforme.

3.2 Analyse étudiant par étudiant :

Après une relecture attentive de l'ensemble des entrevues réalisées, nous aborderons chacune d'entre elles en particulier pour tenter de saisir une certaine « saveur » pour chacun des participants. Un à un, nous tenterons de qualifier et de saisir globalement les idées des participants ainsi que leurs réactions face à l'activité d'apprentissage. Encore là, nous en effectuerons l'analyse à partir des mêmes trois axes d'observations; historique, mathématique et didactique. Les citations des participants sont rapportées telles qu'elles apparaissent dans le document où les entrevues individuelles ont été retranscrites.

3.2.1 Participants de la première prestation

Étudiant 1 : Le premier participant met de l'avant son intérêt pour l'histoire des mathématiques. Les considérations mathématiques autour du calcul différentiel et du principe des *maxima* et *minima* sont totalement absentes. Il mentionne des difficultés au niveau de la lecture et de la partie plus mathématique de l'activité. Nous remarquons un enthousiasme certain pour l'histoire des sciences et des mathématiques. Le participant souligne des anecdotes relatives aux découvertes de Fermat et s'étonne de la vieillesse des résultats discutés lors de l'activité. Il axe clairement son discours autour de l'historicité des mathématiques. Quand nous lui avons demandé ce qu'il a appris sur les mathématiques, il mentionne : « Ça m'a frappé quand même tout ce temps-là, c'est long! Il y a des choses qu'on ne sait pas encore et qu'on va découvrir, moi je trouve ça excitant. Les affaires qu'on n'a pas trouvées encore. » Il ne mentionne pas avoir appris du nouveau, mais souligne clairement l'originalité de l'atelier vu comme une approche différente et intéressante de l'enseignement. Il semble intéressé aux éléments historiques concrets (anecdotes, personnages, images...) et très peu aux éléments mathématiques ou métamathématiques. Les réflexions didactiques sont aussi peu élaborées, malgré qu'il mentionne :

> C'est comme une manière différente d'apprendre. C'est jamais facile les maths, disons pour certains, c'est de la pratique. Comme moi, ça me prend de la pratique pour comprendre parfaitement. Y'en a qui l'ont du premier coup, moi c'est pas comme ça. Ça peut aider parce que c'est différent.

Étudiant 2 : Le second étudiant interviewé apporte aussi de nombreux commentaires à propos de l'historicité des mathématiques et souligne clairement son intérêt. Il mentionne l'évolution des méthodes et commente précisément le développement du calcul différentiel.

> C'est qu'il n'était même pas allé comme nous à l'université, au cégep, pour découvrir ça. Dans le fond, il était vraiment intéressé à découvrir les mathématiques. Il nous aide maintenant en mathématiques, car personne maintenant ne saurait comment faire une dérivée. C'est lui qui l'a découvert et je savais même pas que Fermat existait. La méthode qu'il a trouvée, le temps qu'il a mis là-dessus.

Ceci exprime une certaine réflexion autour des motivations et des forces qui animent le mathématicien. De nombreux éléments factuels (grand théorème de Fermat, aspect amateur de Fermat, façon d'écrire un rectangle...) ponctuent son discours. L'étudiant apparaît honnête en mentionnant que ce genre d'atelier ne convient pas à tous les types d'étudiants. En effet, selon le participant, ce ne sont pas tous les étudiants qui seront intéressés, plusieurs font des mathématiques uniquement parce qu'elles apparaissent dans leur cursus scolaire. Il semble intéressé aux éléments historiques concrets (anecdotes, personnages, images...), mais amène aussi des réflexions plus profondes quant à l'évolution des méthodes et de la notation. En effet, l'étudiant dit : « Dans le fond, ça m'a appris de où les maths venaient et que nous on a juste simplifié. C'est pas des personnes de maintenant qui ont trouvé des formules mathématiques. Maintenant, on fait juste dériver en regardant. » D'un autre côté, il y a peu de réflexions portant précisément sur la méthode des *maxima* et *minima* et les réflexions didactiques sont aussi peu approfondies.

Étudiant 3 : Le troisième participant mentionne en premier lieu son intérêt pour la méthode des *maxima* et *minima*. Il s'étonne de l'utilisation du « petit e », et ce, sans justification de la part de Fermat. Il fait sans doute référence à l'aspect intuitif de la démarche de Fermat en disant : « C'était intéressant que tout à coup il pense à utiliser le e. » Il ajoute :

> C'était pas facile, je me rappelle que c'était dur pour moi d'imaginer le rectangle. Je voyais pas comment AEB avec le E à l'intérieur, pourquoi il n'a pas juste dessiné un rectangle? Comme il le fait, c'était juste trois points pour le rectangle. C'était comme bizarre et difficile de s'imaginer. Et finalement, ah! C'est comme ça!

Il y a clairement ici une réflexion quant à la rigueur mathématique et à la notation. Le discours s'oriente plus vers les notions mathématiques et leurs utilités actuelles (problèmes d'optimisation). Cependant, le participant n'omet pas de faire différentes considérations de nature historique et mentionne clairement son intérêt pour l'histoire. Il semble avoir été sensible à l'aspect humain donné au personnage lors de la présentation (aspect amateur, travail à la maison, il n'avait pas étudié les mathématiques...). Il semble avoir été sensible aux motivations qui animaient Fermat et les scientifiques en général en disant : « Oui, parce qu'il y a des gens comme curieux et qu'ils veulent savoir comment ça se fait qu'on fait ça? On voit qu'il essaie de faire ça... et on se dit; ah! c'est pour ça que je fais ça! » Nous remarquons plusieurs réflexions autour de l'historicité des mathématiques et de l'évolution des méthodes. Ces réflexions justifient pour le participant ce genre d'activités à l'intérieur d'un cours de mathématiques. Il semble clairement avoir compris les objectifs de l'atelier et ajoute différents commentaires didactiques en soulignant les raisonnements importants et les objectifs du calcul différentiel.

Étudiant 4 : Ce participant a fait peu de commentaires et ne semble pas vouloir se livrer facilement durant l'entrevue. Il mentionne rapidement quelques éléments factuels de nature historique (il écrivait dans les marges, référence au grand théorème...). Il mentionne des difficultés lors de la lecture du texte et se rappelle le mot « adégaler ». Il y a peu de réflexions mathématiques, mais mentionne, cependant, l'étrange utilisation « du petit e ». Il dit : « C'est surtout, d'où est sortie l'idée de mettre un e? J'ai trouvé ça bizarre. Quand on y allait étape par étape, c'était pas si mal. » Il ne semble pas y avoir non plus de réelles réflexions didactiques. L'activité ne semble pas lui avoir apporté beaucoup du point de vue des mathématiques autre qu'une révision des notions entourant l'utilisation du calcul différentiel pour l'optimisation de situations fonctionnelles.

Étudiant 5 : Le cinquième étudiant mentionne quelques commentaires sur des éléments précis de la vie de Fermat, mais semble axer ses réflexions sur le texte et la méthode de Fermat et souligne plusieurs passages ou mots de vocabulaire importants. Il considère la lecture du texte ancien comme un défi motivant. La compréhension de l'énoncé du problème proposé semble lui avoir été difficile. Il s'étonne de la démarche intuitive de Fermat et de l'aspect hasardeux de sa méthode : « Le e, on sait pas trop de où est-ce qu'il sort. » Il s'agit pour lui d'une démarche par tâtonnements. La valeur pédagogique de l'atelier lui apparaît plutôt pauvre. Elle ne fournirait que des éléments de culture générale et n'apporterait pas vraiment en matière de mathématiques. Il s'agirait surtout d'un cours de niveau universitaire. L'étudiant ne semble pas avoir souligné d'enrichissement pour sa formation spécifique.

Étudiant 6 : Ce participant semble avoir été profondément touché par l'activité. Il mentionne : « On voit les mathématiques pas vraiment comme un préalable, comme pour aller à l'université. On voit la dérivée, on peut faire des liens, on ne peut pas ne pas avoir de but et faire ça. » L'atelier semble donner du sens à l'activité mathématique pour cet étudiant. Il mentionne que « ça donne un but à ce qu'on fait ». Sa conception de l'activité mathématique semble avoir été enrichie par cette expérience. Il souligne l'évolution des méthodes et s'étonne de voir bon nombre de mathématiciens autour du développement du calcul différentiel. Nous observons clairement que le participant semble avoir été sensible à l'historicité des mathématiques que met en relief l'activité. Pour lui, ces éléments rendent légitime l'utilisation d'un tel atelier d'apprentissage dans le cadre d'un cours de mathématiques.

Étudiant 7 : Le septième participant souligne son intérêt pour l'originalité de la démarche. Il mentionne à plusieurs reprises le fait que l'atelier proposé amène un certain changement par rapport aux cours de mathématiques ordinaires. Pour cette personne, l'activité montre que « les mathématiques ne sont pas que des calculs ». Nous croyons que pour cet étudiant, la présentation semble avoir amené un visage plus humain aux mathématiques au travers des éléments de la vie quotidienne de Fermat. Il mentionne d'ailleurs plusieurs éléments biographiques issus de la présentation PowerPoint (correspondances, lien avec Descartes, grand théorème...). Aussi, il semble mettre l'accent sur l'évolution des méthodes et des liens entre le principe de Fermat et les outils modernes mis en relief lors de la plénière. Il mentionne : « En plus, la démonstration, ça répondait à ce qu'on fait actuellement. Pour voir par où on a passé pour arriver à la dérivée. Comment on faisait dans le temps. » Il semble donc sensible à l'historicité des mathématiques et de la rigueur que souligne la présentation.

Étudiant 8 : Ce participant axe son discours sur la passion de Fermat pour les mathématiques et son aspect amateur. Il semble avoir été étonné qu'un avocat (la présentation mentionne qu'il fit des études de droit) puisse faire des mathématiques à la maison en amateur. L'étudiant souligne que cette dimension de la vie de Fermat motive et donne « le goût des mathématiques ». Le participant mentionne en début d'entrevue son rapport négatif aux mathématiques et met de l'avant l'intérêt que peuvent particulièrement susciter les éléments de nature historique dans ce genre d'activité. Il remarque aussi l'aspect évolutif des mathématiques. Cet aspect semble atténuer le caractère intransigeant des mathématiques qui transpire dans les propos de l'étudiant au début de l'entretien.

Étudiant 9 : Le dernier participant du premier groupe d'élèves met en avant son intérêt pour l'histoire. Il souligne l'aspect amateur de Fermat et sa passion pour les mathématiques. Il dit : « C'est plus sur l'historique de Fermat, à quel point il aimait les mathématiques. C'est ça que j'ai trouvé le plus intéressant, comment il faisait ça chez lui. » L'étudiant ne semble pas enclin à des réflexions autour des mathématiques du principe des *maxima* et *minima*. Il ne fournit pas non plus de réflexions autour de l'évolution des méthodes, de la notation ou de la rigueur. Le participant met surtout en relief des éléments entourant la personnalité de Fermat, entourant l'homme en tant que tel. La personne n'aborde que des éléments très concrets de l'histoire du personnage. Aussi, l'étudiant souligne la motivation que peut apporter l'intérêt suscité par l'activité proposée et l'enthousiasme du présentateur.

3.2.2 Participants de la seconde prestation

Étudiant 1 : Le premier participant de ce second groupe a été sensible à l'absence de justification de Fermat.

> Pis que lui est arrivé à faire comme une égalité dans les airs de même et finalement nous on est capable avec les limites et notre optimisation et arriver à la même réponse que lui. Je ne comprends pas, il a quand même fait ça dans les airs et nous autres on est capable de justifier.

Il ajoute : « Il a comme sorti ça de même, de nulle part. » Ces réflexions sont surtout de nature mathématique, malgré quelques références au grand théorème de Fermat (référence portant sur l'aspect mathématique de l'anecdote). Il mentionne aussi son intérêt pour les précurseurs du calcul différentiel, ce qui met en relief une certaine historicité des concepts vus en classe. Pour le participant, ceci justifie l'utilisation de ce genre d'atelier à l'intérieur d'un cours de mathématiques. Il souligne clairement que l'activité vise une analyse plus approfondie des raisonnements importants autour du calcul différentiel et non la simple résolution d'un problème intéressant ou l'exploration du contexte historique entourant l'émergence du concept. L'étudiant est ainsi sensible à l'évolution des méthodes tant au niveau de la notation que de la rigueur. L'étudiant dit : « Aujourd'hui, on le fait plus clair et plus détaillé. »

<u>Étudiant 2 :</u> Le second étudiant n'apporte pas de véritables réflexions sur l'atelier. Il mentionne simplement l'intérêt de comparer deux méthodes différentes pour résoudre un même problème. Il semble rester campé autour de l'idée que les mathématiques ne sont que des formules à apprendre. Il n'a pas été intéressé par le contexte historique et mathématique et ne cite aucun passage de la présentation. Le participant se démarque par un certain pragmatisme qui rejette les éléments historiques qui, selon lui, ne l'aideront pas à comprendre la matière. Nous ne percevons pas de réflexion autour de l'évolution des méthodes. L'étudiant semble étonné de la possibilité de résoudre un problème à partir de méthodes différentes. Ceci pourrait être en lien avec sa conception que les mathématiques ne sont que des formules à connaître. Pour lui, à chaque type de problème, il y a une formule unique à appliquer.

<u>Étudiant 3 :</u> Le participant souligne en début d'entrevue l'originalité de l'activité proposée et a apprécié le fait que « ça change de l'ordinaire ». Il mentionne surtout que certains résultats utilisés auparavant auraient été « prouvés » récemment, ce qui montre une certaine sensibilité à l'évolution des méthodes et de la rigueur. Dans ce sens, il souligne l'absence de justifications et d'explications dans le texte de Fermat (l'étudiant parle de « sous-entendus »). Pour lui, Fermat aurait « trouvé par chance » ses résultats. Les réflexions du participant sont surtout de nature mathématique, même les références à la présentation PowerPoint tournent autour de sujets mathématiques (grand théorème de Fermat, contexte de découvertes mathématiques à l'époque...). Cet étudiant semble avoir apprécié le défi que propose l'atelier, particulièrement la lecture du texte. Il y voit une

source de motivation importante, plus importante que le contexte historique de la présentation.

Étudiant 4 : Le quatrième étudiant souligne particulièrement l'évolution du calcul différentiel. Il mentionne que Fermat a fourni une logique simple au départ et que petit à petit la théorie s'est construite. Il dit : « Souvent, ils partent de presque rien pour arriver à des théorèmes fondamentaux. Aucune base, aucune calculatrice, et ils créent des théories. » Nous remarquons clairement une sensibilité à l'historicité des concepts mathématiques. Le participant met en relief l'étrange utilisation par Fermat du « petit e » et de son caractère infinitésimal : « Oui, cette personne-là a dit; je vais rajouter un côté e. On va le mettre à côté. Il va être dans la formule, mais on l'oublie. Après on calcule pour arriver à un résultat qui est notre réponse dans le fond. » Il laisse entendre le manque de justifications de Fermat quand on l'interroge sur les difficultés liées à la lecture du texte. Il se questionne aussi sur la validité du vocabulaire utilisé par Fermat qui lui apparaît plus près de la vie courante : « Des fois, c'est l'utilisation de mots que tu ne sais pas si ça s'applique vraiment aux mathématiques. » Des réflexions ont donc été faites au niveau de la rigueur. Cependant, l'étudiant semble percevoir l'activité comme loin de son cursus scolaire. Il perçoit l'activité comme de l'enrichissement. Chose parfois intéressante, mais pas nécessaire à la démarche du cours actuel. Il propose même que cette activité vise les étudiants du secondaire en faisant référence au renouveau pédagogique. Selon lui, l'approche globale visée par l'atelier y serait plus adéquate. Ce qui montre une certaine réflexion didactique entourant l'activité de lecture de textes anciens.

Étudiant 5 : Le participant met plutôt l'accent sur certaines considérations historiques. Il insiste sur l'aspect amateur de Fermat et sur différents éléments biographiques. Il semble apprécier le côté humain que procure l'atelier aux mathématiques : « C'est qu'il faisait ça chez eux. Les grandes parties qu'il a comme inventées. Dans un cours de maths, on a juste les théories. On n'a pas des choses comme ça. » Il perçoit cet atelier comme un approfondissement de la matière. Les concepts y sont abordés différemment. Il ne fait pas directement allusion à l'évolution des notions ou à une certaine historicité du calcul différentiel, mais met, d'une certaine façon, en avant cette exploration des raisonnements importants à partir de la lecture.

Étudiant 6 : Ce sixième participant se démarque clairement par son enthousiasme et son intérêt pour l'atelier dans l'ensemble. Il s'exclame : « Au début, j'ai trouvé ça vraiment dur et après quand tu nous l'expliquais, j'étais comme, ben oui! C'était vraiment facile là! C'est rare que je trouve ça intéressant les maths, mais là, la façon dont tu nous l'as appris... » Il met particulièrement l'accent sur la motivation qu'amène le côté historique et humain de l'activité. Pour lui, cela montre que les mathématiques ne sont pas seulement des chiffres. Il mentionne qu'en connaissant le contexte historique de l'élaboration du concept et certains éléments biographiques des mathématiciens précurseurs, on s'intéresse plus intensivement aux problèmes proposés. L'étudiant souligne qu'il est motivant d'imiter la démarche d'un mathématicien tout en s'imaginant que ce dernier l'aurait découverte tout seul. De plus, la mise en contexte fournit un but. Le participant met en avant son intérêt pour l'histoire et crée des liens avec ses autres cours autour des personnages comme Descartes et Pascal. D'ailleurs, ses références aux différents éléments de la présentation historiques sont nombreuses et particulièrement détaillées. Quand on lui demande si ce type d'atelier à sa place dans un cours de mathématiques, il dit :

> Oui, c'est pas juste des maths. Tu te dis; ah! Des maths ça va être plate ça! Que tu nous aies mis comme l'entourage des découvertes de lui, on dirait que tu rentres plus dedans. Tu connais le personnage et t'as le goût de voir comment y a trouvé son affaire. Tu sais, les maths, juste des chiffres, au moins là tu as de quoi en arrière et tu peux, avec les moyens qu'il avait, essayer toi aussi. C'est moins abstrait mettons. Juste le fait de pouvoir imiter ce que lui a fait, tu te dis que lui a trouvé ça par lui-même. Tu as plus le goût de te forcer que de juste trouver la réponse de ton livre.

Ce qui met en relief l'importance pour ce participant de la présence à la fois d'éléments de nature historique et biographique, de la lecture du texte et de la reprise de la démarche en termes anciens et modernes pour la réussite d'une telle activité.

Étudiant 7 : L'étudiant met l'accent sur les précurseurs en mathématiques. Selon lui, l'activité met en lumière les gens qui ont travaillé sur des concepts de base en mathématiques. Il mentionne dès le début de l'entrevue :

> Toutes les bases qu'on a en mathématiques, il y a du monde qui ont fait des recherches pour trouver des bases. Des choses qu'on utilise maintenant comme bases. C'était des amateurs qui faisaient ça pour le fun. Tout ce qu'on sait, c'est d'eux que ça vient. Souvent y ont trouvé des choses par hasard.

