

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

STRUCTURES ARBORESCENTES ET DÉVELOPPEMENTS
MOLÉCULAIRES

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR
MARTIN DUCHARME

JUIN 2009

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier Pierre Leroux d'avoir accepté la tâche d'être mon directeur pendant presque toutes mes études universitaires de cycles supérieurs. Je tiens à souligner l'aide supplémentaire que Gilbert Labelle, mon co-directeur, et Cédric Lamathe ont dû m'apporter suite au départ précoce de Pierre Leroux. En ce qui a trait aux autres membres du jury, des remerciements sont aussi à être accordés à Christophe Hohlwelg, François Bergeron et Yves Chiricota. À titre appréciatif, je mentionne le soutien technique du LaCIM. Finalement, je tiens également à remercier mes parents pour leur aide et leur support au cours de toutes mes études.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vii
RÉSUMÉ	x
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
NOTIONS DE BASE ET FORMULES D'ADDITION	4
1.1 Développement moléculaire	4
1.2 Formules d'addition des cycles	7
1.2.1 Définition et caractérisation d'espèces de cycles orientés	7
1.2.2 Formules d'addition de C_k	8
1.3 Les espèces $P_n(X)$ et $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$	14
1.3.1 Groupes diédraux	14
1.3.2 Définition de l'espèce $P_n(X)$	19
1.3.3 Définition de l'espèce $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$	20
1.3.4 Classes diédrales de mots	23
1.3.5 Énumération de classes diédrales de mots et formule d'addition de P_n	26
1.3.6 Propriétés d'action restreinte à un sous-groupe normal	36
1.3.7 Classes ρ^2 -diédrales	38
1.3.8 Énumération des classes ρ^2 -diédrales	44
1.3.9 Formule d'addition de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$	48
1.4 Théorèmes de dissymétrie	57
CHAPITRE II	
DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES ARBRES PLANS	59
2.1 Développement moléculaire des arbres plans	59

2.2	Développement moléculaire des arbres plans pondérés par la distribution des degrés de leurs sommets	62
-----	---	----

CHAPITRE III

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES k -GONAUX EXTER-PLANAIRES

3.1	Définition d'espèces orientées et pointées et théorème de dissymétrie	66
3.2	Classes diédrales de types de A -structures	69
3.3	Développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires où k est impair	72
3.3.1	Énumération des classes diédrales sur \mathcal{A} pour k impair	74
3.4	Développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires où k est pair	78
3.4.1	Énumération des classes diédrales sur \mathcal{A} pour k pair	81

CHAPITRE IV

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES k -GONAUX EXTER-PLANAIRES SANS SOMMETS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR À 3

4.1	Définitions et théorème de dissymétrie	88
4.2	Développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 où k est impair	92
4.2.1	Énumération des classes diédrales admissibles sur \mathcal{A} pour $k \geq 5$ impair	100
4.3	Développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 où k est pair	104
4.3.1	Énumération des classes diédrales admissibles sur \mathcal{A} pour $k \geq 6$ pair	107

CHAPITRE V

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES POLYGONAUX EXTERPLANAIRES

5.1	Définitions	115
5.2	Développement moléculaire des 2-arbres polygonaux exterplanaires	118
5.2.1	Classes diédrales	124
5.2.2	Énumération des classes diédrales	125

CONCLUSION

APPENDICE A**DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES ARBRES PLANS 136**

- A.1 Premiers termes du développement moléculaire des arbres plans 136
- A.2 Premiers termes du développement moléculaire des arbres plans pondérés
par la distribution des degrés de leurs sommets 137

APPENDICE B**DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES k -GONAUX EXTER-
PLANAIRES 139**

- B.1 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres triangulaires
exterplanaires 139
- B.2 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres quadrangu-
laires exterplanaires 140
- B.3 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres pentagonaux
exterplanaires 141
- B.4 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres hexagonaux
exterplanaires 142
- B.5 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres heptagonaux
exterplanaires 144
- B.6 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres octogonaux
exterplanaires 145
- B.7 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres ennégonaux
exterplanaires 146
- B.8 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres décagonaux
exterplanaires 147

APPENDICE C**DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES k -GONAUX EXTER-
PLANAIRES SANS SOMMETS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR À 3 149**

- C.1 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres pentagonaux
exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 149
- C.2 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres hexagonaux
exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 150

C.3	Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres heptagonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3	152
C.4	Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres octogonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3	153
C.5	Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres ennéagonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3	154
C.6	Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres decagonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3	155

APPENDICE D

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES POLYGONAUX EX- TERPLANAIRES 158

D.1	Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres polygonaux exterplanaires	158
-----	--	-----

RÉFÉRENCES 160

LISTE DES FIGURES

1.1	Une C_6 -structure sur [6]	7
1.2	Un type d'isomorphie de $C_{12}(B)$	10
1.3	Les treillis des classes de conjugaison des sous-groupes de $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_4$ et \mathcal{D}_5	18
1.4	Le treillis des classes de conjugaison des sous-groupes de \mathcal{D}_6	19
1.5	Une P_6 -structure	20
1.6	Une $P_8^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure et une $P_6^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure	21
1.7	Actions de v sur une $P_8^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure et une $P_6^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure	22
1.8	Correspondance entre un type de $P_6(B)$ -structures et $C_3(N)$	32
1.9	Correspondance entre un type de $P_{15}(B)$ -structures et $P_6^{\text{bic}}(N, M, 1)$	32
1.10	Correspondance entre un type de $P_8(B)$ -structures et $P_4^{\text{bic}}(1, M, 1)$	33
1.11	Correspondance entre un type de $P_{12}(B)$ -structures et $P_4^{\text{bic}}(N, M, L)$	34
1.12	Un type de $P_6^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures distingué en une B -structure	49
1.13	Isomorphisme entre un type de $P_8^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures ρ^2 -gauche ρ^2 -symétrique de poids Y^m et $C_4(XY^{\frac{m}{4}}Z)$	50
1.14	Isomorphisme entre un type de $P_{12}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures $[\rho^6, \tau]$ -symétrique de poids Y^m et $P_4^{\text{bic}}(X, XZY^{\frac{m}{4}}, Z)$	50
1.15	Isomorphisme entre un type de $P_{12}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures $[\rho^4, \tau]$ -symétrique de poids Y^m et $P_6^{\text{bic}}(X, ZY^{\frac{m}{6}}, X)$	51
1.16	Isomorphisme entre l'espèce $\xi(X, Y, Z)$ du type d'isomorphie ξ et celle de $\rho^{-1}\xi(X, Y, Z)$	52
3.1	Un 2-arbre extérplanair pentagonal	67
3.2	Des A -structures pour $k = 5$ et $k = 6$	68
3.3	Un type de α_p^\diamond -structures et deux mots qui lui sont associés	70

3.4	bijection entre une $\frac{A}{\langle \tau \rangle}$ -structure et un arbre k -gonal pointé en une arête externe	71
3.5	Espèces de 2-arbres pentagonaux exterplanaires pointés en une arête de degré 1	72
3.6	Espèces de 2-arbres pentagonaux exterplanaires pointés en une arête de degré 2	72
3.7	Un secteur d'un type de \mathcal{A}_p^\diamond -structures	77
3.8	Orientation d'arêtes par rapport à une arête distinguée	78
3.9	Sous-espèces de \mathcal{A}_p pointées en une arête	79
3.10	Un secteur d'un type de \mathcal{A}_p^\diamond -structures	86
4.1	L'espèce A en fonction de $B_{\langle k-3 \rangle}$	91
4.2	Sous-espèces de \mathcal{A}_p^- isomorphes à $P_2^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} \right)$ en a), à $X A_+ B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}$ en b) et à $X^2 A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^3$ en c)	94
4.3	Sous-espèces de \mathcal{A}_p^- isomorphes à $P_4^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)$ en a), à $P_2^{\text{bic}} \left(1, X A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)$ en b) et à $C_2 \left(X A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)$ en c)	95
4.4	Espèces isomorphes à $P_2^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)$ en a), à $X^2 A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^3$ en b) et à $X A_+^2 B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}$ en c)	98
4.5	Espèces isomorphes à $P_2^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-2}{2} \rangle} \right)$ en a) et à $P_2^{\text{bic}} \left(X^3, B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}^2 B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle} \right)$ en b)	105
5.1	Correspondance entre les listes de A -structures de longueur n et les A -structures dont l'arête orientée est celle d'un k -gone	118
5.2	Schéma des espèces de 2-arbres exterplanaires pointés en une arête de degré 1	120
5.3	Schéma des espèces de 2-arbres exterplanaires pointés en une arête de degré 2 isomorphes à $X E_2(A^n)$	121
5.4	Schéma des espèces de 2-arbres exterplanaires pointés en une arête de degré 2 isomorphes à $X^2 E_2\left(\frac{A^n}{X}\right)$ et $E_2(X A^n)$	122
5.5	Schéma des espèces de 2-arbres exterplanaires pointés en une arête de degré 2 isomorphes à $P_4^{\text{bic}}(1, A^n, X)$ et $P_4^{\text{bic}}\left(X, \frac{A^n}{X}, X\right)$	122

5.6	Secteurs d'un type isomorphe à $P_j^{\text{bic}}(X^\varepsilon, X^m, X)$ et son palindrome primitif associé	131
5.7	Secteurs d'un type isomorphe à $P_{2j}^{\text{bic}}(X, X^m, X)$ et son palindrome primitif associé	132

RÉSUMÉ

Le présent travail porte sur la classification de structures arborescentes selon leurs symétries. Plus précisément, il fait l'objet de celle des arbres plans, des 2-arbres k -gonaux exterplanaires, des 2-arbres k -gonaux sans sommets de degré 4 et des 2-arbres polygonaux exterplanaires. Ceci est fait en déterminant le développement moléculaire de ceux-ci vus comme espèces de structures. Le développement moléculaire des arbres plans est obtenu à l'aide du théorème de dissymétrie des arbres R -enrichis (voir Bergeron, Labelle et Leroux, 1994) et par l'utilisation d'une formule d'addition pour $C_k(B)$ où B est une espèce et C_k est l'espèce des cycles orientés de longueur k . Cette formule se trouve dans (Ducharme, 2005). En généralisant cette formule au cas où B est pondérée, nous obtenons le développement moléculaire des arbres plans pondérés par la distribution des degrés de leurs sommets. En ce qui a trait aux 2-arbres k -gonaux exterplanaires, une telle classification pour $k = 3$ a été faite dans (Labelle, Lamathe et Leroux, 2003 ; Lamathe 2003) et pour $k = 4, 5$ dans (Ducharme, 2005) en utilisant des formules d'addition d'espèces auxiliaires exprimant des espèces pointées qui, à l'aide d'un théorème de dissymétrie, peuvent exprimer les espèces des 2-arbres k -gonaux exterplanaires. Le seul résultat manquant dans (Ducharme, 2005), pour obtenir le développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires, est celui des 2-arbres k -gonaux exterplanaires pointés en un polygone. Celui-ci est obtenu par l'énumération de classes diédrales de mots dont les lettres représentent chacune un type d'isomorphie de 2-arbres k -gonaux exterplanaires pointés en une arête orientée. C'est aussi par l'énumération de classes diédrales que nous obtenons une nouvelle formule d'addition de P_n donnant le développement moléculaire de $P_n(B)$ en fonction de celui des puissances de l'espèce B où P_n est l'espèce des polygones de taille n (cycles non orientés de longueur n). Les espèces apparaissant dans cette formule sont de la forme $P_{2i}^{\text{bic}}(N, M, L)$ ou $C_j(K)$ où K, L, M et N sont des espèces moléculaires, $i|k$, $j|k$ et $P_{2i}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ est une espèce moléculaire de polygones bicolorés. Nous donnons également une condition pour déterminer si $P_{2i}^{\text{bic}}(N_1, M_1, L_1)$ et $P_{2j}^{\text{bic}}(N_2, M_2, L_2)$ sont isomorphes dans le cas où N_1, M_1, L_1, N_2, M_2 et L_2 sont des espèces asymétriques. Comme le développement moléculaire des différentes espèces pointées de 2-arbres k -gonaux exterplanaires ne font appel qu'à des espèces asymétriques et aux espèces C_i et $P_{2i}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ dans lesquelles on a substitué des espèces asymétriques, on peut facilement regrouper les termes semblables pour obtenir le développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires. Les coefficients de ce développement moléculaire

laire sont exprimés en fonction de ceux des puissances entières de l'espèce des 2-arbres k -gonaux exterplanaires pointés en une arête orientée. Ces derniers coefficients sont obtenus par inversion de Lagrange. Pour le cas des 2-arbres k -gonaux sans sommets de degré 4, nous faisons une distinction entre les types dont le groupe d'isomorphismes d'ordre 2 est généré par une rotation non trivial et ceux dont le groupe est généré par une réflexion. Ceux-ci sont isomorphes à $NE_2(M)$ mais seront respectivement associés à l'espèce $NC_2(M)$ et à l'espèce $P_2^{\text{bic}}(N, M, 1)$. En plus, seules certaines classes diédrales de mots, dont les lettres représentent chacune un type d'isomorphie de 2-arbres k -gonaux sans sommets de degré 4 pointés en une arête externe orientée dont les sommets sont de degré 2, représentent un type de 2-arbres k -gonaux sans sommets de degré 4. Les coefficients du développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux sans sommets de degré 4 sont ensuite exprimés en fonction des coefficients de celui de puissances d'espèces asymétriques obtenus encore par inversion de Lagrange. Le cas des 2-arbres polygonaux exterplanaires est très similaire au cas des 2-arbres k -gonaux exterplanaires où k est pair. L'étiquetage est effectué aux sommets plutôt qu'aux polygones, ce qui occasionne des changements mineurs aux définitions des classes diédrales à énumérer. Les espèces moléculaires de leur développement moléculaire peuvent encore être décrites à l'aide d'espèces asymétriques et de C_i et $P_{2j}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ où i et j sont des entiers.

Mots clés : Arborescence, 2-arbres, exterplanaire, moléculaire, développement.

INTRODUCTION

Il est possible d'énumérer certaines molécules chimiques à l'aide de graphes. Ainsi, les molécules de type benzénique catacondensées (voir Cyvin et Gutman, 1989) correspondent à des 2-arbres hexagonaux exterplanaires et celles péricondensées, à des polyominos non arborescents sur le réseau hexagonal. D'autres hydrocarbures peuvent être représentés par des 2-arbres (voir Brunvoll, Cyvin et Cyvin, 1996). En particulier, certaines molécules catacondensées peuvent être associées à des 2-arbres exterplanaires composés de polygones de différentes tailles contrairement aux 2-arbres exterplanaires hexagonaux qui ne sont composés que d'hexagones. Notons que l'énumération des 2-arbre k -gonaux exterplanaires a été faite dans (Harary, Palmer et Read, 1975) et celle des 2-arbres k -gonaux exterplans dans (Palmer et Read, 1973). Pour les deux 2-arbres triangulaires, leur énumération est faite, entre autres, dans (Beineke et Moon, 1969 ; Fowler et al., 2000, 2002 ; Palmer 1969).

Le présent travail porte sur la classification des arbres plans, des 2-arbres k -gonaux exterplanaires, des 2-arbres k -gonaux sans sommets de degré 4 et des 2-arbres polygonaux exterplanaires, selon leurs symétries. Plus précisément, cette classification est effectuée en donnant leur développement moléculaire. Une telle classification des 2-arbres k -gonaux exterplanaires pour $k = 3$ a été faite dans (Labelle, Lamathe et Leroux, 2003 ; Lamathe 2003) et pour $k = 4, 5$ dans (Ducharme, 2005).

Dans le chapitre 1, nous faisons des rappels sur le développement moléculaire et sur la formule d'addition donnant le développement moléculaire de $C_k(B)$. Nous généralisons cette formule dans le cas où B est une espèce pondérée. Nous introduisons ensuite une nouvelle formule d'addition donnant celui de $P_n(B)$. Nous donnons également une généralisation de la formule donnant celui de $P_n(X, B, Z)$ au cas où est B une espèce pondérée. Nous terminons ce chapitre en donnant les théorèmes de dissymétrie pour

les arbres, les arbres R -enrichis et les arbres bicolores dont les feuilles sont de la même couleur.

Dans le chapitre 2, nous obtenons le développement moléculaire des arbres plans en utilisant le théorème de dissymétrie des arbres R -enrichis puisque leur espèce est isomorphe à celle des arbres $(1 + C)$ -enrichis. On obtient d'abord le développement moléculaire des puissances de l'espèce des arborescences $(1 + C)'$ -enrichies par inversion de Lagrange puisque $(1 + C)'$ est asymétrique. On peut ensuite appliquer les formules d'addition de C_k pour trouver les développements moléculaires des autres espèces apparaissant dans le théorème de dissymétrie. Ensuite, il suffit de regrouper les termes semblables pour obtenir le développement moléculaire des arbres plans. Le développement moléculaire des arbres plans pondérés par la distribution des degrés de leurs sommets est obtenu de même manière en utilisant la formule d'addition pour C_k adaptée aux espèces pondérées.

Dans le chapitre 3, nous obtenons le développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires. Ceci est fait en utilisant un théorème de dissymétrie utilisant trois espèces de 2-arbres k -gonaux pointés. On introduit une quatrième espèce de 2-arbres pointés qui sera asymétrique et avec laquelle on pourra exprimer les trois autres. Le développement moléculaire de cette espèce pourra alors être obtenu par inversion de Lagrange. Celui de deux des trois autres le sera par l'utilisation de formules d'addition. Celui de la troisième sera obtenu par l'utilisation de classes diédrales de mots de longueur k dont les lettres représentent des types d'isomorphie de la quatrième espèce. Le développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sera alors obtenu en appliquant le théorème de dissymétrie et en regroupant les termes semblables des développements moléculaires des trois espèces de 2-arbres pointés.

Dans le chapitre 4, nous obtenons le développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux sans sommets de degré 4. Nous ferons, de plus, une certaine distinction entre des types, dont les groupes d'isomorphie de leurs structures sont d'ordre deux. De plus, les classes diédrales utilisées devront avoir une caractéristique supplémentaire pour représenter des types de 2-arbre k -gonaux sans sommets de degré 4. La démarche utilisée pour trouver ce développement moléculaire demeure, à ces détails près, la même que

pour les 2-arbres k -gonaux exterplanaires.

Dans le chapitre 5, nous obtenons le développement moléculaire des 2-arbres poly-gonaux exterplanaires. La démarche est semblable à celle utilisée pour les 2-arbres k -gonaux exterplanaires.

CHAPITRE I

NOTIONS DE BASE ET FORMULES D'ADDITION

Dans ce chapitre, nous faisons d'abord un rappel sur les espèces moléculaires (voir Bergeron, Labelle et Leroux, 1994). Par la suite, nous démontrons une formule d'addition relative à l'espèce C_k des cycles orientés de longueur k ainsi que celle relative à $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B(Y), Z)$ où $B(Y)$ est une espèce quelconque. Ces formules ont été démontrées dans mon mémoire de maîtrise (Ducharme, 2005). Nous ajoutons aussi le cas où l'espèce substituée est pondérée. Par contre, nous introduisons une nouvelle formule d'addition de P_n l'espèce des polygones de tailles n . Celle-ci s'inspire de celle de la forme $P_n(X_1 + X_2 + \dots)$ (voir Auger, Labelle et Leroux, 2002). Le principal avantage de notre formule est qu'elle n'utilise pas d'espèces définies par des quotients. Finalement, nous mentionnons des théorèmes de dissymétrie qui nous serviront dans les chapitres subséquents.

1.1 Développement moléculaire

Définition 1. Une espèce *moléculaire* est une espèce dont toutes les structures sont isomorphes.

Proposition 1. Une espèce moléculaire M est caractérisée par le fait qu'elle est indécomposable sous la somme combinatoire, c'est-à-dire :

M est moléculaire $\iff \forall F$ et G des espèces $((M = F + G) \implies (F = 0 \text{ ou } G = 0))$.

Définition 2. Le groupe, noté \mathcal{S}_U , des permutations d'un ensemble fini U de cardinalité n est dit *symétrique de degré n* . Si $U = [n] = \{1, \dots, n\}$, on écrit simplement \mathcal{S}_n .

Proposition 2. Une espèce moléculaire M peut s'écrire sous la forme

$$M = \frac{X^n}{H},$$

où X^n représente l'espèce des listes de longueur n et H est un sous-groupe de \mathcal{S}_n . En fait, H est le stabilisateur d'une M -structure quelconque sur $[n]$.

Par exemple, l'espèce X^m des listes de longueur m est moléculaire et son stabilisateur est réduit à l'identité. L'espèce E_m des ensembles de taille m est moléculaire et son stabilisateur est \mathcal{S}_m .

Proposition 3. Deux espèces moléculaires $\frac{X^n}{H}$ et $\frac{X^n}{K}$ sont isomorphes si et seulement si H et K sont conjugués dans \mathcal{S}_n .

Notation 3. Notons \mathcal{M} l'ensemble des espèces moléculaires (à isomorphisme d'espèces près).

Proposition 4. Toute espèce F peut être exprimée comme une combinaison linéaire (possiblement infinie) à coefficients entiers naturels d'espèces moléculaires de la forme suivante :

$$F = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M M,$$

où f_M est le nombre de sous-espèces de F isomorphes à M . Ce développement est unique et il est dit *moléculaire*.

Définition 4. Une espèce $F = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M M$ est dite *asymétrique* si $\forall M \in \mathcal{M}, f_M \neq 0 \implies M = X^m$ où m est un entier positif.

En d'autres termes, F est asymétrique si le stabilisateur de toute F -structure est réduit à l'identité. Il est possible de généraliser la notion d'espèce moléculaire aux espèces multisortes. Malgré que la définition 1 soit valable pour une espèce multisorte, la description d'espèces moléculaires par un stabilisateur (proposition 2) nécessite certains ajustements. Il nous sera nécessaire dans le présent travail d'introduire celle des espèces à deux et trois sortes.

Proposition 5. Toute espèce moléculaire $M(X, Y)$ sur deux sortes (X et Y) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$M(X, Y) = \frac{X^n Y^m}{H},$$

où $H \leq \mathcal{S}_n^X \times \mathcal{S}_m^Y$ est le stabilisateur d'une $M(X, Y)$ -structure sur $([n], [m])$ et \mathcal{S}_n^X note le groupe symétrique de degré n agissant sur les points de sorte X .

Proposition 6. Toute espèce moléculaire $M(X, Y, Z)$ sur trois sortes (X, Y et Z) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$M(X, Y, Z) = \frac{X^n Y^m Z^\ell}{H},$$

où $H \leq \mathcal{S}_n^X \times \mathcal{S}_m^Y \times \mathcal{S}_\ell^Z$ est le stabilisateur d'une $M(X, Y, Z)$ -structure sur $([n], [m], [\ell])$.

Notons que le résultat d'une composition d'espèces moléculaires est moléculaire. Un produit d'espèces moléculaires l'est aussi.

Dans le cas \mathcal{A} -pondéré, où \mathcal{A} est un anneau commutatif intègre, chaque structure d'une espèce moléculaire \mathcal{A} -pondérée doit posséder le même poids dans \mathcal{A} . Ainsi, toute espèce moléculaire \mathcal{A} -pondérée M_w s'écrit sous la forme standard

$$M_w = M_p$$

où M est une espèce moléculaire non pondérée et $p \in \mathcal{A}$, le poids d'une M_w -structure. Le produit de deux espèces moléculaires \mathcal{A} -pondérées se fait à l'aide de la formule

$$M_p N_q = (MN)_{pq}$$

pour tout poids $p, q \in \mathcal{A}$.

Notation 5. Notons par $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des espèces moléculaires \mathcal{A} -pondérées.

Proposition 7. Toute espèce \mathcal{A} -pondérée F peut être exprimée comme une combinaison linéaire (possiblement infinie) à coefficients entiers naturels d'espèces moléculaires \mathcal{A} -pondérées de la forme suivante :

$$F = \sum_{M_p \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} f_{M_p} M_p,$$

où f_{M_p} est le nombre de sous-espèces de F isomorphes à M_p .

1.2 Formules d'addition des cycles

1.2.1 Définition et caractérisation d'espèces de cycles orientés

Définition 6. L'espèce C des cycles orientés finis peut être définie comme étant celle qui a pour structures sur un ensemble fini U les graphes orientés connexes sur U dont chaque sommet possède exactement un arc sortant et un entrant. Quant au transport de structures le long des bijections, il peut être défini de la manière suivante :

Soient $\sigma : U \rightarrow V$ une bijection et $s = (U, W_1 \subseteq U \times U) \in C[U]$.

Alors, $C[\sigma](s) = (V, W_2)$ où $W_2 = \{(\sigma(a), \sigma(b)) \mid (a, b) \in W_1\}$.

Notation 7. Nous noterons C_k la sous-espèce de C n'ayant que les structures de C sur les ensembles de cardinalité k . Autrement dit, C_k est l'espèce des cycles orientés de longueur k . La figure 1.1 illustre une C_6 -structure sur $[6]$.

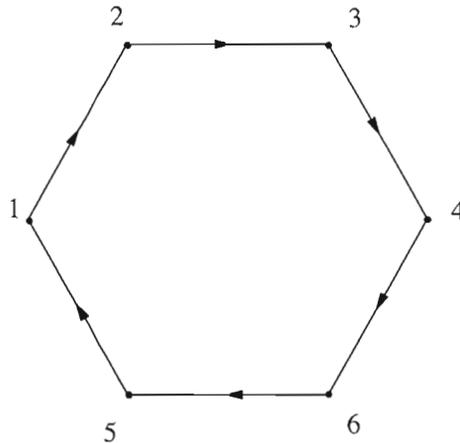


Figure 1.1 – Une C_6 -structure sur $[6]$

Définition 8. Le groupe cyclique d'ordre k , noté C_k , est le groupe engendré par un élément d'ordre k .

Proposition 8. L'espèce C_k est moléculaire. De plus, le groupe des automorphismes de la C_k -structure sur $[k]$ dont l'ensemble des arêtes est

$$(1, 2), (2, 3), \dots, (i, i + 1), \dots, (k - 1, k)(k, 1)$$

est égal à $\langle \rho \rangle$, où ρ est la permutation circulaire $(1, 2, 3, \dots, k)$.

Remarquons que $\langle \rho \rangle$ est isomorphe à C_k . Par la proposition précédente, nous concluons donc que C_k est isomorphe à l'espace quotient $X^k / \langle \rho \rangle$. Ce qui a pour conséquence la proposition suivante.

Proposition 9. L'espace C_k des cycles orientés de longueur k est isomorphe à l'espace des classes d'équivalence des listes de longueur k sous l'action de $\langle \rho \rangle$ où l'action de d'un élément $\sigma \in \langle \rho \rangle$ sur une liste $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ est la suivante :

$$\sigma \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \alpha_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Cet isomorphisme peut être obtenu en associant à un cycle orienté de longueur k l'ensemble des listes obtenues en supprimant un seul arc dans le cycle.

1.2.2 Formules d'addition de C_k

Définition 9. Soit $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ une série formelle. Nous noterons par $B^j(x)$ la j -ième puissance de $B(x)$ et $b_n^{(j)}$ le coefficient en x^n de $B^j(x)$, avec la convention que $b_n^{(j)}$ sera nul si n n'est pas entier positif.

Définition 10. Soient une espèce B asymétrique et $\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ son développement moléculaire. Notons qu'alors $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$. Définissons $\mathcal{A}(B)$ comme étant l'alphabet pondéré composé de l'ensemble de lettres $\{b_{i,j} \mid i \text{ est un entier positif et } 1 \leq j \leq b_i\}$, le poids de la lettre $b_{i,j}$ étant X^i . Nous munirons cet alphabet de l'ordre lexicographique défini par la relation suivante : $(b_{i,j} \leq b_{m,\ell}) \Leftrightarrow ((i < m) \text{ ou } (i = m \text{ et } j \leq \ell))$. Définissons le poids d'un mot sur $\mathcal{A}(B)$ comme le produit des poids de ses lettres. Remarquons que $b_m^{(j)}$ correspond au nombre de mots de longueur j et de poids X^m .

Définition 11. Définissons une *classe circulaire* de mots de longueur k comme une classe d'équivalence de mots de longueur k sous l'action de $\langle \rho \rangle$ où l'action d'un élément $\sigma \in \langle \rho \rangle$ sur un mot $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ est la suivante :

$$\sigma \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \alpha_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Définissons le poids d'une classe circulaire comme étant celui d'un de ses mots.

Un type d'isomorphie de l'espace $C_k(B)$ peut-être associé de façon bijective à une classe circulaire de mots de longueur k sur les types de B -structures, c'est-à-dire, sur

l'alphabet $\mathcal{A}(B)$.

Définition 12. Un mot m est dit *primitif* s'il n'est pas la puissance (par concaténation) positive (> 1) d'un autre mot. Définissons la *racine primitive* d'un mot m comme étant le plus petit mot primitif tel que le mot m est une puissance positive (≥ 1) de ce mot.

On montre facilement que l'action du groupe circulaire d'ordre k sur un mots de longueurs induit une action du groupe circulaire d'ordre j sur sa racine de longueur j . Le résultat suivant s'obtient alors.

Proposition 10. L'ensemble des racines primitives des mots d'une classe circulaire de mots de longueur k forme une classe circulaire de mots de longueur j où $j|k$. Notons que la taille (le cardinal) de ces deux classes est la même, soit j .

Définition 13. Un mot primitif est un *mot de Lyndon* s'il est le plus petit mot de sa classe circulaire pour l'ordre lexicographique.

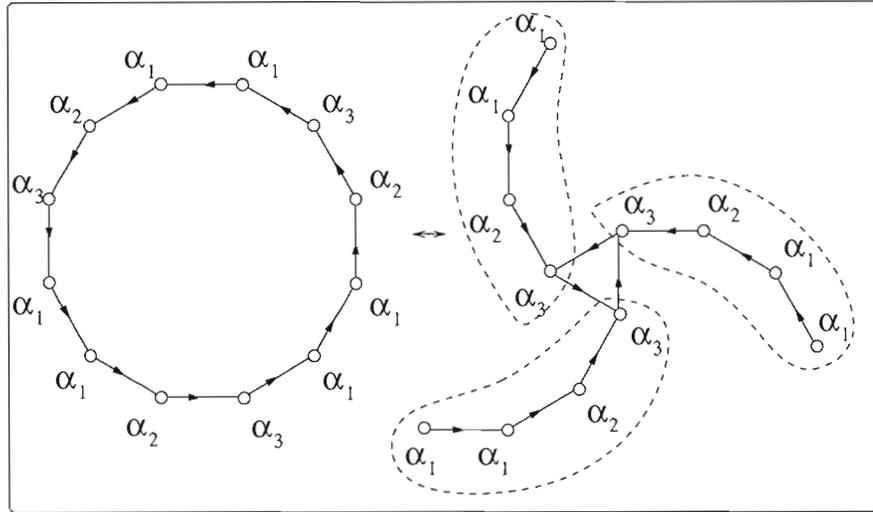
Lemme 11. Soient $k \geq 1$, B une espèce asymétrique et $\mathcal{A}(B)$ l'alphabet pondéré associé. Soit un type d'isomorphie de l'espèce $C_k(B)$ associé à une classe circulaire de mots de longueur k dont la racine primitive de l'un de ses mots est de longueur i (où $i|k$) et de poids X^j . Alors le type d'isomorphie est isomorphe, en tant qu'espèce, à $C_{k/i}(X^j)$. Notons que $C_n(X^0) = C_n(1) = 1, \forall n \geq 1$.

Le lemme 11 est illustré par la figure 1.2 pour un type de $C_{12}(B)$ -structures et où les α_i sont des types de B -structures avec $k = 12$ et $i = 4$. De plus, par la proposition 10, l'espèce obtenue ne dépend pas de la racine primitive choisie.

Notation 14. Définissons $\lambda(B, k, n)$ comme étant le nombre de mots de Lyndon sur l'alphabet $\mathcal{A}(B)$ de longueur k et de poids X^n . Par convention, $\lambda(B, k, n) = 0$ si k ou n ne sont pas des entiers positifs.

Théorème 12 (Ducharme,2005). Soient $k \geq 1$, B une espèce asymétrique et $\mathcal{A}(B)$ son alphabet pondéré associé. Alors,

$$\begin{aligned} C_k(B) &= \sum_{i|k} \sum_{n \geq 0} \lambda(B, k/i, n) C_i(X^n) \\ &= \sum_{i \cdot j = k} \sum_{n \geq 0} \lambda(B, i, n) C_j(X^n). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Figure 1.2 – Un type d'isomorphie de $C_{12}(B)$

Il est possible d'exprimer le nombre de mots de longueur k et de poids X^n en fonction de certains $\lambda(B, j, m)$. Remarquons qu'une classe circulaire primitive de mots de longueur n contient exactement n éléments.

Proposition 13. Soit $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ une espèce asymétrique. Alors,

$$b_n^{(k)} = \sum_{j \cdot d = k} j \lambda(B, j, n/d) \quad (1.2)$$

où $b_n^{(k)} = [X^n] B^k$.

En effet, les mots de longueur k et de poids X^n sont comptés par $b_n^{(k)}$. On regroupe ces mots selon la longueur j de leur racine primitive de poids $X^{\frac{n}{d}}$ où $d = k/j$. Une telle classe circulaire de mots contient j éléments et peut être associée bijectivement à un mot de Lyndon de longueur j et de poids $X^{\frac{n}{d}}$, laquelle est associée à un unique mot de Lyndon.

Ainsi, en isolant le coefficient de $\lambda(B, k, n)$, nous obtenons la récurrence suivante :

Proposition 14. Soit $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ une espèce asymétrique. Alors,

$$\lambda(B, k, n) = \frac{1}{k} (b_n^{(k)} - \sum_{\substack{j=d=k \\ d \neq 1}} j \lambda(B, j, n/d)). \quad (1.3)$$

Nous remarquons que $\lambda(B, 1, n) = b_n$. De plus, à partir de la proposition 13, il est possible d'effectuer une inversion de Möbius dans le treillis des diviseurs de k pour obtenir une expression de $\lambda(B, k, n)$ en fonction des $b_m^{(j)}$ tels que $j|k$.

Proposition 15. Soit $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ une espèce asymétrique. Alors,

$$\lambda(B, k, n) = \frac{1}{k} \sum_{j|k} \mu(j) b_{n/j}^{(k/j)} = \frac{1}{k} \sum_{j \cdot d = k} \mu(d) b_{n/d}^{(j)}. \quad (1.4)$$

Démonstration. On a

$$\frac{1}{k} \sum_{j|k} \mu(j) b_{n/j}^{(k/j)} = \frac{1}{k} \sum_{j|k} \mu(j) \sum_{i|k/j} \frac{k}{ij} \lambda(B, \frac{k}{ij}, \frac{n}{ij}) \quad (1.5)$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{d|k} \frac{k}{d} \lambda(B, k/d, n/d) \sum_{j|d} \mu(j) \quad (1.6)$$

$$= \lambda(B, k, n). \quad (1.7)$$

□

Il nous est donc, entre autres, facile de déterminer le développement moléculaire de $C_p(B)$ lorsque p est premier. En effet,

$$\begin{aligned} C_p(B) &= \sum_{i|p} \sum_{n \geq 0} \lambda(B, p/i, n) C_i(X^n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \lambda(B, 1, n) C_p(X^n) + \sum_{n \geq 0} \lambda(B, p, n) C_1(X^n) \\ &= \sum_{n \geq 0} b_n C_p(X^n) + \sum_{n \geq 0} (1/p)(b_n^{(p)} - b_{n/p}) X^n \\ &= b_0 + (1/p)(b_0^p - b_0) + \sum_{n \geq 1} b_n C_p(X^n) + \sum_{n \geq 1} (1/p)(b_n^{(p)} - b_{n/p}) X^n \\ &= \frac{(b_0^p + (p-1)b_0)}{p} + \sum_{n \geq 1} b_n C_p(X^n) + \sum_{n \geq 1} (1/p)(b_n^{(p)} - b_{n/p}) X^n. \end{aligned}$$

Il est possible de généraliser les résultats précédents à une espèce B quelconque dont le développement moléculaire est connu, en posant arbitrairement un ordre total (\leq) sur les espèces moléculaires.

Définition 15. Soient une espèce B et $\sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$ son développement moléculaire où b_M est un entier naturel. Définissons $\mathcal{A}(B)$ comme étant l'alphabet pondéré composé de l'ensemble de lettres suivant $\{b_{M,i} \mid i \text{ est un entier positif et } 1 \leq i \leq b_M\}$, le poids de la lettre $b_{M,i}$ étant M . Nous munirons cet alphabet de l'ordre lexicographique défini par la relation suivante, $(b_{M,i} \leq b_{N,j}) \Leftrightarrow ((M < N) \text{ ou } (M = N \text{ et } i \leq j))$. Définissons le poids d'un mot sur $\mathcal{A}(B)$ comme le produit des poids de ses lettres.

Définition 16. Soit une espèce B dont le développement moléculaire est donné par

$$B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M.$$

Notons par $\mathcal{M}(B)$ l'ensemble des espèces moléculaires M tel que $b_M > 0$. Nous notons par $b_M^{(j)}$ le nombre de types de B^j -structures isomorphes à M . Si M n'est pas une espèce moléculaire alors $b_M^{(j)} = 0$. En d'autres termes, on pose $B^j = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M^{(j)} M$.

Remarquons que $b_M^{(j)}$ est le nombre de mots de longueur j et de poids M sur $\mathcal{A}(B)$.

Définition 17. Soit M une espèce moléculaire et k un entier positif. Définissons $M^{\frac{1}{k}}$ comme étant l'espèce T , si elle existe, telle que $T^k = M$.

Notation 18. Notons $\lambda(B, k, M)$, le nombre de mots de Lyndon sur l'alphabet $\mathcal{A}(B)$ de longueur k et de poids M . Posons $\lambda(B, k, M) = 0$ si M n'est pas une espèce moléculaire ou si k n'est pas un entier positif.

Remarquons que $\lambda(B, k, M)$ est nul si $M \notin \mathcal{M}(B^k)$.

Proposition 16. Soit une espèce B dont le développement moléculaire est donné par

$$B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M.$$

Alors,

$$\lambda(B, k, M) = \frac{1}{k} \sum_{j \cdot d = k} \mu(j) b_{M^{1/j}}^{(d)}. \quad (1.8)$$

Démonstration. Nous n'avons qu'à classer les mots de poids M selon la longueur j de leur racine primitive pour obtenir la formule suivante :

$$b_M^{(k)} = \sum_{j \cdot d = k} j \lambda(B, j, M^{1/d}). \quad (1.9)$$

Il ne reste donc qu'à effectuer une inversion de Möbius dans le treillis des diviseurs de k . \square

Théorème 17. Soit B une espèce dont le développement moléculaire est donné par

$$B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M.$$

Alors,

$$C_k(B) = \sum_{i \cdot j = k} \sum_{M \in \mathcal{M}(B^i)} \lambda(B, i, M) C_j(M). \quad (1.10)$$

Notons que ces résultats s'appliquent tout autant au cas multisorte. De plus, ces formules sont mieux adaptées au calcul de développement moléculaire que celle pour $C_k(m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots)$, où les X_i sont des espèces de singletons (voir Auger, Labelle et Leroux, 2002 ; Labelle, 1992).

Les mêmes définitions et résultats s'appliquent directement au cas \mathcal{A} -pondéré.

Théorème 18. Soit B une espèce \mathcal{A} -pondérée dont le développement moléculaire est donné par

$$B = \sum_{M_p \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} b_{M_p} M_p.$$

Alors,

$$\begin{aligned} C_k(B) &= \sum_{i \cdot j = k} \sum_{M_p \in \mathcal{M}(B^i)} \lambda(B, i, M_p) C_j(M_p) \\ &= \sum_{i \cdot j = k} \sum_{M_p \in \mathcal{M}(B^i)} \lambda(B, i, M_p) (C_j(M))_{p^j}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.3 Les espèces $P_n(X)$ et $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$

1.3.1 Groupes diédraux

Les résultats de cette section portant sur les groupes diédraux peuvent être trouvés, entre autres, dans (Stockmeyer, 1971).

Définition 19. Soit $n \geq 1$ un entier. Le groupe, noté \mathcal{D}_n , engendré par r et v tels que $r^n = 1 = v^2$ et $vr = r^{-1}v$ est dit *diédral*.

Notons que $|\mathcal{D}_n| = 2n$. De plus, pour $n \geq 3$, \mathcal{D}_n est le groupe des symétries d'un n -gone.

Proposition 19. Tout sous-groupe \mathcal{H} de \mathcal{D}_n est égal de façon unique à $\langle r^k \rangle$ ou $\langle r^k, r^j v \rangle$ où $k|n$ et $0 \leq j \leq k-1$. De plus, $\langle r^k, r^j v \rangle \simeq \mathcal{D}_{\frac{n}{k}}$ et $\langle r^k \rangle \simeq \mathcal{C}_{\frac{n}{k}}$ où \mathcal{C}_n est le groupe cyclique d'ordre n .

Proposition 20. Soient \mathcal{H} et \mathcal{G} deux sous-groupes de \mathcal{D}_n , alors

$$\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \iff \begin{cases} \mathcal{H} = \langle r^k \rangle \text{ et } \mathcal{G} = \langle r^\ell \rangle \text{ et } \ell|k|n \\ \text{ou } \mathcal{H} = \langle r^k \rangle \text{ et } \mathcal{G} = \langle r^\ell, r^j v \rangle \text{ et } \ell|k|n \\ \text{ou } \mathcal{H} = \langle r^k, r^i v \rangle \text{ et } \mathcal{G} = \langle r^\ell, r^j v \rangle, \ell|k|n \text{ et } i \equiv j \pmod{\ell}. \end{cases}$$

Proposition 21. Soit $\mathcal{H} = \langle r^k \rangle$ un sous-groupe de \mathcal{D}_n . Alors, \mathcal{H} est un sous-groupe normal de \mathcal{D}_n .

Démonstration. Vérifions que, $\forall g \in \mathcal{D}_n, gr^k g^{-1} \in \mathcal{H}$. Étant donné que $\mathcal{D}_n = \langle r, v \rangle$, il suffit de vérifier que $vr^k v^{-1} \in \mathcal{H}$. Or,

$$vr^k v^{-1} = vr^k v = vv r^{-k} = r^{-k}.$$

□

Proposition 22. Soient $\mathcal{H} = \langle r^k, r^i v \rangle$ et $\mathcal{G} = \langle r^\ell, r^j v \rangle$ deux sous-groupes de \mathcal{D}_n où $k|n, \ell|n, 0 \leq i \leq k-1$ et $0 \leq j \leq \ell-1$. Alors,

$$\mathcal{H} \text{ et } \mathcal{G} \text{ sont conjugués} \iff \begin{cases} k = \ell \text{ et } k \text{ est impair} \\ \text{ou } k = \ell \text{ et } k \text{ est pair et } i \equiv j \pmod{2} \end{cases}$$

Démonstration.

\Leftrightarrow) Pour k impair, il suffit de vérifier que $\langle r^k, v \rangle$ est conjugué avec $\langle r^k, r^t v \rangle$ où $0 \leq t \leq k - 1$, pour s un entier on a

$$r^s \langle r^k, v \rangle r^{-s} = \langle r^k, r^s v r^{-s} \rangle = \langle r^k, r^{2s} v \rangle.$$

Or, $\{t \bmod k \mid 0 \leq t \leq k - 1\} = \{2s \bmod k \mid 0 \leq s \leq k - 1\}$ car k est premier avec 2. Pour un s donné, $2s = t + hk$, de sorte que $r^{2s} = r^t r^{hk}$ et que $\langle r^k, r^{2s} v \rangle = \langle r^k, r^t v \rangle$. D'où $\langle r^k, v \rangle$ et $\langle r^k, r^t v \rangle$ sont conjugués.

Pour k pair, en conjugant par r^s , nous voyons que $\langle r^k, v \rangle$ est le conjugué de $\langle r^k, r^{2s} v \rangle$ tandis que $\langle r^k, r v \rangle$ est celui de $\langle r^k, r^{2s+1} v \rangle$.

\Rightarrow) H et G sont conjugués donc isomorphes. Donc, par la proposition 19, $k = \ell$. Pour k pair, il ne reste plus qu'à voir que $r^s v \langle r^k, v \rangle v r^{-s} \neq \langle r^k, r v \rangle$ pour montrer que $\langle r^k, v \rangle$ et $\langle r^k, r v \rangle$ ne sont pas conjugués. Or,

$$\begin{aligned} r^s v \langle r^k, v \rangle v r^{-s} &= \langle r^s v r^k v r^{-s}, r^s v v v r^{-s} \rangle = \langle r^{-k} r^s v v r^{-s}, r^s v r^{-s} \rangle \\ &= \langle r^{-k}, r^s v r^{-s} \rangle = \langle r^k, r^{2s} v \rangle \neq \langle r^k, r v \rangle, \end{aligned}$$

car, $r v \notin \langle r^k, r^{2s} v \rangle$ étant donné que k et $2s$ sont pairs.

□

Notation 20. Notons $[H]$ la classe de conjugaison d'un sous-groupe H d'un groupe G . Si $H = \langle r_1, \dots, r_j \rangle$, on notera aussi $[H]$ par $[r_1, \dots, r_j]$.

À l'aide des propositions 21 et 22, il est possible de déterminer les classes de conjugaison des sous-groupes de \mathcal{D}_n .

Proposition 23. L'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes de \mathcal{D}_n est égal à

$$\{[r^k] : k|n\} \cup \{[r^k, v] : k|n \text{ et } k \text{ est impair}\} \cup \{[r^k, v], [r^k, r v] : k|n \text{ et } k \text{ est pair}\}.$$

Définition 21. Soient G un groupe fini et H et H' des sous-groupes de G . Définissons la relation \preceq sur les classes de conjugaison des sous-groupes de G par l'énoncé suivant :

$$[H] \preceq [H'] \iff (\exists g \in G : H \leq gH'g^{-1}).$$

Proposition 24. Soit G un groupe fini. Alors, \preceq est une relation d'ordre sur l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes de G .

Démonstration.

1) réflexivité

$$H = 1H1^{-1} \Rightarrow [H] \preceq [H],$$

2) antisymétrie

$$\begin{aligned} & [H] \preceq [H'] \text{ et } [H'] \preceq [H] \\ \Rightarrow & \begin{cases} \exists g \in G : H \leq gH'g^{-1} \\ \exists h \in G : H' \leq hHh^{-1} \end{cases} \\ \Rightarrow & H \leq gH'g^{-1} \leq ghHh^{-1}g^{-1} \\ \Rightarrow & |H| = |gH'g^{-1}| \\ \Rightarrow & H = gH'g^{-1} \\ \Rightarrow & [H] = [H'], \end{aligned}$$

3) transitivité

$$\begin{aligned} & [H] \preceq [H'] \preceq [H''] \\ \Rightarrow & \begin{cases} \exists g \in G : H \leq gH'g^{-1} \\ \exists h \in G : H' \leq hH''h^{-1} \end{cases} \\ \Rightarrow & H \leq ghH''h^{-1}g^{-1} \\ \Rightarrow & [H] \preceq [H'']. \end{aligned}$$

□

Définition 22. Soient U un ensemble muni d'un ordre \leq et $u, v, w \in U$. L'élément w est une *borne supérieure* de u et v si $u \leq w$ et $v \leq w$.

Définition 23. Soient U un ensemble muni d'un ordre \leq et $u, v, w \in U$. L'élément w est le *suprémum* de u et v si w est une borne supérieure de u et v et toute borne supérieure x de u et v satisfait à $w \leq x$.

Définition 24. Soient U un ensemble muni d'un ordre \leq et $u, v, w \in U$. L'élément w est une *borne inférieure* de u et v si $w \leq u$ et $w \leq v$.

Définition 25. Soient U un ensemble muni d'un ordre \leq et $u, v, w \in U$. L'élément w est l'*infimum* de u et v si w est une borne inférieure de u et v et toute borne inférieure x de u et v satisfait à $x \leq w$.

Définition 26. Soit U un ensemble muni d'un ordre \leq . U muni de l'ordre \leq est un *treillis* si tout couple d'éléments de U possède un infimum et un suprémum.

Pour montrer qu'un ensemble ordonné fini U est un treillis, il suffit de montrer l'existence des infima et d'un élément maximum w , c'est-à-dire que $\forall x \in U, x \leq w$ (voir, entre autres, Stanley 1986).

Proposition 25. L'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes de \mathcal{D}_n muni de l'ordre \preceq est un treillis.

Démonstration. Pour G un groupe et I, J, K des sous-groupes de G , $K \leq I$ et $K \leq J$ implique $K \leq (I \cap J)$. De la même manière, $[K] \preceq [I]$ et $[K] \preceq [J]$ implique $[K] \preceq [I' \cap J']$ où $I' \in [I]$ et $J' \in [J]$. Nous procédons de la façon suivante : nous comparons les intersections entre les sous-groupes de deux classes et constatons qu'elles sont toutes plus petites ou égales à celles formant une classe de conjugaison. L'élément maximum de l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes de \mathcal{D}_n est $[\mathcal{D}_n] = [r, v]$.

Soit k et i des entiers impairs divisant n . Comparons les intersections des sous-groupes de $[r^k, v]$ et $[r^i, v]$. Ces sous-groupes sont de la forme $\langle r^k, r^\ell v \rangle$ et $\langle r^i, r^j v \rangle$. De plus,

$$\langle r^k, r^\ell v \rangle \cap \langle r^i, r^j v \rangle = \begin{cases} \langle r^s, r^t v \rangle & \text{si } \exists t : t \equiv \ell \pmod{k} \text{ et } t \equiv i \pmod{j}, \\ \langle r^s \rangle & \text{sinon,} \end{cases}$$

où s est le plus petit commun multiple de k et i . Mentionnons que $\langle r^s, r^t v \rangle$ est bien unique car t l'est modulo s . Étant donné que les groupes de forme $\langle r^s, r^t v \rangle$ font partie de $[r^s, v]$, l'infimum de $[r^k, v]$ et $[r^i, v]$ est $[r^s, v]$.

De la même manière, pour k et i divisant n et i pair, l'infimum de $[r^k, v]$ et $[r^i, v]$ est $[r^s, v]$ où s est le plus petit commun multiple de k et i . Sous ces mêmes conditions, l'infimum de $[r^k, v]$ et $[r^i, rv]$ est $[r^s, rv]$ si k est impair et $[r^s]$ sinon. $[r^s, rv]$ est aussi l'infimum de $[r^k, rv]$ et $[r^i, rv]$ où k et i sont pairs et divisent n .

