UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

IDENTIFICATION ET MISE À L'ÉPREUVE DES VARIABLES PERMETTANT LA PRÉDICTION DU NIVEAU DE DIFFICULTÉ DE TÂCHES D'ÉVALUATION POUR DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ EN MATHÉMATIQUES AU SECONDAIRE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR

FADIA SAKR

Octobre 2009

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé à l'Université du Québec à Montréal sous la direction du professeur Martin Riopel, en collaboration avec le professeur Gilles Raîche à titre de co-directeur. Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur, le professeur Martin Riopel, pour sa précieuse collaboration, son soutien, ses conseils avisés et la contribution qu'il a apportée à ce travail. J'exprime également toute ma gratitude à mon codirecteur, professeur Gilles Raîche, pour les conseils précieux qu'il m'a prodigués tout au long de mes travaux.

Je tiens à remercier messieurs Patrice Potvin et Pascal N'Dinga ainsi que monsieur Frédéric Legault pour avoir accepté de participer au jury. La lecture critique et les remarques pertinentes qu'ils ont apportées à ce rapport ont contribué considérablement à améliorer la qualité de ce manuscrit.

Je n'oublie pas de remercier sincèrement mon cher époux Kamal pour sa compréhension, sa patience et son soutien tout au long de ce mémoire, ainsi que mes enfants : Isabel et Joëlle. Leur persévérance et leur foi en l'importance de ce mémoire m'ont permis de compléter cette longue démarche.

Bien sûr, je ne manque pas d'avoir une grande pensée pour ma mère, pour son soutien constant, quoiqu'il me soit difficile d'exprimer si brièvement toute ma gratitude et ma reconnaissance.

TABLE DES MATIÈRES

Liste des tableaux

Liste des figures

Résumé

Cette étude s'intéresse à l'élaboration de tâches d'évaluation pour des équations du premier degré à deux inconnues en mathématiques, au secondaire. Nous nous sommes intéressés plus précisément à l'identification des paramètres permettant de connaître *a priori* le niveau de difficulté d'un échantillon de tâches d'évaluation en algèbre et notre recherche s'est limitée à la modélisation d'un seul paramètre, à savoir le niveau de difficulté.

Le travail effectué dans le cadre de cette recherche a porté sur l'identification et la classification de variables prédictives pour le niveau de difficulté. Afin d'atteindre nos objectifs, nous avons choisi de travailler avec les données de la banque d'instruments de mesure du réseau secondaire (BIM). Les épreuves desquelles résultent ces données ont été soumises à des élèves de plusieurs commissions scolaires de la province de Québec. À partir de ces données, nous avons procédé au classement des tâches d'évaluation reliées aux équations du premier degré. Par la suite, une application du modèle de régression linéaire a été réalisée afin de vérifier si le taux de réussite des tâches d'évaluation pouvait être expliqué par les variables prédictives retenues.

Les résultats obtenus ont montré que les variables prédictives expliquent le taux de réussite des tâches d'évaluation des équations du premier degré avec un coefficient de détermination de 0,78. Ainsi, même si les tâches d'évaluation utilisées pour cette étude ont été produites par des enseignants différents provenant de plusieurs régions du Québec, il a été possible de prédire efficacement leur niveau de difficulté. Les résultats obtenus par les corrélations sont comparables à ceux d'autres études du même type.

L'originalité de notre travail a été de montrer comment élaborer des tâches d'évaluation en utilisant des variables prédictives. Ce concept a été validé selon deux modèles: un modèle à une équation et l'autre à deux équations. De plus, nous avons présenté des étapes afin de construire des tâches d'évaluation avec un niveau de difficulté déterminé à l'avance.

Au niveau pratique, le modèle développé pourra être utilisé directement par les enseignants lors des évaluations classiques en salle de classe. Mais aussi pour le développement d'environnements d'évaluation informatisés.

MOTS CLÉS: production de tâches d'évaluation, équations du premier degré, variables prédictives, niveau de difficulté de tâches d'évaluation.

Introduction

Ce projet de recherche concerne l'élaboration de tâches d'évaluation en mathématiques au secondaire. Il s'intéresse plus spécifiquement à la construction de tâches d'évaluation d'équations du premier degré à deux inconnues en algèbre.

L'élaboration de tâches d'évaluation est soutenue par les modélisations issues de la théorie de la réponse à l'item. Elle est désignée par l'expression anglaise *item generation* et consiste à utiliser un modèle formel pour prédire les caractéristiques de tâches nouvellement créées. Bien que les récentes recherches sur la production de tâches d'évaluation proposent de déterminer à l'avance le niveau de difficulté des items d'une évaluation donnée, il n'est pas facile de connaître *a priori* le niveau de difficulté de ces items, car celui-ci dépend de plusieurs composantes que nous appellerons variables dans le cadre de notre recherche. Notre projet vise à identifier des techniques permettant de connaître *a priori* le niveau de difficulté des items en se basant sur ces variables.

Tout d'abord, l'objectif général de cette recherche est d'identifier les variables permettant d'appliquer un modèle de régression linéaire pour prédire le niveau de difficulté des items de tâches d'évaluation d'équations du premier degré en mathématiques. Pour y arriver, nous comptons utiliser des résultats provenant de la banque d'instruments de mesure (BIM) du réseau secondaire.

Les équations du premier degré constituent un mode de représentation en mathématiques. Autrement dit, ce mode de représentation est un élément du langage mathématique. Étant donné que la capacité de communiquer à l'aide du langage mathématique représente une des trois compétences transversales qui chapeautent l'ensemble des programmes de formation en vigueur au niveau secondaire, nous pouvons dire que notre projet de recherche cible une situation d'évaluation applicable aux divers contextes éducatifs. Par ailleurs, les équations du premier degré sont également utilisées dans d'autres disciplines telles qu'en physique et en économie. Au niveau pratique, le modèle développé, notamment en permettant de produire des items avec un niveau de difficulté connu, pourra aussi être utilisé directement par les enseignants lors des évaluations classiques en classe. Toutefois, notre recherche se limitera à la modélisation d'un seul paramètre qui est le niveau de difficulté. D'autres paramètres, tels que la discrimination et la pseudo-chance pourront être explorés ultérieurement dans d'autres travaux de recherche.

Notre projet de recherche est divisé en quatre chapitres. La problématique des langages mathématiques et de l'évaluation est exposée au chapitre I. Au chapitre II, le cadre théorique sur les notions d'équations, de fonctions et sur les tâches d'évaluation publiées par les chercheurs dans le domaine sera présenté; ainsi qu'une synthèse de cinq études sur des tâches d'évaluation. Pour terminer ce chapitre, nous effectuerons une analyse et une classification des variables prédictives permettant de construire notre hypothèse. Au chapitre III, nous décrirons les sujets et présenterons le déroulement des processus ainsi que la description des instruments de mesure. Nous exposerons par la suite la méthode d'analyse des données.

Les résultats de notre projet de recherche seront présentés au chapitre IV. Nous procéderons à l'analyse de ces résultats pour ensuite développer un modèle qui permet de produire des items. Pour conclure, nous ferons une synthèse de notre projet de recherche et formulerons des recommandations pour des recherches ultérieures. À l'annexe I, on trouvera les définitions de quelques termes de l'équation du premier degré et à l'annexe II, les tableaux de la section méthodologie. Enfin, l'annexe III présentera les tableaux et les informations supplémentaires se rapportant aux sections précédentes.

CHAPITRE I

Problématique

Ce projet de recherche s'intéresse à l'algèbre, car ce dernier représente la base du programme de mathématique pour l'école secondaire. Plus spécifiquement, lors de l'apprentissage de cette matière, les élèves rencontrent des difficultés à plusieurs niveaux pour résoudre et bien maîtriser un problème d'algèbre. De plus, à cause de son importance, cette matière est souvent utilisée dans les tests de classements ou d'aptitude précédant l'admission des élèves au niveau secondaire.

Plusieurs travaux, passés et récents, ont contribué à développer un cadre qui nous permet de mieux expliquer les difficultés des élèves en résolution de problèmes en algèbre. L'étude fréquemment citée de Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist et Reys (1980) relatant les résultats du *National Assessment of Educational Progress* (NAEP) en mathématiques pour les élèves de 9 et 13 ans, a permis de dévoiler qu'à grande échelle, les élèves réussissent moins bien les problèmes écrits que des problèmes équivalents présentés dans un contexte purement mathématique. De plus, les travaux de Mayer, Larkin et Kadane (1984) indiquent que les élèves ont souvent de la difficulté à résoudre même un simple problème d'algèbre et qu'ils n'arrivent pas toujours à bien comprendre un texte énonçant une tâche à résoudre dans un contexte algébrique.

Par ailleurs, la compétence à résoudre des problèmes mathématiques telle qu'elle est présentée dans le Programme de formation de l'école québécoise (2001) se définit selon quatre composantes: décoder les éléments de la situation problème, modéliser la situation problème, appliquer différentes stratégies en vue d'élaborer une solution, partager l'information relative à la solution. Les élèves rencontrent des difficultés langagière en décodant les éléments de la situation problème ce qui constitue la première problématique de cette recherche; et la deuxième problématique réside dans l'élaboration des évaluations équivalentes pour des étudiants qui ont des compétences différentes variant de faibles à fortes.

Le présent chapitre est subdivisé en deux grandes parties:

- la première partie présente la problématique relative aux difficultés langagières sous ses différentes formes et ses répercussions;
- la deuxième partie présente la problématique d'équivalences des évaluations et ses impacts sur le niveau de difficulté des tâches.

1.1 Langage mathématique

D'après de Serre et Groleau (1997), les difficultés de nature langagières sont aussi présentes en mathématiques, que ce soit au niveau du langage naturel, symbolique ou graphique. De plus, d'autres problèmes liés à la maîtrise de la langue française engendrent souvent des difficultés dans l'apprentissage des mathématiques. Dans notre cas, nous nous intéressons plus particulièrement aux tâches ~~d'évaluation (appelées souvent par le terme~~ items) comportant des équations du premier degré en algèbre et susceptibles d'engendrer les difficultés d'apprentissage en mathématique. Selon les mêmes auteurs, les répercussions de la maîtrise de la langue française sur l'apprentissage des élèves se situent à plusieurs niveaux: 1) dans la compréhension des énoncés, 2) dans la formulation de questions et 3) dans l'interprétation des résultats. Il en résulte des difficultés pour les enseignants à développer des tâches qui tiennent compte de tous ces éléments.

On peut s'intéresser à comprendre les difficultés d'apprentissage des mathématiques en évaluant la performance des élèves pour mieux diagnostiquer leurs difficultés. Des auteurs comme Masters et Mislevy (1993) ont mis en lumière le fait que le but de l'évaluation n'était pas d'établir la présence d'un comportement spécifique, mais de déduire la nature de la compréhension de l'étudiant pour un phénomène particulier.

Dans cette perspective, Lane (1991b) a suggéré de développer des instruments pour mesurer la complexité cognitive telle que manifestée par les variétés de stratégies de résolutions de problèmes et la capacité de raisonner et de communiquer sa pensée mathématiquement. Pour permettre de diagnostiquer les difficultés des élèves, elle a proposé que les instruments d'évaluation permettent même d'identifier des faiblesses de la connaissance conceptuelle chez l'élève. Cet élément est important parce que les enseignants ont besoin de promouvoir la restructuration des connaissances des élèves et le désapprentissage ou l'inhibition des concepts qui n'ont pas de sens et qui sont inexacts. Ainsi, Lane (1991b) mentionne que, parce que la structure de la connaissance d'un individu change tout au long de son apprentissage, l'évaluation doit réagir facilement à ces changements. Les changements quantitatifs et qualitatifs dans la structure des connaissances des élèves doivent être pris en compte par le travail d'évaluation. Celui-ci devrait donc permettre de déduire la compréhension de l'élève, de mesurer la complexité cognitive, de déterminer les faiblesses de la connaissance conceptuelle.

Plusieurs épreuves en mathématiques sont administrées à grande échelle et offrent de bonnes caractéristiques psychométriques pour l'évaluation du niveau d'habileté des élèves. Toutefois, d'après Barnes (1998), les méthodes d'évaluation actuelles qui s'appliquent à grande échelle pour évaluer le niveau d'habileté des élèves en mathématiques sont critiquées par les éducateurs. À leur avis, c'est davantage la performance en mathématiques qui est évaluée par ces tests à grande échelle.

Dans le contexte des mathématiques, les théoriciens modernes comme Putnam, Lampert, et Peterson (1990) proposent que l'apprentissage ne se présente pas de façon linéaire, c'est-à-dire par une accumulation de connaissances; mais plutôt comme un processus constructif. De cette manière, la nouvelle connaissance s'intégrant dans la structure existante permet aux autres structures de se transformer. Selon Sebrechts, Enright, Bennett et Martin (1996), il est nécessaire de réévaluer le sens des évaluations scolaires en tenant compte du fait que la difficulté d'une tâche, d'un point de vue psychologique, ne se mesure pas d'une manière unidimensionnelle. Quant à la performance, ces auteurs indiquent qu'elle est un résultat d'interaction entre l'individu et le problème et qu'elle peut être comprise en fonction de la connaissance et de l'habileté que l'individu apporte à la tâche, de même qu'au regard du degré d'exigence qu'impose la tâche.

Aschbacher (1991) propose, quant à lui, qu'une évaluation contienne quatre éléments. En premier lieu, cette évaluation doit permettre à l'élève d'utiliser sa capacité de raisonnement à un niveau élevé. En deuxième lieu, elle doit contenir une activité d'apprentissage qui simule une activité réelle. En troisième lieu, on doit pouvoir évaluer le processus de fonctionnement et le résultat final. Finalement, à son avis, le plus important est que le niveau de réussite soit connu d'avance afin de valider l'évaluation projetée.

1.2 Équivalences des évaluations

Les établissements scolaires essaient habituellement d'utiliser une grande variabilité dans les tâches d'évaluation parce que l'habileté varie d'un sujet à l'autre. L'avantage de cette variabilité est de pouvoir évaluer touts les habiletés possibles de très faibles à très fortes. Cette variabilité occasionne un problème du point de vue de l'équivalence des tâches. Pour régler ce problème, les autorités scolaires ont souvent recours à des évaluations finales communes telles que les tests provinciaux pour les élèves du secondaire. Cependant, pour évaluer la réussite de ses élèves, un enseignant doit préparer un examen. Il lui est extrêmement difficile de connaître *a priori* le niveau de difficulté des questions qui dépendent de plusieurs composantes; par exemple, le contenu, le contexte, les représentations (graphique, table, symbolique), les problèmes énoncés et les problèmes non énoncés. Habituellement, le professeur a la responsabilité de créer un ensemble de questions adaptées au contexte de l'évaluation projetée. Dans ce cas, les tests doivent s'adapter aux sujets. Cette adaptation est encadrée par la théorie de la réponse à l'item développée par Lord et Novick (1968) qui permet d'estimer les paramètres et le niveau d'habileté des sujets. Étant donné la complexité du langage mathématique, il est nécessaire de déterminer avec précision les variables qui influencent le niveau de difficulté d'une question chez les élèves.

La recherche que nous présentons ici permettra de développer un modèle permettant de prédire le niveau de difficulté de tâches d'évaluation ainsi que de produire de nouvelles tâches d'évaluation avec un niveau de difficulté connu. Ultérieurement, ce modèle pourrait être informatisé et utilisé par les enseignants. Mais, comme des problèmes qui posent une difficulté égale ne sont pas difficiles à cause de facteurs identiques, alors il faut décrire les facteurs susceptibles d'influencer la difficulté d'une tâche. Pour y arriver, il faudra répondre aux deux questions de recherches suivantes:

- **Comment peut-on prédire le niveau de difficulté des tâches de l'évaluation en mathématiques?**
- **Comment produire des items avec un niveau de difficulté connu?**

Nous allons tenter de décrire ici, à partir des recherches préalablement mentionnées, les facteurs qui contribuent à la difficulté des items dans les évaluations des difficultés en mathématiques.

Nous décrirons dans ce qui suit le cadre théorique qui est divisé en deux sections. La première traitera des notions d'équation et de fonction dans un contexte éducatif. Ensuite, la deuxième section présentera les auteurs qui, à travers l'histoire, ont mené des recherches sur les tâches d'évaluation. Nous résumerons cinq études dans lesquelles les auteurs ont développé différentes approches pour prédire les niveaux de difficulté des items. Nous compléterons cette section par une synthèse de leurs travaux permettant d'identifier les variables prédictives pour notre recherche et de valider les raisons de leurs choix.

CHAPITRE II

Cadre théorique

2.1 Introduction

Dans cette section, nous présenterons en premier lieu, l'évolution de la notion de fonction à travers l'histoire. Nous traiterons ensuite la perspective de la notion de fonction et la compétence algébrique. En quatrième lieu, les connaissances conceptuelles et d'applications de la notion de pente seront abordées. En cinquième lieu, nous exposerons les différentes représentations de la fonction auxquelles les problèmes mathématiques font appel. Finalement, les différentes interactions de la représentation donnée-réponse des items seront exposées: a) langage symbolique versus langage naturel; b) langage symbolique versus langage graphique; c) langage graphique versus langage symbolique; d) langage numérique (tableaux) versus langage graphique; e) langage numérique (tableaux) versus langage symbolique.

2.1.1 Représentation de la fonction à travers l'histoire

La notion de fonction est l'une des plus importantes notions en mathématiques et est représentée sous différentes formes. Développée chez les Babyloniens, elle était, selon Mesa (2004), une entité représentée par des tableaux. D'après Kleiner (1989), la notion de fonction dans une forme explicite n'est apparue qu'au début du XVIII^{e} siècle. Le XVIIe témoigne pour sa part de l'émergence des sciences modernes mathématisées et de l'invention de la géométrie analytique. Le développement de ces deux disciplines a contribué à l'élaboration d'une vision continue et dynamique de la fonction comparativement à la vision statique et discontinue proposée par les anciens. En associant et l'expression de la relation entre les variables, c'est-à-dire les équations. Ce qui manquait à la compréhension des mathématiques, c'était l'identification des variables dépendantes et indépendantes dans une équation. D'après Mesa (2004), en 1692 Leibniz introduit le mot fonction pour désigner un objet géométrique associé à une courbe. Leibniz soutenait, par exemple, qu'une tangente est une fonction d'une courbe. La séparation graduelle de l'analyse, de la fonction et de son origine, c'est-à-dire son antécédent géométrique, est apparu quant à elle dans la deuxième moitié du XVIII^{e} siècle. Ce processus, qui consiste à ne pas analyser la fonction d'une façon géométrique (Mesa; 2004), a permis à Euler de remplacer le concept de variable, appliqué à des objets géométriques, par le concept de fonction comme formule algébrique. Euler a défini une fonction par une expression analytique, c'est-à-dire par une formule. Mesa (2004) indique qu'en 1829 Dirichlet était parmi les précurseurs qui ont restreint explicitement le domaine de la fonction à un intervalle. Autrefois, la variable indépendante prenait seulement des valeurs réelles. La fonction de Dirichlet est la suivante:

$$D(x) = \left\{ \text{c si x est rationnel et d si x est irrationnel} \right\}$$

Cette fonction peut être discontinue aussi. Elle devient donc une équation pour Leibniz et Euler et une correspondance entre des intervalles ~~numériques pour Dirichlet. Enfin~~, selon Luzin (1998), cette notion devient une correspondance entre deux paires quelconques, mais pas nécessairement entre deux ensembles numériques. La représentation sous forme d'équation nous intéresse, car elle est l'objet de notre étude.

2.1.2 Perspective de la notion de fonction ou équation

Dans le domaine de la fonction linéaire, l'équation du premier degré a été décrite selon deux perspectives (processus et objet) par les auteurs suivants: Breidenbach, Dubinsky, Nichols, et Hawks (1992); Even (1990); Moschkovich, Schoenfeld et Arcavi (1993); Schwarz et Yerushalmy (1992) et Sfard (1992). Dans la première perspective, elle est perçue comme un processus ou une action lorsqu'elle lie la valeur x à la valeur y. Dans la seconde perspective, la fonction est vue comme objet quand elle est identifiée en tant qu'ensemble. Suivant Moschkovich (2004), travailler avec les fonctions peut être interprété comme une perspective traitant les droites comme objet. Le fait de joindre la droite à son équation correspondante ($y = mx + b$) est considéré comme une action. Ces deux perspectives de la fonction montrent les interactions entre les différents modes de représentation de l'équation que nous traiterons à la section 2.1.6

2.1.3 Compétence algébrique

Le langage mathématique est complexe. Il requiert une compétence algébrique quand il s'agit des équations algébriques et une compétence linguistique pour comprendre les problèmes énoncés. Autrement dit, comprendre les problèmes énoncés équivaut à décoder les éléments de la situation problème. Le décodage est l'une des cinq composantes du programme de formation de l'école québécoise (2001).

Suivant MacGregor et Price (1999), les chercheurs qui se sont penchés sur le vocabulaire et l'apprentissage des mathématiques visaient à vérifier comment les élèves comprenaient les informations mathématiques formelles exprimées en langage naturel. Deux facteurs influençant l'apprentissage des mathématiques ont été étudiés. Ces facteurs sont:

a) La signification des mots (comme *relation* et *origine*). Dans un contexte de mathématiques, la signification des mots est présentée sous forme des exemples:

Exemple n°. 1

Des élèves en arts décident de faire une maquette rectangulaire représentant un site sportif. La maquette mesure 3 mètres de longueur. La mesure de sa largeur n'est pas déterminée. Traduisez par une équation la **relation** entre le périmètre (P) et la largeur (L) de cette maquette.

Dans ce premier exemple, les auteurs utilisent le mot relation (exemple tiré de la banque d'instruments de mesure du réseau secondaire (BIM)).

Exemple n°. 2

La fonction f définie par $f(x) = 3x - 5$ est représentée par une droite dans un plan cartésien. Quelle est la valeur de l'ordonnée à l'**origine** de cette droite? A) -5 B) -3 C) 3 D) 5

Dans le deuxième exemple, ils utilisent le mot origine (exemple tiré de la banque d'instruments de mesure du réseau secondaire (BIM)).

b) La familiarisation avec le modèle de conversation ou de discours utilisé à l'école pour parler et écrire en mathématiques : par exemple, comprendre une instruction comme « compléter la table des valeurs en utilisant le graphique ci-dessus » dont voici une illustration:

Exemple n°. 3

Pendant les vacances, André offre ses services pour tondre le gazon. Il demande un certain montant pour l'entretien de sa tondeuse en plus d'un salaire horaire. Cette situation est représentée par le graphique ci-dessous. Compléter la table des valeurs en utilisant ce graphique donné à la figure 1.

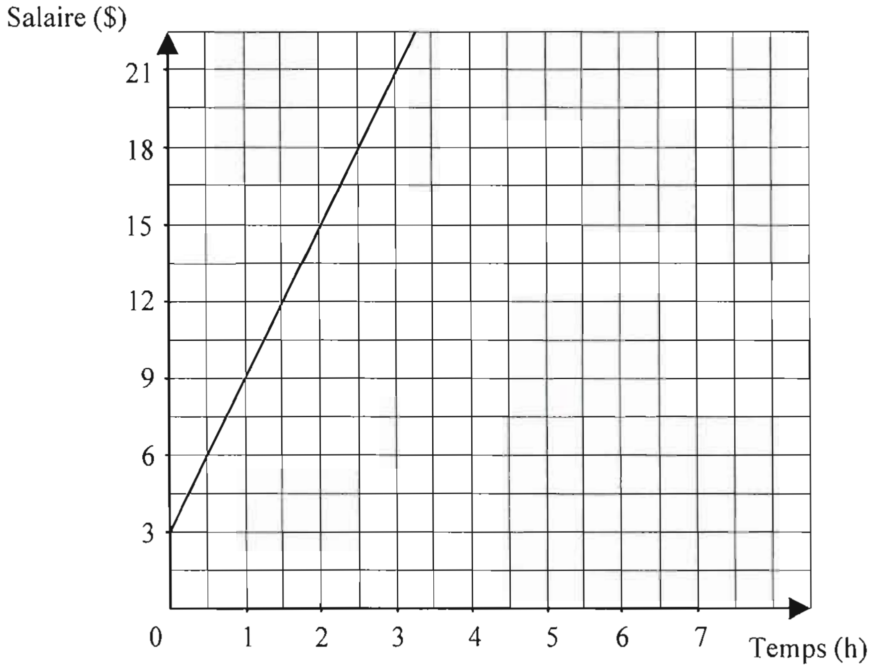


Figure 1: Salaire d'André en fonction du temps travaillé
(Graphique tiré de la banque d'instrument de mesure du réseau secondaire (BIM))

D'après Perrin-Glorian (1994), considérer les expressions ou les énoncés en mathématiques, d'un point de vue linguistique~~, obligent les élèves à les analy~~ser pour mieux comprendre les énoncés, formuler des résultats ou des questions et interpréter ce qui se fait. Ceci a été confirmé par la suite par de Serres et Groleau en 1997.
Pour illustrer ce point, faisons référence, par exemple, à cette question posée dans une épreuve du BIM.

Exemple n°. 4

Un premier réservoir contient 4000 litres de mazout. On vide son contenu dans un deuxième réservoir à l'aide d'une pompe dont le débit est de 30 litres par minute. Le deuxième réservoir contient déjà 150 litres de mazout. On s'intéresse ici à la relation entre la quantité de mazout Q restante dans le premier

réservoir selon le nombre de minutes *n* de fonctionnement de la pompe.

Laquelle des équations ci-dessous traduisent cette relation?

A) $Q = -30n$ C) $Q = 4000 - 30n$

B) $Q = 30n$ D) $Q = 150 + 30n$

L'habileté à manipuler mentalement les objets abstraits qui correspondent aux propriétés des classes auxquelles ils appartiennent constitue un des éléments de la compétence algébrique. Selon de Serres et Groleau (1997) et Laborde (1983), abstraire les objets mathématiques du contexte représente une difficulté langagière lors de l'utilisation imbriquée des langages symboliques, naturels et graphiques.

2.1.4 Connaissances conceptuelles et d'applications de la notion de pente

D'après Stump (2001), les connaissances conceptuelles de la pente signifient comprendre les relations entre les représentations variées de la pente algébrique et géométrique; la pente est une mesure de taux de variation. Les connaissances d'application de la pente, pour leur part, signifient la familiarité avec la relation de la pente typiquement symbolique (formule algébrique: $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$) et les conditions d'application de cette formule.

Stump (2001) indique que les items qui demandent une connaissance conceptuelle ont généralement un niveau de difficulté moins élevé que les items qui demandent une connaissance d'application, puisque les relations entre les représentations sont moins exigeantes pour les élèves que les connaissances d'application.

Ces connaissances sont connues sous l'appellation d'habiletés cognitives. Nous aborderons cette question à la section 2.3.1.