Il ajoute : « C'est pas trop, ou plus ou moins rationnel dans des cas. On peut découvrir quelque chose d'important en maths sans chercher cette affaire-là. En cherchant un peu par hasard et en essayant plein d'affaires et finalement trouver quelque chose. » Ainsi, nous remarquons une certaine réflexion sur les mécanismes de découvertes en mathématiques et sur l'aspect intuitif de la démarche de Fermat. Il illustre son propos en faisant référence à l'utilisation du « e » sans justification. Ces éléments historiques de l'activité qui mettent en avant les personnages autour de l'émergence du calcul différentiel semblent humaniser l'activité mathématique, tout en fournissant de nouvelles réflexions autour des raisonnements fondamentaux abordés dans le cours. Paradoxalement, le participant mentionne que ce genre d'atelier suscite clairement de l'intérêt et de nouvelles réflexions, mais aussi, en fin d'entrevue, que ça n'aide pas vraiment à comprendre la matière. Il voulait sans doute souligner la nécessité d'appliquer ces concepts à des situations diverses pour créer des automatismes.

Étudiant 8 : L'étudiant se démarque par sa sensibilité à notre enthousiasme, à la clarté de la présentation et à l'originalité de la démarche. Il semble surtout intéressé par le contexte historique présenté. Il mentionne d'ailleurs avoir entendu parler auparavant de Descartes dans d'autres cours et souligne son étonnement quant à l'existence d'une telle activité mathématique à l'époque de Fermat. Le participant fournit peu de réflexions sur le volet mathématique de l'activité. Il s'étonne curieusement de la possibilité de résoudre un même problème à partir de deux démarches différentes. Il semble percevoir le contenu de l'activité comme des mathématiques supérieures. En effet, il mentionne : « Dans ce texte-là, ben ça avait l'air de grosses maths dures mettons. Ça m'a intéressé aussi, parce que je voulais voir c'était quoi les maths à un autre niveau plus avancé... comme faire des preuves, j'ai pas haï ça mettons. C'était intéressant. » Cette remarque porte à croire que ce participant semble percevoir les mathématiques de façon moins intransigeante suite à l'atelier. Pour le participant, l'activité donne du sens et une utilité au concept de dérivée. De plus, il apparaît sensible à l'historicité des concepts en question : « On voit l'évolution de comment ça a parti et comment c'est aujourd'hui. Je trouve que c'est intéressant de savoir de où que ça vient. Ça ajoute à la connaissance générale là tu sais. »

Étudiant 9 : Le participant souligne clairement son intérêt pour le contexte historique présenté. Il mentionne surtout le rôle des grands penseurs de l'époque de Fermat, leur aspect touche-à-tout et le contexte de développement des connaissances. Il s'étonne des

300 ans d'écart entre les méthodes. Notre enthousiasme et notre passion semblent avoir particulièrement interpellé cet étudiant. Nous notons peu de remarques didactiques ou mathématiques. Toutefois, d'un point de vue épistémologique, il explique que l'atelier lui aura permis de voir les mathématiques comme un ensemble de résultats imbriqués et enchaînés.

> C'est plus le côté que tout était relié dans le fond, avec telle formule, tu peux trouver telle autre chose. Des fois, un problème, c'est pas juste appliquer un théorème, tu dois appliquer plusieurs théorèmes. La dérivée première comme on l'a fait, le maximum dans le fond, il fallait calculer tout ça.

Il semble avoir été marqué par la lecture du texte écrit en français de l'époque sans toutefois relever des mots ou expressions en particulier. Dans ce sens, il mentionne : « Oui, c'était la première fois que j'entendais ça. C'était vraiment écrit en ancien français, il y a des mots qu'on aurait pu facilement inverser dans notre langage d'aujourd'hui. »

Étudiant 10 : L'étudiant semble intéressé par les liens qui unissent le principe de Fermat et le calcul moderne. Il souligne une évolution de l'efficacité : « Aujourd'hui, on démontre mieux. » En plus de détailler clairement plusieurs éléments de la présentation historique, il fait référence à l'utilisation du « e » comme raisonnement clé dans la méthode de Fermat. Il mentionne aussi : « Mettons que les mathématiques dans le temps ça se passait plus comme de l'écriture, comme quoi les gens s'envoyaient des messages. Pour faire avancer les connaissances dans le fond. Pour créer la discussion, pour parler. » Il illustre l'évolution, non seulement des notions entourant le calcul différentiel, mais aussi celles des processus de découvertes et de diffusion de la connaissance dans l'histoire. Nous sentons très bien dans son discours que l'atelier amène, à son avis, beaucoup de connaissances générales sur le contexte historique et mathématique, mais permet aussi des réflexions autour des raisonnements importants du calcul différentiel. Il ajoute que l'atelier lui aura permis de comprendre les exercices qu'il a entrepris après la prestation.

Étudiant 11 : Le dernier étudiant du deuxième groupe souligne d'entrée de jeu ses difficultés en mathématiques. Son discours aura porté exclusivement sur le contexte historique. Il s'intéresse profondément au contexte de développement des connaissances à l'époque de Fermat. Il souligne le goût d'en apprendre plus sur l'histoire que l'atelier a suscité chez lui. De plus, il aborde le souci des savants de l'époque d'apporter des solutions globales dans différents domaines et pousse la réflexion dans le contexte des sociétés contemporaines. Cet étudiant manifeste aussi une sensibilité à l'historicité des notions mathématiques en s'étonnant du « long chemin parcouru » par les précurseurs. Sans vraiment approfondir ses réflexions, il souligne l'importance de varier les approches dans l'enseignement des mathématiques.

CHAPITRE IV

RÉPONSES AUX QUESTIONS DE RECHERCHE ET CRITIQUE DE LA MÉTHODOLOGIE

Dans ce dernier chapitre, nous résumerons d'abord les grandes lignes de cette étude et nous rappellerons les questions de recherche soulevées. À l'aide de l'analyse des entrevues du chapitre précédent, nous tenterons de répondre à ces questions. Ensuite, nous poserons un regard critique sur la méthodologie employée et nous tenterons de situer clairement les limites de l'étude. Enfin, d'autres cadres méthodologiques possibles seront discutés.

4.1 Retour sur les objectifs de l'étude et réponses aux questions de recherche

Retour sur les objectifs de la recherche

Dans ce travail, il nous faut donc observer si l'activité décrite plus haut comprenant une phase de présentation du contexte sociohistorique, une phase de lecture d'un texte ancien et une phase de retour en grand groupe a suscité des réflexions métamathématiques chez les étudiants du cours de calcul différentiel. Nous entendons par réflexions métamathématiques, *les réflexions qui, au travers d'une activité mathématique, touchent l'historicité des notions abordées, l'historicité de la notation et de la rigueur associée, les mécanismes sous-jacents à la découverte des concepts explorés, les forces intrinsèques et extrinsèques qui animent les mathématiciens découvreurs et les liens entre le développement de ces concepts et le développement des sociétés et des cultures.* Ces réflexions métamathématiques doivent être mises en relief au travers d'entrevues individualisées réalisées immédiatement après l'atelier.

D'autre part, il nous faut évaluer, toujours à partir de la retranscription de ces entrevues semi-structurées, la profondeur de ces réflexions. Nous cherchons donc à faire un rapprochement entre mes propres réflexions et expériences positives vécues à Paris à l'intérieur d'un cours d'histoire des mathématiques où de telles activités de lectures étaient proposées et les réflexions et expériences positives rapportées pas les participants de cette étude. Cette correspondance se veut un moyen d'évaluer jusqu'où les participants, dans le cadre proposé, ont poussé leurs réflexions.

Enfin, il nous faut cibler les éléments du cadre méthodologique qui semblent avoir provoqué ces réflexions métamathématiques chez les étudiants. Nous tenterons de déterminer les éléments particuliers pour chacune des phases de l'activité qui sont susceptibles d'amener ces réflexions. Ainsi, nous cherchons à cibler plus précisément le « comment » afin de rendre possible la reconstitution de ces expériences positives dans un cadre semblable. Il s'agit de la problématique soulevée par Guliker et Blom (2001).

Ainsi, l'activité proposée place l'histoire des mathématiques comme un *objectif* en tant que tel, au sens de Jankvist (2007), et non pas comme un outil cognitif ou motivationnel. D'ailleurs, un bon nombre de participants mentionnent que l'activité ne leur avait pas nécessairement apporté beaucoup sur le plan de la compréhension des éléments théoriques entourant le cours de calcul différentiel, mais leur avait plutôt apporté une autre vision, plus approfondie, des notions abordées et avait enrichi leur perception des mathématiques en question dans son ensemble. Ces témoignages confirment cet aspect de l'atelier d'apprentissage qui propose l'histoire en tant qu'*objectif*.

Il est à noter que les témoignages et commentaires recueillis lors des entretiens qui ont suivi l'atelier de lecture ne feront aucunement l'objet d'une analyse statistique. La présente recherche se veut qualitative. Les conclusions qui suivent portent donc sur les étudiants en questions et non pas sur les étudiants en général. L'objectif de cette analyse étant d'explorer certaines possibilités et retombées quant à l'utilisation de texte ancien dans l'enseignement du calcul différentiel et non pas de quantifier statistiquement la véracité de nos hypothèses. Que le lecteur s'en assure.

Réponses aux questions de recherche

Émergence de réflexions métamathématiques

Au regard de l'analyse des entrevues effectuée précédemment, nous pouvons conclure que les participants ont bel et bien fait des réflexions métamathématiques lors de l'activité d'apprentissage. En effet, nous pouvons observer en parcourant les entretiens que l'historicité des notions abordées est constamment rappelée par les participants. Ils rapportent que l'activité apporte un visage humain aux mathématiques et beaucoup se disent surpris de l'importante évolution des concepts. L'activité permet, selon plusieurs, de mettre des visages et d'associer des personnages aux notions et découvertes mathématiques en question. Pour Barbin (1988), amener une certaine historicité aux concepts contribue à humaniser l'activité mathématique en la situant dans un continuum relatif au contexte sociohistorique et culturel. Les participants ont explicitement mentionné l'équivalence et la réconciliation des méthodes modernes avec la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat. Il semble donc que ces commentaires illustrent clairement de telles contributions issues de l'activité.

L'historicité des notions se manifeste aussi au travers de l'évolution de la notation associée. Encore là, les participants ont été sensibles à cette dimension et le montrent plus ou moins clairement dans les entrevues. Ils ont, en majorité, été sensibles aux mots de vocabulaire employés et aux tournures de phrases particulières. En fait, la difficulté liée à la lecture d'un texte écrit en ancien français semble avoir occulté les réflexions et les remarques autour de la notation employée par Fermat. Les efforts fournis par les participants pour la lecture semblent venir noyer les attentes quant à cette dimension de l'étude. Ainsi, les participants mentionnent uniquement à quelques reprises la façon dont Fermat note le rectangle à partir de trois lettres. Ils ne font aucunement mention du symbole d'« adégalation ». Ils ont plutôt mis de l'avant certains mots précis utilisés par Fermat qui, selon eux, appartiennent plus au registre familier qu'au registre mathématique. D'ailleurs, plusieurs mentionnent que Fermat ne semble pas se soucier de définir rigoureusement les objets utilisés pour l'illustration de sa méthode.

Ce dernier élément nous amène à discuter de l'historicité de la rigueur. En effet, le vocabulaire « familier » soulevé par les participants peut être interprété comme une sensibilité de ces derniers à une forme de discours moins formelle, plus près d'un discours argumentatif traditionnel que des textes à caractère mathématique qu'ils seraient habitués de voir dans les manuels scolaires et les ouvrages pédagogiques. Il s'agit d'un point que nous n'avions pas souligné d'emblée lors du choix du texte. En effet, le caractère argumentatif de l'extrait choisi nous apparaît typique des publications du XVII[e] siècle à travers lesquelles la rigueur du raisonnement déductif chère aux géomètres grecs semble s'estomper au profit de la Méthode qui éclaire, qui, contrairement aux discours des Anciens, « montre la voie par où on est passé » (Barbin, 1988). Cette sensibilité des participants à la forme du texte et à son caractère argumentatif est le signe d'une certaine réflexion quant aux différentes manières qu'ont adoptées les mathématiciens d'appuyer leurs raisonnements au fil des âges. Ce désir de l'auteur de « rendre à l'évidence par l'argumentation » qui caractérise l'extrait choisi (qui est bien de son époque) amène le lecteur moderne à percevoir la démarche comme hasardeuse et intuitive, aspect de la démarche qui fut à plusieurs reprises soulevé par les étudiants des deux groupes. En effet, l'absence flagrante de justification de la part de Fermat choque et fait réagir le lecteur moderne et particulièrement les étudiants qui sont dans l'attente de raisonnements hypothético-déductifs rigoureux, où chaque pas de raisonnement est justifié systématiquement. Pour nous, il s'agit d'un réflexe inculqué au cours de leur cursus scolaire et issu de la culture mathématique populaire moderne. Bref, l'absence de justification, la démarche intuitive de Fermat ainsi que la forme en tant que telle du texte auront permis aux participants de mettre en évidence l'historicité de la rigueur entourant la notion de calcul différentiel.

En parcourant plus en profondeur le mémoire de Fermat d'où provient l'extrait, nous ne pouvons qu'admirer son approche subtile et élégante des tangentes qui n'a rien de hasardeuse au final. Le premier exemple de la méthode est suivi de nombreux autres dans son ouvrage et ce dernier sera par la suite agrémenté de plusieurs lettres explicatives où il explicite ses raisonnements (Giorello & Sinigaglia, 2007). Cependant, restreints à la lecture exclusive du premier exemple sur l'aire maximale du rectangle, il est compréhensible que les participants mentionnent à plusieurs reprises que les découvertes de Fermat semblent dues au hasard. Ce qui nous amène à examiner plus particulièrement les réflexions des participants autour des mécanismes et processus de découverte en mathématiques.

Pour cette forme de réflexions métamathématiques, nous notons que les participants ont surtout mis en relief l'évolution des processus de découverte et de diffusion de la connaissance. Dans la présentation du contexte sociohistorique, nous décrivions assez clairement le réseau de correspondances autour du cercle du Père Marin Mersenne. Ce système d'échanges de résultats, qui avait lieu à travers toute l'Europe du XVII^{e} siècle, nous apparaît comme l'ancêtre des grandes revues scientifiques d'aujourd'hui. Nous mentionnions que de défis en conjectures, les mathématiciens de l'époque s'efforçaient de peaufiner leurs travaux afin de les rendre acceptables aux yeux de leurs contemporains. Les étudiants des deux groupes ont souligné ces éléments de la présentation lors des entrevues. Éléments qui, à notre avis, font partie à la fois des mécanismes de découvertes scientifiques et des forces extrinsèques qui animent les mathématiciens de l'époque.

Pour ce qui est des forces intrinsèques qui animent le mathématicien, les participants ont clairement mis de l'avant le caractère amateur de Fermat. Ils semblent, pour beaucoup, avoir été frappés par sa passion pour les mathématiques et le fait qu'il ne soit pas mathématicien de formation. Plusieurs se sont dits surpris qu'une personne puisse faire des mathématiques chez lui, en amateur, tandis que ses principales fonctions étaient celles de magistrat au parlement de Toulouse. Il s'agit clairement d'un élément immanent, propre au caractère du mathématicien, identifié par les étudiants.

À ce stade, il nous importe de mentionner que les quelques réflexions sur les mécanismes sous-jacents aux découvertes mathématiques et relatives aux forces intrinsèques et extrinsèques qui animent les mathématiciens proviennent essentiellement de nos propres interventions. En effet, c'est à l'intérieur de la phase de présentation du contexte sociohistorique que nous avons pu susciter ces réflexions. La lecture du texte semble n'en être nullement la cause. Nous reviendrons en détail sur ce point particulier plus loin dans ce chapitre, où nous tenterons de mettre en relief les éléments du cadre méthodologique qui ont suscité les réflexions métamathématiques chez les étudiants.

Profondeur des réflexions métamathématiques

Afin d'évaluer la profondeur de ces réflexions, nous proposons, d'entrée de jeu, de comparer l'ensemble de mes propres réflexions autour du texte choisi à celles des participants. Ainsi, comme il a été mentionné au début de ce travail, la présentation du contexte sociohistorique, la présence d'images et d'anecdotes autour du contexte d'émergences des notions mathématiques ou encore l'aspect original et novateur du texte ont été des éléments qui m'ont particulièrement frappé. Le mathématicien lui-même m'apparaît intéressant de par sa personnalité, ses découvertes, ses relations ou ses mentors. L'époque à laquelle il a vécu me semble riche et intéressante. Plusieurs récits, références intellectuelles ou historiques alimentent le contexte sociohistorique du personnage. Aussi, le mathématicien choisi fournit une image plus humaine et plus vivante des mathématiques. Le texte amène un certain questionnement sur la nature des mathématiques, leurs rôles, les forces qui motivent la recherche en mathématiques aujourd'hui et durant l'histoire et leur utilité dans les sociétés modernes. Ces réflexions de nature épistémologique m'ont habité continuellement lors de mes premières lectures. Aussi, la notation utilisée par Fermat est intéressante en cela qu'elle suscite des réflexions sur son efficacité et sur son historicité. La rigueur démontrée par le mathématicien de l'époque interroge le lecteur et l'amène à se questionner sur ses propres pratiques mathématiques. Enfin, le vocabulaire utilisé sort de l'ordinaire et pique la curiosité (*voir* art. 2.1.3).

Parmi ces mots de vocabulaire, les étudiants ont relevé le *e* utilisé par Fermat. Comme mentionné précédemment, ils soulignent son introduction hasardeuse, mais ne l'identifient pas, d'emblée, comme un élément de nature infinitésimale. Ils ne réagissent pas non plus devant la division effectuée par une quantité qui par la suite se révèle nulle. Un contemporain de Fermat ne pouvait être que frappé par un tel raisonnement. D'un point de vue strictement mathématique, le rapprochement entre les deux méthodes, qui a particulièrement intéressé les participants, a sans doute été fait de façon très superficielle par ces derniers. Pour les étudiants, la méthode de Fermat et les méthodes modernes mènent aux mêmes résultats, sans plus. Ce constat n'est accompagné d'aucune tentative de réconciliation théorique, si ce n'est d'affirmer que le résultat est le même. Pourtant, lors de la phase de retour en groupe, nous avons effectué un certain rapprochement entre cette utilisation du *e* et de la définition de la dérivée. Bien entendu, il était difficile pour le participant de nous faire part clairement de ces réflexions autour de ces thèmes dans le cadre de l'entrevue individualisée. Il aurait fallu récupérer et observer plus finement les productions des élèves pour une analyse adéquate de la chose. Bref, à la lumière des commentaires laissés par les participants, ils ne semblent pas que l'activité proposée amène l'élève à enrichir profondément ses conceptions autour du calcul différentiel. D'ailleurs, peu de réponses intéressantes ont été fournies à la question : « Qu'as-tu appris concernant le calcul différentiel? » L'efficacité des méthodes et de la notation modernes est un sujet qui n'est qu'effleuré par les étudiants. Ils semblent qu'implicitement ils y seraient sensibles lorsqu'ils mentionnent qu'aujourd'hui « on fait juste dériver et ça revient au même ».