Remarquons que $\langle r^k \rangle$ et tous ses sous-groupes sont des sous-groupes normaux de \mathcal{D}_n par la proposition 21. En particulier, l'intersection de $\langle r^k \rangle$ et d'un sous-groupe est un sous-groupe normal de \mathcal{D}_n . Ceci implique donc que les intersections de $\langle r^k \rangle$ avec chacun des sous-groupes d'une classe de conjugaison sont les mêmes. En effet, soit H un sous-groupe de \mathcal{D}_n alors,

$$\forall g \in \mathcal{D}_n, \langle r^k \rangle \cap H = g(\langle r^k \rangle \cap H)g^{-1} = g\langle r^k \rangle g^{-1} \cap gHg^{-1} = \langle r^k \rangle \cap gHg^{-1}.$$

D'où, l'infimum de $[r^k]$ et $[H]$ est $[\langle r^k \rangle \cap H]$.

□

À partir des résultats précédents, il est possible de déterminer le treillis des classes de conjugaison des sous-groupes de \mathcal{D}_n . Par exemple, la figure 1.3 illustre ceux pour $n = 2, 4, \text{ et } 5$ tandis que la figure 1.4 celui pour $n = 6$.

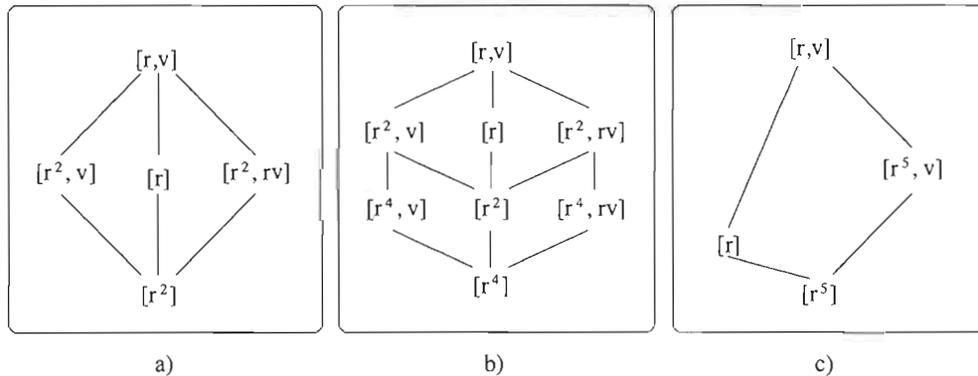


Figure 1.3 – Les treillis des classes de conjugaison des sous-groupes de $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_4$ et \mathcal{D}_5

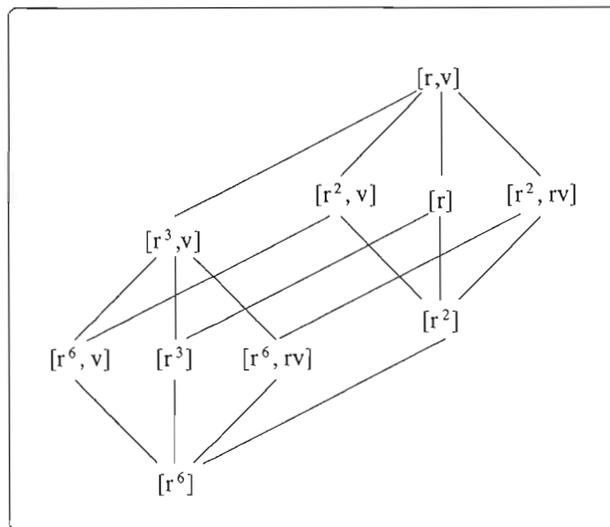


Figure 1.4 – Le treillis des classes de conjugaison des sous-groupes de \mathcal{D}_6

1.3.2 Définition de l'espèce $P_n(X)$

Considérons P_n , l'espèce des n -gones (cycles non orientés de taille n) en des sommets de sorte X .

La figure 1.5 représente une P_6 -structure.

Le stabilisateur de telles structures est isomorphe à \mathcal{D}_n .

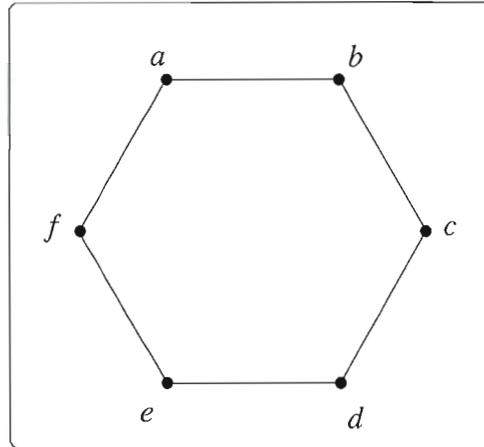
Proposition 26. L'espèce $P_n(X)$ satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$P_n(X) = \frac{X^n}{H} \quad (1.12)$$

où H est le stabilisateur d'une $P_n(X)$ -structure sur le l'ensemble $[n]$. En fait, $H = \langle r, v \rangle$ où r et v sont des permutations de $[n]$ définies par leur décomposition en cycles disjoints par les formules suivantes :

$$r = (1, 2, 3, \dots, n),$$

$$v = \begin{cases} (1, n) \dots (i, n - i + 1) \dots (\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (1)(2, n) \dots (i, n - i + 2) \dots (\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Figure 1.5 – Une P_6 -structure

1.3.3 Définition de l'espèce $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$

Définition 27. Définissons $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ comme l'espèce moléculaire (à trois sortes) des $2n$ -gones en des sommets de sorte Y , bicolorés en leurs arêtes lesquelles sont de sorte X ou Z selon leur coloration, la bicoloration des $2n$ -gones étant propre (c'est-à-dire que deux arêtes adjacentes sont de couleurs différentes). Cette coloration est telle qu'illustrée, pour $n = 4$ et $n = 3$, par la figure 1.6 où les arêtes doubles sont de sorte X et les simples de sorte Z .

Remarquons que le stabilisateur d'une $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure quelconque est isomorphe à \mathcal{D}_n . En effet, la bicoloration impose des restrictions sur les automorphismes d'une $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure : H peut-être vu comme un sous-groupe de \mathcal{D}_{2n} dont les axes de réflexion ne peuvent passer que par deux sommets ou deux arêtes. Or, la bicoloration des arêtes ne permet pas d'axe réflexif passant par deux sommets. D'où $H \simeq \mathcal{D}_n$.

Proposition 27. L'espèce $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z) = \frac{X^n Z^n Y^{2n}}{H} \quad (1.13)$$

où H est le stabilisateur d'une $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure sur le multiensemble $M = (\{x_i \mid i \in [n]\}, \{y_i \mid i \in [2n]\}, \{z_i \mid i \in [n]\})$. En fait, $H = \langle r, v \rangle$ où r et v sont

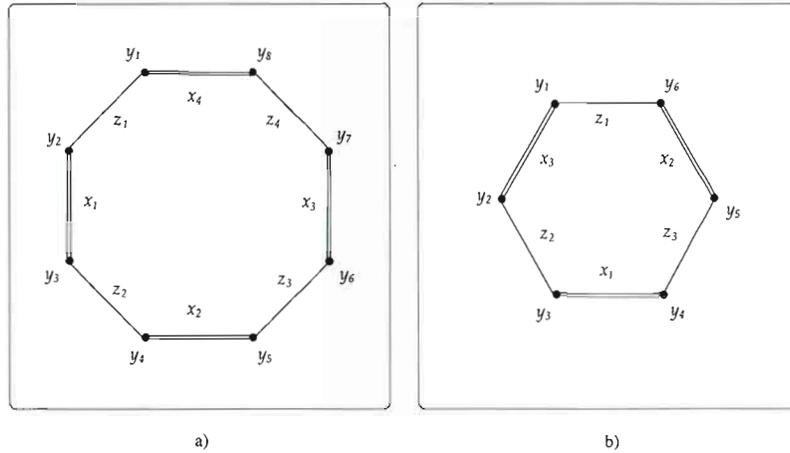


Figure 1.6 – Une $P_8^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure et une $P_6^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure

des multipermutations de M définies par leur décomposition en cycles disjoints par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 \tau &= (y_1, y_3, \dots, y_{2i+1}, \dots, y_{2n-1})(y_2, y_4, \dots, y_{2i}, \dots, y_{2n})(x_1, x_2, \dots, x_n)(z_1, z_2, \dots, z_n) \\
 v &= \begin{cases} \left(\begin{aligned} &(y_1, y_{2n}) \dots (y_i, y_{2n-i+1}) \dots (y_n, y_{n+1}) \\ &(z_1, z_n) \dots (z_i, z_{n-i+1}) \dots (z_{\frac{n}{2}}, z_{\frac{n}{2}+1}) \\ &(x_n)(x_{\frac{n}{2}})(x_1, x_{n-1}) \dots (x_i, x_{n-i}) \dots (x_{\frac{n}{2}-1}, x_{\frac{n}{2}+1}) \end{aligned} \right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(\begin{aligned} &(y_1, y_{2n}) \dots (y_i, y_{2n-i+1}) \dots (y_n, y_{n+1}) \\ &(x_1)(x_2, x_n) \dots (x_i, x_{n-i+2}) \dots (x_{\frac{n+1}{2}}, x_{\frac{n+1}{2}+1}) \\ &(z_1)(z_2, z_n) \dots (z_i, z_{n-i+2}) \dots (z_{\frac{n+1}{2}}, z_{\frac{n+1}{2}+1}) \end{aligned} \right) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Mentionnons que les figures 1.7 a) et b) représentent une $P_8^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure et une $P_6^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure dont les stabilisateurs correspondent à ceux décrits dans la proposition précédente. De plus, elles illustrent l'action de v sur ces structures comme une réflexion sur un $2n$ -gone régulier tandis que celle de τ serait une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Notons que $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ est une généralisation d'espèces connues au sens où $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, 1)$ est isomorphe à $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y)$ (voir Labelle, Lamathe et Leroux 2003) et $P_{2n}^{\text{bic}}(1, X, 1)$ à $P_{2n}^{\text{bic}}(X)$ (voir Labelle 1985). La proposition suivante se déduit aisément de la définition de l'espèce $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$.

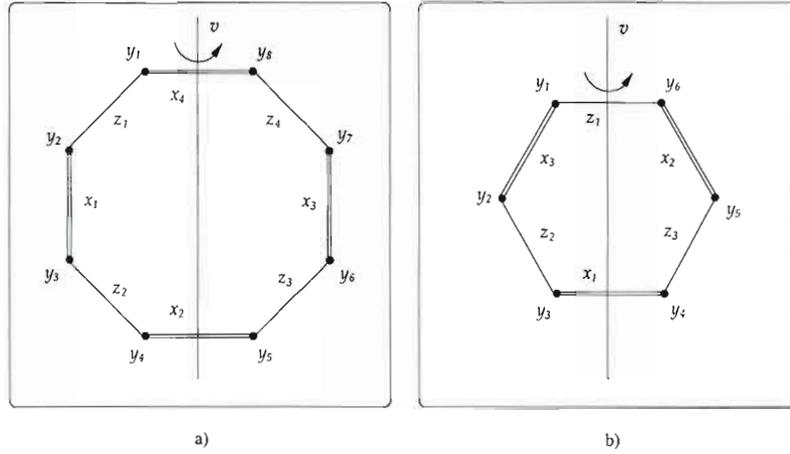


Figure 1.7 – Actions de v sur une $P_8^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure et une $P_6^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure

Proposition 28. Soit $n \geq 1$. Alors, on a l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z) = P_{2n}^{\text{bic}}(Z, Y, X) \quad (1.14)$$

Dans le cas où n est impair, une arête de sorte X est opposée à une de sorte Z . On en déduit facilement la proposition suivante.

Proposition 29. Soit $n \geq 1$ impair. Alors, on a l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z) = P_{2n}^{\text{bic}}(XZ, Y, 1) \quad (1.15)$$

On peut facilement vérifier quand $P_{2k_1}^{\text{bic}}(X^{n_1}, X^{m_1}, X^{\ell_1}) = P_{2k_2}^{\text{bic}}(X^{n_2}, X^{m_2}, X^{\ell_2})$ en comparant les types de décomposition en cycles disjoints de leurs isomorphismes. Par la proposition 28, on peut se limiter au cas où $n_1 \geq \ell_1$ et $n_2 \geq \ell_2$.

Proposition 30. Soient $k_1, n_1, m_1, \ell_1, k_2, n_2, m_2$ et ℓ_2 des entiers naturels tels que $k_1 \geq k_2 \geq 1, n_1 \geq \ell_1$ et $n_2 \geq \ell_2$. Alors, les espèces $P_{2k_1}^{\text{bic}}(X^{n_1}, X^{m_1}, X^{\ell_1})$ et $P_{2k_2}^{\text{bic}}(X^{n_2}, X^{m_2}, X^{\ell_2})$ sont isomorphes si les entiers $k_1, n_1, m_1, \ell_1, k_2, n_2, m_2$ et ℓ_2 satisfont à au moins une des conditions suivantes :

- (1) $n_1 = m_1 = \ell_1 = n_2 = m_2 = \ell_2 = 0$,
- (2) $k_1 = k_2$ est pair, $n_1 = n_2, m_1 = m_2$ et $\ell_1 = \ell_2$,

(3) $k_1 = k_2$ est impair, $n_1 + \ell_1 = n_2 + \ell_2$ et $m_1 = m_2$,

(4) $k_1 = 2, k_2 = 1, m_1 = \ell_1 = n_2 = \ell_2 = 0$ et $n_1 = m_2$.

Démonstration.

La première condition est évidente ($1 = 1$). Posons $A = P_{2k_1}^{\text{bic}}(X^{n_1}, X^{m_1}, X^{\ell_1})$ et $B = P_{2k_1}^{\text{bic}}(X^{n_2}, X^{m_2}, X^{\ell_2})$. On peut ensuite supposer qu'aucune des espèces est isomorphe à 1. Ce qui implique qu'au moins un exposant indicé par i est non nul pour $i \in \{1, 2\}$. Si $k_1 = k_2$ est pair alors $n_1 = n_2$ car sinon une A -structure n'aurait pas d'isomorphisme laissant fixe $2n_2$ éléments si $n_1 < n_2$ ou une B -structure n'aurait pas d'isomorphisme laissant fixe $2n_1$ éléments si $n_1 > n_2$. De la même manière, $\ell_1 = \ell_2$ donc $m_1 = m_2$ car sinon A ne serait pas concentrée sur le même cardinal que B .

Si $k_1 = k_2$ est impair alors $n_1 + \ell_1 = n_2 + \ell_2$ car sinon une A -structure n'aurait pas d'isomorphisme laissant fixe $n_2 + \ell_2$ éléments. Ainsi, $m_1 = m_2$ et A et B sont isomorphes par la proposition 29.

Il ne reste donc plus qu'à exclure les cas où $k_1 > k_2$ ne satisfaisant pas à la quatrième condition. Si $k_1 > 3$ alors des isomorphismes d'une A -structure possède des cycles de longueur k_1 alors qu'une B -structure n'en possède aucun. Si $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$ alors $m_1 = \ell_1 = 0$ car sinon le groupe des automorphismes d'une A -structure n'aurait pas le même cardinal que celui d'une B -structure. Alors, $n_2 = \ell_2 = 0$ car l'isomorphisme non trivial d'une A -structure ne laisse fixe aucun élément tandis que celui d'une B -structure en laisserait fixe $n_2 + \ell_2$. Donc $n_1 = m_2$ car sinon A ne serait pas concentrée sur le même cardinal que B . A et B seraient donc isomorphes à $E_2(X^{n_1})$. \square

1.3.4 Classes diédrales de mots

Définition 28. Soit $w = b_1 \dots b_n$ un mot sur \mathcal{A} . Le mot *miroir* de w , noté \bar{w} , est le mot $b_n b_{n-1} \dots b_1$.

Définition 29. Soit \mathcal{A} un alphabet. Notons ϕ l'action du groupe diédral $\mathcal{D}_n = \langle \rho, \tau \rangle$ sur l'ensemble des mots de longueur n sur \mathcal{A} où, pour $w = b_1 b_2 \dots b_n$,

$$\rho w = b_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}$$

et

$$\tau w = \bar{w}.$$

L'orbite d'un mot w sous l'action ϕ restreinte à $\langle \rho \rangle$, notée $[w]$, est une classe circulaire.

Définition 30. La classe diédrale d'un mot w , notée $[[w]]$, est l'orbite de w sous l'action ϕ .

Remarquons que $[[w]] = [w] \cup [\bar{w}]$. En effet, les éléments de \mathcal{D}_n sont de la forme ρ^i et $\rho^i \tau$. De plus, les éléments de $[w]$ sont de la forme $\rho^i w$ tandis que ceux de $[\bar{w}]$ sont de la forme $\rho^i \tau w$.

Définition 31. Une classe diédrale est dite primitive si elle contient un mot primitif.

L'ensemble des racines primitives des mots d'une classe diédrale forme une classe diédrale primitive. En effet, une classe diédrale est l'union de deux classes circulaires de mots dont les racines primitives forment des classes circulaires primitives de mots. De plus, il s'agit d'une classe diédrale puisque la racine primitive du mot miroir d'un mot w ne peut être que l'image miroir de la racine primitive de w .

Notation 32. Notons par $\text{stab}(w)$ le stabilisateur de w sous l'action ϕ .

Définition 33. Un mot w est un *palindrome* si $w = \bar{w}$.

Définition 34. Un *dexterpalindrome* est un mot formé par la concaténation d'une lettre suivie d'un palindrome.

Donc, si w est un palindrome alors $\text{stab}(w) = \langle \rho^i, \tau \rangle$ où i est la longueur de sa racine primitive. De plus, si w est un dexterpalindrome alors $\text{stab}(w) = \langle \rho^i, \rho \tau \rangle$. Ceci implique que la racine primitive d'un palindrome w est un palindrome car sinon $\tau \notin \text{stab}(w)$. De la même manière, la racine primitive d'un dexterpalindrome est un dexterpalindrome.

Définition 35. Une classe diédrale sera dite *palindromique* si elle possède un palindrome.

Définition 36. Une classe diédrale sera dite *dexterpalindromique* si elle possède un dexterpalindrome.

Proposition 31. Soit w un mot. Alors $[w] = [\bar{w}]$ si et seulement si $[[w]]$ est une classe diédrale palindromique ou dexterpalindromique.

Démonstration. Si $[w] = [\bar{w}]$, alors il existe i tel que $\rho^i w = \tau w$. Si i est pair ($i = 2n$), alors $\rho^n w = \rho^{-n} \tau w = \tau \rho^n w$. Donc, $\rho^n w$ est un palindrome et $[[w]]$ est une classe diédrale palindromique. Si i est impair ($i = 2n + 1$), alors $\rho^{-2n-1} \rho^{n+1} w = \rho \rho^{-n-1} \tau = \rho \tau \rho^{n+1} w$. Ce qui implique que $\rho^{n+1} w$ est un dexterpalindrome et que $[[w]]$ est une classe diédrale dexterpalindromique.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que si w est un dexterpalindrome, alors $[w] = [\bar{w}]$. Il suffit de montrer que $w \in [\bar{w}]$ et que $\bar{w} \in [w]$. On a

$$w = \rho \tau w \in [\bar{w}].$$

De plus,

$$\bar{w} = \tau \rho \tau w = \rho^{-1} w \in [w].$$

□

Par exemple, $[[abccba]] = [abccba, aabccb, baabcc, cbaabc, ccbaab, bccbaa]$ est une classe diédrale palindromique et l'ensemble des classes circulaires de ses mots n'est que de cardinal 1. De la même manière, pour une classe dexterpalindromique, $[[abcb]] = [abcb, babc, cbab, bcba]$ est réduite à la classe circulaire que ses mots forment. Notons qu'une classe diédrale peut être palindromique et dexterpalindromique. En effet, $[[bab]] = [bab, bba, abb]$, cette classe diédrale contient le palindrome bab et le dexterpalindrome abb .

Définition 37. Une classe diédrale est dite *gauche* si elle est l'union de deux classes circulaires différentes.

Ainsi, $[[w]]$ la classe diédrale de w est gauche si $[w] \neq [\bar{w}]$. Par exemple, la classe diédrale du mot abc est l'union des deux classes circulaires $[abc, bca, cab]$ et $[cba, bac, acb]$.

Proposition 32. Soit w un mot primitif de longueur impaire ($2n + 1$). Si $[w] = [\bar{w}]$ alors $[[w]]$ contient un seul palindrome et un seul dexterpalindrome.

Démonstration. Par la proposition 31 $[[w]]$ possède un dexterpalindrome ou un palindrome.

1. Si $[[w]]$ contient un palindrome p , ses autres éléments sont de la forme $\rho^i p$ où $1 \leq i < 2n + 1$. Le stabilisateur de ces éléments est

$$\rho^i \text{stab}(p) \rho^{-i} = \rho^i \langle \tau \rangle \rho^{-i} = \langle \rho^{2i} \tau \rangle.$$

Comme $2i \neq 0 \pmod{2n + 1}$, $[[w]]$ ne possède qu'un seul palindrome. Par contre, $\langle \rho^{2(n+1)} \tau \rangle = \langle \rho \tau \rangle$, $[[w]]$ contient donc un dexterpalindrome.

2. Si $[[w]]$ contient un dexterpalindrome d , ses autres éléments sont de la forme $\rho^i d$ où $1 \leq i < 2n + 1$. Le stabilisateur de ces éléments est

$$\rho^i \text{stab}(p) \rho^{-i} = \rho^i \langle \rho \tau \rangle \rho^{-i} = \langle \rho^{2i+1} \tau \rangle.$$

Étant donné que $2i \neq 0 \pmod{2n + 1}$, $[[w]]$ ne possède qu'un seul dexterpalindrome. Par ailleurs, $\langle \rho^{2n+1} \tau \rangle = \langle \tau \rangle$, $[[w]]$ contient donc un palindrome. □

Proposition 33. Une classe diédrale, palindromique et primitive de mots de longueur paire ($2n$) possède deux palindromes et aucun dexterpalindrome.

Démonstration. Une classe palindromique contient un palindrome p . De plus $[p] = [\bar{p}]$. Donc, les autres éléments de $[[p]]$ sont de la forme $\rho^i p$ où $1 \leq i < 2n$. Ce qui implique que leur stabilisateur est égal à

$$\rho^i \text{stab}(p) \rho^{-i} = \rho^i \langle \tau \rangle \rho^{-i} = \langle \rho^{2i} \tau \rangle.$$

Seuls p et $\rho^n p$ sont des palindromes. De plus, $[[p]]$ ne possède aucun dexterpalindrome car $2i \neq 1 \pmod{2n}$. □

De la même manière on obtient le résultat suivant :

Proposition 34. Une classe diédrale, dexterpalindromique et primitive de mots de longueur paire ($2n$) possède deux dexterpalindromes et aucun palindrome.

1.3.5 Énumération de classes diédrales de mots et formule d'addition de P_n

Dans cette section, on supposera que les mots sont sur $\mathcal{A}(B)$ où $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$.

Notation 38. Notons $\text{Pal}(d, M_1, M_2)$, le nombre de palindromes de poids M_2 , de lettre centrale de poids M_1 et de longueur d impaire.

Notation 39. Notons $\text{pal}(d, M_1, M_2)$, le nombre de palindromes primitifs de poids M_2 , de lettre centrale de poids M_1 et de longueur d impaire.

Notation 40. Notons $\pi(d, M_1, M_2)$, le nombre de classes palindromiques primitives dont le palindrome est de poids M_2 , de lettre centrale de poids M_1 et de longueur d impaire.

Remarquons qu'on a $\pi(d, M_1, M_2) = \text{pal}(d, M_1, M_2)$ par la proposition 32.

Proposition 35. Soit d un entier impair. Alors,

$$\text{Pal}(d, N, M) = b_N b_{(MN^{-1})^{\frac{1}{2}}}^{\binom{d-1}{2}}.$$

Proposition 36. Soit d impair. Alors,

$$\text{Pal}(m, N, M) = \sum_{i \cdot j = m} \text{pal}(i, N, M^{\frac{1}{j}}), \quad (1.16)$$

$$\text{pal}(d, N, M) = \sum_{i \cdot j = m} \mu(j) \text{Pal}(i, N, M^{\frac{1}{j}}), \quad (1.17)$$

$$\pi(d, N, M) = \sum_{i \cdot j = m} \mu(j) b_N b_{(N^{-1}M^{1/j})^{1/2}}^{\binom{i-1}{2}}. \quad (1.18)$$

Démonstration. On classe les palindromes selon la longueur de leur racine primitive pour obtenir l'équation 1.16. Par inversion de Möbius, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i|m} \mu(i) \text{Pal}\left(\frac{m}{i}, N, M^{\frac{1}{i}}\right) &= \sum_{i|m} \mu(i) \sum_{j|\frac{m}{i}} \text{pal}\left(\frac{m}{ij}, N, M^{\frac{1}{ij}}\right) \\ &= \sum_{k|m} \text{pal}\left(\frac{m}{k}, N, M^{\frac{1}{k}}\right) \sum_{i|k} \mu\left(\frac{k}{i}\right) \\ &= \text{pal}(m, N, M) \end{aligned}$$

qui est équivalente à l'équation 1.17. Par la proposition 32 une classe diédrale palindromique dont la racine est de longueur impaire ne contient qu'un seul palindrome, d'où l'égalité $\text{pal}(d, N, M) = \pi(d, N, M)$ et l'équation 1.18. \square

Notation 41. Notons $\pi(d, M)$, le nombre de classes palindromiques primitives dont l'un des palindromes est de poids M et de longueur d .

Proposition 37. Soit d un entier impair. Alors,

$$\pi(d, M) = \sum_{N \in \mathcal{M}} \pi(d, N, M). \quad (1.19)$$

Notation 42. Notons $\text{Pal}(d, M)$, le nombre de palindromes de poids M et de longueur d .

Notation 43. Notons $\text{pal}(d, M)$, le nombre de palindromes primitifs de poids M et de longueur d .

Proposition 38. Soit d un entier pair. Alors,

$$\text{Pal}(d, M) = b_{M^{\frac{1}{2}}}^{\left(\frac{d}{2}\right)}, \quad (1.20)$$

$$\text{Pal}(d, M) = \sum_{i \cdot j = d} \text{pal}(i, M^{\frac{1}{j}}), \quad (1.21)$$

$$\text{pal}(d, M) = 2\pi(d, M), \quad (1.22)$$

$$\pi(d, M) = \frac{1}{2} \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) \text{Pal}(i, M^{\frac{1}{j}}). \quad (1.23)$$

Démonstration. L'équation 1.20 est un résultat immédiat de la définition de palindrome. Celle 1.21 est le classement de ces palindromes selon la longueur de leur racine primitive. Avec la proposition 33, on obtient l'équation 1.22. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i|m} \mu(i) \text{Pal}\left(\frac{m}{i}, M^{\frac{1}{i}}\right) &= \sum_{i|m} \mu(i) \sum_{j|\frac{m}{i}} \text{pal}\left(\frac{m}{ij}, M^{\frac{1}{ij}}\right) \\ &= \sum_{k|m} \text{pal}\left(\frac{m}{k}, M^{\frac{1}{k}}\right) \sum_{i|k} \mu\left(\frac{k}{i}\right) \\ &= \text{pal}(m, M) \end{aligned}$$

qui, avec l'équation 1.22, donne l'équation 1.23. \square

Notation 44. Notons $\text{Dext}(m, L, M, N)$, le nombre de dexterpalindromes primitifs de longueur m paire de poids N dont la première lettre est de poids L et la lettre centrale de son palindrome est de poids M .

Notation 45. Notons $\text{dext}(m, N, M, L)$, le nombre de dexterpalindromes primitifs de longueur m paire de poids L dont la première lettre est de poids N et la lettre centrale de son palindrome est de poids M .

Notation 46. Notons $\delta(m, N, M, L)$, le nombre de classes dexterpalindromiques primitives dont l'un des dexterpalindromes est de longueur m paire de poids L , sa première lettre est de poids N et la lettre centrale de son palindrome est de poids M .

Proposition 39. Soit m pair et N et M des espèces moléculaires différentes. Alors,

$$\text{Dext}(m, N, M, L) = b_M b_N b_{(M^{-1}N^{-1}L)^{1/2}}^{\binom{m-2}{2}}, \quad (1.24)$$

$$\text{Dext}(m, N, M, L) = \sum_{\substack{i+j=m \\ j \text{ impair}}} \text{dext}(i, N, M, L^{\frac{1}{j}}), \quad (1.25)$$

$$\text{dext}(m, N, M, L) = \sum_{\substack{i+j=m \\ j \text{ impair}}} \mu(j) \text{Dext}(i, M, N, L^{\frac{1}{j}}), \quad (1.26)$$

$$\delta(m, N, M, L) = \sum_{\substack{i+j=m \\ j \text{ impair}}} \mu(j) b_M b_N b_{(N^{-1}M^{-1}L^{1/j})^{1/2}}^{\binom{i-2}{2}}. \quad (1.27)$$

Démonstration. L'équation 1.24 est obtenue de la définition de dexterpalindrome, tandis que l'équation 1.25 est obtenue par le classement de ces dexterpalindromes selon la longueur de leurs racines primitives. On a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i|m \\ i \text{ impair}}} \mu(i) \text{Dext}\left(\frac{m}{i}, N, M, L^{\frac{1}{i}}\right) &= \sum_{\substack{i|m \\ i \text{ impair}}} \mu(i) \sum_{\substack{j|\frac{m}{i} \\ j \text{ impair}}} \text{dext}\left(\frac{m}{ij}, N, M, L^{\frac{1}{ij}}\right) \\ &= \sum_{\substack{k|m \\ k \text{ impair}}} \text{dext}\left(\frac{m}{k}, N, M, L^{\frac{1}{k}}\right) \sum_{i|k} \mu\left(\frac{k}{i}\right) \\ &= \text{dext}(m, N, M, L), \end{aligned}$$

qui équivaut à l'équation 1.26. Si $M \neq N$, Il n'y a qu'un seul dexterpalindrome primitif de longueur m paire de poids L dont la première lettre est de poids N et la lettre centrale de son palindrome est de poids M dans une classe diédrale, dexterpalindromique et primitive, ce qui implique l'équation 1.27. \square

Notation 47. Notons $\text{Dext}(m, N, M)$, le nombre de dexterpalindromes de longueur m ,

de poids M et dont la première lettre est de poids N .

Notation 48. Notons $\text{dext}(m, N, M)$, le nombre de dexterpalindromes primitifs de longueur m , de poids M et dont la première lettre est de poids N .

Définition 49. Soient N et M des espèce moléculaires. Alors $N^{-1}M$ est l'espèce moléculaire T , si elle existe, telle que $NT = M$.

De manière similaire à la proposition 36, on obtient la proposition suivante.

Proposition 40. Soit m un entier positif. Alors,

$$\text{Dext}(m, N, M) = b_N \text{Pal}(m - 1, N^{-1}M), \quad (1.28)$$

$$\text{Dext}(m, N, M) = \sum_{i,j=m} \text{dext}(i, N, M^{\frac{1}{j}}), \quad (1.29)$$

$$\text{dext}(m, N, M) = \sum_{i,j=m} \mu(j) \text{Dext}(i, N, M^{\frac{1}{j}}). \quad (1.30)$$

Proposition 41. Soit d pair. Alors,

$$\text{Dext}(m, N, N, L) = b_N^2 b_{(N^{-2}L)^{1/2}}^{\binom{m-2}{2}}, \quad (1.31)$$

$$\text{Dext}(m, N, N, L) = \sum_{\substack{i,j=m \\ j \text{ impair}}} \text{dext}(i, N, N, L^{\frac{1}{j}}) + \sum_{\substack{i,j=m \\ j \text{ pair}}} \text{dext}(i, N, L^{\frac{1}{j}}), \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \text{dext}(m, N, N, L) = \sum_{\substack{i,j=m \\ j \text{ impair}}} \mu(j) & \left(\text{Dext}(i, N, N, L^{\frac{1}{j}}) \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{\ell,k=i \\ k \text{ pair}}} \text{dext}(\ell, N, L^{\frac{1}{kj}}) \right), \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\delta(m, N, N, L) = \frac{1}{2} \text{dext}(m, N, N, L). \quad (1.34)$$

Ce résultat est obtenu de manière presque identique à celui de la proposition 39 sauf que les classes comptées par $\delta(m, N, N, L)$ comprennent deux dexterpalindromes comptés par $\text{dext}(m, N, N, L)$.

Notation 50. Notons $\delta(d, M)$, le nombre de classes diédrales, dexterpalindromiques, et primitives dont l'un des dexterpalindromes est de poids M et de longueur d .

Proposition 42. Soit d pair. Alors,

$$\delta(d, L) = \sum_{N \in \mathcal{M}} \sum_{M \geq N} \delta(d, N, M, L).$$

Notation 51. Notons $\sigma(d, M)$, le nombre de classes diédrales gauches primitives dont l'un des mots est de poids M et de longueur d .

Proposition 43. Soit d un entier positif. Alors,

$$\lambda(B, d, M) = 2\sigma(d, M) + \pi(d, M) + \chi(d \text{ pair})\delta(d, M) \quad (1.35)$$

$$\sigma(d, M) = \frac{\lambda(B, d, M) - \pi(d, M) - \chi(d \text{ pair})\delta(d, M)}{2} \quad (1.36)$$

Démonstration. Par la proposition 31 et la définition de classe diédrale gauche, l'équation 1.35 ne reflète que le fait que les classes diédrales gauches sont l'union de deux classes circulaires différentes tandis que les autres classes diédrales se confondent chacune avec une classe circulaire. \square

Il ne reste plus qu'à associer les bonnes espèces moléculaires aux classes diédrales pour obtenir un théorème d'addition pour l'espèce P_k .

Théorème 44. Soient k un entier positif et B une espèce. Alors,

$$\begin{aligned} P_k(B) &= \sum_{N \in \mathcal{M}} \sum_{M \in \mathcal{M}} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ impair}}} \pi(i, N, NM^2) P_{2j}^{\text{bic}}(N, M, 1) \\ &+ \sum_{N \in \mathcal{M}} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ pair}}} \pi(i, N^2) P_{2j}^{\text{bic}}(1, N, 1) \\ &+ \sum_{\substack{N \in \mathcal{M} \\ L \in \mathcal{M}}} \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ M \geq N}} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ pair}}} \delta(i, N, M, NML^2) P_{2j}^{\text{bic}}(N, L, M) \\ &+ \sum_{N \in \mathcal{M}} \sum_{i \cdot j = k} \sigma(i, N) C_j(N). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Démonstration. Si la classe diédrale associée à un type de $P_k(B)$ -structures est gauche, on choisit l'orientation de manière à obtenir la classe circulaire du plus petit mot. Une fois l'orientation donnée, on divise le type selon la racine primitive du plus petit mot. Ainsi, si la racine est de poids N et de longueur i où $i \cdot j = k$, un tel type est isomorphe en tant qu'espèce à $C_j(N)$. Ceci est illustré par la figure 1.8.

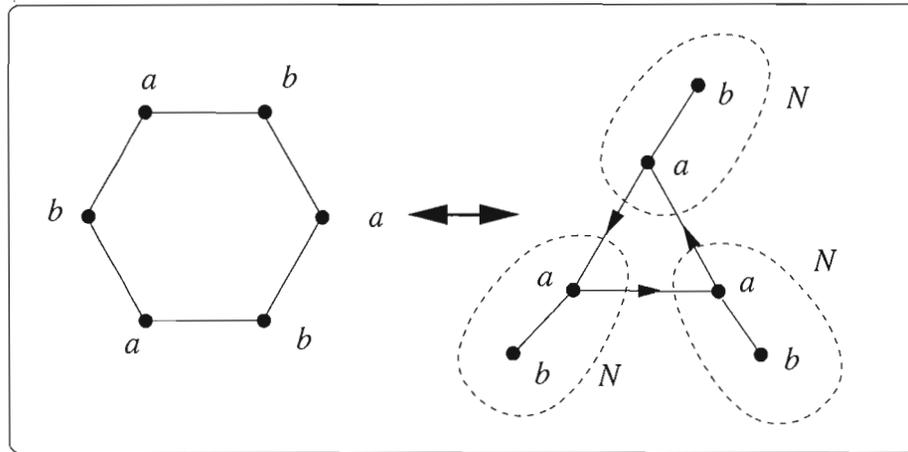


Figure 1.8 – Correspondance entre un type de $P_6(B)$ -structures et $C_3(N)$

Si la classe diédrale est palindromique, elle contient un palindrome et si la racine primitive r est de longueur i impaire, ($i \cdot j = k$), alors r est de la forme $pa\bar{p}$ où a est la lettre centrale de r et p un mot. Le type associé possède des axes de symétrie passant par la lettre centrale a et entre les multiplicités de r . On peut orienter les secteurs délimités par ces axes vers l'axe passant par a . Ainsi, si p a le poids M et a , le poids N , le type associé à la classe palindromique est isomorphe à $P_{2j}^{bic}(N, M, 1)$. Ceci est illustré par la figure 1.9.

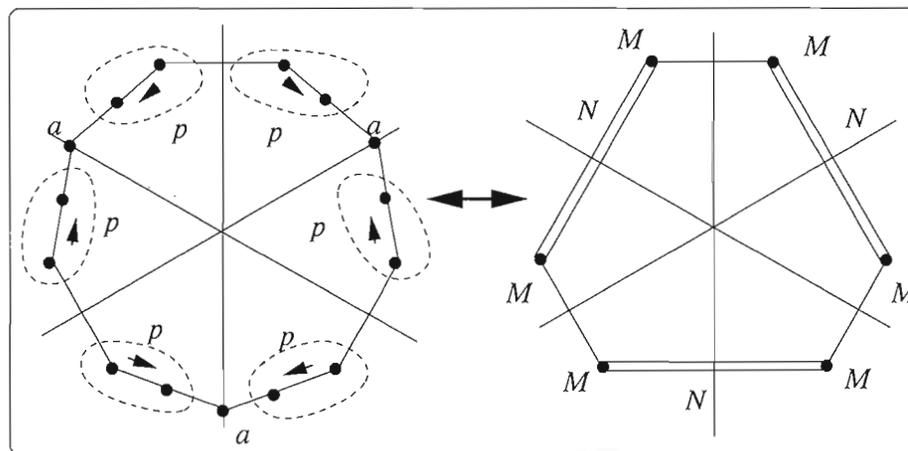


Figure 1.9 – Correspondance entre un type de $P_{15}(B)$ -structures et $P_6^{bic}(N, M, 1)$

Si la classe diédrale est palindromique et si la racine primitive r de son plus petit palindrome est de longueur i paire, ($i \cdot j = k$), r est de la forme $pp\bar{p}$ où p est un mot. Le type associé possède des axes de symétrie passant au milieu de r et entre ces multiplicités. On peut orienter les secteurs délimités par ces axes vers l'axe passant au milieu de r . Ainsi, si p a le poids M , le type associé à la classe palindromique est isomorphe à $P_{2j}^{\text{bic}}(1, M, 1)$. Ceci est illustré par la figure 1.10.

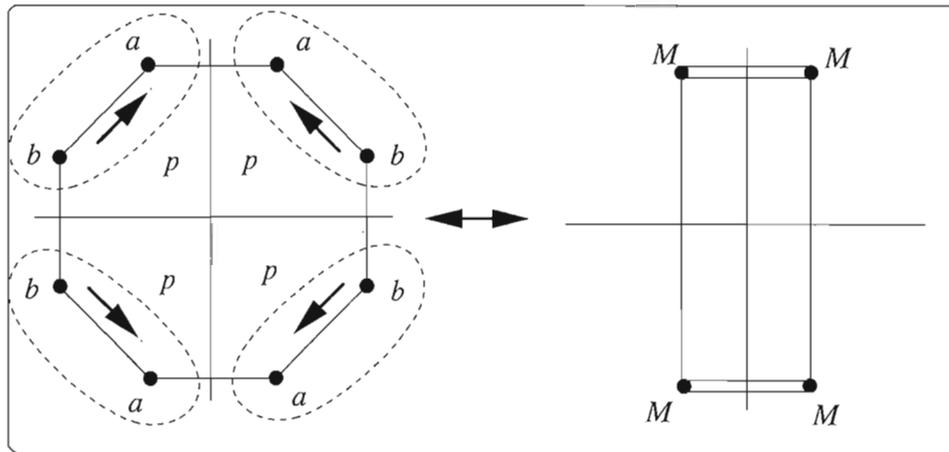


Figure 1.10 – Correspondance entre un type de $P_8(B)$ -structures et $P_4^{\text{bic}}(1, M, 1)$

Si la classe diédrale est dexterpalindromique telle que la racine primitive r de son plus petit dexterpalindrome est de longueur i paire, ($i \cdot j = k$), r est de la forme $apb\bar{p}$ où a et b sont des lettres et p est un mot. Le type associé possède des axes de symétrie passant par a et b . On peut orienter les secteurs délimités par ces axes vers l'axe passant par b . Ainsi, si a a le poids N , b , M et p , L , le type associé à la classe dexterpalindromique est isomorphe à $P_{2j}^{\text{bic}}(N, M, L)$. Ceci est illustré par la figure 1.11. □

Encore une fois, le résultat précédent s'applique au cas multisorte. De plus, il n'utilise aucune espèce quotient, ce qui n'est pas le cas de la formule pour $P_n(X_1 + \dots + X_k)$, où X_i est une espèce de singletons, dans (Auger, Labelle et Leroux, 2002). Les mêmes définitions et résultats s'appliquent directement au cas \mathcal{A} -pondéré.

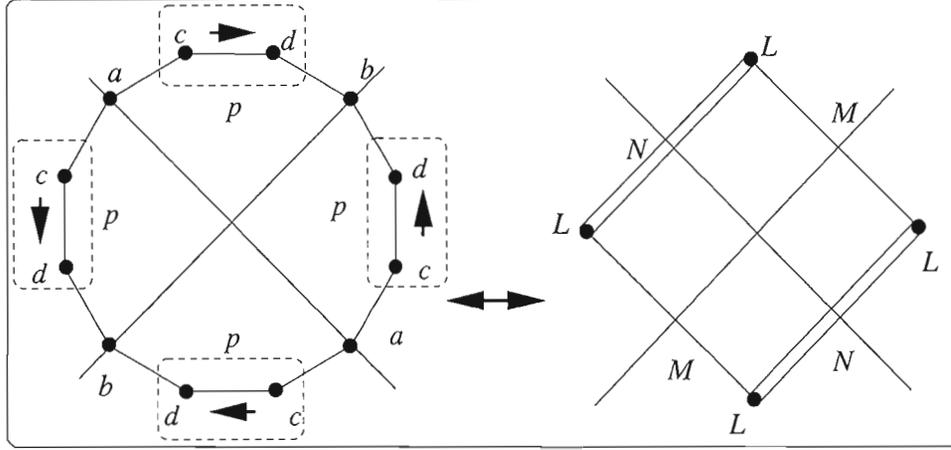


Figure 1.11 – Correspondance entre un type de $P_{12}(B)$ -structures et $P_4^{\text{bic}}(N, M, L)$

Théorème 45. Soient k un entier positif et B une espèce \mathcal{A} -pondérée. Alors,

$$\begin{aligned}
 P_k(B) &= \sum_{N_q \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \sum_{M_p \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \sum_{\substack{i=j=k \\ i \text{ impair}}} \pi(i, N_q, N_q M_p^2) (P_{2j}^{\text{bic}}(N, M, 1))_{p^{2j} q^j} \\
 &+ \sum_{N_q \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \sum_{\substack{i=j=k \\ i \text{ pair}}} \pi(i, N_q^2) (P_{2j}^{\text{bic}}(1, N, 1))_{q^{2j}} \\
 &+ \sum_{\substack{N_q \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \\ L_r \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \\ M_p \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \\ M_p \geq N_q}} \sum_{\substack{i=j=k \\ i \text{ pair}}} \delta(i, N_q, M_p, N_q M_p L_r^2) (P_{2j}^{\text{bic}}(N, L, M))_{q^j p^j r^{2j}} \\
 &+ \sum_{N_q \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \sum_{i=j=k} \sigma(i, N_q) (C_j(N))_{q^j}. \tag{1.38}
 \end{aligned}$$

Les classes diédrales sur $\mathcal{A}(B)$ peuvent également être associées à des types de $P_{2k}^{\text{bic}}(B, Y, Z)$ -structures. En identifiant les espèces moléculaires associées à chaque classe diédrale, on obtient la formule suivante.

Théorème 46. Soient k un entier positif et B une espèce. Alors,

$$\begin{aligned}
 P_{2k}^{\text{bic}}(B, Y, Z) &= \sum_{N \in \mathcal{M}} \sum_{M \in \mathcal{M}} \sum_{\substack{i=j=k \\ i \text{ impair}}} \pi(i, N, NM^2) P_{2j}^{\text{bic}}(N, Z^{\frac{i-1}{2}} Y^i M, Z) \\
 &+ \sum_{N \in \mathcal{M}} \sum_{\substack{i=j=k \\ i \text{ pair}}} \pi(i, N^2) P_{2j}^{\text{bic}}(Z, Z^{\frac{i-2}{2}} Y^i N, Z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{N \in \mathcal{M} \\ L \in \mathcal{M}}} \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ M \geq N}} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ pair}}} \delta(i, N, M, NML^2) P_{2j}^{\text{bic}}(N, Z^{\frac{i}{2}} Y^i L, M) \\
& + \sum_{N \in \mathcal{M}} \sum_{i \cdot j = k} \sigma(i, N) C_j(Z^i Y^{2i} N). \tag{1.39}
\end{aligned}$$

Démonstration. Si la classe diédrale associée à un type de $P_{2k}^{\text{bic}}(B, Y, Z)$ -structures est gauche, on choisit l'orientation de manière à obtenir la classe circulaire du plus petit mot. Une fois l'orientation donnée, on divise en secteurs le type selon la racine primitive du plus petit mot. Si la racine est de longueur i où $i \cdot j = k$, chaque secteur comporte i arêtes de sorte Z et $2i$ sommets de sorte Y . Ainsi, si la racine est de poids N , un tel type est isomorphe en tant qu'espèce à $C_j(Z^i Y^{2i} N)$.

Si la classe diédrale est palindromique, elle contient un palindrome et si la racine primitive r est de longueur i impaire, ($i \cdot j = k$), alors r est de la forme $pa\bar{p}$ où a est la lettre centrale de r et p un mot. Le type associé possède des axes de symétrie passant par la lettre centrale a et par les arêtes de sorte Z entre les multiplicités de r . Chaque secteur possède $\frac{i-1}{2}$ arêtes de sorte Z et i sommets de sorte Y . On peut orienter les secteurs délimités par ces axes vers l'axe passant par a . Ainsi, si p a le poids M et a , le poids N , le type associé à la classe palindromique est isomorphe à $P_{2j}^{\text{bic}}(N, Z^{\frac{i-1}{2}} Y^i M, Z)$.

Si la classe diédrale est palindromique et si la racine primitive r de son plus petit palindrome est de longueur i paire, ($i \cdot j = k$), r est de la forme $p\bar{p}$ où p est un mot. Le type associé possède des axes de symétrie passant au milieu de r et entre ces multiplicités, donc sur des arêtes de sorte Z . On peut orienter les secteurs délimités par ces axes vers l'axe passant au milieu de r . Chaque secteur possède $\frac{i-2}{2}$ arêtes de sorte Z et i sommets de sortes Y . Ainsi, si p a le poids N , le type associé à la classe palindromique est isomorphe à $P_{2j}^{\text{bic}}(Z, Z^{\frac{i-2}{2}} Y^i N, Z)$.

Si la classe diédrale est dexterpalindromique telle que la racine primitive r de son plus petit dexterpalindrome est de longueur i paire, ($i \cdot j = k$), r est de la forme $apb\bar{p}$ où a et b sont des lettres et p est un mot. Le type associé possède des axes de symétrie passant par a et b . On peut orienter les secteurs délimités par ces axes vers l'axe passant par b . Chaque secteur possède $\frac{i}{2}$ arêtes de sorte Z et i sommets de sorte Y . Ainsi, si a a

le poids N, b, M et p, L , le type associé à la classe dexterpalindromique est isomorphe à $P_{2j}^{\text{bic}}(N, Z^{\frac{i}{2}} Y^i L, M)$. \square

Les mêmes définitions et résultats s'appliquent directement au cas \mathcal{A} -pondéré.

Théorème 47. Soient k un entier positif et B une espèce \mathcal{A} -pondérée. Alors,

$$\begin{aligned}
P_{2k}^{\text{bic}}(B, Y, Z) &= \sum_{N_q \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \sum_{M_p \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ impair}}} \pi(i, N_q, N_q M_p^2) (P_{2j}^{\text{bic}}(N, Z^{\frac{i-1}{2}} Y^i M, Z))_{p^{2j} q^j} \\
&+ \sum_{N_q \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ pair}}} \pi(i, N_q^2) (P_{2j}^{\text{bic}}(Z, Z^{\frac{i-2}{2}} Y^i N, Z))_{q^{2j}} \\
&+ \sum_{\substack{N_q \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \\ L_r \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \\ M_p \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \\ M_p \geq N_q}} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ pair}}} \delta(i, N_q, M_p, N_q M_p L_r^2) (P_{2j}^{\text{bic}}(N, Z^{\frac{i}{2}} Y^i L, M))_{q^j p^j r^{2j}} \\
&+ \sum_{N_q \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \sum_{i \cdot j = k} \sigma(i, N_q) (C_j(Z^i Y^{2i} N))_{q^j}. \tag{1.40}
\end{aligned}$$

1.3.6 Propriétés d'action restreinte à un sous-groupe normal

Nous ferons le rappel de résultats sur les actions de groupe pour, entre autres, calculer le stabilisateur d'une action d'un groupe restreinte à un sous-groupe normal.

Notation 52. Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G , W un ensemble et ψ une action de groupe de G sur W . Notons $\psi|_H$, l'action ψ restreinte à H .

Notation 53. Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G , W un ensemble, $w \in W$ et ψ une action de groupe de G sur W . Notons $\text{stab}_H(w)$ le stabilisateur de w sous l'action $\psi|_H$.

Remarquons que $\text{stab}_H(w) = \text{stab}_G(w) \cap H$.

Proposition 48. Soient G un groupe fini, $g \in G$, W un ensemble, $w \in W$ et ψ une action de groupe de G sur W . Alors,

$$\text{stab}_G(gw) = g \text{stab}_G(w) g^{-1}. \tag{1.41}$$

Démonstration. En effet,

$$h \in \text{stab}_G(gw) \iff hgw = gw$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow g^{-1}hgw = w \\
&\Leftrightarrow g^{-1}hg \in \text{stab}_G(w) \\
&\Leftrightarrow h \in g \text{stab}_G(w) g^{-1}.
\end{aligned}$$

□

La proposition précédente implique qu'il est possible de classifier les orbites d'une action de G selon la classe de conjugaison des sous-groupes de G à laquelle leurs stabilisateurs appartiennent.