2.1.5 Différentes représentations de la fonction

Les chercheurs ont exposé différentes opinions sur les représentations de la fonction. Ils ont présenté les avantages qu'elles offrent aux élèves.

D'abord, selon Lobato et Siebert (2002) et le *Group for the Psychology of Mathematics Éducation* (2004), comprendre les fonctions c'est avoir l'habileté à coordonner les différents modes de représentation de la fonction tels que les représentations conventionnelles de tables, d'équations et de graphiques. Par conséquent, un processus métacognitif se développe lorsque l'élève utilise différentes représentations pour résoudre les équations linéaires. Yerushalmy (2000) et le *Group for Psychology of Mathematics Éducation* (2004), indiquent par ailleurs que l'approche fonctionnelle est un concept central qui peut être significativement organisé dans le programme d'algèbre. Cette approche fonctionnelle permet aux élèves de développer des habiletés à résoudre les équations du premier degré. L'approche fonctionnelle est une caractéristique partagée par plusieurs approches récentes qui utilisent la technologie interactive entre graphique, symbole (équation) et table (table de valeurs). Certains auteurs, tels que Rojano (2002) et Yerushalmy et Chazan (2002), ont d'ailleurs utilisé des logiciels pour encourager les élèves à relier le tableur avec l'équation et le graphique. D'autres, tels que Confrey et Smith (1994), suggèrent l'utilisation des trois représentations de la fonction comme faisant partie de l'algèbre. Ces trois représentations supportent le phénomène de mathématisation, pour former une correspondance de deux quantités. Ils suggèrent aussi l'utilisation des trois représentations de la fonction pour analyser le taux de variation comme covariation de quantités dépendantes et indépendantes et pour la compréhension de la fonction au niveau conceptuel. Finalement, selon Duval (1993) et Bloch (2003), les interactions entre les différentes représentations de l'objet mathématique doivent être considérées comme étant absolument nécessaires pour construire le concept visé. Ces interactions seront présentées dans les sections ci-dessous.

2.1.6 Interactions de représentations : données et réponses d'un item

D'après Confrey et Smith (1994), Bloch (2003) et de Serre, Bélanger, Piché, Staub et Riopel (2003), les interactions peuvent être organisées en plusieurs catégories. Ces catégories sont entre autres: l'interaction entre langages symboliques et naturels, l'interaction entre langages symboliques et graphiques, l'interaction entre langages numériques (tableaux) et graphiques et l'interaction entre langages numériques et symboliques. Ces interactions seront présentées dans les sections 2.1.6.A à 2.1.6.E.

A. Langage symbolique versus langage naturel

En algèbre, les élèves ont de la difficulté à traduire les équations ou les fonctions linéaires du langage naturel vers le langage symbolique, car le langage naturel en mathématiques est composé de termes usuels et de termes scientifiques propres à la discipline selon Vergnaud, Cortes, Favre-Artique (1988), de Serres, Groleau (1997), Rojano (2002), de Serre, Bélanger, Piché, Staub et Riopel (2003) et *Group for Psychology of Mathematics Éducation (2004).* D'après de Serres et Groleau (1997), le langage symbolique en mathématiques est constitué d'un ensemble de symboles ayant un sens bien précis et des règles régissant leur agencement. Ces auteurs affirment que les élèves ont de la difficulté dans les problèmes qui comportent des énoncés à traduire du code algébrique vers le texte (naturel au symbolique pour les connaissances conceptuelles) et à résoudre l'équation correspondante. Dans cette perspective et dans le cadre de notre recherche, nous pouvons identifier l'opposition entre le langage naturel versus le langage symbolique comme facteur influençant le niveau de difficulté d'un problème d'algèbre.

B. Langage symbolique versus langage graphique

En ce qui concerne la saisie spontanée du graphique, de Serres et Groleau (1997), Nadot (1993) et Dreyfus et Mazouz (1993) mentionnent que l'élève doit posséder des connaissances préalables, car le graphique illustre un processus composé de codes représentant des concepts. Même si l'élève possède le bagage cognitif nécessaire, ce dernier n'utilise pas toujours automatiquement la représentation graphique.

De plus, de Serre, Bélanger, Piché, Staub et Riopel (2003) et Bloch (2003) indiquent que l'articulation entre le registre des représentations graphiques et celui des équations n'est pas bien établie chez les élèves. En ce sens, ils éprouvent de la difficulté à trouver l'équation à partir d'un graphique, car les équations ou les fonctions sont considérées chez l'élève d'une façon algébrique (symbolique) plutôt que visuelle (graphique). Aussi, les élèves ne réussissent pas la tâche de lier les informations de différents cadres, comme lier une équation à un graphique, car leurs connaissances sont compartimentées. En somme, les auteurs proposent que le lien entre les deux représentations (équation et graphique) ne soit pas évident pour les élèves.

Les travaux de Schwarz et Yerushalmy (1992), Moschkovich (1992) et de Moschkovich *et al.* (1993) ont démontré que la représentation symbolique de la fonction rend la nature de son processus statique, tandis que la représentation graphique de la fonction contribue à la présenter plutôt comme une entité dynamique Une bonne compréhension de l'algèbre requiert de l'étudiant qu'il soit à l'aise avec les deux aspects de la fonction, car les deux représentations, équation et graphique, permettent à l'élève de développer des conjectures et des généralisations de la droite.

Donc, pour notre recherche, nous pouvons identifier le langage symbolique versus le langage graphique et vice versa comme facteur influençant le niveau de difficulté d'un problème en mathématiques.

C. Langage graphique versus langage symbolique

Janvier (1998), Stump (2001) et Lobato et Siebert (2002) mentionnent que les élèves ont de la difficulté à interpréter et à appliquer la notion de pente (ou taux de variation) dans les fonctions linéaires présentées graphiquement. Le principal obstacle est la notion de variation. Les élèves ne comprennent pas la pente sous les formes fonctionnelles (algébrique) et physiques (géométrique : mesure de la pente). Les recherches sur l'apprentissage des fonctions et de leur graphique comme indiqué par ces auteurs montrent les difficultés persistantes qui lient ces différents systèmes de notation.

D. Langage numérique (tableaux) versus langage graphique

Pour Moschkovich (1992), Yerushalmy et Chazan (2002) et le *Group for Psychology of Mathematics Éducation* (2004), les équations présentées sous forme d'exemples, avec des représentations variées et liées, supportent la pensée algébrique, c'est-à-dire la transposition d'un contexte situationnel à un contexte de mathématiques. Selon ces auteurs, la table de valeurs permet à l'élève de développer ses arguments et d'évaluer les conjectures. En ce qui concerne le graphique, c'est une façon productive de développer une vue élaborée des fonctions chez l'élève. Ces deux moyens, table de valeurs et graphique, visent à réduire la charge d'interaction cognitive avec certains aspects symboliques des mathématiques. Il en résulte que le niveau de difficulté des problèmes, où se retrouve les représentations tableaux versus graphiques ou graphiques versus tableaux, est plus facile que lorsque l'on retrouve l'équation versus le graphique et vice versa.

E. Langage numérique (tableaux) versus langage symbolique

En ce qui a trait au langage numérique versus symbolique, les auteurs n'ont rien mentionné de particulier. Nous pouvons donc supposer que le niveau de difficulté du langage numérique versus symbolique peut être le plus faible, car les difficultés de ces interactions n'ont pas été mentionnées. En résumé, les variables principales retenues sont: les habiletés cognitives, les types de réponses, les modes de représentation que nous pouvons appeler la représentation des données du problème et la représentation de la réponse. Ces variables seront reprises à la section 2.4.

2.2 Tâches d'évaluation

Dans cette deuxième section du cadre théorique, nous présentons des auteurs qui ont mené des recherches sur les tâches d'évaluation et qui ont appliqué des modèles pour prédire les niveaux de difficulté de ces tâches. Nous présenterons également le résumé de cinq études scientifiques de ces auteurs ayant développé certaines approches pour prédire le niveau de difficulté des items. Dans chaque résumé, nous traiterons de la méthodologie utilisée et discuterons des résultats obtenus. Par la suite, nous effectuerons une synthèse de leurs travaux dans le but de relever, pour notre propre recherche, les variables prédictives pour nos items d'évaluation.

2.2.1 Auteurs à travers l'histoire

Scheiblechner (1971 : présenté dans Fischer, 1995) est le premier qui s'est intéressé à énoncer les bases théoriques des tâches d'évaluation. Il a appliqué un modèle de régression multiple pour prédire la valeur du paramètre de difficulté de tâches de compréhension et de propositions logiques présentées graphiquement, en fonction de trois opérations cognitives: 1) la négation, 2) la disjonction et 3) l'asymétrie. La limite de cette étude était que la modélisation du paramètre de difficulté des tâches n'a pas été effectuée directement à l'intérieur de la modélisation retenue de la réponse à l'item. D'abord, la réalisation de l'application de la régression multiple a été faite une fois que les paramètres d'items ont été obtenus et non pas simultanément. Rappelons ici que les bases théoriques des tâches d'évaluation remontent à la fin des années cinquante (Cronbach, 1957). Cronbach a travaillé dans deux domaines de recherche en psychologie associés aux deux courants théoriques de la tâche d'évaluation, à savoir le courant théorique fort, basé sur des principes psychologiques pour construire des tâches, et le courant théorique faible, basé sur une banque de tâches existantes dans un domaine donné. Ses efforts visaient à construire un modèle.

Dans le présent mémoire, la théorie faible sera choisie, car nous utiliserons des tâches existantes dont les paramètres d'items sont connus. De ces tâches, certaines serviront à construire des modèles généraux d'items; ensuite, la conception de ces modèles sera validée. Les cinq études présentées dans la prochaine section utilisent la théorie faible. Cette théorie consiste à se baser sur une banque de tâches qui évalue le raisonnement quantitatif dont le niveau de difficulté est connu. Ces études ont porté sur les paramètres ou les variables qui influencent la difficulté de tâches de résolution de problèmes en mathématiques.

2.2.2 Cinq études

Afin de répondre plus spécifiquement à notre problème de recherche, nous nous appuierons sur cinq (5) études utilisant la théorie faible. Ces études tentent de répondre spécifiquement à notre problème de recherche. Il s'agit des études de Lane (1991), de Sheehan et Mislevy (1994), de Sebrechts, Enright, Bennett et Martin (1996), d'Enright et Sheehan (2002) et Schulz, Lee et Mullen (2005).

A. Première étude: Lane S. (1991a)

La recherche de Lane (1991a) a vérifié les hypothèses de séquences d'habiletés précises. Cette chercheuse a examiné les connaissances et les démarches demandées pour résoudre des problèmes d'algèbre avec énoncés en mathématiques. Douze ensembles comportant deux paires d'items ont été construits pour représenter la variation cognitive requise pour une performance acceptable. Par la suite, Lane a vérifié empiriquement les hypothèses des séquences d'habiletés en utilisant le modèle de la théorie de la réponse à l'item.

A.1) Méthodologie

Dans ses travaux, Lane a identifié quatre étapes de base pour résoudre des problèmes tels que: traduire, comprendre, planifier et exécuter. Chacun de ces problèmes dépendait d'une des habiletés cognitives suivantes: conceptualisation ou application.

A) À l'étape de la traduction, le problème, présenté en mots, avait besoin d'être transposé dans une représentation interne. Les recherches indiquaient que cette étape était la plus difficile, car les étudiants avaient tendance à avoir de la difficulté à formuler une représentation mentale des phrases qui exprimaient des relations entre les variables. B) À l'étape de la compréhension, la représentation interne avait besoin d'être organisée en une structure cohérente qui spécifiait une relation interne entre les variables dans le problème. Donc, la structure formelle du problème exigeait d'être reconnue par les étudiants. C) L'étape de la planification demandait des connaissances de stratégies. Les stratégies pouvaient englober la production de tables ou de diagrammes, la formation d'une équation ou encore la spécification de variables et de leurs valeurs correspondantes. D) Finalement, l'étape de l'exécution demandait des connaissances d'algorithmes. Un élève qui avait réussi les trois étapes précédentes pouvait produire une réponse incorrecte s'il n'avait pas l'habileté exigée pour appliquer des algorithmes arithmétiques et algébriques.

La conception des items a été basée sur des entrevues conduites auprès de professeurs possédant une expérience d'enseignement des types de problèmes avec énoncés d'algèbre. Douze paires de problèmes avec énoncés d'algèbre et systématiquement différents en complexité ont été développées. Les problèmes reflétaient également trois catégories: algèbre, intérêt et surface.

Les données ont été obtenues au terme d'un examen de 24 problèmes avec énoncés d'algèbre soumis à 597 élèves inscrits dans un cours d'algèbre pour débutants. Ces élèves provenaient de la banlieue de Pittsburgh. Leur langue maternelle était l'anglais et le nombre de filles et de garçons était à peu près égal. Deux ensembles de 12 problèmes avec énoncés ont été donnés sur deux jours différents. On a demandé aux élèves de résoudre chaque jour une douzaine de problèmes en leur allouant environ 40 minutes. Ces élèves avaient eu l'instruction de montrer toutes leurs démarches. Le classement de la difficulté et l'uniformité de la pente pour les items ont été vérifiés par une régression multiple linéaire hiérarchique appliquée aux paramètres de difficulté d'items obtenus selon la modélisation à deux paramètres de la théorie de la réponse à l'item.

Le premier ensemble de modèles de comparaison vérifiait l'égalité des paramètres de difficulté et de discrimination pour chacun des ensembles des deux items. Le deuxième ensemble de modèles de comparaison vérifiait l'uniformité de la pente dans les problèmes de distance-taux-temps (DRT). Le troisième ensemble de modèles de comparaison examinait dans quelle mesure la familiarité du contexte historique affectait la difficulté de l'item pour les deux types de problèmes complexes de distance-taux-temps. Quant au dernier ensemble de modèles de comparaison, qui constituait l'hypothèse de recherche, elle testait le classement de la difficulté et l'uniformité de la pente pour les items.

A.2) Résultats

Le tableau 1 présente l'estimation des paramètres d'items a_j et b_j où a_j dénote l'indice de discrimination et b_j l'indice de difficulté. Cette estimation est effectuée pour les quatre modèles de comparaison nommés: M1, M5, M7 et M13. Les items de distance-taux-temps (DRT) requièrent une multiplication de deux valeurs qui sont le taux et le temps (distance = taux x temps). Ces items sont classés par type: DRTA (distance-taux-temps de type A), DRTB, et DRTS. Chaque type est divisé en deux échantillons: a et b.

Les items du type (DRTA) sont présentés sous la forme: distance de x égale à distance de y; par exemple: 72x = 54 (x +1). Ce DRTA est formé de deux classes A1 et A2 où la classe A1 est plus facile que la classe A2.

Les items du type (DRTB) sont présentés sous la forme: distance totale égale à la somme de la distance de x et de la distance de y; par exemple: 90 = 14x + 11x. Ce type DRTB est formé de trois classes: B1, B2 et B3; où la classe B1 est plus facile que la classe B2, la classe B2 est plus facile que la classe B3.

Les items du type DRTS sont classés comme étant les plus faciles. Les six items de distance-taux-temps avec énoncés d'algèbre étaient classés par ordre croissant de difficulté comme suit: DRTS, DRTA1, DRTA2, DRTB1, DRTB2 et DRB3.

La chercheuse avait obtenu pour l'échantillon a aux items du type (DRTSa) un indice de difficulté de -1,71 (b_j= -1,71) et pour l'échantillon b aux items du type (DRTSb) un indice de difficulté de -2,62 (b_j= -2,62). Ces items étaient plus facile pour les élèves que l'échantillon a.

Parmi les six items analysés, les quatre items suivant: DRTA1, DRTB1, DRTB2 ET DRTB3 avaient la même valeur de discrimination (a_j = 1,54) et la même valeur de difficulté (b_j = 1,03). D'après la classification de la chercheuse, les items du type A1 sont plus faciles que les items du type A2. Toutefois, la chercheuse avait obtenu une valeur de discrimination, pour les items du type DRTA2 des échantillons a et b, 1,86 (a_j = 1,86) et comme valeur de difficulté 1,63 (b_j = 1,63). Dans ce cas, les items du type DRTA2 étaient plus faciles que les items du type DRTA1, car les problèmes du type DRTA2 avaient un élément supplémentaire requis pour que l'élève puisse manipuler la valeur de l'inconnu et répondre à la question posée aux items.

Tableau 1. Modèles hiérarchiques sélectionnés
et estimations des paramètres a_j et b_j

Items Distance-taux-temps	**M1**		**M5**		**M7**		**M13**	
	a_j	b_j	a_j	b_j	a_j	b_j	a_j	b_j
DRTS a	0,82	-1,82	0,89	-1,70	0,89	-1,71	0,89	-1,71
DRTS b	0,99	-2,42	0,89	-2,61	0,89	-2,62	0,89	-2,62
DRTA1 a	1,38	1,89	1,44	1,66	1,53	1,62	1,54	1,63
DRTA1 b	1,51	1,47	1,44	1,66	1,53	1,62	1,54	1,63
DRTA2 a	1,82	1,04	1,96	0,97	1,94	0,98	1,86	1,03
DRTA2 b	2,11	0,94	1,96	0,97	1,94	0,98	1,86	1,03
DRTB1 a	1,18	1,08	1,34	1,06	1,53	1,00	1,54	1,03
DRTB1 b	1,09	1,05	1,34	1,06	1,53	1,00	1,54	1,03
DRTB2 a	1,41	1,69	1,50	1,66	1,53	1,65	1,54	1,63
DRTB2 b	1,57	1,64	1,50	1,66	1,53	1,65	1,54	1,63
DRTB3 a	1,73	1,07	1,76	1,04	1,53	1,12	1,54	1,03
DRTB3 b	1,80	1,02	1,76	1,04	1,53	1,12	1,54	1,03

Source: Adapté de Lane (1991)
a: échantillon a
b: échantillon b
aj: indice de la discrimination
bj: indice de la difficulté
M1 est le modèle à deux paramètres non-restreint.
M5 restreint les a_j à être égaux pour chaque paire d'items ~~et les b_j à être égaux pour tous les items sauf pour les deux~~ paires d'items DRT simples.
M7 reflète les mêmes restrictions que les M5 plus elle restreint les a_j à être égaux aux paires items DRTA1, DRTB1, DRTB2 et DRTB3.
M13 reflète les mêmes restrictions que M7 plus elle restreint les b_j à être égaux pour les paires items DRTB1, DRTB3, DRTA1 et DRTB2.

Les hypothèses de Lane n'ont pas été confirmées. Néanmoins, l'étude a démontré l'utilité de la théorie de la réponse à l'item. Dans sa recherche, Lane a étudié le degré de difficulté et la constance du paramètre de discrimination d'un item où les processus cognitifs variaient. Par ailleurs, dans cette étude le niveau de difficulté n'a pas été influencé par la manipulation requise de la valeur de l'inconnu pour répondre au problème posé.

B. Seconde étude: Sheehan et Mislevy (1994)

L'étude de Sheehan et Mislevy visait à déterminer le degré avec lequel les paramètres d'items d'un test de base en mathématique pouvaient être prédits. Cette prédiction est effectuée à partir d'une analyse des attributs des items.

B.1) Méthodologie

Dans le cadre de ces travaux, des attributs d'items ont été définis. Le paramètre de difficulté, le paramètre de discrimination et le paramètre de pseudo-chance ont été utilisés en appliquant la modélisation logistique issue de la théorie de la réponse à l'item. Trois types d'attributs d'items ont été considérés: 1) les traits de surface des items où l'on vérifiait si le contenu de l'item incluait ou non une équation; 2) l'aspect du processus de la solution où l'on vérifiait si la solution requérait ou non l'application d'une formule standard et 3) le format de la réponse, c'est-à-dire si la réponse était de type élaboré ou de type choix multiples.

Les analyses de cette étude ont été faites à partir d'une combinaison de l'analyse de régression multiple et de l'analyse de l'arbre de régression binaire (Breiman, Friedman, Olshen & Stone, 1984). L'arbre de régression binaire a été utilisé pour identifier les plus importants effets d'interaction afin de choisir les sous-ensembles de variables et les analyser par la suite avec la méthode de la régression multiple.

Les 510 items de mathématiques ont été classés dans des sous-ensembles et chaque examinateur devait vérifier 51 items. Ces items ont été administrés à 900 sujets, mais seulement 114 items sur 510 ont été sélectionnés pour être analysés.

Les attributs des items ont été déterminés en demandant à des membres de l'ETS (Educational Testing Service) de faire une liste des traits de surface des items et des aspects du processus de la solution prévue qui contribuaient à la difficulté de chaque item. On a demandé à deux membres de l'équipe d'évaluer chacun des items selon les caractéristiques et les processus des solutions puis de les graduer sur une échelle de niveau de difficulté de 1 à 5. Par conséquent, les items ont été classés comme appartenant à un des cinq attributs: a) les opérations et les nombres, b) les relations mathématiques, c) les interprétations des données, d) la géométrie et les mesures et, finalement, e) le raisonnement.

B.2) Résultats

Une analyse de régression multiple a été menée pour évaluer la capacité de prédire le paramètre de difficulté. Trente variables ont été considérées dans l'analyse des trente variables, huit étaient significatives à un niveau de signification de 0,15. Comme on peut le voir au tableau 2, en utilisant les huit variables, Sheehan et Mislevy (1994), ont obtenu au modèle 2 un coefficient de détermination ajusté de 0,21 en utilisant uniquement le taux de difficulté moyen des items.

Tableau 2. Sommaire des résultats des items de difficulté: Coefficients de régression estimés et valeurs de R^2

Paramètres	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3	Modèle 4
Ordonnée à l'origine	-0,16	-2,15	-2,50	-1,90
Taux de difficulté		0,48	0,54	0,50
Comparaison quantitative	0,40		0,71	0,56
Application d'algorithme standard	0,55			0,44
Histogramme	0,97			-0,84
Ordre et combinaison	1,19			
Traduction de mots à symboles				0,405
BDE*(application non standard)	0,48			
BDE*(application de raisonnement multiple)	0,53			
AC (ordre et combinaison)	-1,67			-0,60
AC*(reconnaissance seulement ou rappel)	-0,69			
Degré de liberté	(8,11)	(1,11)	(2,11)	(6,10)
R^2	0,33	0,22	0,30	0,39
R^2 ajusté	0,28	0,21	0,29	0,36

Source: Adapté de Sheehan et Mislevy (1994)
Tous les coefficients de régression étaient significatifs à un niveau de signification de 0,15.
Le R^2 ajusté a été corrigé pour le nombre de variables dans le modèle.

AC: domaine de contenu = nombres et opérations et interprétation des données.
BDE: domaine de contenu = relations en mathématiques, géométrie, mesures et raisonnement.

Au modèle 1, ils ont obtenu un coefficient de détermination ajusté de 0,28. Quand ils ont inclus les items impliquant la comparaison quantitative, le coefficient de détermination ajusté a augmenté à 0,29 au modèle 3. Au modèle 4, ils ont ajouté quatre autres variables afin d'améliorer leurs résultats. Ces variables relevaient des paramètres suivants: application d'algorithme standard, histogramme, traduction de mots à symboles et nombre et interprétation des données du type ordre et combinaison. En ajoutant ces paramètres, le coefficient de détermination ajusté du modèle a augmenté à 0,36. Ce quatrième modèle était le meilleur.

Puisque le nombre d'items disponibles était limité, les modèles développés ne permettaient donc pas une validation croisée. Dans ce contexte, d'autres recherches devaient être menées dans le but de valider la structure du modèle et étudier la stabilité des paramètres estimés.

C. Troisième étude: Sebrechts, Enright, Bennett et Martin (1996)

Cette étude tentait d'évaluer la performance d'un indicateur permettant de mesurer quantitativement l'habileté de raisonnement. Les chercheurs ont examiné les relations entre les attributs, les erreurs et les difficultés des problèmes. Ces relations ont été étudiées en tenant compte de quatre activités cognitives: 1) traduire, 2) intégrer, 3) évaluer pour planifier et 4) exécuter.

Les auteurs ont utilisé un ensemble de problèmes avec énoncés d'algèbre d'une des grandes épreuves d'évaluation standardisée mieux connue sous le nom de *Graduate Record Examination*, (GRE). Les attributs des items ont été identifiés. Des analyses détaillées ont été réalisées sur les solutions données par les élèves afin d'identifier les stratégies et les erreurs. Ces analyses ont été placées dans un contexte où les attributs des items pouvaient influencer le processus cognitif.

C.1) Méthodologie

Tous les problèmes avec énoncés (excluant les problèmes de comparaison quantitative) ont été identifiés sur les versions dévoilées du GRE. Ces sections représentaient des tests administrés entre 1985 et 1989.

L'échantillon de ces problèmes était composé de 75 items qui ont été classés en catégories d'équations de probabilité, d'intérêts, de travaux et de distance: la distance étant égale au produit du taux et du temps. Vingt problèmes ont été administrés dans un format à choix multiples. Le niveau de difficulté des problèmes a été calculé en utilisant le delta égalisé (Equated delta). En transformant le pourcentage de réponses correctes, ils ont obtenu une moyenne de 13 et un écart type de 4. Les deltas égalisés qui avaient une plus grande valeur étaient les plus difficiles. Une moyenne de 13,48 indiquait que l'ensemble des problèmes avait un degré de difficulté moyen pour les élèves qui ont passé le GRE.

51 étudiants (33 femmes et 18 hommes) de l'Université catholique d'Amérique ont été recrutés pour suivre le cours préalable à l'introduction à la psychologie. Les étudiants provenaient de différentes disciplines. Quatre étudiants étaient issus du département d'infirmerie, dix du département d'ingénierie et d'architecture et trente-sept provenaient du département des arts et des sciences. Du dernier groupe, dix-sept étudiants étaient en sciences humaines, trois étudiants en mathématiques et en sciences, deux étudiants en sciences sociales et trois en administration.

Les problèmes ont été présentés sous forme de réponses ouvertes. Douze équations algébriques qui requéraient des habiletés symboliques et numériques ont été administrées aux étudiants. Finalement, après avoir complété les équations, les étudiants ont reçu huit problèmes additionnels. La session avait une durée d'une à deux heures selon les individus. Aucun matériel pour calculer n'a été permis durant la session.

Les caractéristiques des problèmes avec énoncés d'algèbre utilisés dans cette étude étaient basées sur les énonciations du problème. Les caractéristiques que nous avons retenues, parce qu'elles étaient utiles pour notre recherche sont: a) la caractéristique linguistique, b) la complexité, c) les valeurs implicites et d) les variables dans l'équation. Nous définissons la caractéristique linguistique comme étant le nombre de mots qui expriment une relation quantitative entre deux nombres ou deux variables (x est deux fois plus grand que y). De même, nous définissons la complexité comme étant le nombre d'éléments ou d'opérations qui se retrouvent dans une représentation ou dans une structure. Finalement, nous définissons les valeurs implicites comme étant les valeurs nécessaires pour représenter le problème sous forme d'équation qui n'apparaissaient pas dans l'énonciation du problème.