Les participants ont aussi, comme moi, relevé à plusieurs reprises le mot « adégalation ». Le terme *adequatio* est la traduction latine du terme grec *parisotes* utilisé par Diophante pour signifier une approximation aussi près que possible à un certain nombre (Heath, 1931). Cependant, les étudiants n'apportent pas de définition personnelle pour ce mot, ils ne semblent pas se l'approprier véritablement. Ils soulignent simplement son aspect nouveau. Il est vrai que, durant la plénière, nous mentionnions qu'« adégalés » signifie « presque égales », mais cette interprétation n'a pas été reprise dans les commentaires des participants. Le fait qu'il soit emprunté à Diophante ne semble pas non plus les avoir interpellés. Cette référence avait pourtant vivement piqué ma curiosité lors de ma première lecture dans le cours de M Sakarovitch et m'avait amené à me questionner sur l'utilisation qu'en faisait Diophante.

L'expression « que le rectangle AEC soit maximum » était une formulation qui m'intéressait étant donné la convention actuelle de nommer un polygone par l'ensemble des sommets qui le constituent. Comme nous le soulignions clairement durant l'activité, les participants n'ont pas manqué de le rappeler durant les entrevues. Par contre, ils n'ont pas approfondi véritablement la réflexion autour de cet élément et se sont contentés de souligner l'étrangeté de la formulation.

Outre le vocabulaire employé, les participants ont été, comme moi, interpellés par le riche contexte sociohistorique et scientifique. La plupart des étudiants interviewés ont apprécié la partie plus historique, malgré certains qui disaient préférer la lecture ou la partie plus mathématique de l'activité. Il est clair, à travers les commentaires, que la plupart ont été sensibles aux photos, aux anecdotes, à certains éléments biographiques et aux références à d'autres personnages historiques de l'époque de Fermat. L'ensemble de ces considérations a grandement contribué à amener les étudiants à réfléchir sur l'historicité des notions abordées, sur les mécanismes de découverte et sur les forces qui animent et motivent les mathématiciens. Il en va de même pour les réflexions autour de la rigueur. Reste à mettre en relief plus précisément les éléments du cadre méthodologique qui sont associés aux différents types de réflexions métamathématiques suscitées chez les participants.

Éléments du cadre méthodologique qui ont suscité ces réflexions

À la lumière des observations précédentes, il nous apparaît très important de souligner l'importance de la présentation du contexte sociohistorique pour la réussite de l'activité. En effet, il nous apparaît évident que les réflexions touchant les forces et les motivations qui animent les mathématiciens ne peuvent venir que de la présentation PowerPoint et non de la lecture du texte. En effet, c'est nous-mêmes qui, dans la première phase de l'activité, avons mis de l'avant les éléments soulevés par les étudiants autour de ces deux points. Quant aux réflexions gravitant essentiellement autour de l'évolution des processus de découverte et de diffusion de la connaissance, de l'aspect amateur de Fermat et de sa passion pour les mathématiques, il aurait sans doute été possible que la lecture à elle seule puisse les avoir suscitées. Pour ce faire, la forme du texte en questions doit suggérer plusieurs choses. Par exemple, le texte aurait pu prendre la forme d'une correspondance entre mathématiciens. Ce qui aurait pu fournir des indices aux lecteurs sur les façons de faire de l'époque. À partir d'un texte bien choisi, il ne serait pas impossible de susciter des réflexions autour des mécanismes de découverte et des forces qui animent le mathématicien. Évidemment, la recherche d'un tel texte s'avèrerait très difficile.

D'autre part, les réflexions autour de l'historicité de la rigueur et de la notation n'auraient sans doute pas été suscitées sans la phase de lecture. Nous ajoutons que les participants n'auraient sans doute pas pu percevoir et apprécier pleinement l'historicité du calcul différentiel sans cette phase de l'activité. Après coup, nous croyons que ce visage humain qu'apporte l'activité, si souvent rapporté par les étudiants, est indissociable de la lecture du texte. La simple présentation du contexte, aussi intéressante qu'elle soit, n'aurait pas pu susciter autant d'enthousiasme et de réflexions. Il en va de même pour l'évolution des méthodes, si énorme aux yeux des participants, qui n'aurait pu être discernée avec autant d'acuité sans la phase de lecture. Dans ce sens, nous nous permettons d'affirmer que la lecture et la présentation du contexte sont intimement liées. La lecture du texte semble permettre aux étudiants d'apprécier pleinement et de « vivre », en quelque sorte, les réflexions métamathématiques issues de la présentation du contexte. À l'inverse, la lecture du texte se doit d'être précédée d'une exploration du contexte sociohistorique pour qu'un sens profond soit rattaché aux mots, expressions et raisonnements particuliers à l'auteur et à l'époque. Autrement dit, la lecture d'un texte ancien ne nous apparaît constructive et enrichissante que si elle est jumelée directement à l'exploration du contexte historique et vice versa. Prenons, par exemple, la référence de Fermat à Diophante qui apparaît dans l'extrait présenté. Cette référence n'aurait aucun sens et aucune image n'y serait associée dans l'esprit du lecteur si ce dernier n'était pas informé des lectures et des redécouvertes de Fermat des mathématiciens de l'Antiquité. Ce sont ces recoupements ou ces enrichissements mutuels entre les deux phases de l'activité qui amènent l'apprenant à faire des réflexions métamathématiques profondes et riches.

Les participants aux entrevues ne font pas clairement mention de ces éléments. Du moins, ils n'explicitent pas de façon évidente les liens étroits qu'entretiennent les différentes phases de l'activité. Ils se contentent de dire que, globalement, dans l'ensemble, l'activité permet de « voir d'où ça vient ». Afin de mieux percevoir l'impact de ces différentes phases de l'activité sur l'émergence de réflexions métamathématiques chez les étudiants, il aurait été intéressant de répéter l'expérimentation en omettant délibérément certaines d'entre elles. Imaginons la même expérience sans la présentation du contexte sociohistorique ou encore sans la lecture du texte. Sans doute, les commentaires auraient été différents de ceux reçus avec la présente expérience. Il aurait été alors possible de confirmer et de discuter plus finement des liens qui unissent les deux phases de l'activité proposée. Ces éléments pourraient véritablement faire l'objet d'une étude complète. Entreprise qui, à mon avis, permettrait d'explorer sérieusement la question du « comment » dans l'utilisation de l'histoire des mathématiques soulevée par Guliker et Blom (2001) qui reste très peu documentée.

4.2 Limites de l'étude et critiques du cadre méthodologique

Limites de la présente recherche

Ce qui nous amène à discuter plus précisément des limites de la présente étude. D'abord, d'un point de vue global, nous considérons qu'il est difficile, à partir de la méthodologie utilisée, d'évaluer la profondeur des réflexions des participants de l'étude. Comme la collecte de données a été faite sous forme d'entrevues réalisées directement après l'activité, certains participants semblaient répéter carrément et parfois maladroitement ce qui avait été dit. Il semble que certains ne se sont pas véritablement approprié ces réflexions et se sont contentés de nous fournir en entrevue ce que nous voulions entendre. Le fait que nous nous présentions d'emblée comme « étudiant-chercheur » renforçait aussi le problème. En effet, nous sentions que les élèves voulaient répondre correctement à nos questions et non pas sincèrement, même si nous insistions en début d'entrevue pour que les participants se livrent ouvertement. De plus, nous remarquons que nous avions tendance à souligner, lors de l'activité, les éléments du contexte sociohistorique ou du texte qui m'ont interpellé dans le cours de M. Sakarovitch. Nous incitions donc les étudiants à retenir plus spécifiquement certains éléments de l'activité d'apprentissage. Il semble que nous aurions dû maintenir un ton et un enthousiasme semblable lors de l'ensemble de l'atelier. Somme toute, il est difficile d'évaluer clairement la profondeur des réflexions de l'ensemble des participants. Il aurait été préférable qu'une personne différente de celle qui donne l'atelier d'apprentissage fasse les entrevues individualisées. De cette façon, nous aurions sans doute évité que cette sympathie envers l'expérimentateur et ce désir des participants de répondre « ce qu'il faut répondre » viennent brouiller les cartes.

La question de la sympathie envers l'expérimentateur nous apparaît d'une grande importance. Beaucoup de participants ont manifesté un certain intérêt pour l'activité et mentionnent même que ce genre de démarche leur aura permis d'apprécier enfin les mathématiques et que ce type d'ateliers devrait avoir lieu plus souvent. Cependant, il nous est difficile d'accorder beaucoup de valeur à cet enthousiasme. Certes, nous ressentons une véritable sincérité chez pratiquement l'ensemble des étudiants, mais il nous faut nous rendre à l'évidence que cette sympathie envers l'expérimentateur, un jeune étudiant pas très loin de leur situation, vient contaminer les données recueillies et abaisser le niveau de crédibilité que nous pouvons leur accorder. Comme nous le soulignions plus haut, il aurait été important qu'une personne différente réalise les entrevues ou encore que l'ensemble du cadre méthodologique soit revu et modifié. D'ailleurs, nous préciserons comment la collecte de données aurait pu se faire autrement pour remédier aux différents problèmes soulevés.

Critique du déroulement de la collecte de données

Plus spécifiquement au niveau de la collecte de données, nous croyons que des rectifications auraient aussi été nécessaires pour obtenir des réponses plus sincères de la part des étudiants et pouvoir évaluer plus adéquatement la profondeur de leurs réflexions. D'abord, nous croyons qu'il était difficile pour nous de mener correctement et efficacement les entrevues. En effet, nous observons que nous avions tendance à orienter les réponses des participants. Il nous arrivait parfois de reprendre et de reformuler les dires des étudiants en leur donnant une essence qui collait mieux à nos attentes. Par exemple, lors de la troisième entrevue du second groupe, nous pouvons lire dans le verbatim :

> « Qu'est-ce que tu retiens globalement de la dernière heure qui vient de se passer, qu'est-ce qui t'a frappé, ce que tu as apprécié ou moins apprécié? »
>
> Étudiant 3 : « J'ai trouvé ça plus le fun qu'un cours habituel. Que les maths, ça date pas d'hier non plus. Dans le fond tout ce qu'on fait depuis le secondaire, ça tout été trouvé depuis longtemps. Ça été prouvé récemment, mais dans le fond ça été trouvé depuis un petit bout. »
>
> « Il y a des gens qui ont travaillé là-dessus… »
>
> Étudiant 3 : « Oui, à part de ça c'est pas mal tout. »

Ce qui montre notre désir de faire dire au participant que l'activité aura permis de mettre un visage sur les notions abordées et d'humaniser les mathématiques. Nous remarquons que l'étudiant n'a pas pu, à cause de cette remarque, préciser ses propos et fournir une réponse complète. En faisant une lecture attentive de la retranscription des entrevues, ce genre de chose survient tout de même à quelques reprises. Il nous aurait fallu être plus patients et laisser la chance aux participants de s'exprimer clairement et surtout plus librement. Bien entendu, il s'agissait de nos premières expériences pour ce genre d'entrevues individualisées. Sans doute que la nervosité et les appréhensions quant aux résultats escomptés nous ont amené à faire ces erreurs.

Toujours autour de la collecte de données, nous remarquons aussi que les étudiants participant aux entrevues devaient attendre leur tour à l'extérieur. Pour la première prestation, les étudiants devaient attendre carrément dans le corridor adjacent à la salle de rencontre qui avait été mise à notre disposition. Pour la seconde prestation, une période de révision était organisée par le professeur chargé du cours après l'activité. Dans les deux cas, comme chacune des entrevues a duré entre cinq et dix minutes, il était possible pour les participants de discuter entre eux des questions de l'entrevue. Nous nous imaginons qu'ils se sont sans doute consultés afin de connaître le déroulement de l'entrevue et les questions qui y sont posées. Nous en concluons que plusieurs réponses d'étudiants ont possiblement été préparées et discutées à l'avance avant même la passation des entrevues. Il s'agit d'une erreur méthodologique qui, à notre avis, enlève une certaine crédibilité aux données recueillies. Ce genre de biais nous apparaît inhérent à la méthodologie choisie. En effet, comme ces entrevues auraient pu difficilement se réaliser simultanément, ces échanges entre les participants nous apparaissent inévitables. Cependant, les risques auraient été moins élevés si les entretiens étaient éloignés les uns des autres dans le temps et qu'ils avaient été fixés à des dates ultérieures.

Critique de l'outil de collecte de données

D'autre part, les questions abordées durant les entrevues auraient pu faire l'objet d'une planification plus rigoureuse. Nous considérons que les questions choisies permettent difficilement d'évaluer la profondeur des réflexions métamathématiques que manifestent les participants. En effet, les questions sont d'ordre très général et les étudiants ont répondu souvent de façon vague et imprécise. Comme il a été mentionné précédemment, les participants précisent très peu leur pensée sur les divers points qu'ils soulèvent. Il aurait sans doute été possible pour nous de planifier plus en profondeur ces entrevues afin de rebondir avec différentes « sous-questions » pour faire suite à des réponses peu satisfaisantes. Aussi, il aurait été intéressant de préparer des questions touchant plus précisément à la lecture de textes anciens. Nous aurions aimé connaître plus en profondeur la réaction des étudiants par rapport à cette expérience. À partir de la question : « Que retiens-tu de la phase de lecture? », les participants n'ont pas pu élaborer suffisamment sur le sujet. Il aurait été possible de demander; « Que penses-tu d'une telle activité? », « As-tu trouvé la lecture enrichissante et pour quelles raisons? », « Qu'est-ce que la lecture apporte en plus du contexte sociohistorique? » ou encore « La lecture de textes anciens devrait-elle être utilisée plus souvent à l'intérieur des cours de mathématiques? ». Ce type de question nous aurait peut-être aussi permis d'obtenir des indices plus importants afin de mettre en relief les éléments du cadre méthodologique qui ont suscité des réflexions métamathématiques chez les participants de l'étude.

Autre cadre méthodologique possible

Enfin, face à ces divers problèmes d'ordre méthodologique, il aurait peut-être été bon pour nous de nous inspirer de l'étude de Jankvist (2008c). En effet, dans son étude, Jankvist amène les étudiants à mettre sur papier leurs impressions en leur demandant de répondre à différentes questions générales. L'ensemble de ces réflexions personnelles, les vidéos des cours donnés et les productions des élèves pour différents exercices en classe constituaient, avec les entrevues individualisées, les données recueillies par le chercheur.

Bien entendu, l'étude de Jankvist est d'une envergure beaucoup plus grande que celle-ci. Cependant, l'idée de recueillir des réflexions écrites de la part des participants aurait pu nous éviter plusieurs problèmes. D'abord, cela aurait sans doute atténué l'effet de sympathie envers l'expérimentateur. Nous croyons que le fait d'écrire de façon anonyme amènerait les participants à se livrer plus sincèrement. Aussi, cela nous aurait permis d'éviter les problèmes d'échanges d'informations qui se sont produits entre les entrevues lorsque les participants attendaient à tour de rôle dans une pièce voisine de la salle de rencontre. Comme les étudiants auraient fait ces réflexions écrites simultanément, il n'y aurait eu aucune possibilité d'échanges. D'un point de vue pratique, cette méthodologie aurait été plus facile à réaliser pour nous qui avions peu d'expérience pour mener efficacement des entrevues et nous aurait permis d'obtenir plus facilement un nombre important de participants. Surtout, les productions d'étudiants nous auraient permis d'observer plus facilement la profondeur des réflexions métamathématiques de ces derniers. De plus, en multipliant les expérimentations et les réflexions écrites des étudiants, il aurait été possible de voir l'évolution de leurs conceptions des mathématiques ou des notions abordées dans la durée.

CONCLUSION

Ce projet est issu de mes expériences personnelles comme étudiant étranger à l'Université René Descartes (Paris V). Dans ce contexte d'échange étudiant, j'ai pu vivre, lors d'un cours d'histoire des mathématiques, des activités d'apprentissages très enrichissantes basées sur la lecture de textes anciens. Plusieurs éléments susceptibles d'être reproduits en classe sont à l'origine de ces expériences positives; la présentation du contexte sociohistorique, la présence d'images et d'anecdotes autour du contexte d'émergence des notions mathématiques ou encore l'aspect original et novateur du texte. De plus, le mathématicien en question était intéressant de par sa personnalité, ses découvertes et ses relations avec les autres savants de son époque. Époque qui me semblait riche et intéressante. Les récits et références intellectuelles ou historiques étaient nombreux. Aussi, les thèmes abordés fournissaient une image plus humaine et plus vivante des mathématiques. La lecture des textes et les discussions qui l'accompagnaient ont suscité chez moi un certain questionnement épistémologique sur les mathématiques, leurs rôles, les contextes d'émergence, les forces qui motivent leurs développements aujourd'hui et durant l'histoire et leurs utilités dans les sociétés modernes. La notation utilisée par l'auteur était intéressante et amenait des réflexions sur son efficacité et sur son historicité, il en va de même pour la rigueur et le vocabulaire utilisé.

Résumé de la recherche

Ces éléments ont constitué la base de la construction d'une activité d'apprentissage utilisant la lecture d'un texte ancien. Activité qui vise la reproduction de ces expériences positives en classe avec les étudiants. Cette recherche s'intéresse avant tout à la méthodologie d'utilisation de l'histoire et particulièrement de la lecture de textes anciens. Cependant, cette question du « comment » concernant l'utilisation de l'histoire reste très peu documentée. En effet, en parcourant la littérature, nous avons pris connaissance d'une certaine distance entre les études « générales » sur l'utilisation de l'histoire et les expériences pratiques habituellement positives rapportées par d'autres.

Peu d'études s'intéressent à la façon d'utiliser ces situations et à la méthodologie permettant d'en évaluer l'impact chez les étudiants. Cette revue de la littérature nous a permis d'affiner les objectifs de notre activité et de définir clairement le type de réflexions visées (*voir* chap. I). Ainsi, l'activité d'apprentissage, balisée par les éléments qui m'ont amené à vivre des expériences positives, concerne essentiellement les réflexions métamathématiques chez les étudiants. Il s'agit des réflexions qui, *au travers d'une activité mathématique, touchent l'historicité des notions abordées, l'historicité de la notation et de la rigueur associée, les mécanismes sous-jacents à la découverte des concepts explorés, les forces intrinsèques et extrinsèques qui animent les mathématiciens découvreurs et les liens entre le développement de ces concepts et le développement des sociétés et des cultures.* La construction de cette définition nous a fourni les éléments d'observations précis nécessaires pour aborder cette question du « comment » et nous a permis de clarifier nos questions de recherche. Ainsi, à partir d'expérimentations en classe, nous avons tenté de répondre aux questions suivantes;

— *Peut-on, au travers d'une activité de lecture d'un texte ancien en classe, susciter des réflexions métamathématiques chez l'étudiant pré universitaire dans le cadre du cours de calcul différentiel?*

— *Si tel est le cas, jusqu'à quel point ces réflexions peuvent-elles s'avérer profondes?*

— *Quels sont les éléments particuliers à la lecture de textes et au design de l'activité qui sont susceptibles de susciter ces réflexions?*

Un texte de Fermat autour de sa méthode des *maxima* et *minima* a été choisi comme thème de l'activité de lecture. Cette activité comprenait une phase de présentation du contexte sociohistorique, une phase de lecture et une phase de retour en grand groupe. Elle a été suivie de courtes entrevues individuelles, où les participants devaient répondre à plusieurs questions d'ordre général sur l'activité. Cette expérimentation (prestation et entrevues) a eu lieu à deux reprises dans le cadre d'un cours de calcul différentiel. Au total, 20 participants ont été interrogés (*voir* chap. II). La retranscription de la présentation du contexte sociohistorique, de la plénière et de l'ensemble des entrevues pour les deux prestations a constitué les données à partir desquelles les questions de recherche ont été discutées.