Proposition 49. Soient G un groupe fini, $g \in G$, H un sous-groupe normal de G , W un ensemble, $w \in W$ et ψ une action de groupe de G sur W . Alors,

$$\text{stab}_H(gw) = g \text{stab}_H(w) g^{-1}. \quad (1.42)$$

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}
\text{stab}_H(gw) &= \text{stab}_G(gw) \cap H = g \text{stab}_G(w) g^{-1} \cap gHg^{-1} \\
&= g(\text{stab}_G(w) \cap H)g^{-1} = g \text{stab}_H(w) g^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Notation 54. Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G , W un ensemble, $w \in W$ et ψ une action de groupe de G sur W . Notons $[w]_H$ l'orbite de w sous l'action de $\psi|_H$. Notons également $g[w]_H$, $\{gv : v \in [w]_H\}$.

Notation 55. Soient G un groupe fini, $g \in G$, H un sous-groupe de G , W un ensemble, $w \in W$ et ψ une action de groupe de G sur W . Notons $g[w]_H = \{gv : v \in [w]_H\}$.

Proposition 50. Soient G un groupe fini, $g \in G$, H un sous-groupe normal de G , W un ensemble, $w \in W$ et ψ une action de groupe de G sur W . Alors,

$$g[w]_H = [gw]_H. \quad (1.43)$$

Démonstration. En effet,

$$g[w]_H = \{gv : v \in [w]_H\} = \{ghw : h \in H\} = \{igw : i \in H\} = [gw]_H$$

La troisième égalité est obtenue par le fait que H est normal ou autrement dit $gH = Hg$. \square

1.3.7 Classes ρ^2 -diédrales

Pour obtenir une formule d'addition de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$, nous définirons des classes de mots qui permettront de classifier les types d'isomorphie de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B(Y), Z)$ -structures.

Définition 56. Soit un mot $w = a_1a_2\dots a_k$. Le mot *miroir* de w , noté \bar{w} , est le mot $a_k a_{k-1} \dots a_1$.

Définition 57. Soit \mathcal{A} un alphabet. Notons φ l'action du groupe diédral $\mathcal{D}_{2n} = \langle \rho, \tau \rangle$ sur l'ensemble des mots de longueur $2n$ sur \mathcal{A} où, pour $w = a_1a_2\dots a_{2n}$,

$$\rho w = a_2a_3a_4\dots a_{2n}a_1$$

et

$$\tau w = \bar{w}.$$

De plus, remarquons que $\rho^{2n}w = w = \tau^2w$ et $\tau\rho w = \rho^{-1}\tau w$. Cela implique que φ est bien une action de \mathcal{D}_{2n} sur l'ensemble des mots de longueur $2n$. C'est plutôt l'action de φ restreinte à $\langle \rho^2, \tau \rangle$ et $\langle \rho^2 \rangle$ qui nous intéressera. Notons que $\langle \rho^2, \tau \rangle$ est un sous-groupe normal de \mathcal{D}_{2n} , car $\langle \rho^2, \tau \rangle$ est d'indice 2, c'est-à-dire que $\frac{|\mathcal{D}_{2n}|}{|\langle \rho^2, \tau \rangle|} = 2$.

Définition 58. Soit w un mot de longueur $2n$ (n entier). Définissons la *classe ρ^2 -circulaire* de w , notée $[w]_2$, comme étant l'orbite de w sous l'action φ restreinte à $\langle \rho^2 \rangle$.

Par exemple, soit le mot $w = abcdabcd$ alors $[w]_2 = \{abcdabcd, cdabcdab\}$.

Définition 59. Soit w un mot de longueur $2n$ (n entier). Définissons la *classe ρ^2 -diédrale* de w comme étant $[w]_2 \cup [\bar{w}]_2$. Notons-la $[[w]]_2$.

La définition précédente est équivalente à dire que $[[w]]_2$ est l'orbite de w sous l'action φ restreinte à $\langle \rho^2, \tau \rangle$. Par exemple, soit le mot $w = abcabc$. Alors

$$\begin{aligned} \bar{w} &= cbacba, \\ [\bar{w}]_2 &= \{cbacba, acbacb, bacbac\}, \\ [[w]]_2 &= \{abcabc, bcabca, cabcab, cbacba, bacbac, acbacb\}, \end{aligned}$$

$$= \{w, \rho^2 w, \rho^4 w, \tau w, \rho^2 \tau w, \rho^4 \tau w\}.$$

Notation 60. Notons $\text{stab}_2(w)$ (respectivement $\text{stab}_{2\tau}(w)$) le stabilisateur d'un mot w de longueur $2n$ sous l'action de $\langle \rho^2 \rangle$ (respectivement $\langle \rho^2, \tau \rangle$).

Par exemple, soit le mot $w = abbaabbaabba$ alors $\text{stab}_2 w = \langle \rho^4 \rangle$ et $\text{stab}_{2\tau} w = \langle \rho^4, \tau \rangle$. Soit le mot $w = abab$ alors $\text{stab}_2 w = \langle \rho^2 \rangle$ et $\text{stab}_{2\tau} w = \langle \rho^2 \rangle$.

Définition 61. Un mot w de longueur $2n$ est dit ρ^2 -primitif si $\text{stab}_2(w)$ est réduit à l'identité.

Autrement dit un mot w de longueur $2n$ est ρ^2 -primitif si sa classe ρ^2 -circulaire possède n éléments. Sinon, il existerait i et j tels que $i \not\equiv j \pmod{n}$ et $\rho^{2i} w = \rho^{2j} w$, donc $\rho^{2i-2j} w = w$ et $1 \neq \rho^{2i-2j}$. Notons que les mots de longueur 2 sont nécessairement ρ^2 -primitifs. Notons que la définition 12 d'un mot primitif est équivalente à dire que son stabilisateur sous l'action de $\langle \rho \rangle$ est réduit à l'identité. En particulier, un mot primitif de longueur $2n$ est donc ρ^2 -primitif. Par contre, un mot ρ^2 -primitif n'est pas nécessairement primitif. Par exemple, le mot $abcabc$ est ρ^2 -primitif mais non primitif.

Définition 62. Un mot w de longueur $2n$ est dit ρ^{2j} -symétrique si $\text{stab}_2(w) = \langle \rho^{2j} \rangle$ où $j|n$.

Par exemple, le mot $abcdabcdabcd$ est ρ^4 -symétrique. Remarquons que les mots primitifs de longueur $2n$ sont ρ^{2n} -symétriques puisque $\rho^{2n} = 1$. Par exemple, le mot $abcabc$ est ρ^6 -symétrique et ρ^2 -primitif.

Proposition 51. Soit $w = a_1 a_2 a_3 \dots a_{2n}$. Alors, w est ρ^{2j} -symétrique si et seulement si $w = u^{\frac{n}{j}}$ où $u = a_1 a_2 \dots a_{2j}$ et u est ρ^2 -primitif, où u^n désigne la n -ième puissance par concaténation du mot u .

Définition 63. Soit w un mot ρ^{2j} -symétrique de longueur $2n$. La racine ρ^2 -primitive de w est le mot u tel que $u^{\frac{n}{j}} = w$.

Par exemple, la racine ρ^2 -primitive de $w = abcabcabcabc$ est $abcabc$ et w est bien ρ^6 -symétrique.

Proposition 52. Soit w un mot ρ^{2j} -symétrique. Alors, $\forall u \in [w]_2$, u est ρ^{2j} -symétrique.

Démonstration. Si $u = \rho^{2i}w$, alors

$$\text{stab}_2(u) = \rho^{2i} \text{stab}_2(w) \rho^{-2i} = \rho^{2i} \langle \rho^{2j} \rangle \rho^{-2i} = \langle \rho^{2j} \rangle.$$

□

Proposition 53. Soient w un mot ρ^{2j} -symétrique de longueur $2n$ et u sa racine ρ^2 -primitive. Alors,

$$[u]_2 = \{v : v^{\frac{n}{j}} \in [w]_2\}. \quad (1.44)$$

En fait, pour w un mot ρ^{2j} -symétrique de longueur $2n$ et u sa racine primitive, $\rho^{2i}w = (\rho^{2i}u)^{\frac{n}{j}}$. Par exemple, $w = abcaabcaabca$ est ρ^4 -symétrique et sa racine ρ^2 -primitive est $u = abca$. De plus, $\rho^2w = caabcaabcaab = (caab)^3 = (\rho^2u)^3$.

Proposition 54. Soient w un mot ρ^{2j} -symétrique de longueur $2n$. Alors, \bar{w} est ρ^{2j} -symétrique.

Démonstration. En effet,

$$\text{stab}_2(\bar{w}) = \tau \text{stab}_2(w) \tau^{-1} = \tau \langle \rho^{2j} \rangle \tau^{-1} = \langle \rho^{2j} \rangle.$$

□

Définition 64. Une classe ρ^2 -diédrale est dite ρ^{2j} -symétrique si elle possède un mot ρ^{2j} -symétrique.

Proposition 55. Une classe ρ^2 -diédrale est ρ^{2j} -symétrique si et seulement si tous ses mots sont ρ^{2j} -symétriques.

Définition 65. Une classe ρ^2 -diédrale ou ρ^2 -circulaire est dite ρ^2 -primitive si elle possède un mot ρ^2 -primitif.

Proposition 56. Soient w un mot ρ^{2j} -symétrique de longueur $2n$ et u sa racine ρ^2 -primitive. Alors,

$$[[u]]_2 = \{v : v^{\frac{n}{j}} \in [[w]]_2\}. \quad (1.45)$$

En fait, pour w un mot ρ^{2j} -symétrique de longueur $2n$ et u sa racine ρ^2 -primitive, $\rho^{2i}w = (\rho^{2i}u)^{\frac{n}{j}}$ et $\rho^{2i}\tau w = (\rho^{2i}\tau u)^{\frac{n}{j}}$. Par exemple, $w = acbaacbaacba$ est ρ^4 -symétrique et sa racine ρ^2 -primitive est $u = acba$. De plus, $\tau w = abcaabcaabca = (abca)^3 = (\tau u)^3$.

Définition 66. Soit w un mot de longueur $2n$. Le mot w est dit (ρ^{2j}, τ) -symétrique (resp. $(\rho^{2j}, \rho^2\tau)$ -symétrique) si $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j}, \tau \rangle$ (resp. $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j}, \rho^2\tau \rangle$) et $j|n$.

Remarquons que les mots (ρ^{2j}, τ) -symétriques de longueur $2n$, pour tout entier j divisant n , sont exactement les mots palindromiques de longueur $2n$. Par exemple, $abbaabba$ est (ρ^4, τ) -symétrique tandis que $bbaabbaa$ est $(\rho^4, \rho^2\tau)$ -symétrique.

Proposition 57. Un mot w est (ρ^{2j}, τ) -symétrique si et seulement si ρw est $(\rho^{2j}, \rho^2\tau)$ -symétrique.

Démonstration. Supposons que w est (ρ^{2j}, τ) -symétrique. Alors,

$$\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j}, \tau \rangle \iff \text{stab}_{2\tau}(\rho w) = \rho \langle \rho^{2j}, \tau \rangle \rho^{-1} = \langle \rho^{2j}, \rho^2\tau \rangle.$$

□

Définition 67. Soient n et j des entiers tels que $j|n$. Une classe ρ^2 -diédrale de mots de longueur $2n$ est dite $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétrique si elle possède un mot w tel que $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j}, \tau \rangle$.

Définition 68. Soient n et j des entiers tels que $j|n$. Une classe ρ^2 -diédrale de mots de longueur $2n$ est dite $[\rho^{2j}, \rho^2\tau]$ -symétrique si elle possède un mot w tel que $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j}, \rho^2\tau \rangle$.

Définition 69. Soient n et j des entiers tels que $j|n$. Une classe ρ^2 -diédrale de mots de longueur $2n$ est dite $[\rho^{2j}]$ -symétrique si elle possède un mot w tel que $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j} \rangle$.

Par les propositions 23 et 48, la définition précédente consiste en une classification des classes ρ^2 -diédrales par les classes de conjugaison des sous-groupes de $\langle \rho^2, \tau \rangle$ correspondant à celles de leur stabilisateur. Bien qu'une classe ρ^2 -diédrale $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétrique contienne forcément un mot (ρ^{2j}, τ) -symétrique, ce ne sont pas nécessairement tous ses mots qui le sont. Par exemple, $w = acbbca$ est (ρ^6, τ) -symétrique tandis que

le stabilisateur de $\rho^2 w = caacbb$ sous l'action de $\langle \rho^2, \tau \rangle$ est $\langle \rho^6, \rho^4 \tau \rangle$. De la même manière, il est possible qu'une classe ρ^2 -diédrale $[\rho^{2j}, \rho^{2\tau}]$ -symétrique possède un mot qui ne soit pas $(\rho^{2j}, \rho^{2\tau})$ -symétrique. Par contre, si w est un mot d'une classe $[\rho^{2j}]$ -symétrique, alors $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j} \rangle$ car $\langle \rho^{2j} \rangle$ est un sous-groupe normal de $\langle \rho^2, \tau \rangle$.

Définition 70. Un mot w de longueur $2n$ est dit ρ^2 -gauche si $[w]_2 \neq [\bar{w}]_2$.

Définition 71. Une classe ρ^2 -diédrale, ξ , est dite ρ^2 -gauche si il existe $w \in \xi$ tel que w est ρ^2 -gauche.

Proposition 58. Une classe ρ^2 -diédrale ξ est ρ^2 -gauche et ρ^{2j} -symétrique si et seulement si ξ est $[\rho^{2j}]$ -symétrique.

Démonstration.

\Rightarrow) Soient ξ une classe ρ^2 -diédrale ρ^2 -gauche et ρ^{2j} -symétrique et $w \in \xi$. Nous devons montrer que $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j} \rangle$. Par définition, $[w]_2 \neq [\bar{w}]_2$ et $\text{stab}_2(w) = \langle \rho^{2j} \rangle$. Or, $\text{stab}_2(w) = \text{stab}_{2\tau}(w) \cap \langle \rho^2 \rangle = \langle \rho^{2j} \rangle$. Il ne reste donc qu'à montrer qu'il n'existe pas d'élément de la forme $\rho^{2i}\tau$ dans $\text{stab}_{2\tau}(w)$. Pour cela supposons le contraire, $\rho^{2i}\tau \in \text{stab}_{2\tau}(w)$ alors $\rho^{2i}\tau w = w$ d'où $\tau w = \rho^{-2i}w$. Il s'ensuit l'égalité $[w]_2 = [\rho^{-2i}w]_2 = [\bar{w}]_2$ qui est en contradiction avec l'hypothèse que ξ est ρ^2 -gauche.

\Leftarrow) Soit ξ une classe ρ^2 -diédrale $[\rho^{2j}]$ -symétrique. Il faut montrer que ξ est ρ^2 -gauche et ρ^{2j} -symétrique. Par définition de ξ , il existe $w \in \xi$ tel que $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j} \rangle$. Donc, $\text{stab}_2(w) = \text{stab}_{2\tau}(w) \cap \langle \rho^2 \rangle = \langle \rho^{2j} \rangle$, d'où ξ est ρ^{2j} -symétrique. Pour montrer que ξ est ρ^2 -gauche, supposons le contraire, c'est-à-dire que $[w]_2 = [\bar{w}]_2$. D'où, il existe i tel que $\rho^{2i}w = \tau w$ donc $w = \rho^{-2i}\tau w$. Il s'ensuit que $\rho^{-2i}\tau \in \text{stab}_{2\tau}(w)$ qui est contradiction avec l'hypothèse que ξ est $[\rho^{2j}]$ -symétrique.

□

Définition 72. Soit w un mot de longueur paire. Le mot w et sa classe ρ^2 -diédrale $[[w]]_2$ sont dits ρ^2 -palindromiques si $[w]_2 = [\bar{w}]_2$.

Par exemple, $abccba$ et sa classe ρ^2 -diédrale sont ρ^2 -palindromiques. Par contre, ce ne sont pas tous les mots ρ^2 -palindromiques qui sont palindromiques. Par exemple, la classe ρ^2 -diédrale de $bcddcbaa$ est $\{bcddcbaa, ddcbaabc, cbaabccd, aabcdccb\}$ qui

est égale à la classe de $aabcdccb$. La classe ρ^2 -diédrale de $bcddcbaa$ est donc ρ^2 -palindromique et ne contient aucun palindrome malgré que tous ses mots soient ρ^2 -palindromiques.

Proposition 59. Soit ξ une classe ρ^2 -diédrale. Alors, ξ est ρ^2 -palindromique et ρ^{2j} -symétrique si et seulement si ξ est $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétrique ou $[\rho^{2j}, \rho^2\tau]$ -symétrique.

Démonstration.

\Rightarrow) Soient ξ une classe ρ^2 -diédrale, ρ^2 -palindromique et ρ^{2j} -symétrique et $w \in \xi$. Il faut montrer que ξ est $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétrique ou $[\rho^{2j}, \rho^2\tau]$ -symétrique. Par définition de ξ , $\text{stab}_2(w) = \langle \rho^{2j} \rangle$ et $[w]_2 = [\bar{w}]_2$. D'où, il existe i tel que $\rho^{2i}w = \tau w$ donc $w = \rho^{-2i}\tau w$. Étant donné que ξ est ρ^{2j} -symétrique, $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j}, \rho^{-2i}\tau \rangle$. Remarquons que $\rho^i w$ ou $\rho^{i+1}w$ fait partie de ξ car i ou $i+1$ est pair. Or, $\text{stab}_{2\tau}(\rho^i w) = \langle \rho^{2j}, \tau \rangle$ et $\text{stab}_{2\tau}(\rho^{i+1}w) = \langle \rho^{2j}, \rho^2\tau \rangle$. Donc, ξ est $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétrique ou $[\rho^{2j}, \rho^2\tau]$ -symétrique.

\Leftarrow) i) Soit ξ est une classe ρ^2 -diédrale et $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétrique. Il faut montrer que, pour $w \in \xi$, $\text{stab}_2(w) = \langle \rho^{2j} \rangle$ et $[w]_2 = [\bar{w}]_2$. Par définition de ξ , il existe $w \in \xi$ tel que $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j}, \tau \rangle$. Donc, ξ est ρ^{2j} -symétrique, car $\text{stab}_2(w) = \text{stab}_{2\tau}(w) \cap \langle \rho^2 \rangle = \langle \rho^{2j} \rangle$. De plus, $w = \tau w$ donc $[w]_2 = [\bar{w}]_2$. D'où, ξ est ρ^2 -palindromique.

ii) Soit ξ est une classe ρ^2 -diédrale et $[\rho^{2j}, \rho^2\tau]$ -symétrique. Il faut montrer que, pour $w \in \xi$, $\text{stab}_2(w) = \langle \rho^{2j} \rangle$ et $[w]_2 = [\bar{w}]_2$. Par définition de ξ , il existe $w \in \xi$ tel que $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2j}, \rho^2\tau \rangle$. Donc, ξ est ρ^{2j} -symétrique, car $\text{stab}_{2\tau}(w) \cap \langle \rho^2 \rangle = \langle \rho^{2j} \rangle$. De plus, $\rho^2\tau w = w$ d'où $\rho^{-2j}w = \tau w$. Par conséquent, $[w]_2 = [\rho^{-2j}w]_2 = [\bar{w}]_2$, donc ξ est ρ^2 -palindromique.

□

Notons que les notions de $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétrie et de $[\rho^{2j}, \rho^2\tau]$ -symétrie ne sont pas mutuellement exclusives. Par exemple, le mot $w = abcdeedcba$ est (ρ^{10}, τ) -symétrique alors que $\rho^6 w = dcbaabcdee$ est $(\rho^{10}, \rho^2\tau)$ -symétrique. Donc, pour $w = abcdeedcba$, $[w]$ est $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétrique et $[\rho^{2j}, \rho^2\tau]$ -symétrique. Plus généralement, ce n'est le cas que si $\langle \rho^{2j}, \tau \rangle$ et $\langle \rho^{2j}, \rho^2\tau \rangle$ sont conjugués. Donc à l'aide de la proposition 22, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 60. Une classe ρ^2 -diédrale ξ est $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétrique et $[\rho^{2j}, \rho^2\tau]$ -symétrique si et seulement si ξ est ρ^2 -palindromique et ρ^{2j} -symétrique tel que j est impair.

À l'aide de la proposition 50, il est possible de généraliser la proposition 57 aux classes $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétriques et $[\rho^{2j}, \rho^2\tau]$ -symétriques.

Proposition 61. Soit ξ une classe ρ^2 -diédrale $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétrique. Alors, $\rho\xi$ est une classe ρ^2 -diédrale $[\rho^{2j}, \rho^2\tau]$ -symétrique.

Par exemple, soit $w = abccba$ alors w est (ρ^6, τ) -symétrique, $[[w]]_2$ est $[\rho^{2j}, \tau]$ -symétrique, $\rho w = bccbaa$ est $(\rho^6, \rho^2\tau)$ -symétrique et $[[\rho w]]_2$ est $[\rho^{2j}, \rho^2\tau]$ -symétrique. Notons que par la proposition 50, $\rho[[w]]_2 = [[\rho w]]_2$.

Proposition 62. La racine ρ^2 -primitive d'un mot (ρ^{2j}, τ) -symétrique (resp. $(\rho^{2j}, \rho^2\tau)$ -symétrique) est (ρ^{2j}, τ) -symétrique (resp. $(\rho^{2j}, \rho^2\tau)$ -symétrique).

1.3.8 Énumération des classes ρ^2 -diédrales

Rappelons que, pour une espèce asymétrique $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ de sorte Y , $\mathcal{A}(B)$ (voir def. 10) est l'alphabet composé de b_m lettres de poids Y^m (pour tous les $m \geq 0$). De plus, la série génératrice de l'espèce B est $B(y) = \sum_{m \geq 0} b_m y^m$. En posant $B^j(y) = \sum_{m \geq 0} b_m^{(j)} y^m$, le coefficient $b_m^{(j)}$ correspond au nombre de mots de longueur j et de poids Y^m sur $\mathcal{A}(B)$.

Notation 73. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Notons $\text{Pal}(B, 2n, m)$, le nombre de palindromes de longueur $2n$ de poids Y^m sur $\mathcal{A}(B)$.

Comme un palindrome w de longueur $2n$ et de poids Y^m est de la forme $u\bar{u}$ où u est un mot de longueur n et de poids $Y^{\frac{m}{2}}$,

$$\text{Pal}(B, 2n, m) = b_{\frac{m}{2}}^{(n)}. \quad (1.46)$$

Notation 74. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Notons $\pi_2(B, 2n, m)$, le nombre de palindromes ρ^2 -primitifs de longueur $2n$ de poids Y^m sur $\mathcal{A}(B)$.

Notation 75. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Notons $\beta(B, 2n, m)$ (resp. $\gamma(B, 2n, m)$), le nombre de classes ρ^2 -diédrales et $[\rho^{2n}, \tau]$ -symétriques (resp. $[\rho^{2n}, \rho^2\tau]$ -symétriques) dont les mots sont de poids Y^m et de longueur $2n$ sur $\mathcal{A}(B)$.

Notons qu'un mot de longueur $2n$ (ρ^{2n}, τ) -symétrique ou $(\rho^{2n}, \rho^{2\tau})$ -symétrique est ρ^2 -primitif et ρ^2 -palindromique étant donné qu'un mot primitif de longueur $2n$ est ρ^{2n} -symétrique. Donc, une classe ρ^2 -diédrale $[\rho^{2n}, \tau]$ -symétrique ou $[\rho^{2n}, \rho^{2\tau}]$ -symétrique de mots de longueur $2n$ est ρ^2 -primitive et ρ^2 -palindromique. Étant donnée la proposition 61, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 63. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Alors,

$$\beta(B, 2n, m) = \gamma(B, 2n, m). \quad (1.47)$$

Pour compter le nombre de classes $[\rho^{2n}, \tau]$ -symétriques, nous compterons le nombre de palindromes dans de telles classes. Par exemple, si $w = abcdeedcba$ alors

$$[[w]]_2 = \{abcdeedcba, cdeedcbaab, eedcbaabcd, dcbaabcdee, baabcdeedc\}.$$

Donc, w est le seul palindrome de $[[w]]_2$ qui est $[\rho^{10}, \tau]$ -symétrique. Par contre, il est aussi possible que le nombre de palindromes dans une classe $[\rho^{2n}, \tau]$ -symétrique de mots de longueur $2n$ soit égal à 2. Par exemple, si $u = abcddcba$ alors

$$[[u]]_2 = \{abcddcba, cddcbaab, dcbaabcd, baabcdcc\}.$$

Donc, u et $dcbaabcd$ sont les palindromes de $[[u]]_2$ qui est $[\rho^8, \tau]$ -symétrique. En fait, une classe $[\rho^{2n}, \tau]$ -symétrique de mots de longueur $2n$ contient seulement un palindrome si n est impair et deux si n est pair. Ceci sert à prouver la proposition suivante :

Proposition 64. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Alors,

$$\pi_2(B, 2n, m) = (\chi(n \text{ est pair}) + 1)\beta(B, 2n, m). \quad (1.48)$$

Démonstration.

Soit ξ une classe ρ^2 -diédrale $[\rho^{2n}, \tau]$ -symétrique de mots de longueur $2n$. Alors, pour n impair, il faut montrer qu'il n'y a qu'un seul palindrome ρ^2 -primitif dans ξ donc $|\{v \in \xi : \text{stab}_{2\tau}(v) = \langle \tau \rangle\}| = 1$. Par définition de ξ , il existe $w \in \xi$ tel que $\text{stab}_{2\tau}(w) = \langle \rho^{2n}, \tau \rangle = \langle \tau \rangle$ car $\rho^{2n} = 1$. La classe ξ est ρ^2 -palindromique donc $\xi = [w]_2 = \{\rho^{2s}w \mid 1 \leq s \leq n\}$. Le stabilisateur de $\rho^{2s}w$ est égal à $\rho^{2s}\langle \tau \rangle\rho^{-2s} = \langle \rho^{4s}\tau \rangle$. Il

faut donc trouver le nombre de s tel que $\langle \rho^{4s}\tau \rangle = \langle \tau \rangle$ et $1 \leq s \leq j$. Or, $\langle \rho^{4s}\tau \rangle = \langle \tau \rangle$ si et seulement si $2s = 0 \pmod n$ d'où s est nécessairement égal à n car n et 2 sont premiers. Le mot w est donc le seul palindrome de ξ .

De la même manière, pour n pair, $\{s \mid \langle \rho^{4s}\nu \rangle = \langle \nu \rangle \text{ et } 1 \leq s \leq j\}$ est égal à $\{j, \frac{j}{2}\}$. Ce qui implique que ξ possède deux palindromes. \square

Proposition 65. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Alors,

$$\text{Pal}(B, 2n, m) = b_{\frac{m}{2}}^{(n)} = \sum_{d \cdot k = n} (\chi(d \text{ est pair}) + 1) \beta(B, 2d, \frac{m}{k}), \quad (1.49)$$

$$\beta(B, 2n, m) = \frac{1}{\chi(n \text{ est pair}) + 1} \sum_{d \cdot k = n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) b_{\frac{m}{2k}}^{(d)}. \quad (1.50)$$

Démonstration. Nous classons d'abord les palindromes selon la longueur de leur mot ρ^2 -primitif d'où

$$\text{Pal}(B, 2n, m) = \sum_{d|n} \pi_2(B, 2d, \frac{dm}{n}).$$

Par inversion de Möbius, nous obtenons

$$\pi_2(B, 2n, m) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \text{Pal}(B, 2d, \frac{dm}{n}).$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la formule de la proposition 64. \square

Notation 76. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Notons $\lambda_2(B, 2n, m)$, le nombre de classes ρ^2 -circulaires ρ^2 -primitives de mots de longueur $2n$ et de poids Y^m sur $\mathcal{A}(B)$.

Mentionnons que les classes ρ^2 -diédrales $[\rho^{2n}]$ -symétriques correspondent aux classes ρ^2 -diédrales ρ^2 -gauches ρ^2 -primitives. En classant les mots de longueur $2n$ de poids Y^m selon la longueur de leur racine ρ^2 -primitive, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 66. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Alors,

$$b_m^{(2n)} = \sum_{d \cdot k = n} d \lambda_2(B, 2d, \frac{m}{k}) \quad (1.51)$$

et

$$\lambda_2(B, 2n, m) = \frac{1}{n} \sum_{d \cdot k = n} \mu(k) b_m^{(2d)}. \quad (1.52)$$

Notation 77. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Notons $\sigma_2(B, 2n, m)$, le nombre de classes ρ^2 -diédrales $[\rho^{2n}]$ -symétriques de mots de longueur $2n$ et de poids Y^m sur $\mathcal{A}(B)$.

Notation 78. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Notons $\Pi_2(B, 2n, m)$, le nombre de classes ρ^2 -diédrales, ρ^2 -palindromiques et ρ^2 -primitives de longueur $2n$ de poids Y^m sur $\mathcal{A}(B)$.

Proposition 67. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Alors,

$$\Pi_2(B, 2n, m) = (\chi(n \text{ est pair}) + 1)\beta(B, 2n, m). \quad (1.53)$$

Démonstration. Par les propositions 59 et 60, pour n impair, les classes ρ^2 -diédrales ρ^2 -palindromiques et ρ^2 -primitives de mots de longueur $2n$ correspondent aux classes ρ^2 -diédrales $[\rho^{2n}, \tau]$ -symétriques. Donc, pour n impair, $\Pi_2(B, 2n, m) = \beta(B, 2n, m)$. De la même manière, pour n pair, les classes ρ^2 -diédrales ρ^2 -palindromiques et ρ^2 -primitives de mots de longueur $2n$ correspondent aux classes ρ^2 -diédrales $[\rho^{2n}, \tau]$ -symétriques et $[\rho^{2n}, \rho^2\tau]$ -symétriques. Donc, pour n pair,

$$\Pi_2(B, 2n, m) = \beta(B, 2n, m) + \gamma(B, 2n, m) = 2\beta(B, 2n, m)$$

par la proposition 63. □

Proposition 68. Soit $B = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m$ une espèce asymétrique. Alors,

$$\lambda_2(B, 2n, m) = 2\sigma_2(B, 2n, m) + \Pi_2(B, 2n, m), \quad (1.54)$$

et

$$\sigma_2(B, 2n, m) = \frac{\lambda_2(B, 2n, m) - \Pi_2(B, 2n, m)}{2}. \quad (1.55)$$

Démonstration. Par définition, une classe ρ^2 -diédrale ρ^2 -primitive ξ est celle d'un mot w ρ^2 -primitif tel que $\xi = [[w]]_2 = [w]_2 \cup \tau[w]_2$. Selon que $[w]_2 = \tau[w]_2$ ou $[w]_2 \neq \tau[w]_2$, ξ est associable à une ou deux classes ρ^2 -circulaires ρ^2 -primitives. Or, $[[w]]_2$ est ρ^2 -palindromique si $[w]_2 = \tau[w]_2$ et ρ^2 -gauche sinon. □

1.3.9 Formule d'addition de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y, Z)$

Théorème 69 (Ducharme,2005). Soit B une espèce asymétrique dont le développement moléculaire est donné par

$$B(Y) = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_{2n}^{\text{bic}}(X, B(Y), Z) &= \sum_{i \cdot j = n} \sum_{m \geq 0} \sigma_2(B, 2j, m) C_i(X^j Y^m Z^j) & (1.56) \\ &+ \sum_{\substack{i \cdot j = n \\ j \text{ est impair}}} \sum_{m \geq 0} \beta(B, 2j, 2m) P_{2i}^{\text{bic}}(X, (XZ)^{\frac{i-1}{2}} Y^m, Z) \\ &+ \sum_{\substack{i \cdot j = n \\ j \text{ est pair}}} \sum_{m \geq 0} \beta(B, 2j, 2m) P_{2i}^{\text{bic}}(X, Z(XZ)^{\frac{i-2}{2}} Y^m, X) \\ &+ \sum_{\substack{i \cdot j = n \\ j \text{ est pair}}} \sum_{m \geq 0} \beta(B, 2j, 2m) P_{2i}^{\text{bic}}(Z, X(XZ)^{\frac{i-2}{2}} Y^m, Z), \end{aligned}$$

où $\beta(B, 2n, m)$ et $\sigma_2(B, 2n, m)$ sont respectivement donnés par les formules (1.50) et (1.55).

Démonstration.

Premièrement, nous associons bijectivement chaque type de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures à une classe ρ^2 -diédrale de mots de longueur $2n$ sur $\mathcal{A}(B)$. À partir d'un type de B -structures distingué, il est possible de donner une orientation au type de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures auquel il appartient. En effet, nous n'avons qu'à choisir l'orientation faisant en sorte que l'arête de sorte Z incidente au type de B -structures distingué lui soit sortante. Inversement, à un mot sur $\mathcal{A}(B)$, il est possible d'associer le type de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures en supposant que l'arête entre les deux premières lettres du mot soit de sorte Z . Ceci est illustré par la figure 1.12 pour un type de $P_6^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures. L'ensemble des mots obtenus à partir d'un type de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures forme bien une classe ρ^2 -diédrale. Par exemple, dans la figure 1.12, pour le mot $w = y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_1$ de y_2 , nous avons que τw est le mot de y_1 et $\rho^2 w$ est le mot de y_4 . Pour w un mot de b un type de B -structures distingué, τw est le mot du type adjacent à b

par une arête de sorte X . De plus, $\rho^2 w$ est le mot du troisième type de B -structures selon l'ordre induit par le pointage en b . Ce qui nous permet de conclure que les types de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures sont en bijection avec les classes ρ^2 -diédrales sur $\mathcal{A}(B)$. Remarquons que pour un choix d'un mot de la classe d'un type de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures, il est possible de définir l'action de τ et ρ^2 sur les types de B -structures où τ est l'axe de symétrie passant au milieu du mot et donc aussi entre la première et la dernière lettre tandis que ρ^2 est une rotation de $\frac{2\pi}{n}$.

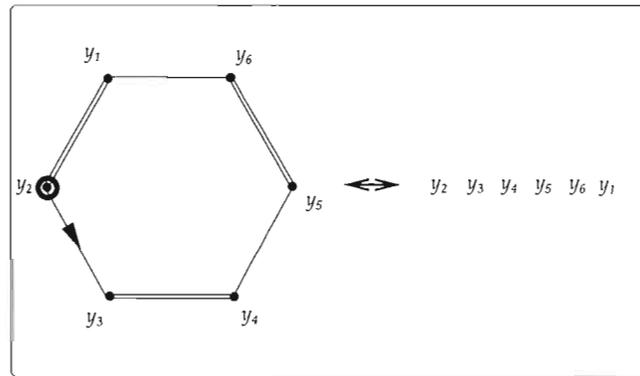


Figure 1.12 – Un type de $P_6^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures distingué en une B -structure

Deuxièmement, si w est le plus petit mot associé à ξ , un type de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z)$, et ξ est $[\rho^{2j}]$ -symétrique, où $i \cdot j = n$, alors il est possible de donner une orientation à ξ pour que w soit lu dans le bon sens. De plus, ξ peut-être divisé selon la racine primitive u de w . Ainsi, si u est de poids m , ξ est isomorphe en tant qu'espèce à une $C_i(X^j Y^m Z^j)$ (en ajoutant à u l'arête de sorte X le suivant). Ceci est illustré pour un type de $P_8^{\text{bic}}(X, B, Z)$ par la figure 1.13.

Troisièmement, pour j impair, où $i \cdot j = n$, si w est le mot (ρ^{2j}, τ) -symétrique et de poids Y^m associé à ξ un type de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z)$, alors le stabilisateur de ξ par rapport à w est $\langle \rho^{2j}, \tau \rangle$. De plus, il est toujours possible de diviser ξ selon la racine primitive $u = v\bar{v}$ de w . Les axes des symétries $\rho^{2j\ell} v$ ($1 \leq \ell \leq j$) passent au milieu d'un mot u ou entre deux mots u en coupant, selon le cas, une arête de sorte Z ou de sorte X . Il est donc possible d'effectuer une division de ξ en secteurs de contenu v ou \bar{v} selon une orientation donnée de ξ . Étant donné que ces secteurs sont délimités par

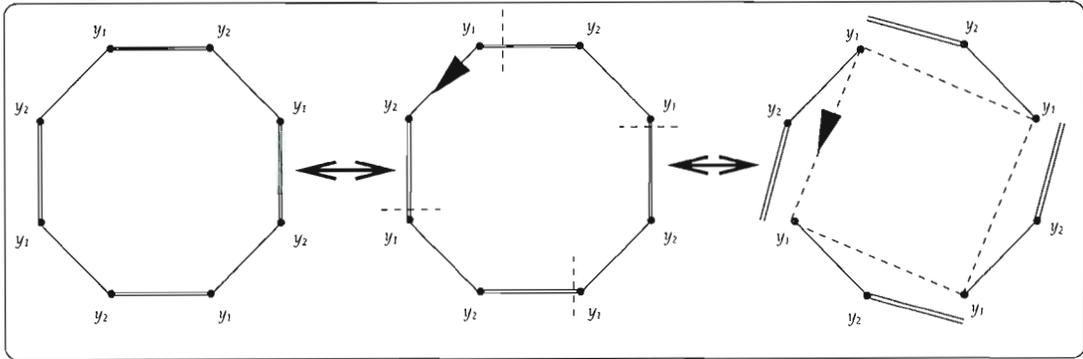


Figure 1.13 – Isomorphisme entre un type de $P_8^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures ρ^2 -gauche ρ^2 -symétrique de poids Y^m et $C_4(XY^{\frac{m}{4}}Z)$

une arête de sorte X et une de sorte Z , nous pouvons donner une orientation à chaque secteur allant de l'arête de sorte X à celle de sorte Z . Muni d'une telle orientation, le contenu d'un secteur est v . Chaque secteur possède forcément $j - 1$ arêtes, donc $(j - 1)/2$ arêtes de sorte X et Z . Nous en concluons donc que ξ est isomorphe en tant qu'espèce à $P_{2i}^{\text{bic}}(X, (XZ)^{\frac{i-1}{2}}Y^{\frac{m}{2}}, Z)$. Ceci est illustré par la figure 1.14 pour un type de $P_{12}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures.

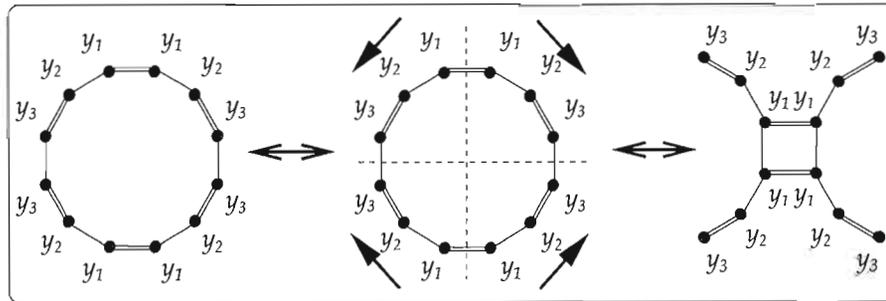


Figure 1.14 – Isomorphisme entre un type de $P_{12}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures $[\rho^6, \tau]$ -symétrique de poids Y^m et $P_4^{\text{bic}}(X, XZY^{\frac{m}{4}}, Z)$

Quatrièmement, pour j pair, où $i \cdot j = n$, si w , le plus petit mot de poids Y^m associé à ξ , un type de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z)$, est (ρ^{2j}, τ) -symétrique, alors le stabilisateur de ξ par rapport à w est $\langle \rho^{2j}, \tau \rangle$. Il nous est toujours possible d'effectuer une division de ξ par secteurs. Par contre, ces secteurs sont délimités par deux arêtes de sorte X .

Il est néanmoins possible de donner une orientation au secteur de façon à ce que son contenu v soit minimal. En fait, si u est la racine de w alors $u = v\bar{v}$. Notons que cette orientation des secteurs différencie les arêtes en deux groupes : celles pointées par l'orientation des secteurs et celles qui ne le sont pas. De plus, chaque secteur possède $j - 1$ arêtes dont $j/2$ de sorte Z et $(j - 2)/2$ de sorte X car les secteurs sont délimités par deux arêtes de sorte X . Nous en concluons donc que ξ est isomorphe en tant qu'es-
pèce à $P_{2i}^{\text{bic}}(X, Z(XZ)^{\frac{i-2}{2}}Y^{\frac{m}{2}}, X)$. Ceci est illustré par la figure 1.14 pour un type de $P_{12}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures.

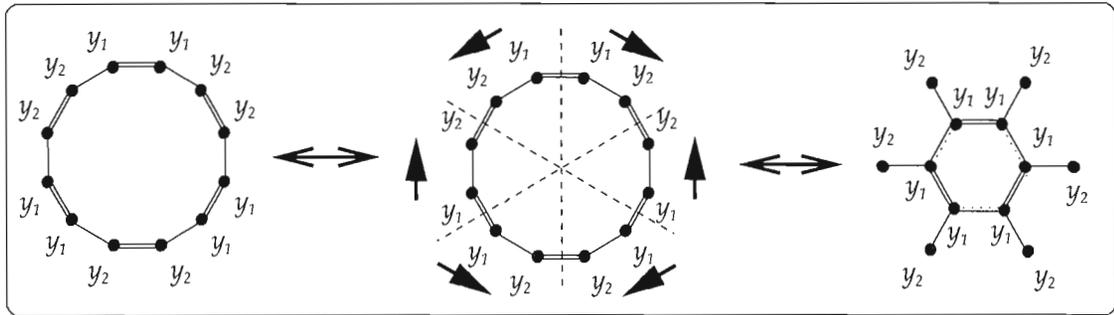


Figure 1.15 – Isomorphisme entre un type de $P_{12}^{\text{bic}}(X, B, Z)$ -structures $[\rho^4, \tau]$ -symétrique de poids Y^m et $P_6^{\text{bic}}(X, ZY^{\frac{m}{6}}, X)$

Finalement, pour j pair, où $i \cdot j = n$, si w , le plus petit mot et de poids Y^m de la classe ρ^2 -diédrale de ξ , un type de $P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z)$, est $(\rho^{2j}, \rho^2\tau)$ -symétrique alors le stabilisateur de ξ par rapport à w est $\langle \rho^{2j}, \rho^2\tau \rangle$. Remarquons que $\xi(X, Y, Z) = \rho^{-1}\xi(Z, Y, X)$ où $\xi(X, Z, Y)$ est l'espace associé au type ξ et $\rho^{-1}\xi(X, Y, Z)$ celle associée au type de la classe $\rho^{-1}\xi$. La remarque précédente est vraie pour une classe ρ^2 -diédrale quelconque. Ceci est illustré par la figure 1.16 pour la classe du mot $y_1y_2y_3y_4y_5y_6$. Nous pouvons donc en conclure que ξ est isomorphe en tant qu'espace à $P_{2i}^{\text{bic}}(Z, X(XZ)^{\frac{i-2}{2}}Y^{\frac{m}{2}}, Z)$.

□

Corollaire 70. Soit B une espèce asymétrique dont le développement moléculaire est donné par

$$B(Y) = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m.$$

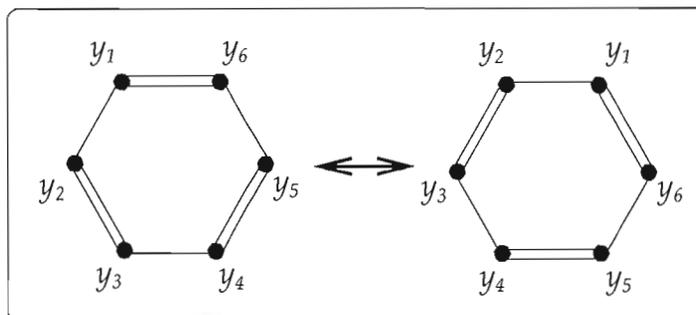


Figure 1.16 – Isomorphisme entre l'espèce $\xi(X, Y, Z)$ du type d'isomorphie ξ et celle de $\rho^{-1}\xi(X, Y, Z)$

Alors,

$$\begin{aligned}
 P_4^{\text{bic}}(X, B(Y), Z) &= \sum_{m \geq 0} \beta_m^1 X^2 Z^2 Y^m + \sum_{m \geq 0} \beta_m^2 Z^2 E_2(XY^m) \\
 &+ \sum_{m \geq 0} \beta_m^3 E_2(ZXY^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^4 X^2 E_2(ZY^m) \\
 &+ \sum_{m \geq 0} \beta_m^5 P_4^{\text{bic}}(X, Y^m, Z),
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

où

$$\begin{aligned}
 \beta_m^1 &= \frac{1}{4}b_m^{(4)} - \frac{3}{4}b_{\frac{m}{2}}^{(2)} + \frac{1}{2}b_{\frac{m}{4}}, \\
 \beta_m^2 &= \beta_m^3 = \beta_m^4 = \frac{1}{2}(b_m^{(2)} - b_{\frac{m}{2}}), \\
 \beta_m^5 &= b_m.
 \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de calculer à l'aide du théorème 69. Notons également que $P_2^{\text{bic}}(X, Y, Z) = XZE_2(Y)$ étant donné qu'une $P_2^{\text{bic}}(X, Y, Z)$ -structure est le 2-gone à deux sommets de sorte Y et une arête de sorte X et une de sorte Z .

□

Les corollaires suivants sont obtenus par une substitution appropriée de l'équation du corollaire 70 ou du théorème 69. De plus, pour $Z = 1$, nous retrouvons un des résultats de (Labelle, Lamathe et Leroux, 2003 ; Lamathe 2003).

Corollaire 71. Soit B une espèce asymétrique dont le développement moléculaire est

donné par

$$B(Y) = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_4^{\text{bic}}(X^n, B(X), X^\ell) &= \sum_{m \geq n+\ell} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq n} \beta_m^2 X^{2\ell} E_2(X^m) \\ &+ \sum_{m \geq n+\ell} \beta_m^3 E_2(X^m) + \sum_{m \geq \ell} \beta_m^4 X^{2n} E_2(X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 0} \beta_m^5 P_4^{\text{bic}}(X^n, X^m, X^\ell), \end{aligned} \quad (1.58)$$

où

$$\begin{aligned} \beta_m^1 &= \frac{1}{4} b_{m-2n-2\ell}^{(4)} - \frac{3}{4} b_{\frac{m-2n-2\ell}{2}}^{(2)} + \frac{1}{2} b_{\frac{m-2n-2\ell}{4}}, \\ \beta_m^2 &= \frac{1}{2} (b_{m-n}^{(2)} - b_{\frac{m-n}{2}}), \\ \beta_m^3 &= \frac{1}{2} (b_{m-n-\ell}^{(2)} - b_{\frac{m-n-\ell}{2}}), \\ \beta_m^4 &= \frac{1}{2} (b_{m-\ell}^{(2)} - b_{\frac{m-\ell}{2}}), \\ \beta_m^5 &= b_m. \end{aligned}$$

Corollaire 72. Soit B une espèce asymétrique dont le développement moléculaire est donné par

$$B(Y) = \sum_{m \geq 0} b_m Y^m.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_4^{\text{bic}}(X, B(Y)) &= \sum_{m \geq 0} \beta_m^1 X^2 Y^m + \sum_{m \geq 0} \beta_m^2 E_2(X Y^m) \\ &+ \sum_{m \geq 0} \beta_m^3 X^2 E_2(Y^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^4 P_4^{\text{bic}}(X, Y^m), \end{aligned} \quad (1.59)$$

où

$$\beta_m^1 = \frac{1}{4} b_m^{(4)} - \frac{3}{4} b_{\frac{m}{2}}^{(2)} + \frac{1}{2} b_{\frac{m}{4}},$$

$$\begin{aligned}\beta_m^2 &= b_m^{(2)} - b_{\frac{m}{2}}, \\ \beta_m^3 &= \frac{1}{2}(b_m^{(2)} - b_{\frac{m}{2}}), \\ \beta_m^4 &= b_m.\end{aligned}$$

Corollaire 73. Soit B une espèce asymétrique dont le développement moléculaire est donné par

$$B(X) = \sum_{m \geq 0} b_m X^m.$$

Alors,

$$\begin{aligned}P_4^{\text{bic}}(X^n, B(X)) &= \sum_{m \geq 2n} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq n} \beta_m^2 E_2(X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 0} \beta_m^3 X^{2n} E_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^4 P_4^{\text{bic}}(X^n, X^m),\end{aligned}\tag{1.60}$$

où

$$\begin{aligned}\beta_m^1 &= \frac{1}{4}b_{m-2n}^{(4)} - \frac{3}{4}b_{\frac{m-2n}{2}}^{(2)} + \frac{1}{2}b_{\frac{m-2n}{4}}, \\ \beta_m^2 &= b_{m-n}^{(2)} - b_{\frac{m-n}{2}}, \\ \beta_m^3 &= \frac{1}{2}(b_m^{(2)} - b_{\frac{m}{2}}), \\ \beta_m^4 &= b_m.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant généraliser les résultats précédents à une espèce B quelconque dont le développement moléculaire est connu, en posant arbitrairement un ordre total (\leq) sur les espèces moléculaires. Les preuves des résultats complétant cette section sont omises puisqu'elles sont identiques à celles du cas asymétrique.

Rappelons que, pour une espèce $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$, $\mathcal{A}(B)$ (voir def. 15) est l'alphabet composé de b_M lettres de poids M (pour tous les $M \in \mathcal{M}$). En posant $B^j = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M^{(j)} M$, le coefficient $b_M^{(j)}$ correspond au nombre de mots de longueur j et de poids M sur $\mathcal{A}(B)$.

Notation 79. Soit $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$ une espèce. Notons $\text{Pal}(B, 2n, M)$, le nombre de palindromes de longueur $2n$ de poids M sur $\mathcal{A}(B)$.

Par la définition d'un palindrome de longueur $2n$, on a

$$\text{Pal}(B, 2n, M) = b_{M^{\frac{1}{2}}}^{(n)}. \quad (1.61)$$

Notation 80. Soit $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$ une espèce. Notons $\pi_2(B, 2n, M)$, le nombre de palindromes ρ^2 -primitifs de longueur $2n$ de poids M sur $\mathcal{A}(B)$.

Notation 81. Soit $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$ une espèce. Notons $\beta(B, 2n, M)$ (resp. $\gamma(B, 2n, M)$), le nombre de classes ρ^2 -diédrales et $[\rho^{2n}, \tau]$ -symétriques (resp. $[\rho^{2n}, \rho^2 \tau]$ -symétriques) dont les mots sont de poids M et de longueur $2n$ sur $\mathcal{A}(B)$.

Proposition 74. Soit $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$ une espèce. Alors,

$$\text{Pal}(B, 2n, M) = b_{M^{\frac{1}{2}}}^{(n)} = \sum_{d \cdot k = n} (\chi(d \text{ est pair}) + 1) \beta(B, 2d, M^{\frac{1}{k}}), \quad (1.62)$$

$$\beta(B, 2n, M) = \frac{1}{\chi(n \text{ est pair}) + 1} \sum_{d \cdot k = n} \mu(k) b_{M^{\frac{1}{k}}}^{(d)}. \quad (1.63)$$

Notation 82. Soit $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$ une espèce. Notons $\lambda_2(B, 2n, M)$, le nombre de classes ρ^2 -circulaires ρ^2 -primitives de mots de longueur $2n$ et de poids M sur $\mathcal{A}(B)$.