C.2) Résultats

Des 1020 solutions (51 participants x 20 problèmes), 25 réponses manquaient. Dix-neuf participants avaient omis intentionnellement de répondre. Ces omissions ont été traitées comme des erreurs. La moyenne de la performance des participants était de 42 % avec un écart type de 3,5. Pour déterminer la qualité de l'ajustement du modèle de régression multiple, le coefficient de détermination R^2 obtenu était de 0,39 pour les réponses élaborées au tableau 3 et de 0,47 pour les 20 items du type réponses à choix multiple. Le tableau 3 présente le détail du modèle de régression qui permet de prédire le niveau de difficulté des 20 items à réponses élaborées.

Tableau 3. Estimation des paramètres de régressions et les valeurs de R.

Coefficients de régression linéaire	
Effet	Modèle à deux paramètres
Ordonnée à l'origine	56,16
Plus qu'une variable	-0,48**
Degré d'emboîtement	-0,32*
Degré de liberté	2,17
R (coefficient de détermination)	0,39
R^2 ajusté	0,32

Source: Adapté de Sebrechts, Enright, Bennett & Martin (1996))
***p< 0,10 **p< 0,05**

Les caractéristiques des problèmes avec énoncés, comme la nécessité d'appliquer des concepts algébriques, la complexité et le contenu était des déterminants importants pour prédire le niveau de difficulté du petit nombre d'items utilisés. Par ailleurs, la caractéristique complexité des problèmes était fortement associée au niveau de difficulté, tandis que la caractéristique linguistique ne l'était pas.

Ces résultats indiquent particulièrement une bonne prédiction du niveau de difficulté pour les problèmes à réponses élaborées. D'après cette étude, on constate que les caractéristiques des problèmes avec énoncés n'étaient pas assez claires pour que ces résultats puissent être généralisés à d'autres types de problèmes.

D. Quatrième étude: Enright et Sheehan (2002)

Enright, Sheehan (2002) se sont basés sur les mécanismes comme les informations, les processus, les stratégies et les connaissances emmagasinées (Knowledge stores) qu'Embretson (1983) avait identifiés pour répondre à des items, pour analyser le niveau de difficulté des problèmes de résolution.

D.1) Méthodologie

Vingt problèmes de mesure quantitative tirés du GRE (graduate record examination) et des recherches de Sebrechts, Enright, Bennett et Martin (1996) ont été choisis. Les solutions de ces problèmes ont été obtenues à partir d'un échantillon de 50 collégiens. Ces collégiens représentaient le nombre de sujets pour cette étude. Pour comprendre la performance de ces derniers, les auteurs ont étudié et vérifié la complexité mathématique, le contexte et la situation algébrique. Cette complexité se reflétait dans les caractéristiques de la structure du problème et dans les représentations telles que le nombre d'opérations, le nombre de contraintes et le nombre de niveaux de parenthèses. Le contexte incluait les particularités du contenu comme le temps, l'argent ou la distance. Finalement, la situation algébrique référait à ce que le problème demandait comme manipulation de variables. Pour évaluer l'utilisation des informations existantes, l'équipe a classé les items pour prédire leur niveau de difficulté puis, a développé un test informatisé adaptatif (computer adaptive test) qui incluait 339 items. Trois niveaux d'habiletés cognitives ont été définis: l'habileté d'application, l'habileté conceptuelle et l'habileté de résolution. Nous avons retenu ces habiletés parce qu'elles étaient utiles pour notre recherche

D.2) Résultats

Les étapes utilisées pour résoudre (calculer, raisonner, estimer et remplacer les valeurs) les vingt problèmes de mesures quantitatives ont été codées. Les problèmes ont été divisés en deux catégories: 1) les problèmes avec énoncés et 2) les problèmes sans énoncé. Les problèmes sans énoncé et numériques, par exemple: $2 + 2^2 + 2^3 = ?$ étaient plus faciles que les problèmes avec énoncés. Les problèmes sans énoncés algébriques (par exemple: $2x + 5x = ?$) et les problèmes avec énoncés réels (par exemple: le pourcentage diminué d'un prix a été réduit de $80 à $60) affichaient des niveaux de difficulté moyens. Par ailleurs, les problèmes avec énoncés et réels étaient les plus difficiles. À titre d'exemple: Quelle est la valeur de p si p est un nombre pair plus grand que 11 et p est la somme de deux nombres premiers x et y. Enfin, les problèmes qui exigeaient trois ou quatre étapes de résolution étaient très difficiles.

L'analyse de résultats a permis aux chercheurs d'affirmer que les problèmes d'application qui font appel à l'utilisation d'algorithmes standards étaient les plus faciles (65 % comme niveau de difficulté). De plus, les problèmes qui se trouvaient dans un contexte appliqué se sont avérés plus difficiles à résoudre par les élèves que ceux qui étaient dans un contexte réel (46 % comme niveau de difficulté). Finalement, les items d'algèbre étaient les plus difficiles (33 % comme niveau de difficulté).

Le tableau 4 présente les coefficients de régression linéaire, du modèle de prédiction du niveau de difficulté des items. D'après les résultats ce qui nous intéresse c'est l'algèbre, les auteurs ont obtenu un coefficient de régression pour l'algèbre de 0,33, tandis que le coefficient de détermination ajusté (R^2) était de 0,32. Il en résulte donc que ce modèle expliquait 32 % de la variabilité du niveau de difficulté.

Tableau 4. Coefficients de régression linéaire.

Effet	**échantillon CP5 (n=339)**
Ordonnée à l'origine	0,36**
démarche	-0,81***
Degré élevé	0,60***
Application de démarche	-0,52*
Algèbre	0,33*
R^2	0,36
Validation croisée R^2	0,32

Source: Adapté d'Enright, Sheehan (2002)
***p< 0,001, **p<0,01, *p< 0,05

La plupart de leurs travaux sur la prédiction des paramètres d'items ont été réalisés à partir de tâches d'évaluation dans un contexte expérimental très contrôlé. Par conséquent, ces travaux sont moins applicables aux divers contextes éducatifs.

E. Cinquième étude: Schulz, Lee et Mullen (2005)

Au début des années 2000, une méthode soutenant la description de la croissance de la performance en mathématiques a été élaborée par Schulz, Lee et Mullen (2005). Des contenus mathématiques, avec des niveaux de difficulté prédits, ont été définis à l'intérieur du *National Assessment of Educational Progress* (NAEP). Les chercheurs ont utilisé le niveau de la 8e année en mathématiques pour vérifier si la performance était associée à une maîtrise de plusieurs habiletés.

E.1) Méthodologie

Les chercheurs ont décrit la croissance de la performance. À l'intérieur de la structure en mathématiques du NAEP, nous retrouvions les cinq sujets suivants: les nombres, les mesures, la géométrie, la statistique et l'algèbre qui requéraient trois habiletés cognitives (conceptualisation, application et résolution) de même que les habiletés à pouvoir appliquer, lier, raisonner et communiquer. Le niveau de difficulté des items était déjà connu. Ces items ont été classés en fonction de leur contenu et non en fonction de leur niveau de difficulté.

Les items en mathématiques du NAEP provenaient de deux sources. Les items sécurisés, au nombre de 159, ont été utilisés à l'évaluation de l'an 2000 et les chercheurs les ont obtenus par une autorisation des développeurs du NAEP. Quant aux 136 items non sécurisés, 38 furent utilisés en 1990, 69 en 1992 et 29 en 1996; ces items sont disponibles au site internet du NAEP. Toutefois, leur étude n'a retenu que les items sécurisés.

Trois experts des programmes du NAEP et une équipe pluridisciplinaire ont établi les contenus des matières. Chacun a identifié et développé un contenu spécifique de sa matière respective. La modélisation logistique issue de la théorie des réponses à l'item a été appliquée. Le modèle à trois paramètres a été utilisé pour les items à choix multiples, tandis que le modèle à deux paramètres a été utilisé pour les items à réponse courte. De plus, la corrélation, entre le taux de réussite au début de la formation et le taux de réussite à la fin de la formation, variait de 0,86 à 0,93 pour les nombres, la statistique et l'algèbre

E.2) Résultats

Les items qui relevaient de la résolution de problèmes semblaient plus difficiles et complexes que ceux relevant des habiletés d'application et de conceptualisation. Les problèmes qui exigent une habileté de communication se sont révélés plus difficiles que ceux qui requérant un raisonnement.

Le tableau 5 présente un sommaire des statistiques des caractéristiques des items. Les huit items A-1 affichait un taux de réussite enregistré au début de la formation de 66 %; alors que ce taux de réussite atteint 93 % à la fin de la formation. Les items des opérations de base de l'algèbre (A-1) avaient une moyenne de difficulté de -0,85 utilisant la théorie de la réponse à l'item; par conséquent, ils étaient plus faciles que les autres contenus de l'algèbre.

Tableau 5. Caractéristiques des items

Contenu d'enseignement en algèbre	Nombre d'items	Moyenne du niveau de difficulté des items (b)	Taux de réussite au début de la formation	Taux de réussite à la fin de la formation
A-1	8	-0,85	66%	93%
A-2	8	0,49	35%	79%
A-3	10	1,11	22%	62%
A-4	4			
A-5	6			
A-6	2			
Total	148			

Source: Adapté Schulz, Lee et Mullen (2005)
A-1: opération de base
A-2: logique, modèles simples, raisonnement algébrique
A-3: système de coordonnées
A-4: utilisation de variables dans des expressions,
A-5: résolutions de problèmes avec équations et inéquations
A6: modèles complexes

L'hypothèse des chercheurs a été partiellement confirmée, car ils ont constaté que très peu d'items correspondaient au niveau de difficulté prévu. Par ailleurs, ils ont démontré que l'accroissement du taux de réussite signifiait l'augmentation de ce taux du début jusqu'à la fin de la formation. La maîtrise d'un contenu, dans une séquence, égalait le niveau de difficulté prévu.

2.3 Synthèse des cinq études présentées

Nous avons élaboré une synthèse des cinq études dans le but de mettre en lumière les principaux éléments afin de les appliquer dans notre recherche. Les problèmes d'algèbre, surtout les problèmes avec énoncé, ont été utilisés par les cinq études scientifiques mentionnées ci-dessus. Pour notre étude, nous ajoutons les problèmes sans énoncé. Les habiletés cognitives de conceptualisation, d'application et de résolution ont été identifiées comme paramètres pour déterminer la difficulté des problèmes d'algèbre par les auteurs Enright et Sheehan (2002) et Schulz, Lee et Mullen (2005). Nous allons appliquer cette façon de faire.

Nous procéderons dans la section 2.3.1 à l'analyse et à la classification des variables prédictives pour les appliquer à notre méthodologie.

2.3.1 Analyse et classification des variables prédictives

Nous avons identifié cinq variables prédictives dans le but de prédire le niveau de difficulté des tâches d'évaluation. Ces variables sont: 1) les habiletés cognitives; 2) les types de réponses; 3) la représentation des données du problème et la représentation de la réponse; 4) l'interaction des représentations données-réponse. Finalement, les caractéristiques des paramètres de l'équation et les caractéristiques des données du problème représentent la cinquième variable.

Premièrement, les habiletés cognitives ont été identifiées comme variables prédictives par Sebrecht, Enright, Bennett et Martin (1996), Sheehan et Enright (2002), Schulz, Lee et Mullen (2005). En général, les items qui relèvent de l'habileté conceptuelle font référence à des idées et à des concepts spécifiques en mathématiques. La plupart du temps, le sujet ne doit pas seulement décider quoi faire, mais aussi comment faire. Les items d'évaluation qui relèvent de l'habileté d'application font appel à des faits mathématiques de base, à des applications d'algorithme standard et à des solutions de problèmes de routine. Les questions de cette catégorie sont habituellement directes. C'est pourquoi le répondant n'a pas de choix entre plusieurs stratégies de réponse. Par contre, les items qui relèvent de l'habileté de résolution font appel pour leur part, à l'utilisation de l'analyse et du raisonnement. Dans cette perspective, Sebrecht, Enright, Bennett et Martin (1996), Enright et Sheehan (2002), Schulz, Lee et Mullen (2005), ont classé ces items comme suit : les items de résolution sont les items les plus difficiles et les items d'application, qui sont dans un contexte pur, sont les plus faciles. D'après Stump (2001), les items qui exigent une habileté conceptuelle ont généralement un niveau de difficulté moins élevé que les items qui exigent une habileté d'application, puisque les relations entre les représentations demandent uniquement de faire des liens plutôt que de reconnaître un concept pour l'appliquer.

Nous retenons des auteurs mentionnés ci-dessus la classification suivante: l'habileté cognitive de conceptualisation est facile, l'habileté cognitive d'application est moyenne et l'habileté cognitive de résolution est difficile. Cette classification est présentée au tableau 6. Voici un exemple qui relève des habiletés cognitives:

Exemple no 5.

Denis loue une voiture pour la journée. La compagnie de location demande un prix de base de 37,50 $ par jour ainsi que 0,08 $ par kilomètre parcouru.

Le coût total de la location est représenté par y et le nombre de kilomètres parcourus par x.

Quelle équation traduit cette situation?

A) $y = 37{,}50x + 0{,}08$ C) $x = 37{,}50y + 0{,}08$

B) $y = 0{,}08x + 37{,}50$ D) $x = 0{,}08y + 37{,}50$

Cette question est extraite du BIM et son taux de réussite est de 91 %. Cette tâche relève de l'habileté cognitive conceptuelle et l'on peut constater que son niveau de difficulté est très faible.

Deuxièmement, les types de réponse sont des variables prédictives identifiées par DeMars (1998), c'est-à-dire le choix de réponse, la réponse courte et la réponse élaborée. DeMars

(1998) indique que les items qui offrent des réponses à choix multiples sont plus faciles que les items qui offrent des réponses élaborées. De manière générale, les items à réponses élaborées s'avèrent plus appropriés pour évaluer un haut niveau d'habileté cognitive. En nous basant sur les classifications DeMars (1998), nous pouvons classifier le niveau de difficulté des types de réponse comme suit: réponse à choix multiples, facile; réponse courte, moyenne et réponse élaborée, difficile. Ces classifications sont présentées au tableau 6.

La question précédente présente un *type de réponse* à choix multiples. Comme le taux de réussite est élevé, cela souligne que les items qui offrent des réponses à choix multiples sont plus faciles que les items qui exigent des réponses élaborées.

Tableau 6. Niveau de difficulté de l'habileté cognitive et du type de réponse

Habileté cognitive			**Type de réponse**		
Conceptualisation	Application	Résolution	Choix de réponse	Courte	Élaborée
Facile	Moyen	Difficile	Facile	Moyen	Difficile

Troisièmement, les modes de représentation sous forme de tableau et sous forme de graphique sont considérés comme faciles par Moschkovich (1992) et Yerushalmy et Chazan (2002). Ils sont plus faciles que le mode de représentation par équation, car ils réduisent la charge cognitive dans la résolution d'un problème. Par conséquent, nous avons classé la représentation sous forme de tableau et sous forme de graphique, selon un niveau de difficulté facile.

En ce qui a trait aux modes de représentation sous forme naturelle et sous forme équation, ils sont considérés difficiles par De Serres et Groleau (1997), Nadot (1993), ainsi que Dreyfus et Mazouz (1993). Ces deux modes sont plus difficiles que les modes de représentation par tableau et graphique, car les élèves ont de la difficulté à résoudre les équations. Ils ont également de la difficulté à traduire le code algébrique du texte. Par conséquent, nous avons classé la représentation sous forme équation et sous forme naturelle, selon un niveau de difficulté moyen.

Pour le mode de représentation nombre, c'est-à-dire quand les problèmes ou la réponse sont présentés dans un contexte purement mathématique, Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist et Reys (1980) ont indiqué que les élèves réussissent mieux les problèmes présentés dans un contexte purement mathématique que les problèmes avec énoncé. Donc, nous pouvons retenir de ce qui précède que le mode de représentation sous la forme nombre est plus facile que sous la forme d'un langage naturel. Par conséquent, nous avons classé la représentation sous la forme nombre selon un niveau de difficulté facile. Toutes les classifications de ces modes de représentation (tableau, graphique, équation, naturel et nombre) sont présentées au tableau 7.

Quatrièmement, les différentes formes d'interaction de la représentation données-réponse ont été classifiées comme suit: en ce qui a trait à l'interaction tableau-graphique et l'interaction graphique-tableau, celles-ci ont été classifiées par Moschkovich (1992), et Yerushalmy et Chazan (2002) à un niveau de difficulté facile. Puis, pour l'interaction naturel-équation et l'interaction équation-naturel, elles ont été classifiées comme moyennement difficiles par Vergnaud, Cortes et Favre-Artique (1988), de Serres et Groleau (1997), Rojano (2002) et Bélanger, Piché, Staub et Riopel (2003). Donc, nous pouvons les classer comme ayant un niveau de difficulté moyen. Quant à l'interaction naturel-graphique, elle a été classée par Schwarz et Yerushalmy (1992), Moschkovich (1992) et Moschkovich *et al.* (1993) à un niveau de difficulté facile.

En ce qui concerne l'interaction équation-graphique et l'interaction graphique-équation, elles ont été classées comme étant moyennement difficiles par Bélanger, Piché, Staub, et Riopel (2003) et Bloch (2003). Finalement, l'interaction équation-nombre et l'interaction tableau-équation et vice versa, ont été classées faciles d'après les livres de mathématiques au niveau secondaire, par Breton et Smith (1987) et par Guay et Lemay (1997). Nous présentons les classifications des interactions au tableau 7.

Tableau 7. Niveau de difficulté de l'interaction de la représentation données-réponse

Présence de la représentation des données et sa difficulté				**Présence de la représentation de la réponse et sa difficulté**				**Difficulté de l'interaction de la représentation données-réponse**
Tab	Gr	Nat	Eq	Tab	Gr	Nat	Eq	
(1) facile					(1) facile			(1) facile
(5) facile							(5) moyen	(5) facile
	(1) facile			(1) facile				(1) facile
	(4) facile						(4) moyen	(4) moyen
		(2) moyen					(2) moyen	(2) moyen
		(3) moyen			(3) facile			(3) facile
			(2) moyen			(2) moyen		(2) moyen
			(4) moyen		(4) facile			(4) moyen
			(5) moyen			(5) moyen		(5) facile
			(5) moyen	(5) facile				(5) facile

NB: Tab: tableau, Nat: naturel, Eq: équation, Gr: graphique

(1) Moschkovich (1992), Yerushalmy et Chazan (2002)

(2) Vergnaud, Cortes et Favre-Artique (1988), de Serres et Groleau (1997), Rojano (2002), Bélanger, Piché, Staub et Riopel (2003)

(3) Schwarz et Yerushalmy (1992), Moschkovich (1992) et Moschkovich *et al.* (1993).

(4) Bélanger, Piché, Staub et Riopel (2003) et Bloch (2003).

(5) Breton et Smith (1987) et Guay et Lemay (1997).

Pour le reste des interactions des représentations données-réponse, nous nous sommes basés sur la classification de chacune des représentations pour les assigner. Par exemple, si le niveau de difficulté de la représentation des données est facile et le niveau de difficulté de la représentation de la réponse est moyen, il en résultera alors que l'interaction de la représentation données-réponse aura un niveau de difficulté moyen. Si les deux représentations ont chacune un niveau de difficulté moyen, alors leur interaction aura un niveau de difficulté difficile. Puis, si les deux représentations sont différentes et ont chacune un niveau de difficulté facile, alors leur interaction aura un niveau de difficulté facile. Mais si les deux représentations sont semblables (exemple: tableau-tableau), la difficulté sera plus grande que lorsque les deux représentations sont différentes. Dans un tel cas, le niveau de difficulté augmentera d'un cran, par exemple: facile-facile →moyen, moyen-moyen →difficile. En résumé, le tableau 8 présente ce qui a été défini ci-dessus selon les classifications du tableau 7.

Tableau 8. Niveau de difficulté de la combinaison représentation des données et de la représentation de la réponse

Présence de la représentation des Données et sa difficulté					**Présence de la représentation de la réponse et sa difficulté**					**Niveau de difficulté de l'interaction de la représentation données-réponse**
Tab	Gr	Nom	Nat	Eq	Tab	Gr	Nom	Nat	Eq	
(1) f						(1) f				(1) facile
(6) f					(6) f					(6) moyen
(6) f							(6) f			(6) facile
(6) f								(6) m		(6) moyen
(5) f									(5) m	(5) facile
	(1) f				(1) f					(1) facile
	(4) f								(4) m	(4) moyen
	(6) f						(6) f			(6) facile
	(6) f							(6) m		(6) moyen
	(6) f					(6) f				(6) moyen
		(6) f			(6) f					(6) facile
		(6) f				(6) f				(6) facile
		(6) f					(6) f			(6) moyen
		(6) f						(6) m		(6) moyen
		(6) f							(6) m	(6) moyen
			(2) m						(2) m	(2) moyen
			(3) m			(3) f				(3) facile
			(6) m		(6) f					(6) moyen
			(6) m				(6) f			(6) moyen
			(6) m					(6) m		(6) difficile
				(2) m				(2) m		(2) moyen
				(4) m		(4) f				(4) moyen
				(5) m	(5) f					(5) facile
				(5) m			(5) f			(5) facile
				(6) m					(6) m	(6) difficile

NB: Tab.: tableau, Nat. : naturel, Nom.: nombre, Eq.: équation, Gr.: graphique f: facile, m: moyen, d: difficile

(1) Moschkovich (1992), Yerushalmy et Chazan (2002)

(2) Vergnaud, Cortes et Favre-Artique (1988), de Serres et Groleau (1997), Rojano (2002), Bélanger, Piché, Staub et Riopel (2003

(3) Schwarz et Yerushalmy (1992), Moschkovich (1992), Moschkovich *et al.* (1993).
(4) Bélanger, Piché, Staub et Riopel (2003), Bloch (2003). (5) Breton et Smith (1987) et Guay et Lemay (1997)
(6) Basés sur la classification de chacune des représentations par les auteurs (1) à (5).

Finalement, nous avons identifié les variables spécifiques des équations du premier degré que sont les caractéristiques des paramètres de l'équation ($y = mx + b$). Nous retrouvons dans cette équation l'ordonnée à l'origine (b), la pente (m) et leurs signes soit zéro, positif ou négatif.

Nous avons également identifié les caractéristiques des données du problème, c'est-à-dire la présence d'une des possibilités, à savoir: a) l'ordonnée à l'origine avec la pente, b) une coordonnée avec la pente, c) deux ou plusieurs coordonnées avec la pente, d) l'ordonnée à l'origine avec une coordonnée, e) l'ordonnée à l'origine avec deux ou plusieurs coordonnées, f) deux ou plusieurs coordonnées. D'après les livres de mathématiques au niveau secondaire, par exemple celui de Breton et Smith (1987) et Guay et Lemay (1997), on peut calculer la pente (ou le taux de variation) à l'aide de deux coordonnées ou encore calculer l'ordonnée à l'origine en remplaçant dans l'équation $y = mx + b$ une des coordonnées pour trouver le b s'il n'est pas présent dans le problème.

Le cas le plus facile est lorsque nous avons la pente et l'ordonnée à l'origine. Le cas le plus difficile selon les mêmes auteurs, est lorsque nous avons le cas de deux ou plusieurs coordonnées, car pour trouver l'équation, il faut calculer la pente à l'aide de deux coordonnées puis il faut prendre une des coordonnées et la remplacer dans l'équation pour trouver l'ordonnée à l'origine. En somme, nous avons classé les autres caractéristiques des données du problème comme moyennes. On trouvera ces classifications au tableau 9.

Tableau 9. Identification et niveau de difficulté des caractéristiques des données

Niveau de difficulté (identification)	Pente	Ordonnée à l'origine	Une coordonnée	Deux ou plusieurs coordonnées
(1) facile	P	P		
(1) moyen	P		P	
(1) moyen	P			P
(1) difficile				P
(1) facile		P		P
(1) facile		P	P	

(1): D'après Breton et Smith (1987) et Guay et Lemay (1997).

P: présence

2.4 Hypothèse

Le taux de réussite des équations du premier degré est expliqué par les variables prédictives suivantes: habiletés cognitives, types de réponse, représentation des données du problème, représentation de la réponse, difficulté de l'interaction des représentations données-réponse, caractéristiques des paramètres de l'équation, caractéristiques des données du problème, difficulté des données, nombre d'équations et niveau des élèves.

CHAPITRE III

Méthodologie

Pour vérifier notre hypothèse de recherche, nous allons tenter de développer un modèle qui génère des items pour aider les enseignants à construire leurs instruments d'évaluation. D'abord, nous allons identifier les variables permettant d'appliquer un modèle de régression linéaire pour prédire le niveau de difficulté d'items comportant des équations du premier degré en mathématiques. Pour y arriver, nous comptons utiliser les tâches de la banque d'instruments de mesure (BIM) du réseau secondaire. À cet effet, les quatre étapes suivantes ont été considérées:

1) classifier les variables prédictives;
2) appliquer un modèle de régression multiple linéaire pour prédire le taux de réussite des items;
3) analyser les résultats du modèle pour dégager les variables explicatives les plus importantes;
4) développer, en utilisant les variables prédictives les plus importantes, un modèle qui génère des items d'évaluation avec leur taux de réussite et leur niveau de difficulté prévu.

Dans le chapitre précédent, nous avons classé les variables prédictives en fonction des écrits scientifiques antérieurs. Dans ce chapitre, nous décrirons les sujets de qui sont tirées les données. Ensuite, nous présenterons le déroulement des opérations et les instruments de notre recherche. Enfin, nous exposerons la méthode d'analyse des données.

3.1 Sujets et échantillon d'items

Les élèves du niveau secondaire dont l'âge moyen varie entre quatorze et quinze ans sont visés par ce projet. Nous avons utilisé les épreuves de mathématiques des niveaux secondaires trois et quatre provenant de la BIM. Ces épreuves couvrent les équations du premier degré du domaine de l'algèbre. Les élèves participant aux épreuves de la BIM provenaient des commissions scolaires francophones du Québec. Les tableaux 10 et 11, présentés aux pages suivantes, montrent dans la première colonne le nombre d'épreuves que nous avons utilisé. L'année de l'épreuve est indiquée à la deuxième colonne, tandis que le nombre d'élèves qui ont participé est indiqué à la troisième colonne. Les lieux où les épreuves ont été effectuées sont indiqués à la quatrième colonne.

Au tableau 10, vous remarquerez qu'aucun nombre n'apparaît aux épreuves 10 et 12. Il en est de même au tableau 11 pour les épreuves 1, 3, 5 et 11. Cela s'explique par le fait que trop peu de résultats ont été recueillis. Ainsi, l'équipe de la BIM n'a pu indiquer le nombre, ni le lieu.