Retour sur les conclusions de l'étude

À l'aide des réponses et des commentaires fournis par les participants lors des entretiens individuels (*voir* chap. III), nous avons observé que ceux-ci ont bel et bien fait des réflexions métamathématiques durant l'activité d'apprentissage proposée (*voir* chap. IV). Les étudiants ont rapporté, entre autres, que l'activité apporte un aspect humain aux mathématiques et ils se disaient surpris de l'importante évolution des concepts. L'activité permet, selon plusieurs, de mettre des visages et d'associer des personnages aux notions et découvertes mathématiques. L'absence de justification, l'aspect intuitif de la démarche de Fermat et la forme en tant que telle du texte ont permis aux participants de mettre en évidence l'historicité de la rigueur.

Cependant, il ne semble pas que l'activité proposée amène l'élève à enrichir profondément ses conceptions autour du calcul différentiel. Ceux-ci ont relevé plusieurs éléments qui m'avaient interpellé, mais ils ne semblent pas se les approprier réellement et leurs réflexions sont peu profondes. En effet, nous remarquons que les participants avaient tendance à nous rapporter ce que nous voulions qu'ils rapportent. Ils semblaient répéter simplement et froidement, pour la plupart, ce qui avait été dit. Ce qui nous apparaît être dû au fait que la même personne ait mené l'activité et les entrevues. Une certaine sympathie des participants envers l'expérimentateur a dû se créer. De plus, il était possible pour les participants de discuter entre eux avant les entrevues. Certains avaient sans doute des réponses préparées. Inviter les étudiants à rédiger de courtes réflexions sur l'activité nous aurait permis d'éviter ces problèmes d'ordre méthodologique et de répondre plus efficacement aux questions de recherche.

Expérimentations futures

Par sa structure, l'expérimentation menée ne nous permet pas de déterminer efficacement les éléments du design qui ont suscité les réflexions métamathématiques chez les étudiants. Il aurait été intéressant de répéter l'activité sans la présentation du contexte sociohistorique ou encore sans la phase de lecture. Ceci nous a amenés à élaborer certaines hypothèses quant aux liens étroits qu'entretiennent la phase de présentation du contexte sociohistorique et la phase de lecture. En effet, nous croyons que la lecture et la présentation du contexte sont indissociables, car la lecture du texte permet aux étudiants de reprendre plus concrètement et sensiblement les réflexions métamathématiques issues de la présentation du contexte. À l'inverse, la lecture du texte doit être associée au contexte sociohistorique pour qu'une signification profonde soit rattachée aux mots, expressions et raisonnements particuliers à l'auteur et à l'époque. Les liens qu'entretiennent ces deux phases de l'activité pourraient véritablement faire l'objet d'une étude future. Ce qui nous permettrait d'explorer encore plus en profondeur la question du « comment » touchant l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques.

APPENDICE A

LE PREMIER TEXTE SUSCEPTIBLE D'ÊTRE UTILISÉ :

Le texte est extrait du livre *Aux origines du calcul infinitésimal* de l'IREM de Basse-Normandie (1999). Le numéro de la page associé n'est pas disponible, car le texte est issu de documents imprimés fournis dans le cadre du cours de M. Sakarovitch.

GILLES PERSONNE DE ROBERVAL : *OBSERVATIONS SUR LA COMPOSITION DES MOUVEMENTS ET SUR LE MOYEN DE TROUVER LES TOUCHANTES DES LIGNES COURBES* (EXTRAITS, vers 1636)

PROBLÈME I.

Proposition cinquième.

Donner les touchantes des lignes courbes par les mouvements mêmes mêlés.

Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétés spécifiques, qui nous fassent connaître des mouvements qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'invention.

La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Le principe est assez intelligible, et on l'accordera facilement dès qu'on l'aura considéré avec un peu d'attention.

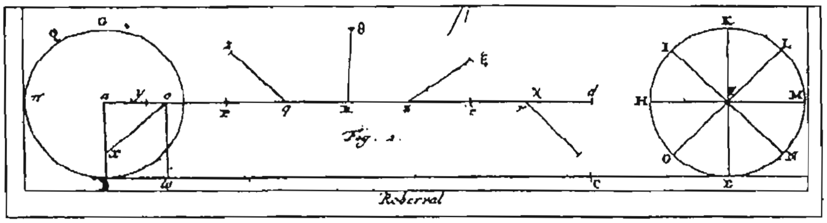
Règle générale

Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous ces mouvements composés en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très générale, et qu'elle peut servir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne sera point à propos de la répéter.

[...]

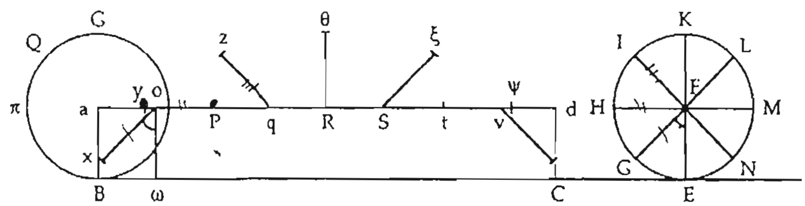
Onzieme exemple, de la Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval



Soit proposé le cercle duquel le centre est a, le demi-diamètre aB, et sa touchante BC au point B prolongée en C, l'on imagine que le cercle B faisant une révolution sur la ligne BC, soit que BC soit égale à la circonférence du cercle, soit qu'elle soit plus grande ou plus petite (ce que je suppose indifférent, et facile à démontrer) le point B de ce cercle étant porté par les deux mouvements, l'un droit qui le porte de B vers C, l'autre circulaire à cause de la révolution du cercle ; que ce point, dis-je, décrit la Roulette ou Trochoïde ; ou si vous voulez, ayant tiré par le centre a la ligne ad égale et parallèle à BC vers le même côté, l'on imagine que le cercle glissant de B vers C sans tourner à l'entour de son axe, en sorte que le centre a décrive la ligne ad par un mouvement uniforme, en même temps le point B décrive la circonférence de son cercle passant de B par πQGB d'un mouvement uniforme, et que le centre a étant arrivé en d, ce point se retrouve en C, où la ligne BC touche le cercle, et qu'enfin ces deux mouvements, l'un circulaire, par le moyen duquel le point B parcourt une fois la circonférence de son cercle, l'autre droit, par lequel il est emporté vers C, mêlés comme nous avons dit, étant tous deux uniformes, font décrire la roulette à ce point B.

D'où vous voyez que ces deux mouvements étant uniformes, le point B peut décrire trois diverses sortes de Roulettes, suivant que son mouvement circulaire sera proportionné à son mouvement droit, ou si vous voulez suivant la raison de la circonférence de son cercle à la ligne ad, que le centre décrit, puisque cette circonférence peut être ou égale à la ligne ad, ou plus grande ou plus petite.

Nous ne nous arrêtons pas à considérer les lignes qui peuvent être décrites, posé que l'un ou l'autre de ces mouvements, ou même posé que ni l'un, ni l'autre ne fût uniforme.

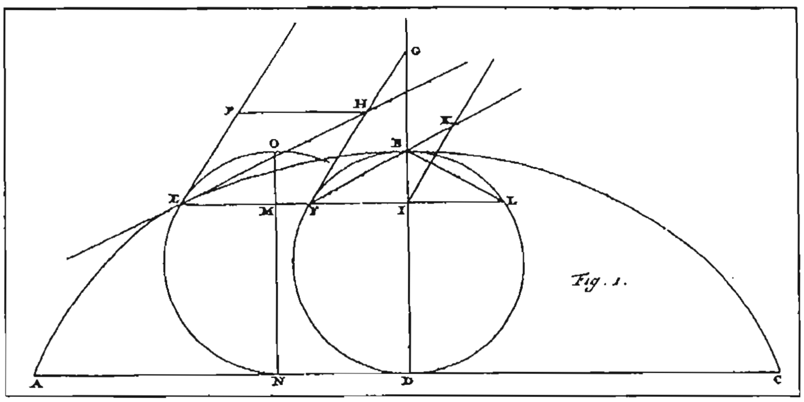


Ceci posé, pour décrire aisément cette ligne, soit prolongée la ligne BC, comme en E ; du point E soit tirée EF égale et parallèle à *a*B ; du centre F décrivez le cercle EGHIKLMN, qui sera égal au premier, divisez sa circonférence en tant de parties que vous voudrez par les points GHIKLMN, et tirez par ces points les demi-diamètres du cercle. Divisez la ligne *ad* en autant de parties égales que vous avez divisé la circonférence GHI etc., aux points *o*P*q*RS*tu*, par le point *o* tirez *ox* égale et paralléle au rayon FG, par P tirez P*y* égale et parallèle à FH, puis *qz* égale et parallèle à FI, et ainsi des autres, vous aurez les points B*xyz*Θξψ C, par lesquels la Roulette doit être décrite.

La raison de cette description est manifeste, car prenez dans la ligne *ad* un des points de la division comme par exemple le premier *o*, tirez *o*ω perpendiculaire sur BC, et par conséquent parallèle aux rayons *a*B, FE, mais par la description *ox* est parallèle à FG, et partant l'angle *xo*ω est égal à l'angle GFE, et décrivant du centre *o* et de l'intervalle *ox*, l'arc *x*ω, cet arc est égal à l'arc GE : mais posé que le centre *a* ait décrit la ligne *ao*, et soit en *o*, le point B doit avoir décrit un arc égal à EG ; car par l'hypothèse EG est à sa circonférence totale, comme *ao* est à *ad*, et les mouvements sont uniformes ; donc le point B a décrit l'arc ω*x*, il est donc en *x*, et par conséquent le point *x* est un point de la Roulette ; ce qu'il fallait démontrer. L'on démontrera la même chose de tous les autres points.

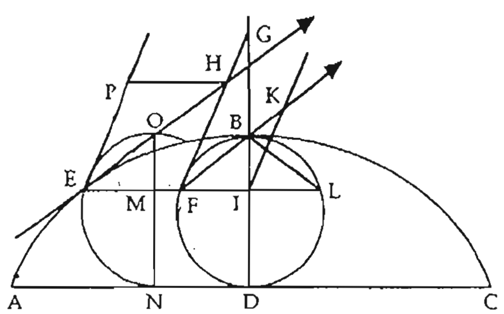
Il s'ensuit de cette démonstration, que décrivant le cercle GHIKLMN d'un autre centre pris dans la ligne ad, comme du centre a, P, R etc. et faisant le reste de la construction, l'on trouvera les mêmes points de la Roulette.

Ces connaissances suffisent pour trouver les touchantes de la Roulette par les mouvements composés ; car ayant pris un point de la Roulette, et ayant trouvé les deux directions de son mouvement droit et de son mouvement circulaire ; si l'on entend dans ces lignes de direction deux lignes qui soient entre elles comme la ligne BC ou la base de la Roulette, est au cercle de la Roulette, chacune de ces lignes étant prise dans la direction du mouvement homologue, la direction du mouvement composé de ces deux sera la touchante.



Car soit proposé la Roulette ABC de laquelle la base est ADC, le sommet B et l'axe BD, et que l'on en demande la touchante au point E. Décrivez le cercle BFD de la Roulette, soit autour de l'axe BD, soit sur quelque diamètre perpendiculaire à la ligne ADC ; du point E tirez la ligne EF parallèle à AC, et coupant en F la circonférence du demi-cercle de la Roulette (la plus proche du point E; si le point E étant pris entre A et B, vous avez décrit le cercle plus vers C que le point E, sinon au contraire etc.) tirez FG touchante du cercle, puis faites que comme AC est à la circonférence du cercle, ainsi EF soit à FH, prenant le point H dans la touchante FG, du point H tirez HE, ce sera la touchante de la Roulette.

M. de Fermat tire cette touchante en cette façon : tirez la ligne EF, comme ci-dessus. Tirez encore une ligne FB, et par le point E tirez EH parallèle à FB, la ligne EH sera la touchante.



* * *

APPENDICE B

LE DEUXIÈME TEXTE SUSCEPTIBLE D'ÊTRE UTILISÉ :

Le texte est extrait du livre *Aux origines du calcul infinitésimal* de l'IREM de Basse-Normandie (1999). Le numéro de la page associé n'est pas disponible, car le texte est issu de documents imprimés fournis dans le cadre du cours de M. Sakarovitch.

PIERRE DE FERMAT : *MÉTHODE POUR LA RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM* (1er EXTRAIT : SUR LA MÉTHODE D'ADÉGALATION, 1629/1637)

Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maximale ou minimale en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a + e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maximale ou minimale en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maximale ou minimale, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression

Voici un exemple .

Soit à partager la droite AC *en* E, *en sorte que* le rectangle AEC *soit maximum*

Posons AC = b, soit a un des segments, l'autre sera $b - a$, et le produit dont on doit trouver le maximum $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments

$$ba - a^2 + be - 2\,ae - e^2\,;$$

Il doit être *adégalé au précédent* :	$ba - a^2$;
Supprimant les termes communs :	$be - 2\,ae + e^2$;
Divisant tous les termes :	$b - 2\,a + e$;
Supprimez e	$b = 2\,a$

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.
Il est impossible de donner une méthode plus générale.

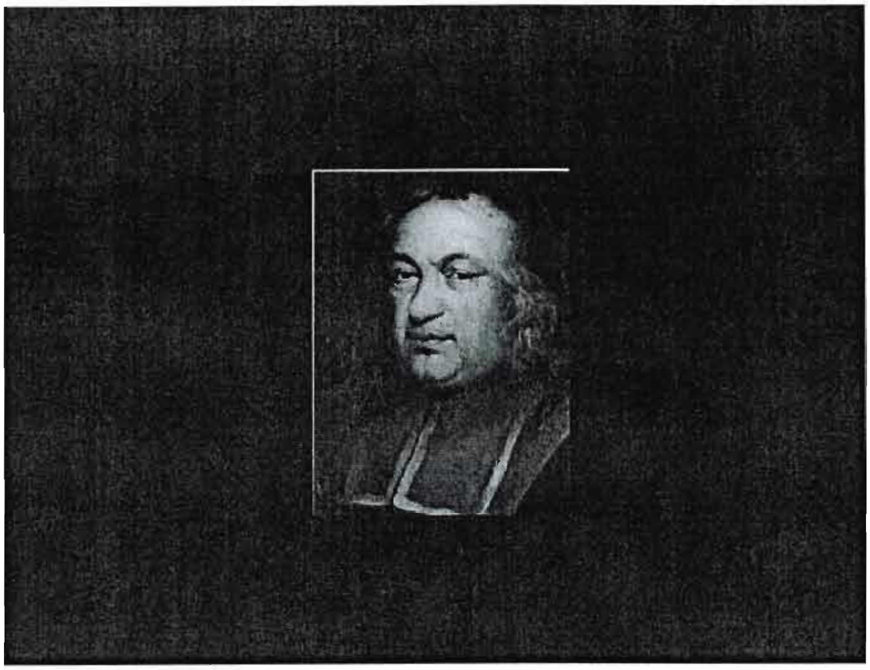
. . . . .

APPENDICE C

DOCUMENT AYANT SERVI À LA PRÉSENTATION DU CONTEXTE SOCIOHISTORIQUE :

Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Personnage important de l'histoire des mathématiques
Nous permettra de découvrir un principe intéressant, *maxima* et *minima*
Réflexions entourant l'émergence du calcul

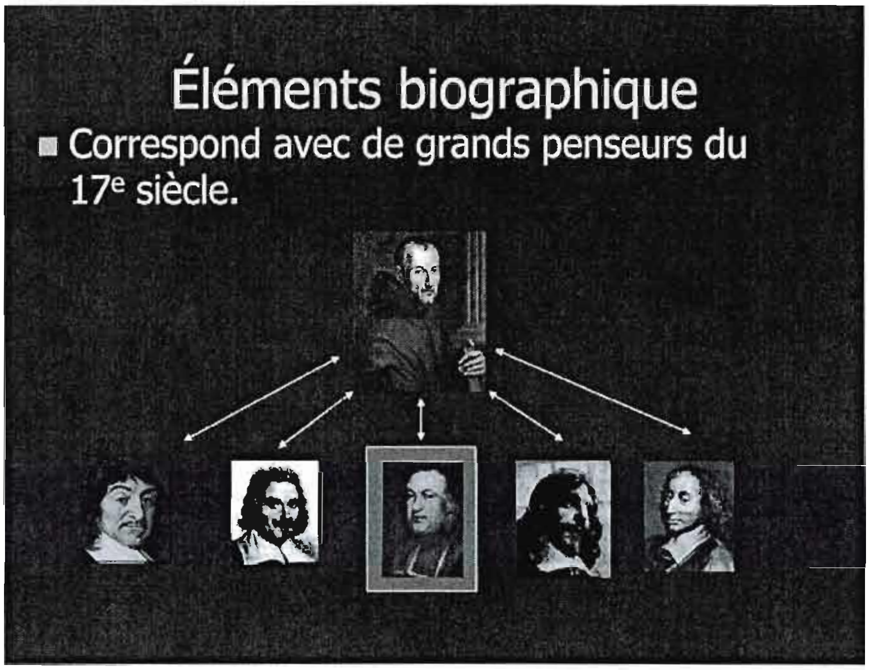


Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Peinture anonyme de Fermat (assez âgé)
Quelle époque? (Milieu XVII^{e})
Regard posé et intelligent
Profondeur d'esprit