Proposition 75. Soit $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$ une espèce. Alors,

$$b_M^{(2n)} = \sum_{d \cdot k = n} d \lambda_2(B, 2d, M^{\frac{1}{k}}) \quad (1.64)$$

et

$$\lambda_2(B, 2n, M) = \frac{1}{n} \sum_{d \cdot k = n} \mu(k) b_{M^{\frac{1}{k}}}^{(2d)}. \quad (1.65)$$

Notation 83. Soit $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$ une espèce. Notons $\sigma_2(B, 2n, M)$, le nombre de classes ρ^2 -diédrales $[\rho^{2n}]$ -symétriques de mots de longueur $2n$ et de poids M sur $\mathcal{A}(B)$.

Notation 84. Soit $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$ une espèce. Notons $\Pi_2(B, 2n, M)$, le nombre de classes ρ^2 -diédrales, ρ^2 -palindromiques et ρ^2 -primitives de longueur $2n$ de poids M sur $\mathcal{A}(B)$.

Proposition 76. Soit $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$ une espèce asymétrique. Alors,

$$\Pi_2(B, 2n, M) = (\chi(n \text{ est pair}) + 1) \beta(B, 2n, M). \quad (1.66)$$

Proposition 77. Soit $B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M$ une espèce. Alors,

$$\lambda_2(B, 2n, M) = 2\sigma_2(B, 2n, M) + \Pi_2(B, 2n, M), \quad (1.67)$$

et

$$\sigma_2(B, 2n, M) = \frac{\lambda_2(B, 2n, M) - \Pi_2(B, 2n, M)}{2}. \quad (1.68)$$

Théorème 78. Soit B une espèce dont le développement moléculaire est donné par

$$B = \sum_{M \in \mathcal{M}} b_M M.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z) &= \sum_{i \cdot j = n} \sum_{M \in \mathcal{M}} \sigma_2(B, 2j, M) C_i(X^j M Z^j) \\ &+ \sum_{\substack{i \cdot j = n \\ j \text{ est impair}}} \sum_{M \in \mathcal{M}} \beta(B, 2j, M^2) P_{2i}^{\text{bic}}(X, (XZ)^{\frac{i-1}{2}} M, Z) \\ &+ \sum_{\substack{i \cdot j = n \\ j \text{ est pair}}} \sum_{M \in \mathcal{M}} \beta(B, 2j, M^2) P_{2i}^{\text{bic}}(X, Z(XZ)^{\frac{i-2}{2}} M, X) \\ &+ \sum_{\substack{i \cdot j = n \\ j \text{ est pair}}} \sum_{M \in \mathcal{M}} \beta(B, 2j, M^2) P_{2i}^{\text{bic}}(Z, X(XZ)^{\frac{i-2}{2}} M, Z), \end{aligned} \quad (1.69)$$

où $\beta(B, 2n, m)$ et $\sigma_2(B, 2n, m)$ sont respectivement donnés par les formules (1.63) et (1.68).

Les mêmes définitions et résultats s'appliquent directement au cas \mathcal{A} -pondéré.

Théorème 79. Soit B une espèce \mathcal{A} -pondérée dont le développement moléculaire est donné par

$$B = \sum_{M_p \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} b_{M_p} M_p.$$

Alors,

$$P_{2n}^{\text{bic}}(X, B, Z) = \sum_{i \cdot j = n} \sum_{M_p \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \sigma_2(B, 2j, M_p) (C_i(X^j M Z^j))_{p^j} \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{i \cdot j = n \\ j \text{ est impair}}} \sum_{M_p \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \beta(B, 2j, M_p^2) (P_{2i}^{\text{bic}}(X, (XZ)^{\frac{i-1}{2}} M, Z))_{p^{2j}} \\
& + \sum_{\substack{i \cdot j = n \\ j \text{ est pair}}} \sum_{M_p \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \beta(B, 2j, M_p^2) (P_{2i}^{\text{bic}}(X, Z(XZ)^{\frac{i-2}{2}} M, X))_{p^{2j}} \\
& + \sum_{\substack{i \cdot j = n \\ j \text{ est pair}}} \sum_{M_p \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \beta(B, 2j, M_p^2) (P_{2i}^{\text{bic}}(Z, X(XZ)^{\frac{i-2}{2}} M, Z))_{p^{2j}}.
\end{aligned}$$

1.4 Théorèmes de dissymétrie

On peut retrouver les résultats de cette section, entre autres, dans (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994).

Théorème 80 (Théorème de dissymétrie pour les arbres). L'espèce des arbres, a , celle des arbres distingués en un sommet, a^\bullet , celle des arbres distingués en une arête, a^- , et celle des arbres distingués en un sommet et en une arête incidente à ce dernier, $a^{\bullet-}$, satisfont à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$a^\bullet + a^- = a + a^{\bullet-}.$$

Essentiellement, le pointage en un sommet (ou en une arête) est équivalent à un pointage du centre où à l'extérieur du centre auquel cas on distingue également l'arête incidente (ou le sommet incident) le plus près du centre. Dans le cas des arbres R -enrichis, le même théorème s'applique et on peut exprimer chacune des espèces pointées en fonction de R .

Théorème 81. Soit R une espèce de structures possédant au moins une structure sur l'ensemble vide, on a alors l'isomorphisme suivant :

$$X \cdot R(A_S) + E_2(A_S) = a_R + A_S^2,$$

où S est la dérivée de R , A_S est l'espèce des arborescences S -enrichies et a_R est l'espèce des arbres R -enrichis.

Définition 85. On dira qu'un arbre est bicoloré s'il possède une 2-coloration propre.

Théorème 82 (Théorème de dissymétrie pour les arbres bicolorés dont les feuilles sont de même couleur). L'espèce B des arbres bicolorés dont les feuilles sont de la même

couleur satisfait à l'isomorphisme d'espèce suivant :

$$B^{\bullet} + B^{\circ} = B + B^{\bullet\circ}$$

où les exposants \bullet , \circ et $\bullet\circ$ représentent respectivement le pointage en un sommet de la première couleur, le pointage en un sommet de la deuxième couleur et le pointage en deux sommets adjacents.

De manière similaire au cas des arbres, le centre d'un arbre bicoloré dont les feuilles sont de même couleur est un sommet et, comme précédemment, le pointage d'un sommet est fait sur le centre ou non auquel cas on peut également distinguer le sommet adjacent en direction du centre.

CHAPITRE II

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES ARBRES PLANS

Pour trouver le développement moléculaire des arbres plans, il suffira de trouver celui de trois espèces d'arbres plans pointés. Pour ce faire, il suffira de trouver les puissances d'une espèce asymétrique et d'appliquer les formules d'addition pour les espèces des cycles orientés de taille $k \geq 1$, puis, d'utiliser un théorème de dissymétrie pour obtenir le développement moléculaire des arbres plans. La démarche demeure la même pour les arbres plans pondérés par la distribution des degrés de leurs sommets. Les équations fonctionnelles décrivant les différentes espèces d'arbres plans peuvent être retrouvées dans (Labelle et Leroux, 1996), la seule innovation étant l'utilisation des formules d'addition des cycles orientés pour trouver leurs développements moléculaires. Ces résultats ont fait l'objet d'un article (Ducharme, Lamathe et Leroux, 2007).

2.1 Développement moléculaire des arbres plans

Définition 86. Un arbre plan est une classe d'homéomorphie d'arbres de Cayley plongés dans le plan. Nous noterons par \mathcal{A} l'espèce des arbres plans étiquetés en leur sommets.

Définition 87. Les espèces suivantes seront nécessaires pour décrire l'espèce \mathcal{A} des arbres plans.

- X , l'espèce des singletons (*i.e.*, des sommets) ;
- E_2 , l'espèce des ensembles de taille deux ;
- $L = \sum_{n \geq 0} X^n$, l'espèce des listes (ou ordres linéaires), où X^n représente l'espèce des listes de longueur n ;

- $C = \sum_{n \geq 1} C_n$, l'espèce des cycles (orientés), où C_n est l'espèce des cycles (orientés) de taille n .

Notons que les arbres plans sont en bijection avec les arbres $(1+C)$ -enrichis puisque l'orientation du plan induit une structure cyclique sur les sommets voisins de chaque sommet d'un arbre plan. De plus, comme L est l'espèce dérivée de l'espèce $1+C$, on déduit du théorème 81 la proposition suivante :

Proposition 83. L'espèce \mathcal{a} des arbres plans satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\mathcal{a} = X \cdot (1 + C) \circ A_L + C_2(A_L) - A_L^2, \quad (2.1)$$

où A_L est l'espèce des arborescences L -enrichies qui est isomorphe à l'espèce des arborescences ordonnées et où les espèces $X \cdot (1 + C) \circ A_L$, $C_2(A_L)$ et A_L^2 sont respectivement isomorphes aux espèces des arbres plans pointés en un sommet, en une arête et en un sommet d'une arête distinguée.

Il suffira donc de calculer les développements moléculaires des espèces $X \cdot (1 + C) \circ A_L$, $C_2(A_L)$ et A_L^2 pour obtenir celui de l'espèce des arbres plans. De plus, il ne suffira que de connaître les coefficients du développement moléculaire des puissances entières de A_L . On obtient ces coefficients par inversion de Lagrange puisque A_L est asymétrique.

Proposition 84. Le développement moléculaire de l'espèce A_L est donné par

$$A_L(X) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{c}_{n-1} X^n, \quad (2.2)$$

où $\mathbf{c}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan. De plus, on a

$$A_L^k(X) = \sum_{n \geq k} \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-k} X^n. \quad (2.3)$$

En particulier, on a

$$A_L^2(X) = A_L(X) - X = \sum_{n \geq 2} \mathbf{c}_{n-1} X^n. \quad (2.4)$$

On conviendra que pour les résultats suivants $\mathbf{c}_n = 0$ si n n'est pas un entier naturel. À l'aide des formules d'addition pour C_k , on obtient les deux propositions suivantes.

Proposition 85. Le développement moléculaire de l'espèce $C_2(A_L)$ est donné par

$$C_2(A_L) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{c}_{n-1} C_2(X^n) + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2} (\mathbf{c}_{n-1} - \mathbf{c}_{\frac{n}{2}-1}) X^n, \quad (2.5)$$

Dans le cas de la formule d'addition concernant l'espèce $C_k(B)$ avec $B := A_L$, $\lambda(A_L, k, n)$ désigne le nombre de mots de Lyndon de longueur k et de poids X^n sur l'alphabet $\mathcal{A}(A_L)$. Ces entiers satisfont la formule

$$\lambda(A_L, k, n) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) a_{n/d}^{(k/d)}, \quad (2.6)$$

où

$$a_n^{(k)} := [X^n] A_L^k(X) = \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-k}, \quad \text{pour } k \geq n. \quad (2.7)$$

Proposition 86. Le développement moléculaire de l'espèce $X \cdot (1 + C) \circ A_L$ est donné par

$$X \cdot (1 + C) \circ A_L = X + \sum_{n \geq 1} \lambda_n X^{n+1} + \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 1} \lambda_n X C_k(X^n), \quad (2.8)$$

où

$$\lambda_n = \sum_{j \geq 1} \lambda(A_L, j, n). \quad (2.9)$$

En utilisant les propositions de cette section, on obtient le théorème suivant.

Théorème 87. Le développement moléculaire de l'espèce a des arbres plans est donné par

$$a = X + \sum_{n \geq 2} \alpha_n X^n + \sum_{n \geq 1} \beta_n C_2(X^n) + \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 1} \lambda_n X C_k(X^n), \quad (2.10)$$

où

$$\alpha_n = \lambda_{n-1} - \frac{1}{2} (\mathbf{c}_{n-1} + \mathbf{c}_{\frac{n}{2}-1}), \quad (2.11)$$

$$\beta_n = \mathbf{c}_{n-1}, \quad (2.12)$$

$$\lambda_n = \sum_{j \geq 1} \lambda(A_L, j, n). \quad (2.13)$$

Notons que λ_n est le nombre de mots de Lyndon de poids X^n sur l'alphabet $\mathcal{A}(A_L)$.

2.2 Développement moléculaire des arbres plans pondérés par la distribution des degrés de leurs sommets

Comme les poids des structures dans ce chapitre seront monomiaux et unitaires, on notera par pM au lieu de M_p une espèce moléculaire M munie du poids p .

Notation 88. Soit la fonction de poids w telle que

$$\begin{aligned} w : \mathcal{A}[U] &\longrightarrow \mathbb{Q}[r_1, r_2, \dots] \\ \alpha &\longmapsto w(\alpha), \end{aligned} \tag{2.14}$$

où $\mathbb{Q}[r_1, r_2, \dots]$ est l'anneau des polynômes en les variables r_1, r_2, \dots , à coefficients dans le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} , $\mathcal{A}[U]$ désigne l'ensemble des arbres plans sur l'ensemble fini U et où le poids d'un arbre plan α est donné par $w(\alpha) = r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots$, où i_j représente le nombre de sommets de degré j de l'arbre α . Notons par \mathcal{A}_w , l'espèce des arbres plans pondérés par w .

On peut généraliser la définition d'arbre R -enrichi à des espèces pondérées, le poids d'un arbre R -enrichi étant le produit des poids des R -structures associées à chaque sommet. Le théorème de dissymétrie des arbres R -enrichis reste alors inchangé par rapport au cas non pondéré.

Définition 89. On définit l'espèce pondérée $C_{\mathbf{r}}$ par l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$C_{\mathbf{r}} = \sum_{k \geq 1} r_k C_k. \tag{2.15}$$

Par la définition de \mathcal{A}_w , on obtient la proposition suivante.

Proposition 88. L'espèce \mathcal{A}_w des arbres plans pondérés par la fonction de poids w est isomorphe à l'espèce des arbres $(r_0 + C_{\mathbf{r}})$ -enrichis où, par abus de notation, $r_0 = r_0 \cdot 1$, l'espèce moléculaire munie du poids r_0 possédant une structure sur l'ensemble vide.

En utilisant le théorème de dissymétrie des arbres R -enrichis et la proposition précédente, on obtient le résultat suivant.

Proposition 89. L'espèce \mathcal{A}_w des arbres plans pondérés par la fonction de poids w

satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$a_w = X \cdot (r_0 + C_r) \circ A_r + C_2(A_r) - A_r^2, \quad (2.16)$$

où $L_{r'} = \sum_{n \geq 0} r_{n+1} X^n$ est la dérivée de C_r et $A_r = A_{L_{r'}}$ est l'espèce des arborescences $L_{r'}$ -enrichies.

Notation 90. Soit D l'ensemble des vecteurs dont les composantes sont indicées par les entiers naturels non nuls,

$$D = \{\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots) \mid i_\ell \in \mathbb{N}\}. \quad (2.17)$$

Pour $n, j \in \mathbb{N}$, définissons l'ensemble de distributions $I_{n,j}$ par l'équation suivante :

$$I_{n,j} = \{\mathbf{i} \in D \mid i_1 + i_2 + i_3 + \dots = n, \quad i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots = 2n - j\}. \quad (2.18)$$

Lorsque $\mathbf{i} \in I_{n,1}$, la distribution \mathbf{i} correspond à celle d'une arborescence. Pour $\mathbf{i} \in I_{n,2}$, la distribution correspond à celle d'un arbre ou à une paire d'arborescences. Finalement, pour $\mathbf{i} \in I_{n,k}$, on a la distribution d'un k -uplet d'arborescences.

Notation 91. Notons $\mathbf{r}^{\mathbf{i}} = r_1^{i_1} r_2^{i_2} r_3^{i_3} \dots$ pour désigner le poids d'une structure dont la distribution des degrés est \mathbf{i} . Comme la distribution des degrés est un vecteur, pour $c \in \mathbb{R}$, on notera par $c\mathbf{i}$ le vecteur (ci_1, ci_2, \dots) qui lui n'est pas nécessairement une distribution des degrés.

Les développements moléculaires des puissances de A_r sont obtenus par inversion de Lagrange.

Proposition 90. Soit $k \geq 1$. Le développement moléculaire de l'espèce $(A_r)^k$ des k -listes d'arborescences $L_{r'}$ -enrichies est donné par

$$A_r^k(X) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,k}} a_{n,\mathbf{i}}^{(k)} \mathbf{r}^{\mathbf{i}} X^n, \quad (2.19)$$

où

$$a_{n,\mathbf{i}}^{(k)} = \frac{k}{n} \binom{n}{i_1, i_2, \dots}. \quad (2.20)$$

Rappelons que $\mathcal{A}(A_r)$ est l'alphabet pondéré dont chaque lettre est pondérée par un représentant de la classe d'isomorphie d'espèces moléculaires du type de A_r -structures que cette lettre représente (voir la section 1.2.2). À l'aide de la formule d'addition de C_k , on obtient le résultat suivant :

Proposition 91. Nous avons la formule d'addition suivante relative à l'espèce C_k des cycles (orientés) de longueur k , $k \geq 1$:

$$C_k(A_r(X)) = \sum_{d|k} \sum_{n \geq 0} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,k/d}} \lambda(k/d, n, \mathbf{i}) \mathbf{r}^{d\mathbf{i}} C_d(X^n), \quad (2.21)$$

où $d\mathbf{i} = (di_1, di_2, di_3, \dots)$ et $\lambda(k/d, n, \mathbf{i})$ est le nombre de mots de Lyndon de longueur k/d sur l'alphabet $\mathcal{A}(A_r)$ de poids $\mathbf{r}^{\mathbf{i}} X^n$. Ces nombres satisfont à la formule

$$\lambda(k, n, \mathbf{i}) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) a_{\frac{n}{d}, \frac{\mathbf{i}}{d}}^{(k/d)}, \quad (2.22)$$

où $a_{n,\mathbf{i}}^{(j)}$ est donné par la formule (2.20). Rappelons que ces coefficients sont nuls dans le cas d'indices fractionnaires ou dans celui où $\mathbf{i} \notin I_{n,j}$.

En utilisant les propositions de cette section, on obtient le théorème suivant.

Théorème 92. Le développement moléculaire de l'espèce des arbres plans pondérés par la distribution des degrés de leurs sommets est donné par

$$\begin{aligned} a_w(X) &= \sum_{n \geq 2} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,2}} \alpha_{n,\mathbf{i}} \mathbf{r}^{\mathbf{i}} X^n + \sum_{n \geq 1} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,1}} \beta_{n,\mathbf{i}} \mathbf{r}^{2\mathbf{i}} C_2(X^n) \\ &+ \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 0} \sum_{\ell \geq 1} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,\ell}} \lambda(\ell, n, \mathbf{i}) r_{k\ell} \mathbf{r}^{k\mathbf{i}} X C_k(X^n), \end{aligned} \quad (2.23)$$

où

$$\alpha_{n,\mathbf{i}} = \sum_{k \geq 1} \lambda(k, n-1, \mathbf{i} - \delta_k) - \frac{1}{2} (a_{n,\mathbf{i}}^{(2)} + a_{\frac{n}{2}, \frac{\mathbf{i}}{2}}), \quad (2.24)$$

$$\beta_{n,\mathbf{i}} = a_{n,\mathbf{i}}, \quad (2.25)$$

δ_k étant le vecteur infini dont tous les éléments sont nuls excepté le $k^{\text{ième}}$ qui vaut 1.

CHAPITRE III

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES k -GONAUX EXTERPLANAIRES

Ce chapitre généralise certaines équations fonctionnelles de l'article de Labelle, Lamathe et Leroux (2003) qui portait sur les 2-arbres triangulaires extérplans et extérplanaires. Pour trouver le développement moléculaire de l'espèce des 2-arbres k -gonaux extérplanaires, on d'abord trouve d'abord celui de trois différentes espèces de 2-arbres pointés qui peuvent être décrites à l'aide d'une quatrième, asymétrique, qui sera notée A . Deux de ces espèces peuvent être exprimées à l'aide d'une équation fonctionnelle n'impliquant que les espèces X^n , E_2 , $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$ et A . Les développements moléculaires de ces deux espèces ne seront obtenus qu'en n'utilisant les formules d'addition de E_2 et $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$. Par contre, l'espèce des 2-arbres k -gonaux extérplanaires pointés en un polygone est décrite par le biais d'une espèce quotient. Nous devons utiliser des classes diédrales de mots associées aux types d'isomorphie pour déterminer l'espèce moléculaire correspondant à chaque type. Ce procédé est similaire à celui de la formule d'addition de P_n , l'espèce des polygones de taille n , sauf qu'en plus du poids de certains mots primitifs et de certaines lettres de ceux-ci ce que nous allons définir comme la hauteur d'un type de A -structures influera sur la nature de l'espèce moléculaire associée au type de 2-arbres k -gonaux extérplanaires pointés en un polygone. Après avoir obtenu les développements des trois espèces pointées, il suffira d'utiliser le théorème de dissymétrie des 2-arbres k -gonaux pour obtenir le développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux extérplanaires.

3.1 Définition d'espèces orientées et pointées et théorème de dissymétrie

Les 2-arbres k -gonaux ($k \geq 3$) sont essentiellement les graphes 2-connexes constitués de k -gones liés par certaines de leurs arêtes de manière arborescente. Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 92. La classe \mathcal{A} des 2-arbres k -gonaux ($k \geq 3$) est définie de manière récursive comme étant la plus petite classe de graphes simples telle que

1. un graphe formé d'une arête est un élément de \mathcal{A} ,
2. si un graphe $G = (S, A)$ satisfait aux conditions suivantes :
 - (a) G possède des sommets, notés x_1 à x_{k-2} , de degré 2,
 - (b) G possède des sommets x_0 et x_{k-1} , de degré au moins 2,
 - (c) x_i et x_j sont adjacents si $i + 1 \equiv j \pmod{k}$, pour $i = 0, \dots, k - 1$,
 - (d) $G - \{x_1, \dots, x_{k-2}\}$ appartient à \mathcal{A} ,
 alors, G est dans \mathcal{A} .

On obtient donc un 2-arbre k -gonal à partir d'un autre en ajoutant un k -gone ne possédant qu'une seule arête en commun avec le dernier.

Définition 93. Le graphe k -gone-arête d'un 2-arbre t est le graphe dont les sommets sont les k -gones et les arêtes de t et dont chaque arête indique l'incidence entre un k -gone et une arête de t . On admettra qu'il est bicoloré en accordant une couleur aux k -gones de t et une autre aux arêtes de t .

Définition 94. Un 2-arbre k -gonal est dit *exterplanair*e s'il admet un plongement dans le plan de telle sorte que tous ses sommets soient dans la face externe (voir l'exemple de la figure 3.1 pour $k = 5$).

Définition 95. Le *degré* d'une arête d'un 2-arbre k -gonal est le nombre de k -gones auxquels elle appartient.

Par définition, une arête d'un 2-arbre k -gonal exterplanair ne peut appartenir, au plus, qu'à deux k -gones. D'où, le degré d'une telle arête est au plus 2.

Notation 96. Notons \mathcal{A} , l'espèce des 2-arbres k -gonaux étiquetés en leurs k -gones. De la même manière, notons \mathcal{A}_p , l'espèce des 2-arbres k -gonaux exterplanaires étiquetés en leurs k -gones.

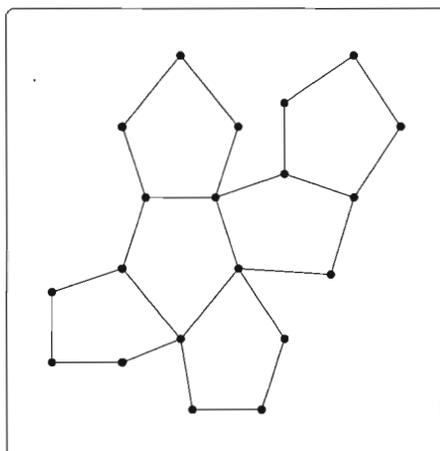


Figure 3.1 – Un 2-arbre extérplanaire pentagonal

Notation 97. Notons par A l'espèce des 2-arbres k -gonaux extérplanaires pointés en une arête externe orientée, c'est-à-dire une arête de degré au plus 1.

Proposition 93. L'espèce A des 2-arbres k -gonaux extérplanaires pointés en une arête externe orientée est caractérisée par l'isomorphisme d'espèces suivant :

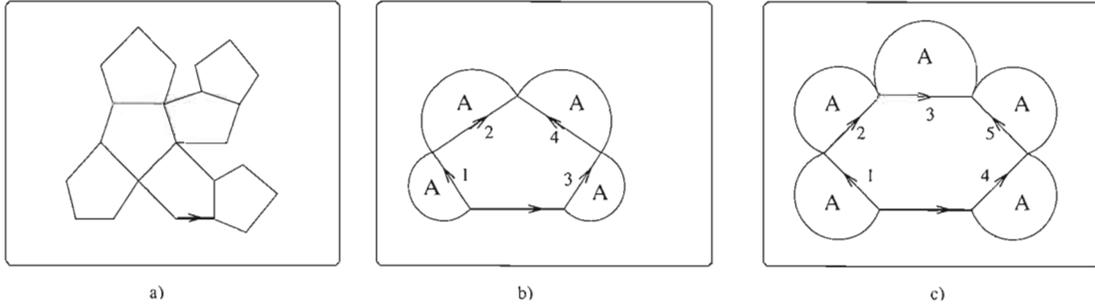
$$A = 1 + XA^{k-1}. \quad (3.1)$$

La figure 3.2 a) illustre un 2-arbre pentagonal extérplanaire pointé en une arête externe orientée.

L'équation de la proposition 93 est illustrée par la figure 3.2 b) pour un cas impair ($k = 5$) et c) pour un cas pair ($k = 6$). Étant donné que l'arête distinguée est orientée, un ordre et une orientation peuvent être définis sur les autres arêtes du k -gone possédant l'arête distinguée.

Proposition 94. Le développement moléculaire de l'espèce A est donné par

$$A(X) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{n(k-1)}{n-1} X^n. \quad (3.2)$$

Figure 3.2 – Des A -structures pour $k = 5$ et $k = 6$

De plus, si $a_n^{(j)} = [X^n]A^j(X)$ est le coefficient de X^n dans $A^j(X)$, on a

$$a_n^{(j)} = \frac{j}{n} \binom{n(k-1) + j - 1}{n-1}, \quad n, j \geq 1, \quad (3.3)$$

et $a_0^{(j)} = 1, j \geq 0, a_n^{(0)} = 0$, pour $n \geq 1$.

Démonstration. Nous utilisons la formule d'inversion de Lagrange sur l'équation $A - 1 = X((A-1)+1)^{k-1}$ pour obtenir la relation 3.3. L'équation 3.2 provient directement de l'équation 3.3, en prenant $j = 1$. \square

Théorème 95 (Théorème de dissymétrie des 2-arbres k -gonaux extéplanaires). L'espèce \mathcal{A}_p des 2-arbres k -gonaux extéplanaires satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\mathcal{A}_p^- + \mathcal{A}_p^\diamond = \mathcal{A}_p + \mathcal{A}_p^{\diamond}, \quad (3.4)$$

où les exposants $-$, \diamond et \diamond représentent respectivement le pointage en une arête, en un k -gone et en un k -gone ayant une arête distinguée.

Démonstration. À partir de la définition des 2-arbres k -gonaux, on déduit que leurs graphes k -gone-arête sont des arbres bicolorés dont les feuilles sont de la même couleur, celles-ci représentant les arêtes de degré un de leurs 2-arbres k -gonaux. En appliquant le théorème de dissymétrie des arbres bicolorés dont les feuilles sont de la même couleur sur les graphes k -gone-arête, on en déduit l'équation 3.4. \square

3.2 Classes diédrales de types de A -structures

Considérons l'alphabet \mathcal{A} composé des lettres $a_{i,j}$ de poids X^i tel que $1 \leq i \leq a_j$ où $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$. Nous associerons donc à chaque lettre a un type de A -structures noté $\mathcal{A}(a)$. Par abus de langage, on associera à une lettre a et son type $\mathcal{A}(a)$ les propriétés invariantes sous le transport de structures des structures de $\mathcal{A}(a)$.

Définition 98. Soit la lettre $a \in \mathcal{A}$. La lettre *inverse* de a , notée \bar{a} , est la lettre associée au type de structures obtenu en inversant l'orientation de l'arête distinguée de a .

Définition 99. Soit $w = b_1 \dots b_n$ un mot sur \mathcal{A} . Le mot *miroir* de w , noté \bar{w} , est le mot $\bar{b}_n \dots \bar{b}_1$.

Malgré le changement de définition du mot miroir, on définit comme précédemment une action du groupe diédral d'ordre $2n$ sur les mots de longueur n sur l'alphabet \mathcal{A} .

Définition 100. Notons φ l'action du groupe diédral $\mathcal{D}_n = \langle \rho, \tau \rangle$ sur l'ensemble des mots de longueur n sur \mathcal{A} où, pour $w = b_1 b_2 \dots b_n$,

$$\rho w = b_n b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1}$$

et

$$\tau w = \bar{w}.$$

Définition 101. La classe circulaire d'un mot $w \in \mathcal{A}$, notée $[w]$ est l'orbite de w de l'action φ restreinte à $\langle \rho \rangle$

Définition 102. La classe diédrale d'un mot $w \in \mathcal{A}$, notée $[[w]]$ est l'orbite de w de l'action φ .

Remarquons encore que $[[w]] = [w] \cup [\bar{w}]$.

Il est possible d'associer les classes diédrales de mots sur \mathcal{A} aux types de A_p^\diamond -structures. En effet, à partir d'un mot d'une classe diédrale, on construit le type. Inversement, les mots obtenus par l'orientation d'une arête du k -gone distingué forment une classe diédrale. Ceci est illustré par la figure 3.3.

Définition 103. Un mot w est palindromique si $w = \bar{w}$.

Définition 104. Un mot w est un dexterpalindrome s'il est la concaténation d'une lettre a , telle que $a = \bar{a}$, et d'un palindrome.

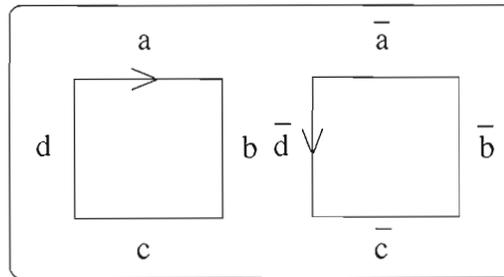


Figure 3.3 – Un type de A_p^\diamond -structures et deux mots qui lui sont associés

Ainsi, le stabilisateur d'un palindrome est de la forme $\langle \rho^i, \tau \rangle$ tandis que celui d'un dexterpalindrome est de la forme $\langle \rho^i, \rho\tau \rangle$.

Définition 105. Soit un mot w . Ses classes diédrale et circulaire sont dites *palindromiques* si elles contiennent un palindrome.

Définition 106. Soit un mot w . Ses classes diédrale et circulaire sont dites *dexterpalindromiques* si elles contiennent un dexterpalindrome.

Définition 107. Une classe diédrale ou circulaire est dite primitive si elle contient un mot primitif.

Définition 108. Soient deux arêtes a et b d'un 2-arbre k -gonal. L'arête b est dite *opposée* à a si

1. les arêtes b et a font partie d'un même k -gone P ,
2. la distance entre a et b est $\frac{k-2}{2}$

où la distance entre a et b est la distance minimale entre un sommet de a et un de b .

Définition 109. Soient deux arêtes a et b d'un 2-arbre k -gonal. L'arête b est dite *parallèle* à a si b satisfait à une des conditions suivantes :

1. $b = a$
2. b est opposée à a ,
3. b est opposée à une arête parallèle à a .

Définition 110. Soit a une arête de t , un 2-arbre k -gonal. Définissons l'*échelle* associée à a comme étant le sous-graphe de t formé des k -gones possédant au moins une arête parallèle à a .

Définition 111. Définissons la longueur d'une échelle comme étant le nombre de k -gones lui appartenant.

Définition 112. La hauteur d'une A -structure est la longueur de l'échelle associée à son arête orientée.

Par exemple, la hauteur des A -structures de la figure 3.4 est 4. De plus, la hauteur d'une A -structure où k est impair ne peut qu'être 0 ou 1 étant donné qu'une arête d'un tel 2-arbre n'a pas d'arête opposée et que le degré de l'arête distinguée est inférieur à 2.

L'espèce quotient $\frac{A}{\langle \tau \rangle}$ est l'espèce dont les structures sont les orbites de l'action de τ sur les A -structures. Plus précisément, l'action de τ sur une A -structure lui associe la structure obtenue en inversant l'orientation de cette A -structure.

Notation 113. $\alpha(n, m)$ est le nombre de types de $\frac{A}{\langle \tau \rangle}$ -structures isomorphes à $X^n E_2(X^m)$.

La figure 3.4 illustre la bijection entre les $\frac{A}{\langle \tau \rangle}$ -structures et les arbres k -gonaux pointés en une arête externe. Si l'orbite ne contient que des structures isomorphes, alors le type de cette structure est isomorphe, en tant qu'espèce, à $X^n E_2(X^m)$ où n est la hauteur des A -structures et X^{n+2m} leur poids.

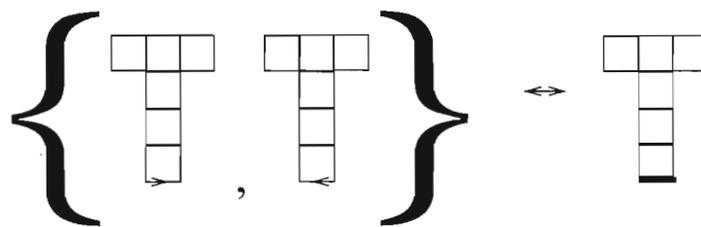


Figure 3.4 – bijection entre une $\frac{A}{\langle \tau \rangle}$ -structure et un arbre k -gonal pointé en une arête externe

3.3 Développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires où k est impair

Théorème 96. Soit k un entier impair. L'espèce $\mathcal{A}_p^- = \mathcal{A}_p^-(X)$ des 2-arbres k -gonaux exterplanaires pointés en une arête satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\mathcal{A}_p^-(X) = 1 + X E_2(A^{\frac{k-1}{2}}) + P_4^{\text{bic}}(X, A^{\frac{k-1}{2}}). \quad (3.5)$$

L'isomorphisme se décrit selon le degré de l'arête pointée. Les figures 3.5 et 3.6 illustrent cet isomorphisme pour $k = 5$.

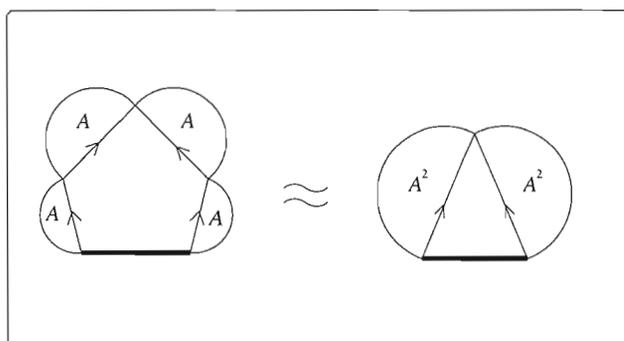


Figure 3.5 – Espèces de 2-arbres pentagonaux exterplanaires pointés en une arête de degré 1

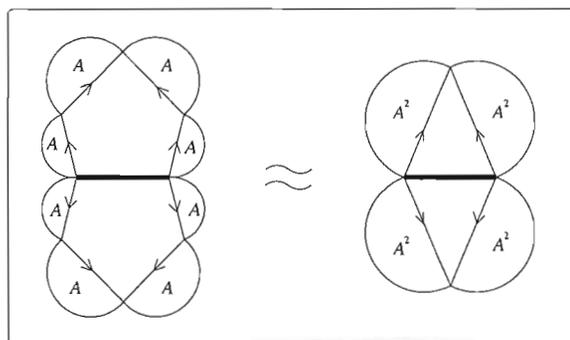


Figure 3.6 – Espèces de 2-arbres pentagonaux exterplanaires pointés en une arête de degré 2

En appliquant les formules d'addition pour les espèces E_2 et $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$ au théo-

rème précédent, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 97. Soit k un entier impair. Le développement moléculaire de l'espèce $a_p^- = a_p^-(X)$ des 2-arbres k -gonaux exterplanaires pointés en une arête est donné par

$$\begin{aligned} a_p^-(X) &= 1 + \sum_{m \geq 1} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 1} \beta_m^2 E_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^3 X E_2(X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 1} \beta_m^4 X^2 E_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^5 P_4^{\text{bic}}(X, X^m), \end{aligned} \quad (3.6)$$

où

$$\begin{aligned} \beta_m^1 &= \frac{1}{4} a_{m-2}^{(2k-2)} - \frac{3}{4} a_{\frac{m-2}{2}}^{(k-1)} + \frac{1}{2} a_{\frac{m-2}{4}}^{\binom{k-1}{2}} + \frac{1}{2} a_{m-1}^{(k-1)} - \frac{1}{2} a_{\frac{m-1}{2}}^{\binom{k-1}{2}}, \\ \beta_m^2 &= a_{m-1}^{(k-1)} - a_{\frac{m-1}{2}}^{\binom{k-1}{2}}, \\ \beta_m^3 &= \beta_m^5 = a_{\frac{m-1}{2}}^{\binom{k-1}{2}}, \\ \beta_m^4 &= \frac{1}{2} (a_m^{(k-1)} - a_{\frac{m}{2}}^{\binom{k-1}{2}}). \end{aligned}$$

Théorème 98. Soit k un entier impair. L'espèce $a_p^\diamond = a_p^\diamond(X)$ des 2-arbres k -gonaux exterplanaires pointés en une arête d'un k -gone distingué satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$a_p^\diamond(X) = X E_2(A^{\frac{k-1}{2}}) + X^2 E_2(A^{k-1}). \quad (3.7)$$

C'est encore selon le degré de l'arête pointée qu'il est possible de déduire l'isomorphisme précédent. En appliquant la formule d'addition pour l'espèce E_2 au théorème précédent, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 99. Soit k un entier impair. Le développement moléculaire de l'espèce $a_p^\diamond = a_p^\diamond(X)$ des 2-arbres k -gonaux exterplanaires pointés en une arête d'un k -gone distingué est donné par

$$a_p^\diamond(X) = \sum_{m \geq 0} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 0} \beta_m^2 X E_2(X^m) \quad (3.8)$$

$$+ \sum_{m \geq 0} \beta_m^3 X^2 E_2(X^m),$$

où

$$\begin{aligned} \beta_m^1 &= \frac{1}{2} a_{m-2}^{(2k-2)} + \frac{1}{2} a_{m-1}^{(k-1)} - \frac{1}{2} a_{\frac{m-2}{2}}^{(k-1)} - \frac{1}{2} a_{\frac{m-1}{2}}^{(\frac{k-1}{2})}, \\ \beta_m^2 &= a_m^{(\frac{k-1}{2})}, \\ \beta_m^3 &= a_m^{k-1}. \end{aligned}$$

3.3.1 Énumération des classes diédrales sur \mathcal{A} pour k impair

Un palindrome de longueur impaire doit avoir une lettre centrale invariante sous l'action de τ . Ces lettres correspondent à celles dont le quotient par τ du type associé, $\mathcal{A}(a)$, est isomorphe à $X^n E_2(X^j)$ où n est la hauteur d'une $\mathcal{A}(a)$ -structure et j est un entier. Le nombre $\alpha(n, j)$ de telles lettres est donné par la proposition suivante étant donnée qu'il sont en bijection avec les 2-arbres k -gonaux extéplanaires pointés en une arête externe dont les types, en tant que sous-espèces, sont isomorphes à $X^n E_2(X^j)$.

Proposition 100. Soient $n = 1$ ou 0 et j un entier naturel. Alors,

$$\alpha(n, j) = a_j^{n(\frac{k-1}{2})}. \quad (3.9)$$

Notation 114. Soit d un entier naturel. Notons $\text{Pal}(d, n, m)$, le nombre de palindromes de longueur d et de poids X^m tels que leur lettre centrale $a = \bar{a}$ est de hauteur n .

Notation 115. Soit d un entier naturel impair. Notons $\text{pal}(d, n, m)$, le nombre de palindromes primitifs de longueur d et de poids X^m tels que leur lettre centrale $a = \bar{a}$ est de hauteur n .

Notation 116. Soit d un entier naturel impair. Notons $\pi(d, n, m)$, le nombre de classes palindromiques primitives de longueur d et de poids X^m telles que leur lettre centrale $a = \bar{a}$ est de hauteur n .

Un palindrome x de longueur d et de poids X^m est uniquement déterminé par sa lettre centrale a de hauteur n et le mot t composé de ses $\frac{d-1}{2}$ premières lettres, $x = t a \bar{t}$. Le poids de la lettre centrale étant de la forme X^{n+2j} , le poids de t est donc $X^{\frac{m-n-2j}{2}}$ puisqu'il est le même que celui de \bar{t} . On en déduit la proposition suivante.

Proposition 101. Soit d et k des entiers impairs. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Pal}(d, n, m) &= \sum_{j \geq 0} \alpha(n, j) a_{\frac{m-n-2j}{2}}^{\binom{d-1}{2}} \\ &= \sum_{j \geq 0} a_j^{\binom{n \frac{k-1}{2}}{2}} a_{\frac{m-n}{2}-j}^{\binom{d-1}{2}} \\ &= a_{\frac{m-n}{2}}^{\binom{n \frac{k-1}{2} + \frac{d-1}{2}}{2}}. \end{aligned}$$

Notons qu'une classe diédrale, palindromique et primitive de mots de longueur impaire ne contient qu'un seul palindrome primitif.

Proposition 102. Soit d impair. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Pal}(d, n, m) &= \sum_{i \cdot j = d} \text{pal}(i, n, \frac{m}{j}), \\ \text{pal}(d, n, m) &= \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) \text{Pal}(i, n, \frac{m}{j}), \\ \pi(d, n, m) &= \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) a_{\frac{1}{2}(\frac{m}{j} - n)}^{\binom{n \frac{k-1}{2} + \frac{i-1}{2}}{2}}. \end{aligned}$$

Notation 117. Notons $\lambda(d, m)$, le nombre de classes circulaires primitives de mots de longueur d et de poids X^m .

Remarquons qu'à chaque classe circulaire c de mots de longueur d on associe la classe circulaire primitive formée des racines primitives des mots de c et que si ces racines sont de longueur i , alors la cardinalité de c est i .

Proposition 103. Soit d un entier. Alors,

$$\begin{aligned} a_m^{(d)} &= \sum_{i \cdot j = d} i \lambda(i, \frac{m}{j}), \\ \lambda(d, m) &= \frac{1}{d} \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) a_{\frac{m}{j}}^{(i)}. \end{aligned}$$

Notation 118. Notons $\sigma(d, m)$, le nombre de classes diédrales, primitives et gauches de mots de longueur d et de poids X^m .

Notation 119. Notons $\pi(d, m)$, le nombre de classes diédrales, primitives et palindromiques de mots de longueur d et de poids X^m .

Proposition 104. Soit d un entier impair. Alors,

$$\pi(d, m) = \sum_{n \geq 0} \pi(d, n, m).$$

Notons qu'une classe diédrale, gauche et primitive ne contient que deux classes circulaires primitives tandis qu'une classe diédrale, primitive et palindromique n'en contient qu'une. Ce qui nous donne les formules suivantes.

Proposition 105. Soit d un entier impair. Alors,

$$\lambda(d, m) = 2\sigma(d, m) + \pi(d, m),$$

$$\sigma(d, m) = \frac{1}{2}(\lambda(d, m) - \pi(d, m)).$$

Théorème 106. Soit k impair. Le développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires pointés en un k -gone est donné par

$$a_p^\diamond = \sum_{n=0}^1 \sum_{m \geq 0} \sum_{i \cdot j = k} \pi(i, n, 2m + n) X P_{2j}^{\text{bic}}(X^n, X^m) \quad (3.10)$$

$$+ \sum_{m \geq 0} \sum_{i \cdot j = k} \sigma(i, m) X C_j(X^m). \quad (3.11)$$

Démonstration. Si la classe diédrale est gauche, on oriente le type de sorte que la classe circulaire ainsi obtenue contienne le plus petit mot. On divise le type selon la racine primitive de ce mot pour obtenir une $X C_j(X^m)$ -structure où i est la longueur de la racine primitive et $i \cdot j = k$.

Si la classe diédrale est palindromique, elle contient un palindrome dont la racine primitive est de la forme $pa\bar{p}$ où a est une lettre et p est un mot. Le stabilisateur de ce palindrome est la forme $\langle \rho^i, \tau \rangle$ où i est la longueur de sa racine primitive et $i \cdot j = k$. Ainsi, le type possède des axes de symétrie passant par le type de A -structure associé à la lettre a et entre les multiplicités de la racine primitive. On oriente les secteurs délimités par ces axes vers la lettre a . Donc, si le type de $\frac{A}{\langle \tau \rangle}$ -structures associé à a

est isomorphe à $X^n E_2(X^d)$ et si le poids de p est X^{m-d} , le type de A_p^\diamond -structure est isomorphe à $X P_{2j}^{\text{bic}}(X^n, X^m)$. Ceci est illustré par la figure 3.7. \square

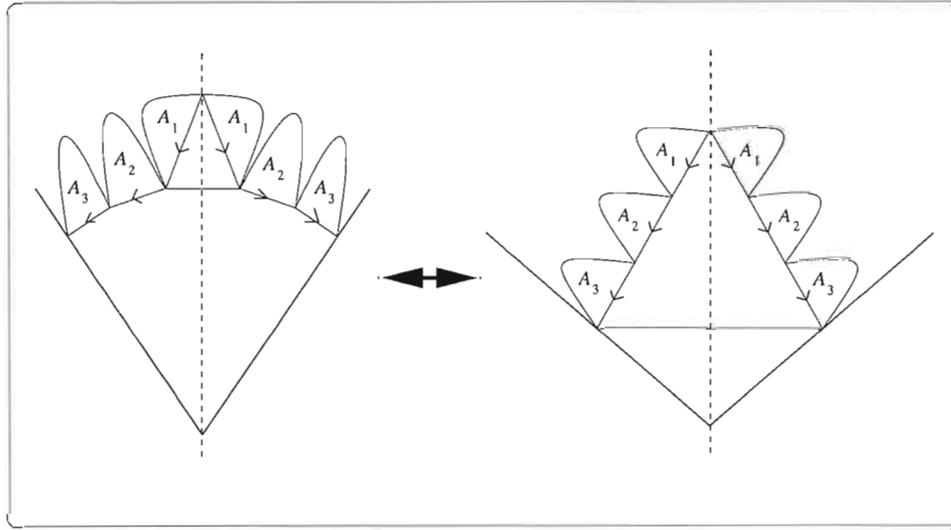


Figure 3.7 – Un secteur d'un type de A_p^\diamond -structures

Il suffit d'utiliser le théorème de dissymétrie pour les 2-arbres k -gonaux exterplanaires et les développements moléculaires des espèces A_p^- , A_p^\diamond et A_p^\diamond pour obtenir celui de l'espèce A_p puisque $A_p = A_p^- + A_p^\diamond - A_p^\diamond$.

Théorème 107. Soit k un entier impair. Le développement moléculaire de l'espèce $A_p = A_p(X)$ des 2-arbres k -gonaux exterplanaires est donné par

$$\begin{aligned}
 A_p(X) &= 1 + \sum_{m \geq 1} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 1} \beta_m^2 E_2(X^m) + \sum_{m \geq 1} \beta_m^3 X E_2 X^m \\
 &+ \sum_{m \geq 1} \beta_m^4 X^2 E_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^5 P_4^{\text{bic}}(X, X^m) \\
 &+ \sum_{n=0}^1 \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i+j=k \\ i < k}} \pi(i, n, 2m+n) X P_{2j}^{\text{bic}}(X^n, X^m) \\
 &+ \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i+j=k \\ i < k}} \sigma(i, m) X C_j(X^m),
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

où

$$\begin{aligned}\beta_m^1 &= \sigma(k, m-1) - \frac{1}{4}a_{m-2}^{(2k-2)} - \frac{1}{4}a_{\frac{m-2}{2}}^{(k-1)} + \frac{1}{2}a_{\frac{m-2}{4}}^{(\frac{k-1}{2})}, \\ \beta_m^2 &= a_{m-1}^{(k-1)} - a_{\frac{m-1}{2}}^{(\frac{k-1}{2})}, \\ \beta_m^4 &= \pi(k, 0, 2m), \\ \beta_m^4 &= \pi(k, 1, 2m) - \frac{1}{2}(a_m^{(k-1)} - \frac{1}{2}a_{\frac{m}{2}}^{(\frac{k-1}{2})}), \\ \beta_m^5 &= a_m^{(\frac{k-1}{2})}.\end{aligned}$$

3.4 Développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires où k est pair

Pour k impair, il est possible de donner une orientation par rapport à une arête distinguée aux autres arêtes d'un k -gone. En particulier, il est possible d'orienter une arête en direction de son sommet le plus éloigné de l'arête distinguée. Ceci est illustré pour un pentagone par la figure 3.8 a). Or, pour k pair et une arête a d'un k -gone, l'arête dont la distance avec a est $(k-2)/2$ ne peut pas être orientée de cette manière. Il est donc possible d'orienter $k-2$ arêtes d'un k -gone ayant une arête distinguée tel qu'illustré, pour un hexagone, par la figure 3.8 b). Cette orientation peut être induite à un 2-arbre k -gonal ; voir la figure 3.8 c).