Tableau 10. Échantillons des sujets du niveau secondaire trois.

Épreuve	**Année**	**Nombre d'élèves**	**Lieux**
Épreuve 01	1996	165	3 commissions scolaires de Montréal
Épreuve 02	1996	1000	2 commissions scolaires de la région Laval-Laurentides-Lanaudière
Épreuve 03	1996	426	7 commissions scolaires de la région de l''Outaouais
Épreuve 04	1996	1000	Commission scolaire de la Montérégie
Épreuve 05	1998	548	5 commissions scolaires de Montréal
Épreuve 06	1998	288	3 commissions scolaires de Montréal
Épreuve 07	1998	184	3 commissions scolaires de Montréal
Épreuve 08	1999	524	3 commissions scolaires de Montréal
Épreuve 10	1997	-	-
Épreuve 11	2000	543	2 commissions scolaires de Montréal
Épreuve 12	1999	-	-

Tableau 11. Échantillons des sujets du niveau secondaire quatre faibles

Épreuve	Année	Nombre d'élèves	Lieux
Épreuve 01	1997	-	-
Épreuve 02	1997	183	Commission scolaire de Montréal
Épreuve 03	1997	-	Quelques écoles de la Commission scolaire de Montréal
Épreuve 04	1997	287	-
Épreuve 05	1998 par le MEQ	-	-
Épreuve 07	1997	193	Commission scolaire de Montréal
Épreuve 08	1998	194	Commission scolaire de Montréal
Épreuve 10	1999	210	9 groupes d'une commission scolaire de Montréal
Épreuve 11	-	-	-

Pour le niveau secondaire quatre moyen, nous avons sélectionné l'épreuve 01. Cette épreuve a été administrée en 2001. Le nombre d'élèves n'a pas été indiqué, ni les lieux, car les organismes qui ont utilisé ces épreuves n'ont pas retourné les résultats de leurs élèves à la BIM. Ces mêmes raisons s'appliquent pour les épreuves que nous avons utilisé (1, 2, 4, 5 et 6) pour le niveau secondaire quatre fort.

3.2 Déroulement

Notre recherche profite de la disponibilité des données obtenues de la BIM de 1997 à 2003. Les épreuves de la BIM contiennent des questionnaires qui mesurent le taux de réussite des élèves. Ce taux de réussite est mesuré pour les cinq disciplines majeures (les nombres, l'algèbre, les mesures, la géométrie et les statistiques) qui couvrent le programme du ministère de l'Éducation. Pour les besoins de notre recherche, nous avons choisi l'algèbre, car nous étudions les équations du premier degré qui relèvent d'une section de l'algèbre.

3.2.1 Description des épreuves

Chaque épreuve de la BIM comportait 25 questions et trois types de réponse (choix multiples, réponse courte et réponse élaborée), chaque question valait 4 points. Cette épreuve était corrigée par les enseignants et vérifiée par des correcteurs indépendants de la BIM. L'épreuve était divisée en trois sections: section A, section B et section C.

À la section A, qui comportait des questions de type réponse à choix multiples, on accordait 4 points pour le bon choix, sinon on notait 0 point.

La section B, comportait des questions à réponse courte. Quatre (4) points étaient accordés pour une bonne réponse, sinon on n'accordait aucun point.

La section C comportait des questions à réponse élaborée. Les critères suivants ont été appliqués :

1) si l'élève avait choisi une méthode de résolution appropriée et l'avait appliquée correctement, son résultat était exact. Alors, on lui accordait quatre (4) points.

2) Si l'élève avait choisi une méthode de résolution appropriée, mais avait fait en l'appliquant des erreurs mineures (calculs arithmétiques erronés, transcription incorrecte, notation incorrecte ou forme imprécise), son résultat n'était pas exact ou l'était par hasard, alors on lui accordait 3 points.

3) Si l'élève avait choisi une méthode de résolution inappropriée, s'il n'y avait pas de résultat, que le résultat était incorrect ou qu'il était correct sans justifications, alors on accordait 0 point. Le résultat obtenu était ramené à un total de 100. Chaque épreuve était utilisée comme examen de fin d'année ou de fin d'études secondaires s'il s'agissait du niveau secondaire quatre fort.

L'épreuve durait 2 heures 30 pour le niveau secondaire trois et 3 heures pour le niveau secondaire quatre. Le matériel consistait en un cahier de réponses, une règle, un compas, une équerre, un rapporteur d'angles, une calculatrice et un aide-mémoire. Ce dernier était une feuille au format lettre sur laquelle l'élève avait préalablement inscrit les informations de son choix.

3.3 Instruments

Dans cette section, nous présentons la représentativité et la validité des épreuves provenant de la BIM. Par la suite, nous exposerons les spécifications des items que nous utiliserons pour notre échantillon de recherche. Finalement, nous décrirons l'instrument, c'est-à-dire, la classification des items que nous avons relevés de la BIM.

3.3.1 Représentativité et validité

Quelques épreuves, dont l'épreuve 01 du niveau secondaire trois, ont été soumises à plus de 6910 élèves de 22 commissions scolaires avant d'être expérimentées en région. De plus, la plupart des épreuves de la BIM ont été modifiées après une expérimentation régionale. Ces modifications ont validé la mesure de toutes les composantes de ces épreuves. Ensuite, ces épreuves ont été utilisées par les organismes scolaires, ce qui a permis à l'équipe de la BIM de recueillir les données de quelques épreuves auprès des élèves de ces organismes et de calculer le taux de réussite de chaque item. L'équipe de la BIM est intervenue à toutes les étapes de l'élaboration de l'instrument de mesure. Les conseillers pédagogiques (spécialistes de l'éducation) de plusieurs commissions scolaires se sont joints à l'équipe de la BIM pour élaborer les épreuves. Les tableaux 30 à 33 de l'annexe II illustrent les années de collaborations des épreuves de la BIM.

3.3.2 Spécification des items

Les items de chaque épreuve ont été classifiés a) par discipline (nombres, algèbre, géométrie, statistiques, mesures), b) par habileté cognitive (concept, application, résolution), c) par type de réponses (réponse à choix multiples, réponse courte, réponse élaborée, etc.) et d) par niveau de difficulté (facile, moyen, difficile). Les tableaux 34 à 37 de l'annexe II illustrent les classifications, le pourcentage de la discipline, le pourcentage des habiletés cognitives et les numéros des questions pour chaque épreuve et chaque niveau des secondaires. Le niveau de difficulté a été identifié dans quelques épreuves suite à des collectes de données des élèves qui ont passé ces épreuves. Ces données ont permis à l'équipe de la BIM de calculer le taux de réussite pour chaque item. Le calcul du niveau de difficulté a été fait selon les pratiques de la théorie classique des tests en calculant tout simplement le taux de réussite de l'item. Le tableau 12 montre, pour notre instrument qui se compose de 100 items, les taux de réussite et les niveaux de difficulté calculés par la BIM. Certains de ces derniers ont été calculés à la suite de l'administration de quelques épreuves auprès des élèves des organismes scolaires. Par exemple: l'épreuve numéro (E01), la question numéro 1 (n° 1) du niveau secondaire trois (314) a été réussie à 78 % (taux de réussite = 0,78), et son niveau de difficulté a été codée absent par la BIM, c'est-à-dire non fournit ou non calculé. Pour l'épreuve numéro (E06) le taux de réussite n'a pas été fourni pour la question numéro 28 (n° 14) du niveau secondaire trois (314), par contre le niveau de difficulté a été calculé par la BIM et il correspond a un niveau de difficulté moyen (niveau de difficulté = 2).

Tableau 12. Spécification des items

No d'item et source	Taux de réussite	Niveau de difficulté selon la BIM
01 no. 1 E01 314	0,78	Absent
02 no.7 E01 314	0,50	Absent
03 no.8 E01 314	0,65	Absent
04 no.19 E01 314	0,51	Absent
05 no.5 E02 314	0,72	Absent
06 no.6 E02 314	0,60	Absent
07 no.9 E02 314	0,73	Absent
08 no.11 E02 314	0,32	Absent
09 no.19 E02 314	0,92	Absent
10 no.1 E03 314	0,90	2
11 no.2 E03 314	0,91	1
12 no.8 E03 314	0,88	1
13 no.1 E04 314	0,92	1
14 no.2 E04 314	0,65	2

Niveau de difficulté selon la BIM:
1: facile, 2: moyen, 3: difficile
314: secondaire trois
416: secondaire quatre faible
E: épreuve, no.: numéro de la question selon la BIM

Tableau 12. Spécification des items (suite)

15 no.3 E04 314	0,57	2
16 no.4 E04 314	0,61	2
17 no.15 E04 314	0,34	3
18 no.1 E05 314	0,83	1
19 no.13 E05 314	0,65	2
20 no.19 E05 314	0,67	2
21 no.1 E06 314	0,47	Absent
22 no.2 E06 314	0,93	Absent
23 no.4 E06 314	0,69	Absent
24 no.1 E07 314	0,58	Absent
25 no.8 E07 314	0,00	Absent
26 no.9 E07 314	0,56	Absent
27 no.10 E07 314	0,82	Absent
28 no.14 E06 314	0,00	2
29 no.19 E07 314	0,00	Absent
30 no.20 E08 314	0,91	1
31 no.4 E08 314	0,18	2
32 no.11 E08 314	0,39	2
33 no.19 E08 314	0,35	3
34 no.14 E10 314	0,00	1
35 no.6 E10 314	0,00	2
36 no.15 E10 314	0,00	1
37 no.16 E10 314	0,00	2
38 no.1 E11 314	0,72	3
39 no.19 E11 314	0,49	3
40 no.1 E12 314	0,00	1
41 no.2 E12 314	0,00	2
42 no.12 E12 314	0,00	2
43 no.21 E12 314	0,00	3
44 no.21 E01 416	0,00	Absent
45 no.20 E01 416	0,00	Absent
46 no.2 E02 416	0,90	1
47 no.3 E02 416	0,91	1
48 no.4 E02 416	0,95	1
49 no.22 E04 416	0,00	2
54 no.22 E02 416	0,73	2
55 no.1 E03 416	0,00	1
56 no.13 E03 416	0,00	1
57 no.19 E05 416	0,00	3
58 no.14 E03 416	0,00	2
59 no.18 E03 416	0,00	3
60 no.19 E03 416	0,00	1
61 no.20 E03 416	0,00	2
62 no.1 E04 416	0,00	1
63 no.2 E04 416	0,00	2
64 no.12 E04 416	0,00	1
65 no.14 E04 416	0,00	2
66 no.23 E04 416	0,00	3
67 no.2 E05 416	0,00	1
68 no.3 E05 416	0,00	2
69 no.4 E05 416	0,00	2
70 no.14 E05 416	0,00	2
71 no.2 E07 416	0,78	1

Niveau de difficulté selon la BIM:
1: facile
2: moyen
3: difficile
416: secondaire quatre faible
E: épreuve, no.: numéro de la question selon la BIM

Tableau 12. Spécification des items (suite)

No d'item et source	Taux de réussite	Niveau de difficulté selon le BIM
72 no.3 E07 416	0,94	1
73 no.4 E07 416	0,78	1
74 no.19 E07 416	0,89	1
75 no.2 E08 416	0,60	2
76 no.13 E08 416	0,78	1
77 no.15 E08 416	0,73	1
78 no.20 E08 416	0,53	3
79 no.1 E10 416	0,00	1
80 no.2 E10 416	0,00	2
81 no.4 E10 416	0,00	1
82 no.19 E10 416	0,00	2
83 no.20 E10 416	0,00	3
84 no.4 E11 416	0,00	1
85 no.5 E11 416	0,00	2
86 no.6 E11 416	0,00	2
87 no.19 E11 416	0,00	3
88 no.20 E11 416	0,00	3
89 no.3 E01 426	0,00	1
90 no.4 E01 426	0,00	2
91 no.6 E01 426	0,00	2
92 no.8 E01 426	0,00	2
93 no.14 E01 436	0,00	Absent
94 no.3 E02 436	0,00	1
95 no.08 E04 436	0,00	2
96 no.2 E06 436	0,00	2
97 no.12 E05 436	0,00	1
98 no.19 E05 436	0,00	2
99 no.2 E06 436	0,00	1
100 no.12 E06 436	0,00	2

Niveau de difficulté selon la BIM:
1: facile
2: moyen
3: difficile
416: secondaire quatre faible
426: secondaire quatre moyen
436: secondaire quatre fort
E: épreuve, no.: numéro de la question selon la BIM

3.3.3 Description de l'instrument

L'échantillon que nous avons utilisé se compose de 100 items d'algèbre tirés de plusieurs épreuves de la BIM. Nous avons déterminé pour chacun de ces 100 items les valeurs des 21 variables prédictives que nous avons identifiées provenant de la classification de la BIM (voir l'annexe II, les tableaux 35, 36 et 37) et de nos tableaux 6, 8 et 9 (voir la section 2.4 du cadre théorique). Le tableau 38 à l'annexe II présente notre instrument avec ces 21 variables identifiées. Afin d'illustrer le contenu du tableau 38, voici un exemple qui montre comment nous avons construit ce tableau:

Exemple no. 6.

Marie-Julie vient de terminer ses études en kinésithérapie. Deux emplois lui sont offerts. Dans la première clinique, on lui offre un salaire de 275 $ par semaine plus 5 $ par patient traité. Dans la deuxième clinique, on lui offre un salaire de 155 $ par semaine plus 7 $ par patient traité.

Cette situation se traduit par le système de relations suivant:

$$y_1 = 5x + 275$$
$$y_2 = 7x + 155$$

Où y représente le salaire total par semaine et x représente le nombre de patients traités pendant la semaine.

Combien de patients Marie-Julie devrait-elle traiter en une semaine pour obtenir le même salaire dans les deux cliniques?

Réponse: 60 patients

L'exemple 6 est tiré des 100 items (l'item N° 56 du tableau 38), ce problème possède les variables prédictives suivantes:

1) L'habileté cognitive est du type application (code: HAB2 = 2)

2) On remarque que la réponse est courte (code: TR = 2)

3) La représentation des données est sous la forme d'équations (code: RDe = 1)

4) La représentation de la réponse est sous la forme de nombres (code:RRnb = 1)

5) La pente et l'ordonnée à l'origine sont présentes (code pour la présence de la pente: CPDp = 1 et code pour la présence de l'ordonnée à l'origine: CDPor = 1)

6) Deux équations sont utilisées dans ce problème (code: Neq = 2)

7) Le signe de la pente et de l'ordonnée à l'origine est positif (le code de la pente: CPEp2 = 3 et le code pour l'ordonnée à l'origine: CCPEor2 = 3)

8) Cet item a été administré aux élèves du niveau secondaire quatre faible (code: NEL = 2)

9) De plus, d'après le tableau 8 la difficulté de l'interaction de la représentation données-réponses est facile (code: DC2 = 1)

10) Et selon le tableau 9, la difficulté des données est facile (code: DD2 = 1).

3.4 Méthode d'analyse des données

Le processus d'analyse des données consistera à appliquer un modèle de régression linéaire multiple pour prédire le niveau de difficulté des items. Préalablement, nous effectuerons des analyses descriptives pour connaître les données à l'étude. À cette fin, les statistiques descriptives seront produites en lien avec le niveau de difficulté des items en mathématiques (moyenne, écart type et nombre d'items analysés), et les coefficients de corrélation de Pearson entre les variables à l'étude seront calculés. Ces analyses permettront de vérifier le comportement des variables à l'étude. Ensuite, une analyse de régression linéaire multiple sera effectuée pour vérifier si le rendement en mathématiques peut être expliqué par les variables prédictives. La régression linéaire multiple se prête bien à cette analyse, car nous traitons un seul paramètre qui est le niveau de difficulté. Les analyses seront effectuées à partir du logiciel SPSS 15.0.

Pour appliquer le modèle de régression linéaire multiple à nos variables prédictives, nous avons choisi comme variable dépendante, le niveau de difficulté des items. Les autres variables telles que la représentation des données, la représentation de la réponse, la difficulté de l'interaction de la représentation données-réponse, la difficulté des données, les caractéristiques des données du problème, les caractéristiques des paramètres de l'équation, l'habileté cognitive, le niveau des élèves et le nombre d'équations correspondent, pour leur part, seront les variables indépendantes.

Pour donner suite aux analyses de nos résultats, nous allons calculer le taux de réussite et vérifier le niveau de difficulté des deux tâches données comme exemples. Ces calculs vont se faire en appliquant les coefficients de régressions trouvés à la section résultats. Par la suite, nous allons développer deux modèles qui vont permettre de générer des items. Le premier modèle décrira un système à une équation et le deuxième celui d'un système à deux équations. Ces modèles vont présenter, pour une tâche donnée, les étapes suivantes: la mise en situation, le début de la tâche, les représentations des données possibles et la représentation de la réponse. De plus, ces modèles développés vont présenter le type d'habileté cognitive associé à chaque type de réponse possible. Enfin, nous allons donner des étapes de vérifications, parmi d'autres possibilités, qui peuvent générer des questions dont le degré de difficulté est connu. Nous allons appuyer ces étapes par des exemples en vérifiant leur taux de réussite.

CHAPITRE IV

Résultats et discussion

Nous présenterons les résultats des modélisations obtenues en appliquant les 21 variables pour prédire le taux de réussite; ensuite, nous montrerons que le modèle à neuf variables est le plus valide, car ce dernier est basé sur un choix judicieux des variables qui ont le plus d'influence sur le taux de réussite d'un item donné. De plus, par une analyse descriptive, nous démontrerons que ces variables ont des coefficients de corrélation de Pearson assez élevés avec le taux de réussite. Aussi nous présenterons les différences entre les taux de réussite réelle enregistrés et leur prédiction. Ensuite, nous démontrerons que le modèle à neuf variables donne le meilleur résultat et nous expliquerons comment ce modèle optimal permet de prédire le niveau de difficulté des items.

4.1 Analyse descriptive

Le tableau 13 présente les statistiques descriptives sur les 100 items et les 21 variables qui sont produites en lien avec le niveau de difficulté des items: moyenne de la variable, valeur minimale de la variable, valeur maximale de la variable, écart type, nombre d'items analysés (N) et corrélation de Pearson. Chacune des 21 variables est mise en corrélation avec le taux de réussite (IR) qui apparaît à la première ligne présentées dans le tableau 13. À titre d'exemple, au tableau 13, à la cinquième ligne, dans la colonne description, la présence de l'ordonnée à l'origine (CDPor) varie entre une valeur minimale 0 et une valeur maximale 1. Ceci se traduit dans le tableau 13 par une corrélation de Pearson de 0,30. Cette corrélation signifie que le taux de réussite augmente linéairement avec la présence de l'ordonnée à l'origine.

Tableau 13. Statistiques descriptives pour les 100 items et les 21 variables.

Moyenne des variables	Valeur minimale des variables	Valeur maximale des variables	Écart type	N	Coefficient de correlation de Pearson	Description des variables	Symbole
0,69	0	1	0,19	47	1 ,00	Taux de réussite	IR
2,74	0	4	0,67	94	0,36	Caractéristiques des paramètres de l'équation: signe de la pente – ou 0 ou +	CPEp2
1,49	1	2	0,56	100	0,33	Nombre d'équations (1 ou 2)	Neq
1,77	1	4	0,86	100	0,33	Niveau des élèves	NEL
0,75	0	1	0,43	100	0,30	Caractéristiques des données: présence de l'ordonnée à l'origine	CDPor
1,88	1	3	0,78	100	-0,25	Habileté soit concept ou application ou résolution	HAB2
0,47	0	1	0,50	100	-0,25	Caractéristiques des données: présence d'une coordonnée	CDPpt
1,72	1	3	0,85	100	-0,25	Type de réponse (choix, courte ou élaborée)	TR
0,37	0	1	0,48	100	-0,23	Caractéristiques des données: présence de deux ou plusieurs coordonnées	CDPpts
0,25	0	1	0,43	100	0,20	Représentation des données sous forme équation	RDe
0,24	0	1	0,43	100	-0,19	Représentation des données sous forme graphique	RDg
0,06	0	1	0,24	100	0,18	Représentation de la réponse sous forme tableau	RRt
0,14	0	1	0,35	100	-0,18	Représentation des données sous forme tableau	RDt
1,65	1	3	0,48	100	-0,18	Difficulté de l'interaction des représentations données-réponse	DC2
1,29	1	3	0,69	100	-0,17	Difficulté des données	DD2
0,67	0	1	0,47	100	0,15	Caractéristiques des données: présence de la pente	CPDp
0,13	0	1	0,34	100	-0,11	Représentation de la réponse sous forme graphique	RRg
0,44	0	1	0,50	100	-0,10	Représentation de la réponse sous forme de nombre	RRnb
0,20	0	1	0,40	100	-0,06	Représentation de la réponse sous forme équation	RRe
0,18	0	1	0,39	100	0,05	Représentation de la réponse sous forme naturelle	RRn
2,83	0	4	0,50	95	-0,01	Caractéristiques des paramètres de l'équation: signe de l'ordonnée à l'origine - ou 0 ou +	CPEor2
0,46	0	1	0,50	100	-0,00	Représentation des données sous forme naturelle	RDn

4.2 Analyse de régression linéaire

Une analyse basée sur la régression linéaire a été effectuée à partir des 100 items en mettant en relation la variable dépendante (le niveau de difficulté des items IR) avec les variables indépendantes (la représentation des données, la représentation de la réponse, la difficulté de l'interaction de la représentation données-réponse, la difficulté des données, les caractéristiques des données du problème, les caractéristiques des paramètres de l'équation, l'habileté cognitive, le niveau des élèves et le nombre d'équations). Par cette analyse, on obtient un coefficient de détermination de 0,93 et un coefficient de détermination ajusté de 0,88 pour les 21 variables indépendantes utilisées. La valeur obtenue au test F est de 6,87 ($p <= 0,05$). Les coefficients numériques de cette analyse sont présentés dans le tableau 14.

En appliquant l'équation de régression provenant des valeurs de B du tableau 14, on calcule la valeur du taux de réussite pour chaque item à partir de l'équation suivante:
Taux de réussite = 1,15 + -0,15 *RDt+ 0,05 *RDn + -0,22 *RDg + -0,05 *RDe + -0,10 *CPDp + 0,20 *CDPor + 0,06 *CDPpt + 0,10 *CDPpts + -0,94 *RRt + -0,90 *RRn +-0,99 *RRnb + -1,02 *RRg + -0,99 *RRe + 0,13 *CPEp2 + 0,06 *CPEor2 +- 0,05 *HAB2 + -0,14 *DC2 + 0,00 *DD2 + -0,00 *TR + 0,09 *NEL + 0,06 * Neq
La descriptions des symboles apparaît dans le tableau 13.

Tableau 14. Coefficients pour le calcul du taux de réussite modélisée
Pour les 100 items et les 21 variables.

Modèle	Coefficients non standardisés		Coefficients standardisés
	B	Erreur type	Beta
(Constante)	1,15	0,24	
RDt	-0,15	0,07	-0,27
RDn	0,05	0,06	0,13
RDg	-0,22	0,07	-0,48
RDe	-0,05	0,06	-0,12
CPDp	-0,10	0,06	-0,24
CDPor	0,20	0,06	0,44
CDPpt	0,06	0,07	0,15
CDPpts	0,10	0,08	0,26
Neq	0,06	0,04	0,18
RRt	-0,94	0,18	-1,15
RRn	-0,90	0,17	-1,80
RRnb	-0,99	0,17	-2,56
RRg	-1,02	0,16	-1,77
RRe	-0,99	0,17	-2,05
CPEp2	0,13	0,03	0,43
CPEor2	0,06	0,04	0,17
HAB2	-0,05	0,04	-0,20
DC2	-0,14	0,05	-0,34
DD2	-0,00	0,04	-0,00
TR	-0,00	0,04	-0,02
NEL	0,09	0,02	0,40

Variable dépendante: IR
Les symboles font référence au tableau 13

Le tableau 15 présente les différences entre le taux de réussite réel et modélisée des items. Pour les items qui n'ont pas de taux de réussite, la BIM avait fourni leur niveau de difficulté; alors, nous avons associé ce dernier à un taux de réussite afin de pouvoir calculer le taux de réussite modélisé.

Tableau 15. Calcul de la différence entre le taux de réussite réel et modélisée en valeur absolue.

N° d'item	IR	IRmod	Différence
01	0,78	0,85	0,07
02	0,50	0,46	0,04
03	0,65	0,70	0,05
04	0,51	0,55	0,04
06	0,60	0,69	0,09
07	0,73	0,70	0,03
08	0,32	-0,29	0,03
09	0,92	0,78	0,14
10	0,90	0,87	0,03
11	0,91	0,70	0,21
12	0,88	0,71	0,17
13	0,92	0,65	0,27
14	0,65	0,78	0,13
16	0,61	0,68	0,07
17	0,34	0,39	0,05
18	0,83	0,82	0,01
19	0,65	0,77	0,12
20	0,67	0,59	0,08
21	0,47	0,73	0,26
22	0,93	0,79	0,14
23	0,69	0,52	0,17
26	0,56	0,70	0,14
27	0,82	0,64	0,18
30	0,91	0,78	0,13
31	0,18	0,40	0,22
32	0,39	0,58	0,19
33	0,35	0,59	0,24
38	0,72	0,78	0,06
39	0,49	0,33	0,17
46	0,90	0,85	0,05
47	0,91	0,83	0,08
48	0,95	0,92	0,03
50	0,70	0,66	0,04
51	0,96	0,89	0,07
53	0,61	0,59	0,02
54	0,73	0,74	0,01
71	0,78	0,85	0,07
72	0,94	0,85	0,09
73	0,78	0,88	0,10
74	0,89	0,74	0,15
75	0,60	0,73	0,13
76	0,78	0,89	0,11
77	0,73	0,83	0,10

IR: taux de réussite réel
IRmod: taux de réussite modélisé

À partir des données présentées au tableau 15, nous avons examiné les items pour lesquels la différence entre le niveau de difficulté réel et le niveau de difficulté modélisé était la plus grande. Nous avons choisi une limite arbitraire de 0,25, car un écart de moins 0,25 est considéré comme négligeable. Pour faire suite à cette décision, nous avons constaté ce qui suit:

Pour l'item n° 13, la différence entre le taux de réussite et le taux de réussite modélisé est de 0,27. Cette différence s'explique par le fait que les données représentées le sont sous forme de tableau (ce n'est pas une table de valeurs). D'après notre classification présentée au tableau 8 de la section 2.3.1 du chapitre II, la difficulté de l'interaction des représentations données-réponse (naturel-naturel) est de niveau difficile; ceci est conforme, car on obtient 65 % comme valeur du taux de réussite modélisé (IRmod). Tandis que la valeur du taux de réussite (IR) obtenue est de 92 %. Par conséquent, il est impossible de classer cet item correctement, car il était le seul de ce type. Quant à l'item n° 21, et d'après notre classification au tableau 8 de la section 2.3, la difficulté de la combinaison des représentations données-réponse (équation-graphique) est de niveau moyen. C'est ce qu'on obtient comme valeur du taux de réussite modélisée (IRmod) soit 69 % tandis que la valeur du taux de réussite (IR) obtenue est de 47 %. Cette valeur faible s'explique par le fait qu'à cet item on demande d'interpréter le graphique, ce qui est comparable à une deuxième question qui s'ajoute au problème demandé, ce qui la rend plus difficile.