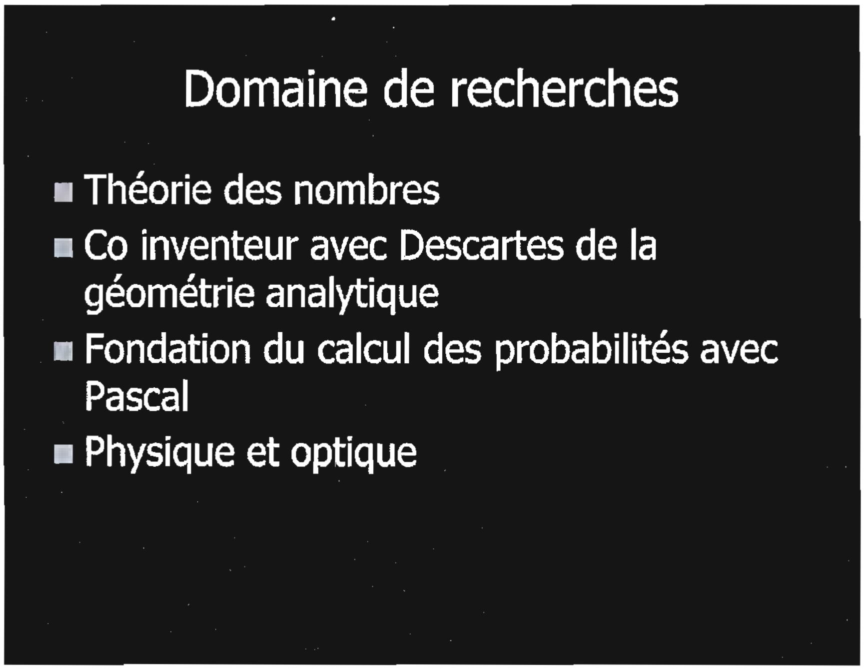
Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Sud-ouest de la France petit bourg près de Toulouse
Début du XVII^{e} siècle, peste en Europe, il l'attrapera d'ailleurs
Chance d'être riche, France 17 millions d'habitants 10 à 15 % savent lire et écrire



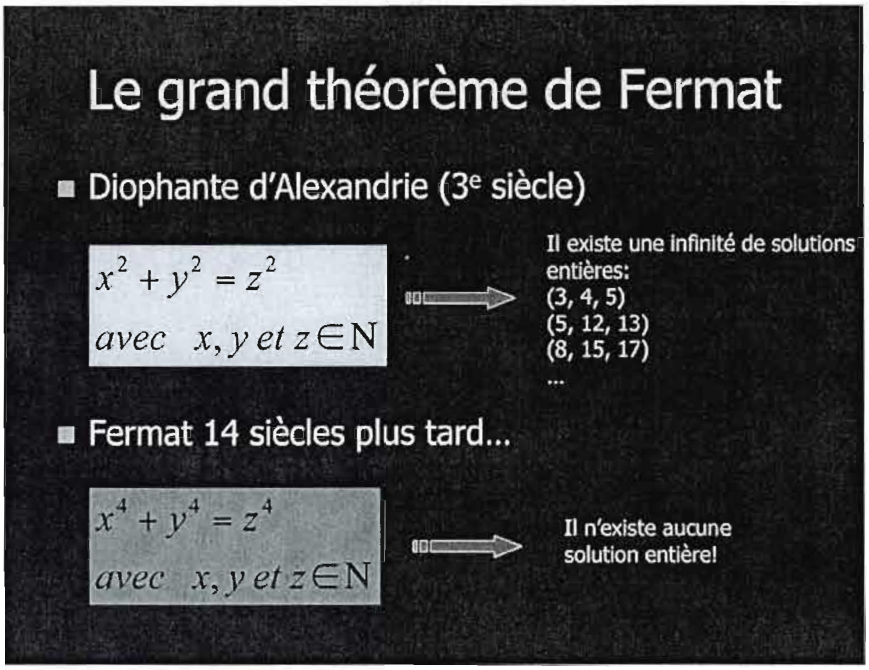
Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Pas de réelle institue à l'époque, Académie des sciences seulement en 1666, Louis XIV et Colbert (grand conseillé et ministre)
Mathématiques universitaires rudimentaires classiques, maths grecques, peu de progrès, érudits
Avancées et découvertes se font souvent à partir de correspondances, presse scientifique absente
Père Marin Mersenne, moine, professeur d'université, respecté, centre d'un cercle de correspondances importantes
Descartes (géométrie algèbre) Torricelli (physique du mouvement) Desargues (géométrie projective) Pascal (grand mathématicien et philosophe) Fermat notre héros du jour
Prémisses des méthodes modernes de recherches, unification des sciences, grands principes fondamentaux en parallèle
Éloignement des Anciens, progrès et liberté



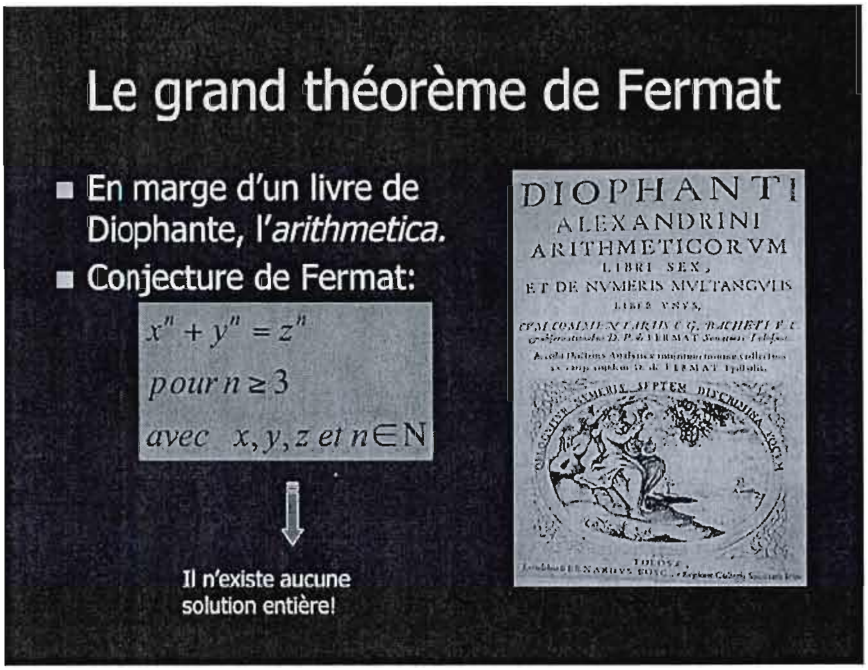
Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

À l'intérieur de ce groupe Fermat, s'intéresse à plusieurs thèmes scientifiques
Théorie des nombres : nombres entiers, critères de divisibilité, nombres premiers, congruences
Géométrie analytique, géométrie des coordonnées
Principe de physique qui porte son nom



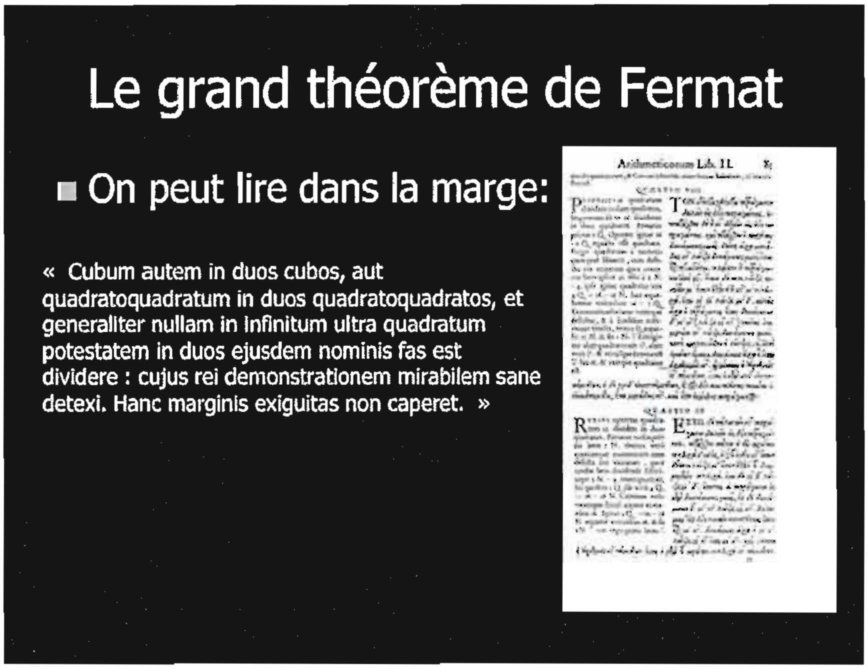
Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Diophante, mathématicien grec, théorie des nombres
Observation sur le théorème de Pythagore
Sommes de carrés qui donnent un carré
Somme de puissances de 4 (bi-carrés), impossibilité, preuve



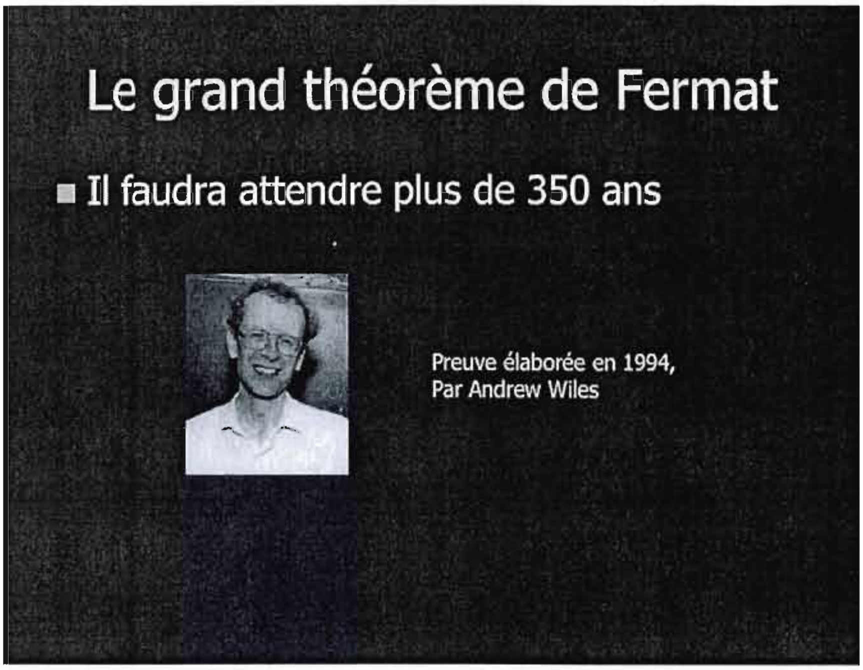
Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Fermat fera la conjecture très connue
Mathématicien amateur, mathématiques dans les marges du livre de Diophante
Traduction du grec en latin par Gaspard Bachet de Méziriac 1621
Amateur, chez lui, nombreuses lettres, soir, chandelle



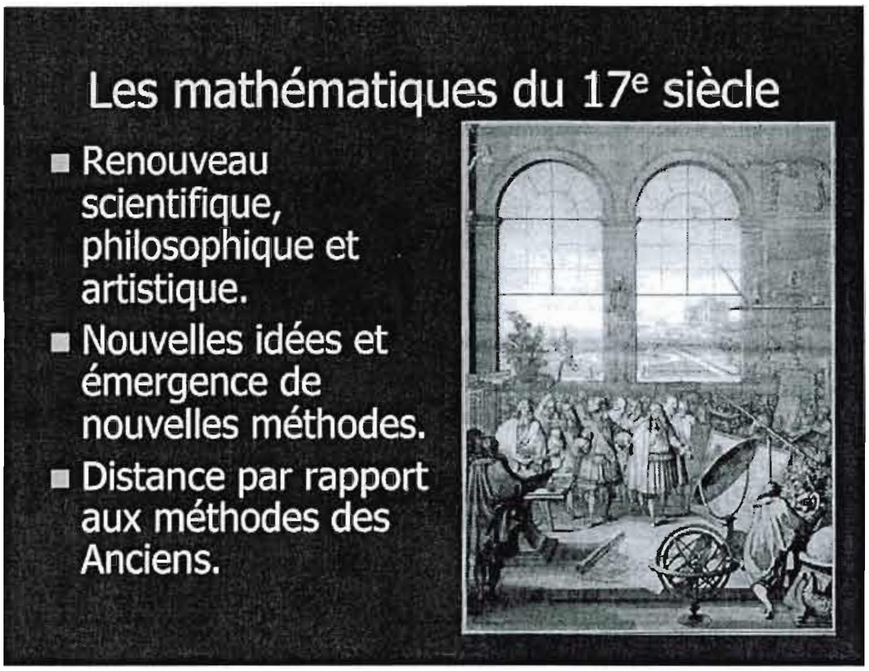
Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Édition avec de grandes marges, travaillait beaucoup dans ces marges
D'ailleurs, son fils publiera l'exemplaire de son père avec les annotations
Citation…



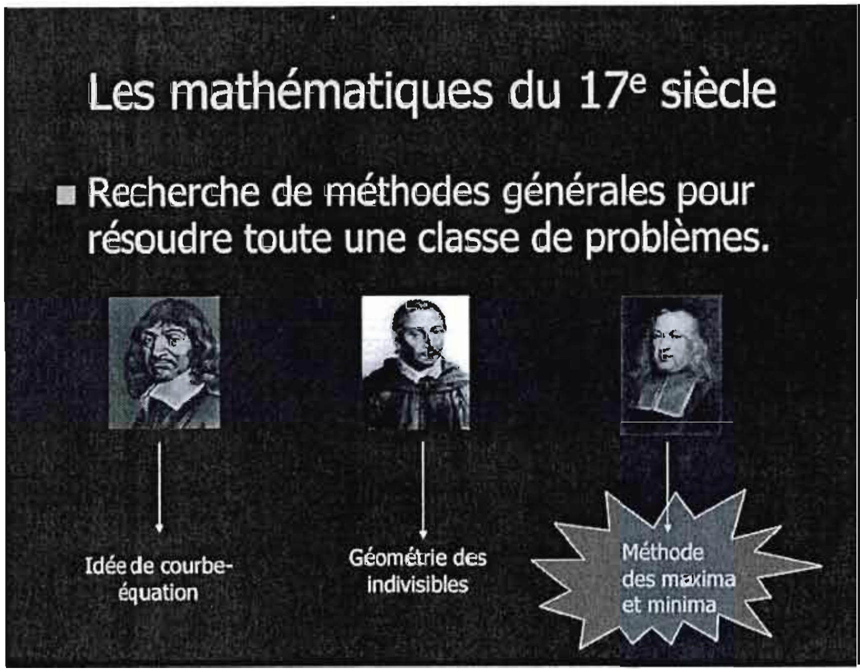
Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Essaie avec des nombres très élevés avec ordinateur
Andrew Wiles, professeur de mathématiques et chercheur
Professeur à Princeton aux États-Unis
350 ans de travail, des mathématiciens, plusieurs découvertes



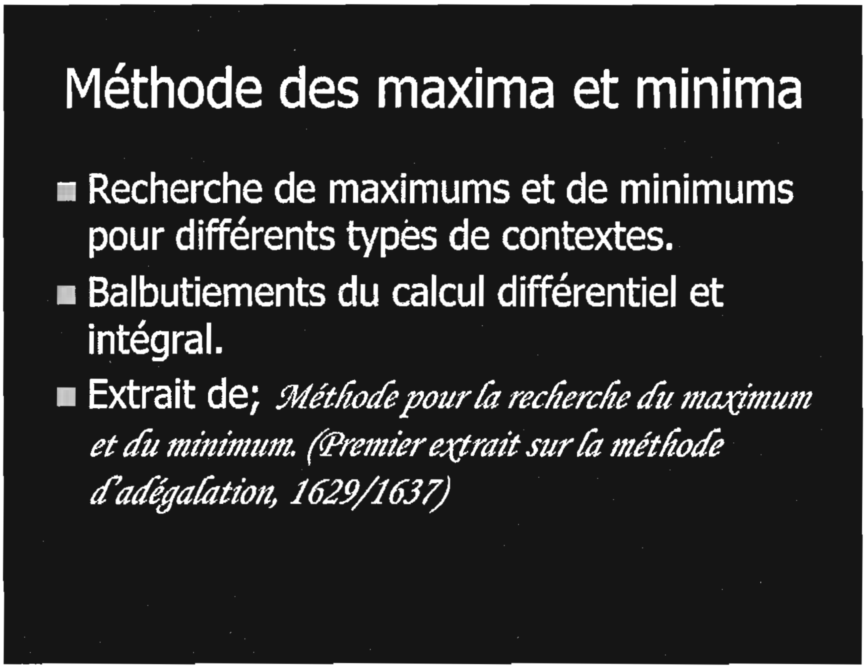
Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Renouveau scientifique : Galilée, idées coperniciennes, le monde s'agrandit, nouvelle vision
Découvreurs nouveaux continents
Idées humanistes, homme au centre, glorifié
Idée de progrès
Philo : Spinoza, Leibniz, Descartes (connaissances, doute, sciences, vérité...)
Artistique :
Peinture : Rembrandt, Vermeer, Velazquez
Écrivains : Molière, Lafontaine, Corneille, Cervantès, Racine
Distance par rapport aux Anciens, vision plus libre, moins sclérosée
Gravure représente la visite du roi Louis XIV, 1671
Groupe de Marin Mersenne, prémisses des revues scientifiques modernes
Frénésie scientifique



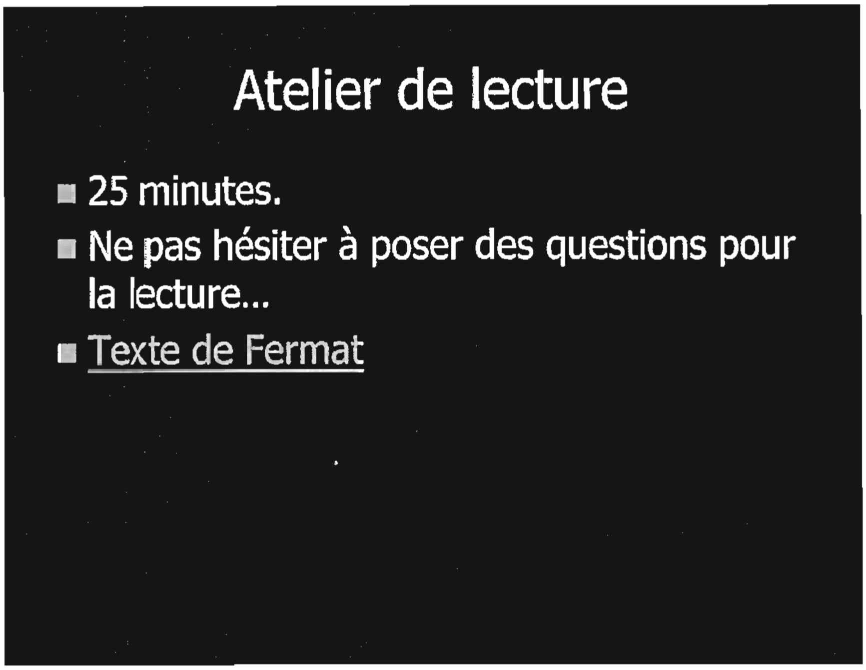
Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Penseurs de l'époque, recherche de vérités et de méthodes générales
Newton et la gravitation universelle
Descartes, courbes-équations, liens géo-algèbre, *La Géométrie*
Cavalieri, indivisibles, calculs d'aires et de volumes
Fermat, on en vient à la méthode des *maxima* et *minima*



Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Méthode pour trouver les maximums et les minimums dans différents contextes
Balbutiements, calcul fondé plus tard par Newton et Leibniz



Idées et thèmes globaux à aborder lors de la présentation :

Disponible pour répondre aux questions

APPENDICE D

RETRANSCRIPTION DES PHASES DE PRÉSENTATION DU CONTEXTE SOCIOHISTORIQUE ET DE RETOUR EN GROUPE POUR CHACUNE DES DEUX PRESTATIONS :

Première prestation :

Partie présentation du contexte sociohistorique :

(Partie manquante au début de la présentation, car le magnétophone ne fonctionnait pas.)