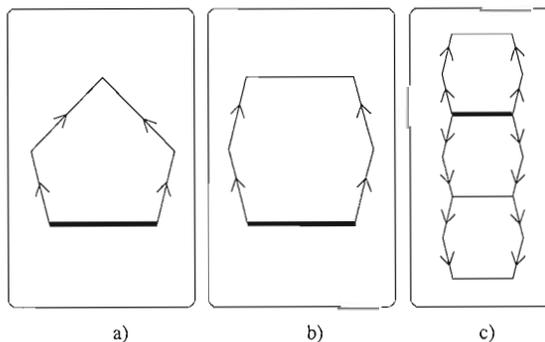


Figure 3.8 – Orientation d'arêtes par rapport à une arête distinguée

Théorème 108. Soit k un entier pair. L'espèce $\mathcal{A}_p^- = \mathcal{A}_p^-(X)$ des 2-arbres k -gonaux

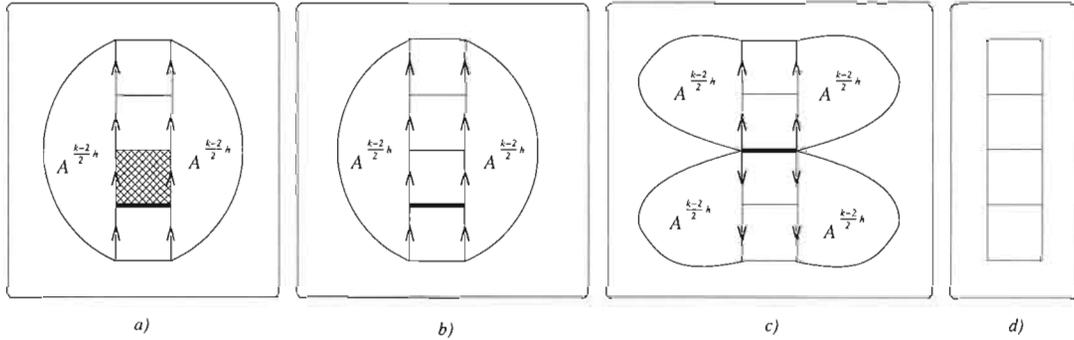


Figure 3.9 – Sous-espèces de A_p pointées en une arête

exterplanaires pointés en une arête satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$a_p^-(X) = 1 + \sum_{n \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor X^n E_2(A^{n \frac{k-2}{2}}) + P_4^{\text{bic}}(X^n, A^{n \frac{k-2}{2}}). \quad (3.13)$$

Démonstration. Nous classons les structures selon le degré de l'arête distinguée. L'arête distinguée de degré 0 est isomorphe à l'espèce 1. Pour les arêtes de degré 1 ou 2, nous sommes sur la longueur de l'échelle associée à l'arête distinguée. Si l'arête distinguée est au milieu de son échelle de longueur $2n$, alors nous pouvons associer ces types de structures à l'espèce $P_4^{\text{bic}}(X^n, A^{n \frac{k-2}{2}})$, ce qui est illustré par la figure 3.9 c). Quant à la figure 3.9 b), elle représente le cas où l'arête distinguée n'est pas au milieu de son échelle. Dans ce cas-ci, pour une échelle de longueur n , les types de structures obtenus sont isomorphes à $X^n E_2(A^{n \frac{k-2}{2}})$. \square

En appliquant les formules d'addition pour les espèces E_2 et $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$ au théorème précédent, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 109. Soit k un entier pair. Le développement moléculaire de l'espèce $a_p^- = a_p^-(X)$ des 2-arbres k -gonaux exterplanaires pointés en une arête est donné par

$$\begin{aligned} a_p^-(X) &= 1 + \sum_{m \geq 1} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 1} \beta_m^2 E_2(X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \beta_{m,n}^3 X^n E_2(X^m) + \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \beta_{m,n}^4 X^{2n} E_2(X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 1} \beta_{m,n}^5 P_4^{\text{bic}}(X^n, X^m), \end{aligned} \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned}\beta_m^1 &= \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \sum_{n \geq 1} \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}{2} (a_{m-n}^{(n(k-2))} - a_{\frac{m-n}{2}}^{(n \frac{k-2}{2})}) + \frac{1}{4} a_{m-2n}^{(2n(k-2))} - \frac{3}{4} a_{\frac{m-2n}{2}}^{(n(k-2))} + \frac{1}{2} a_{\frac{m-2n}{4}}^{(n \frac{k-2}{2})}, \\ \beta_m^2 &= \sum_{n \geq 1} a_{m-n}^{(n(k-2))} - a_{\frac{m-n}{2}}^{(n \frac{k-2}{2})}, \\ \beta_{m,n}^3 &= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil a_m^{(n \frac{k-2}{2})}, \\ \beta_{m,n}^4 &= \frac{1}{2} (a_m^{(n(k-2))} - a_{\frac{m}{2}}^{(n \frac{k-2}{2})}), \\ \beta_{m,n}^5 &= a_m^{(n \frac{k-2}{2})}.\end{aligned}$$

Théorème 110. Soit k un entier pair. L'espèce $A_p^\diamond = A_p^\diamond(X)$ des 2-arbres k -gonaux extéplanaires pointés en une arête d'un k -gone distingué satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$A_p^\diamond(X) = \sum_{m \geq 1} n X^n E_2(A^{\frac{kn-2n}{2}}). \quad (3.15)$$

Démonstration. Nous classons encore les structures selon la longueur de l'échelle associée à l'arête distinguée. Cette fois-ci, pour une échelle de longueur n , les structures obtenues sont des $X^n E_2(A^{n \frac{k-2}{2}})$ -structures. Ce qui est illustré par la figure 3.9 a). \square

En appliquant la formules d'addition pour l'espèce E_2 au théorème précédent, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 111. Soit k un entier pair. Le développement moléculaire de l'espèce $A_p^\diamond = A_p^\diamond(X)$ des 2-arbres k -gonaux extéplanaires pointés en une arête d'un k -gone distingué est donné par

$$A_p^\diamond(X) = \sum_{m \geq 1} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \beta_{m,n}^2 X^n E_2(X^m), \quad (3.16)$$

où

$$\begin{aligned}\beta_m^1 &= m + \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2} (a_{m-n}^{(n(k-2))} - a_{\frac{m-n}{2}}^{(n \frac{k-2}{2})}), \\ \beta_{m,n}^2 &= n a_m^{(n \frac{k-2}{2})}.\end{aligned}$$

3.4.1 Énumération des classes diédrales sur \mathcal{A} pour k pair

Les différences avec le cas où k est impair se résument essentiellement dans le fait qu'une \mathcal{A} -structure peut posséder une hauteur supérieure à un et qu'on doit procéder à l'énumération de classes diédrales primitives de longueur paire. Rappelons que $\alpha(n, m)$ est aussi le nombre de lettres de \mathcal{A} tel que $a = \bar{a}$ de hauteur n et de poids X^{n+2m} .

Proposition 112. Soit k et n des entiers naturels et $k \geq 4$ pair. Alors,

$$\alpha(n, m) = a_m^{\binom{n+k-2}{2}}. \quad (3.17)$$

Par la proposition précédente et la définition de $\text{Pal}(d, n, m)$, on a la proposition suivante.

Proposition 113. Soient $k \geq 4$ un entier pair et d un entier impair. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Pal}(d, n, m) &= \sum_{j \geq 0} \alpha(n, j) a_{\frac{m-n}{2}-j}^{\binom{d-1}{2}} \\ &= \sum_{j \geq 0} a_j^{\binom{n+k-2}{2}} a_{\frac{m-n}{2}-j}^{\binom{d-1}{2}} \\ &= a_{\frac{m-n}{2}}^{\binom{n+k-2}{2} + \binom{d-1}{2}}. \end{aligned}$$

Notons qu'une classe diédrale, primitive et palindromique de mots de longueur impaire contient un seul palindrome primitif. On a alors la proposition suivante.

Proposition 114. Soient $k \geq 4$ pair et d impair des entiers. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Pal}(d, n, m) &= \sum_{i:j=d} \text{pal}(i, n, \frac{m}{j}) \\ \text{pal}(d, n, m) &= \sum_{i:j=d} \mu(j) \text{Pal}(i, n, \frac{m}{j}) \\ \pi(d, n, m) &= \sum_{i:j=d} \mu(j) a_{\frac{1}{2}(\frac{m}{j}-n)}^{\binom{n+k-2}{2} + \binom{i-1}{2}}. \end{aligned}$$

Notation 120. Notons $\text{Pal}(d, m)$, le nombre de palindromes de longueur d et de poids X^m .

Notation 121. Notons $\text{pal}(d, m)$, le nombre de palindromes primitifs de longueur d et de poids X^m .

Notons qu'une classe diédrale, primitive et palindromique de mots de longueur paire ne contient que deux palindromes primitifs. On en déduit la proposition qui suit.

Proposition 115. Soit $k \geq 4$ un entier pair. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Pal}(d, m) &= \sum_{i \cdot j = d} \text{pal}(i, \frac{m}{j}), \\ \text{pal}(d, m) &= \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) \text{Pal}(i, \frac{m}{j}), \\ \pi(d, m) &= \frac{1}{\chi(d \text{ est pair})} \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) \text{Pal}(i, \frac{m}{j}). \end{aligned}$$

Par la définition de $\text{Pal}(d, m)$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 116. Soit $k \geq 4$ et $d \geq 1$ des entiers où k est pair. Alors,

$$\text{Pal}(d, m) = \begin{cases} a_{\frac{m}{2}}^{(\frac{d}{2})} & \text{si } d \text{ est pair,} \\ \sum_{n \geq 0} \text{Pal}(d, n, m) & \text{si } d \text{ est impair.} \end{cases} \quad (3.18)$$

Notation 122. Soit d un entier naturel, pair et non nul. Soit U l'ensemble des dexterpalindromes de longueur d et de poids X^m . Soit V l'ensemble des dexterpalindromes primitifs de U . Notons $\text{dext}(d, m)$, le cardinal de V . Notons $\delta(d, m)$, le nombre de classes dexterpalindromiques contenant un élément de V . Soit U' l'ensemble des dexterpalindromes de U tels que leur première lettre est de hauteur n_1 . Notons $\text{Dext}(d, n_1, m)$, le cardinal de U' . Soit V' l'ensemble des dexterpalindromes primitifs de U' . Notons $\text{dext}(d, n_1, m)$, le cardinal de V' . Notons $\delta(d, n_1, m)$, le nombre de classes dexterpalindromiques contenant un élément de V' . Soit U'' l'ensemble des dexterpalindromes de U' tels que la lettre centrale de leur palindrome est de hauteur n_2 . Notons $\text{Dext}(d, n_1, n_2, m)$, le cardinal de U'' . Soit V'' l'ensemble des dexterpalindromes primitifs de U'' . Notons $\text{dext}(d, n_1, n_2, m)$, le cardinal de V'' . Notons $\delta(d, n_1, n_2, m)$, le nombre de classes dexterpalindromiques contenant un élément de V'' .

Un dexterpalindrome de longueur d et de poids X^m est de la forme $aub\bar{u}$ où a et b sont des lettres et u est un mot de longueur $\frac{d-2}{2}$. Si a est de hauteur n_1 et de poids X^{n_1+2i} et si b est de hauteur n_2 et de poids X^{n_2+2j} , le palindrome $u\bar{u}$ est de poids $X^{m-n_1-n_2-2i-2j}$. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 117. Soient $k \geq 4$ et $d \geq 2$ des entiers pairs. Soient n_1 et n_2 deux entiers naturels. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Dext}(d, n_1, n_2, m) &= \sum_{i,j \geq 0} \alpha(n_1, i) \alpha(n_2, j) \text{Pal}(d-2, m-n_1-n_2-2i-2j) \\ &= \sum_{i,j \geq 0} a_i^{(n_1 \frac{k-2}{2})} a_j^{(n_2 \frac{k-2}{2})} a_{\frac{m-n_1-n_2}{2}-i-j}^{(\frac{d-2}{2})} \\ &= a_{\frac{m-n_1-n_2}{2}}^{((n_1+n_2) \frac{k-2}{2} + \frac{d-2}{2})}. \end{aligned}$$

Notons qu'une classe diédrale comptée par $\delta(d, n, m, \ell)$ telle que $n \neq m$ ne comporte qu'un dexterpalindrome compté par $\text{dext}(d, n, m, \ell)$, l'autre étant compté par $\text{dext}(d, m, n, \ell)$. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 118. Soit d pair et $n \geq 0$ et $m \geq 0$ des entiers différents. Alors,

$$\text{Dext}(d, n, m, \ell) = \sum_{\substack{i \cdot j = d \\ j \text{ impair}}} \text{dext}(i, n, m, \frac{\ell}{j}), \quad (3.19)$$

$$\text{dext}(d, n, m, \ell) = \delta(d, n, m, \ell) = \sum_{\substack{i \cdot j = d \\ j \text{ impair}}} \mu(j) \text{Dext}(i, m, n, \frac{\ell}{j}). \quad (3.20)$$

$$(3.21)$$

Par les définitions de $\text{Dext}(d, n, m)$, $\alpha(n, i)$ et $\text{Pal}(d, m)$, on obtient la première équation de la proposition suivante, la deuxième étant obtenue en associant à chaque dexterpalindrome sa racine primitive qui elle est aussi un dexterpalindrome et la troisième en effectuant une inversion de Möbius sur la deuxième.

Proposition 119. Soit d un entier positif. Alors,

$$\text{Dext}(d, n, m) = \sum_{i \geq 0} \alpha(n, i) \text{Pal}(d-1, m-n-2i), \quad (3.22)$$

$$\text{Dext}(d, n, m) = \sum_{i \cdot j = d} \text{dext}(i, n, \frac{m}{j}), \quad (3.23)$$

$$\text{dext}(d, n, m) = \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) \text{Dext}(i, n, \frac{m}{j}). \quad (3.24)$$

Notons qu'une classe diédrale comptée par $\delta(d, n, n, m)$ ne contient que deux dexterpalindromes comptés par $\text{dext}(d, n, n, m)$. De plus, les racines primitives de longueur i tel que $i \cdot j = d$ des dexterpalindromes comptés par $\text{dext}(d, n, n, m)$ sont comptés par $\text{Dext}(i, n, n, \frac{m}{j})$ si j est impair et par $\text{dext}(i, n, \frac{m}{j})$ si j est pair. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 120. Soient k et d des entiers pairs. Soit n un entier naturel. Alors,

$$\text{Dext}(d, n, n, m) = \sum_{\substack{i \cdot j = d \\ j \text{ impair}}} \text{dext}(i, n, n, \frac{m}{j}) + \sum_{\substack{i \cdot j = d \\ j \text{ pair}}} \text{dext}(i, n, \frac{m}{j}), \quad (3.25)$$

$$\text{dext}(d, n, n, m) = \sum_{\substack{i \cdot j = d \\ j \text{ impair}}} \mu(j) \left(\text{Dext}(i, n, n, \frac{m}{j}) \right. \quad (3.26)$$

$$\left. - \sum_{\substack{\ell \cdot h = i \\ h \text{ pair}}} \text{dext}(\ell, n, \frac{m}{hj}) \right),$$

$$\delta(d, n, n, m) = \frac{1}{2} \text{dext}(d, n, n, m). \quad (3.27)$$

Comme les ensembles comptés par $\delta(d, n_1, n_2, m)$ et par $\delta(d, n_2, n_1, m)$ se confondent, on obtient la proposition suivante.

Proposition 121. Soient k et d des entiers pairs non nuls. Alors,

$$\delta(d, m) = \sum_{n_1 \geq 0} \sum_{n_2 \geq n_1} \delta(d, n_1, n_2, m).$$

Notons qu'une classe diédrale primitive de mots de longueur impaire est soit gauche soit palindromique. Une classe diédrale primitive de mots de longueur paire est exclusivement gauche, palindromique ou dexterpalindromique. De plus, seules les classes diédrales gauches sont l'union de deux classes circulaires, les autres n'en étant celle que d'une seule. On obtient la proposition suivante.

Proposition 122. Soit d un entier naturel non nul. Alors,

$$\lambda(d, m) = 2\sigma(d, m) + \pi(d, m) + \chi(d \text{ pair})\delta(d, m), \quad (3.28)$$

$$\sigma(d, m) = \frac{1}{2}(\lambda(d, m) - \pi(d, m) - \chi(d \text{ pair})\delta(d, m)). \quad (3.29)$$

Théorème 123. Soit k pair. Le développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux extérieurement planaires pointés en un k -gone est donné par

$$a_p^\diamond = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ impair}}} \pi(i, n, 2m + n) X P_{2j}^{\text{bic}}(X^n, X^m, 1) \quad (3.30)$$

$$+ \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ pair}}} \pi(i, 2n) X P_{2j}^{\text{bic}}(1, X^n, 1) \quad (3.31)$$

$$+ \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq \ell} \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ pair}}} \delta(i, \ell, m, 2n + \ell + m) X P_{2j}^{\text{bic}}(X^\ell, X^n, X^m) \quad (3.32)$$

$$+ \sum_{m \geq 0} \sum_{i \cdot j = k} \sigma(i, m) X C_j(X^m). \quad (3.33)$$

Démonstration.

Si la classe diédrale est palindromique telle que la racine primitive du plus petit palindrome est de longueur impaire et donc de la forme $pa\bar{p}$ où a est une lettre et p est un mot, le stabilisateur de ce palindrome est la forme $\langle \rho^i, \tau \rangle$ où i est la longueur de sa racine primitive et $i \cdot j = k$. Ainsi, le type possède des axes de symétrie passant par le type de A -structures associé à la lettre a et entre les multiplicités de la racine primitive. On oriente les secteurs délimités par ces axes vers la lettre a . Donc, si le type de $\frac{A}{\langle \tau \rangle}$ -structures associé à a est isomorphe à $X^n E_2(X^d)$ et si le poids de p est X^{m-d} , le type de a_p^\diamond -structure est isomorphe à $X P_{2j}^{\text{bic}}(X^n, X^m)$. Ceci est illustré par la figure 3.10.

Si la classe diédrale est palindromique telle que la racine primitive du plus petit palindrome est de longueur paire, donc de la forme $p\bar{p}$ où p est un mot, le stabilisateur de ce palindrome est la forme $\langle \rho^i, \tau \rangle$ où i est la longueur de sa racine primitive et $i \cdot j = k$. Ainsi, le type possède des axes de symétrie passant entre les multiplicités de la racine primitive et entre p et \bar{p} . On oriente les secteurs délimités par ces axes vers les axes passant au milieu des racines primitives. Donc, si le poids de p est X^m , le type de a_p^\diamond -structure est isomorphe à $X P_{2j}^{\text{bic}}(1, X^m, 1)$.

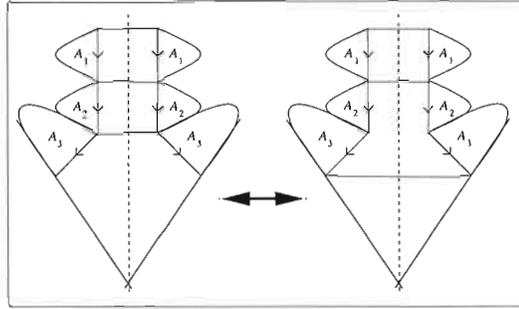


Figure 3.10 – Un secteur d'un type de A_p^\diamond -structures

Si la classe diédrale est dexterpalindromique telle que la racine primitive du plus petit dexterpalindrome est de longueur paire, donc de la forme $apb\bar{p}$ où a et b sont des lettres et p est un mot, le stabilisateur de ce dexterpalindrome est de la forme $\langle \rho^i, \tau\rho \rangle$ où i est la longueur de sa racine primitive et $i \cdot j = k$. Ainsi, le type possède des axes de symétrie passant par le type de A -structures associé à la lettre b et par le type associé à a . On oriente les secteurs délimités par ces axes vers la lettre a . Donc, si le type de $\frac{A}{\langle \tau \rangle}$ -structures associé à a est isomorphe à $X^{n_1} E_2(X^d)$, le type associé à b est isomorphe à $X^{n_2} E_2(X^c)$ et si le poids de p est X^{m-d-c} , le type de A_p^\diamond -structures est isomorphe à $XP_{2j}^{\text{bic}}(X^{n_1}, X^m, X^{n_2})$.

□

De nouveau, il suffit d'utiliser le théorème de dissymétrie pour les 2-arbres k -gonaux exterplanaires et les développements moléculaires des espèces A_p^- , A_p^\diamond et $A_p^{\diamond\diamond}$ pour obtenir celui de l'espèce A_p puisque $A_p = A_p^- + A_p^\diamond - A_p^{\diamond\diamond}$.

Théorème 124. Soit k un entier pair. Le développement moléculaire de l'espèce $A_p = A_p(X)$ des 2-arbres k -gonaux exterplanaires est donné par

$$\begin{aligned}
 A_p(X) &= 1 + \sum_{m \geq 1} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 1} \beta_m^2 E_2(X^m) \\
 &+ \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \beta_{m,n}^3 X^n E_2(X^m) + \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \beta_{m,n}^4 X^{2n} E_2(X^m) \\
 &+ \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 1} \beta_{m,n}^5 P_4^{\text{bic}}(X^n, X^m),
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i=j=k, i < k \\ i \text{ impair}}} \pi(i, n, 2m+n) X P_{2j}^{\text{bic}}(X^n, X^m, 1) \\
& + \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{i=j=k, i < k \\ i \text{ pair}}} \pi(i, 2n) X P_{2j}^{\text{bic}}(1, X^n, 1) \\
& + \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq \ell} \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{i=j=k, i < k \\ i \text{ pair}}} \delta(i, \ell, m, 2n + \ell + m) X P_{2j}^{\text{bic}}(X^\ell, X^n, X^m) \\
& + \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i=j=k \\ i < k}} \sigma(i, m) X C_j(X^m),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\beta_m^1 &= \sigma(k, m-1) - \sum_{n \geq 1} \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} (a_{m-n}^{(n(k-2))} - a_{\frac{m-n}{2}}^{(n \frac{k-2}{2})}) \\
&\quad - \frac{1}{4} a_{m-2n}^{(2n(k-2))} + \frac{3}{4} a_{\frac{m-2n}{2}}^{(n(k-2))} - \frac{1}{2} a_{\frac{m-2n}{4}}^{(n \frac{k-2}{2})}, \\
\beta_m^2 &= \sum_{n \geq 1} a_{m-n}^{(n(k-2))} - a_{\frac{m-n}{2}}^{(n \frac{k-2}{2})}, \\
\beta_{m,n}^3 &= \sum_{\substack{i \geq j \\ i+j=n-1}} \delta(k, i, j, 2m+i+j) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor a_m^{(n \frac{k-2}{2})}, \\
\beta_{m,n}^4 &= \frac{1}{2} (a_m^{(n(k-2))} - a_{\frac{m}{2}}^{(n \frac{k-2}{2})}), \\
\beta_{m,n}^5 &= a_m^{(n \frac{k-2}{2})}.
\end{aligned}$$

CHAPITRE IV

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES k -GONAUX EXTERPLANAIRES SANS SOMMETS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR À 3

Le principal intérêt de cette classification est la représentation de molécules chimiques et particulièrement de catafusènes. Généralement, les chimistes font une classification de telles molécules par leur groupe d'isomorphismes à conjugaison près dans le groupe diédral. Ce qui nous amène à faire une distinction entre les symétries d'ordre 2 obtenues par réflexion et par rotation. Mentionnons que la contrainte sur les degrés des sommets est équivalente à ne pas admettre deux arêtes incidentes de degré au moins 2. Les différences les plus marquées avec le chapitre précédent seront les équations fonctionnelles dans le cas où k est impair et le fait qu'on ne considérera qu'un sous-ensemble des classes diédrales de mots sur l'alphabet d'une espèce asymétrique. À notre connaissance, l'énumération des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 n'aurait été faite que pour les $k \geq 8$ (voir Brunvoll, Cyvin et Cyvin, 1997).

4.1 Définitions et théorème de dissymétrie

Notation 123. Notons par A_p l'espèce des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 étiquetés en leurs k -gones. Cette espèce correspond d'ailleurs à celle des 2-arbres k -gonaux sans sommets de degré supérieur à 3.

Définition 124. La classe \mathcal{A} des 2-arbres k -gonaux ($k \geq 3$) sans sommets de degré

supérieur à 3 peut être définie de manière récursive comme étant la plus petite classe de graphes simples telle que

1. un graphe formé d'une arête est un élément de \mathcal{A} ,
2. si un graphe $G = (S, A)$ satisfait aux conditions suivantes :
 - (a) G possède des sommets, notés x_1 à x_{k-2} , de degré 2,
 - (b) G possède des sommets x_0 et x_{k-1} , de degré 2 ou 3,
 - (c) x_i et x_j sont adjacents si $i + 1 \equiv j \pmod{k}$, pour $i = 0, \dots, k - 1$,
 - (d) $G - \{x_1, \dots, x_{k-2}\}$ appartient à \mathcal{A} ,
 alors, G est dans \mathcal{A} .

Essentiellement, on obtient un 2-arbre k -gonal sans sommets de degré supérieur à 3 à partir d'un autre en ajoutant un k -gone ne possédant qu'une seule arête en commun avec cet autre 2-arbre dont les deux sommets sont de degré 1 ou 2. Le cas où $k = 3$ est trivial au sens où il n'y a que trois types de structures étant donné qu'un 2-arbre 3-gonal possédant deux 3-gones ne possède aucune arête sans sommets de degré 3. On a alors la proposition suivante :

Proposition 125. L'espèce $\mathcal{A}_p(X)$ des 2-arbres triangulaires (i.e. 3-gonaux) sans sommets de degré supérieur à 3 satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\mathcal{A}_p(X) = 1 + X + P_4^{\text{bic}}(X, 1). \quad (4.1)$$

Pour le cas où $k = 4$, tout 2-arbre 4-gonal sans sommets de degré supérieur à 3 se limite à une échelle extérplanare. En effet, pour toute échelle extérplanare de hauteur supérieure à 2, seules les arêtes à leurs extrémités possèdent deux sommets de degré inférieur à 3. Par contradiction, on obtient qu'un 2-arbre 4-gonal sans sommets de degré supérieur à 3 et son échelle extérplanare de hauteur maximale se confondent car, sinon, l'échelle ne serait pas maximale ou le 2-arbre posséderait un sommet de degré 4. Le type d'une échelle de hauteur n est alors isomorphe à $X P_4^{\text{bic}}(X^{\frac{n-1}{2}}, 1)$ si n est impair ou à $P_4^{\text{bic}}(X^{\frac{n}{2}}, 1)$ si n est pair. On a donc la proposition suivante.

Proposition 126. L'espèce $\mathcal{A}_p(X)$ des 2-arbres quadrangulaires (i.e. 4-gonaux) sans sommets de degré supérieur à 3 satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\mathcal{A}_p(X) = \sum_{n \geq 0} P_4^{\text{bic}}(X^n, 1) + \sum_{n \geq 0} X P_4^{\text{bic}}(X^n, 1). \quad (4.2)$$

Notation 125. Notons par A l'espèce des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 distingués en une arête externe orientée et telle que ses sommets sont de degré inférieur à 3. C'est-à-dire que l'arête orientée et ses arêtes incidentes sont au plus de degré 1. Notons également par A_+ l'espèce des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 distingués en une arête de degré 1, orientée et telle que ses sommets sont de degré 2. Evidemment, $A = 1 + A_+$, car l'arête de degré 0 est la seule A -structure qui n'est pas une A_+ -structure.

Notation 126. Notons par $c(m, n)$ le nombre de couplages de m arêtes de la chaîne orientée de longueur n .

Proposition 127. Soient m et n des entiers. Alors,

$$c(m, n) = \binom{n+1-m}{m}. \quad (4.3)$$

Démonstration. À partir d'une chaîne orientée de longueur $n+1-m$, on distingue m arêtes et on lui ajoute une à la suite de chaque arête distinguée, sauf pour la dernière, pour obtenir un couplage en m arêtes d'une chaîne orientée de longueur n , et inversement. \square

Notation 127. Notons par $B_{\langle n \rangle}$ l'espèce des listes de A -structures de longueur n telles qu'aucune A_+ -structure n'en précède une autre. Par convention, si n n'est pas un entier naturel alors $B_{\langle n \rangle} = 0$.

Par cette définition, on a la proposition suivante.

Proposition 128. Soit n un entier naturel. On a l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$B_{\langle n \rangle} = \sum_{m \geq 0} c(m, n) A_+^m. \quad (4.4)$$

Proposition 129. L'espèce A_+ des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 distingués en une arête de degré 1, orientée et telle que ses sommets sont de degré 2 est caractérisée par les isomorphismes d'espèces suivant :

$$A_+ = X B_{\langle k-3 \rangle} = X \sum_{m \geq 0} c(m, k-3) A_+^m \quad (4.5)$$

Démonstration. L'orientation de l'arête distinguée induit une orientation sur les arêtes du k -gone contenant l'arête distinguée. Comme l'arête distinguée et les deux autres adjacentes à celle-ci sont de degré 1, les autres arêtes sont soit des arêtes de degré 1 ou des arêtes de degré 2 qui, ces dernières, ne sont pas adjacentes entre elles et à qui on associe des A_+ -structures, ce qui constitue une $B_{\langle k-3 \rangle}$ -structure. Ceci est illustré par la figure 4.1. \square

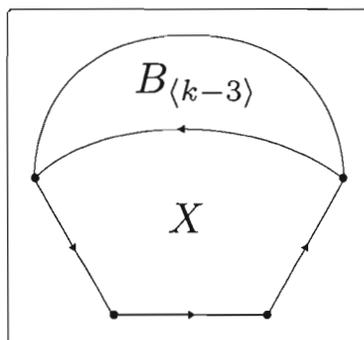


Figure 4.1 – L'espèce A en fonction de $B_{\langle k-3 \rangle}$

Théorème 130 (Théorème de dissymétrie des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3). L'espèce a_p des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$a_p^- + a_p^\diamond = a_p + a_p^{\diamond}, \quad (4.6)$$

où les exposants $-$, \diamond et \diamond représentent respectivement le pointage en une arête, en un k -gone et en un k -gone ayant une arête distinguée.

La preuve est la même que pour les 2-arbres k -gonaux exterplanaires.

Nous utiliserons les mêmes définitions qu'en section 3.2 du chapitre 3 en ajoutant une condition d'admissibilité pour obtenir une bijection entre les classes diédrales admissibles de mots de longueur k et les a_p^\diamond -structures. Pour le reste du chapitre, les classes diédrales de mots seront considérées comme étant constituées de mots sur \mathcal{A} qui est l'alphabet dont chaque lettre représente un type de A -structures et est pondérée

par l'espèce moléculaire asymétrique (c'est-à-dire X^n où n est le nombre de k -gones des structures du type) à laquelle le type est isomorphe.

Définition 128. Un mot de longueur ℓ , $w = a_0 a_1 \cdots a_{\ell-1}$, est dit *admissible* si, pour $1 \leq i \leq \ell - 1$, le type associé à la lettre a_i est isomorphe à 1 ou le type associé à la lettre $a_{i+1 \bmod \ell}$ est isomorphe à 1. Autrement dit, un seul des deux types associés à deux lettres adjacentes peut être un type de A_+ -structures. Ou encore, au moins un des types associés à deux lettres adjacentes est celui d'une arête.

On en déduit que les racines d'un mot admissible sont des mots admissibles et que les mots d'une classe diédrale ou circulaire d'un mot admissible le sont aussi.

Définition 129. Une classe diédrale ou circulaire de mots sera dite *admissible* si elle possède un mot admissible.

4.2 Développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 où k est impair

Notons que nous utiliserons la notation de l'espèce $P_2^{\text{bic}}(N, M)$ pour désigner les espèces de 2-arbres k -gonaux isomorphes à $NE_2(M)$ si la symétrie d'ordre 2 est une réflexion, où N et M sont des espèce moléculaire. Si la réflexion est une rotation nous utiliserons la notation de l'espèce $NC_2(M)$. Pour ce faire, la version suivante de la formule d'addition de l'espèce $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$ sera utilisée.

Proposition 131. Soit B une espèce asymétrique dont le développement moléculaire est donné par

$$B(X) = \sum_{k \geq 0} b_k X^k.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_4^{\text{bic}}(X^n, B(X)) &= \sum_{m \geq n} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq n} \beta_m^2 P_2^{\text{bic}}(1, X^m) \\ &+ \sum_{m \geq n} \beta_m^3 C_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^4 P_2^{\text{bic}}(X^{2n}, X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 0} \beta_m^5 P_4^{\text{bic}}(X^n, X^m), \end{aligned} \tag{4.7}$$

où

$$\begin{aligned}
\beta_m^1 &= \frac{1}{4}b_{m-2n}^{(4)} - \frac{3}{4}b_{\frac{m-2n}{2}}^{(2)} + \frac{1}{2}b_{\frac{m-2n}{4}}, \\
\beta_m^2 &= \frac{1}{2}(b_{m-n}^{(2)} - b_{\frac{m-n}{2}}), \\
\beta_m^3 &= \frac{1}{2}(b_{m-n}^{(2)} - b_{\frac{m-n}{2}}), \\
\beta_m^4 &= \frac{1}{2}(b_m^{(2)} - b_{\frac{m}{2}}), \\
\beta_m^5 &= b_m.
\end{aligned}$$

Nous aurons aussi besoin de définir la notion d'un sommet opposé à une arête.

Définition 130. Un sommet s est dit opposé à une arête $a = (x, y)$ si s, x et y font partie d'une même k -gone et la distance entre s et chaque sommet de a est $(k-1)/2$.

Dans un 2-arbre k -gonal où k est impair, n sommets sont opposés à une arête de degré n . Rappelons que, dans le cas extéplanair, le degré d'une arête est au plus 2.

Définition 131. Soit $k \geq 3$ impair. Soit t un 2-arbre k -gonal. Soient a, b et c des arêtes de t telles que a et b appartiennent chacun à un k -gone contenant c . Alors, a et b sont du même côté par rapport à c si le sommet de c , dont la distance avec a est minimale, est le même que celui de c dont la distance avec b est minimale.

Théorème 132. Soit $k \geq 7$ un entier impair. L'espèce $\alpha_p^- = \alpha_p^-(X)$ des 2-arbres k -gonaux, extéplanaires, sans sommets de degré supérieur à 3 et pointés en une arête satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned}
\alpha_p^- &= 1 + P_2^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} \right) + X A_+ B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \\
&+ P_4^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right) + P_2^{\text{bic}} \left(1, A_+ X B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right) \\
&+ C_2 \left(X A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right) + X^2 A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^3.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Démonstration. On classe les α_p^- -structures selon le degré de l'arête distinguée et le nombre d'arêtes de degré 2 incidentes à un sommet opposé à celle distinguée.

Si l'arête distinguée est de degré 0, l'espèce associée à une telle α_p^- -structure est isomorphe à 1. Si l'arête distinguée est de degré 1 et que son sommet opposé est incident à aucune arête de degré 2, alors l'espèce de telles α_p^- -structures est isomorphe

à $P_2^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} \right)$. Ceci est illustré par la figure 4.2 a). Si l'arête distinguée est de degré 1 et son sommet opposé est incident à une arête de degré 2, l'espèce de telles \mathcal{A}_p^- -structures est isomorphe à $X A_+ B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}$. Ceci est illustré par la figure 4.2 b).

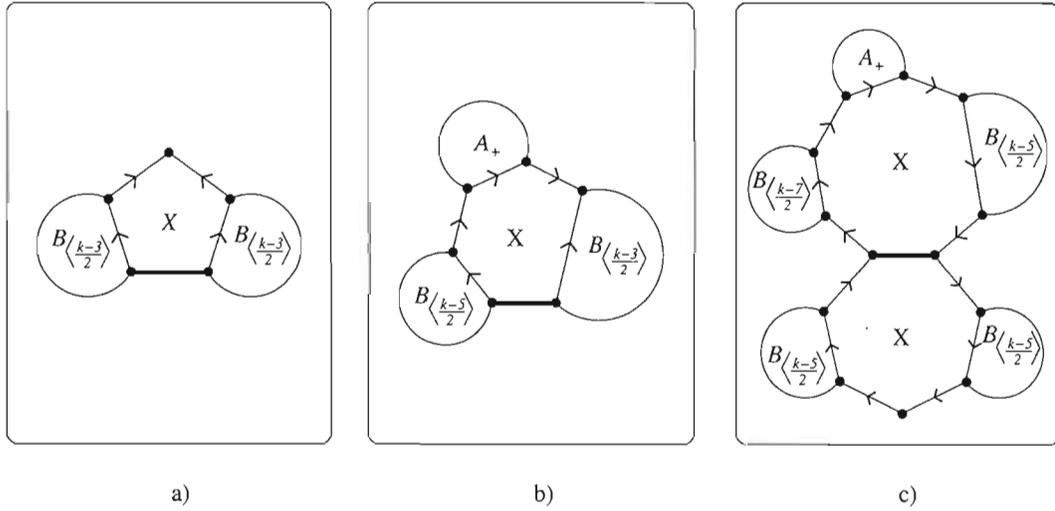


Figure 4.2 – Sous-espèces de \mathcal{A}_p^- isomorphes à $P_2^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} \right)$ en a), à $X A_+ B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}$ en b) et à $X^2 A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^3$ en c)

Si l'arête distinguée est de degré 2 et que ses sommets opposés ne sont pas incidents à une arête de degré 2, l'espèce de telles \mathcal{A}_p^- -structures est isomorphe à $P_4^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)$. Ceci est illustré par la figure 4.3 a). Si un seul des sommets opposés à l'arête distinguée est incident à une arête de degré 2, l'espèce de telles \mathcal{A}_p^- -structures est isomorphe à $X^2 A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^3$, ce qui est illustré par la figure 4.2 c). Si les deux sommets opposés à l'arête distinguée sont, chacun, incident à une arête de degré 2 et si ces deux arêtes sont du même côté par rapport à l'arête distinguée, l'espèce de telles \mathcal{A}_p^- -structures est isomorphe à $P_2^{\text{bic}} \left(1, X A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)$. C'est ce qui est illustré par la figure 4.3 b). Par contre, si elles ne sont pas du même côté, l'espèce de telles \mathcal{A}_p^- -structures est isomorphe à $C_2 \left(X A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)$, ce qui est illustré par la figure 4.3 c).

□

De manière similaire on obtient le théorème suivant pour les 2-arbres pentagonaux (i.e 5-gonaux) extéplanaires sans sommets de degré supérieur à 3.

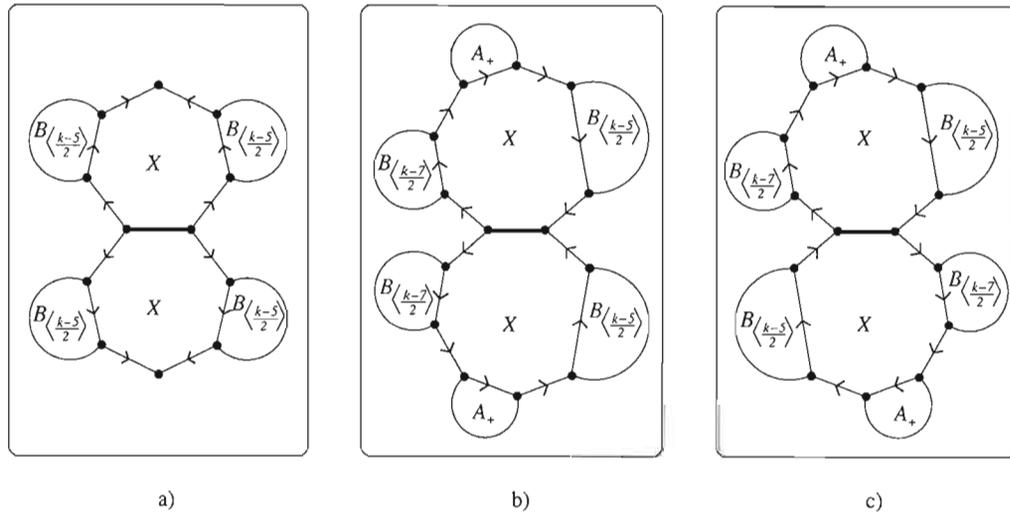


Figure 4.3 – Sous-espèces de a_p^- isomorphes à $P_4^{\text{bic}}(X, B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle})$ en a), à $P_2^{\text{bic}}(1, XA_+B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle}B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle})$ en b) et à $C_2(XA_+B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle}B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle})$ en c)

Théorème 133. L'espèce $a_p^- = a_p^-(X)$ des 2-arbres pentagonaux (i.e. 5-gonaux), extérieurement, sans sommets de degré supérieur à 3 et pointés en une arête satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned}
 a_p^- &= 1 + P_2^{\text{bic}}(X, A) + XA_+A & (4.9) \\
 &+ P_4^{\text{bic}}(X, 1) + P_2^{\text{bic}}(1, XA_+) \\
 &+ C_2(XA_+) + X^2A_+.
 \end{aligned}$$

En appliquant respectivement les formules d'addition de C_2 , de P_2^{bic} et de P_4^{bic} aux deux théorèmes précédents, on obtient les corollaires suivants.

Corollaire 134. Soit $k \geq 7$ un entier impair. Soient les coefficients définis par les équations suivantes et nuls si un de leurs indices n'est pas un entier naturel :

$$\begin{aligned}
 \sum_{m \geq 0} c_m^{(\ell)} X^m &= \left(B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} \right)^\ell, \\
 \sum_{m \geq 0} d_m^{(\ell)} X^m &= \left(XA_+B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle}B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)^\ell,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m \geq 0} f_m^{(\ell)} X^m &= \left(B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)^\ell, \\
\sum_{m \geq 0} g_m^{(\ell)} X^m &= \left(X A_{+B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}} B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} \right)^\ell, \\
\sum_{m \geq 0} h_m^{(\ell)} X^m &= \left(X^2 A_{+B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^3} B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} \right)^\ell.
\end{aligned}$$

On omettra l'exposant s'il est égal à 1. L'espèce $a_p^- = a_p^-(X)$ des 2-arbres k -gonaux, exterplanaires, sans sommets de degré supérieur à 3 et pointés en une arête satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned}
a_p^- &= 1 + \sum_{m \geq 1} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 0} \beta_m^2 P_2^{\text{bic}}(1, X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^3 P_2^{\text{bic}}(X, X^m) \quad (4.10) \\
&+ \sum_{m \geq 0} \beta_m^4 P_2^{\text{bic}}(X^2, X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^5 C_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^6 P_4^{\text{bic}}(X, X^m).
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\beta_m^1 &= \frac{1}{2}(c_{m-1}^{(2)} - c_{\frac{m-1}{2}}) + d_m + \frac{1}{4}f_{m-2}^{(4)} - \frac{3}{4}f_{\frac{m-2}{2}}^{(2)} + \frac{1}{2}f_{\frac{m-2}{4}} + g_m^{(2)} - g_{\frac{m}{2}} + h_m, \\
\beta_m^2 &= \beta_m^5 = g_m + \frac{1}{2}(f_{m-1}^{(2)} - f_{\frac{m-1}{2}}), \\
\beta_m^3 &= c_m, \\
\beta_m^4 &= \frac{1}{2}(f_m^{(2)} - f_{\frac{m}{2}}), \\
\beta_m^6 &= f_m.
\end{aligned}$$

Corollaire 135. L'espèce $a_p^- = a_p^-(X)$ des 2-arbres pentagonaux (i.e. 5-gonaux), exterplanaires, sans sommets de degré supérieur à 3 et pointés en une arête satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned}
a_p^- &= 1 + 2X^2 + \sum_{m \geq 3} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 2} \beta_m^2 P_2^{\text{bic}}(1, X^m) \quad (4.11) \\
&+ \sum_{m \geq 0} \beta_m^3 P_2^{\text{bic}}(X, X^m) \sum_{m \geq 2} \beta_m^4 C_2(X^m) + P_4^{\text{bic}}(X, 1)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\beta_m^1 &= \frac{3}{2}a_{m-1}^{(2)} + a_{m-2}^{(2)} - a_{m-1} - a_{m-2} - \frac{1}{2}a_{\frac{m-1}{2}} - a_{\frac{m-2}{2}}, \\ \beta_m^2 &= \beta_m^4 = \chi(m \geq 2)a_{m-1}, \\ \beta_m^3 &= a_m.\end{aligned}$$

Théorème 136. Soit $k \geq 7$ un entier impair. L'espèce $\mathcal{A}_p^\diamond = \mathcal{A}_p^\diamond(X)$ des 2-arbres k -gonaux, exterplanaires, sans sommets de degré supérieur à 3 et pointés en une arête d'un k -gone distingué satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_p^\diamond(X) &= P_2^{\text{bic}}\left(X, B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle}\right) + X A_+ B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} + P_2^{\text{bic}}\left(X^2, B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^2\right) \\ &+ X^2 A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^3 + X^2 A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Démonstration. On classe les \mathcal{A}_p^\diamond -structures selon le degré de l'arête distinguée et le nombre d'arêtes de degré 2 incidentes à un sommet opposé à celle distinguée. Si le degré de l'arête distinguée est 1, l'espèce de telles \mathcal{A}_p^\diamond -structures est isomorphe à celle des \mathcal{A}_p^- -structures dont l'arête distinguée est de degré 1.

Si l'arête distinguée est de degré 2 et si les sommets opposés ne sont pas incidents à une arête de degré 2, l'espèce de telles \mathcal{A}_p^\diamond -structures est isomorphe à $P_2^{\text{bic}}\left(X, B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^2\right)$, ce qui est illustré par la figure 4.4 a). Si le sommet appartenant à un k -gone non distingué et opposé à l'arête distinguée est le seul sommet opposé à celle-ci et incident à une arête de degré 2, l'espèce de telles \mathcal{A}_p^\diamond -structures est isomorphe à $X^2 A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^3$. Ceci est illustré par la figure 4.4 b). Si le sommet appartenant au k -gone distingué et opposé à l'arête distinguée est incident à une arête de degré 2, l'espèce de telles \mathcal{A}_p^\diamond -structures est isomorphe à $X^2 B_{\langle k-3 \rangle} B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}$, donc à $X A_+^2 B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}$, car $A_+ = X B_{\langle k-3 \rangle}$. Ce qui est illustré par la figure 4.4 c).

□

De manière similaire, on obtient le théorème suivant.

Théorème 137. L'espèce $\mathcal{A}_p^\diamond = \mathcal{A}_p^\diamond(X)$ des 2-arbres pentagonaux (i.e. 5-gonaux), exterplanaires, sans sommets de degré supérieur à 3 pointés en une arête d'un pentagone

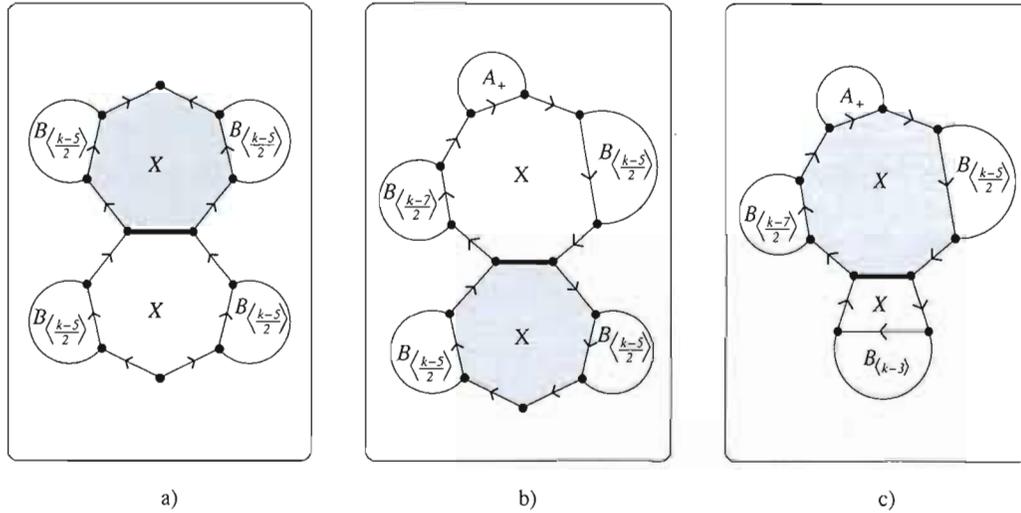


Figure 4.4 – Espèces isomorphes à $P_2^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)$ en a), à $X^2 A_+ B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^3$ en b) et à $X A_+^2 B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}$ en c)

distingué satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\alpha_p^{\diamond} = P_2^{\text{bic}}(X, A) + X A_+ A + P_2^{\text{bic}}(X^2, 1) + X^2 A_+ + X A_+^2. \quad (4.13)$$

En appliquant la formules d'addition de P_2^{bic} aux deux théorèmes précédents, on obtient les corollaires suivants.

Corollaire 138. Soit $k \geq 7$ un entier impair. Soient les coefficients définis par les équations suivantes et nuls si un de leurs indices n'est pas un entier naturel :

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 0} c_m^{(\ell)} X^m &= \left(B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} \right)^\ell, \\ \sum_{m \geq 0} d_m^{(\ell)} X^m &= \left(X A_+ B_{\langle \frac{k-3}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)^\ell, \\ \sum_{m \geq 0} f_m^{(\ell)} X^m &= \left(B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)^\ell, \\ \sum_{m \geq 0} g_m^{(\ell)} X^m &= \left(X A_+ B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} \right)^\ell, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m \geq 0} h_m^{(\ell)} X^m &= \left(X^2 A_+ B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}^3 B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} \right)^\ell, \\ \sum_{m \geq 0} i_m^{(\ell)} X^m &= \left(X A_+^2 B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} \right)^\ell.\end{aligned}$$

On omettra l'exposant s'il est égal à 1. L'espèce $a_p^\diamond = a_p^\diamond(X)$ des 2-arbres k -gonaux, extéplanaires, sans sommets de degré supérieur à 3 et pointés en une arête d'un k -gone distingué satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$a_p^\diamond = 1 + \sum_{m \geq 1} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 0} \beta_m^2 P_2^{\text{bic}}(X, X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^3 P_2^{\text{bic}}(X^2, X^m) \quad (4.14)$$

où

$$\begin{aligned}\beta_m^1 &= \frac{1}{2}(c_{m-1}^{(2)} c_{\frac{m-1}{2}}) + d_m + \frac{1}{2}(f_{m-2}^{(4)} - f_{\frac{m-2}{2}}^{(2)}) + h_m + i_m, \\ \beta_m^2 &= c_m, \\ \beta_m^3 &= f_m^{(2)}.\end{aligned}$$

Corollaire 139. L'espèce $a_p^\diamond = a_p^\diamond(X)$ des 2-arbres pentagonaux (i.e. 5-gonaux), extéplanaires, sans sommets de degré supérieur à 3 et pointés en une arête d'un pentagone distingué satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$a_p^\diamond = 2X^2 + \sum_{m \geq 3} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 0} \beta_m^2 P_2^{\text{bic}}(X, X^m) + P_2^{\text{bic}}(X^2, 1), \quad (4.15)$$

où

$$\begin{aligned}\beta_m^1 &= \frac{1}{2}(5a_{m-1}^{(2)} - a_{\frac{m-1}{2}}) - 3a_{m-1} + a_{m-2}, \\ \beta_m^2 &= a_m.\end{aligned}$$

4.2.1 Énumération des classes diédrales admissibles sur \mathcal{A} pour $k \geq 5$ impair

Notation 132. Notons $\text{Pal}(d, n, m)$, le nombre de palindromes admissibles de longueur d impaire et de poids X^m tels que leur lettre centrale sont de hauteur n .

Notons que la seule lettre de hauteur 0 est de poids 1. De plus, un palindrome admissible de longueur d impaire et de poids X^m tel que sa lettre centrale est de hauteur 0 est décrit par un type de $B_{\langle \frac{d-3}{2} \rangle}$ -structures de poids $X^{\frac{m}{2}}$, car ces première et dernière lettres doivent être aussi des arêtes de degré 0. On a donc la proposition suivante.