Ces observations nous amènent à éliminer tous les items pour lesquels la différence entre le taux de réussite réel (IR) et le taux de réussite modélisé (IRmod) est plus grand que la limite arbitraire fixée à 0,25. Nous avons constaté que seulement les items 13 et 21 correspondaient à ce critère. L'item 13 présente une différence de 0,27 et l'item 21 présente une différence de 0,26.

Par la suite, nous avons analysé les 98 items restants et nous avons compilés de nouveau les statistiques descriptives correspondantes dans le tableau 16. Les 98 items ont été analysés en lien avec la variable dépendante qui est le taux de réussite (IR). En utilisant les 21 variables, on obtient une valeur du coefficient de détermination obtenue par l'analyse de régression linéaire qui est de 0,99 au lieu de 0,93 obtenu pour les 100 items. On remarque

que ce coefficient a augmenté considérablement. Nous obtenons maintenant une valeur de 416,44 comme résultat au test F (p<= 0,05).

Tableau 16. Statistiques descriptives pour les 98 items et les 21 variables

Moyenne des variables	Valeur minimale des variables	Valeur maximale des variables	Écart type	N	Coefficient de corrélation de Pearson	Description des variables	Symbole
0,69	0	1	0,19	45	1,00	Taux de réussite	IR
0,76	0	1	0,43	98	0,39	Caractéristiques des données: présence de l'ordonnée à l'origine	CDPor
2,74	1	4	0,68	92	0,37	Caractéristique des paramètres de l'équation: signe de la pente – ou 0 ou +	CPEp2
1,50	1	2	0,56	98	0,35	Nombre d'équations (1 ou 2)	Neq
1,79	1	4	0,86	98	0,35	Niveau des élèves	NEL
0,24	0	1	0,43	98	0,28	Représentation des données sous forme équation	RDe
1,28	1	3	0,67	98	-0,27	Difficulté des données	DD2
0,13	0	1	0,34	98	-0,27	Représentation des données sous forme tableau	RDt
1,90	1	3	0,78	98	-0,27	Habileté soit concept ou application ou résolution	HAB2
0,46	0	1	0,50	98	-0,27	Caractéristiques des données: présence d'une coordonnée	CDPpt
1,73	1	3	0,86	98	-0,26	Type de réponse (choix, courte ou élaborée)	TR
0,36	0	1	0,48	98	-0,25	Caractéristiques des données : présence de deux ou plusieurs coordonnées	CDPpts
0,06	0	1	0,24	98	0,19	Représentation de la réponse sous forme tableau	RRt
1,64	1	3	0,82	98	-0,19	Difficulté de l'interaction des représentations données-réponse	DC2
0,68	0	1	0,47	98	0,16	Caractéristiques des données: présence de la pente	CPDp
0,23	0	1	0,43	98	-0,14	Représentation des données sous forme graphique	RDg
0,13	0	1	0,34	98	-0,12	Représentation de la réponse sous forme graphique	RRg
0,45	0	1	0,50	98	-0,11	Représentation de la réponse sous forme de nombre	RRnb
0,20	0	1	0,40	98	-0,06	Représentation de la réponse sous forme équation	RRe
0,16	0	1	0,37	98	0,05	Représentation de la réponse sous forme naturelle	RRn
2,83	0	4	0,50	93	-0,01	Caractéristiques des paramètres de l'équation: signe de l'ordonnée à l'origine - ou 0 ou +	CPEor2
0,47	0	1	0,50	98	-0,00	Représentation des données sous forme naturelle	RDn

Après avoir constaté un coefficient de détermination de 0,99 obtenu, nous avons choisi de vérifier la qualité du modèle de la régression linéaire de façon hiérarchique en commençant par la variable indépendante qui a le plus grand coefficient de corrélation de Pearson (voir tableau 16). Cette variable est la présence de l'ordonnée à l'origine, de plus, elle est la plus influente sur le taux de réussite. Graduellement, nous avons ajouté les trois autres variables du tableau 16 qui affichent les plus importants coefficients de corrélation de Pearson. Ces trois variables sont: le signe de la pente (CPEp2), le nombre d'équations (Neq) et le niveau des élèves (NEL). Nous remarquons que le coefficient de détermination est passé de 0,39 à 0,68 au tableau 17 (modèle 1 à 4). La variable suivante, que nous avons tenté dans un premier temps d'inclure, est la représentation des données sous forme d'équation (RDe). Cependant, nous avons constaté que lorsque nous incluons cette variable, nous devons inclure toutes les représentations de données et de réponses. Dans ce contexte nous avons décidé de l'exclure et de la remplacer par les composantes de l'équation du premier degré telles que la présence de la pente (CPDp) et le signe de l'ordonnée à l'origine (CPEor2). Comme le signe de la pente a été retenu, nous n'avons pas le choix de considérer le signe de l'ordonnée à l'origine malgré son faible coefficient de corrélation de Pearson. Nous constatons que le coefficient de détermination a augmenté jusqu'à 0,70 avec six variables (tableau 17 modèle 6).

Puis, nous avons considéré la variable difficulté de l'interaction des représentations données-réponse (DC2). De façon générale, cette variable remplace en quelque sorte les représentations des données et des réponses. Ensuite, nous avons considéré les variables qui influencent de façon significative le taux de réussite, notamment l'habileté cognitive (HAB2) et le type de réponse (TR). Avec ces variables, nous dégageons neuf variables et obtenons un coefficient de détermination de 0,78 (modèle 9). Par la suite, nous avons tenté d'inclure la difficulté des données (DD2), car elle a un coefficient de corrélation de Pearson assez élevé et elle regroupe le niveau de difficulté des composantes des données de l'équation du premier degré. Ces six possibilités sont les suivantes: 1) la présence de l'ordonnée à l'origine et de la pente; 2) la présence de la pente et d'une coordonnée; 3) la présence de la pente et de plusieurs coordonnées; 4) la présence de plusieurs coordonnées; 5) la présence de l'ordonnée à l'origine et de plusieurs coordonnées; 6) la présence de l'ordonnée à l'origine et d'une coordonnée. Toutefois, nous avons constaté que le coefficient de détermination ajusté a commencé à diminuer, c'est-à-dire que si nous appliquons le modèle de régression linéaire pour d'autres variables, le résultat obtenu serait plus bas que la valeur maximale atteinte à neuf variables, soit 0,47. Dans notre cas, ce sont les neuf variables qui influencent le niveau de difficulté des items.

Tableau 17. Sommaire des modèles de régression linéaire (9 variables ajoutée une à une, pente et l'ordonnée à l'origine).

Modèle	R	R^2	R^2 ajusté	Estimation de l'erreur type	Variables prédictives pour le taux de réussite
1	0,39	0,15	0,13	0,18	CDPor
2	0,58	0,34	0,30	0,16	CPEp2, CDPor
3	0,63	0,40	0,35	0,63(a)	Neq, CPEp2, CDPor
4	0,68	0,47	0,41	0,15	NEL, CPEp2, DPor, Neq
5	0,69	0,48	0,40	0,15	CPEor2, CDPor, PEp2, Neq, NEL
6	0,70	0,50	0,41	0,15	CPDp, CPEp2, CPEor2, CDPor, NEL, Neq
7	0,75	0,56	0,46	0,14	DC2, CDPor, NEL, PEp2, CPDp, CPEor2, Neq
8	0,77	0,60	0,50	0,14	HAB2, CPEor2, DC2, CPDp, CPEp2, CDPor, NEL, Neq
9	0,78	0,61	0,50	0,14	TR, NEL, DC2, CPEp2, CDPor, CPEor2, CPDp, Neq, HAB2

Les symboles font référence au tableau 16
R^2: coefficient de détermination

Le taux de réussite des 46 items parmi les 98 items utilisés n'était pas donné. Cependant, la BIM a prédit leur niveau de difficulté sur une échelle de 0 à 3. Alors, nous avons associé le niveau de difficulté prédit par la BIM à un taux de réussite de la façon suivante: facile (code 0) équivaut à un taux de réussite de 85 %, moyen (code 1) équivaut à un taux de réussite de 65 % et difficile ou très difficile (code 2 ou 3) équivaut à un taux de réussite 44 %. Nous avons identifié ces items au tableau 18 et nous avons obtenu pour quatre d'entre eux des différences entre le taux de réussites associé et le taux de réussite modélisé. Ces différences sont supérieures à la limite arbitraire fixée (0,25).

Tableau 18. Différence entre le taux de réussite associé et le taux de réussite modélisé

N° D'item	différence	Niveau de difficulté selon le BIM
28 n° 14 E06 314	0,08	2
34 n° 14 E10 314	0,19	1
35 n°6 E10 314	0,06	2
36 n° 15 E10 314	0,33	1
37 n° 16 E10 314	0,25	2
40 n° 1 E12 314	0,15	1
41 n°2 E12 314	0,20	2
42 n° 12 E12 314	0,13	2
43 n°21 E12 314	0,15	3
49 n°22 E04 416	0,02	2
52 n°20 E02 416	0,15	2
55 n° 1 E03 416	0,00	1
56 n° 13 E03 416	0,02	1
57 n° 19 E05 416	0,23	3
58 n° 14 E03 416	0,05	2
59 n° 18 E03 416	0,18	3
60 n° 19 E03 416	0,01	1
61 n°20 E03 416	0,02	2
62 n° 1 E04 416	0,13	1
63 n°2 E04 416	0,20	2
64 n° 12 E04 416	0,04	1
65 n° 14 E04 416	0,02	2
66 n°23 E04 416	0,30	3
67 n°2 E05 416	0,08	1
68 n°3 E05 416	0,21	2
69 n°4 E05 416	0,15	2
70 n° 14 E05 416	0,03	2
79 n° 1 E10 416	0,25	1
80 n°2 E10 416	0,19	2
82 n° 19 E10 416	0,18	2
83 n°20 E10 416	0,05	3
84 n°4 E11 416	0,11	1
85 n°5 E11 416	0,10	2
86 n°6 E11 416	0,14	2
87 n° 19 E11 416	0,08	3
88 n °20 E11 416	0,16	3
89 n°3 E01 426	0,09	1
90 n°4 E01 426	0,06	2

91 n°6 E01 426	0,36	2
92 n°8 E01 426	0,04	2
94 n°3 E02 436	0,08	1
95 n° 08 E04 436	0,32	2
96 n° 2 E06 436	0,04	2
97 n° 12 E05 436	0,09	1
99 n°2 E06 436	0,03	1
100 n°12 E06 436	0,19	2

Facile: 1 moyen: 2 difficile: 3
314: secondaire trois
416: secondaire quatre faible
426: secondaire quatre moyen
436: secondaire quatre fort

Par la suite, nous avons appliqué le modèle de régression en incluant le taux de réussite associé à ces niveaux de difficulté prédits par la BIM. À cet effet, nous avons obtenu un coefficient de détermination égal à 0,75 pour 21 variables. En comparant ce que nous avons obtenu préalablement comme coefficient de détermination (0,99), nous constatons un écart important. Nous pouvons conclure que la prédiction des niveaux de difficulté de la BIM n'est pas parfaite et qu'il est ardu d'associer un taux de réussite exact à un item donné. Compte tenu de ces résultats, nous nous contenterons de 45 items pour lesquels nous obtenons un taux de réussite prédit satisfaisant.

Les résultats présentés au tableau 17 (modèle 9) sont supérieurs aux résultats obtenus à la quatrième étude de la section 2.2.2.D du cadre théorique réalisée par les chercheurs Enright et Sheehan (2002). Ces derniers ont obtenu 0,36 comme coefficient de détermination pour les 339 items en algèbre. Nous avons obtenu un coefficient de détermination de 0,78 pour 100 items.

Pour être sûr du choix des composantes des données, nous avons remplacé à la fois la présence de l'ordonnée à l'origine et de la pente, par chacune des six autres possibilités que nous avons nommées précédemment à la page 65. Ces possibilités permettent de trouver ou de résoudre l'équation du premier degré. Nous avons obtenu des coefficients de détermination allant de 0,70 à 0,77, le tableau 19 montre deux exemples de possibilités (modèles 10 et 11). Nous remarquons que le meilleur résultat est enregistré quand la pente et l'ordonnée à l'origine sont présentes (modèle 9).

Si nous décidons de poursuivre l'analyse en ajoutant d'autres variables que les 9 principales retenues précédemment, il faut choisir les variables qui ont les meilleurs coefficients de corrélation de Pearson. Alors, nous choisissons de remplacer l'interaction des représentations données-réponse (DC2) par les variables qui possèdent les plus grandes valeurs de coefficients de corrélation de Pearson (supérieur à la limite arbitraire 0,18), selon le tableau 16, il s'agit de: la représentation des données sous forme de tableau (RDt), la représentation des données sous forme de graphique (RDg), la représentation des données sous forme d'équation (RDe) et la représentation de la réponse sous forme de tableau (RRt). Pour les treize variables énumérées ci-dessus, nous avons obtenu un coefficient de détermination de 0,63 et un coefficient de détermination ajusté de 0,45. On remarque cependant que le coefficient de détermination ajusté (adjusted R square) a diminué. Il est passé de 0,47 à 0,45, c'est-à-dire que, si l'on répétait le modèle de régression linéaire pour d'autres items, on obtiendrait un résultat de 0,45 comme coefficient de détermination. Ainsi, le modèle à 13 variables serait moins corrélé que le modèle à 9 variables.

Tableau 19. Sommaire des modèles de la régression linéaire (9 variables)

modèle	**R**	**R^2**	**R^2 ajusté**	**Estimation de l'erreur type**	**Variables prédictives pour le taux de réussite**
10 (une coordonnée et l'ordonnée à l'origine)	0,77	0,60	0,48	0,14	CDPpt, DC2, NEL, CPEp2, TR, CPEor2, CDPor, Neq, HAB2
11 (plusieurs coordonnées avec l'ordonnée à l'origine)	0,77	0,60	0,48	0,14	CDPor, DC2, NEL, CPEp2, TR, CPEor2, CDPpts, Neq, HAB2

Les symboles font référence au tableau 17
R^2: coefficient de détermination

On constate que nos résultats pour les neuf variables (modèle 9 tableau 17) sont meilleurs que pour les treize variables. Le tableau 20 montre les statistiques descriptives pour les 45 items et les neuf variables que nous avons retenues (modèle 9).

Tableau 20. Statistiques descriptives pour les 45 items et les 9 variables

Moyenne des variables	Valeur minimale des variables	Valeur maximale des variables	Écart type	N	Coefficient de corrélation de Pearson	Description des variables	Symbole
0,69	0	1	0,19	45	1,00	Taux de réussite	IR
0,76	0	1	0,43	98	0,39	Caractéristiques des données: présence de l'ordonnée à l'origine	CDPor
2,74	0	4	0,68	92	0,37	Caractéristiques des paramètres de l'équation: signe de la pente – ou 0 ou +	CPEp2
1,50	1	2	0,56	98	0,35	Nombre d'équations (1 ou 2)	Neq
1,79	1	4	0,86	98	0,35	Niveau des élèves (314, 416 ou 426 ou 436)	NEL
1,90	1	3	0,78	98	-0,27	Habileté soit concept ou application ou résolution	HAB2
1,73	1	3	0,86	98	-0,26	Type de réponse (choix, courte ou élaborée)	TR
1,64	1	3	0,48	98	-0,19	Difficulté de la combinaison des représentations données-réponse	DC2
0,68	0	1	0,47	98	0,16	Caractéristiques des données: présence de la pente	CPDp
2,83	0	4	0,50	93	-0,01	Caractéristiques des paramètres de l'équation: signe de l'ordonnée à l'origine - ou 0 ou +	CPEor2

4.3 Exemples de calcul du taux de réussite et vérification du niveau de difficulté des tâches

Pour calculer le taux de réussite d'un item donné, nous appliquerons en premier lieu les coefficients de régression sur le modèle à neuf variables que nous avons retenues dans la section précédente. Par la suite, nous appliquerons les mêmes coefficients sur le modèle à 21 variables. Commençons tout d'abord par deux exemples de niveaux de difficulté différents en nous basant sur les classifications présentées dans les tableaux 6,8 et 9. Deux exemples seront présentés tirés de la BIM, le premier portant sur le calcul d'un niveau facile et le deuxième, sur le calcul d'un niveau de difficulté moyen.

Exemple n° 7 (pour des élèves de quatrième secondaire faible avec un taux de réussite prédit de 87 %)

a) Données du problème: Les tableaux ci-dessous représentent les coûts des cours de danse suivis dans deux écoles différentes selon le nombre d'heures (h). C1 est le coût du premier cours et C2 est le coût du deuxième cours

Tableau 1

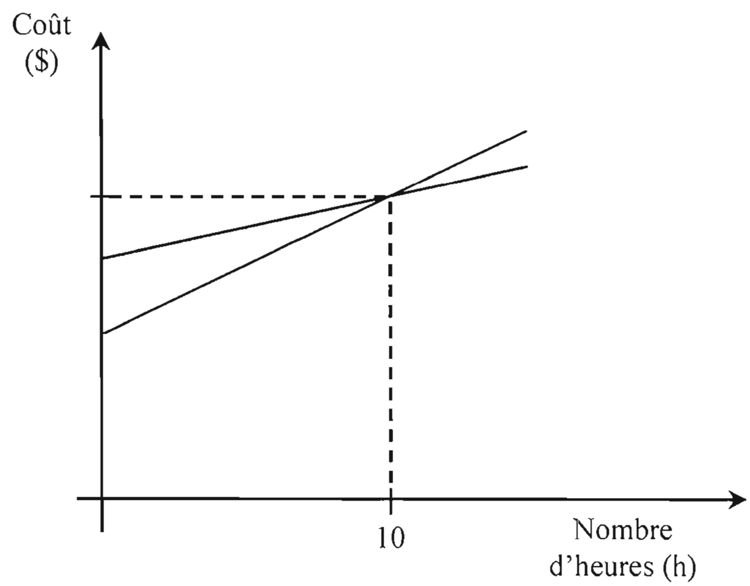
Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	30	35	40

Tableau 2

Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	20	26	32

b) Question: Représenter graphiquement les coûts des deux cours de danse

c) Réponse attendue:

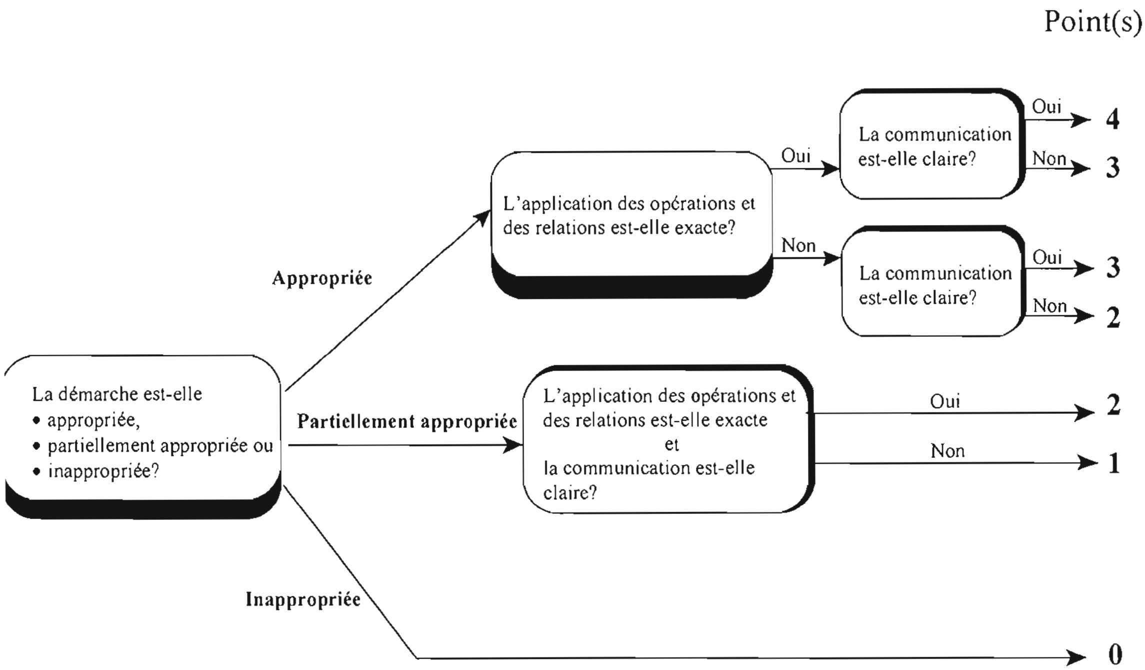


d) critère de correction:

La question vaut 4 points qui seront répartis en fonction des critères suivants:

- la pertinence de la démarche suivie
- l'exactitude des calculs effectués
- la clarté de la communication écrite.

GRILLE DE CORRECTION



Une représentation graphique équivalente est acceptée (les ordonnées à l'origine sont exactes et les pentes aussi (même inclinaison des droites).

Note: La relation entre les variables peut être représentée graphiquement à l'aide d'un autre système de repère (graduation des axes).

e) **Analyse du niveau de difficulté:** en analysant cette tâche et en appliquant les coefficients de régression du tableau 23, nous identifions les justifications et les valeurs choisies au tableau 21 selon le modèle à neuf variables que nous avons retenu.

Tableau 21. Calcul du taux de réussite utilisant neuf variables

N°. De la variable prédictive	Nature des données	Valeur du paramètre	Justification
	Constante	0,15	-
Var. 1	L'ordonnée à l'origine est présente	0,16	À 0 heure le coût est de 30 $ pour le premier cours et 20 $ pour le deuxième cours offert, ce sont les coûts de base
Var. 2	La pente est absente	0	-
Var. 3	Le signe de l'ordonnée à l'origine est positif	0,10	Les coûts sont positifs
Var. 4	Le signe de la pente est positif	0,40	À mesure que le nombre d'heures augmente, le coût augmente aussi pour les deux cours de danse
Var. 5	L'habileté est une application	-0,02	Les coordonnées sont présentes. Alors, l'élève n'a qu'à les placer dans un plan cartésien et les relier par des graphiques
Var. 6	Le type de réponse est une réponse élaborée	-0,14	On demande une représentation graphique
Var. 7	Le nombre d'équations est de deux	0,18	La tâche présente deux tableaux, donc deux équations
Var. 8	Le niveau des élèves est quatrième secondaire faible	0,14	-
Var. 8	Difficulté de l'interaction des représentations donnée-réponse est facile	-0,10	Les données sont présentées sous la forme d'un tableau et la réponse demandée devra être une forme graphique, selon la classification du tableau 8
	Total des points obtenus pour ce cas	0,87	-

En additionnant ces valeurs à la constante 0,15 on obtient alors: 0,15 + 0,16 + 0,10 + 0,40 +-0,02 + -0,14 + 0,18 + 0,14 +-0,10 = 87 % pour le quatrième secondaire faible. Ainsi, cet item, assez facile, serait réussi par les élèves dans 87 % des cas.

Exemple n° 8 (pour des élèves de quatrième secondaire moyen avec un taux de réussite de 78 %)

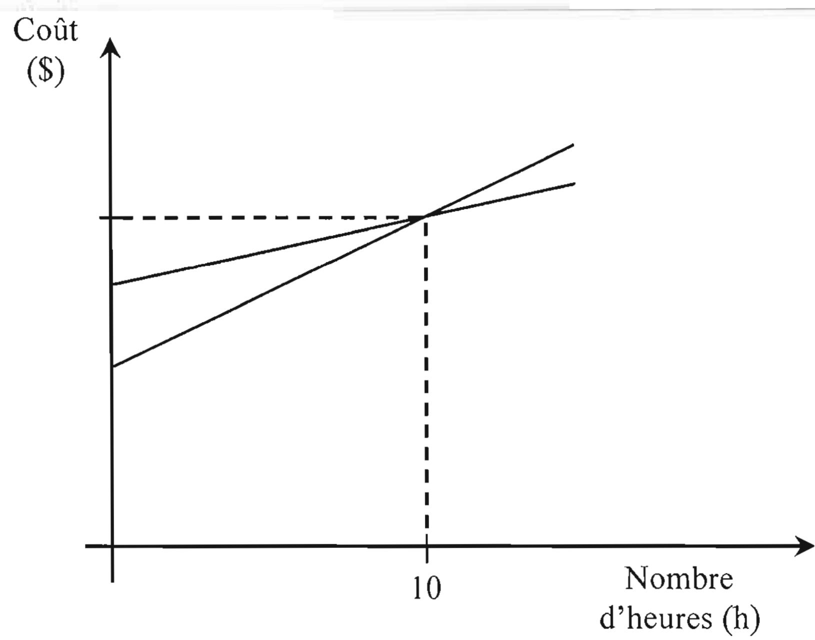
a) Données du problème: Le système de relations ci-dessous représente les coûts des cours de danse suivis dans deux écoles différentes selon le nombre d'heures (h). C1 est le coût du premier cours et C2 est le coût du deuxième cours

1re équation: $C1 = 5h + 30$

2e équation: $C2 = 6h + 20$

b) Question: Représenter graphiquement le système de relations

c) Réponse attendue:

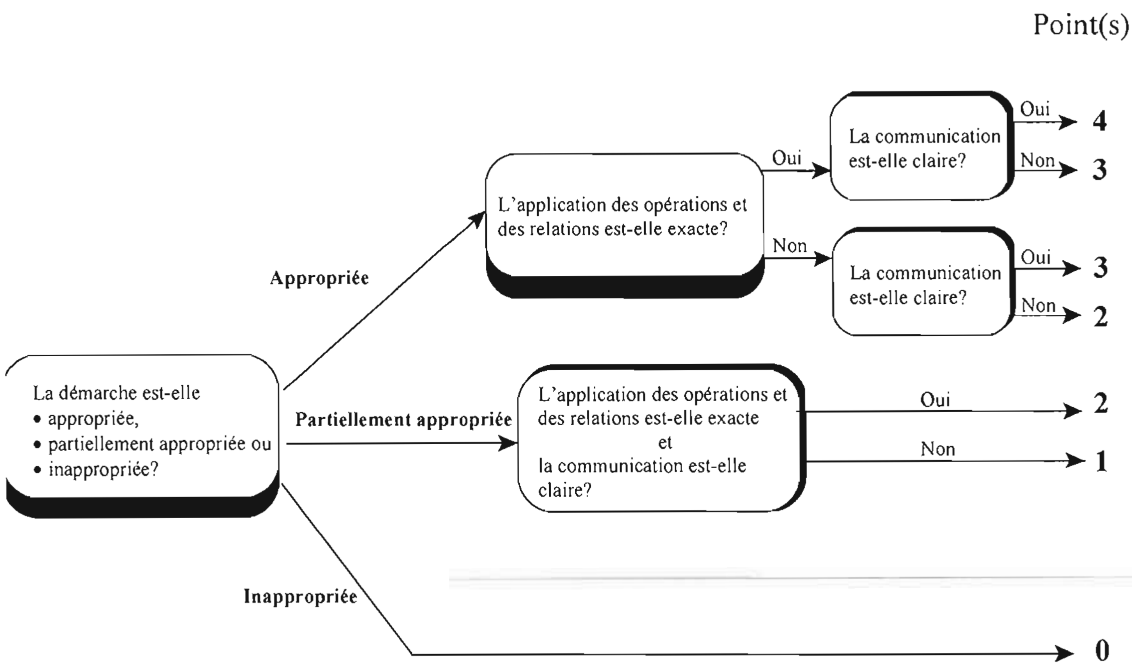


d) Critères de correction:

La question vaut 4 points qui seront répartis en fonction des critères suivants:

- la pertinence de la démarche suivie
- l'exactitude des calculs effectués
- la clarté de la communication écrite.