« Dans les universités, on enseignait un vieux savoir, il n'y avait pas de réelle recherche universitaire. Les découvertes scientifiques se faisaient à cette époque à partir de correspondances entre savants. C'était la manière de faire avancer la science. Il y avait, à cette époque, un prof d'université qui était disons un peu plus progressif et lui était en correspondance avec plein de savants de l'époque. Ce sont ces gens-là, qui travaillant par eux-mêmes, vont faire des découvertes scientifiques. Autour de ce professeur qui s'appelait le Père Marin Mersenne, qui enseignait à l'Université de Paris, qui lui correspondait avec un paquet de savants de l'époque, dont Fermat. Dans ce cercle de savants qui s'écrivaient, qui s'écrivaient des missives et des correspondances pour montrer leurs découvertes aux autres, en fait vous allez lire une des correspondances de Fermat avec René Descartes, René Descartes qui faisait partie de ce groupe-là, René Descartes qui est connu pour le concept de courbe équation, le plan cartésien, tout ceci est issu des théories de René Descartes. Il y avait aussi Torricelli qui est un physicien important, un physicien important, Fermat qui était bien sûr dans ce cercle-là, Desargues, Gérard Desargues qui était un mathématicien français qui a travaillé sur la géométrie projective qui constitue la base de l'architecture moderne et Pascal qui est connu pour sa philosophie sur le rapport des hommes avec Dieu, qui correspondait aussi avec Spinoza et on lui doit aussi de nombreux résultats mathématiques à Pascal. »

« Fermat lui s'intéressait surtout à la théorie des nombres. Qu'est-ce que c'est que la théorie des nombres, c'est la théorie qui s'intéresse particulièrement aux nombres premiers. On les utilise pour étudier la cryptographie, les critères de divisibilité, les PGCD, ce sont des choses extrêmement complexes, c'est une branche des mathématiques très complexe la théorie des nombres et lui faisait ça tout seul chez lui en amateur. Évidemment, il va publier ses résultats seulement à partir de correspondances avec d'autres. Surtout avec Descartes et va être avec Descartes le co-inventeur de la géométrie analytique. La géométrie analytique que tu connais, si j'écris $y = ax + b$, l'équation d'une droite, c'est le lien entre l'algèbre et la géométrie, c'est la géométrie analytique de Descartes. Il va fonder aussi avec Pascal le calcul de probabilités. On doit aussi à Fermat certains principes de physique et d'optique. »

« Fermat est très connu pour ce qu'on appelle le grand théorème de Fermat. Comme j'ai dit, Fermat était un mathématicien amateur, donc il faisait tout chez lui. Il avait chez lui une bibliothèque et de nombreux livres de mathématiques et il apprenait par lui-même. Dans sa bibliothèque, il avait un exemplaire d'un livre très important qui est l'Arithmetica. L'Arithmetica qui a été écrit par Diophante d'Alexandrie au 3^{e} siècle après J-C. Diophante était un Grec et Fermat avait un exemplaire de son livre et Diophante s'intéressait surtout à ce genre d'équations. On les reconnaît se sont des équations avec un théorème que vous connaissez, c'est la relation de Pythagore. Diophante s'était rendu compte que pour ce genre d'équations, on pouvait remplacer x, y et z par des entiers et souvent ça fonctionne ex 3, 4 et 5. Je peux remplacer x, y, z et ça fonctionne, je peux toujours en trouver, il existe une infinité de solutions à ce genre d'équations. Je peux remplacer par 5, 12 et 13, et ça fonctionne, je peux toujours en trouver, il en existe une infinité, c'est ce qu'il avait observé, Fermat lui, en lisant Diophante, s'était demandé que se passe-t-il si au lieu d'avoir des puissances de deux, on avait des puissances de quatre, ce que Fermat appelait des bi-carrés. Fermat va faire la preuve, la preuve mathématique qu'il n'existe aucune solution à ce genre d'équations. Je ne peux pas remplacer x, y et z là-dedans pour que ça marche! Je ne pourrai jamais trouver de nombre entier. Ça ne fonctionne jamais quand j'ai des exposants 4. Et il va en faire la preuve et il va se dire OK ça ne marche pas pour 4, mais dans le fond quand l'exposant est plus grand que 2 est-ce que ça ne marche toujours pas? C'est la question qu'il va se poser. Il va se dire si l'exposant est égal à trois, plus grand que deux, est-ce que ça marche? Il va poser une conjecture, il va s'imaginer que ça ne marche jamais. Si n qui est là est plus grand que 2, ça ne fonctionne jamais, je ne peux jamais trouver de valeurs pour que ça fonctionne, entières... C'est ce qu'on appelle la conjecture de Fermat. Et Fermat faisait tout son travail dans son livre de Diophante qui avait de grandes marges. Tous ses travaux on les retrouve dans la marge de l'Arithmetica. Quand Fermat va mourir, son fils va prendre son livre et va le publier avec les annotations de son père. »

« Ce qui est assez spécial, c'est qu'à un moment donné dans le livre, on peut voir, il y de grandes marges comme ça dans l'Arithmetica et Fermat travaillait là-dedans. Il faisait tous ses travaux dans cette marge-là. Et on peut lire à un moment donné dans une des marges, évidemment c'est écrit en latin : Cubum autem in duos cubos, machin... ça veut dire qu'un cube ne peut pas être la somme de deux cubes et une puissance de 4 ne peut pas être la somme de deux puissances de 4, c'est la conjecture que je vous ai présentée. Et ce jusqu'à l'infini, si c'est plus grand que deux, on ne peut pas trouver de solution. Il écrit dans la marge ceci; j'ai trouvé une démonstration merveilleuse, c'est-à-dire qu'en haut de deux ça ne fonctionne jamais, mais la marge est trop exigüe pour la contenir. En fait, il écrit dans son manuel, moi j'ai trouvé une preuve, mais je n'ai pas assez d'espace pour l'écrire, mais j'ai trouvé une preuve. On ne sait pas s'il en fait véritablement une preuve, c'est laissé en suspens. »

« Pendant 350 ans, les mathématiciens vont se casser la tête pour faire la preuve de cette conjecture. Il va falloir attendre jusqu'en 1994, et il y a un mathématicien qui va réussir à faire la preuve du théorème de Fermat. C'est Andrew Wiles qui est devenu extrêmement connu après avoir prouvé la fameuse conjecture de Fermat. Mais on s'entend que la preuve de Wiles, elle fait 100 pages! On se dit que Fermat n'avait sûrement pas de preuve, parce que Wiles utilise des techniques extrêmement complexes. Et Wiles va devenir très connu en faisant cette preuve-là. Mais ce qui est important, c'est que pendant ces 350 ans-là où ils se sont cassé la tête à faire ce théorème-là, les mathématiques ont évolué. C'est-à-dire, qu'ils ont trouvé des pistes et ça ne fonctionnait pas, mais ils ont créé des choses et des nouveaux concepts et de nouvelles théories qui sont importantes maintenant. »

« Si on revient à Fermat et au XVII^{e} siècle, il faut comprendre que c'est une époque vraiment de renouveau, comme je te le disais, à l'université à cette époque-là, ce n'était pas comme aujourd'hui, il n'y avait pas de réelle recherche, il n'y avait pas de réelle nouveauté, tout se faisait à partir de correspondances, entre gens qui travaillaient seuls. Il va falloir attendre la création de l'Académie des sciences en France, ici on voit une gravure qui représente l'ouverture, par le roi Louis XIV, de l'Académie. Ce sera un peu le début de l'institutionnalisation de la recherche. L'université va chercher à trouver de nouvelles façons de voir les choses. On voit apparaître de nouvelles idées, de nouvelles méthodes, on voit le monde différemment. Galilée va voir d'autres planètes, notre univers s'agrandit, on essaie de voir notre univers différemment. »

« Et les mathématiciens n'y échapperont pas et ils vont essayer d'aller chercher des méthodes globales pour résoudre des problèmes. Par exemple, Descartes cherchait une façon générale pour résoudre n'importe quel problème. C'est ce qu'on retrouve dans le discours de la méthode et il va amener l'idée de courbe-équation, à partir des idées de François Viète et du principe de fonction, pas comme on le connaît aujourd'hui, mais c'est lui qui va amener cette idée-là. Une idée générale, très globale pour résoudre n'importe quel type de problèmes. Cavalieri lui, en Italie va apporter la géométrie des indivisibles. Vous en avez sans doute déjà entendu parler de Cavalieri et du principe des indivisibles à partir duquel on peut résoudre un paquet de problèmes de géométrie. À cette époque on cherche vraiment des façons globales en mathématiques et Fermat va arriver avec un principe global pour résoudre des problèmes, c'est le principe des maxima et minima et c'est ce dont je vais vous faire découvrir aujourd'hui. C'est une méthode globale pour trouver des minimums et des maximums de phénomènes qui sont traduits par des fonctions. C'est un peu ce que tu fais en ce moment dans ton cours de calcul différentiel. Vous apprenez à calculer la dérivée qui va te permettre de trouver des maximums ou minimums absolus ou relatifs. Je vais te faire lire un texte, ça va durer une vingtaine de minutes, qui porte sur les balbutiements du calcul différentiel. Fermat présente son principe des maxima et minima. Il présente sa façon globale pour trouver des maximums et des minimums, ça se rapproche de ce que vous faites. Tu vas devoir faire un contraste entre sa façon à lui et ta façon à toi de faire, avec les outils modernes, la notation qu'on connaît. »

« Le texte ressemble à ça, ça tient sur une page. Il est assez difficile à lire, c'est écrit en français ancien. Il est comme divisé en deux parties. Sur la première partie, il explique globalement c'est quoi sa méthode des maxima et minima en gros et après il donne un exemple d'application de sa méthode. La première partie est assez difficile, essaie de lire comme il faut, si tu ne comprends pas tout, ce n'est pas si grave, ce que j'aimerais que tu comprennes par contre, c'est l'exemple qu'il donne, ce qui est moins difficile. L'exemple est super simple mathématiquement, ce qu'il faut c'est décoder ce qu'il est en train de faire. J'aimerais que tu te concentres surtout sur l'exemple dans la deuxième partie. »

Partie plénière et retour sur la lecture :

« Que fait Fermat? Tout le monde a saisi un peu le problème qu'il pose. Il dit; si un segment AC, une droite, c'est un peu mélangeant. Ce que lui appelle droite pour moi c'est un segment. Ce qu'il veut faire, c'est placer le point E n'importe où sur AC, pour que le rectangle AEC soit maximal. Mais qu'entend-il par rectangle AEC? C'est un rectangle où on aurait AE comme hauteur et EC comme largeur. Encore là, c'est un peu bizarre comme façon de nommer un rectangle, à cette époque, on semblait utiliser trois lettres. Imagine ça à peu près. Où dois-je placer E pour que le rectangle soit maximal, on s'imagine qu'il doit parler de l'aire? Encore là, ce n'est pas clair dans le texte. Comment tu ferais toi, avec tes outils modernes, avec ce qu'on t'a appris pour résoudre ce problème-là. »

Étudiants : « On va faire de l'optimisation! »

« On va faire de l'optimisation. Il va donc me falloir des variables à optimiser, qu'est-ce que je vais écrire? »

Étudiants : « x et y! »

« x ce sera quoi? »

Étudiants : « la hauteur! »

« Dons x sera la hauteur et qu'est-ce qui va dépendre de x… ce sera l'aire, que je vais appeler disons f(x). J'aimerais que l'aire soit maximale, j'aimerais maximiser la fonction f. Vous me suivez? C'est juste une façon mathématique d'écrire les choses. Comment je vais m'y prendre? »

Étudiants : « Par la formule de l'aire! »

« Par la formule de l'aire, en effet. L'aire c'est quoi? »

Étudiants : « C'est base fois hauteur! »

« C'est base fois hauteur. C'est ça fois ça. (sur le dessin). Si ça c'est b, comme le dit Fermat. On est d'accord que ceci sera…? »

Étudiants : « b – x ! »

« Exactement. Comme fait Fermat. Donc vous êtes d'accord avec moi, ce n'est pas très compliqué, que l'aire du rectangle sera AE fois EC donc x fois (b – x) tout simplement. J'espère que je choque personne en disant ça! Ce b c'est quelque chose de fixe et que je ne connais pas. Si je veux réduire un peu, je peux développer et je pourrais dire que l'aire sera xb moins x^2. Comment je fais déjà pour maximiser cette fonction-là? C'est une fonction quadratique! Elle sera ouverte vers le haut ou vers le bas? »

Étudiants : « Vers le bas! »

« Vers le bas, pourquoi? »

Étudiants : « À cause du moins! »

« À cause du moins. Donc une parabole ouverte vers le bas. J'imagine qu'il va y avoir un max, non? Comment tu fais pour le trouver ce max-là? »

Étudiants : « On va dériver! »

« On va dériver. Si je fais la dérivée première, qu'est-ce que je vais obtenir? Je dérive par rapport à x (avec les étudiants). On aura b – 2x. Alors ça, c'est la dérivée, la fonction dérivée, ça me donne la pente de la tangente à chaque point. Mais qu'est-ce que j'en fais? »

Étudiants « On met égal à zéro! »

« Pourquoi je mets égal à zéro? »

Étudiants : « Pour trouver des valeurs critiques! »

« Oui, je veux savoir quand est-ce que la tangente est nulle. Donc quand la fonction dérivée est égale à zéro. Quand...? C'est quand 2x égale b, vous êtes d'accord? Donc, c'est quand E est le point milieu du segment. Quand j'aurai un carré. C'est un peu comme cela qu'on ferait de façon moderne. Mais Fermat ne connaissait pas les règles de dérivations. Ce n'était pas inventé, il ne savait pas comment passer de là à là (sur le dessin). Pour nous c'est facile, l'exposant de lui s'en va en avant, etc. Ceci reste pareil. La somme des dérivées ça fait... etc. Donc, il y a un paquet de choses derrière ça, un paquet de théorèmes que Fermat ne connaissait pas. Qu'est-ce que je vais faire pour trouver la solution sans connaître les règles de dérivation? Vous êtes d'accord avec moi que je pourrais écrire ceci... (sur le dessin). Ça vous dit quelques choses? C'est la limite quand e tend vers 0 de ceci. Vous avez tous vu ça, c'est le théorème fondamental du calcul différentiel. Ce petit e là que j'ai ajouté vous l'appelez sans doute h. C'est ce qu'on retrouve dans les manuels. C'est un peu le petit e que Fermat va amener dans son texte. Si f(x) c'est ceci, f(x + e) ce sera ceci. Je le fais au long dans le fond un peu comme Fermat est en train de faire. Je me retrouve avec quelque chose d'assez affreux! Mais c'est proche de ce que Fermat faisait ici. Fermat dit ceci; ça, c'est b, ça, c'est a et donc l'aire du rectangle sera b fois (b – a), donc ba – a^2. C'est ce qu'il veut maximiser vous êtes d'accord? Après ça, il dit; non, je ne prends plus a, mais a + e. Alors le second sera b-a-e, l'autre segment (avec les étudiants). L'aire sera donc maintenant (a + e) fois (b – a – e) et il trouve ceci. J'aimerais que vous regardiez ici deux secondes... Quel lien tu peux faire entre ce que j'ai écrit ici et ce qui est écrit là? Dans le texte, il dit que ce résultat doit être adégalé à celui-là. C'est-à-dire que ces deux choses-là sont presque égales. Ça, c'est l'aire et ça, c'est l'aire. C'est presque pareil, là j'ai mis a et là a + e. C'est presque la même chose. Alors, il les met presque égales. Il va supprimer ensuite de chaque côté les termes semblables. Les ba et les a^2. Ici, moi, quand je le fais moderne, qu'est-ce que je vais supprimer (avec les étudiants)? On supprime les bx, comme lui supprime les ba, on supprime les x^2, comme lui supprime les a^2. On voit que c'est super proche. Sauf que lui ne s'en rend pas compte, il le fait de façon intuitive. Il se dit · WOW, je fais ça et ça marche! De mon côté, il me reste ceci. Que fait-il ensuite? »

Étudiants . « Il divise par e! »

« Oui, du côté moderne, je vais diviser par e aussi. Si je divise par e partout, je vais obtenir ceci. Et ça ressemble beaucoup à ceci. C'est presque terminé parce que la limite quand e tend vers 0... qu'est-ce que je vais faire pour la calculer? »

Étudiants . « On enlève le e! »

« Oui, lui écrit tout simplement "supprimer e". C'est assez "weird", parce que ce type, il y a 400 ans, n'avait pas comme nous cette façon de faire. La notation moderne nous permet de résoudre assez rapidement. Lui le fait de façon intuitive et sans justification. Merci à tous! »

Deuxième prestation :

Partie présentation du contexte sociohistorique :

« Je vais parler de Pierre de Fermat. Fermat, c'est un mathématicien français qui a vécu il y a 350 ans, qui a vécu au début du XVII^e siècle. Et au début du XVII^e siècle, on est vraiment dans les débuts, dans les balbutiements du calcul différentiel. Ce que vous êtes en train de faire avec M. Rivard dans votre cours. Fermat, c'est lui. Il ressemblait à ça. (rires) C'est la meilleure image qu'on a de Fermat, on s'entend que c'est un type qui a vécu il y a presque 400 ans. C'est une toile qu'on a trouvée par hasard, c'est une huile sur bois... il semble être vers la fin de sa vie. C'était un type très spécial et très respecté, très brillant que même le roi connaissait. On voit dans son regard qu'il était assez énigmatique et il va aussi poser énormément d'énigmes aux mathématiciens de cette époque-là. »

« Comme je t'ai dit, Fermat est née au début XVII^e à Beaumont-de-Lomagne tout près de Toulouse dans le sud-ouest de la France. Fermat est issu d'une famille riche, son père était excessivement riche, c'était un riche marchand. Et, ça va l'aider pour faire des études, il va faire des études d'avocat et il va faire une brillante carrière de droit. Aussi, il faut comprendre qu'à cette époque-là, c'est la peste. C'est la peste noire en Europe et Fermat va l'attraper et il va survivre, il va réussir à obtenir des soins étant donné que sa famille avait les moyens. C'est quelqu'un, comme je l'ai dit, d'extrêmement respecté, il va même devenir conseiller du roi au parlement. J'ai mis ici une gravure où on voit Toulouse dans le sud-ouest de la France un peu à l'époque de Fermat. »