Proposition 140. Soit $d \geq 3$ impair. Alors,

$$\text{Pal}(1, 0, m) = [X^m] 1, \quad (4.16)$$

$$\text{Pal}(d, 0, m) = [X^{\frac{m}{2}}] B_{\langle \frac{d-3}{2} \rangle}. \quad (4.17)$$

Notons que le seul mot admissible de longueur 1 possède une lettre de hauteur 0. La lettre centrale a de hauteur 1 d'un palindrome est définie par un type de $B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}$ -structures car $a = \bar{a}$, donc les arêtes adjacentes au sommet opposé à l'arête distinguée sont de degré 1. De plus, si le palindrome est de longueur $d \geq 5$ impair, il est donc défini par un type de $B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} B_{\langle \frac{d-5}{2} \rangle}$ -structures puisque la première lettre, la dernière et celles adjacentes à la lettre centrale doivent être de hauteur 0. Ce qui implique la proposition suivante.

Proposition 141. Soit $k, d \geq 5$ impairs. Alors,

$$\text{Pal}(1, 1, m) = 0, \quad (4.18)$$

$$\text{Pal}(3, 1, m) = [X^{\frac{m-1}{2}}] B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}, \quad (4.19)$$

$$\text{Pal}(d, 1, m) = [X^{\frac{m-1}{2}}] B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} B_{\langle \frac{d-5}{2} \rangle}. \quad (4.20)$$

Notation 133. Notons $\text{pal}(d, n, m)$, le nombre de palindromes primitifs admissibles de longueur d impaire et de poids X^m tels que la hauteur de leur lettre centrale est n .

Notation 134. Notons $\pi(d, n, m)$, le nombre de classes diédrales primitives, admissibles et plaindromiques possédant un palindrome primitif admissible de longueur d impaire et de poids X^m tel que la hauteur de sa lettre centrale est n .

Les racines primitives de longueur i des palindromes comptés par $\text{Pal}(d, n, m)$ sont comptés par $\text{pal}(i, n, m/j)$ où $i \cdot j = d$. Ainsi, on obtient la première équation de la proposition suivante, la deuxième étant obtenue par inversion de Möbius. La troisième est obtenue par le fait qu'une classe diédrale, palindromique et primitive de mots de longueur impaire ne possède qu'un seul palindrome.

Proposition 142. Soit d impair. Alors,

$$\text{Pal}(d, n, m) = \sum_{i \cdot j = d} \text{pal}(i, n, \frac{m}{j}), \quad (4.21)$$

$$\text{pal}(d, n, m) = \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) \text{Pal}(i, n, \frac{m}{j}), \quad (4.22)$$

$$\pi(d, n, m) = \text{pal}(d, n, m) = \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) \text{Pal}(i, n, \frac{m}{j}). \quad (4.23)$$

Notation 135. Notons $\text{Ma}(d, m)$, le nombre de mots admissibles de longueur d et de poids X^m .

Le seul mot admissible de longueur 1 est l'arête de degré 0. Les mots admissibles de longueur $d \geq 2$ commençant par la lettre associée à l'arête de degré 0 sont en bijection avec les types de $B_{(d-1)}$ -structures, les mots admissibles de longueur d se terminant par la lettre associée à une arête de degré 0 le sont aussi. Les mots admissibles de longueur d commençant et se terminant ainsi le sont avec les types de $B_{(d-2)}$ -structures. On a donc la proposition suivante.

Proposition 143. Soit $d \geq 2$ un entier. Alors,

$$\text{Ma}(1, m) = [X^m] 1, \quad (4.24)$$

$$\text{Ma}(d, m) = [X^m] (2B_{(d-1)} - B_{(d-2)}). \quad (4.25)$$

Notation 136. Notons $\lambda(d, m)$, le nombre de classes circulaires primitives de mots admissibles de longueur d et de poids X^m .

À chaque classe circulaire ε de cardinalité i de mots de longueur d et de poids X^m on peut associer la classe circulaire des racines primitives des mots de ε qui, elles, sont

de longueur i et de poids $X^{\frac{m}{j}}$ où $i \cdot j = d$. Ce qui donne la première équation de la proposition suivante, la deuxième étant obtenue par inversion de Möbius.

Proposition 144. Soit d un entier strictement positif. Alors,

$$\text{Ma}(d, m) = \sum_{i \cdot j = d} i \lambda(i, \frac{m}{j}), \quad (4.26)$$

$$\lambda(d, m) = \frac{1}{d} \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) \text{Ma}(i, \frac{m}{j}). \quad (4.27)$$

Notation 137. Notons $\sigma(d, m)$, le de nombre classes diédrales, gauches et primitives de mots admissibles de longueur d et de poids X^m .

Comme chaque classe diédrale, palindromique et primitive est l'union d'une seule classe circulaire primitive tandis que chaque classe diédrale, gauche et primitive est l'union de deux classes circulaires primitives, on obtient le résultat suivant.

Proposition 145. Soit d impair. Alors,

$$\lambda(d, m) = 2\sigma(d, m) + \text{pal}(d, m), \quad (4.28)$$

$$\sigma(d, m) = \frac{\lambda(d, m) - \text{pal}(d, m)}{2}. \quad (4.29)$$

Comme les espèces isomorphes aux types de A_p^\diamond -structures associés aux différentes classes diérales demeurent les mêmes que celles du théorème 106 du chapitre 3, on a le théorème suivant.

Théorème 146. Soit k impair. Le développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux extérplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 pointés en un k -gone est donné par

$$A_p^\diamond = \sum_{n=0}^1 \sum_{m \geq 0} \sum_{i \cdot j = k} \pi(i, n, 2m + n) X P_{2j}^{\text{bic}}(X^n, X^m) \quad (4.30)$$

$$+ \sum_{m \geq 0} \sum_{i \cdot j = k} \sigma(i, m) X C_j(X^m). \quad (4.31)$$

Notons que $X P_2^{\text{bic}}(X^n, X^m) = P_2^{\text{bic}}(X^{n+1}, X^m)$. On obtient les deux théorèmes suivants en appliquant le théorème de dissymétrie.

Théorème 147. Soit $k \geq 7$ un entier impair. Soient les coefficients définis par les équations suivantes et nuls si un de leurs indices n'est pas un entier naturel :

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 0} f_m^{(\ell)} X^m &= \left(B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle} \right)^\ell, \\ \sum_{m \geq 0} g_m^{(\ell)} X^m &= \left(X A_{+B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}} B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} \right)^\ell, \\ \sum_{m \geq 0} i_m^{(\ell)} X^m &= \left(X A_{+B_{\langle \frac{k-5}{2} \rangle}}^2 B_{\langle \frac{k-7}{2} \rangle} \right)^\ell. \end{aligned}$$

On omettra l'exposant s'il est égale à 1. L'espèce $a_p = a_p(X)$ des 2-arbres k -gonaux, exterplanaires, sans sommets de degré supérieur à 3 satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned} a_p &= 1 + \sum_{n=0}^1 \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i+j=k \\ j \neq 1}} \pi(i, n, 2m+n) X P_2^{\text{bic}}(X^n, X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i+j=k \\ j \neq 1}} \sigma(i, m) X C_j(X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 3} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 2} \beta_m^2 P_2^{\text{bic}}(1, X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 1} \beta_m^3 P_2^{\text{bic}}(X, X^m) + \sum_{m \geq 2} \beta_m^4 P_2^{\text{bic}}(X^2, X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 2} \beta_m^5 C_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta_m^6 P_4^{\text{bic}}(X, X^m) \end{aligned} \quad (4.32)$$

où

$$\begin{aligned} \beta_m^1 &= \sigma(k, m-1) - \frac{1}{4} f_{m-2}^{(4)} - \frac{1}{4} f_{\frac{m-2}{2}}^{(2)} + \frac{1}{2} f_{\frac{m-2}{4}} + g_m^{(2)} - g_{\frac{m}{2}} - i_m, \\ \beta_m^2 &= \beta_m^5 = g_m + \frac{1}{2} (f_{m-1}^{(2)} - f_{\frac{m-1}{2}}), \\ \beta_m^3 &= \pi(k, 0, 2m), \\ \beta_m^4 &= \pi(k, 1, 2m+1) - \frac{1}{2} (f_m^{(2)} + f_{\frac{m}{2}}), \\ \beta_m^6 &= f_m. \end{aligned}$$

Théorème 148. L'espèce $a_p = a_p(X)$ des 2-arbres pentagonaux (i.e. 5-gonaux), extérioritaires, sans sommets de degré supérieur à 3 satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned} a_p &= 1 + \sum_{m \geq 4} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 2} \beta_m^2 P_2^{\text{bic}}(1, X^m) + \sum_{m \geq 1} \beta_m^3 P_2^{\text{bic}}(X, X^m), \quad (4.33) \\ &+ \sum_{m \geq 2} \beta_m^4 C_2(X^m) + P_4^{\text{bic}}(X, 1) + X P_{10}^{\text{bic}}(1, 1), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \beta_m^1 &= a_{m-2}^{(2)} + \frac{3}{2} a_{m-1} - \frac{1}{2} a_{m-1}^{(2)} - 2a_{m-2} - \frac{1}{2} a_{\frac{m-1}{2}} - a_{\frac{m-2}{2}}, \\ \beta_m^2 &= \beta_m^4 = a_{m-1}, \\ \beta_m^3 &= a_m. \end{aligned}$$

4.3 Développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux extérioritaires sans sommets de degré supérieur à 3 où k est pair

Théorème 149. Soit $k \geq 6$ un entier pair. L'espèce $a_p^- = a_p^-(X)$ des 2-arbres k -gonaux extérioritaires sans sommets de degré supérieur à 3 pointés en une arête satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned} a_p^-(X) &= 1 + P_2^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-2}{2} \rangle} \right) + \sum_{n \geq 2} \left[\frac{n}{2} \right] P_2^{\text{bic}} \left(X^n, B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}^2 B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-2} \right) \quad (4.34) \\ &+ \sum_{n \geq 1} P_4^{\text{bic}} \left(X^n, B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-1} \right). \end{aligned}$$

La preuve est similaire à celle des 2-arbres k -gonaux extérioritaires pointés en une arête, à l'exception que les structures de chaque côté des k -gones appartenant à l'échelle de l'arête distinguée sont définies selon les degrés de ses deux arêtes parallèles à l'arête distinguée. Si les deux arêtes sont de degré 1, ces structures sont des $B_{\langle \frac{k-2}{2} \rangle}$ -structures. Si une des deux est de degré 2, ces structures sont des $B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}$ -structures puisque les arêtes du k -gone adjacentes à celles de degré 2 doivent être de degré 1. De même, si les deux sont de degré 2, ces structures seront des $B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}$ -structures. Rappelons que $\left[\frac{n}{2} \right]$ représente le nombre de positions de l'arête distinguée dans son échelle de hauteur n

sans que celle-ci soit située en son centre. La figure 4.5 illustre deux sous-espèces de \mathcal{A}_p^- -structures.

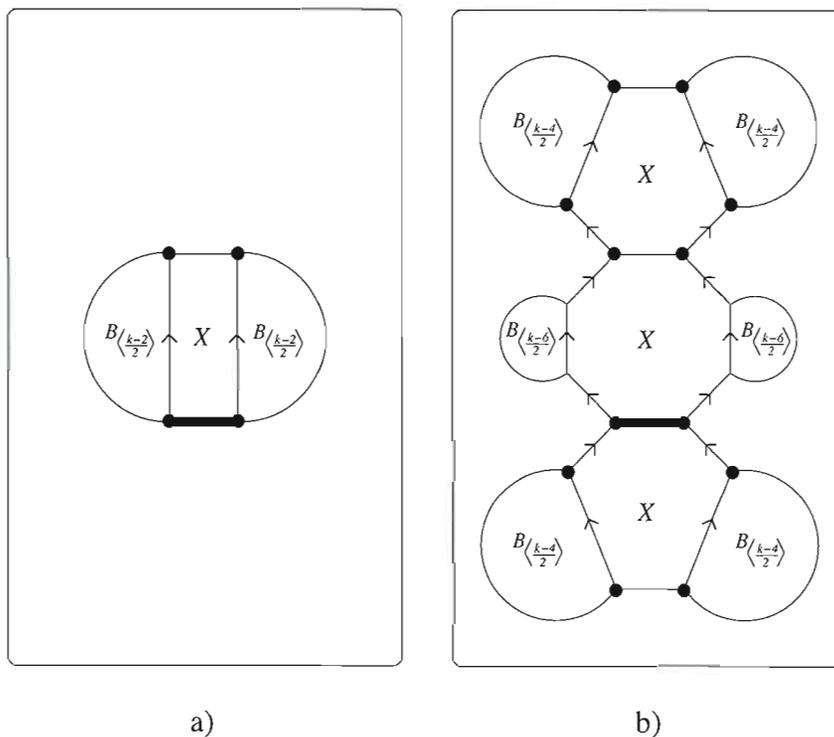


Figure 4.5 – Espèces isomorphes à $P_2^{\text{bic}}\left(X, B_{\langle \frac{k-2}{2} \rangle}\right)$ en a) et à $P_2^{\text{bic}}\left(X^3, B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}^2 B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}\right)$ en b)

En utilisant les formules d'addition pour P_2^{bic} et P_4^{bic} et le théorème précédent, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 150. Soit $k \geq 6$ un entier pair. Soient les coefficients définis par les équations suivantes et nuls si un de leurs indices n'est pas un entier naturel :

$$\sum_{m \geq 0} b_m^{(\ell)} X^m = \left(B_{\langle \frac{k-2}{2} \rangle} \right)^\ell,$$

$$\sum_{m \geq 0} d_{n,m}^{(\ell)} X^m = \left(B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}^2 B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-2} \right)^\ell,$$

$$\sum_{m \geq 0} g_{n,m}^{(\ell)} X^m = \left(B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-1} \right)^\ell.$$

On omettra l'exposant supérieur s'il est égal à 1. L'espèce $a_p^- = a_p^-(X)$ des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 pointés en une arête satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned} a_p^-(X) &= 1 + \sum_{m \geq 2} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 1} \beta_m^2 C(X^m) \\ &+ \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \beta_{n,m}^3 P_2^{\text{bic}}(X^n, X^m) + \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} \beta_{n,m}^4 P_4^{\text{bic}}(X^n, X^m), \end{aligned} \quad (4.35)$$

où

$$\begin{aligned} \beta_m^1 &= \frac{1}{2}(b_{m-1}^{(2)} - b_{\frac{m-1}{2}}) + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (d_{n,m-n}^{(2)} - d_{n,\frac{m-n}{2}}) \\ &+ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4} g_{n,m-2n}^{(4)} - \frac{3}{4} g_{n,\frac{m-2n}{2}}^{(2)} + \frac{1}{2} g_{n,\frac{m-2n}{4}}, \\ \beta_m^2 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} (g_{n,m-n}^{(2)} - g_{n,\frac{m-n}{2}}), \\ \beta_{n,m}^3 &= \chi(n=0) \cdot \left(\sum_{\ell \geq 1} \frac{1}{2} (g_{\ell,m-\ell}^{(2)} - g_{\ell,\frac{m-\ell}{2}}) \right) + \chi(n=1) \cdot b_m + \chi(n \geq 2) \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor d_{n,m} \\ &+ \chi(n \geq 2) \cdot \frac{1}{2} (g_{\frac{n}{2},m}^{(2)} - g_{\frac{n}{2},\frac{m}{2}}), \\ \beta_{n,m}^4 &= g_{n,m}. \end{aligned}$$

Théorème 151. Soit $k \geq 6$ un entier pair. L'espèce $a_p^\diamond = a_p^\diamond(X)$ des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 pointés en une arête d'un k -gone distingué satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$a_p^\diamond(X) = P_2^{\text{bic}} \left(X, B_{\langle \frac{k-2}{2} \rangle} \right) + \sum_{n \geq 2} n P_2^{\text{bic}} \left(X^n, B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}^2 B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-2} \right). \quad (4.36)$$

La preuve est similaire à celle des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 pointés en une arête d'un k -gone distingué. Rappelons que n compte le nombre de positions possibles d'un polygone distingué et de son arête distinguée

dans son échelle de longueur n .

En utilisant la formule d'addition pour P_2^{bic} et le théorème précédent, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 152. Soit $k \geq 6$ un entier pair. Soient les coefficients définis par les équations suivantes et nuls si un de leurs indices n'est pas un entier naturel :

$$\sum_{m \geq 0} b_m^{(\ell)} X^m = \left(B_{\langle \frac{k-2}{2} \rangle} \right)^\ell,$$

$$\sum_{m \geq 0} d_{n;m}^{(\ell)} X^m = \left(B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}^2 B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-2} \right)^\ell.$$

On omettra l'exposant s'il est égal à 1. L'espèce $\mathcal{A}_p^\diamond = \mathcal{A}_p^\diamond(X)$ des 2-arbres k -gonaux extéplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 pointés en une arête d'un k -gone distingué satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\mathcal{A}_p^\diamond(X) = \sum_{m \geq 2} \beta_m^1 X^m + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \beta_{n,m}^2 P_2^{\text{bic}}(X^n, X^m) \quad (4.37)$$

où

$$\beta_m^1 = \frac{1}{2}(b_{m-1}^{(2)} - b_{\frac{m-1}{2}}) + \sum_{n \geq 2} \frac{n}{2}(d_{n;m-n}^{(2)} - d_{n;\frac{m-n}{2}}),$$

$$\beta_{n,m}^2 = \chi(n=1) \cdot b_m + \chi(n \geq 2) n d_{n,m}.$$

4.3.1 Énumération des classes diédrales admissibles sur \mathcal{A} pour $k \geq 6$ pair

La même formule de $\text{Pal}(d, 0, m)$ demeure valide pour k pair où d est impair. Notons que le seul mot admissible de longueur 1 possède une lettre de hauteur 0. La lettre centrale a de hauteur n d'un palindrome est définie par un type de $B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-1} B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}$ -structures car $a = \bar{a}$, les arêtes adjacentes aux arêtes parallèles à l'arête distinguée étant donc de degré 1 sauf celles incidentes à la dernière de l'échelle qui peuvent être de degré 2. De plus, si le palindrome est de longueur $d \geq 5$ impaire il est donc défini par un type de $B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-1} B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle} B_{\langle \frac{d-5}{2} \rangle}$ -structures puisque la première lettre, la dernière et celles adjacentes à la lettre centrale doivent être de hauteur 0. Ce qui implique la proposition

suivante.

Proposition 153. Soit $d \geq 5$ impair, $n \geq 1$ et $k \geq 6$ pair. Alors,

$$\text{Pal}(1, n, m) = 0, \quad (4.38)$$

$$\text{Pal}(3, n, m) = \left[X^{\frac{m-n}{2}} \right] B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-1} B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}, \quad (4.39)$$

$$\text{Pal}(d, n, m) = \left[X^{\frac{m-n}{2}} \right] B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-1} B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle} B_{\langle \frac{d-5}{2} \rangle}. \quad (4.40)$$

Les formules donnant $\text{pal}(d, n, m)$ et $\pi(d, n, m)$ demeurent valides pour k pair.

Notation 138. Notons $\text{Pal}(d, m)$ le nombre de palindromes admissibles de longueur d et de poids X^m .

En classant les palindromes de longueur impaire par la hauteur de leur lettre centrale, on a la proposition suivante.

Proposition 154. Soit d impair. Alors,

$$\text{Pal}(d, m) = \sum_{n \geq 0} \text{Pal}(d, n, m). \quad (4.41)$$

Un palindrome admissible de longueur d paire et de poids X^m est de la forme $u\bar{u}$ tel que u est un mot de longueur $d/2$ et de poids $X^{\frac{m}{2}}$. Comme la première et la dernière lettre de u doivent être des arêtes de degré 0, un tel palindrome est défini par un type de $B_{\langle \frac{d-4}{2} \rangle}$ -structures si $d \geq 4$ ou est constitué de deux arêtes de degré 0 si $d = 2$. On a donc la proposition suivante.

Proposition 155. Soit $d \geq 4$ pair, $n \geq 1$. Alors,

$$\text{Pal}(2, m) = [X^m] 1, \quad (4.42)$$

$$\text{Pal}(d, m) = \left[X^{\frac{m}{2}} \right] B_{\langle \frac{d-4}{2} \rangle}. \quad (4.43)$$

Notation 139. Notons $\text{pal}(d, m)$, le nombre de palindromes primitifs admissibles de longueur d et de poids X^m .

Notation 140. Notons $\pi(d, m)$, le nombre de classes diédrales, palindromiques, admissibles et primitives de mots de longueur d et de poids X^m .

À chaque palindrome de longueur d , on peut lui associer sa racine primitive de longueur i qui est un palindrome primitif pour obtenir la première équation de la pro-

position suivante. La seconde est obtenue par inversion de Möbius. La troisième l'est par le fait qu'une classe diédrale primitive de longueur d contient $1 + \chi(d \text{ est pair})$ palindromes primitifs. On a donc la proposition suivante.

Proposition 156. Soit d un entier naturel non nul. Alors,

$$\text{Pal}(d, m) = \sum_{i \cdot j = d} \text{pal}(i, \frac{m}{j}), \quad (4.44)$$

$$\text{pal}(d, m) = \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) \text{Pal}(i, \frac{m}{j}), \quad (4.45)$$

$$\pi(d, m) = \frac{1}{1 + \chi(d \text{ est pair})} \text{pal}(d, m). \quad (4.46)$$

Notation 141. Notons $\text{Dext}(d, n_1, n_2, m)$, le nombre de dexterpalindromes admissibles de longueur d paire et de poids X^m tels que leur première lettre est de hauteur n_1 et que la lettre centrale de leur palindrome est de hauteur n_2 .

Si la première lettre d'un dexterpalindrome admissible est de hauteur 0 alors son palindrome n'est pas admissible puisque sa première et sa dernière lettre peuvent avoir une hauteur supérieure à 1. Par contre, si la première lettre est de hauteur $n_1 > 0$ alors son palindrome est admissible. Ce qui donne la proposition suivante.

Proposition 157. Soient $d_1 \geq 2, d_2 \geq 4, d_3 \geq 6$ et $k \geq 6$ des entiers pairs. Soient $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$ des entiers. Alors,

$$\text{Dext}(d_1, 0, 0, m) = [X^{\frac{m}{2}}] B_{\langle \frac{d_1-2}{2} \rangle}, \quad (4.47)$$

$$\text{Dext}(2, 0, n_2, m) = \text{Dext}(2, n_2, 0, m) = [X^{\frac{m-n_2}{2}}] B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n_2-1} B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}, \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \text{Dext}(d_2, 0, n_2, m) &= [X^{\frac{m-n_2}{2}}] B_{\langle \frac{d_2-4}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n_2-1} B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle} \\ &= \text{Dext}(d_2, n_2, 0, m), \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\text{Dext}(2, n_1, n_2, m) = 0, \quad (4.50)$$

$$\text{Dext}(4, n_1, n_2, m) = [X^{\frac{m-n_1-n_2}{2}}] B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n_1+n_2-2} B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}^2, \quad (4.51)$$

$$\text{Dext}(d_3, n_1, n_2, m) = [X^{\frac{m-n_1-n_2}{2}}] B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n_1+n_2-2} B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}^2 B_{\langle \frac{d_3-6}{2} \rangle}. \quad (4.52)$$

Notation 142. Notons $\text{dext}(d, n_1, n_2, m)$, le nombre de dexterpalindromes primitifs admissibles de longueur d paire et de poids X^m tels que leur première lettre est de

hauteur n_1 et que la lettre centrale de leur palindrome est de hauteur n_2 .

Notation 143. Notons $\delta(d, n_1, n_2, m)$, le nombre de classes diédrales, primitives, admissibles et dexterpalindromiques contenant un dexterpalindrome de longueur d paire et de poids X^m tels que sa première lettre est de hauteur n_1 et que la lettre centrale de son palindrome est de hauteur n_2 .

Comme un dexterpalindrome dont la première lettre a est différente de la lettre centrale b de son palindrome, où $a \neq b$, ne peut être qu'une puissance impaire d'un palindrome dont la première lettre est a et dont la lettre centrale de son palindrome est b , on obtient la première équation de la proposition suivante. La deuxième est obtenue par inversion de Möbius et par le fait qu'une classe comptée par $\delta(d, n_1, n_2, m)$ ne contient qu'un seul dexterpalindrome compté par $\text{dext}(d, n_1, n_2, m)$.

Proposition 158. Soient d pair et $n_1 \geq 0$ et $n_2 \geq 0$ deux entiers différents. Alors,

$$\text{Dext}(d, n_1, n_2, m) = \sum_{\substack{i+j=d \\ j \text{ impair}}} \text{dext}(i, n_1, n_2, \frac{m}{j}), \quad (4.53)$$

$$\text{dext}(d, n_1, n_2, m) = \delta(d, n_1, n_2, m) = \sum_{\substack{i+j=d \\ j \text{ impair}}} \mu(j) \text{Dext}(i, n_1, n_2, \frac{m}{j}). \quad (4.54)$$

Notation 144. Notons $\text{Dext}(d, n, m)$, le nombre de dexterpalindromes admissibles de longueur d paire et de poids X^m tels que leurs premières lettres sont de hauteur n .

Notation 145. Notons $\text{dext}(d, n, m)$, le nombre de dexterpalindromes primitifs admissibles de longueur d paire et de poids X^m tels que leurs premières lettres sont de hauteur n .

Notation 146. Notons $\delta(d, n, m)$, le nombre de classes diédrales, primitives, dexterpalindromiques et admissibles contenant un dexterpalindrome de longueur d paire et de poids X^m tel que sa première lettre est de hauteur n .

La proposition suivante peut être obtenue par le fait qu'à chaque palindrome admissible de longueur impaire et de la forme $pa\bar{p}$ où a est sa lettre centrale on peut lui associer le dexterpalindrome admissible $a\bar{p}p$.

Proposition 159. Soit d impair. Alors,

$$\text{Dext}(d, n, m) = \text{Pal}(d, n, m). \quad (4.55)$$

La proposition est obtenue à partir des définitions de $\text{Dext}(d, n, m)$ et $\text{Dext}(d, n_1, n_2, m)$.

Proposition 160. Soit d pair. Alors,

$$\text{Dext}(d, n, m) = \sum_{\ell \geq 0} \text{Dext}(d, n, \ell, m). \quad (4.56)$$

La première équation de la proposition suivante peut être obtenue par le fait que les racines primitives des dexterpalindromes comptés par $\text{Dext}(d, n, m)$ de longueur i sont comptées par $\text{Dext}(d, n, \frac{m}{j})$ où $i \cdot j = k$. La deuxième l'est par inversion Möbius.

Proposition 161. Soit d un entier positif. Alors,

$$\text{Dext}(d, n, m) = \sum_{i \cdot j = d} \text{dext}(i, n, \frac{m}{j}), \quad (4.57)$$

$$\text{dext}(d, n, m) = \sum_{i \cdot j = d} \mu(j) \text{Dext}(i, n, \frac{m}{j}). \quad (4.58)$$

Notons qu'une classe diédrale comptée par $\delta(d, n, n, m)$ ne contient que deux dexterpalindromes comptés par $\text{dext}(d, n, n, m)$. De plus, les racines primitives de longueur i tel que $i \cdot j = d$ des dexterpalindromes comptés par $\text{dext}(d, n, n, m)$ sont comptés par $\text{Dext}(i, n, n, \frac{m}{j})$ si j est impair et par $\text{dext}(i, n, \frac{m}{j})$ si j est pair. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 162. Soient k et d des entiers pairs. Soit n un entier naturel. Alors,

$$\text{Dext}(d, n, n, m) = \sum_{\substack{i \cdot j = d \\ j \text{ impair}}} \text{dext}(i, n, n, \frac{m}{j}) + \sum_{\substack{i \cdot j = d \\ j \text{ pair}}} \text{dext}(i, n, \frac{m}{j}), \quad (4.59)$$

$$\text{dext}(d, n, n, m) = \sum_{\substack{i \cdot j = d \\ j \text{ impair}}} \mu(j) \left(\text{Dext}(i, n, n, \frac{m}{j}) \right. \quad (4.60)$$

$$\left. - \sum_{\substack{\ell \cdot h = i \\ h \text{ pair}}} \text{dext}(\ell, n, \frac{m}{hj}) \right),$$

$$\delta(d, n, n, m) = \frac{1}{2} \text{dext}(d, n, n, m). \quad (4.61)$$

Notation 147. Notons $\delta(d, m)$, le nombre de classes diédrales, primitives, dexterpalindromiques et admissibles contenant un dexterpalindrome de longueur d paire et de poids X^m .

Comme les ensembles comptés par $\delta(d, n_1, n_2, m)$ et par $\delta(d, n_2, n_1, m)$ sont confondus, on obtient la proposition suivante.

Proposition 163. Soient k et d des entiers pairs non nuls. Alors,

$$\delta(d, m) = \sum_{n_1 \geq 0} \sum_{n_2 \geq n_1} \delta(d, n_1, n_2, m).$$

Les formules donnant les nombres $\lambda(d, n, m)$ et $\text{Ma}(d, m)$ demeurent les mêmes pour k pair ou impair. Par contre, celles impliquant $\sigma(d, m)$ diffèrent selon la parité de k . Notons qu'une classe diédrale primitive de mots de longueur impaire est soit gauche soit palindromique. Une classe diédrale primitive de mots de longueur paire est exclusivement gauche, palindromique ou dexterpalindromique. De plus, seules les classes diédrales gauches sont l'union de deux classes circulaires, les autres n'en étant celle que d'une seule. On obtient la proposition suivante.

Proposition 164. Soit d un entier naturel non nul. Alors,

$$\lambda(d, m) = 2\sigma(d, m) + \pi(d, m) + \chi(d \text{ pair})\delta(d, m), \quad (4.62)$$

$$\sigma(d, m) = \frac{1}{2}(\lambda(d, m) - \pi(d, m) - \chi(d \text{ pair})\delta(d, m)). \quad (4.63)$$

Comme les espèces isomorphes aux types de \mathcal{A}_p^\diamond -structures associées aux différentes classes diédrales demeurent les mêmes que celles du chapitre 3, on a le théorème suivant.

Théorème 165. Soit $k \geq 6$ pair. Le développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux exterplanaires pointés en un k -gone est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p^\diamond &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i, j = k \\ i \text{ impair}}} \pi(i, n, 2m + n) X P_{2j}^{\text{bic}}(X^n, X^m, 1) \\ &\quad + \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{i, j = k \\ i \text{ pair}}} \pi(i, 2n) X P_{2j}^{\text{bic}}(1, X^n, 1) \\ &\quad + \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq \ell} \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{i, j = k \\ i \text{ pair}}} \delta(i, \ell, m, 2n + \ell + m) X P_{2j}^{\text{bic}}(X^\ell, X^n, X^m) \\ &\quad + \sum_{m \geq 0} \sum_{i, j = k} \sigma(i, m) X C_j(X^m). \end{aligned} \quad (4.64)$$

En appliquant le théorème de dissymétrie on obtient le résultat suivant.

Théorème 166. Soit $k \geq 6$ un entier pair. Soient les coefficients définis par les équations suivantes et nuls si un de leurs indices n'est pas un entier naturel :

$$\sum_{m \geq 0} d_{n;m}^{(\ell)} X^m = \left(B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle}^2 B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-2} \right)^\ell,$$

$$\sum_{m \geq 0} g_{n;m}^{(\ell)} X^m = \left(B_{\langle \frac{k-4}{2} \rangle} B_{\langle \frac{k-6}{2} \rangle}^{n-1} \right)^\ell.$$

On omettra l'exposant s'il est égal à 1. L'espèce $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_p(X)$ des 2-arbres k -gonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3 satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p(X) &= 1 + \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i+j=k \\ i \text{ impair}}} \pi(i, n, 2m+n) X P_{2j}^{\text{bic}}(X^n, X^m, 1) \quad (4.65) \\ &+ \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{i+j=k \\ i \text{ pair} \\ j \neq 1}} \pi(i, 2n) X P_{2j}^{\text{bic}}(1, X^n, 1) \\ &+ \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq \ell} \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{i+j=k \\ i \text{ pair} \\ j \neq 1}} \delta(i, \ell, m, 2n + \ell + m) X P_{2j}^{\text{bic}}(X^\ell, X^n, X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i+j=k \\ j \neq 1}} \sigma(i, m) X C_j(X^m) \\ &+ \sum_{m \geq 4} \beta_m^1 X^m + \sum_{m \geq 1} \beta_m^2 C_2(X^m) \\ &+ \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \beta_{n;m}^3 P_2^{\text{bic}}(X^n, X^m) + \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} \beta_{n;m}^4 P_4^{\text{bic}}(X^n, X^m), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \beta_m^1 &= \sigma(k, m-1) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4} g_{n;m-2n}^{(4)} - \frac{3}{4} g_{n;\frac{m-2n}{2}}^{(2)} + \frac{1}{2} g_{n;\frac{m-n}{4}} \\ &- \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (d_{n;m-n}^{(2)} - d_{n;\frac{m-n}{2}}), \\ \beta_m^2 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} (g_{n;m-n}^{(2)} - g_{n;\frac{m-n}{2}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{n,m}^3 &= \chi(n=0) \cdot \left(\sum_{\ell \geq 1} \frac{1}{2} (g_{\ell, m-\ell}^{(2)} - g_{\ell, \frac{m-\ell}{2}}) \right) + \chi(n=1) \cdot \pi(k, 2m) \\
&+ \chi(n \geq 2) \cdot \frac{1}{2} (g_{\frac{n}{2}; m}^{(2)} - g_{\frac{n}{2}; \frac{m}{2}}) - \chi(n \geq 2) \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor d_{n,m} \\
&+ \sum_{\substack{\ell+p=n-1 \\ p \geq \ell}} \delta(k, \ell, p, 2m+n-1), \\
\beta_{n,m}^4 &= g_{n,m}.
\end{aligned}$$

CHAPITRE V

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES POLYGONAUX EXTERPLANAIRES

Nous procédons de manière similaire au cas où k est pair dans le chapitre 3. Les différences principales étant que ces 2-arbres exterplanaires sont constitués de polygones pouvant posséder des tailles différentes et que les structures seront étiquetées en leur sommets. Cet étiquetage a été choisi puisqu'il est plus naturel pour une classe de graphes, les 2-arbres polygonaux exterplanaires correspondant aux graphes exterplanaires 2-connexes. De plus, l'étiquetage en des polygones ne serait pas à lui seul suffisant pour obtenir une espèce de structures. Mentionnons également que cette classe de 2-arbres correspond à celle des partitions de polygones par des diagonales qui ne s'intersectent pas. L'énumération des types d'isomorphie de telles partitions a été effectuée dans (Read, 1978).

5.1 Définitions

Un 2-arbre polygonal consiste en un graphe 2-connexe formé de polygones liés par certaines de leurs arêtes de manière arborescente. En particulier, un 2-arbre k -gonal est un 2-arbre polygonal.

Définition 148. La classe \mathcal{A}_{pol} des 2-arbres polygonaux peut être définie de manière récursive comme étant la plus petite classe de graphes simples telle que

1. un graphe formé d'une arête est un élément de \mathcal{A}_{pol} ,
2. si, pour un $k \geq 3$, un graphe $G = (S, A)$ satisfait aux conditions suivantes :

- (a) G possède des sommets, notés x_1 à x_{k-2} , de degré 2,
 - (b) G possède des sommets x_0 et x_{k-1} , de degré au moins 2,
 - (c) x_i et x_j sont adjacents si $i + 1 \equiv j \pmod{k}$, pour $i = 0, \dots, k - 1$,
 - (d) $G - \{x_1, \dots, x_{k-2}\}$ appartient à \mathcal{A}_{pol} ,
- alors, G est dans \mathcal{A}_{pol} .

On obtient donc un 2-arbre polygonal à partir d'un autre en ajoutant un polygone ne possédant qu'une seule arête en commun avec le dernier.

Définition 149. Un graphe est dit *exterplanair* s'il admet un plongement dans le plan de telle sorte que tous ses sommets soient dans la face externe.

Notons que la classe des 2-arbres polygonaux exterplanaires coïncide avec celle des graphes 2-connexes exterplanaires.

Notation 150. Notons \mathcal{A}_{pol} , l'espèce de structures des 2-arbres polygonaux étiquetés en leurs sommets. De la même manière, notons \mathcal{A}_p , l'espèce des 2-arbres polygonaux exterplanaires étiquetés en leurs sommets.

Notation 151. Notons par A , l'espèce des 2-arbres exterplanaires pointés en une arête externe orientée dont le but est non étiqueté.

Proposition 167. L'espèce A des 2-arbres exterplanaires pointés en une arête externe orientée dont le but est non étiqueté est caractérisée par l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$A = X + L_{\geq 2}(A). \quad (5.1)$$

La proposition 167 est illustrée par la figure 5.1. Comme $L_{\geq 2}$ est asymétrique, A l'est aussi.

Notation 152. Soit c un entier naturel. Notons par $a_n^{(c)}$, les entiers tels que $A^c = \sum_{n \geq 0} a_n^{(c)} X^n$. On omettra l'exposant s'il est égal à 1. Par convention, $a_n^{(c)} = 0$ si n ou c n'est pas un entier naturel.

Proposition 168. Soit $c \geq 1$ et n des entiers naturels non nuls. Alors,

$$a_n^{(c)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < c \\ 1 & \text{si } n = c \\ \sum_{k=1}^{n-c} \sum_{i=1}^c \frac{i}{k} \binom{c}{i} \binom{n-c-1}{k-1} \binom{n+k-c}{k-i} & \text{si } n > c \end{cases} \quad (5.2)$$

Démonstration. On peut ajouter un compteur z de polygones à la série A pour obtenir la série

$$A(x, z) = x + \frac{zA^2(x, z)}{1 - A(x, z)}.$$

Posons

$$B = A(x, z) - x = \frac{(B + x)^2}{1 - (B + x)}.$$

Par inversion de Lagrange, pour $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} [z^k](B + x)^c &= [z^k]A^c(x, z) \\ &= \frac{1}{k}[z^{k-1}]((x + t)^c)' \cdot \left(\frac{t + x}{1 - (tx)}\right)^k \\ &= [z^{k-1}]\frac{1}{k} \sum_{i=1}^c i \binom{c}{i} t^{i-1} x^{c-i} \sum_{m \geq 0} \binom{k + m - 1}{k - 1} (t + x)^{2k+m} \\ &= [z^{k-1}] \sum_{i=1}^c \sum_{m \geq 0} \sum_{j=0}^{2k+m} \frac{i}{k} \binom{c}{i} \binom{k + m - 1}{k - 1} \binom{2k + m}{j} t^{i+j} x^{2k+m+c-j-i} \\ &= \sum_{i=1}^c \sum_{m \geq 0} \frac{i}{k} \binom{c}{i} \binom{k + m - 1}{k - 1} \binom{2k + m}{k - i} x^{2k+m+c-j-i}. \end{aligned}$$

Comme seul le coefficient de x^c dans $A^c(x, z)$ n'a pas de facteur z , pour $n \geq c + 1$, on a

$$[x^n]A^c(x, z) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^{n-c} \frac{i}{k} \binom{c}{i} \binom{n - c - 1}{k - 1} \binom{n + k - c}{k - i} z^k.$$

On obtient la formule 5.2 car $A(X, 1) = A$. □

Notation 153. Notons $\frac{A}{X}$, l'espèce des 2-arbres exterplanaires pointés en une arête externe orientée dont le but et la source sont non étiquetés. Notons également par $\frac{A^n}{X}$ l'espèce $\frac{A}{X} \cdot A^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Définition 154. Le graphe polygone-arête d'un 2-arbre polygonal t est le graphe dont les sommets sont les polygones et les arêtes de t et dont chaque arête indique l'incidence entre un polygone et une arête de t . On admettra qu'il est bicoloré en accordant une couleur aux polygones de t et une autre aux arêtes de t .

Théorème 169 (Théorème de dissymétrie pour les 2-arbres polygonaux exterplanaires). L'espèce A_p des 2-arbres polygonaux exterplanaires satisfait à l'isomorphisme d'es-

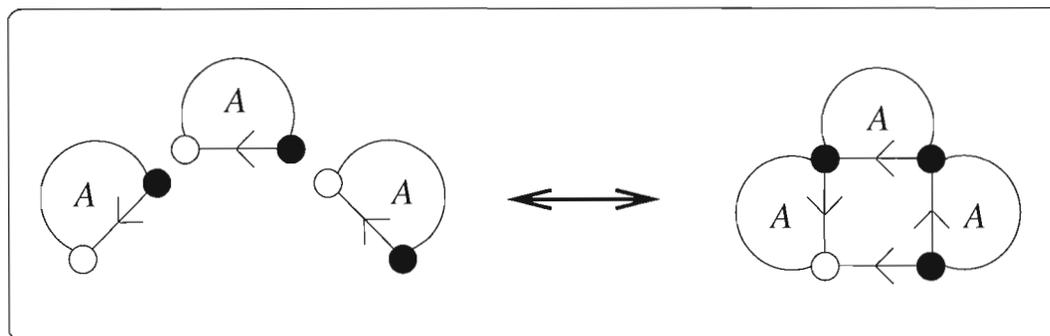


Figure 5.1 – Correspondance entre les listes de A -structures de longueur n et les A -structures dont l'arête orientée est celle d'un k -gone

pèces suivant :

$$a_p^- + a_p^\diamond = a_p + a_p^{\diamondsuit}, \quad (5.3)$$

où les exposants $-$, \diamond et \diamondsuit représentent respectivement le pointage en une arête, en un polygone et en un polygone ayant une arête distinguée.

Démonstration. À partir de la définition des 2-arbres polygonaux, on déduit que leur graphe polygone-arête est un arbre bicoloré dont les feuilles sont de la même couleur, celles-ci étant les arêtes de degré un du 2-arbre polygonal. En appliquant le théorème de dissymétrie des arbres bicolorés dont les feuilles sont de la même couleur sur les graphes k -gone-arête, on en déduit le résultat. \square

5.2 Développement moléculaire des 2-arbres polygonaux extérieurement

Pour décrire les espèces a_p^- et a_p^\diamond en fonction de A et $\frac{A}{X}$, nous aurons besoin de la notion de composition d'entier et de la hauteur d'une échelle d'un 2-arbre.

Définition 155. Une composition d'un entier positif n est une suite finie (n_1, \dots, n_k) d'entiers strictement positifs tels que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Chaque entier n_i d'une composition ξ est appelé une part de ξ .

Notation 156. Notons par $c(n)$ le nombre de compositions de n , un entier positif. Par convention, $c(n) = 0$ si n n'est pas un entier positif.

Pour $n \geq 1$, $c(n) = 2^{n-1}$. En effet, $c(1) = 1$, la seule composition de 1 étant celle d'une part de taille 1. De plus, on peut obtenir les compositions de n commençant par 1 en ajoutant 1 comme première part à une composition de $n - 1$. Celles commençant par une part de taille supérieure à 1 sont obtenues en ajoutant 1 à la première part d'une composition de $n - 1$. Ainsi, pour $n \geq 2$, $c(n) = 2c(n - 1)$.

Définition 157. Un couple de compositions non vides sur n est un couple de compositions dont chacune possède au moins une part et dont la somme de toutes les parts du couple est n .

Notation 158. Notons par $c^{(2)}(n)$ le nombre de couples de compositions non vides sur n .

Proposition 170. Soit n un entier strictement positif. Alors,

$$c^{(2)}(n) = (n - 1)c(n - 2)$$

Démonstration. Soit f la surjection entre les couples de compositions non vides sur n et les compositions de $n - 1$ définie par l'équation suivante :

$$f(((n_1, \dots, n_j), (n_{j+1}, \dots, n_\ell))) = (n_1, \dots, n_{j-1}, n_j + n_{j+1} - 1, n_{j+2}, \dots, n_\ell).$$

La fibre d'une composition (n_1, \dots, n_k) étant $\{((n_1, \dots, n_j + 1 - d), (d, n_{j+1}, \dots, n_j)) \mid 1 \leq j \leq k \text{ et } 1 \leq d \leq n_j\}$, celle-ci est de cardinalité $n - 1$, ce qui implique le résultat précédent. \square

Définition 159. La hauteur d'une échelle d'un 2-arbre associée à une arête a est le nombre d'arêtes de l'échelle non parallèles à a divisé par 2.

La hauteur est bien un entier puisque chaque k -gone de l'échelle, pour k pair, contribue pour $(k - 2)/2$ et $(k - 1)/2$ pour k impair.

Théorème 171. L'espèce $\mathcal{A}_p^- = \mathcal{A}_p^-(X)$ des 2-arbres polygonaux extérieurement pointés en une arête distinguée satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p^-(X) &= E_2(X) \\ &+ \sum_{n \geq 1} c(n)(X E_2(A^n) + E_2(X A^n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n \geq 1} c^{(2)}(n) X E_2(A^n) \\
& + \sum_{n \geq 1} \frac{c^{(2)}(n) - c(\frac{n}{2})}{2} (X^2 E_2(\frac{A^n}{X}) + E_2(X A^n)) \\
& + \sum_{n \geq 1} c(n) (P_4^{\text{bic}}(1, A^n, X) + P_4^{\text{bic}}(X, \frac{A^n}{X}, X)) \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Démonstration. Nous caractérisons l'espèce A_p^- selon le degré de l'arête distinguée, la hauteur de son échelle et le types de polygone constituant les extrémités de cette dernière. Si l'arête distinguée est de degré 0, alors l'espèce est isomorphe à $E_2(X)$.

Si le degré de l'arête distinguée est 1, alors, l'arête distinguée se trouve à la base de son échelle de hauteur $n \geq 1$. Les polygones de l'échelle déterminent une composition de n . Pour chaque telle composition de n , l'espèce des 2-arbres polygonaux exterplanaires munis d'une telle échelle se terminant par un polygone de taille impaire est isomorphe à $X E_2(A^n)$. Tandis que celles dont une telle échelle se termine par un polygone de taille paire est isomorphe à $E_2(X A^n)$. Ceci est illustré par la figure 5.2.

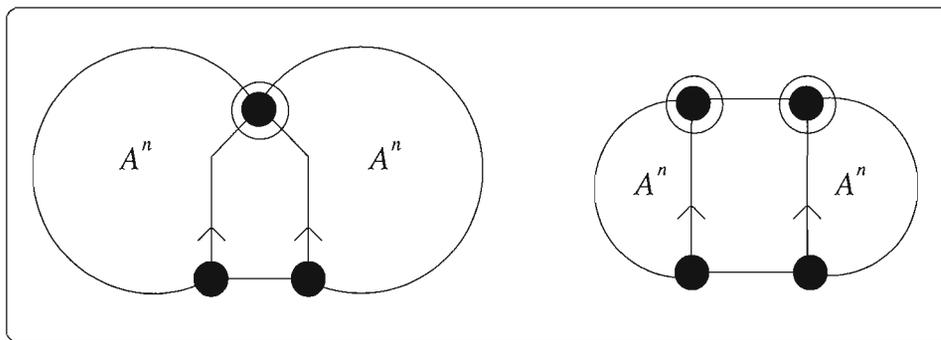


Figure 5.2 – Schéma des espèces de 2-arbres exterplanaires pointés en une arête de degré 1

Si le degré de l'arête est 2, les polygones de l'échelle de l'arête distinguée déterminent une paire de compositions sur n . Si les parités de la taille des polygones aux extrémités de l'échelle sont différentes, on peut orienter canoniquement l'échelle de sa moitié se terminant par un polygone de taille paire vers l'autre moitié, ce qui déter-

mine un couple de compositions sur n . Pour un tel couple de compositions sur n , l'espèce des 2-arbres polygonaux exterplanaires munis d'une telle échelle est isomorphe à $X E_2(A^n)$. Ceci est illustré par la figure 5.3. Si les parités de la taille des polygones aux extrémités de l'échelle sont les mêmes et les compositions sont différentes, on peut orienter l'échelle de la composition la plus petite vers la plus grande. Pour un tel couple de compositions de n et pour l'échelle se terminant par des polygones de taille impaire, l'espèce des 2-arbres polygonaux exterplanaires munis d'une telle échelle est isomorphe à $E_2(X A^n)$. Tandis que celle où les polygones terminaux sont de taille paire, l'espèce de telle 2-arbres est isomorphe à $X^2 E_2(\frac{A^n}{X})$. Ceci est illustré par la figure 5.4. Il ne reste plus que le cas où les compositions sont identiques. Si on suppose qu'il s'agit de compositions de n , l'espèce de tels 2-arbres est isomorphe à $P_4^{\text{bic}}(1, A^n, X)$ ou $P_4^{\text{bic}}(X, \frac{A^n}{X}, X)$ selon la parité de la taille des polygones terminaux de l'échelle de l'arête distinguée. Ceci est illustré par la figure 5.5.