GRILLE DE CORRECTION



Une représentation graphique équivalente est acceptée (les ordonnées à l'origine sont exactes et les pentes aussi (même inclinaison des droites).

Note: La relation entre les variables peut être représentée graphiquement à l'aide d'un autre système de repère (graduation des axes).

e) Analyse du niveau de difficulté: en analysant cette tâche et en appliquant les coefficients de régression du tableau 24, si nous voulons utiliser le modèle des 21 variables par exemple, nous identifions les justifications et les valeurs choisies au tableau 22.

Tableau 22. Calcul du taux de réussite utilisant 21 variables

N° De la variable prédictive	**nature des données**	**Valeur du paramètre**	**Justification**
	Constante	1,11	-
Var. 1	L'ordonnée à l'origine est présente	0,21	Une ordonnée à l'origine de 30 pour la première équation et une ordonnée à l'origine de 20 pour la deuxième équation
Var. 2	La pente est présente	-0,12	Une pente de 5 pour la première équation et une pente de 6 pour la deuxième équation
Var. 3	Le signe de l'ordonnée à l'origine est positif	0,22	On le constate sur le graphique
Var. 4	Le signe de la pente est positif	0,41	Les coûts croissent en fonction du nombre d'heures
Var. 5	L'habileté cognitive est une application	-0,10	L'élève n'a qu'à placer l'ordonnée à l'origine dans le plan cartésien et à appliquer le taux de variation (pente) sur l'ordonnée à l'origine pour tracer le graphique de chaque équation
Var. 6	Le type de réponse est une réponse élaborée	0,03	On demande de représenter la réponse par des graphiques
Var. 7	Le nombre d'équations est de deux	0,14	La tâche présente deux équations
Var. 8	Le niveau des élèves est quatrième secondaire moyen	0,26	-
Var. 9	Les données sont sous forme tableau	0	Absente
Var. 10	Les données sont sous forme graphique	0	Absente
Var. 11	Les données sont sous forme naturelle	0	Absente
Var. 12	Les données sont sous forme équation	0	Absente
Var. 13	La réponse est sous forme tableau	0	Absente
Var. 14	La réponse est sous forme graphique	-1,05	-
Var. 15	La réponse est sous forme nombre	0	Absente
Var. 16	La réponse est sous forme naturelle	0	Absente
Var. 17	La réponse est sous forme équation	0	-
Var. 18	Une coordonnée	0	Absente
Var. 19	Plusieurs coordonnées	0	Absente
Var. 20	Difficulté de l'interaction des représentations données-réponse est moyenne	-0,31	Équation-graphique, selon la classification du tableau 8
Var. 21	La difficulté des données est facile	-0,02	La pente et l'ordonnée à l'origine sont présentes selon la classification du tableau 9
	Total des points obtenus pour ce cas	0,78	

On additionne ces valeurs à la constante 1,11 et on obtient, 1,11 + 0,21 + -0,12 + 0,22 + 0,41 + -0,10 + 0,03 + 0,14 + 0,26 + -1,05 + -0,31 + -0,02 = 78 %, comme taux de réussite pour le niveau quatrième secondaire moyen. Ainsi cet item, moyennement facile, serait réussi par les élèves dans 78 % des cas.

Les données du tableau 23 représentent les neufs variables avec leurs coefficients de régression correspondants provenant du taux de réussite du tableau 40 de l'annexe III: 1) l'ordonnée à l'origine, 2) la pente, 3) le signe de l'ordonnée à l'origine, 4) le signe de la pente, 5) l'habileté cognitive, 6) le type de réponse, 7) le nombre d'équations, 8) le niveau des élèves et 9) la difficulté de l'interaction des représentations données-réponse. Par exemple, si l'ordonnée à l'origine est présente son coefficient de régression correspondant est 0,16; si l'habileté est du type application son coefficient de régression est de -0,02, ainsi de suite. Les données du tableau 24 proviennent des coefficients de régression pour le calcul du taux de réussite du tableau 41 de l'annexe III. Toutes ces données ont été utilisées pour construire le cas que nous présentons ci-dessus.

Tableau 23. Coefficients de régression pour le calcul du taux de réussite des 9 variables.

Constante	0,15			
1) Présence de l'ordonnée à l'origine	0,16			
2) Présence de la pente	-0,06			
3) Signe de l'ordonnée à l'origine	Négatif 0,03		Nul 0,07	Positif 0,10
4) Signe de la pente	Négatif 0,13		Nul 0,26	Positif 0,40
5) Habileté	Concept -0,01	Application -0,02	Résolution -0,03	
6) Type de réponse	Multiple -0,05	Courte -0,09	Élaborée -0,14	
7) Nombre d'équations	Une 0,09	Deux 0,18		
8) Niveau des élèves	Secondaire trois	Secondaire quatre faible 0,14	Secondaire quatre moyen 0,22	Secondaire quatre fort 0,29
9) Difficulté de l'interaction des représentations données-réponse	Facile -0,10	Moyenne -0,20	Difficile -0,30	

Tableau 24. Coefficients de régression pour le calcul du taux de réussite des 21 variables.

Constante	1,11			
1) Présence de l'ordonnée à l'origine	0,21			
2) Présence de la pente	-0,12			
3) Signe de l'ordonnée à l'origine	Négatif 0,07		Nul 0,15	Positif 0,22
4) Signe de la pente	Négatif 0,14		Nul 0,27	Positif 0,41
5) Habileté	Concept -0,05	Application -0,10	Résolution -0,15	
6) Type de réponse	Multiple 0,01	Courte 0,02	Élaborée 0,03	
7) Nombre d'équation	Une 0,07	Deux 0,14		
8) Niveau des élèves	Secondaire trois 0,09	Secondaire quatre faible 0,17	Secondaire quatre moyen 0,26	Secondaire quatre fort 0,34
9) Données sous forme tableau	Présence -0,20			
10) Données sous forme graphique	Présence -0,18			
11) Données sous forme naturelle	Présence 0,10			
12) Données sous forme équation	Présence 0,02			
13) Réponse sous forme tableau	Présence -1,00			
14) Réponse sous forme graphique	Présence -1,05			
15) Réponse sous forme nombre	Présence -1,04			
16) Réponse sous forme naturelle	Présence -0,96			
17) Réponse sous forme équation	Présence -1,01			
18) Une coordonnée	Présence 0,10			
19) Plusieurs coordonnées	Présence 0,09			
20) Difficulté de l'interaction des représentations données-réponse	Facile -0,16	Moyen -0,31	Difficile -0,47	
21) Difficulté des données	Facile -0,02	Moyen -0,04	Difficile -0,05	

4.4 Modèles développés permettant de générer des items

Jusqu'à présent, il a été possible de prédire et de calculer le taux de réussite des tâches. Cependant, nous pouvons nous demander comment est-il possible de générer des items en utilisant les variables prédictives? Nous allons montrer deux types de modèles de tâches d'évaluation qu'il est possible de générer: le modèle 1 décrit un système à une équation et le modèle 2 décrit un système à deux équations. Étudions de plus près ces deux types de modèles.

4.4.1 Modèle 1: système à une équation

Pour composer un item du type système à une équation, ce dernier doit avoir les composantes suivantes:

a) une mise en situation pour bien situer la nature du problème,
b) un début du problème qui décrit la sitution spécifique qui sera traitée,
c) les données du problème qui peuvent être présentées sous plusieurs formes: équation, tableau, graphique ou naturelle,
d) les questions possibles pour des réponses ~~de type tel que: courte, à choix~~ multiple ou élaborée,
e) la réponse attendue qui peut avoir différentes formes: équation, tableau, graphique ou naturelle.

À chaque type de réponse, nous pouvons associer une habileté cognitive spécifique soit conceptualisation, application ou résolution. La section suivante décrit un exemple d'item d'un système à une équation où les cinq composantes sont présentées sous forme encadrée, le même principe s'applique au modèle 2 qui décrit un système à deux équations.

Mise en situation

On considère un magasin qui vend des tee-shirts

On commence par choisir les deux paramètres de l'équation du premier degré

x: étant la variable indépendante qui représente le temps en heures;

y: étant la variable dépendante qui représente le nombre de tee-shirts

On donne des informations sur l'ordonnée à l'origine ou sur la pente ou sur les deux ou sur une coordonnée.

Début du problème

À l'ouverture du magasin, il y avait 200 tee-shirts

Les données peuvent être représentées sous une des formes suivantes:

- données du problème sous forme d'équation
- données du problème sous forme tableau
- données du problème sous forme graphique
- données du problème sous forme naturelle

1) données du problème sous forme d'équation

Y = -12,5 x + 200
Variations possibles: a) l'équation a la forme: y = -12,5 x + b où b est l'ordonnée à l'origine, elle peut être négative, nulle ou positive b) l'équation a la forme: y = mx + 200 où m est la pente, elle peut être négative, nulle ou positive c) l'équation a la forme: y = mx + b où m et b peuvent être négatives, nulles ou positives d) l'équation a la forme: y = b où la pente est nulle et b peut être négative, nulle ou positive

2) Données du problème sous forme tableau

La table des valeurs ci-contre définit la relation entre le nombre de tee-shirts et le temps, en heures.

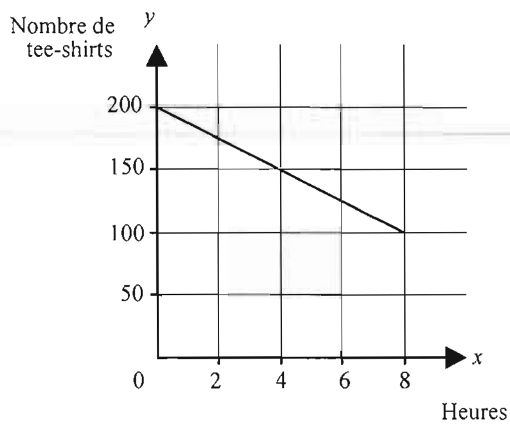
x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
0	200
4	150
8	100

N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

Variations possibles:
a) la coordonnée (0, 200) peut être absente
b) il faut avoir un minimum de trois coordonnées

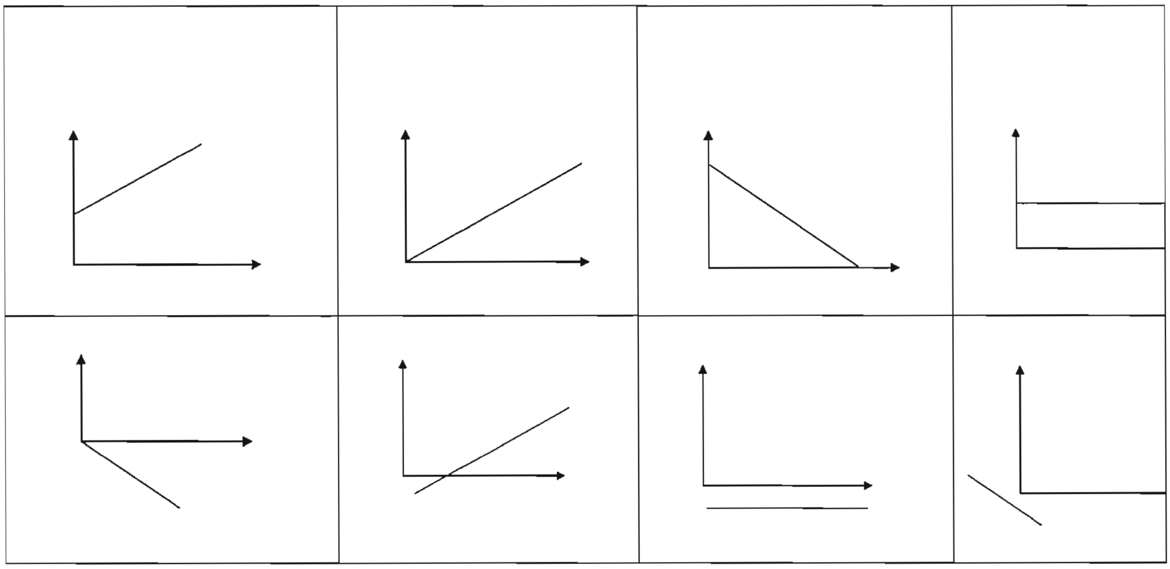
3) données du problème sous forme graphique

Le graphique ci-dessous illustre l'évolution du nombre de tee-shirts en fonction du temps (heures).



N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

Variations possibles:



4) Données du problème sous forme naturelle

On donne des informations sur une deuxième coordonnée ou sur la pente

Après 4 heures, il restait 150 tee-shirts.

Les données de l'équation du premier degré ne peuvent pas être représentées sous la forme de nombres.

La réponse peut être représentée sous une des formes suivantes:

- sous forme d'équation
- sous forme de tableau
- sous forme de graphique
- sous forme de nombre
- sous forme naturelle

1) Sous forme d'équation

a) Question possible pour une réponse courte

Écrivez une équation qui traduit le nombre y de tee-shirts restant après x heures. N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

b) Question possible pour une réponse élaborée

Écrivez une équation qui traduit le nombre y de tee-shirts restant après x heures; inscrivez votre démarche N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

c) Question possible pour une réponse à choix multiples

Choix: **A) y = 12,5 x – 200 C) y = -12,5 x + 200** **B) y = -200 x + 12,5 D) y = 200 x – 12,5**
1) On interchange la valeur de la pente avec l'ordonnée à l'origine pour le choix D 2) On inverse les signes des valeurs de la pente et de l'ordonnée à l'origine pour le choix A 3) On interchange et on inverse les signes de la pente et de l'ordonnée à l'origine pour le choix B. Il existe d'autres possibilités.

Réponse

Y = -12,5 x + 200

N.B. Selon le programme du MELS (ministère de l'Éducation du Québec), le type de réponse à choix multiple correspondrait à une habileté cognitive de conceptualisation et pour les types de réponses courtes ou élaborées elle correspondrait à une habileté d'application.

2) Représentation de la réponse sous forme de tableau

a) Question possible pour une réponse courte

Complétez la table de valeurs qui présente le nombre de tee-shirts **selon le nombre d'heures.** N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

Variations de la question:

x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
	200
4	
	100

x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
0	
	150
	100

x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
0	
4	150
8	

b) Question possible pour une réponse élaborée

<u>Complétez la table de valeurs qui présente</u> le nombre de tee-shirts <u>selon</u> le nombre d'heures; <u>inscrivez votre démarche.</u>

N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

Variations de la question:

x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
	200
4	
	100

x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
0	
4	150
8	

x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
0	
	150
	100
X	

c) Question possible pour une réponse à choix multiples

<u>Quelle table de valeurs représente</u> le nombre de tee-shirts <u>selon</u> le nombre d'heures?
N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

Choix:

A)

x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
0	200
4	150
8	100

B)

x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
0	150
4	200
8	100

C)

x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
200	0
150	4
100	8

D)

x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
150	0
200	4
100	8

1) on interchange les valeurs de x et de y pour le choix C
2) on change les coordonnées pour le choix B
3) on interchange les valeurs de x et de y et on change les coordonnées pour le choix D.

Il existe d'autres possibilités.

Réponse

x: temps en heures	y: nombre de tee-shirts
0	200
4	150
8	100

N.B. Selon le programme du MELS (ministère de l'Éducation du Québec), le type de réponse à choix multiple correspondrait à une habileté cognitive de conceptualisation et pour les types de réponses courtes ou élaborées elle correspondrait à une habileté d'application.

3) Représentation de la réponse sous forme de graphique

a) Question possible pour une réponse courte

Représentez graphiquement cette situation.

N.B. Les éléments fixes sont soulignés.

b) Question possible pour une réponse élaborée

Représentez graphiquement cette situation. Inscrivez votre démarche.

N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

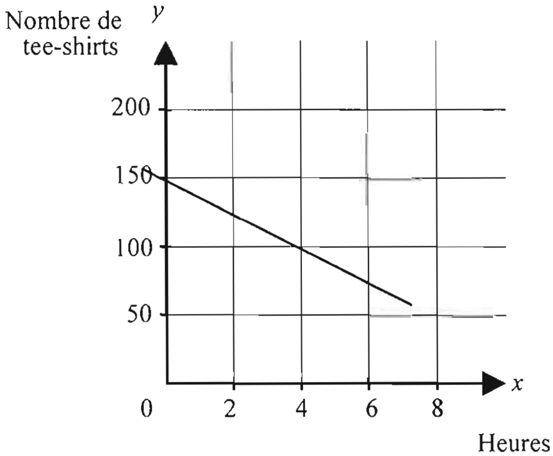
c) Question possible pour une réponse à choix multiples

Quel graphique représente le nombre de tee-shirts selon le nombre d'heures?

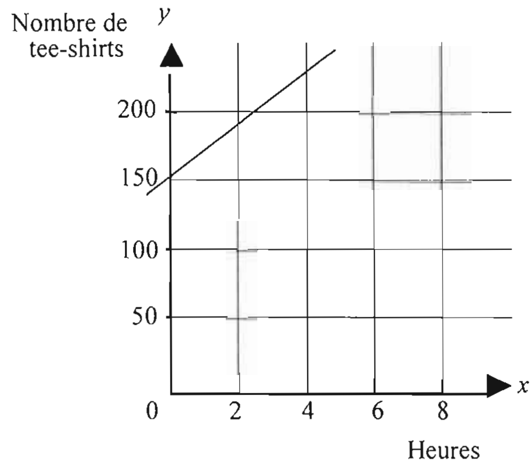
N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

Choix:

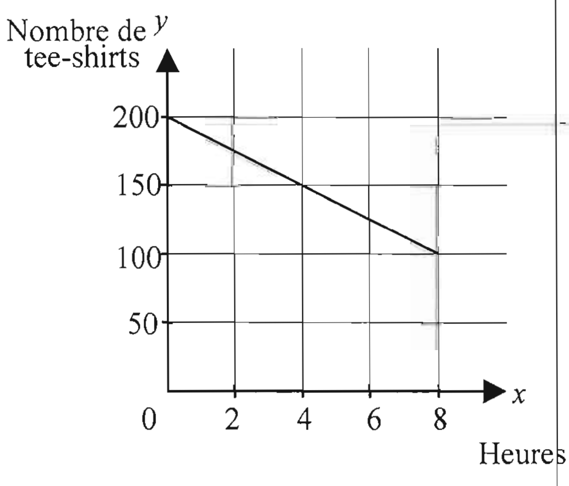
A)



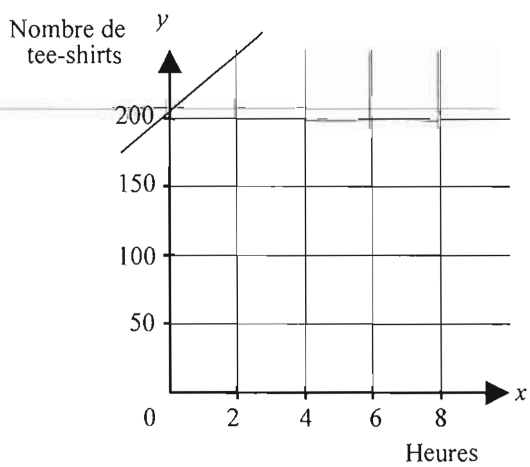
B)



C)



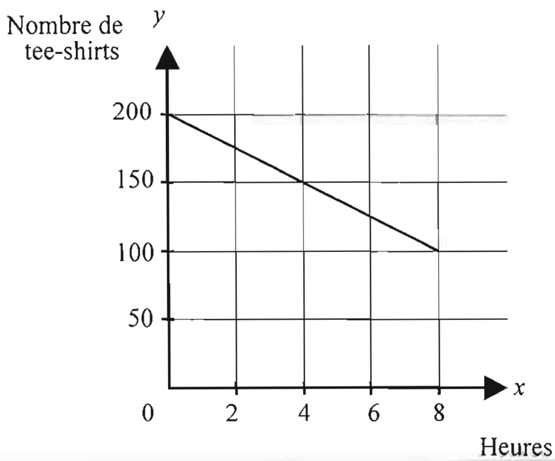
D)



On indique dans les choix multiples:
1) une droite ayant une pente qui augmente et une ordonnée à l'origine quelconque pour le choix B
2) une droite ayant une pente qui diminue et une ordonnée à l'origine quelconque pour le choix A
3) une droite ayant une pente qui augmente et la bonne coordonnée à l'origine pour le choix D.

Il existe d'autres possibilités.

Réponse



N.B. Selon le programme du MELS (ministère de l'Éducation du Québec), le type de réponse à choix multiple correspondrait à une habileté cognitive de conceptualisation et pour les types de réponses courtes ou élaborées elle correspondrait à une habileté d'application.

4) Représentation de la réponse sous forme de nombre

a) Question possible pour une réponse courte

Huit heures après l'ouverture du magasin combien reste-t-il de tee-shirts?

b) Question possible pour une réponse élaborée

Huit heures après l'ouverture du magasin, combien reste-t-il de Tee-shirts?
<u>Inscrivez votre démarche.</u>
N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

c) Question possible pour une réponse à choix multiples

Huit heures après l'ouverture du magasin, combien reste-t-il de tee-shirts?
Choix:
A) 100 B) 200
C) 150 C) 300
On indique dans les choix multiples:
1) l'ordonnée à l'origine pour le choix B
2) l'ordonnée d'une des coordonnées présentées comme données du problème pour le choix C
3) une ordonnée quelconque pour le choix C.

Il existe d'autres possibilités.

Réponse

100 tee-shirts

N.B. Selon le programme du MELS (ministère de l'Éducation du Québec), le type de réponse à choix multiple correspondrait à une habileté cognitive de conceptualisation, pour les types de réponses courtes elle correspondrait à une habileté d'application et pour les types de réponses élaborée elle correspondrait à une habileté de résolution.

5) Représentation de la réponse sous forme naturelle

a) Question possible pour une réponse élaborée

<u>Traduisez cette situation à l'aide de phrases</u>. <u>Inscrivez votre démarche</u>

N.B. Les éléments fixes sont soulignés.

b) Question possible pour une réponse à choix multiples

<u>Quelle phrase traduit cette situation</u>?
N.B. Les éléments fixes sont soulignés.

Choix:
A) Huit heures après l'ouverture du magasin, il restait 100 tee-shirts.
B) Huit heures après l'ouverture du magasin, il restait 200 tee-shirts.
C) Huit heures après l'ouverture du magasin, il restait 150 tee-shirts.
D) Huit heures après l'ouverture du magasin, il restait 300 tee-shirts.

On indique dans les choix multiples:

1) l'ordonnée à l'origine pour le choix C;
2) l'ordonnée d'une des coordonnées présentées comme données du problème pour

le choix A;

3) une ordonnée quelconque pour le choix D.

Il existe d'autres possibilités.

Réponse

À l'ouverture du magasin, il y avait 200 tee-shirts, 4 heures plus tard il restait 150 tee-shirts et huit heures plus tard il n'en restait que 100

N.B. Selon le programme du MELS (ministère de l'Éducation du Québec), le type de réponse à choix multiple correspondrait à une habileté cognitive de conceptualisation et pour les types de réponses courtes ou élaborées elle correspondrait à une habileté de résolution.

4.4.2 Modèle 2: système à deux équations

Dans cette section, nous avons appliqué le même procédé que le système à une équation présentée à la section 4.4.1.

Mise en situation

Deux écoles offrent des cours de danse

On commence par choisir le paramètre commun aux deux équations qui est la variable indépendante et les deux paramètres, qui sont des variables dépendantes, pour chaque équation:

h: le nombre d'heures

C1: le coût du premier cours

C2: le coût du deuxième cours.

Début du problème

Le coût des cours de danse suivis dans deux écoles différentes dépend du nombre d'heures (h). C1 est le coût du premier cours et C2 est le coût du deuxième cours.

Les données peuvent être représentées sous une des formes suivantes:

- données du problème sous forme d'équations
- données du problème sous forme de tableaux

- données du problème sous forme de graphiques
- données du problème sous forme naturelle

1) Données du problème sous forme d'équations

C1 = 5 h + 30
C2 = 6 h + 20

Variations possibles:
Chaque équation a la forme: y = mx + b où m et b peuvent être négatives, nulles ou positives

2) Données du problème sous forme de tableaux

<u>Les tables des valeurs ci-dessous définissent les relations entre</u> les coûts et le temps en heures

Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	30	35	40

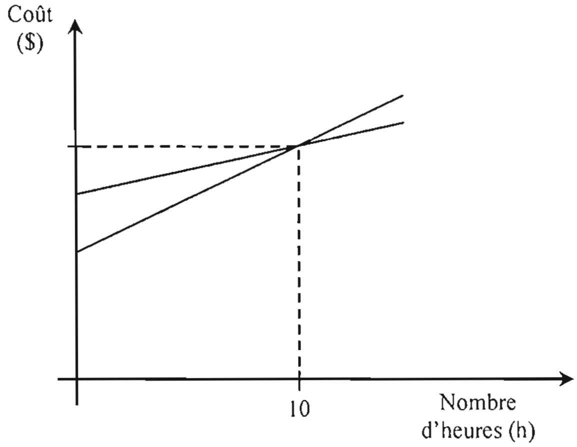
Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	20	26	32

N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

Variations possibles:
Les ordonnées peuvent être présentes ou non
Il faut avoir un minimum de trois coordonnées pour chaque équation

3) Données du problème sous forme de graphiques

<u>Le graphique suivant illustre</u> le coût des cours de danse <u>en fonction</u> du temps (heures)



N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

Variations possibles:
A) le graphique peut présenter une droite de pente positive et l'autre de pente négative

B) le graphique peut présenter une droite de pente nulle et l'autre de pente positive

C) le graphique peut présenter une droite de pente nulle et l'autre de pente négative
D) les ordonnées peuvent être positives ou nulles ou négatives.