« Il faut comprendre que Fermat au départ c'est un avocat. C'est un type qui ne faisait pas de maths. Il n'est pas allé à l'université pour faire des maths. C'était un amateur. OK, il aimait ça. Il faisait des maths chez lui, sur sa table de chevet, à la chandelle. Il faisait des maths en amateur, il avait dans sa bibliothèque quelques recueils de mathématiciens. Mais à cette époque-là, il faut comprendre que dans les universités, il n'y avait pas réellement de recherche universitaire. On ne faisait pas vraiment de découvertes à l'université. Il n'y avait pas de chercheurs à l'université. Ce que l'on enseignait à l'université au 17^{e}, c'était une espèce de vieux savoirs un peu savants qu'on enseignait de génération en génération. On enseignait la rhétorique, la grammaire ou les mathématiques, mais il n'y avait pas vraiment de développement, c'était juste un bagage de savoirs qu'on léguait. La réelle recherche ou la réelle nouveauté se faisait à travers des correspondances. À travers des types comme Fermat, qui faisait ça chez lui et qui discutait avec d'autres savants comme lui, mais pas des lettres, des correspondances. Il y avait un prof à l'université un peu plus progressif que les autres, c'est le Père Marin Mersenne qui enseignait à l'université de Paris, plus ouvert et qui était en contact avec différents savants de l'époque et ça créait un espèce de cercle de correspondances. Là ça évoluait et on créait de nouvelles connaissances. C'était un peu la seule façon que les gens avaient pour partager leurs découvertes. Autour du cercle de Marin Mersenne, il y avait Fermat, qui correspondait avec et qui lui présentait les choses qu'il faisait chez lui. Autour de ça, il y avait aussi René Descartes qui lui aussi était un mathématicien amateur qui faisait les choses lui-même. Toricelli à qui on doit plusieurs résultats de physique. Desargues qui a fondé en fait la géométrie projective et Pascal qui est connu pour sa preuve ontologique de Dieu. Il a fait aussi beaucoup de mathématiques Blaise Pascal, c'est un grand mathématicien. Il s'était attaqué à beaucoup de sujets très corsés. On lui doit à Pascal le fondement du calcul des probabilités. Tous ces gens-là correspondaient et c'est comme ça que naissaient de nouvelles choses. Fermat s'intéressait surtout aux mathématiques, il avait quelques ouvrages chez lui, il s'intéressait à la théorie des nombres. Qu'est-ce que c'est que la théorie des nombres? C'est une branche très dure des mathématiques où on s'intéresse aux critères de divisibilité, aux très grands nombres premiers, à la cryptographie, à des choses assez poussées et Fermat est un peu le précurseur de tout ça. Avec Descartes, il va co-inventer la géométrie analytique. Vous savez, quand vous travaillez dans le plan cartésien avec des courbes-équations, c'est le lien entre l'équation et la courbe, c'est ce qu'on appelle la géométrie cartésienne ou analytique. Fermat a fait partie un peu de cette évolution-là. Avec Pascal, il va travailler sur les probabilités et on doit aussi à Fermat différents principes de physique et d'optique. »

« Fermat est super connu pour son grand théorème. Ce que c'est que le grand théorème de Fermat. Je te l'explique, c'est super simple. Chez lui il avait un bouquin qui s'appelait l'Arithmetica qui avait été écrit par Diophante d'Alexandrie qui était un Grec qui a vécu au 3^{e} siècle après J.-C. Dans son livre, Diophante s'était intéressé à ce genre d'équation-là. Ce sont des équations qui sont liées au Théorème de Pythagore. Diophante avait observé qu'on peut remplacer x, y et z par des valeurs entières et on en trouve toujours… C'est-à-dire que je peux remplacer par 3, 4 et 5 et ça va fonctionner, ça va vérifier l'équation. Je peux en trouver plein, il existe une infinité de solutions pour ce genre d'équations. Fermat se disait OK, au lieu d'avoir des puissances de 2, des exposants 2, imagine que j'ai des puissances de 4. Fermat disait des bi-carrés. Fermat a fait la preuve mathématique que c'est impossible de remplacer x, y et z par des nombres entiers pour que ça fonctionne. Jamais tu vas trouver des nombres entiers à remplacer là, avec les exposants 4 et que l'équation va être vérifiée. Il n'existe aucune solution et Fermat a fait la preuve. OK, ça ne fonctionne pas pour 4, Fermat va dire, qu'est-ce qui se passe si l'exposant est plus grand ou égal à 3, si c'est 3, 4 5 ou 6… Et Fermat va émettre la conjecture, il va dire; je pense que lorsque l'exposant est plus grand ou égal à 3 ou plus grand que 2, ça ne marche jamais. Jamais je trouverai de solutions entières. C'est ce qu'on appelle la conjecture de Fermat. »

« Fermat travaillait chez lui, comme je t'ai dit, en amateur Il travaillait dans les livres qu'il avait chez lui, dont l'Arithmetica de Diophante, et dans cet ouvrage-là il travaillait, il faisait ses choses, il faisait un peu ses découvertes mathématiques. Dans ce livre-là, il y avait de grosses marges. Quand tu ouvres ce livre-là, il y avait souvent de grands espaces comme ça, de grandes marges. Et Fermat faisait tous ses travaux là-dedans. Il lisait Diophante et il essayait de trouver de nouvelles choses. Et c'est là-dedans qu'il a émis sa fameuse conjecture, celle que plus grand que 3 ça ne marche pas. Il l'a écrit là-dedans. Et on peut lire, en latin; Cubum autem in duos cubos, machin… ça veut dire qu'un cube ne peut pas être la somme de deux cubes, ça rejoint un peu ce qu'on disait avant et une puissance de 4 ne peut pas être la somme de deux puissances de 4, c'est la conjecture que je vous ai présentée. Et ce jusqu'à l'infini, si c'est plus grand que deux, on ne peut pas trouver de solution. Il écrit ça, qui est vraiment spécial : j'ai trouvé une démonstration merveilleuse, j'ai déjà fait la preuve, mais la marge est trop exigüe, trop petite, pour la contenir. Il dit oui, j'ai trouvé une preuve, mais elle est trop grande pour que je l'écrive dans la marge de mon livre. Dans le fond, on n'est pas sûr qu'il ait fait la preuve. Évidemment, son fils à Fermat, à sa mort, va reprendre son livre et va le publier. C'est comme ça qu'on connaît un peu les résultats de Fermat. »

« Il va falloir attendre 350 ans pour que les mathématiciens fassent la preuve du théorème de Fermat. C'est Andrew Wiles qui est un prof de maths à Cambridge en Angleterre qui l'a trouvée en 1994. On s'entend que sa preuve, elle fait 100 pages! C'est genre qu'il y a 10 personnes sur la planète qui peuvent comprendre ce qu'il y a là-dedans. On pense que Fermat n'avait pas véritablement de preuve à sa conjecture. D'ailleurs maintenant, on dit le théorème de Fermat. La conjecture a été prouvée. »

« Si on revient aux mathématiques du XVII^{e}, c'est vraiment une époque de renouveau. On voit le monde différemment, Galilée a vu d'autres planètes… C'est comme il n'y a pas juste nous, il existe un paquet de choses. On voit le monde différemment, on prend un peu de distance par rapport à ce vieux savoir grec qui était un peu sclérosé, qui ne menait pas vraiment à de nouvelles découvertes. Donc, de nouvelles idées émergent. Spinoza va apporter de nouvelles idées dans le rapport entre Dieu et les hommes. On va prendre une distance par rapport aux Anciens. À cette époque-là, les gens essaient de trouver des méthodes globales pour résoudre des problèmes. Les gens essaient de trouver des affaires qui vont régler tous les problèmes. »

« Descartes lui, son idée pour résoudre tous les problèmes, c'est son idée de courbe-équation. Une idée géniale pour résoudre un paquet de problèmes. Cavalieri lui va amener la géométrie des indivisibles, vous connaissez sans doute le principe de Cavalieri en géométrie, c'est un principe qui permet de résoudre toute une classe de problèmes. Donc, ces mathématiciens cherchent des idées pour résoudre plein de problèmes et Fermat lui a amené son principe des maxima et minima, ce sur quoi on va s'intéresser. Parce que le principe des maxima et minima de Fermat, ça permet de trouver les maximums et minimums de phénomènes et c'est très proche de ce que vous faites en calcul différentiel. Quand tu cherches quand est-ce que la pente de la tangente est nulle, on veut trouver un maximum ou un minimum, ce que vous faites sûrement dans votre cours. C'est très proche de ce que vous faites, on est dans les balbutiements, disons, du calcul différentiel et intégral. C'est cette méthode-là que je vais te faire découvrir. Avec la méthode des maxima et minima, on est dans les débuts du calcul différentiel. »

« Je vais te faire lire un extrait dans lequel Fermat explique ça méthode. Il explique comment faire pour trouver des maximums et des minimums. Je vais te le montrer. Le texte ressemble à ça. Je vais te le distribuer, ça tient sur une page. C'est pas facile, je vais te donner beaucoup de temps pour le lire, une vingtaine de minutes, je veux pas que tu comprennes tout. La première fois que je l'ai lu, j'ai trouvé ça dur. Il y a deux parties dans le texte. Dans ce gros paragraphe, il explique de façon très générale son principe des maxima et minima. Si tu n'arrives pas à saisir tout ce qu'il y a dans ce paragraphe, c'est pas grave. Cependant, ce que j'aimerais que tu sois capable de faire, c'est de lire l'exemple dans lequel Fermat utilise sa méthode. Donc, c'est la deuxième partie dans le bas de la page. Il fait un exemple de comment utiliser le principe des maxima et minima. C'est cet exemple-là que j'aimerais que tu sois capable d'analyser. J'aimerais que tu prennes des notes à côté pour que tu fasses en sorte que tu comprennes bien. J'aimerais aussi que tu fasses des liens aussi avec ce que vous faites dans ton cours. Tu ferais quoi pour résoudre ce problème-là avec tes outils modernes, avec le réel calcul différentiel que tu as appris. »

Partie plénière et retour sur la lecture :

« Que fait Fermat? Ici, il explique sa méthode sur les maximums et les minimums. Il donne un exemple, il dit; OK, regarde! Si je dois partager la droite AC, d'ailleurs une droite, il voulait sûrement dire segment, il la doit partager, il doit placer E quelque part sur AC de telle sorte que le rectangle AEC soit maximum. »

Étudiants : « Un triangle rectangle! »

« Un triangle peut-être, mais lui dit un rectangle? »

Étudiants : « Y s'est trompé! »

« Bonne observation, il s'est trompé (rires)! Pourtant, il a l'air sûr de lui! »

Étudiants : « Si tu fais fois deux tu vas avoir un rectangle! »

« Oui, pour lui, c'est un peu bizarre, mais il va nommer un rectangle par trois lettres. Il dit qu'il veut que son rectangle soit maximal. »

Étudiants : « Le plus grand possible! »

« Le plus grand possible. »
Étudiants : « La plus grande superficie possible! »

« La plus grande superficie possible à mon avis. La plus grande surface. Alors, il veut maximiser l'aire. Où est-ce que E doit être sur AC pour que le rectangle soit maximum? S'il est plus proche du A, il va s'allonger, mais il va être mince. »

Étudiants : « Ben, le plus loin possible! »

« OK, mais il va être mince de ce côté-là? »

Étudiants : « Au milieu! »

« Au milieu, oui, il veut que EB soit égal à 2EA. »

Étudiants « C'est un carré! »

« Oui, c'est quand le rectangle est un carré qu'on aura la plus grande superficie. Ça, ça va, mais je m'en fous, tout le monde le sait que le plus grand rectangle sera un carré. Ce qui m'intéresse, c'est, comment il fait pour le démontrer. C'est ça qui est intéressant. Alors qu'est-ce qu'il fait? Il dit je vais appeler b la mesure de AC. Ça, c'est b. Je sais pas combien ça mesure AC, ça mesure b. Après il dit si ça, c'est b et que j'appelle a un des segments, donc ça, c'est a. Il dit ben l'autre segment ce sera b – a. Ensuite, il va dire que le produit dont on doit trouver le maximum est ba – a^2. »

Étudiants « C'est la multiplication des deux! »

« C'est la multiplication des deux, ça fois ça. Après, il va trouver que l'aire, ça sera a fois b – a, donc dans le fond; ba – a^2. Vous êtes d'accord? C'est de ça qu'il veut trouver le maximum, faire en sorte que ça soit maximum. Pour quelles valeurs de a et de b? Là, jusque-là ça roule, il y a pas trop de problèmes. Après, il ajoute ça, il dit; oui, au lieu, soit maintenant, là c'est autre chose, au lieu que ce soit a un des segments, imagine que c'est a + e, le premier segment. Dans un autre ordre d'idées, j'imagine autre chose, au lieu que ce soit a ce sera a + e. Il ajoute un petit e. C'est différent, si ça, c'est a + e et que l'autre est toujours b, donc l'autre b - a – e. Vous êtes d'accord? Il fait les mêmes choses, mais ici il ajoute un petit e. Vous êtes d'accord que c'est pareil, on a plus e et moins e? Donc dans ce cas-là l'aire c'est ça et dans ce cas-là l'aire ça va être ça. Tantôt, j'ai fait ça fois ça pour avoir l'aire, maintenant ce sera ça fois ça. »

Étudiants · « Ça va faire ba-ab... »

« Ce qu'il calcule... oui, cette affaire-là, assez affreuse. Oui, ça fait maintenant ba – a^2 + eb -2ae – e2, on s'entend que cette expression-là est plus longue que celle-ci, c'est normal. Après, il dit oui, ça, c'est l'aire de mon rectangle et ça, c'est l'aire de mon rectangle. C'est presque la même chose, il dit; oui, je vais adégaler. Il dit ça et ça, c'est presque la même chose. Alors, je vais les mettre presque égales. Tout ce qu'il y a de différent, c'est que j'ai ajouté e. C'est presque pareil, vous êtes d'accord. Vu que c'est presque égal, je vais pouvoir mettre ça égal. Je vais pouvoir supprimer ensuite les termes communs. Qu'est-ce qu'on peut enlever comme termes communs? »

Étudiants : « ab! »

« ab, oui, quoi d'autre »

Étudiants · « -a^2! »

« -a^2 avec -a^2 , et il reste? »

Étudiants : « be – ... ! »

« be – 2a – e^2, qui est ici. C'est presque égal. »

Étudiants : « On les envoie de l'autre côté! »

« On les envoie de l'autre côté, tout simplement. Et là, il dit en divisant tout les termes. Rendu ici, qu'est-ce qu'il fait? »

Étudiants · « Il divise par e de chaque côté! »

« Il divise par e de chaque côté, j'enlève les e. Donc b est égal à 2a + e, sans l'exposant 2 bien entendu. Il arrive à ceci, et là il dit je vais supprimer e. »

Étudiants. « Qu'il avait rajouté toute à l'heure! »

« Qu'il avait rajouté! Je l'ai rajouté, je l'enlève maintenant. Quand il enlève le e, il arrive à ça et c'est la solution, c'est que b doit être 2a. Ça veut dire quoi que b doit être 2a? »

Étudiants : « Ça veut dire que ça doit être au milieu! »

« Oui, E est au milieu. Si b est 2 fois a, ça veut dire que E est au milieu. C'est ça la solution, ça vaut dire que c'est un carré. Bon, c'est intéressant, comment il arrive à trouver ça, c'est un peu bizarre, mais ça marche son affaire. Il fait des choses assez disons non conventionnelles. Mais, comment nous, on ferait? Comment moi je ferais, dans le cours de calcul différentiel? »

Étudiants : « On va faire de l'optimisation! »

« On va faire de l'optimisation. Si je veux optimiser, il va me falloir une fonction. Une fonction dont je veux trouver le maximum. Si j'oublie Fermat et je me concentre moi, aujourd'hui, genre le gars qui habite à Montréal au XX^e siècle, comment je fais pour résoudre ce genre de problème-là? Je pourrais d'abord comme Fermat, poser des variables. Comme AC, je ne sais pas comment ça mesure, mais moi aussi je vais l'appeler b. J'imagine que ça mesure 30 ou 40… J'ai aucune idée de comment ça mesure, ça mesure b. b c'est fixe, je sais pas c'est quoi, mais c'est fixe. Et AE ce sera x, vous êtes habitué d'utiliser cette variable. Comme Fermat, ça, ça sera quoi? »

Étudiants : « b - x! »

« b – x, tout simplement. L'aire, ça va être une fonction, non? Ce sera quoi? »

Étudiants : « bx – x^2! »

« Oui, bx – x^2. C'est une fonction quadratique. Ça à l'air de quoi? On l'a dit tantôt, c'est une parabole. Mais, celle-là en particulier elle a l'air de quoi? »

Étudiants : « Est à l'envers! »

« Est à l'envers. Pourquoi? »

Étudiants : « Y a un moins! »

« Il y a un moins devant le terme en x^2 Si elle est à l'envers, ça veut dire que j'ai un max. »

Étudiants . « On va trouver le sommet! »

« Oui, mais j'aimerais utiliser le calcul différentiel pour le faire. »

Étudiants : « Y avait pas une formule! »

« Oui, y a une formule, mais on va essayer de faire des liens un peu avec ça. »

Étudiants « Ben la dérivée »

« On va faire la dérivée première, merci! Je vais regarder quand est-ce que la dérivée est égale à zéro, pour avoir quand est-ce que la pente de la tangente est nulle et ça va me donner mon maximum. C'est quoi la dérivée de cette affaire-là? »

Étudiants . « -2x – … »

« La dérivée première? »

Étudiants : « moins… »

« -2x, oui, et ça dérivé? Ça, c'est une constante. »

Étudiants : « b! »

« b, on enlève le x. Donc, b – 2x, c'est la dérivée. Mais moi je veux savoir quand est-ce que la dérivée, que la pente de la droite est zéro? Qu'est-ce que je vais faire? »

Étudiants : « On va remplacer y par 0! »

« On va remplacer y par 0, donc quand est-ce que la pente est égale à 0? Je vais trouver tout de suite quoi? »

Étudiants « $2x = b$! »

« $2x = b$. Vous êtes d'accord, la même solution que Fermat. C'est quand 2 fois x ça donne b, donc quand E est dans le milieu, quand j'ai un carré. »

Étudiants « Au lieu d'utiliser x, on a utilisé a! »

« Au lieu d'utiliser x, on a utilisé a! Mais, si je veux explorer plus profondément là-dedans. Tantôt quand j'ai fait ça je suis passé de là à là. Il s'est passé un paquet de choses. Le bx est devenu b, etc. Mais, derrière ça, il y a des choses vraiment complexes, on est d'accord? Vous êtes d'accord avec moi que… tiens, je vais l'appeler e. quand e tend vers 0 de $f(x + e)$ moins $f(x)$ sur e. Je vais l'appeler e à la place de l'appeler h, ça vous choque pas j'espère. »

Étudiants : « Ça mélange! »

« Toi ça te mélange, t'en fais pas on va essayer de faire ça au complet. Bon, ça, c'est la dérivée, mais au long, à partir du théorème fondamental. Pourquoi $f(x + e)$ et $f(x)$, je fais quoi? »

Étudiants « Tu remplaces x par $x + e$ dans la… »

« On remplace x par $x + e$ dans la fonction. Ça va être égal à la limite quand e tend vers 0 de, je remplace x par $x + e$, ça va faire $(x + e)$ fois b moins $(x + e)$ au carré, moins $f(x)$, mais $f(x)$ c'est quoi? »