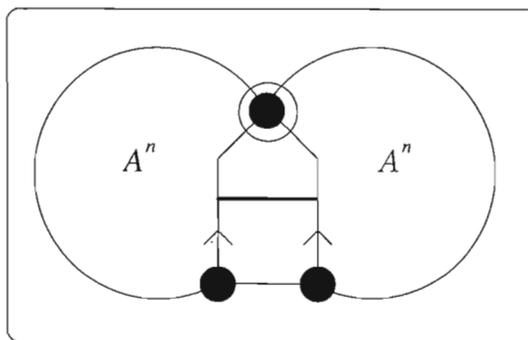


Figure 5.3 – Schéma des espèces de 2-arbres exterplanaires pointés en une arête de degré 2 isomorphes à $X E_2(A^n)$

□

En utilisant les formules d'addition pour les espèces E_2 et $P_4^{\text{bic}}(X, Y, Z)$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 172. L'espèce $a_p^- = a_p^-(X)$ des 2-arbres polygonaux exterplanaires pointés en une arête distinguée satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$a_p^-(X) = E_2(X) + \sum_{m \geq 0} \beta^1 X^m + \sum_{m \geq 0} \beta^2 E_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta^3 X E_2(X^m) \quad (5.5)$$

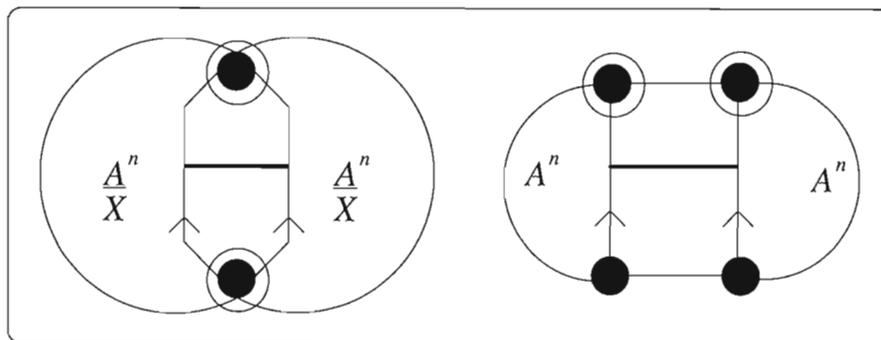


Figure 5.4 – Schéma des espèces de 2-arbres extérieurement pointés en une arête de degré 2 isomorphes à $X^2 E_2(\frac{A^n}{X})$ et $E_2(X A^n)$

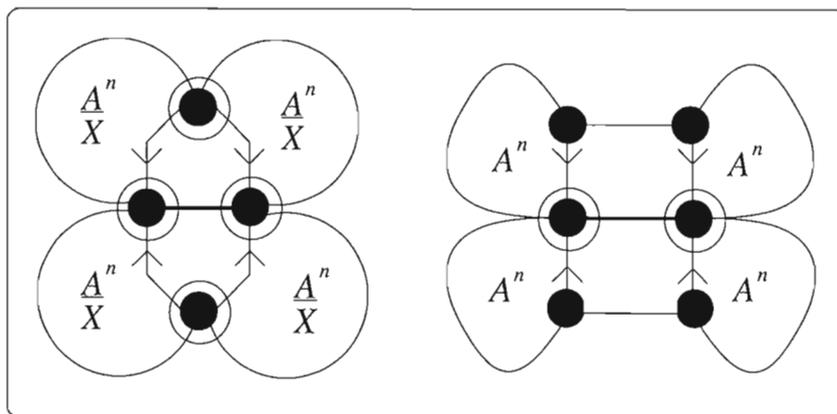


Figure 5.5 – Schéma des espèces de 2-arbres extérieurement pointés en une arête de degré 2 isomorphes à $P_4^{\text{bic}}(1, A^n, X)$ et $P_4^{\text{bic}}(X, \frac{A^n}{X}, X)$

$$+ \sum_{m \geq 0} \beta^4 X^2 E_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta^5 P_4^{\text{bic}}(1, X^m, X) + \sum_{m \geq 0} \beta^6 P_4^{\text{bic}}(X, X^m, X)$$

où

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \sum_{n \geq 1} (c(n) + c^{(2)}(n)) \frac{1}{2} (a_{m-1}^{(2n)} - a_{\frac{m-1}{2}}^{(n)}) \\ &+ \left(\frac{1}{2} (c^{(2)}(n) - c(\frac{n}{2})) + c(n) \right) \frac{1}{2} (a_{m-2}^{(2n)} - a_{\frac{m-2}{2}}^{(n)}) \\ &+ \frac{1}{2} (c^{(2)}(n) - c(\frac{n}{2})) \frac{1}{2} (a_m^{(2n)} - a_{\frac{m}{2}}^{(n)}) + c(n) \left(\frac{1}{4} a_{m-2}^{(4n)} - \frac{3}{4} a_{\frac{m-2}{2}}^{(2n)} + \frac{1}{2} a_{\frac{m-2}{4}}^{(n)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c(n)\left(\frac{1}{4}a_m^{(4n)} - \frac{3}{4}a_{\frac{m}{2}}^{(2n)} + \frac{1}{2}a_{\frac{m}{4}}^{(n)}\right), \\
\beta^2 &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2}(c^{(2)}(n) - c(\frac{n}{2})) + c(n)\right)a_{m-1}^{(n)} + c(n)(a_{m-1}^{(2n)} - a_{\frac{m-1}{2}}^{(n)}) \\
& \quad + c(n)\frac{1}{2}(a_m^{(2n)} - a_{\frac{m}{2}}^{(n)}), \\
\beta^3 &= \sum_{n \geq 1} (c^{(2)}(n) + c(n))a_m^{(n)}, \\
\beta^4 &= \sum_{n \geq 1} c(n)\frac{1}{2}(a_m^{(2n)} - a_{\frac{m}{2}}^{(n)}) + c(n)(a_{m+1}^{(2n)} - a_{\frac{m+1}{2}}^{(n)}) + \frac{1}{2}(c^{(2)}(n) - c(\frac{n}{2}))a_{m+1}^{(n)}, \\
\beta^5 &= \sum_{n \geq 1} c(n)a_m^{(n)}, \\
\beta^6 &= \sum_{n \geq 1} c(n)a_{m+1}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Théorème 173. L'espèce $a_p^{\diamond} = \alpha_p^{\diamond}(X)$ des 2-arbres polygonaux extéplanaires pointés en une arête d'un polygone distingué satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned}
a_p^{\diamond}(X) &= + \sum_{n \geq 1} c(n)(X E_2(A^n) + E_2(X A^n)) \\
& \quad + \sum_{n \geq 1} 2c^{(2)}(n)X E_2(A^n) \\
& \quad + \sum_{n \geq 1} c^{(2)}(n)(X^2 E_2(\frac{A^n}{X}) + E_2(X A^n)) \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Démonstration. L'espèce des α_p^{\diamond} -structures dont l'arête distinguée est de degré 1 est isomorphe à l'espèce des α_p^- -structures dont l'arête distinguée est de degré 1. Pour ce qui est des α_p^{\diamond} -structures dont l'arête distinguée est de degré 2 et dont les parités des polygones terminaux de son échelle sont différentes, pour un couple de compositions sur n , on compte 2 échelles différentes étant donné le pointage induit par le polygone distingué. Pour ce qui est du cas où la parité des polygones terminaux est la même, le polygone distingué induit un ordre sur les compositions induites par l'échelle, ce qui implique que l'espèce munie d'une telle échelle est isomorphe à $X^2 E_2(\frac{A^n}{X})$ ou $E_2(X A^n)$. \square

En utilisant la formule d'addition pour l'espèce E_2 , on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 174. L'espèce $\mathcal{A}_p^\diamond = \mathcal{A}_p^\diamond(X)$ des 2-arbres polygonaux exterplanaires pointés en une arête d'un polygone distingué satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p^\diamond(X) = & \sum_{m \geq 0} \beta^1 X^m + \sum_{m \geq 0} \beta^2 E_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta^3 X E_2(X^m) \\ & + \sum_{m \geq 0} \beta^4 X^2 E_2(X^m) \end{aligned} \quad (5.7)$$

où

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \sum_{n \geq 1} (c(n) + 2c^{(2)}(n)) \frac{1}{2} (a_{m-1}^{(2n)} - a_{\frac{m-1}{2}}^{(n)}) + (c^{(2)}(n) + c(n)) \frac{1}{2} (a_{m-2}^{(2n)} - a_{\frac{m-2}{2}}^{(n)}) \\ &\quad + c^{(2)}(n) \frac{1}{2} (a_m^{(2n)} - a_{\frac{m}{2}}^{(n)}), \\ \beta^2 &= \sum_{n \geq 1} (c^{(2)}(n) + c(n)) a_{m-1}^{(n)}, \\ \beta^3 &= \sum_{n \geq 1} (2c^{(2)}(n) + c(n)) a_m^{(n)}, \\ \beta^4 &= \sum_{n \geq 1} c^{(2)}(n) a_{m+1}^{(n)}. \end{aligned}$$

5.2.1 Classes diédrales

Nous reprendrons les mêmes définitions qu'au chapitre 3 pour ce qui est de l'action du groupe diédral sur les mots de longueur n , mais en adaptant la définition de lettre inverse sur \mathcal{A} .

Notation 160. Notons \mathcal{A} , l'alphabet composé des lettres $a_{i,j}$ de poids X^i tel que $1 \leq j \leq a_i$ où $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$. Nous associerons donc à chaque lettre un type de A -structures noté $\mathcal{A}(a)$.

Définition 161. Soit la lettre $a \in \mathcal{A}$. La lettre *inverse* de a , notée \bar{a} , est la lettre associée au type de structures obtenu en inversant le but et la source de l'arête orientée et ensuite en inversant l'orientation de l'arête distinguée de a .

Définition 162. Soit $w = b_1 \dots b_n$ un mot sur \mathcal{A} . Le mot *miroir* de w noté \bar{w} est le mot $\bar{b}_n \dots \bar{b}_1$.

Définition 163. Soit \mathcal{A} un alphabet. Notons φ l'action du groupe diédral $\mathcal{D}_n = \langle \rho, \tau \rangle$ sur l'ensemble des mots de longueur n sur \mathcal{A} où, pour $w = b_1 b_2 \dots b_n$,

$$\rho w = b_n b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1}$$

et

$$\tau w = \bar{w}.$$

Définition 164. La classe circulaire d'un mot $w \in \mathcal{A}$, notée $[w]$, est l'orbite de w de l'action φ restreinte à $\langle \rho \rangle$.

Définition 165. La classe diédrale d'un mot $w \in \mathcal{A}$, notée $[[w]]$, est l'orbite de w de l'action φ .

Remarquons que $[[w]] = [w] \cup [\bar{w}]$.

Définition 166. Un mot w est palindromique si $w = \bar{w}$.

Définition 167. Un mot w est un dexterpalindrome s'il est la concaténation d'une lettre a et d'un palindrome tel que $a = \bar{a}$.

Ainsi, le stabilisateur d'un palindrome est de la forme $\langle \rho^i, \tau \rangle$ tandis que celui d'un dexterpalindrome est de la forme $\langle \rho^i, \rho\tau \rangle$.

Définition 168. Soit un mot w . Ses classes diédrale et circulaire sont dites *palindromiques* si elles contiennent un palindrome.

Définition 169. Soit un mot w . Ses classes diédrale et circulaire sont dites *dexterpalindromiques* si elles contiennent un dexterpalindrome.

Définition 170. Une classe diédrale est dite *gauche* si elle est l'union de deux classes circulaires différentes.

Définition 171. Une classe diédrale ou circulaire sera dite primitive si elle contient un mot primitif.

5.2.2 Énumération des classes diédrales

Notation 172. Soit d un entier impair. Notons $\text{Pal}(\ell, \varepsilon, m)$, le nombre de palindromes de longueur ℓ et de poids X^m tels que l'échelle de l'arête orientée possède ε polygones de taille impaire.

Notation 173. Soit d un entier impair. Notons $\text{pal}(\ell, \varepsilon, m)$, le nombre de palindromes primitifs de longueur ℓ et de poids X^m tels que l'échelle de l'arête orientée possède ε polygones de taille impaire.

Notation 174. Soit d un entier impair. Notons $\pi(\ell, \varepsilon, m)$, le nombre de classes palindromiques possédant des palindromes primitifs de longueur ℓ et de poids X^m tels que l'échelle de l'arête orientée possède ε polygones de taille impaire.

Notons que le nombre de lettres a telles que $\bar{a} = a$ dont la hauteur de l'échelle associée à son arête orientée est $h \geq 0$ et dont l'échelle possède ε polygones de taille impaire est $c(h) \sum_{j \geq 0} a_j^{(h)}$. Remarquons que le poids d'une telle lettre a est $X^{2j+1-\varepsilon}$. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 175. Soit ℓ un entier impair. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Pal}(\ell, \varepsilon, m) &= \sum_{h \geq \varepsilon} \sum_{j \geq 0} c(h) a_j^{(h)} a_{\frac{m-2j-1+\varepsilon}{2}}^{\left(\frac{\ell-1}{2}\right)} \\ &= \sum_{h \geq \varepsilon} c(h) a_{\frac{m-1+\varepsilon}{2}}^{(h+\frac{\ell-1}{2})}. \end{aligned}$$

Notons qu'une classe diédrale palindromique primitive ne contient qu'un seul palindrome primitif de longueur impaire. Ceci entraîne les formules suivantes.

Proposition 176. Soit d impair. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Pal}(\ell, \varepsilon, m) &= \sum_{i \cdot j = \ell} \text{pal}(i, \varepsilon, \frac{m}{j}), \\ \text{pal}(\ell, \varepsilon, m) &= \pi(\ell, \varepsilon, m) = \sum_{i \cdot j = \ell} \mu(j) \text{Pal}(i, \varepsilon, \frac{m}{j}). \end{aligned}$$

Notation 175. Soit ℓ un entier. Notons $\text{Pal}(\ell, m)$, le nombre de palindromes de longueur ℓ et de poids X^m .

Notation 176. Soit ℓ un entier. Notons $\text{pal}(\ell, m)$, le nombre de palindromes primitifs de longueur ℓ et de poids X^m .

Notation 177. Soit ℓ un entier. Notons $\pi(\ell, m)$, le nombre classes palindromiques possédant des palindromes primitifs de longueur ℓ et de poids X^m .

Proposition 177. Soit ℓ un entier. Alors,

$$\text{Pal}(\ell, m) = \begin{cases} a_{\frac{m}{2}}^{(\frac{\ell}{2})} & \text{si } \ell \text{ est pair,} \\ \sum_{\varepsilon=0}^1 \text{Pal}(\ell, \varepsilon, m) & \text{si } \ell \text{ est impair.} \end{cases} \quad (5.8)$$

Notons qu'une classe palindromique primitive de mots de longueur paire contient deux palindromes primitifs. On a donc les formules qui suivent.

Proposition 178. Soit ℓ un entier. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Pal}(\ell, m) &= \sum_{i:j=\ell} \text{pal}(i, \frac{m}{j}), \\ \text{pal}(\ell, m) &= \sum_{i:j=\ell} \mu(j) \text{Pal}(i, \frac{m}{j}), \\ \pi(\ell, m) &= \frac{1}{1 + \chi(\ell \text{ est pair})} \sum_{i:j=\ell} \mu(j) \text{Pal}(i, \frac{m}{j}). \end{aligned}$$

Notation 178. Soit ℓ un entier naturel, non nul et pair. Soit U l'ensemble des dexterpalindromes de longueur ℓ et de poids X^m tels que leur première lettre $a = \bar{a}$ possède ε_1 polygones de taille impaire sur l'échelle de son arête orientée et leur lettre centrale $b = \bar{b}$ en possède ε_2 sur l'échelle de son arête orientée. Notons $\text{Dext}(\ell, \varepsilon_1, \varepsilon_2, m)$, la cardinalité de U .

Notation 179. Soit ℓ un entier naturel non nul et pair. Soit U l'ensemble des dexterpalindromes primitifs de longueur ℓ et de poids X^m tels que leur première lettre $a = \bar{a}$ possède ε_1 polygones de taille impaire sur l'échelle de son arête orientée et leur lettre centrale $b = \bar{b}$ en possède ε_2 sur l'échelle de son arête orientée. Notons $\text{dext}(\ell, \varepsilon_1, \varepsilon_2, m)$, la cardinalité de U . Notons $\delta(\ell, \varepsilon_1, \varepsilon_2, m)$, le nombre de classes dexterpalindromiques primitives contenant un élément de U .

Notation 180. Soit ℓ un entier naturel. Soit U l'ensemble des dexterpalindromes de longueur ℓ et de poids X^m tels que leur première lettre $a = \bar{a}$ possède ε polygones de taille impaire sur l'échelle de son arête orientée. Notons $\text{Dext}(\ell, \varepsilon, m)$, la cardinalité de U .

Notation 181. Soit ℓ un entier naturel. Soit U l'ensemble des dexterpalindromes pri-

mitifs de longueur ℓ et de poids X^m tels que leur première lettre $a = \bar{a}$ possède ε polygones de taille impaire sur l'échelle de son arête orientée. Notons $\text{dext}(\ell, \varepsilon, m)$, la cardinalité de U . Notons $\delta(\ell, \varepsilon, m)$, le nombre de classes dexterpalindromiques primitives contenant un élément de U .

Notation 182. Soit ℓ un entier naturel. Soit U l'ensemble des dexterpalindromes primitifs de longueur ℓ et de poids X^m . Notons $\text{dext}(\ell, m)$, la cardinalité de U . Notons $\delta(\ell, m)$, le nombre de classes dexterpalindromiques contenant un élément de U .

D'une manière similaire à celle avec laquelle on obtient la formule pour $\text{Pal}(\ell, \varepsilon, m)$, on peut déduire celle pour $\text{Dext}(\ell, \varepsilon_1, \varepsilon_2, m)$.

Proposition 179. Soit ℓ un entier pair. Soient ε_1 et ε_2 deux entiers égaux à 0 ou 1. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Dext}(\ell, \varepsilon_1, \varepsilon_2, m) &= \sum_{h_1 \geq \varepsilon_1} \sum_{h_2 \geq \varepsilon_2} \sum_{i, j \geq 0} c(h_1)c(h_2)a_i^{(h_1)}a_j^{(h_2)}a_{\frac{m+\varepsilon_1+\varepsilon_2-2i-2j-2}{2}}^{\left(\frac{\ell-2}{2}\right)} \\ &= \sum_{h_1 \geq \varepsilon_1} \sum_{h_2 \geq \varepsilon_2} c(h_1)c(h_2)a_{\frac{m+\varepsilon_1+\varepsilon_2-2}{2}}^{\left(\frac{h_1+h_2}{2}+\frac{\ell-2}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Notons qu'une classe dexterpalindromique primitive de mots de longueur ℓ comptée par $\delta(\ell, 0, 1, m)$ possède un dexterpalindrome compté par $\text{dext}(\ell, 0, 1, m)$ et un seul autre compté par $\text{dext}(\ell, 1, 0, m)$. De plus, sa racine primitive est comptée par $\text{dext}(i, 1, 0, m/j)$ tel que $i \cdot j = \ell$ où j est impair. On en tire les deux résultats suivants.

Proposition 180. Soit ℓ pair. Alors,

$$\text{Dext}(\ell, 0, 1, m) = \sum_{\substack{i \cdot j = \ell \\ j \text{ impair}}} \text{dext}(i, 0, 1, \frac{m}{j}), \quad (5.9)$$

$$\text{dext}(\ell, 0, 1, m) = \delta(\ell, 1, 0, m) = \sum_{\substack{i \cdot j = \ell \\ j \text{ impair}}} \mu(j)\text{Dext}(i, 0, 1, \frac{m}{j}). \quad (5.10)$$

$$(5.11)$$

Par la définition de $\text{Dext}(\ell, \varepsilon, m)$ on obtient la première équation de la proposition suivante. La deuxième est obtenue en associant à chaque dexterpalindrome de longueur ℓ sa racine primitive. La troisième l'est en effectuant une inversion de Möbius.

Proposition 181. Soit ℓ un entier positif. Alors,

$$\text{Dext}(\ell, \varepsilon, m) = \sum_{h \geq \varepsilon} \sum_{j \geq 0} c(h) a_j^{(h)} \text{Pal}(d-1, m + \varepsilon, -2j - 1), \quad (5.12)$$

$$\text{Dext}(\ell, \varepsilon, m) = \sum_{i \cdot j = \ell} \text{dext}(i, \varepsilon, \frac{m}{j}), \quad (5.13)$$

$$\text{dext}(\ell, \varepsilon, m) = \sum_{i \cdot j = \ell} \mu(j) \text{Dext}(i, \varepsilon, \frac{m}{j}). \quad (5.14)$$

Notons qu'une classe dexterpalindromique primitive de mots de longueur ℓ paire comptée par $\delta(\ell, \varepsilon, \varepsilon, m)$ possède deux dexterpalindromes comptés par $\text{dext}(\ell, \varepsilon, \varepsilon, m)$. De plus, leurs racines primitives sont comptées par $\text{dext}(i, \varepsilon, \varepsilon, m/j)$ avec $i \cdot j = \ell$, où j est impair, ou par $\text{dext}(i, \varepsilon, m/j)$, où j est pair. On a donc les formules de la proposition suivante.

Proposition 182. Soient ℓ un entier pair. Soit n un entier égal à 0 ou 1. Alors,

$$\text{Dext}(\ell, \varepsilon, \varepsilon, m) = \sum_{\substack{i \cdot j = \ell \\ j \text{ impair}}} \text{dext}(i, \varepsilon, \varepsilon, \frac{m}{j}) + \sum_{\substack{i \cdot j = \ell \\ j \text{ pair}}} \text{dext}(i, \varepsilon, \frac{m}{j}), \quad (5.15)$$

$$\text{dext}(\ell, \varepsilon, \varepsilon, m) = \sum_{\substack{i \cdot j = \ell \\ j \text{ impair}}} \mu(j) \left(\text{Dext}(i, \varepsilon, \varepsilon, \frac{m}{j}) \right. \quad (5.16)$$

$$\left. - \sum_{\substack{d \cdot h = i \\ h \text{ pair}}} \text{dext}(d, \varepsilon, \frac{m}{hj}) \right),$$

$$\delta(\ell, \varepsilon, \varepsilon, m) = \frac{1}{2} \text{dext}(\ell, \varepsilon, \varepsilon, m). \quad (5.17)$$

Comme les ensembles de classes comptés par $\delta(\ell, \varepsilon_1, \varepsilon_2, m)$ et $\delta(\ell, \varepsilon_2, \varepsilon_1, m)$ se confondent, on obtient la proposition suivante.

Proposition 183. Soit ℓ un entier naturel pair non nul. Alors,

$$\delta(\ell, m) = \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \sum_{\varepsilon_2=\varepsilon_1}^1 \delta(\ell, \varepsilon_1, \varepsilon_2, m).$$

Notation 183. Notons $\lambda(\ell, m)$, le nombre de classes circulaires primitives de mots de longueur ℓ et de poids m .

Notons qu'à chaque classe circulaire de mots on peut associer la classe circulaire

des racines primitives des mots de cette classe dont le cardinal est la longueur de ses racines racines primitives. On en déduit alors la première équation de la proposition suivante, la deuxième étant obtenue par inversion de Möbius sur la première.

Proposition 184. Soit ℓ un entier. Alors,

$$a_m^{(\ell)} = \sum_{i \cdot j = \ell} i \lambda(i, \frac{m}{j}),$$

$$\lambda(\ell, m) = \frac{1}{\ell} \sum_{i \cdot j = \ell} \mu(j) a_{\frac{m}{j}}^{(i)}.$$

Définition 184. Définissons $\sigma(\ell, m)$, le nombres de classes diédrales, primitives et gauches de mots de longueur ℓ et de poids m .

Notons qu'une classe diédrale primitive de mots de longueur impaire est soit gauche, soit palindromique. Une classe diédrale primitive de mots de longueur paire est exclusivement gauche, palindromique ou dexterpalindromique. De plus, seules les classes diédrales gauches sont l'union de deux classes circulaires, les autres n'en étant celle que d'une seule. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 185. Soit ℓ un entier naturel non nul. Alors,

$$\lambda(\ell, m) = 2\sigma(\ell, m) + \pi(\ell, m) + \chi(\ell \text{ pair})\delta(\ell, m), \quad (5.18)$$

$$\sigma(\ell, m) = \frac{1}{2}(\lambda(\ell, m) - \pi(\ell, m) - \chi(\ell \text{ pair})\delta(\ell, m)). \quad (5.19)$$

Théorème 186. L'espèce $a_p^\diamond = a_p^\diamond(X)$ des 2-arbres polygonaux pointés en un polygone satisfait à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned} a_p^\diamond(X) &= \sum_{k \geq 3} \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ impair}}} \pi(i, n, 2m + \varepsilon + 1) P_{2j}^{\text{bic}}(X^\varepsilon, X^m, X) \\ &+ \sum_{k \geq 3} \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ pair}}} \pi(i, 2m + 2) P_{2j}^{\text{bic}}(X, X^m, X) \\ &+ \sum_{k \geq 3} \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \sum_{\varepsilon_2 \varepsilon_1}^1 \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i \text{ pair}}} \delta(i, \varepsilon_1, \varepsilon_2, 2n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) P_{2j}^{\text{bic}}(X^{\varepsilon_1}, X^m, X^{\varepsilon_2}) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k \geq 3} \sum_{m \geq 0} \sum_{i \cdot j = k} \sigma(i, m) C_j(X^m). \quad (5.20)$$

Démonstration. Si la classe diédrale associée au type de A_p^\diamond -structures est gauche, on peut orienter et diviser le type selon le plus petit des mots primitifs de cette classe. Si le mot est de longueur k et le mot primitif est de longueur i , où $i \cdot j = k$, et de poids X^m , alors le type, en tant qu'espèce, est isomorphe à $C_j(X^m)$.

Si la classe diédrale associée au type de A_p^\diamond -structures a comme mot primitif un palindrome de longueur impaire, donc, de la forme $ua\bar{u}$ où u est un mot et a sa lettre centrale, le type est divisé par des axes de symétrie passant par a et entre les multiplicités de ce palindrome primitif. Le contenu de ces secteurs peut être orienté vers la lettre centrale. De plus, pour une des multiplicités de ce palindrome primitif, les axes de symétrie l'interceptent aux ε sommets de sa lettre centrale associés aux polygones de taille impaire de l'échelle de son arête orientée et au premier sommet du palindrome. Si le mot est de longueur k et le mot primitif est de longueur i , où $i \cdot j = k$, et de poids $X^{2m+1+\varepsilon}$ alors le type, en tant qu'espèce, est isomorphe à $P_{2j}^{\text{bic}}(X^\varepsilon, X^m, X)$. Ceci est illustré par la figure 5.6.

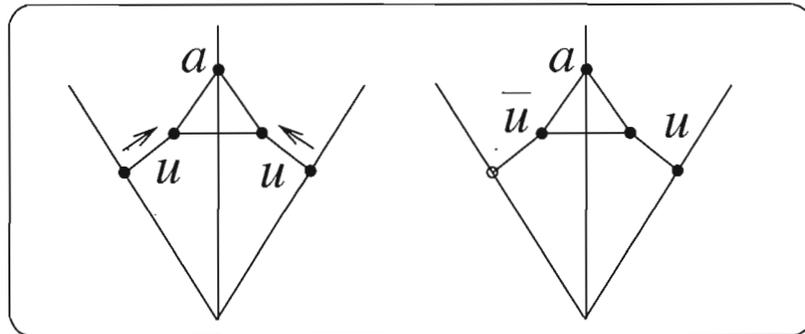


Figure 5.6 – Secteurs d'un type isomorphe à $P_j^{\text{bic}}(X^\varepsilon, X^m, X)$ et son palindrome primitif associé

Si la classe diédrale associée au type de A_p^\diamond -structures a comme mot primitif un palindrome de longueur paire, donc, de la forme $u\bar{u}$ où u est un mot, le type est divisé par des axes passant entre u et \bar{u} . Le contenu de ces secteurs peut être orienté vers le centre du plus petit tel palindrome. De plus, pour une multiplicité de ce palindrome

primitif, les axes de symétrie l'interceptent aux premiers sommets de u et \bar{u} . Si le mot est de longueur k et le mot primitif est de longueur i , où $i \cdot j = k$, et de poids X^{2m+2} alors le type, en tant qu'espèce, est isomorphe à $P_{2j}^{\text{bic}}(X, X^m, X)$. Ceci est illustré par la figure 5.7

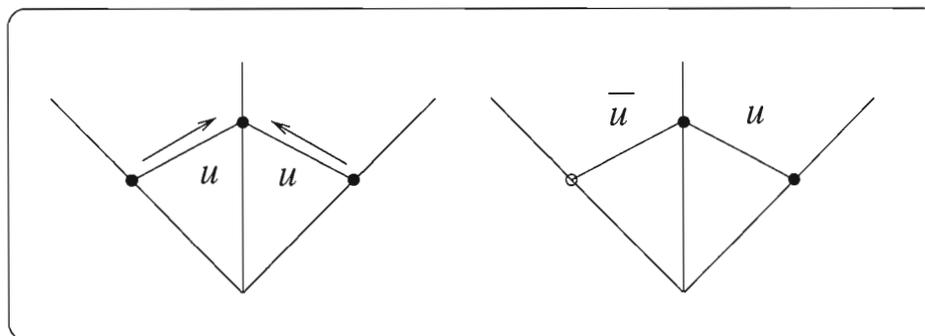


Figure 5.7 – Secteurs d'un type isomorphe à $P_{2j}^{\text{bic}}(X, X^m, X)$ et son palindrome primitif associé

Si la classe associée au type de a_p^\diamond -structures est dexterpalindromique et que $aub\bar{u}$ est son plus petit dexterpalindrome primitif de longueur paire où a et b sont des lettres et u un mot alors le type est divisé par des axes de symétrie passant par a et b . On peut orienter le contenu des secteurs vers l'axe passant par b . Posons ε_1 et ε_2 comme étant le nombre de polygones de taille impaire dans l'échelle associée à l'arête orientée de a et respectivement b . Alors, pour une multiplicité du dexterpalindrome primitif, les axes de symétrie l'interceptent $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ sommets. Si le mot est de longueur k et le mot primitif est de longueur i , où $i \cdot j = k$, et de poids $X^{2m+\varepsilon_1+\varepsilon_2}$, alors le type est isomorphe à $P_{2j}^{\text{bic}}(X^{\varepsilon_1}, X^m, X^{\varepsilon_2})$.

□

En appliquant le théorème de dissymétrie pour les 2-arbres polygonaux exterplanaires sur les développements moléculaires des espèces a_p^- , a_p^\diamond et a_p^\diamond , on obtient celui de a_p puisque $a_p = a_p^- + a_p^\diamond - a_p^\diamond$.

Théorème 187. L'espèce $a_p = a_p(X)$ des 2-arbres polygonaux exterplanaires satisfait

à l'isomorphisme d'espèces suivant :

$$\begin{aligned}
a_p(X) &= E_2(X) + \sum_{m \geq 0} \beta^1 X^m + \sum_{m \geq 0} \beta^2 E_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta^3 X E_2(X^m) \quad (5.21) \\
&+ \sum_{m \geq 0} \beta^4 X^2 E_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} \beta^5 P_4^{\text{bic}}(1, X^m, X) + \sum_{m \geq 0} \beta^6 P_4^{\text{bic}}(X, X^m, X) \\
&+ \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i, j \geq 3 \\ j > 1 \\ i \text{ impair}}} \pi(i, n, 2m + \varepsilon + 1) P_{2j}^{\text{bic}}(X^\varepsilon, X^m, X) \\
&+ \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i, j \geq 3 \\ j > 1 \\ i \text{ pair}}} \pi(i, 2n + 2) P_{2j}^{\text{bic}}(X, X^m, X) \\
&+ \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \sum_{\varepsilon_2=\varepsilon_1}^1 \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i, j \geq 3 \\ j > 1 \\ i \text{ pair}}} \delta(i, \varepsilon_1, \varepsilon_2, 2m + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) P_{2j}^{\text{bic}}(X^{\varepsilon_1}, X^m, X^{\varepsilon_1}) \\
&+ \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{i, j \geq 3 \\ j > 2}} \sigma(i, m) C_j(X^m),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\beta^1 &= \sum_{k \geq 3} \sigma(k, m) + \sum_{n \geq 1} -c^{(2)}(n) \frac{1}{2} (a_{m-1}^{(2n)} - a_{\frac{m-1}{2}}^{(n)}) \\
&\quad - \frac{1}{2} (c^{(2)}(n) + c(\frac{n}{2})) \frac{1}{2} (a_{m-2}^{(2n)} - a_{\frac{m-2}{2}}^{(n)}) - \frac{1}{2} (c^{(2)}(n) + c(\frac{n}{2})) \frac{1}{2} (a_m^{(2n)} - a_{\frac{m}{2}}^{(n)}) \\
&\quad + c(n) (\frac{1}{4} a_{m-2}^{(4n)} - \frac{3}{4} a_{\frac{m-2}{2}}^{(2n)} + \frac{1}{2} a_{\frac{m-2}{4}}^{(n)}) + c(n) (\frac{1}{4} a_m^{(4n)} - \frac{3}{4} a_{\frac{m}{2}}^{(2n)} + \frac{1}{2} a_{\frac{m}{4}}^{(n)}), \\
\beta^2 &= \sum_{\substack{k \geq 3 \\ k \text{ pair}}} \delta(k, 0, 0, 2m) + \sigma(\frac{k}{2}, m) + \sum_{n \geq 1} -\frac{1}{2} (c^{(2)}(n) + c(\frac{n}{2})) a_{m-1}^{(n)} \\
&\quad + c(n) (a_{m-1}^{(2n)} - a_{\frac{m-1}{2}}^{(n)}) + c(n) \frac{1}{2} (a_m^{(2n)} - a_{\frac{m}{2}}^{(n)}), \\
\beta^3 &= \sum_{\substack{k \geq 3 \\ k \text{ pair}}} \delta(k, 0, 1, 2m + 1) + \sum_{\substack{k \geq 3 \\ k \text{ impair}}} \pi(k, 0, 2m + 1) + \sum_{n \geq 1} -c^{(2)}(n) a_m^{(n)}, \\
\beta^4 &= \sum_{\substack{k \geq 3 \\ k \text{ pair}}} \delta(k, 1, 1, 2m + 2) + \pi(k, 2m + 2) + \sum_{\substack{k \geq 3 \\ k \text{ impair}}} \pi(k, 1, 2m + 2) + \\
&\quad \sum_{n \geq 1} c(n) \frac{1}{2} (a_m^{(2n)} - a_{\frac{m}{2}}^{(n)}) + c(n) (a_{m+1}^{(2n)} - a_{\frac{m+1}{2}}^{(n)}) - \frac{1}{2} (c^{(2)}(n) + c(\frac{n}{2})) a_{m+1}^{(n)},
\end{aligned}$$

$$\beta^5 = \sum_{n \geq 1} c(n) a_m^{(n)},$$

$$\beta^6 = \sum_{n \geq 1} c(n) a_{m+1}^{(n)}.$$

CONCLUSION

Nous avons obtenu les développements moléculaires des arbres plans, des 2-arbres k -gonaux exterplanaires, des 2-arbres k -gonaux sans sommets de degré supérieur à 3 et des 2-arbres polygonaux exterplanaires. Dans chaque cas, nous avons d'abord trouvé le développement moléculaire d'une espèce asymétrique. Puis, trouvé celui de diverses espèces pointées à l'aide de formules d'addition ou de classes diédrales de mots représentant des types de cette espèce asymétrique. Le développement moléculaire de chacune de ces espèces est finalement obtenu en utilisant un théorème de dissymétrie et en regroupant les termes semblables.

Dans le cas des arbres R -enrichis, les techniques employées dans le présent travail pourraient être utilisées à condition de connaître le développement moléculaire des arborescences R' -enrichies et de leurs puissances et de disposer d'une formule d'addition appropriée. Le principal obstacle survient dans le cas où R' n'est pas asymétrique puisque, dans ce cas, on ne dispose pas de technique pour calculer, de façon générale, le développement moléculaire des arborescences R' -enrichies.

Dans le cas des 2-arbres k -gonaux ou polygonaux, il serait possible de généraliser les techniques appliquées aux cas exterplanaires en connaissant le développement moléculaire des 2-arbres k -gonaux (respectivement polygonaux) pointés en une arête et celui de ceux pointés en une arête orientée. Cette fois-ci l'arête orientée n'est pas nécessairement externe puisqu'une arête dans un 2-arbre k -gonal ou polygonal peut être de degré supérieur à 2.

APPENDICE A

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES ARBRES PLANS

A.1 Premiers termes du développement moléculaire des arbres plans

Premiers termes du développement moléculaire des arbres plans. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

$$X$$

$$C_2(X)$$

$$XC_2(X)$$

$$C_2(X^2) + XC_3(X)$$

$$X^5 + XC_2(X^2) + XC_4(X)$$

$$3X^6 + 2C_2(X^3) + XC_5(X)$$

$$9X^7 + 3XC_2(X^3) + XC_3(X^2) + XC_6(X)$$

$$28X^8 + 5C_2(X^4) + XC_7(X)$$

$$85X^9 + 8XC_2(X^4) + XC_4(X^2) + XC_8(X)$$

$$262X^{10} + 14C_2(X^5) + 3XC_3(X^3) + XC_9(X)$$

$$827X^{11} + 25XC_2(X^5) + XC_5(X^2) + XC_{10}(X)$$

$$2651X^{12} + 42C_2(X^6) + XC_{11}(X)$$

A.2 Premiers termes du développement moléculaire des arbres plans pondérés par la distribution des degrés de leurs sommets

Premiers termes du développement moléculaire des arbres plans pondérés par la distribution des degrés de leurs sommets. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

$$r_0X$$

$$r_1^2C_2(X)$$

$$r_2r_1^2XC_2(X)$$

$$r_3r_1^3XC_3(X) + r_2^2r_1^2C_2(X^2)$$

$$r_2^3r_1^2XC_2(X^2) + r_3r_2r_1^3X^5 + r_4r_1^4XC_4(X)$$

$$2r_3r_2^2r_1^3X^6 + r_4r_2r_1^4X^6 + r_5r_1^5XC_5(X) + r_2^4r_1^2C_2(X^3) + r_3^2r_1^4C_2(X^3)$$

$$r_2^5r_1^2XC_2(X^3) + r_3^2r_2r_1^4XC_2(X^3) + 2r_4r_2^2r_1^4X^7 + 3r_3r_2^3r_1^3X^7 + 2r_3^2r_2r_1^4X^7 + r_4r_2^2r_1^4XC_2(X^3) + r_4r_3r_1^5X^7 + r_5r_2r_1^5X^7 + r_3r_2^3r_1^3XC_3(X^2) + r_6r_1^6XC_6(X)$$

$$3r_5r_2^2r_1^5X^8 + 6r_4r_3r_2r_1^5X^8 + r_6r_2r_1^6X^8 + r_5r_3r_1^6X^8 + r_4^2r_1^6C_2(X^4) + r_7r_1^7XC_7(X) + r_2^6r_1^2C_2(X^4) + 5r_3r_2^4r_1^3X^8 + 6r_3^2r_2^2r_1^4X^8 + 3r_3^2r_2^2r_1^4C_2(X^4) + 5r_4r_2^3r_1^4X^8 + r_3^3r_1^5X^8$$

$$7r_5r_3r_2r_1^6X^9 + 3r_4r_3^2r_1^6X^9 + r_4r_3^2r_1^6XC_2(X^4) + r_4r_2^4r_1^4XC_4(X^2) + r_5r_4r_1^7X^9 + 16r_3^2r_2^3r_1^4X^9 + 8r_4r_2^4r_1^4X^9 + r_4r_2^4r_1^4XC_2(X^4) + 3r_3^2r_2^3r_1^4XC_2(X^4) + 7r_3^3r_2r_1^5X^9 + r_4^2r_2^6r_1^6XC_2(X^4) + 7r_3r_2^5r_1^3X^9 + 3r_4^2r_2r_1^6X^9 + r_2^7r_1^2XC_2(X^4) + r_8r_1^8XC_8(X) + r_6r_2^2r_1^6XC_2(X^4) + r_6r_3r_1^7X^9 + r_7r_2r_1^7X^9 + 3r_6r_2^2r_1^6X^9 + 21r_4r_3r_2^2r_1^5X^9 + 7r_5r_2^3r_1^5X^9$$

$$4r_4^2r_3r_1^7X^{10} + 9r_3r_2^6r_1^3X^{10} + 4r_5r_3^2r_1^7X^{10} + r_6r_2^3r_1^6XC_3(X^3) + 56r_4r_3r_2^3r_1^5X^{10} + r_3r_2^6r_1^3XC_3(X^3) + 28r_4r_3^2r_2r_1^6X^{10} + 32r_2^3r_2^4r_1^4X^{10} + 8r_6r_3r_2r_1^7X^{10} + 28r_3^3r_2^2r_1^5X^{10} + 14r_5r_2^4r_1^5X^{10} + 2r_3^4r_1^6C_2(X^5) + r_9r_1^9XC_9(X) + 12r_4^2r_2^2r_1^6X^{10} + 9r_6r_2^3r_1^6X^{10} + 4r_7r_2^2r_1^7X^{10} + r_2^8r_1^2C_2(X^5) + r_3^4r_1^6XC_3(X^3) + 8r_5r_4r_2r_1^7X^{10} + 14r_4r_2^5r_1^4X^{10} +$$

$$r_3^4 r_1^6 X^{10} + 28r_5 r_3 r_2^2 r_1^6 X^{10} + r_8 r_2 r_1^8 X^{10} + r_7 r_3 r_1^8 X^{10} + r_6 r_4 r_1^8 X^{10} + \\ 6r_3^2 r_2^4 r_1^4 C_2(X^5) + 4r_4^2 r_2^2 r_1^6 C_2(X^5) + r_5^2 r_1^8 C_2(X^5)$$

$$9r_6 r_4 r_2 r_1^8 X^{11} + 20r_3^4 r_2 r_1^6 X^{11} + r_{10} r_1^{10} X C_{10}(X) + 36r_6 r_3 r_2^2 r_1^7 X^{11} + r_9 r_2 r_1^9 X^{11} + \\ 60r_3^2 r_2^5 r_1^4 X^{11} + 4r_4^2 r_2^3 r_1^6 X C_2(X^5) + 36r_5 r_4 r_2^2 r_1^7 X^{11} + 12r_3 r_2^7 r_1^3 X^{11} + \\ r_4^3 r_1^8 X C_2(X^5) + 4r_8 r_2^2 r_1^8 X^{11} + 2r_6 r_2^4 r_1^6 X C_2(X^5) + 6r_3^2 r_2^5 r_1^4 X C_2(X^5) + r_7 r_4 r_1^9 X^{11} + \\ 36r_4^2 r_3 r_2 r_1^7 X^{11} + 9r_5 r_4 r_3 r_1^8 X^{11} + 4r_4 r_2^3 r_2^2 r_1^6 X C_2(X^5) + 126r_4 r_3 r_2^4 r_1^5 X^{11} + \\ r_6 r_3^2 r_1^8 X C_2(X^5) + 84r_5 r_3 r_2^3 r_1^6 X^{11} + 12r_4 r_3^3 r_1^7 X^{11} + r_4^3 r_1^8 X^{11} + r_8 r_3 r_1^9 X^{11} + \\ 9r_7 r_3 r_2 r_1^8 X^{11} + 12r_7 r_2^3 r_1^7 X^{11} + 124r_4 r_3^2 r_2^2 r_1^6 X^{11} + 20r_4 r_2^6 r_1^4 X^{11} + r_5 r_2^5 r_1^5 X C_5(X^2) + \\ 40r_4^2 r_2^3 r_1^6 X^{11} + r_6 r_5 r_1^9 X^{11} + 2r_3^4 r_2 r_1^6 X C_2(X^5) + r_8 r_2^2 r_1^8 X C_2(X^5) + r_9^2 r_1^2 X C_2(X^5) + \\ 4r_6 r_3^2 r_1^8 X^{11} + 20r_6 r_2^4 r_1^6 X^{11} + 25r_5 r_2^5 r_1^5 X^{11} + r_5^2 r_2 r_1^8 X C_2(X^5) + 84r_3^3 r_2^3 r_1^5 X^{11} + \\ 2r_4 r_2^6 r_1^4 X C_2(X^5) + 36r_5 r_3^2 r_2 r_1^7 X^{11} + 4r_5^2 r_2 r_1^8 X^{11}$$

$$120r_6 r_3 r_2^3 r_1^7 X^{12} + 15r_8 r_3^2 r_1^8 X^{12} + 120r_5 r_4 r_2^3 r_1^7 X^{12} + r_7 r_5 r_1^{10} X^{12} + 42r_5 r_2^6 r_1^5 X^{12} + \\ 30r_7 r_2^4 r_1^7 X^{12} + r_8 r_4 r_1^{10} X^{12} + 5r_5 r_2^2 r_1^9 X^{12} + 210r_5 r_3 r_2^4 r_1^6 X^{12} + 210r_3^3 r_2^4 r_1^5 X^{12} + \\ 100r_3^4 r_2^2 r_1^6 X^{12} + r_9 r_3 r_1^{10} X^{12} + r_6^2 r_1^{10} C_2(X^6) + r_{11} r_1^{11} X C_{11}(X) + 180r_5 r_3^2 r_2^2 r_1^7 X^{12} + \\ 120r_4 r_3^3 r_2 r_1^7 X^{12} + 42r_6 r_2^5 r_1^6 X^{12} + 10r_7 r_4 r_2 r_1^9 X^{12} + 20r_5^2 r_2^2 r_1^8 X^{12} + 45r_6 r_4 r_2^2 r_1^8 X^{12} + \\ 45r_6 r_3^2 r_2 r_1^8 X^{12} + 420r_4 r_3^2 r_2^3 r_1^6 X^{12} + 5r_5^2 r_2^2 r_1^8 C_2(X^6) + 20r_4^2 r_3^2 r_1^8 X^{12} + 5r_5^2 r_3 r_1^9 X^{12} + \\ 30r_4 r_2^7 r_1^4 X^{12} + 10r_8 r_3 r_2 r_1^9 X^{12} + r_{10} r_2 r_1^{10} X^{12} + 100r_4^2 r_2^4 r_1^6 X^{12} + r_2^{10} r_1^2 C_2(X^6) + \\ 15r_4^3 r_2 r_1^8 X^{12} + 90r_5 r_4 r_3 r_2 r_1^8 X^{12} + 6r_3^5 r_1^7 X^{12} + 10r_6 r_4 r_3 r_1^9 X^{12} + 100r_3^2 r_2^6 r_1^4 X^{12} + \\ 15r_5 r_3^3 r_1^8 X^{12} + 5r_7 r_2^3 r_1^9 X^{12} + 15r_3 r_2^8 r_1^3 X^{12} + 10r_6 r_5 r_2 r_1^9 X^{12} + 10r_3^2 r_2^6 r_1^4 C_2(X^6) + \\ 5r_9 r_2^2 r_1^9 X^{12} + 5r_4^2 r_3^2 r_1^8 C_2(X^6) + 45r_7 r_3 r_2^2 r_1^8 X^{12} + 180r_4^2 r_3 r_2^2 r_1^7 X^{12} + \\ 252r_4 r_3 r_2^5 r_1^5 X^{12} + 10r_3^4 r_2^2 r_1^6 C_2(X^6) + 10r_4^2 r_2^4 r_1^6 C_2(X^6)$$

APPENDICE B

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES k -GONAUX EXTERPLANAIRES

B.1 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres triangulaires extéplanaires

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres triangulaires extéplanaires. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$XP_6^{\text{bic}}(1, 1)$$

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$XE_2(X)$$

$$2E_2(X^2) + XP_6^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$2X^5 + 2XE_2(X^2)$$

$$5X^6 + 4E_2(X^3) + 2X^2E_2(X^2) + P_4^{\text{bic}}(X, X)$$

$$21X^7 + 5XE_2(X^3) + XC_3(X^2)$$

$$61X^8 + 14E_2(X^4) + 7X^2E_2(X^3)$$

$$\begin{aligned}
& 214X^9 + 14XE_2(X^4) \\
669X^{10} + 40E_2(X^5) + 19X^2E_2(X^4) + 2P_4^{\text{bic}}(X, X^2) + 2XC_3(X^3) + XP_6^{\text{bic}}(X, X) \\
& 2240X^{11} + 42XE_2(X^5) \\
& 7330X^{12} + 132E_2(X^6) + 66X^2E_2(X^5) \\
& 24695X^{13} + 132XE_2(X^6) + 7XC_3(X^4) \\
& 83257X^{14} + 424E_2(X^7) + 212X^2E_2(X^6) + 5P_4^{\text{bic}}(X, X^3) \\
& 284928X^{15} + 429XE_2(X^7)
\end{aligned}$$

B.2 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres quadrangulaires exterplanaires

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres quadrangulaires exterplanaires. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

$$\begin{aligned}
& 1 \\
& P_4^{\text{bic}}(X, 1) \\
& X^3 + XP_2^{\text{bic}}(1, X, 1) \\
& X^2E_2(X) + X^4 + 2E_2(X^2) + P_4^{\text{bic}}(X^2, 1) \\
& XP_8^{\text{bic}}(X, 1, 1) + 10X^5 + XE_2(X^2) + X^3E_2(X) + 3XP_2^{\text{bic}}(1, X^2, 1) \\
& 3X^2E_2(X^2) + 2X^4E_2(X) + 43X^6 + 10E_2(X^3) + P_4^{\text{bic}}(X, X) + P_4^{\text{bic}}(X^3, 1) \\
& XP_4^{\text{bic}}(1, X, X) + 227X^7 + 11XE_2(X^3) + 5X^3E_2(X^2) + 2X^5E_2(X) + \\
& \quad 15XP_2^{\text{bic}}(1, X^3, 1) \\
& 15X^2E_2(X^3) + 8X^4E_2(X^2) + 3X^6E_2(X) + 1162X^8 + 52E_2(X^4) + 2P_4^{\text{bic}}(X^2, X) + \\
& \quad P_4^{\text{bic}}(X^4, 1)
\end{aligned}$$

$$58XE_2(X^4) + 26X^3E_2(X^3) + XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + 3X^7E_2(X) + 11X^5E_2(X^2) + 2XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^2) + 6083X^9 + XP_4^{\text{bic}}(X, X, X) + XP_8^{\text{bic}}(X^2, 1, 1) + XC_4(X^2) + 70XP_2^{\text{bic}}(1, X^4, 1)$$

$$70X^2E_2(X^4) + 44X^4E_2(X^3) + 15X^6E_2(X^2) + 4X^8E_2(X) + 32315X^{10} + 266E_2(X^5) + 3P_4^{\text{bic}}(X, X^2) + 3P_4^{\text{bic}}(X^3, X) + P_4^{\text{bic}}(X^5, 1)$$

$$4X^9E_2(X) + 364XP_2^{\text{bic}}(1, X^5, 1) + 3XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, X) + 3XP_4^{\text{bic}}(X, X, X^2) + 3XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^3) + 174859X^{11} + 309XE_2(X^5) + 133X^3E_2(X^4) + 63X^5E_2(X^3) + 19X^7E_2(X^2)$$

$$120X^7E_2(X^3) + XP_8^{\text{bic}}(X^3, 1, 1) + 1932XP_2^{\text{bic}}(1, X^6, 1) + 1660XE_2(X^6) + 708X^3E_2(X^5) + 4XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^4) + 344X^5E_2(X^4) + 2XP_4^{\text{bic}}(X^2, X, X^2) + 4XP_4^{\text{bic}}(X, X, X^3) + 29X^9E_2(X^2) + XP_8^{\text{bic}}(X, X, 1) + 5XP_4^{\text{bic}}(1, X^3, 1) + 7XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, X^2) + 5XC_4(X^3) + 5X^{11}E_2(X) + 3XP_4^{\text{bic}}(X, X^2, X) + 5369570X^{13}$$

$$35X^{10}E_2(X^2) + 5P_4^{\text{bic}}(X^5, X) + 12P_4^{\text{bic}}(X^3, X^2) + 1932X^2E_2(X^6) + 30373643X^{14} + 1224X^4E_2(X^5) + 7722E_2(X^7) + 12P_4^{\text{bic}}(X, X^3) + P_4^{\text{bic}}(X^7, 1) + 6X^{12}E_2(X) + 504X^6E_2(X^4) + 160X^8E_2(X^3)$$

$$10659XP_2^{\text{bic}}(1, X^7, 1) + 1929X^5E_2(X^5) + 6X^{13}E_2(X) + 201X^9E_2(X^3) + 705X^7E_2(X^4) + 12XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, X^3) + 41X^{11}E_2(X^2) + 3861X^3E_2(X^6) + 173811015X^{15} + 5XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^5) + 5XP_4^{\text{bic}}(X^2, X, X^3) + 9163XE_2(X^7) + 5XP_4^{\text{bic}}(X, X, X^4) + 12XP_4^{\text{bic}}(1, X^3, X) + 12XP_4^{\text{bic}}(X, X^2, X^2)$$