4) Données du problème sous forme naturelle

Pour les cours C1, le coût de base est de 30 $ et le coût par heure est de 5 $; tandis que pour les cours C2, le coût de base est de 20 $ et le coût par heure est de 6 $.

Les données d'un système d'équations du premier degré ne peuvent pas être représentées sous forme de nombres.

La réponse peut être représentée sous une des formes suivantes:

- sous forme d'équations
- sous forme de tableaux
- sous forme de graphiques
- sous forme naturelle
- sous forme de nombres

1) Représentation de la réponse sous forme d'équations

a) Question possible pour une réponse courte

<u>Traduisez cette situation à l'aide d'un système d'équations</u>

N.B. Les éléments fixes sont soulignés.

b) Question possible pour une réponse élaborée

<u>Traduisez cette situation à l'aide d'un système d'équations</u>. <u>Inscrivez votre démarche.</u>

N.B. Ce qui est souligné sont des éléments fixes

c) Question possible pour une réponse à choix multiple

<u>Quel système d'équations traduit cette situation?</u>

N.B. Les éléments fixes sont soulignés.

A) C1 = 5 h + 30
C2 = 6 h + 20

B) C1 = 30 h + 5
C2 = 20 h + 6

C) C1 = 20 h + 5
C2 = 30 h + 6

D) C1 = 6 h + 20
C2 = 5 h + 30

1) On interchange les valeurs de la pente avec les valeurs de l'ordonnée à l'origine pour le choix B
2) on interchange les équations et les valeurs de la pente avec les valeurs de l'ordonnée à l'origine pour le choix C
3) on interchange les équations pour le choix D.

Il existe d'autres possibilités.

Réponse

C1 = 5 h + 30
C2 = 6 h + 20

N.B. Selon le programme du MELS (ministère de l'Éducation du Québec), le type de réponse à choix multiple correspondrait à une habileté cognitive de conceptualisation et *pour les types de réponses courtes ou élaborées elle correspondrait à une habileté d'application.*

2) Représentation de la réponse sous forme de tableaux

a) Question possible pour une réponse courte

Complétez les tables de valeurs qui présentent les coûts des cours de danse

N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

Temps (h)	0		2
Coût ($)		35	40

Temps (h)	0	1	
Coût ($)	20		32

Il existe d'autres possibilités.

b) Question possible pour une réponse élaborée

Complétez les tables de valeurs qui présentent les coûts des cours de danse. Inscrivez votre démarche

N.B. Ce qui est souligné sont des éléments fixes et le reste peut varier

Temps (h)	0		2
Coût ($)		35	40

Temps (h)	0	1	
Coût ($)	20		32

Il existe d'autres possibilités

c) Question possible pour une réponse à choix multiple

Parmi les tables de valeurs, lesquelles traduisent cette situation?

N.B. Les éléments fixes sont soulignés.

A)

Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	5	35	65

Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	6	26	46

B)

Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	5	25	45

Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	6	36	66

C)

Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	30	35	40

Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	20	26	32

D)

Temps (h)	30	35	4
Coût ($)	0	1	2

Temps (h)	20	26	32
Coût ($)	0	1	2

A) on utilise le système suivant: C1 = 30 h + 5 et C2 = 20 h + 6 pour calculer les coordonnées du choix A
B) on utilise le système d'équations suivant: C1 = 20 h + 5 et C2 = 30 h + 6 pour calculer les coordonnées du choix B
C) on utilise le système d'équations suivant: C1 = 6 h + 20 et C2 = 5 h + 30 pour calculer les coordonnées et on les inverse pour le choix D.

Il existe d'autres possibilités.

Réponse

Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	30	35	40

Temps (h)	0	1	2
Coût ($)	20	26	32

N.B. Selon le programme du MELS (ministère de l'Éducation du Québec), le type de réponse à choix multiple correspondrait à une habileté cognitive de conceptualisation et *pour les types de réponses courtes ou élaborées elle correspondrait à une habileté d'application.*

3) Représentation de la réponse sous forme de graphiques

a) Question possible pour une réponse courte

Représentez graphiquement ce système de relations

N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

b) Question possible pour une réponse élaborée

Représentez graphiquement ce système de relations. Inscrivez votre démarche

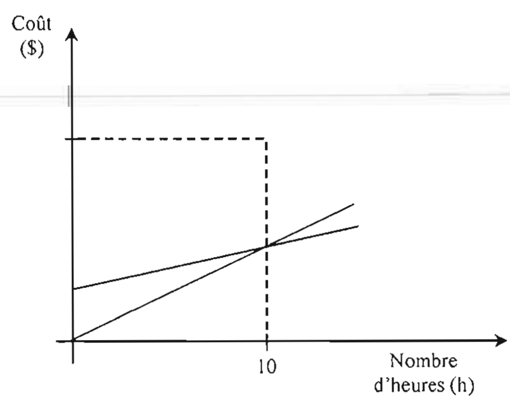
N.B. Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

c) Question possible pour une réponse à choix multiples

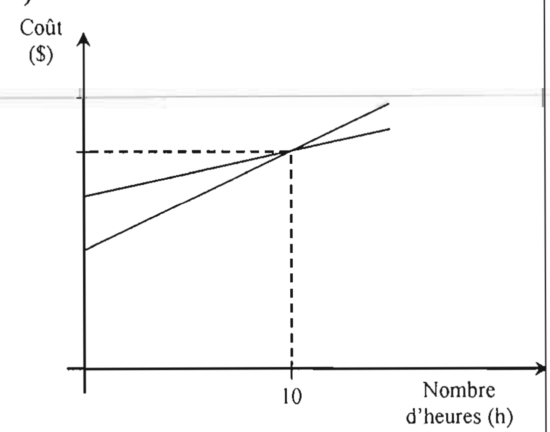
Quel graphique illustre ce système de relations?

N.B. Les éléments fixes sont soulignés.

A)

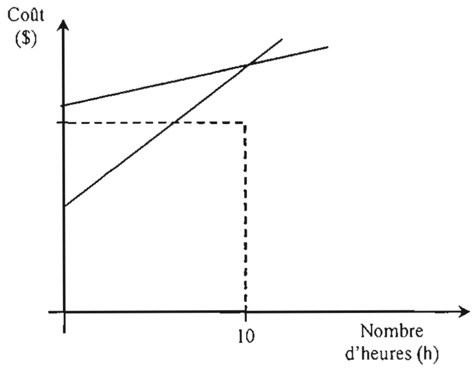


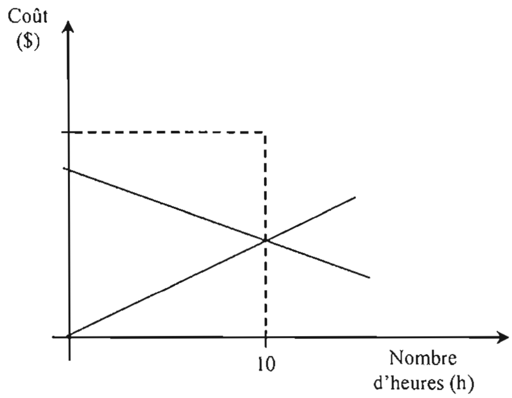
B)



C)

D)

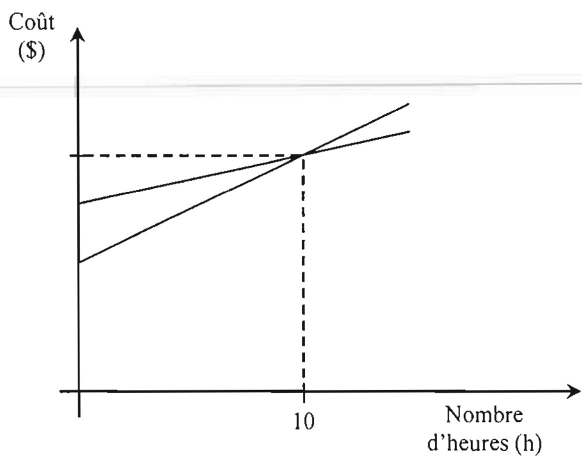




A) On modifie les ordonnées à l'origine des deux droites et on fait passer une des deux droites par l'origine (0,0) pour le choix A
B) On modifie l'ordonnée à l'origine d'une des droites et on modifie la pente de l'autre droite pour le choix C
C) On passe une des droites par l'origine (0,0) et on modifie la pente et le signe de l'autre droite pour le choix D.

Il existe d'autres possibilités.

Réponse



N.B. Selon le programme du MELS (ministère de l'Éducation du Québec), le type de réponse à choix multiple correspondrait à une habileté cognitive de conceptualisation et pour les types de réponses courtes ou élaborées elle correspondrait à une habileté d'application.

4) Représentation de la réponse sous forme naturelle

a) Question possible pour une réponse élaborée

Traduisez cette situation à l'aide des phrases. Inscrivez votre démarche

N.B. Les éléments fixes sont soulignés.

b) Question possible pour une réponse à choix multiples

Quelle phrase traduit cette situation?
N.B. Les éléments fixes sont soulignés.
Choix possibles:

A) Pour les cours C1, le coût de base est de 5 $ et le coût par heure est de 30 $; tandis que pour les cours C2, le coût de base est de 6 $ et le coût par heure est de 20 $

B) Pour les cours C1, le coût de base est de 30 $ et le coût par heure est de 5 $; tandis que pour les cours C2, le coût de base est de 20 $ et le coût par heure est de 6 $

C) Pour les cours C1, le coût de base est de 20 $ et le coût par heure est de 5 $; tandis que pour les cours C2, le coût de base est de 30 $ et le coût par heure est de 6 $

D) Pour les cours C1, le coût de base est de 30 $ et le coût par heure est de 6 $; tandis que pour les cours C2, ~~le coût de base est de 20 $ et le coût par heure~~ est de 5 $.

On indique dans les choix multiples:

1) on interchange la pente avec l'ordonnée à l'origine pour les deux équations pour le choix A
2) on interchange les pentes des deux équations pour le choix C
3) on interchange les pentes et les ordonnées à l'origine des deux équations pour le choix D.

Il existe d'autres possibilités.

Réponse

Pour les cours C1, le coût de base est de 30 $ et le coût par heure est de 5 $; tandis que pour les cours C2, le coût de base est de 20 $ et le coût par heure est de 6 $.

N.B. Selon le programme du MELS (ministère de l'Éducation du Québec), le type de réponse à choix multiple correspondrait à une habileté cognitive de conceptualisation, *pour les types de réponses courtes elle correspondrait à une habileté d'application et pour les types de réponses élaborée elle correspondrait à une habileté de résolution.*

5) Représentation de la réponse sous forme de nombres

a) Question possible pour une réponse courte

Pour combien d'heures le coût du cours sera-t-il le même dans les deux écoles? N.B : Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier.

b) Question possible pour une réponse élaborée

Pour combien d'heures le coût du cours sera-t-il le même dans les deux écoles? Laissez les traces de votre démarche N.B. Ce qui est souligné sont des éléments fixes.

c) Question possible pour une réponse à choix multiples

Pour combien d'heures le coût du cours sera-t-il le même dans les deux écoles? N.B: Les éléments fixes sont soulignés et les autres peuvent varier. **Choix:** **A) 10 B) 15** **C) 30 D) 5** On indique dans les choix multiples: 1) l'ordonnée à l'origine d'une des droites pour le choix D; 2) la pente d'une des droites pour le choix C; 3) une réponse quelconque pour le choix B. Il existe d'autres possibilités.

Réponse

10 heures

N.B. Selon le programme du MELS (ministère de l'Éducation du Québec), le type de réponse à choix multiple correspondrait à une habileté cognitive de conceptualisation, pour les types de réponses courtes elle correspondrait à une habileté d'application et pour les types de réponses élaborée elle correspondrait à une habileté de résolution.

4.5 Comment générer des questions d'un niveau de difficulté préétabli

Notre classification du niveau de difficulté est choisie selon les trois critères suivants:

1- si le taux de réussite est inférieur à 50 %, nous pouvons juger que la tâche a un niveau difficile;

2- si ce taux de réussite est situé entre 50 % et 75 %, alors la tâche a un niveau moyen;

3- finalement, si le taux de réussite est supérieur à 75 %, nous concluons que la tâche est facile.

Les 21 variables, que nous avons identifiées au tableau 13 de la section *résultats*, peuvent être utilisées pour générer des types de questions de degré de difficulté facile, moyen ou difficile. En se basant sur le tableau 24 de la section 4.3; nous avons construit les tableaux 25, 26, 27 et 28. Ces tableaux présentent quelques possibilités de combinaisons pour ces types de questions de degré de difficulté différentes. D'autres combinaisons peuvent être trouvées en développant un logiciel qui peut classer les 5184 possibilités qui existent.

À titre d'exemple, voici les trois étapes de vérification (d'autres étapes de vérification existent, mais elles nécessitent l'utilisation d'un logiciel dédié pour les trouver) que nous avons validées pour générer une question facile avec un taux de réussite de 75 % et plus:

1) on doit utiliser la possibilité 1 présentée au tableau 25;
2) on doit choisir une possibilité parmi les huit possibilités au tableau 26;
3) finalement, on doit choisir une possibilité parmi les dix-huit possibilités présentées au tableau 27.

Ces étapes sont essentielles pour valider le bon niveau de difficulté d'une question posée. Ce niveau de difficulté est valable pour certains niveaux d'élèves, car elle peut être facile pour des élèves dont le niveau de scolarité est supérieur et difficile pour des élèves de faible scolarité. Par exemple, une question peut avoir un niveau de difficulté facile pour un élève de quatrième secondaire fort et de niveau moyen pour un élève de quatrième secondaire faible.

Tableau 25. Combinaison: interaction des représentations, données, présence de la pente et de l'ordonnée à l'origine

Possibilité	Difficulté de l'interaction des représentations données-réponse	Difficulté des données	Présence de la pente	Présence de l'ordonnée
1	Facile	Facile	Oui	Oui

Tableau 26. Combinaison: signe de la pente et de l'ordonnée à l'origine

Possibilité	Signe de la pente	Signe de l'ordonnée à l'origine
1	Positif	Positif
2	Négatif	Positif
3	Négatif	Négatif
4	Les deux	Les deux
5	Nul	Positif
6	Nul	Négatif
7	Positif	Nul
8	Négatif	Nul

Tableau 27. Combinaisons: habileté, type de réponse et nombre d'équations

Possibilité	Habileté cognitive	Type de réponse	Nombre d'équations
1	Concept	Multiple	Une
2	Concept	Multiple	Deux
3	Concept	Courte	Une
4	Concept	Courte	Deux
5	Concept	Élaborée	Une
6	Concept	Élaborée	Deux
7	Application	Multiple	Une
8	Application	Multiple	Deux
9	Application	Courte	Une
10	Application	Courte	Deux
11	Application	Élaborée	Une
12	Application	Élaborée	Deux
13	Résolution	Multiple	Une
14	Résolution	Multiple	Deux
15	Résolution	Courte	Une
16	Résolution	Courte	Deux
17	Résolution	Élaborée	Une
18	Résolution	Élaborée	Deux

Nous constatons que le nombre de possibilités de combinaisons est de: 1 X 8 X 18 = 144 possibilités pour générer des questions faciles.

Dans la section suivante, dans le but de valider l'approche proposée, nous allons présenter trois exemples de niveau de difficulté facile, moyen et difficile. Le calcul des taux de réussite se fait à partir du tableau 23 c'est-à-dire, en utilisant les coefficients de régressions correspondant au calcul du taux de réussite des neuf variables. Aussi, on peut utiliser le tableau 24 qui présente les coefficients de régressions pour le calcul du taux de réussite des vingt-et-une variables.

a) exemple de niveau facile:

Dans le cas des 9 variables, si nous choisissons les caractéristiques des données comme suit:

1) La difficulté de l'interaction des représentations donnée-réponse est facile;
2) La pente est présente;
3) L'ordonnée à l'origine est absente;
4) La pente est positive;
5) L'ordonnée est positive;
6) L'habileté cognitive est application;
7) Le type de réponse est court;
8) Deux équations composent le problème.

On obtient comme taux de réussite pour le niveau secondaire trois, la valeur suivante:

0,15 + -0,10 + -0,06 + 0 + 0,10 + 0,40 + -0,02 + -0,09 + 0,18 + 0,07 = 63 %

Par ailleurs, si nous choisissons les mêmes paramètres, mais pour le niveau quatrième secondaire faible, on obtient un taux de réussite qui s'exprime comme suit:

0,15 + -0,10 + -0,06 + 0 + 0,10 + 0,40 + -0,02 + -0,09 + 0,18 + 0,14 = 70 %

On peut généraliser et procéder de la même façon pour calculer le taux de réussite des autres niveaux. En effet, pour le niveau quatrième secondaire moyen, on obtient:

0,15+ -0,10 + -0,06 + 0 + 0,10 + 0,40 + -0,02 + -0,09 + 0,18 + 0,22 = 78 %

Et finalement pour le niveau quatrième secondaire fort, on obtient:

0.15 + -0,10 + -0,06 + 0 + 0,10 + 0,40 + -0,02 + -0,09 + 0,18 + 0,29 = 85 %

Cette combinaison a un niveau de difficulté facile pour les niveaux quatrième secondaire moyen et fort. Par contre, elle représente un niveau de difficulté moyen pour les niveaux troisième secondaire et quatrième secondaire faible, car le taux de réussite est inférieur à 75 %. Néanmoins, on remarque que le taux de réussite augmente avec le niveau de l'élève, ce qui est normal.

Pour générer une question moyenne, c'est-à-dire un taux de réussite se situant entre 50 % et 74 %, on suit les trois étapes suivantes:

1) tout d'abord, on choisit une possibilité parmi les trois possibilités présentées au tableau 28;
2) par la suite, on choisit une possibilité parmi les huit possibilités présentées au tableau 26;
3) finalement on choisit une possibilité parmi les dix-huit possibilités présentées au tableau 27.

Tableau 28. Combinaison: interaction des représentations, données, présence de la pente et de l'ordonnée à l'origine

Possibilité	Difficulté de l'interaction des représentations données-réponse	Difficulté des données	Présence de la pente	Présence de l'ordonnée
1	Facile	Difficile	Non	Non
2	Moyen	Moyen	Oui	Non
3	Difficile	Facile	Oui	Oui

Le nombre de possibilités de combinaisons est de: 3 X 8 X 18 = 432 cas pour générer des questions moyennes.

Le calcul des taux de réussite se fait à partir du tableau 23, c'est-à-dire en utilisant les coefficients correspondant au calcul du taux de réussite des 9 variables.

b) exemple de niveau moyen:

Si nous choisissons les caractéristiques des données comme suit:

1) La difficulté de l'interaction des représentations données-réponse est facile;

2) La pente est présente;

3) L'ordonnée à l'origine est absente;

4) La pente est positive;

5) L'ordonnée à l'origine est positive;

6) L'habileté cognitive est conceptuelle;

7) Le type de réponse est un choix multiple;

Une équation compose le problème.

On obtient alors pour le niveau trois, la valeur suivante:

0,15 + -0,10 + -0,06 + 0,10 + 0,40 + -0,01 + -0,05 + 0,09 + 0,07 = 60 %

Si nous choisissons les mêmes paramètres, mais pour le niveau secondaire quatre faible, on obtient:

0,15 + -0,10 + -0,068 + 0,10 + 0,40 + -0,01 + -0,05 + 0,09 + 0,14 = 67 %.

De la même façon, on calcule pour les autres niveaux. Pour le niveau secondaire quatre moyen, on obtient:

0,15 + -0,10 + -0,06 + 0,10 + 0,40 + -0,01 + -0,05 + 0,09 + 0,22 = 75 %.

Pour le niveau secondaire quatre fort, on obtient:

0,15 + -0,10 + -0,06 + 0,10+ 0,40 + -0,01 + -0,05 + 0,09 + 0,29 = 82 %.

Cette combinaison a un niveau de difficulté moyen pour les niveaux secondaire trois, quatre faible et quatre moyen par contre, elle a un niveau de difficulté facile pour le niveau secondaire quatre fort.

Finalement, pour générer une question difficile, c'est-à-dire un taux de réussite inférieur à 50 %, on doit suivre les étapes suivantes:

1) on choisit une possibilité parmi les trois possibilités présentées au tableau 29;
2) on choisit une possibilité parmi les huit possibilités présentées au tableau 26;
3) on choisit une possibilité parmi les dix-huit possibilités présentées au tableau 27.

Tableau 29. Combinaison: interaction des représentations, données, présence de la pente et de l'ordonnée à l'origine

Possibilité	Difficulté de l'interaction des représentations données-réponse	Difficulté des données	Présence de la pente	Présence de l'ordonnée
1	Moyenne	Difficile	Non	Non
2	Difficile	Difficile	Non	Non

Le nombre de possibilités de combinaisons est de: 2 X 8 X 18 = 288 cas pour générer des questions difficiles.

Le calcul des taux de réussite se fait à partir du tableau 24, c'est-à-dire les coefficients correspondant au calcul du taux de réussite des neufs variables.

c) exemple de niveau difficile:

Si nous choisissons les caractéristiques des données comme suit:

1) La difficulté de l'interaction des représentations données-réponse est difficile;
2) La pente est absente;
3) L'ordonnée à l'origine est absente;
4) La pente est négative;
5) L'ordonnée à l'origine est négative;
6) L'habileté cognitive est résolution;
7) Le type de réponse est court;
8) Une équation compose le problème.

On obtient alors pour le niveau secondaire trois, la valeur suivante:

0,15 + -0,30 + 0 + 0 + 0,13 + 0,03 + -0,03 + -0,09 + 0,09 + 0,07 = 5 %

Si nous choisissons les mêmes paramètres, mais pour le niveau secondaire quatre faible, on obtient:

0,15 + -0,30 + 0 + 0 + 0,13 + 0,03 + -0,03 + -0,09 + 0,09 + 0,14 = 12 %.

De la même façon, on calcule de la même façon les autres niveaux. Pour le niveau secondaire quatre moyen, on obtient:

0,15 + -0,30 + 0 + 0 + 0,13 + 0,03 + -0,03 + -0,09 + 0,09 + 0,22 = 20 %.

Pour le niveau quatrième secondaire fort, on obtient:

0,15 + -0,30 + 0 + 0 + 0,13 + 0,03 + -0,03 + -0,09 + 0,09 + 0,29 = 27 %.

Nous pouvons conclure que cette combinaison est difficile pour tous les niveaux.

4.6 Synthèse des possibilités des modèles proposés

En résumé, pour chacun des deux modèles présentés précédemment (système à une équation et système à deux équations), nous avons produit 864 items différents avec un taux de réussite prédit allant de 0,04 % à 98,7 %. Pour ces tâches d'évaluation, 144 items ont un niveau de difficulté facile (entre 75 % et 100 %), 432 items ont un niveau de difficulté moyen (entre 50 % et 75 %) et 288 items ont un niveau de difficulté difficile (inférieur à 50 %). Ce modèle présente un coefficient de détermination de 0,78 du taux de réussite.

Les 864 items différents ne correspondent pas à toutes les possibilités du modèle qui sont plutôt au nombre de 5184 (3 X 3 X 2 X 2 X 8 X 18 = 5184), plus difficiles à classer manuellement sans l'aide du logiciel.

Cependant, en utilisant les variations de questions (sans changer le niveau de difficulté), par exemple, avec 20 variations, on obtient 20 X 5184 ≈ 100 000 questions différentes.

4.7 Comparaison avec les études précédentes

L'analyse présentée dans la section résultats a permis d'obtenir un coefficient de détermination de 0,78 pour un modèle basé sur 9 variables prédictives du taux de réussite observé pour les tâches d'évaluation retenues.

En comparant le résultat obtenus pour ce modèle avec les recherches présentées dans le cadre théorique, nous pouvons constater ce qui suit:

Premièrement, Sheehan, Kathleen, Mislevy, Robert (1994) ont obtenu un coefficient de détermination de 0,39 pour leur meilleur modèle en algèbre, le modèle 4. Ce qui est significativement inférieur à la valeur de 0,78 obtenue dans la présente recherche. Leur étude était plus générale tandis que la nôtre porte spécifiquement sur l'équation du premier degré.

Deuxièmement, Sebrechts, Enright, Bennett et Martin (1996) ont enregistré 0,39 comme coefficient de détermination en algèbre pour les réponses élaborées et 0,47 pour les réponses à choix multiples. Nos résultats, encore une fois, sont supérieurs aux leurs.

Troisièmement, vingt problèmes empruntés à la recherche mentionnée ci-dessus ont été aussi utilisés par Enright et Sheehan (2002). On constate que leurs résultats pour l'algèbre n'ont pas été améliorés. Ces derniers ont obtenu 0,36 comme coefficient de détermination. Nos résultats sont encore meilleurs, malgré le petit nombre d'items utilisés.

En plus des recherches précédentes qui ont étudié l'algèbre avec les nombres et la géométrie; les problèmes de distance-taux-temps ont aussi été considérés par les chercheurs

Lane (1991a), Sebrechts, Enright, Bennett et Martin (1996) et Enright et Sheehan (2002). Enfin Shulz, Lee et Mullen (2005) ont considéré les cinq contenus suivants: les nombres, la géométrie, les statistiques, les mesures et l'algèbre. En comparant leurs recherches avec notre étude, nous remarquons que la nôtre, qui se concentre sur l'algèbre, est plus spécifique et nos résultats démontrent un coefficient de détermination supérieur à ceux des études précédentes.

Du point de vue du nombre de variables prédictives considérés dans les études des chercheurs précédents, nous constatons qu'ils ont traité un grand nombre de variables prédictives pour leurs items. Par exemple, Sheehan et Mislevy (1994) ont utilisé 114 items et trente variables, et Sebrechts, Enright, Bennett et Martin (1996) avaient analysé 6 variables pour les 20 items à réponse élaborée et 6 variables pour les 20 items à réponses de type à choix multiples. Enright et Sheehan (2002) ont utilisé quant à eux 11 variables pour 339 items et leur coefficient de détermination (0,36 pour l'algèbre) est aussi inférieur au nôtre qui est de 0,78. Donc, nous pouvons conclure que pour nos 100 items analysés, le nombre de nos variables (9 variables) est raisonnable.