Étudiants : « La même chose! »

« C'est cette affaire-là. Je vais enlever b et je vais enlever $-x^2$, donc je vais l'ajouter, ça va? Et, tout ça divisé par e. Là, j'ai juste remplacé $f(x + e)$, c'est tout ça et $f(x)$. Je vais développer, je vais faire b fois x et b fois e et je vais aussi développer ici. C'est bon? »

Étudiants : « On peut enlever les bx! »

« On va faire ça, c'est sûr qu'on va faire ça. Mais avant ça, j'aimerais bien qu'on revienne sur ce qu'il faisait. »

Étudiants « Y faut pas se fier à ce qu'il faisait! »

« Oui, mais j'aimerais y revenir. Il est parti avec ça et ça égal. ba, e^2, etc. c'est où dans mes affaires ça? »

Étudiants · « C'est des x là! »

« C'est des x maintenant! Là, on a supprimé des termes semblables. Il a supprimé ab, moi je vais faire quoi? »

Étudiants « Supprimer les xb! »

« Après ça, il fait quoi? »

Étudiants · « Les a^2! »

« Supprimer les a^2! Moi, je fais quoi? »

Étudiants . « Les x^2! »

« Supprimer les x^2! Après ça, il est arrivé à ça. Il a divisé par e. Nous aussi on va diviser par e. Ça, ça et ça divisé par e. Vous êtes d'accord? »

Étudiants · « Oui! »

« C'est égal à la limite quand e tend vers 0, là j'enlève les e. Il va rester quoi? »

Étudiants · « b… »

« b… et là, il va rester…? »

Étudiants : « -2x! »
« -2x, et là, il va rester…? »

Étudiants : « -e! »

« -e, vous êtes d'accord qu'on est pas mal proche cette affaire-là. Et après ça, Fermat supprime 0, supprime e. Tu te rappelles à la fin il a supprimé e. Là, je fais quoi quand je supprime e? »

Étudiants : « C'est quand e tend vers 0. »

« C'est quand e tend vers 0! Donc, je vais envoyer ça à… quand e tend vers 0 ça va me donner quoi? »

Étudiants : « b-… »
« Ça va donner b - 2x! C'est la dérivée! C'est ça! On n'a passé par d'autres moyens pour y arriver, mais on a pu faire des liens avec ce qu'il a fait. Mais, ce qui est intéressant, c'est que Fermat fait ça de façon intuitive. Il est arrivé à le faire… il dit; regardez, ça marche mon affaire! J'ajoute un petit e, je vais l'essayer et ça marche. C'est une supposition. Il a eu un éclair de génie, il y a quelque chose qui s'est passé. »

APPENDICE E

TABLEAUX D'OBSERVATIONS DES ENTREVUES :

Les commentaires les plus récurrents ont été surlignés. Les participants de la première prestation sont désignés par la lettre A et ceux de la seconde prestation par la lettre B. Le nombre qui suit la lettre indique l'ordre de passation.

Groupe NYA (secteur des sciences de la nature)
Tableaux observations entrevues 2 mai 2008
Que retiens-tu globalement de l'activité?
Considérations historiques :
Ce qu'il faisait dans ce temps là A1
Dans le temps, beaucoup de gens faisaient des maths A2
Aujourd'hui, moins de 1 sur 1000 A2
Ils étaient meilleurs que nous à l'époque A2
Fermat, son histoire A4 A8 A9
Fermat écrivait dans les marges A4
Mensonge de Fermat concernant sa preuve A4
Fermat avait une technique il y a 400 ans A5
Liens entre principe de Fermat et calcul moderne A5 A6 A9
Évolution des méthodes A6
On voit d'où ça vient A7
Passion de Fermat pour les mathématiques A9
Aspect amateur de Fermat A9
Le grand théorème de Fermat A9
Considérations mathématiques :
Globalement, la méthode de l'époque A1
Rapport positif, intérêt pour la partie mathématique A2
Démarche bizarre de Fermat A3
Étrange utilisation du petit e A3
J'ai aimé la démonstration A7 A8
Considérations didactiques :
On ne voit plus les maths comme un préalable A6
On voit les buts entourant la dérivée A6
Les maths, c'est pas juste des calculs A7
C'était difficile comme approche A8

... de la présentation historique?
Images A1
Rapport positif à l'histoire A1 A2 A3 A6 A7 A8 A9
Grand théorème de Fermat A1 A2 A7
350 ans, Fermat-Whiles A1 A5
Passion de Fermat A2
Il n'est pas allé à l'université A2
Ça nous aide aujourd'hui ce qu'il a trouvé A2
Le temps qu'il a mis là-dessus A2
Référence au cercle de Marin Mersenne A3
Aspect amateur de Fermat A3 A8 A9
Son enfance, où il est né A5
C'était pas trop long A6
Tout en général, tout était pertinent A6
On voyait vraiment les liens A6
Il a travaillé avec Descartes A7
Correspondances entre mathématiciens A7
Fermat était en droit A8

... de la lecture du texte?
Difficultés A1 A2 A4 A6 A8
Liens avec les techniques modernes d'optimisation moderne A1 A6
Je croyais que ce serait du latin A1
Il pensait trop compliqué A2
Façon d'écrire un rectangle A2 A3 A5 A6
Le mot *adégalé* A4 A9
Représenter un carré par une ligne A4
L'idée de mettre un e A4 A5
Étape par étape, c'est OK A4
C'était un défi (positif) A5
L'aire à maximiser, pas clair A5
Français difficile A6
La méthode de Fermat en général A6
Difficultés de réfléchir comme au XVII^{e} siècle A6
C'était difficile au début et plus facile avec l'exemple A8 A9
Sa façon de voir les choses A8
L'étudiant décrit brièvement le problème A9

... de la plénière?
Difficultés A1
Rapport positif A1 A6
Je comprenais tout A6
Liens principe de Fermat et les méthodes modernes A7

Qu'as-tu appris sur les mathématiques en général?
Considérations historiques :
Cela fait longtemps qu'on fait des maths A1
Les précurseurs A1 A2
400 ans de maths A1
Les maths ont toujours existé A1
Ça montre d'où les maths viennent A2
Évolution des méthodes A2 A8
Contribution de Fermat à la construction du calcul A3
On voit ce qu'on faisait avant A6
On peut faire des maths n'importe où à la maison comme Fermat A7
Les deux méthodes arrivent à un même résultat A8
Sur Fermat, le personnage A9
Sur l'histoire, mais sur les maths moins A9
Considérations mathématiques :
Il y a des choses qu'on va découvrir en maths A1
Rapport positif A1
On peut faire des découvertes en maths par tâtonnements A5
Découvertes de nouveaux procédés A7
Considérations didactiques :
Les maths, c'est pas juste des calculs A7
Ça aide à aimer plus les maths A8
Ça aide à m'appliquer A8

Qu'as-tu appris sur le calcul différentiel?
Considérations historiques :
Considérations mathématiques :
Rien de nouveau A1
Je connaissais déjà les limites A1
Je connaissais déjà l'optimisation A1
Exemple de plus d'optimisation A2
Aide pour faire de l'optimisation A2 A3 A7 A8 A9
Je vais faire des dessins maintenant A2
Révision en général A4
Considérations didactiques :
Bien pour les connaissances générales, pas pour les maths A5

Cette activité a-t-elle sa place dans un cours de maths?
Considérations historiques :
Oui, cela montre d'où ça vient A3 A4 A6
Ça montre qu'il y a des personnes avant nous A6
J'aime l'histoire A8
Je ne vois pas quelqu'un en droit faire des maths A8
Considérations mathématiques :
Considérations didactiques :
Intérêt A1 A3 A7 A8
Approche différente A1
Besoin de pratique A1 A7
Ça peut aider A1
Pour certains oui, d'autres non A2
Oui, pour ceux qui sont intéressés A2 A5
Il faut un contexte historique A2
OK à l'université A5
On aurait dû le faire au début du cours A6
On voit l'évolution A6
Amène à aimer les maths A8
On fera plus d'efforts, on sera plus motivés A8

Groupe de MAT 103 (secteur des sciences humaines)
Tableaux observations entrevues 9 mai 2008
Que retiens-tu globalement de l'activité?
Considérations historiques :
On a parlé de Pythagore au début B1
Le grand Théorème de Fermat B1
Liens entre le principe de Fermat et le calcul moderne B1
Les maths, ça ne date pas d'hier B3
Ce qu'on fait c'est vieux, mais prouvé récemment B3
On a vu comment ça se passait dans le temps B5
La passion de Fermat B5
Aspect amateur de Fermat B5 B7 B8
Les résultats de Fermat B5 B6
J'ai aimé le background du mathématicien B6
Il y a du monde qui ont fait des recherches pour trouver des bases B7
Ils ont trouvé des choses par hasard B7
Tout ce qu'on sait, c'est d'eux que ça vient B7
Je ne savais pas que c'était si important les maths à cette époque B8
Plusieurs penseurs ont découvert les formules B9
Plusieurs penseurs ne faisaient pas seulement des maths, Descartes B9
La complexité de communiquer par correspondance B9
On a la technologie, eux, c'était sur papier B9
Fermat est à l'origine de la dérivée B10
Les méthodes d'aujourd'hui sont plus efficaces B10
Les universités entretenaient les connaissances B11
Considérations mathématiques :
Absence de justifications dans la démarche de Fermat B1
Avec deux méthodes, on obtient les mêmes résultats B2
La façon dont on optimise un rectangle B4
Il y a plus qu'une façon de faire un problème de maths B8
Considérations didactiques :
C'est mieux qu'un cours habituel B3
On n'a pas juste la théorie, ça change B5
C'était difficile, mais évident avec les explications! B6
C'est rare que je trouve ça intéressant les maths B6
Le texte était difficile B6
J'ai été étonné que ça revenait à la dérivée B8

... de la présentation historique?
Il me semble que ça va mieux quand je sais d'où ça vient B1
Il venait d'une famille riche B3 B7
Aspect amateur de Fermat B3 B5
En correspondance avec d'autres savants B3 B10
Ça évoluait à partir de correspondances B3 B6 B10
Il a attrapé une maladie B3
Souvent, ils partent de rien pour arriver à des théorèmes fondamentaux B4
La complexité de communiquer par correspondance B4
Le grand théorème de Fermat B5 B10
J'ai aimé la partie sur l'histoire B6
Ce sont les mêmes personnages que dans mes autres cours B6
Fermat, Descartes, Pascal... sont liés B6
Les universités entretenaient les connaissances dans le fond B6
Différences du contexte mathématique de l'époque globalement B6
Si tout le monde avait les moyens de faire des études, il y aurait plus de découvertes B7
La présentation était claire B8
C'était pas comme les autres cours théoriques plates B8
Je ne savais pas que Descartes était mathématicien B8
Le livre de Diophante B10
Père Marin Mersenne B11
Cercle de Marin Mersenne B11
Recherche de méthodes globales B11
La complexité de communiquer par correspondance B11

... de la lecture du texte?
Difficultés B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8
L'exemple c'est OK, mais pas le premier paragraphe B1 B2 B3 B6
Le segment appelé droite B1
Sa façon de parler de l'aire d'un rectangle B1 B3
Je comprenais la partie avec le dessin B1 B2
C'était comme une énigme, un défi B3
La façon dont c'est écrit B3 B4 B5
Je comprenais le but B3 B7
Les phrases coupent sec, ça sous-entend des choses B3
Il fait juste dire les étapes B3
Le mot *adégaler* B4 B9 B10
Les termes sont différents B5 B6 B8
Il n'y avait pas de dessin, c'était plus difficile B5 B6
L'exemple était moins lourd, le texte était plus espacé B6
Il a suivi son intuition B7
Le fait d'ajouter un e, c'est pas logique, ça m'a bloqué B7
Le fait d'ajouter un e mène à la même chose B7 B10
C'était intéressant, je voulais savoir c'était quoi les maths à ce niveau-là B8
C'était écrit en ancien français B9 B11
C'est plus le côté mathématique qui est difficile, pas le français B11
On a vu une façon différente, c'était bien B11

... de la plénière?
Intérêt B2 B9
J'étais content de finalement comprendre B2 B5
Le fait d'ajouter un e et de le supprimer B4
Il y avait beaucoup de variables, c'était difficile B4
Les explications étaient claires B5 B6
Je ne suis pas arrivé à le décortiquer seul, finalement c'était facile B6 B8
Il a suivi son instinct B7
On peut comparer les méthodes anciennes aux modernes B9
J'ai pu voir de où ce que ça venait B10

Qu'as-tu appris sur les mathématiques en général?
Considérations historiques :
Ce qu'on faisait avant en calcul B1
Il y a eu des découvertes qu'on utilise à notre façon B1
Il a trouvé par chance B3
On peut comparer les méthodes anciennes aux modernes B3 B5 B6 B8
Aspect évolutif des méthodes B4 B11
Il cherchait des méthodes globales B7
C'est le côté historique des maths en fait B10
Il y a eu un grand chemin de parcouru B11
Considérations mathématiques :
Il y a plusieurs façons de faire pour résoudre un problème B3 B5 B8
On peut trouver des choses en maths sans les chercher B7
On peut trouver des choses en maths par hasard B7
On voit à quoi sert la dérivée B8
Pour résoudre un problème, il faut parfois appliquer plusieurs théorèmes B9
Considérations didactiques :
Ça nous montre une différente façon de faire B4
Ça m'a aidé pour les exercices ensuite B10

Qu'as-tu appris sur le calcul différentiel?
Considérations historiques :
On voit la provenance de la formule B9
Considérations mathématiques :
On comprend à quoi servent les limites B1
On fait plus des théories que des problèmes B1
On n'a pas vu de nouvelle formule B2
Il y a plusieurs façons de faire pour résoudre un problème B2 B6 B7
On applique les limites à un cas réel B3
On applique l'optimisation à un cas réel B3
On travaille l'optimisation B5
Considérations didactiques :
On va voir un peu plus loin, c'est agréable B4
Je pense que ça va m'aider pour l'examen B5
Ça donne une autre idée de comment on peut faire B7
On savait tous que c'était la dérivée B9

Cette activité a-t-elle sa place dans un cours de maths?
Considérations historiques :
Oui, ça nous montre d'où ça vient B1 B2 B7 B10
Tu sais qui est derrière ça B2
Des amateurs ont fait ça pour le plaisir et ça a donné ça! B7
On voit l'évolution B8
Considérations mathématiques :
Aujourd'hui, on peut justifier B1
Considérations didactiques :
On fait des liens B1
Peut-être en introduction de matière B1 B11
Pour connaître les fondements B1
Intérêts B1 B2 B6 B7 B8 B10
Ça change de l'ordinaire B1
Ça ne rend pas meilleur en maths B2 B3 B8
On a besoin de pratique B2
J'ai aimé la manière d'enseigner B3 B9
Ça amène des connaissances générales sur le personnage B3 B8
Je crois que c'est la personne qui enseigne qui fait la différence surtoutB3
Ça peut intéresser certains B3 B9
Le défi amène une motivation B3
De temps en temps, c'est bien d'aller plus loin B4
Mieux au secondaire, style réforme B4
C'est de voir la matière sous un autre angle B5 B7 B11
Pour l'optimisation c'est bien B5
On a quand même vu de la matière B5
Avec l'historique, on dirait que tu rentres plus dedans B6
C'est moins abstrait B6
Avec l'histoire c'est plus motivant B6 B7 B8
Il y a des mathématiciens qui ont travaillé là-dessus B7
Ça a évolué B7
Ça va m'intéresser plus que ça va m'aider B7 B8
Ce n'est pas la méthode que je vais utiliser dans les examens B7
C'est important de parler de la provenance B9
Oui, ça fait faire des liens B10

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, Michelle. 1990. « Épistémologie et didactique ». *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, no 2.3, pp. 241-286.

Barbin, Évelyne. 1988. « La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques ». *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, no 36, pp. 591-620.

Bulletin inter-IREM épistémologie (éd.). 1988. *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques.* France : Bulletin inter-IREM épistémologie, 334 p.

Charbonneau, Louis. 2006. « Histoire des mathématiques et les nouveaux programmes au Québec : un défi de taille ». In *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés : Actes du colloque EMF* (Sherbrooke : Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, 27-31 mai 2006), dans le thème 3 (sous la forme d'un CD), 11 p.

Fauvel, John et Jan van Maasen (eds.). 2000. *History in Mathematics Educations : The ICMI Study.* Pays-Bas : Kluwer Academic Dordrecht, 437 p.

Giorello, Giulio, et Corrado Sinigaglia. 2007. « Fermat : De défis en conjectures ». *Les génies de la science*, août-octobre, pp. 40-48.

Guliker, Iris, et Klaske Blom. 2001. « A historical angle: A survey of recent literature on the use and value of the history in geometrical education ». *Educational Studies in Mathematics*, no 47, pp. 223-258.

Heath, Thomas L. 1931. *Manual of Greek mathematics*, Oxford : Clarendon Press, p. 493.

Dhombre, Jean et al. 1987. *Mathématiques au fil des âges*, Paris : I.R.E.M. Groupe épistémologie et histoire; Gauthier-Villars, p. 165.

IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques) de Rennes. 1995. *Faire des mathématiques à partir de leur histoire.* Tome I et II. Rennes : I.R.E.M. de Rennes, 145 p. et 126 p.

IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques) de Basse-Normandie. 1999. *Aux origines du calcul infinitésimal.* Coll. « Comprendre les mathématiques par les textes historiques », Paris : I.R.E.M. Épistémologie et histoire des mathématiques; Ellipse, 284 p.

Jankvist, Uffe Thomas. 2007. « On empirical research in the field of using history in mathematics education ». *Nordic Studies in Mathematics Education*, vol. 12, no 3, pp. 83-105.

Jankvist, Uffe Thomas. 2008a. « Proceeding HPM2004 & ESU4: Empirical research on using history of mathematics in mathematics education ». *HPM Newsletter*, no 67 mars, pp. 15-18.

Jankvist, Uffe Thomas. 2008b. « History of modern mathematics and/or modern applications of mathematics in mathematics education ». *Texte fourni par l'auteur, devrait paraître dans Proceeding HPM 2008.*

Jankvist, Uffe Thomas. 2008c. « Evaluating a teaching module on the early history of error correcting codes ». *Texte fourni par l'auteur, devrait paraître dans Proceeding HPM 2008.*

Jankvist, Uffe Thomas. 2008d. « A teaching module on the history of public-key cryptography and RSA ». *BSHM Bulletin*, vol. 23, no 2, pp. 157-168.

MELS (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec). 2003. *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, premier cycle.* Québec : Les publications du Québec, p. 248.

Roy, Pascale. 2006. « Intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement ». Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal, 155 p.

Tzanakis, Constantinos, et Abraham Arcavi. 2000. « Integrating history of mathematics in the classroom : an analytic survey ». In Fauvel, John et Jan van Maanen, 2000, pp. 201-240.

Weeks, Chris. 2008. « Interview with Evelyne Barbin ». *HPM Newsletter*, no 67 mars, pp. 1-4.