B.3 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres pentagonaux exterplanaires

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres pentagonaux exterplanaires. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$XP_{10}^{\text{bic}}(1, 1)$$

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$\begin{aligned}
& 2X E_2(X) \\
& 2X^4 + 4E_2(X^2) + 2X^2 E_2(X) \\
& 24X^5 + 9X E_2(X^2) \\
& 162X^6 + 20E_2(X^3) + 9X^2 E_2(X^2) + 2P_4^{\text{bic}}(X, X) + X P_{10}^{\text{bic}}(X, 1) \\
& 1144X^7 + 52X E_2(X^3) \\
& 7986X^8 + 140E_2(X^4) + 70X^2 E_2(X^3) \\
& 57800X^9 + 340X E_2(X^4) \\
& 426526X^{10} + 960E_2(X^5) + 480X^2 E_2(X^4) + 9P_4^{\text{bic}}(X, X^2) \\
& 3221214X^{11} + 2394X E_2(X^5) + 2XC_5(X^2) \\
& 24770126X^{12} + 7084E_2(X^6) + 3542X^2 E_2(X^5) \\
& 193592840X^{13} + 17710X E_2(X^6) \\
& 1533979736X^{14} + 53768E_2(X^7) + 26884X^2 E_2(X^6) + 52P_4^{\text{bic}}(X, X^3) \\
& 12301987920X^{15} + 135720X E_2(X^7)
\end{aligned}$$

B.4 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres hexagonaux exterplanaires

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres hexagonaux exterplanaires. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$X P_4^{\text{bic}}(X, 1, 1) + X E_2(X) + X P_2^{\text{bic}}(1, X, 1)$$

$$\begin{aligned}
& 6X^4 + X^2E_2(X) + 4E_2(X^2) + P_4^{\text{bic}}(X^2, 1) \\
& XP_4^{\text{bic}}(1, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^2, 1, 1) + 7XE_2(X^2) + 3X^3E_2(X) + 8XP_2^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + \\
& \quad 48X^5 \\
& 12X^2E_2(X^2) + 4X^4E_2(X) + 432X^6 + 53E_2(X^3) + 2P_4^{\text{bic}}(X, X) + P_4^{\text{bic}}(X^3, 1) \\
& XP_{12}^{\text{bic}}(X, 1, 1) + 2XC_3(X^2) + 3788X^7 + 2XP_4^{\text{bic}}(X, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^3, 1, 1) + \\
& \quad 40XE_2(X^3) + 20X^3E_2(X^2) + 5X^5E_2(X) + 66XP_2^{\text{bic}}(1, X^3, 1) \\
& 102X^2E_2(X^3) + 32X^4E_2(X^2) + 6X^6E_2(X) + 34060X^8 + 280E_2(X^4) + \\
& \quad 4P_4^{\text{bic}}(X^2, X) + P_4^{\text{bic}}(X^4, 1) \\
& 5XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + 5XP_4^{\text{bic}}(X^2, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^4, 1, 1) + 517XE_2(X^4) + \\
& 190X^3E_2(X^3) + 45X^5E_2(X^2) + 7X^7E_2(X) + 572XP_2^{\text{bic}}(1, X^4, 1) + 314468X^9 \\
& 878X^2E_2(X^4) + P_4^{\text{bic}}(X^5, 1) + 2980768X^{10} + 2XP_6^{\text{bic}}(1, X, X) + 6P_4^{\text{bic}}(X^3, X) + \\
& \quad 18XC_3(X^3) + 8X^8E_2(X) + 2512E_2(X^5) + 306X^4E_2(X^3) + 60X^6E_2(X^2) + \\
& \quad 11P_4^{\text{bic}}(X, X^2) \\
& 9X^9E_2(X) + XP_4^{\text{bic}}(X^5, 1, 1) + 4732XE_2(X^5) + 1716X^3E_2(X^4) + 28895698X^{11} + \\
& \quad 5252XP_2^{\text{bic}}(1, X^5, 1) + 77X^7E_2(X^2) + 460X^5E_2(X^3) + 18XP_4^{\text{bic}}(X, X^2, 1) + \\
& \quad 7XP_4^{\text{bic}}(X^3, X, 1) \\
& 96X^8E_2(X^2) + 26P_4^{\text{bic}}(X^2, X^2) + 2912X^4E_2(X^4) + P_4^{\text{bic}}(X^6, 1) + 650X^6E_2(X^3) + \\
& 8190X^2E_2(X^5) + 8P_4^{\text{bic}}(X^4, X) + 285565642X^{12} + 10X^{10}E_2(X) + 23716E_2(X^6) \\
& 160XC_3(X^4) + 34XP_4^{\text{bic}}(X^2, X^2, 1) + 2XC_6(X^2) + XP_{12}^{\text{bic}}(X^2, 1, 1) + \\
& 35XP_4^{\text{bic}}(1, X^3, 1) + 45042XE_2(X^6) + 2XP_6^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + 4XP_6^{\text{bic}}(1, X, X^2) + \\
& \quad 2868752144X^{13} + XP_4^{\text{bic}}(X^6, 1, 1) + 4548X^5E_2(X^4) + 16437X^3E_2(X^5) + \\
& 11X^{11}E_2(X) + 2XP_6^{\text{bic}}(X, X, X) + 882X^7E_2(X^3) + 50302XP_2^{\text{bic}}(1, X^6, 1) + \\
& \quad 9XP_4^{\text{bic}}(X^4, X, 1) + 117X^9E_2(X^2) \\
& 29227557088X^{14} + 79072X^2E_2(X^6) + 80P_4^{\text{bic}}(X, X^3) + 28768X^4E_2(X^5) + \\
& \quad 45P_4^{\text{bic}}(X^3, X^2) + 6720X^6E_2(X^4) + 1160X^8E_2(X^3) + 140X^{10}E_2(X^2) + \\
& \quad P_4^{\text{bic}}(X^7, 1) + 10P_4^{\text{bic}}(X^5, X) + 12X^{12}E_2(X) + 231744E_2(X^7) \\
& 301428912126X^{15} + XP_4^{\text{bic}}(X^7, 1, 1) + 56XP_4^{\text{bic}}(X^3, X^2, 1) + 13X^{13}E_2(X) + \\
& \quad 165X^{11}E_2(X^2) + 498066XP_2^{\text{bic}}(1, X^7, 1) + 11XP_4^{\text{bic}}(X^5, X, 1) + \\
& 162248X^3E_2(X^6) + 46376X^5E_2(X^5) + 136XP_4^{\text{bic}}(X, X^3, 1) + 444210XE_2(X^7) +
\end{aligned}$$

$$9520X^7E_2(X^4) + 1488X^9E_2(X^3)$$

B.5 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres heptagonaux extérplanaires

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres heptagonaux extérplanaires. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$XP_{14}^{\text{bic}}(1, 1)$$

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$3XE_2(X)$$

$$7X^4 + 6E_2(X^2) + 3X^2E_2(X)$$

$$91X^5 + 21XE_2(X^2)$$

$$945X^6 + 48E_2(X^3) + 24X^2E_2(X^2) + 3P_4^{\text{bic}}(X, X)$$

$$10032X^7 + 190XE_2(X^3)$$

$$109188X^8 + 506E_2(X^4) + 252X^2E_2(X^3) + XP_{14}^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$1228890X^9 + 1950XE_2(X^4)$$

$$14210460X^{10} + 5460E_2(X^5) + 2730X^2E_2(X^4) + 21P_4^{\text{bic}}(X, X^2)$$

$$168235264X^{11} + 21576XE_2(X^5)$$

$$2031058680X^{12} + 62832E_2(X^6) + 31416X^2E_2(X^5)$$

$$24931542797X^{13} + 250971XE_2(X^6)$$

$$310419473114X^{14} + 749208E_2(X^7) + 374604X^2E_2(X^6) + 190P_4^{\text{bic}}(X, X^3)$$

$$3912820938171X^{15} + 3025308XE_2(X^7) + 3XC_7(X^2)$$

B.6 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres octogonaux exterplanaires

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres octogonaux exterplanaires. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$X^3 + XE_2(X) + 2XP_2^{\text{bic}}(1, X, 1)$$

$$3X^2E_2(X) + 11X^4 + 6E_2(X^2) + P_4^{\text{bic}}(X^2, 1)$$

$$148X^5 + XP_4^{\text{bic}}(1, X, 1) + 14XE_2(X^2) + 4X^3E_2(X) + 16XP_2^{\text{bic}}(1, X^2, 1)$$

$$27X^2E_2(X^2) + 6X^4E_2(X) + 1815X^6 + 66E_2(X^3) + 3P_4^{\text{bic}}(X, X) + P_4^{\text{bic}}(X^3, 1)$$

$$4XP_4^{\text{bic}}(1, X, X) + 22499X^7 + 167XE_2(X^3) + 47X^3E_2(X^2) + 7X^5E_2(X) + 184XP_2^{\text{bic}}(1, X^3, 1)$$

$$325X^2E_2(X^3) + 72X^4E_2(X^2) + 9X^6E_2(X) + 289286X^8 + 812E_2(X^4) + 6P_4^{\text{bic}}(X^2, X) + P_4^{\text{bic}}(X^4, 1)$$

$$2064XE_2(X^4) + 3XC_4(X^2) + 7XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^2) + 605X^3E_2(X^3) + 2240XP_2^{\text{bic}}(1, X^4, 1) + 10XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + 10X^7E_2(X) + 3XP_4^{\text{bic}}(X, X, X) + 101X^5E_2(X^2) + XP_{16}^{\text{bic}}(X, 1, 1) + 3839644X^9$$

$$4080X^2E_2(X^4) + 992X^4E_2(X^3) + 135X^6E_2(X^2) + 12X^8E_2(X) + 52438557X^{10} + 10438E_2(X^5) + 24P_4^{\text{bic}}(X, X^2) + 9P_4^{\text{bic}}(X^3, X) + P_4^{\text{bic}}(X^5, 1)$$

$$1482X^5E_2(X^3) + 13X^9E_2(X) + 10XP_4^{\text{bic}}(X, X, X^2) + 8010X^3E_2(X^4) + 733251176X^{11} + 10XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^3) + 173X^7E_2(X^2) + 29526XP_2^{\text{bic}}(1, X^5, 1) + 34XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, X) + 27144XE_2(X^5)$$

$$13680X^4E_2(X^4) + 141708E_2(X^6) + 2109X^6E_2(X^3) + 216X^8E_2(X^2) + \\ 57P_4^{\text{bic}}(X^2, X^2) + 54834X^2E_2(X^5) + 10458325094X^{12} + 12P_4^{\text{bic}}(X^4, X) + \\ 15X^{10}E_2(X) + P_4^{\text{bic}}(X^6, 1)$$

$$70XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, X^2) + 3XP_8^{\text{bic}}(1, X, X) + 151683323689X^{13} + 373095XE_2(X^6) + \\ 263X^9E_2(X^2) + 36XC_4(X^3) + 33XP_4^{\text{bic}}(X, X^2, X) + 13XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^4) + \\ 13XP_4^{\text{bic}}(X, X, X^3) + 2863X^7E_2(X^3) + 407176XP_2^{\text{bic}}(1, X^6, 1) + \\ 6XP_4^{\text{bic}}(X^2, X, X^2) + 111027X^3E_2(X^5) + 21483X^5E_2(X^4) + 16X^{11}E_2(X) + \\ 110XP_4^{\text{bic}}(1, X^3, 1)$$

$$18X^{12}E_2(X) + 2231662273500X^{14} + 253P_4^{\text{bic}}(X, X^3) + 195822X^4E_2(X^5) + \\ 315X^{10}E_2(X^2) + P_4^{\text{bic}}(X^7, 1) + 31878X^6E_2(X^4) + 1997320E_2(X^7) + \\ 99P_4^{\text{bic}}(X^3, X^2) + 3784X^8E_2(X^3) + 15P_4^{\text{bic}}(X^5, X) + 766843X^2E_2(X^6)$$

$$45336X^7E_2(X^4) + 371X^{11}E_2(X^2) + 16XP_4^{\text{bic}}(X^2, X, X^3) + 19X^{13}E_2(X) + \\ 115XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, X^3) + 115XP_4^{\text{bic}}(X, X^2, X^2) + 33242246178589X^{15} + \\ 4856X^9E_2(X^3) + 368XP_4^{\text{bic}}(1, X^3, X) + 3858920XE_2(X^7) + \\ 16XP_4^{\text{bic}}(X, X, X^4) + 5816720XP_2^{\text{bic}}(1, X^7, 1) + 16XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^5) + \\ 5312775X^5E_2(X^5) + 1588820X^3E_2(X^6)$$

B.7 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres ennégonaux exterplanaires

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres ennégonaux exterplanaires. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$XP_{18}^{\text{bic}}(1, 1)$$

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$4XE_2(X)$$

$$15X^4 + 8E_2(X^2) + 3X^2E_2(X) + XP_6^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$\begin{aligned}
& 228X^5 + 38XE_2(X^2) \\
& 3176X^6 + 88E_2(X^3) + 44X^2E_2(X^2) + 4P_4^{\text{bic}}(X, X) \\
& 45239X^7 + 467XE_2(X^3) + 4XC_3(X^2) + XP_6^{\text{bic}}(1, X) \\
& 668484X^8 + 1240E_2(X^4) + 620X^2E_2(X^3) \\
& 10226656X^9 + 6545XE_2(X^4) \\
& 161028168X^{10} + 18240E_2(X^5) + 9115X^2E_2(X^4) + 38P_4^{\text{bic}}(X, X^2) + \\
& \quad XP_{18}^{\text{bic}}(X, 1) + 52XC_3(X^3) + 4XP_6^{\text{bic}}(X, X) \\
& 2596997728X^{11} + 98728XE_2(X^5) \\
& 42726780116X^{12} + 285384E_2(X^6) + 142692X^2E_2(X^5) \\
& 714886372048X^{13} + 1566032XE_2(X^6) + 744XC_3(X^4) + 8XP_6^{\text{bic}}(1, X^2) \\
& 12134350053552X^{14} + 4637880E_2(X^7) + 2318940X^2E_2(X^6) + 468P_4^{\text{bic}}(X, X^3) \\
& 208540066329072X^{15} + 25747128XE_2(X^7)
\end{aligned}$$

B.8 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres décagonaux exterplanaires

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres décagonaux exterplanaires. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$XP_4^{\text{bic}}(X, 1, 1) + 2XE_2(X) + 2XP_2^{\text{bic}}(1, X, 1)$$

$$4X^2E_2(X) + 20X^4 + 8E_2(X^2) + P_4^{\text{bic}}(X^2, 1)$$

$$2XP_4^{\text{bic}}(1, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^2, 1, 1) + 24XE_2(X^2) + 6X^3E_2(X) +$$

$$\begin{aligned}
& 26X P_2^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + 326X^5 \\
& 5187X^6 + 47X^2 E_2(X^2) + 8X^4 E_2(X) + 186E_2(X^3) + 4P_4^{\text{bic}}(X, X) + P_4^{\text{bic}}(X^3, 1) \\
& \quad 6X P_4^{\text{bic}}(X, X, 1) + X P_4^{\text{bic}}(X^3, 1, 1) + 290X E_2(X^3) + 84X^3 E_2(X^2) + \\
& \quad \quad 10X^5 E_2(X) + 384X P_2^{\text{bic}}(1, X^3, 1) + 83254X^7 \\
& 748X^2 E_2(X^3) + 128X^4 E_2(X^2) + 12X^6 E_2(X) + 1393656X^8 + 1776E_2(X^4) + \\
& \quad \quad 8P_4^{\text{bic}}(X^2, X) + P_4^{\text{bic}}(X^4, 1) \\
& 19X P_4^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + 10X P_4^{\text{bic}}(X^2, X, 1) + X P_4^{\text{bic}}(X^4, 1, 1) + 5780X E_2(X^4) + \\
& 1406X^3 E_2(X^3) + 180X^5 E_2(X^2) + 14X^7 E_2(X) + 6160X P_2^{\text{bic}}(1, X^4, 1) + 24140560X^9 \\
& 12320X^2 E_2(X^4) + 2296X^4 E_2(X^3) + 240X^6 E_2(X^2) + 16X^8 E_2(X) + \\
& 430619464X^{10} + 29744E_2(X^5) + 42P_4^{\text{bic}}(X, X^2) + 12P_4^{\text{bic}}(X^3, X) + P_4^{\text{bic}}(X^5, 1) \\
& 7868205991X^{11} + 308X^7 E_2(X^2) + 105896X P_2^{\text{bic}}(1, X^5, 1) + 3450X^5 E_2(X^3) + \\
& X P_{20}^{\text{bic}}(X, 1, 1) + 14X P_4^{\text{bic}}(X^3, X, 1) + 98978X E_2(X^5) + 24287X^3 E_2(X^4) + \\
& \quad 4X C_5(X^2) + X P_4^{\text{bic}}(X^5, 1, 1) + 18X^9 E_2(X) + 68X P_4^{\text{bic}}(X, X^2, 1) \\
& 146676950316X^{12} + 20X^{10} E_2(X) + 216580X^2 E_2(X^5) + 16P_4^{\text{bic}}(X^4, X) + \\
& 384X^8 E_2(X^2) + 526968E_2(X^6) + 4900X^6 E_2(X^3) + 41600X^4 E_2(X^4) + \\
& \quad \quad P_4^{\text{bic}}(X^6, 1) + 100P_4^{\text{bic}}(X^2, X^2) \\
& 18X P_4^{\text{bic}}(X^4, X, 1) + 1909012X P_2^{\text{bic}}(1, X^6, 1) + 1777216X E_2(X^6) + \\
& 252X P_4^{\text{bic}}(1, X^3, 1) + 22X^{11} E_2(X) + 440748X^3 E_2(X^5) + 468X^9 E_2(X^2) + \\
& X P_4^{\text{bic}}(X^6, 1, 1) + 2780878816652X^{13} + 135X P_4^{\text{bic}}(X^2, X^2, 1) + 6678X^7 E_2(X^3) + \\
& \quad \quad 65520X^5 E_2(X^4) \\
& 560X^{10} E_2(X^2) + 780216X^4 E_2(X^5) + 24X^{12} E_2(X) + 97440X^6 E_2(X^4) + \\
& 580P_4^{\text{bic}}(X, X^3) + 9705728E_2(X^7) + 53489194143104X^{14} + 8816X^8 E_2(X^3) + \\
& \quad 20P_4^{\text{bic}}(X^5, X) + 174P_4^{\text{bic}}(X^3, X^2) + 3965808X^2 E_2(X^6) + P_4^{\text{bic}}(X^7, 1) \\
& 33087296X E_2(X^7) + 217X P_4^{\text{bic}}(X^3, X^2, 1) + 138880X^7 E_2(X^4) + \\
& 660X^{11} E_2(X^2) + X P_4^{\text{bic}}(X^7, 1, 1) + 22X P_4^{\text{bic}}(X^5, X, 1) + 8259392X^3 E_2(X^6) + \\
& 1041741389512864X^{15} + 35640704X P_2^{\text{bic}}(1, X^7, 1) + 26X^{13} E_2(X) + \\
& \quad 11346X^9 E_2(X^3) + 992X P_4^{\text{bic}}(X, X^3, 1) + 1270752X^5 E_2(X^5)
\end{aligned}$$

APPENDICE C

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES k -GONAUX EXTERPLANAIRES SANS SOMMETS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR À 3

C.1 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres pentagonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres pentagonaux
exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3. Ces termes sont regroupés selon
le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$XP_{10}^{\text{bic}}(1, 1)$$

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$P_2^{\text{bic}}(X, X)$$

$$C_2(X^2) + P_2^{\text{bic}}(1, X^2)$$

$$X^5 + 2P_2^{\text{bic}}(X, X^2)$$

$$2X^6 + 2C_2(X^3) + 2P_2^{\text{bic}}(1, X^3)$$

$$6X^7 + 4P_2^{\text{bic}}(X, X^3)$$

$$\begin{aligned}
&12X^8 + 4C_2(X^4) + 4P_2^{\text{bic}}(1, X^4) \\
&28X^9 + 8P_2^{\text{bic}}(X, X^4) \\
&56X^{10} + 8C_2(X^5) + 8P_2^{\text{bic}}(1, X^5) \\
&120X^{11} + 16P_2^{\text{bic}}(X, X^5) \\
&240X^{12} + 16C_2(X^6) + 16P_2^{\text{bic}}(1, X^6) \\
&496X^{13} + 32P_2^{\text{bic}}(X, X^6) \\
&992X^{14} + 32C_2(X^7) + 32P_2^{\text{bic}}(1, X^7) \\
&2016X^{15} + 64P_2^{\text{bic}}(X, X^7)
\end{aligned}$$

C.2 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres hexagonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres hexagonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$XP_{12}^{\text{bic}}(1, 1, 1)$$

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$P_2^{\text{bic}}(X, X) + XP_4^{\text{bic}}(X, 1, 1)$$

$$X^4 + C_2(X^2) + P_2^{\text{bic}}(1, X^2) + P_4^{\text{bic}}(X^2, 1) + XP_6^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$5X^5 + 4P_2^{\text{bic}}(X, X^2) + P_2^{\text{bic}}(X^3, X) + XC_2(X^2) + XP_4^{\text{bic}}(X^2, 1, 1)$$

$$23X^6 + 4C_2(X^3) + 4P_2^{\text{bic}}(1, X^3) + P_4^{\text{bic}}(X, X) + 3P_2^{\text{bic}}(X^2, X^2) + P_4^{\text{bic}}(X^3, 1) +$$

$$P_2^{\text{bic}}(X^4, X)$$

$$98X^7 + 14P_2^{\text{bic}}(X, X^3) + 2P_2^{\text{bic}}(X^3, X^2) + P_2^{\text{bic}}(X^5, X) + 4XC_2(X^3) + \\ XP_4^{\text{bic}}(X, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^3, 1, 1) + XC_3(X^2) + XP_6^{\text{bic}}(1, 1, X^2)$$

$$393X^8 + 17C_2(X^4) + 17P_2^{\text{bic}}(1, X^4) + 13P_2^{\text{bic}}(X^2, X^3) + P_4^{\text{bic}}(X^2, X) + \\ 3P_2^{\text{bic}}(X^4, X^2) + P_4^{\text{bic}}(X^4, 1) + P_2^{\text{bic}}(X^6, X)$$

$$1600X^9 + 53P_2^{\text{bic}}(X, X^4) + 13P_2^{\text{bic}}(X^3, X^3) + 3P_2^{\text{bic}}(X^5, X^2) + P_2^{\text{bic}}(X^7, X) + \\ 17XC_2(X^4) + XP_4^{\text{bic}}(X^2, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^4, 1, 1)$$

$$6486X^{10} + 66C_2(X^5) + 66P_2^{\text{bic}}(1, X^5) + 3P_4^{\text{bic}}(X, X^2) + 48P_2^{\text{bic}}(X^2, X^4) + \\ P_4^{\text{bic}}(X^3, X) + 12P_2^{\text{bic}}(X^4, X^3) + P_4^{\text{bic}}(X^5, 1) + 3P_2^{\text{bic}}(X^6, X^2) + P_2^{\text{bic}}(X^8, X) + \\ 4XC_3(X^3) + XP_6^{\text{bic}}(1, X, X) + XP_6^{\text{bic}}(1, 1, X^3)$$

$$26694X^{11} + 203P_2^{\text{bic}}(X, X^5) + 49P_2^{\text{bic}}(X^3, X^4) + 13P_2^{\text{bic}}(X^5, X^3) + 3P_2^{\text{bic}}(X^7, X^2) + \\ P_2^{\text{bic}}(X^9, X) + 66XC_2(X^5) + 3XP_4^{\text{bic}}(X, X^2, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^3, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^5, 1, 1)$$

$$110818X^{12} + 269C_2(X^6) + 269P_2^{\text{bic}}(1, X^6) + 203P_2^{\text{bic}}(X^2, X^5) + 3P_4^{\text{bic}}(X^2, X^2) + \\ 49P_2^{\text{bic}}(X^4, X^4) + P_4^{\text{bic}}(X^4, X) + 13P_2^{\text{bic}}(X^6, X^3) + P_4^{\text{bic}}(X^6, 1) + 3P_2^{\text{bic}}(X^8, X^2) + \\ P_2^{\text{bic}}(X^{10}, X)$$

$$465890X^{13} + 812P_2^{\text{bic}}(X, X^6) + 202P_2^{\text{bic}}(X^3, X^5) + 48P_2^{\text{bic}}(X^5, X^4) + \\ 13P_2^{\text{bic}}(X^7, X^3) + 3P_2^{\text{bic}}(X^9, X^2) + P_2^{\text{bic}}(X^{11}, X) + 269XC_2(X^6) + \\ 3XP_4^{\text{bic}}(X^2, X^2, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^4, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^6, 1, 1) + 17XC_3(X^4) + \\ XP_6^{\text{bic}}(1, X, X^2) + XP_6^{\text{bic}}(1, 1, X^4)$$

$$1978032X^{14} + 1102C_2(X^7) + 1102P_2^{\text{bic}}(1, X^7) + 10P_4^{\text{bic}}(X, X^3) + \\ 833P_2^{\text{bic}}(X^2, X^6) + 3P_4^{\text{bic}}(X^3, X^2) + 203P_2^{\text{bic}}(X^4, X^5) + P_4^{\text{bic}}(X^5, X) + \\ 49P_2^{\text{bic}}(X^6, X^4) + P_4^{\text{bic}}(X^7, 1) + 13P_2^{\text{bic}}(X^8, X^3) + 3P_2^{\text{bic}}(X^{10}, X^2) + P_2^{\text{bic}}(X^{12}, X)$$

$$8481860X^{15} + 3321P_2^{\text{bic}}(X, X^7) + 833P_2^{\text{bic}}(X^3, X^6) + 203P_2^{\text{bic}}(X^5, X^5) + \\ 49P_2^{\text{bic}}(X^7, X^4) + 13P_2^{\text{bic}}(X^9, X^3) + 3P_2^{\text{bic}}(X^{11}, X^2) + P_2^{\text{bic}}(X^{13}, X) + 1102XC_2(X^7) + \\ 10XP_4^{\text{bic}}(X, X^3, 1) + 3XP_4^{\text{bic}}(X^3, X^2, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^5, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^7, 1, 1)$$

C.3 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres heptagonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres heptagonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$XP_{14}^{\text{bic}}(1, 1)$$

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$2P_2^{\text{bic}}(X, X)$$

$$2X^4 + 2P_2^{\text{bic}}(1, X^2) + P_2^{\text{bic}}(X^2, X) + 2C_2(X^2)$$

$$18X^5 + 8P_2^{\text{bic}}(X, X^2)$$

$$103X^6 + 9P_2^{\text{bic}}(1, X^3) + 4P_2^{\text{bic}}(X^2, X^2) + 9C_2(X^3) + P_4^{\text{bic}}(X, X)$$

$$602X^7 + 38P_2^{\text{bic}}(X, X^3)$$

$$3436X^8 + 50P_2^{\text{bic}}(1, X^4) + 23P_2^{\text{bic}}(X^2, X^3) + 50C_2(X^4)$$

$$20166X^9 + 200P_2^{\text{bic}}(X, X^4)$$

$$119848X^{10} + 279P_2^{\text{bic}}(1, X^5) + 125P_2^{\text{bic}}(X^2, X^4) + 279C_2(X^5) + 4P_4^{\text{bic}}(X, X^2)$$

$$726168X^{11} + 1124P_2^{\text{bic}}(X, X^5)$$

$$4464572X^{12} + 1652P_2^{\text{bic}}(1, X^6) + 738P_2^{\text{bic}}(X^2, X^5) + 1652C_2(X^6)$$

$$27836036X^{13} + 6608P_2^{\text{bic}}(X, X^6)$$

$$175620165X^{14} + 10026P_2^{\text{bic}}(1, X^7) + 4437P_2^{\text{bic}}(X^2, X^6) + 10026C_2(X^7) + 19P_4^{\text{bic}}(X, X^3)$$

$$1119807678X^{15} + 40142P_2^{\text{bic}}(X, X^7)$$

C.4 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres octogonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres octogonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$XP_{16}^{\text{bic}}(1, 1, 1)$$

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$2P_2^{\text{bic}}(X, X) + XP_4^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$4X^4 + 2C_2(X^2) + 2P_2^{\text{bic}}(1, X^2) + 2P_2^{\text{bic}}(X^2, X) + P_4^{\text{bic}}(X^2, 1)$$

$$38X^5 + 12P_2^{\text{bic}}(X, X^2) + 2P_2^{\text{bic}}(X^3, X) + 2XC_2(X^2) + XP_4^{\text{bic}}(1, 1, X^2) + XP_8^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$296X^6 + 14C_2(X^3) + 14P_2^{\text{bic}}(1, X^3) + 2P_4^{\text{bic}}(X, X) + 11P_2^{\text{bic}}(X^2, X^2) + P_4^{\text{bic}}(X^3, 1) + 3P_2^{\text{bic}}(X^4, X)$$

$$2232X^7 + 81P_2^{\text{bic}}(X, X^3) + 15P_2^{\text{bic}}(X^3, X^2) + 3P_2^{\text{bic}}(X^5, X) + 16XC_2(X^3) + 2XP_4^{\text{bic}}(1, X, X) + XP_4^{\text{bic}}(X, 1, X^2) + XP_4^{\text{bic}}(1, 1, X^3)$$

$$17007X^8 + 106C_2(X^4) + 106P_2^{\text{bic}}(1, X^4) + 82P_2^{\text{bic}}(X^2, X^3) + 3P_4^{\text{bic}}(X^2, X) + 20P_2^{\text{bic}}(X^4, X^2) + P_4^{\text{bic}}(X^4, 1) + 4P_2^{\text{bic}}(X^6, X)$$

$$132265X^9 + 579P_2^{\text{bic}}(X, X^4) + 117P_2^{\text{bic}}(X^3, X^3) + 25P_2^{\text{bic}}(X^5, X^2) + 4P_2^{\text{bic}}(X^7, X) + 124XC_2(X^4) + 2XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + 2XP_4^{\text{bic}}(X, X, X) + 3XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^2) + XP_4^{\text{bic}}(X, 1, X^3) + XP_4^{\text{bic}}(1, 1, X^4) + 2XC_4(X^2) + XP_8^{\text{bic}}(1, 1, X^2)$$

$$1050395X^{10} + 801C_2(X^5) + 801P_2^{\text{bic}}(1, X^5) + 10P_4^{\text{bic}}(X, X^2) + 601P_2^{\text{bic}}(X^2, X^4) + 4P_4^{\text{bic}}(X^3, X) + 164P_2^{\text{bic}}(X^4, X^3) + P_4^{\text{bic}}(X^5, 1) + 31P_2^{\text{bic}}(X^6, X^2) + 5P_2^{\text{bic}}(X^8, X)$$

$$8504763X^{11} + 4406P_2^{\text{bic}}(X, X^5) + 910P_2^{\text{bic}}(X^3, X^4) + 213P_2^{\text{bic}}(X^5, X^3) + 37P_2^{\text{bic}}(X^7, X^2) + 5P_2^{\text{bic}}(X^9, X) + 983XC_2(X^5) + 10XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, X) + 5XP_4^{\text{bic}}(X, X, X^2) + 4XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^3) + XP_4^{\text{bic}}(X^2, 1, X^3) + XP_4^{\text{bic}}(X, 1, X^4) + XP_4^{\text{bic}}(1, 1, X^5)$$

$$70031522X^{12} + 6341C_2(X^6) + 6341P_2^{\text{bic}}(1, X^6) + 4718P_2^{\text{bic}}(X^2, X^5) + \\ 17P_4^{\text{bic}}(X^2, X^2) + 1297P_2^{\text{bic}}(X^4, X^4) + 5P_4^{\text{bic}}(X^4, X) + 276P_2^{\text{bic}}(X^6, X^3) + \\ P_4^{\text{bic}}(X^6, 1) + 44P_2^{\text{bic}}(X^8, X^2) + 6P_2^{\text{bic}}(X^{10}, X)$$

$$585174191X^{13} + 34913P_2^{\text{bic}}(X, X^6) + 7331P_2^{\text{bic}}(X^3, X^5) + 1766P_2^{\text{bic}}(X^5, X^4) + \\ 341P_2^{\text{bic}}(X^7, X^3) + 51P_2^{\text{bic}}(X^9, X^2) + 6P_2^{\text{bic}}(X^{11}, X) + 7904XC_2(X^6) + \\ 14XP_4^{\text{bic}}(1, X^3, 1) + 11XP_4^{\text{bic}}(X, X^2, X) + 17XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, X^2) + \\ 3XP_4^{\text{bic}}(X^2, X, X^2) + 6XP_4^{\text{bic}}(X, X, X^3) + 5XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^4) + \\ XP_4^{\text{bic}}(X^2, 1, X^4) + XP_4^{\text{bic}}(X, 1, X^5) + XP_4^{\text{bic}}(1, 1, X^6) + 14XC_4(X^3) + \\ 2XP_8^{\text{bic}}(1, X, X) + XP_8^{\text{bic}}(1, 1, X^3)$$

$$4952155092X^{14} + 51632C_2(X^7) + 51632P_2^{\text{bic}}(1, X^7) + 62P_4^{\text{bic}}(X, X^3) + \\ 38089P_2^{\text{bic}}(X^2, X^6) + 25P_4^{\text{bic}}(X^3, X^2) + 10722P_2^{\text{bic}}(X^4, X^5) + 6P_4^{\text{bic}}(X^5, X) + \\ 2333P_2^{\text{bic}}(X^6, X^4) + P_4^{\text{bic}}(X^7, 1) + 422P_2^{\text{bic}}(X^8, X^3) + 59P_2^{\text{bic}}(X^{10}, X^2) + \\ 7P_2^{\text{bic}}(X^{12}, X)$$

$$42376549461X^{15} + 285834P_2^{\text{bic}}(X, X^7) + 60537P_2^{\text{bic}}(X^3, X^6) + 14950P_2^{\text{bic}}(X^5, X^5) + \\ 3002P_2^{\text{bic}}(X^7, X^4) + 505P_2^{\text{bic}}(X^9, X^3) + 67P_2^{\text{bic}}(X^{11}, X^2) + 7P_2^{\text{bic}}(X^{13}, X) + \\ 65350XC_2(X^7) + 62XP_4^{\text{bic}}(1, X^3, X) + 33XP_4^{\text{bic}}(X, X^2, X^2) + 25XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, X^3) + \\ 7XP_4^{\text{bic}}(X^2, X, X^3) + 7XP_4^{\text{bic}}(X, X, X^4) + XP_4^{\text{bic}}(X^3, 1, X^4) + \\ 6XP_4^{\text{bic}}(1, X, X^5) + XP_4^{\text{bic}}(X^2, 1, X^5) + XP_4^{\text{bic}}(X, 1, X^6) + XP_4^{\text{bic}}(1, 1, X^7)$$

C.5 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres ennéagonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres ennéagonaux
exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3. Ces termes sont regroupés selon
le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

1

$$XP_{18}^{\text{bic}}(1, 1)$$

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1)$$

$$\begin{aligned}
& 3P_2^{\text{bic}}(X, X) \\
& 7X^4 + 3P_2^{\text{bic}}(1, X^2) + P_2^{\text{bic}}(X^2, X) + 3C_2(X^2) + XP_6^{\text{bic}}(X, 1) \\
& 75X^5 + 19P_2^{\text{bic}}(X, X^2) \\
& 692X^6 + 22P_2^{\text{bic}}(1, X^3) + 13P_2^{\text{bic}}(X^2, X^2) + 22C_2(X^3) + 2P_4^{\text{bic}}(X, X) \\
& 6418X^7 + 150P_2^{\text{bic}}(X, X^3) + 3XC_3(X^2) \\
& 60690X^8 + 200P_2^{\text{bic}}(1, X^4) + 116P_2^{\text{bic}}(X^2, X^3) + 200C_2(X^4) \\
& 590148X^9 + 1328P_2^{\text{bic}}(X, X^4) \\
& 5876046X^{10} + 1870P_2^{\text{bic}}(1, X^5) + 1048P_2^{\text{bic}}(X^2, X^4) + 1870C_2(X^5) + \\
& 12P_4^{\text{bic}}(X, X^2) + 22XC_3(X^3) + 2XP_6^{\text{bic}}(X, X) \\
& 59752256X^{11} + 12608P_2^{\text{bic}}(X, X^5) \\
& 618487252X^{12} + 18508P_2^{\text{bic}}(1, X^6) + 10208P_2^{\text{bic}}(X^2, X^5) + 18508C_2(X^6) \\
& 6500207778X^{13} + 125468P_2^{\text{bic}}(X, X^6) + 200XC_3(X^4) \\
& 69218710502X^{14} + 189246P_2^{\text{bic}}(1, X^7) + 102826P_2^{\text{bic}}(X^2, X^6) + 189246C_2(X^7) + \\
& 92P_4^{\text{bic}}(X, X^3) \\
& 745558736564X^{15} + 1291608P_2^{\text{bic}}(X, X^7)
\end{aligned}$$

C.6 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres decagonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres decagonaux exterplanaires sans sommets de degré supérieur à 3. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

$$\begin{aligned}
&XP_{20}^{\text{bic}}(1, 1, 1) \\
&P_4^{\text{bic}}(X, 1) \\
&3P_2^{\text{bic}}(X, X) + XP_4^{\text{bic}}(X, 1, 1) \\
&10X^4 + 3C_2(X^2) + 3P_2^{\text{bic}}(1, X^2) + 3P_2^{\text{bic}}(X^2, X) + P_4^{\text{bic}}(X^2, 1) \\
&123X^5 + 25P_2^{\text{bic}}(X, X^2) + 4P_2^{\text{bic}}(X^3, X) + 3XC_2(X^2) + XP_4^{\text{bic}}(1, X, 1) + \\
&\quad XP_4^{\text{bic}}(X^2, 1, 1) \\
&1381X^6 + 30C_2(X^3) + 30P_2^{\text{bic}}(1, X^3) + 3P_4^{\text{bic}}(X, X) + 24P_2^{\text{bic}}(X^2, X^2) + \\
&\quad P_4^{\text{bic}}(X^3, 1) + 5P_2^{\text{bic}}(X^4, X) + XP_{10}^{\text{bic}}(1, 1, X) \\
&15270X^7 + 250P_2^{\text{bic}}(X, X^3) + 38P_2^{\text{bic}}(X^3, X^2) + 6P_2^{\text{bic}}(X^5, X) + 37XC_2(X^3) + \\
&\quad 3XP_4^{\text{bic}}(X, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^3, 1, 1) \\
&173814X^8 + 331C_2(X^4) + 331P_2^{\text{bic}}(1, X^4) + 272P_2^{\text{bic}}(X^2, X^3) + 5P_4^{\text{bic}}(X^2, X) + \\
&\quad 52P_2^{\text{bic}}(X^4, X^2) + P_4^{\text{bic}}(X^4, 1) + 7P_2^{\text{bic}}(X^6, X) \\
&2033370X^9 + 2682P_2^{\text{bic}}(X, X^4) + 431P_2^{\text{bic}}(X^3, X^3) + 69P_2^{\text{bic}}(X^5, X^2) + 8P_2^{\text{bic}}(X^7, X) + \\
&\quad 416XC_2(X^4) + 7XP_4^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + 5XP_4^{\text{bic}}(X^2, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^4, 1, 1) \\
&24401956X^{10} + 3756C_2(X^5) + 3756P_2^{\text{bic}}(1, X^5) + 22P_4^{\text{bic}}(X, X^2) + 3030P_2^{\text{bic}}(X^2, X^4) + \\
&\quad 7P_4^{\text{bic}}(X^3, X) + 630P_2^{\text{bic}}(X^4, X^3) + P_4^{\text{bic}}(X^5, 1) + 87P_2^{\text{bic}}(X^6, X^2) + 9P_2^{\text{bic}}(X^8, X) \\
&299213825X^{11} + 30846P_2^{\text{bic}}(X, X^5) + 4996P_2^{\text{bic}}(X^3, X^4) + 873P_2^{\text{bic}}(X^5, X^3) + \\
&\quad 108P_2^{\text{bic}}(X^7, X^2) + 10P_2^{\text{bic}}(X^9, X) + 4872XC_2(X^5) + 22XP_4^{\text{bic}}(X, X^2, 1) + \\
&\quad 7XP_4^{\text{bic}}(X^3, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^5, 1, 1) + 3XC_5(X^2) + XP_{10}^{\text{bic}}(1, 1, X^2) \\
&3736661587X^{12} + 44820C_2(X^6) + 44820P_2^{\text{bic}}(1, X^6) + 35933P_2^{\text{bic}}(X^2, X^5) + \\
&\quad 42P_4^{\text{bic}}(X^2, X^2) + 7582P_2^{\text{bic}}(X^4, X^4) + 9P_4^{\text{bic}}(X^4, X) + 1164P_2^{\text{bic}}(X^6, X^3) + \\
&\quad P_4^{\text{bic}}(X^6, 1) + 130P_2^{\text{bic}}(X^8, X^2) + 11P_2^{\text{bic}}(X^{10}, X) \\
&47396703606X^{13} + 370896P_2^{\text{bic}}(X, X^6) + 60765P_2^{\text{bic}}(X^3, X^5) + 10913P_2^{\text{bic}}(X^5, X^4) + \\
&\quad 1507P_2^{\text{bic}}(X^7, X^3) + 155P_2^{\text{bic}}(X^9, X^2) + 12P_2^{\text{bic}}(X^{11}, X) + 59054XC_2(X^6) + \\
&\quad 64XP_4^{\text{bic}}(1, X^3, 1) + 42XP_4^{\text{bic}}(X^2, X^2, 1) + 9XP_4^{\text{bic}}(X^4, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^6, 1, 1) \\
&609299987746X^{14} + 553220C_2(X^7) + 553220P_2^{\text{bic}}(1, X^7) + 206P_4^{\text{bic}}(X, X^3) + \\
&\quad 441279P_2^{\text{bic}}(X^2, X^6) + 66P_4^{\text{bic}}(X^3, X^2) + 94757P_2^{\text{bic}}(X^4, X^5) + 11P_4^{\text{bic}}(X^5, X) + \\
&\quad 15084P_2^{\text{bic}}(X^6, X^4) + P_4^{\text{bic}}(X^7, 1) + 1906P_2^{\text{bic}}(X^8, X^3) + 181P_2^{\text{bic}}(X^{10}, X^2) +
\end{aligned}$$

$$13P_2^{\text{bic}}(X^{12}, X)$$

$$\begin{aligned} &7924424626588X^{15} + 4614344P_2^{\text{bic}}(X, X^7) + 760883P_2^{\text{bic}}(X^3, X^6) + \\ &139981P_2^{\text{bic}}(X^5, X^5) + 20243P_2^{\text{bic}}(X^7, X^4) + 2365P_2^{\text{bic}}(X^9, X^3) + \\ &210P_2^{\text{bic}}(X^{11}, X^2) + 14P_2^{\text{bic}}(X^{13}, X) + 738458XC_2(X^7) + 206XP_4^{\text{bic}}(X, X^3, 1) + \\ &66XP_4^{\text{bic}}(X^3, X^2, 1) + 11XP_4^{\text{bic}}(X^5, X, 1) + XP_4^{\text{bic}}(X^7, 1, 1) \end{aligned}$$

APPENDICE D

DÉVELOPPEMENT MOLÉCULAIRE DES 2-ARBRES POLYGONAUX EXTERPLANAIRES

D.1 Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres polygonaux extérplanaires

Premiers termes du développement moléculaire des 2-arbres polygonaux extérplanaires. Ces termes sont regroupés selon le cardinal sur lequel ils sont concentrés.

$$E_2(X)$$

$$P_6^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$P_8^{\text{bic}}(1, 1, X) + P_4^{\text{bic}}(X, 1, X)$$

$$2X E_2(X^2) + P_{10}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$P_6^{\text{bic}}(X, 1, X) + 3X^2 E_2(X^2) + X^6 + 2P_4^{\text{bic}}(1, X, X) + E_2(X^3) + P_{12}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$10X E_2(X^3) + 9X^7 + P_{14}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$17X^2 E_2(X^3) + 42X^8 + P_8^{\text{bic}}(X, 1, X) + P_4^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + 9E_2(X^4) + 4P_4^{\text{bic}}(X, X, X) + P_{16}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$2P_6^{\text{bic}}(1, X, X) + C_3(X^3) + 42X E_2(X^4) + 216X^9 + P_{18}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$92X^2 E_2(X^4) + 969X^{10} + 10P_4^{\text{bic}}(1, X^2, X) + 44E_2(X^5) + P_{10}^{\text{bic}}(X, 1, X) + P_{20}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$196XE_2(X^5) + 4586X^{11} + P_{22}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$4P_6^{\text{bic}}(X, X, X) + 5C_3(X^4) + 425X^2E_2(X^5) + 21288X^{12} + 2P_8^{\text{bic}}(1, X, X) + C_4(X^3) + 20P_4^{\text{bic}}(X, X^2, X) + 4P_4^{\text{bic}}(1, X^3, 1) + 219E_2(X^6) + P_{12}^{\text{bic}}(X, 1, X) + P_6^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + P_{24}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$902XE_2(X^6) + 101346X^{13} + P_{26}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$2116X^2E_2(X^6) + 485866X^{14} + 44P_4^{\text{bic}}(1, X^3, X) + 1049E_2(X^7) + P_{14}^{\text{bic}}(X, 1, X) + P_{28}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$10P_6^{\text{bic}}(1, X^2, X) + 27C_3(X^5) + 4266XE_2(X^7) + 2365835X^{15} + 2P_{10}^{\text{bic}}(1, X, X) + C_5(X^3) + P_{30}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$10298X^2E_2(X^7) + 11638945X^{16} + 4P_8^{\text{bic}}(X, X, X) + 5C_4(X^4) + 93P_4^{\text{bic}}(X, X^3, X) + 21P_4^{\text{bic}}(1, X^4, 1) + 5096E_2(X^8) + P_{16}^{\text{bic}}(X, 1, X) + P_8^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + P_{32}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$20792XE_2(X^8) + 57895531X^{17} + P_{34}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$20P_6^{\text{bic}}(X, X^2, X) + 127C_3(X^6) + 51405X^2E_2(X^8) + 290616677X^{18} + 194P_4^{\text{bic}}(1, X^4, X) + 24959E_2(X^9) + 2P_{12}^{\text{bic}}(1, X, X) + C_6(X^3) + 4P_6^{\text{bic}}(1, X^3, 1) + P_{18}^{\text{bic}}(X, 1, X) + P_{36}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$103048XE_2(X^9) + 1471238292X^{19} + P_{38}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

$$258974X^2E_2(X^9) + 7503793909X^{20} + 10P_8^{\text{bic}}(1, X^2, X) + 27C_4(X^5) + 445P_4^{\text{bic}}(X, X^4, X) + 93P_4^{\text{bic}}(1, X^5, 1) + 124268E_2(X^{10}) + 4P_{10}^{\text{bic}}(X, X, X) + 5C_5(X^4) + P_{20}^{\text{bic}}(X, 1, X) + P_{10}^{\text{bic}}(1, X^2, 1) + P_{40}^{\text{bic}}(1, 1, X)$$

RÉFÉRENCES

- Auger, Pierre, Gilbert Labelle et Pierre Leroux, 2002. « Combinatorial Addition Formulas and Applications ». *Advances in Applied Mathematics*, vol. 28, no 3-4, p. 302-342.
- Beineke, L., et J. W. Moon. 1969. « Several proofs of the number of labeled 2-dimensional trees ». *Proof Techniques in Graph Theory*, F. Harary, (editeur), p.11-20, New York : Academic Press.
- Bergeron, François, Gilbert Labelle et Pierre Leroux. 1994. *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, « Publications du Laboratoire Combinatoire et d'Informatique Mathématique », no 19, Montréal : Université du Québec à Montréal, Département de mathématiques et d'informatique, 394 p.
- Brunvoll, Jon, Sven J. Cyvin et B. N. Cyvin. 1996. « Enumeration of Poly-5-catafusenes Representing a Class of Catacondensed Polycyclic Conjugated Hydrocarbons ». *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, vol. 36, no 1, p. 91-99.
- J. Brunvoll, S.J. Cyvin et B.N. Cyvin. 1997. « Enumeration of tree-like octagonal systems ». *Journal of Mathematical Chemistry*, vol. 21, p. 193-196.
- Cyvin, Sven J., et Ivan Gutman. 1989. *Introduction to the theory of benzenoid hydrocarbons*, Berlin : Springer-Verlag, 152p.
- Ducharme, Martin. 2005. « 2-abres k-gonaux exterplans et exterplnaires et développement moléculaire ». Mémoire de Maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal.
- Ducharme, Martin, Cédric Lamathe et Pierre Leroux. 2007. « Une classification des arbres plans ». *Annales des sciences mathématiques du Québec*, vol. 31, no 2, p. 139-154.

- Fowler, Tom, Ira Gessel, Gilbert Labelle et Pierre Leroux. 2002. « The Specification of 2-trees ». *Advances in Applied Mathematics*, vol. 28, no 2, p. 145-168.
- Harary, Frank, Edgar M. Palmer et Ronald C. Read. 1975. « On the cell-growth problem for arbitrary polygons ». *Discrete Mathematics*, vol. 11, p. 371-389.
- Labelle, Gilbert. 1992. « On Asymmetric Structures », *Discrete Mathematics*. vol. 99, page 141-162.
- Labelle, Gilbert, Cédric Lamathe et Pierre Leroux. 2003. « A classification of plane and planar 2-trees », *Theoretical Computer Science*. vol. 307, no 2, p. 337-363 .
- G. Labelle et Pierre Leroux, 1996. « Enumeration of (uni- or bicolored) plane trees according to their degree distribution ». *Discrete Mathematics*. vol. 157, p. 227-240.
- Labelle, Jacques. 1985. « Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité ». *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, vol. 11, p. 31-58.
- Lamathe, Cédric. 2003. « Spécification de classes de structures arborescentes ». Thèse de doctorat, Montréal, Université du Québec à Montréal.
- Palmer, Edgar M., 1969. « On the Number of Labeled 2-trees ». *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 6, p. 206-207.
- Palmer, Edgar M., et Ronald C. Read. 1973. « On the Number of Plane 2-trees ». *Journal of the London Mathematical Society (2)*, vol. 6, p. 583-592.
- Ronald C. Read. 1978. « General dissections of a polygon », *Aequationes Mathematicae*. vol. 18, p. 370-388.
- Stanley, R. P.. 1986. *Enumerative Combinatorics*, Monterey, (California) : Wadsworth & Brooks/Cole.
- Stockmeyer, P. K.. 1971. « Enumeration of graphs with a prescribed automorphism group ». Thèse de Doctorat, Ann Arbor, University of Michigan.