D'ailleurs, nous avons constaté que ces variables prédictives expliquent bien le taux de réussite. Nous avons démontré, à partir des résultats de simulations, que nous pouvons prédire efficacement le niveau de difficulté pour les équations du premier degré; alors que les résultats de la recherche effectuée par Shulz, Lee et Mullen (2005) concluent que très peu d'items correspondaient au niveau de difficulté prévue. De plus, les prédictions des paramètres d'items par Enright et Sheehan (2002) ont été réalisées à partir de tâches d'évaluation dans un contexte très contrôlé. Par conséquent, leurs travaux ne sont pas applicables, comme notre recherche, aux divers contextes éducatifs.

Notre recherche se concentre sur un domaine spécifique de l'algèbre. Dans ce contexte, nous avons relevé des variables qui influencent le niveau de difficulté d'une équation du premier degré. Parmi les vingt-et une variables que nous avons identifiées pour expliquer le taux de réussite, notre recherche semble indiquer que les neufs variables suivantes sont les plus importantes:

- la présence de l'ordonnée à l'origine dans les données du problème
- la présence de la pente dans les données du problème
- le signe de la pente
- le signe de l'ordonnée à l'origine
- le nombre d'équations
- le niveau des élèves
- l'habileté cognitive
- le type de réponse
- l'interaction des représentations données-réponse.

Ces variables nous ont permis de développer un modèle qui peut produire plus de 5184 items différents avec un taux de réussite prédit allant de 0,04 % (item très difficile) à 98,7 % (item très facile). Nous avons démontré qu'on peut prédire le niveau de difficulté avec un coefficient de détermination de 0,78 pour les équations du premier degré, et ce, même si les items n'ont pas été rédigés par les mêmes personnes.

Conclusion

Notre étude s'inscrit dans le courant des recherches portant sur les productions de tâches d'évaluation. Nous nous sommes appuyés sur les recherches qui ont mis en lumière les différents facteurs ou paramètres susceptibles d'influencer le niveau de difficulté des tâches. Nous nous sommes intéressés plus spécifiquement à l'identification des paramètres permettant de connaître *a priori* le niveau de difficulté des tâches d'évaluation des équations du premier degré en algèbre afin de résoudre le problème d'équivalence des tâches d'évaluation.

Le travail effectué dans le cadre de cette recherche consistait à identifier et à utiliser les variables prédictives du taux de réussite obtenues pour les tâches d'évaluation. Afin d'atteindre nos objectifs, nous avons choisi de travailler avec les données d'un échantillon des épreuves de la banque d'instruments de mesure du réseau secondaire (BIM). Ces épreuves ont été administrées auprès des élèves de plusieurs commissions scolaires du Québec. À partir de ces données, nous avons complété la classification des paramètres spécifiques aux équations du premier degré. Ensuite, nous avons appliqué le modèle de régression linéaire pour vérifier si le taux de réussite des tâches d'évaluation pouvait être expliqué par ces variables.

En conformité avec d'autres études, nous avons été en mesure de constater que les paramètres prédictifs expliquent le taux de réussite avec un coefficient de détermination de 0,78. Nous avons aussi démontré qu'on peut prédire efficacement le niveau de difficulté pour les équations du premier degré, et ce, même si les items n'ont pas été rédigés par les mêmes personnes.

L'originalité de notre travail a été de montrer comment générer des items en utilisant les variables prédictives. Ce concept a été validé sur deux modèles: un modèle à une équation et un autre à deux équations qui permettent de générer plus de 5184 items de niveau de difficulté différents. De plus, nous avons expliqué le processus qui permet de générer des items avec leur niveau de difficulté prévu à l'avance. Le modèle que nous avons proposé pourrait être utile pour d'autres disciplines, comme les sciences qui utilisent des équations du premier degré. Le modèle pourrait aussi être informatisé et utilisé par les enseignants.

Les résultats obtenus dans le cadre de cette étude ouvrent la porte à d'autres recherches. Ces recherches pourraient explorer les équations du deuxième degré ou d'autres fonctions. Elles pourraient aussi tenter de modéliser les paramètres de discrimination et de pseudo-chance spécifiques issues de la théorie de la réponse à l'item. D'autres recherches pourraient tenter d'appliquer le modèle developpé à de plus grandes échelles en utilisant des données provenant d'enquêtes internationales telles que le TIMSS et le PIRLS. Ces pistes de recherche pourraient certainement enrichir la compréhension des facteurs influençant la difficulté des tâches d'évaluation. Nous souhaitons que notre recherche, réalisée avec beaucoup de passion, constitue un premier pas vers la production d'items avec des degrés de difficulté préalablement déterminés. Nous sommes persuadés du bien-fondé de cette étude et de l'aide qu'elle pourra apporter aux enseignants et aux concepteurs de programmes d'enseignement dans le milieu scolaire afin de mieux évaluer leurs élèves.

RÉFÉRENCES

Airasian, P.W. (1988), Measurement Driven Instruction: a closer look. *Educational Measurement: Issues and Practice,* 7(4), 6-11.

Aschbacher, P.R. (1991). Performance assessment: State activity, interest and concerns. *Applied Measurement in Education,* 4(1), 275-288.

Barnes, L.B (1998). The Generalizability of a Performance Assessment Measuring Achievement in Eighth-Grade Mathematics. *Applied Measurement in Education,* 11(2), 179-194.

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics,* 52, 3-28.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Nichols, D. et Hawks, J. (1992). Development of the process conception of function. *Educational studies in mathematics*, 23(1), 247-285.

Breton, G. et Smith, J-G. (1987). *Mathématique au secondaire. Montréal, Québec. BMS 414*: Édition HRW, 118p.

Breiman, L., Friedman, J.H., Olshen, R. et Stone, C.J. (1984). Classification and regression Trees. Belmont, CA: *Wadsworth International Group.*

Carpenter, P. T., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M. et Reys, R. E. (1980). Solving Verbal Problems: Results and Implications from National Assessment. *The Arithmetic teacher*, 28(1), 8-12.

Cronbach, L. J. (1957). The two disciples of scientific psychology. *American Psychologist,* 12(1), 671-684.

Confrey, J. et Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics* (26), 135-164.

DeMars, C. E. (1998). *The impact of test consequences and response format on performance.* Doctoral dissertation, Michigan State University, 1998.

De Serres et Groleau (1997). *Mathématiques et langages*, Collège Jean de Brébeuf. Direction pédagogique, service de la recherche, 229p.

De Serres, M., Bélanger, M., Piché, M.C., Riopel, M., Staub, C. et de Grandpré, C. (2003). *Intervenir sur les langages en mathématiques et en sciences, Montréal*: Modulo, 390 p.

Dreyfus, A. et Mazouz, Y. (1993). « L'utilisation judicieuse du langage des graphiques par les élèves de second dans le domaine de la biologie ». *Les Sciences de l'Éducation pour l'ère nouvelle* 1-3/ 245-266.

Duval, R. (1993). « Graphiques et équations, Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation », *Les Sciences de l'Éducation pour l'ère nouvelle* 1-3/ 57-72.

Educational Testing Service (1996). GRE. *Practicing to take the general test: Big Book.* Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Embretson, S. (1983). Construct validity: Construct representation versus nomothetic span. *Psychological Bulletin,* 93(1), 179-197.

Enright, Bennett et Martin (1996). Using algebra word problems to assess quantitative ability: Attributes, strategies, and errors. *Cognition and instruction,* 14(3), 285-343.

Enright, M. K. et Sheehan, K. M. (2002). Modeling the difficulty of quantitative reasoning items: Implications for item generation. In Irvine, S. H. and Kyllonen, P. C. *Item Generation for Test Development, Mahwah, NJ: LEA.*

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of function. *Educational studies in mathematics*, 21, 521-544.

Fischer, G. H. (1995). The Linerar logistic test mode. Dans G. H. Fisher et I. O. Molenaar (Éds): *Rasch models. Foundations, recent developments, and applications.* New York, NJ: Springer-Verlag.

Guilford, J. P. (1956). The structure of intellect. *Psychological Bulletin*, 53, 267-293.

Group for the Psychology of Mathematics Education (2004). *From functions to equation: Introduction of algebraic thinking to 13 year-old students.* Proceedings of the 28th Conference of the International research in Mathematics education, Vol. 4, 393-400.

Guay, S. et Lemay, S. (1997). *Scénarios, mathématiques 4^e^ secondaire. Laval, Québec*: Edition HRW, 313p.

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), p. 79-103.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The collegeMathematics journal*, 20(4), 282-300.

Laborde, C. (1983). « Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique: Langue naturelle et écriture symbolique ». *Recherche en didactiques des mathématiques*, 4(1), 199-203.

Lane, S. (1991a). Use of Restricted Item Response Models for Examining Item Difficulty Ordering and Slope Uniformity. *Educational measurement,* vol. 28, No. 4, p.295-309.

Lane, S. (1991b, juin). Implications of cognitive psychology for measurement and testing: assessing students'knowledge structures. *Educational measurement,* 10(1), 31-36.

Lobato, Siebert (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(1), p. 87-116.

Lord, F.M. et Novick, M.R. (1968). Statistical theories of mental test scores. Reading, MA: Addison-Wesley.

Luzin, N. (1998). 'The evolution of … function: Part 2' *American MathematicalMonthly,* 105, 263-270.

MacGregor, M. et Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 30, No. 4, 449-467.

Masters, G. N. et Mislevy, R. J. (1993). New views of student learning: Implication for educational measurement. In N. Frederickson, R. J. Mislevy, & I. I. Bejar (Eds.), *Test theory for a new generation of tests.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mayer, R. E., Larkin, J.H. et Kadane, J. B. (1984). A cognitive analysis of mathematical problem-solving ability. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (vol. 2, 231-273). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with function in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics.* 56, 255-286.

Moschkovich, J. N. (1992). *Making Sense of Linear Equations and Graphs: An Analysis of Students' Conceptions and Language Use*. Dissertation submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Education in the Graduate division of the University of California at Berkeley.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. et Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representation of linear relations, and connections among them, in T.A. Romberg, E. Fennema et T.P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of function.* Erlbaum, Hillsdale, NJ, 69-100.

Moschkovich, J. N. (2004). Appropriating mathematical practices: A case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor. *Educational studies in mathematics,* 55, p. 49-80.

Nadot, S. (1993). « Les représentations graphiques des fonctions ». *Les Sciences de l'Éducation pour l'ère nouvelle,* 1-3/ 137-158.

Perrin-Glorian, M-J. (1994). Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège: ce que nous apprend l'étude de « classes faibles », *Petit x*, No. 35, 5-40.

Putnam, R. T., Lampert, M. et Peterson, P. (1990). *Alternative perspectives of knowing mathematics in elementary schools*, In C. B. Cazden (Ed.). Review of research in education (p. 57-150). Washington, DC: American Educational Research Association.

Programme de formation de l'école québécoise~~. (2001).~~ ~~*Enseignement secondaire:*~~ Québec, Ministère de l'Éducation.

Rojano T. (2002). *Mathematics learning in the junior secondary school: students' access to significant mathematical ideas*. Handbook of international research in mathematics education, LEA, 806p.

Sebrechts, M. M., Enright, M., Bennett, R. E. et Martin, K. (1996). Using algebra word-problems to assess quantitative ability: Attributes, strategies, and errors. *Cognition and Instruction*, 14(3), 285-343.

Sheehan, K. et Mislevy, J. (1994). *A tree-Based analysis of items from an assessment of basic mathematics skills*. Educational Testing Service, Princeton, N. J. Reports – Evaluative/ feasibility (142). 42p.

Schulz, E. M., Lee, W.C. et Mullen K. (2005). A domain-level approach to describing growth in achievement. *Journal of educational measurement*, 42 (1), 1-26.

Schwarz, J. et Yerushalmy, M. (1992). *"Getting students to function in and withalgebra"*, in G. Harel et E. Dubinsky (Eds.). The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (MAA Notes). Mathematical Association of America, Washington, DC, Vol. 25, 261-289.

Sfard, A. (1992). *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification* – the case of function, in G. Harel and E. Dubinsky (Eds.). The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (MAA Notes).Mathematical Association of America, Washington DC, 25, 261-289.

Stump, S. L. (2001). Developing preservice teacher's pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 207-227.

Vergnaud, G., Cortes A. et Favre-Artigue (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Livre: Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques. *Problèmes épistémologiques et didactiques*. Presses universitaires de France, 1993, 398p.

Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 125-147.

Yerushalmy, M. et Chazan D. (2002). Algebra: curricular, graphing, and research. Flux in school algebra: Graphing technology, and research on student learning and teacher knowledge. *Handbook of International Research in Mathematics Education*, LEA, 806p.

ANNEXE I

Définitions

Équation: c'est une règle qui exprime la relation entre les variables.
La forme générale d'une équation du premier degré à deux variables est $ax + by = c$ dans laquelle a, b et c sont des nombres réels; x et y sont les variables représentant les inconnues.
(Breton et Smith 1987).

Variable: Un symbole qui peut représenter une valeur dans un intervalle de nombre.
Dans une situation où intervient un lien de dépendance; la variable indépendante est choisie arbitrairement et la variable dépendante dépend de la variable indépendante.
(Breton et Smith 1987).

Systèmes d'équations: un système d'équations est un ensemble d'équations tirées d'une même situation et dans laquelle les mêmes variables représentent les mêmes inconnues.
(Breton et Smith 1987).

Fonction: Une fonction est un lien entre deux variables: une variable indépendante généralement symbolisée par la variable x et une variable dépendante généralement symbolisée par la variable y.
(Breton et Smith 1987).

Elle est notée symboliquement par la règle: $y = f(x)$
Forme générale: $f(x) = mx + b$; m: pente, b: ordonnée à l'origine quand $x = 0$
Et on obtient le zéro de la fonction en remplaçant $f(x)$ ou y par 0.

ANNEXE II

Tableaux pour la section *méthodologie*

Tableau 30. Collaboration, niveau secondaire trois

N° d'épreuve	**Années de collaboration**
1	1996, 1997, 1998
2	1997, 1998, 1999
3	1998, 1999, 2000
4	1998, 1999, 2000
5	1999, 2000, 2001
6	2000, 2001, 2002
7	1999, 2000, 2001
8	2000, 2001, 2002
10	1997
11	2001, 2002,2003
12	2001, 2002,2003

Tableau 31. Collaboration, niveau secondaire quatre faible

N° d'épreuve	**Années de collaboration**
1	1997, 1998, 1999
2	1999, 2000, 2001
3	1998, 1999, 2000
4	1999, 2000, 2001
5	1998
7	2000, 2001, 2002
8	2000, 2001, 2002
10	2001, 2002, 2003
11	2001

Tableau 32. Collaboration, niveau secondaire quatre moyen

N° d'épreuve	**Années de collaboration**
1	2001, 2002, 2003

Tableau 33. Collaboration, niveau secondaire quatre fort

N° d'épreuve	Années de collaboration
1	1997, 1998, 1999
2	1997
3	1998
4	1999
5	2000
6	2001

Tableau 34. Répartition des questions, niveau secondaire trois

Épreuve	Habileté: concept	Habileté: application	Habileté: résolution
No.	N° des questions	N° des questions	N° des questions
1	1, 2, 3,8	7, 9, 10	19, 20 21
2	3, 4, 5, 6	9, 10, 11, 12	19, 20, 21
3	1, 2, 3, 9	4, 8, 10, 11	23, 24, 25
4	1, 2, 3, 4	5, 6, 13, 14, 15	20, 21
5	1, 2, 11	3, 10, 12, 13	19, 20, 21
6	1, 2, 3, 13	4, 5, 6, 7, 14	19, 20, 21
7	1, 2, 4, 8	3, 9, 10, 11	19, 20, 21
8	1,2, 3, 10	4, 11, 12, 13	19, 20, 21
10	12, 13, 14	1, 2, 15, 16, 17	6, 7, 18
11	1, 2, 12	3, 13, 14, 15	18, 19, 20, 21
12	1, 3, 10, 11	2, 4, 12, 13	20, 21, 22

Tableau 35. Répartition des questions, niveau secondaire quatre faible

Épreuve	Habileté: concept	Habileté: application	Habileté: résolution
No.	N° des questions	N° des questions	No. des questions
1	1, 3, 17	2, 8, 12, 21	20, 23, 24
2	1, 2, 13	3, 4, 14, 15	20, 21, 22
3	1, 10, 14	2, 11, 12, 13	18, 19, 20
4	1, 2, 3	12, 13, 14, 15	21, 22, 23
5	1, 2	3, 4, 5, 14	18, 19, 20
7	1, 2, 3	4, 5, 15, 16	19, 20, 21
8	1, 2, 3	12, 13, 14, 15	18, 19, 20
10	1, 2, 3	4, 11, 12	18, 19, 20
11	3, 4	1, 2, 5, 6	18, 19, 20

Tableau 36. Répartition des questions, niveau secondaire quatre moyen

Épreuve	Habileté: concept	Habileté: application	Habileté: résolution
N°	N° des questions	N° des questions	N° des questions
1	1, 2, 3, 4	5, 6, 7, 8, 14, 15	18, 19, 20, 21

Tableau 37. Répartition des questions, niveau secondaire quatre fort

Épreuve	**Habileté: concept**	**Habileté: application**	**Habileté: résolution**
N°	N° des questions	N° des questions	N° des questions
1	1, 2, 3, 4,5	6, 13, 14, 15, 18	22, 23, 24, 25
2	1, 2, 3, 4	5, 6, 16, 17, 18	7, 20, 21, 22
3	1, 2, 3, 4	5, 6, 7, 8, 14, 15	19, 20, 21, 22
4	1, 2, 3, 4	5, 6, 7, 8, 14, 15	18, 20, 21
5	3, 4, 5, 6	1, 2, 11, 12, 17	19, 20, 21, 22
6	1, 2, 3, 4	5, 11, 12, 13, 14	21, 22, 24, 25

Tableau 38. Instrument (échantillon tiré de la BIM) avec les 21 variables indépendantes

N°	HAB2	TR	RDt	RDn	RDg	RDe	CPDp	CDPor	CDPpt	CDPpts	Neq	RRt	RRn	RRnb	RRg	RRe	CPEp2	CPEor2	DC2	DD2	NEL
01	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	3	3	2	2	1
02	2	2	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	3	2	1	2	1
03	1	2	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3	3	2	1	1
04	3	3	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3	2	2	1
05	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	2	0	1
06	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	3	3	2	1	1
07	2	2	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	3	2	1	1	1
08	2	2	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	3	3	2	1	1
09	3	3	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	3	2	2	1	1
10	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	3	3	1	1	1
11	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3	3	2	1	1
12	2	2	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	3	2	1	1	1
13	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	3	3	2	3	1
14	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	3	3	2	1	1
15	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	2	0	1
16	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	3	3	1	3	1
17	2	2	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	3	2	1	1
18	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	3	3	1	1	1
19	2	2	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3	1	1	1
20	3	3	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3	1	3	1
21	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	3	3	2	1	1
22	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	3	3	1	1	1
23	2	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	3	1	1	1
24	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	2	0	1
25	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	2	1	1
26	2	2	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	3	3	2	1	1
27	2	2	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	3	3	2	1	1
28	2	3	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	3	3	1	2	1
29	3	2	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3	2	3	1
30	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	3	3	2	1	1
31	2	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	3	2	1	1
32	2	2	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3	1	3	1
33	3	3	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3	1	3	1
34	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	3	3	1	1	1
35	3	3	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3	1	3	1
36	2	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	3	1	1	1
37	2	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	3	2	1	1
38	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	3	3	2	1	1
39	3	3	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3	2	1	1
40	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3	3	2	1	1

41	2	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	3	3	1	1	1
42	2	2	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	3	3	2	1	1
43	3	3	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3	1	3	1
44	2	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	3	3	2	2	2
45	3	3	0	1	0	0	1	0	1	0	2	0	0	1	0	0	3	3	2	2	2
46	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1	3	3	2	1	2
47	2	1	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	3	3	1	1	2
48	2	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	1	0	3	3	1	1	2
49	3	3	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	3	3	2	1	2
50	2	2	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	1	0	1	3	1	1	2
51	2	2	0	0	0	1	1	1	0	0	2	1	0	0	0	0	3	3	1	1	2
52	3	3	0	1	0	0	1	1	0	0	3	0	0	1	0	0	3	3	2	1	2
53	3	3	1	0	0	0	1	1	1	0	2	0	0	1	0	0	3	3	2	1	2
54	3	3	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	3	3	2	1	2
55	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1	3	3	2	1	2
56	2	2	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	3	3	1	1	2
57	3	3	0	1	0	0	1	0	1	0	3	0	0	1	0	0	3	3	2	2	2
58	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	3	0	1	0	0	0	3	3	2	2	2
59	3	3	1	1	1	0	1	1	0	1	2	0	1	0	0	0	3	3	2	1	2

Tableau 38. Instrument (échantillon tiré de la BIM) avec les 21 variables indépendantes

N°	HAB2	TR	RDt	RDn	RDg	RDe	CPDp	CDPor	CDPpt	CDPpts	Neq	RRt	RRn	RRnb	RRg	RRe	CPEp2	CPEor2	DC2	DD2	NEL
60	1	3	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	3	3	2	1	2
61	3	3	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	3	2	2	1	2
62	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	3	3	1	1	2
63	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1	3	3	2	1	2
64	2	2	0	0	0	1	1	1	0	0	2	1	0	0	0	0	3	3	1	1	2
65	2	2	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	0	1	0	3	3	2	1	2
66	3	3	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	3	3	2	1	2
67	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	3	3	2	1	2
68	2	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	1	0	0	0	0	3	3	2	1	2
69	2	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1	3	3	2	1	2
70	2	2	1	0	0	1	1	1	0	1	2	0	0	0	1	0	3	3	2	1	2
71	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	3	3	2	1	2
72	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1	3	3	2	1	2
73	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	3	3	1	1	2
74	3	3	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	3	3	2	1	2
75	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1	3	1	2	1	2
76	2	2	0	0	0	1	1	1	0	0	2	1	0	0	0	0	3	3	1	1	2
77	2	2	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	3	3	1	1	2
78	3	3	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	4	3	2	1	2
79	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1	1	3	2	1	2
80	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	1	0	0	0	3	3	2	1	2
81	2	1	0	1	0	0	0	1	0	1	2	0	0	0	1	0	4	3	1	1	2
82	3	3	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	3	2	2	2	2
83	3	3	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	3	2	1	2
84	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	2	0	1	0	0	0	3	3	2	3	2
85	2	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1	1	3	2	1	2
86	2	1	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	1	0	0	0	3	3	2	1	2
87	3	3	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	3	1	1	2
88	3	3	0	1	0	0	1	0	1	0	2	0	0	1	0	0	3	3	2	2	2
89	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1	3	3	2	1	2
90	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3	1	2	3
91	2	1	0	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	1	0	3	3	1	1	3
92	3	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	3	1	2	1	3
93	2	2	0	1	0	0	1	0	1	0	2	0	0	1	0	0	3	1	2	2	4
94	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	3	1	1	1	4

95	2	1	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	1	0	0	0	3	3	2	1	4
96	2	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	3	1	1	4
97	2	2	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	3	3	1	1	4
98	3	3	0	0	1	0	0	1	0	1	2	0	0	1	0	0	3	4	2	1	4
99	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	3	1	2	1	4
100	2	2	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	3	2	3	4

Voir source des items au tableau 12 section 3.3.2
Voir les codes au tableau 39

Tableau 39. Codes du tableau 38

Caractéristique des paramètres de l'équation: signe de la pente (CPEp2) et signe de l'ordonnée à l'origine (CPEor2)	Absent: 0	Négative: 1	nul : 2	Positif: 3	ne s'applique pas: 4
Nombre d'équations (Neq)	une: 1	Deux: 2	Absence d'équation: 3		
Niveau des élèves (NEL)	trois: 1	quatre faible: 2	quatre moyen: 3	quatre fort: 4	
Habileté (HAB2)	Concept : 1	Application: 2	Résolution: 3		
Type de réponse (TR)	Choix de réponse: 1	Réponse courte: 2	Réponse élaborée: 3		
Difficulté de l'interaction de la représentation données-réponses (DC2) et Difficulté des données (DD2)	Facile: 1	moyen: 2	difficile: 3		
Caractéristiques des données: ordonnée à l'origine (CDPor) la pente (CPDp) une coordonnée (CDPpt) deux ou plusieurs coordonnées (CDPpts)	Absence: 0	Présence: 1			
Représentation des données et de la réponse: sous forme équation (RDe) et (RRe) sous forme graphique (RDg) et (RRg) sous forme tableau (RDt) et (RRt) sous forme naturel (RDn) et (RRn) sous forme de nombre (RRnb)	Absence: 0	Présence: 1			

ANNEXE III

Pour les sections *Résultats* et *Présentation des modèles*

Voici ce que signifient les termes suivants:

— **démarche appropriée?** La démarche utilisée permet effectivement de résoudre le problème donné. Elle présente un cheminement logique à l'intérieur duquel le choix des opérations ou des relations est correct.

— **démarche partiellement appropriée?** La démarche utilisée ne permet pas de résoudre le problème donné; cependant, une partie de cette démarche dénote une compréhension partielle du problème.

— **démarche inappropriée?** La démarche utilisée ne permet pas de résoudre le problème donné et rien n'indique une compréhension partielle du problème. L'absence d'indices de compréhension.

— **utilisation exacte des opérations et des relations?** L'élève n'a fait aucune erreur en appliquant les opérations et les relations choisies.

— **communication claire?** L'information, transmise dans un langage mathématique approprié, est complète et bien documentée. Dans ce cas, la correctrice ou le correcteur n'a pas à interpréter la réponse de l'élève.

Tableau 40. Coefficients de régression pour le calcul du taux de réussite modélisé pour les 45 items et les 9 variables.

Modèle	Coefficients non standardisés	
	B	Erreur type
(Constante)	0,15	0,22
CDPor	0,16	0,05
CPDp	-0,06	0,05
CPEp2	0,13	0,03
CPEor2	0,03	0,05
Neq	0,09	0,05
NEL	0,07	0,03
HAB2	-0,01	0,05
TR	-0,05	0,04
DC2	-0,10	0,05

Variable dépendante: IR

Tableau 41. Coefficients de régression pour le calcul du taux de réussite modélisé pour les 45 items et les 21 variables.

Modèle	**Coefficients non standardisés**	
	B	**Erreur type**
(Constante)	1,11	0,03
RDt	-0,20	0,01
RDn	0,10	0,01
RDg	-0,18	0,01
RDe	0,02	0,01
CPDp	-0,12	0,01
CDPor	0,21	0,01
CDPpt	0,10	0,01
CDPpts	0,09	0,01
Neq	0,07	0,00
RRt	-0,99	0,02
RRn	-0,95	0,02
RRnb	-1,04	0,02
RRg	-1,05	0,02
RRe	-1,01	0,02
CPEp2	0,14	0,00
CPEor2	0,07	0,00
HAB2	-0,05	0,00
DC2	-0,16	0,01
DD2	-0,02	0,01
TR	0,01	0,00
NEL	0,09	0,00