UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ANALYSE DU DÉVELOPPEMENT
DE LA NOTION DE PREUVE
DANS UNE COLLECTION DU SECONDAIRE

MÉMOIRE

soumis comme exigence partielle de la

MAÎTRISE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

par

Denis TANGUAY

AVRIL 2000

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier MM. André Boileau et Benoît Côté pour m'avoir aidé — chacun à sa façon — à mieux cerner le domaine et le sujet du présent mémoire. Merci à Martin Pinsonneault, à Gisèle Legault et à Stéphanie Lanthier, pour m'avoir guidé dans les dédales des plus récentes versions de *Word*. Merci aussi à Linda Lemieux, qui m'a si aimablement fourni maints renseignements bibliographiques importants.

Mille mercis à ma directrice, Nadine Bednarz, qui a su diriger ce mémoire avec diligence et disponibilité, sous des rapports cordialement amicaux ; mais surtout, avec un indéfectible et communicatif enthousiasme, qui ne s'est laissé fléchir ni par les retards, ni par les maladresses !

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

RÉSUMÉ

En élaborant le présent mémoire, nous avons cherché à mieux comprendre comment se développe la notion de preuve dans le cheminement d'apprentissage d'un élève du secondaire. Dans cette optique, nous avons d'abord fait le point sur notre propre expérience d'enseignement et sur nos réflexions personnelles, suscitées entre autres par deux expérimentations conduites par nous dans le cadre du cours d'*Initiation à la recherche en didactique des mathématiques*.

Nous avons ensuite cherché à retracer quels objectifs des programmes du MEQ se rapportent à l'apprentissage de la preuve, et que suggèrent ces programmes pour que ces objectifs soient atteints. Nous avons pu constater que cet apprentissage y passe avant tout par l'étude de la *géométrie*. La lecture de deux articles de R. Thom et R. Bkouche nous a permis de mieux cerner les liens privilégiés entre géométrie et apprentissage de la preuve. Ceux-ci sont profonds, incontournables, entre autres parce que les concepts et raisonnements géométriques occupent une position charnière entre le « sensible » et le « formel ».

Nous avons alors arrêté l'objet précis de notre étude : l'apprentissage de la preuve, tel que véhiculé par les problèmes de géométrie synthétique, dans une collection du secondaire. Dans le but d'élaborer une *grille d'analyse*, nous avons dégagé la notion de « schéma de bipolarisation » des réflexions sur la preuve d'É. Barbin, de G. Hanna, G. Brousseau, N. Balacheff et N. Rouche. À partir des schémas de bipolarisation suggérés par leurs travaux, nous avons édifié notre propre *typologie des preuves* et par suite, notre grille d'analyse des problèmes. Après une classification des problèmes de la collection à l'étude selon cette grille, nous avons interprété et analysé cette classification, pour conclure sur les aspects de l'apprentissage de la preuve que nous évaluons comme mal « gérés » dans la collection : transition non suffisamment graduelle du sensible au formel (très peu de problèmes qui sollicitent une validation hybride, niveau de formalisation trop longtemps stationnaire, rôle ambigu de la géométrie des transformations dans le processus de formalisation, etc.), prépondérance des applications directes et des déductions locales sur les séquences déductives, intérêt et mode de présentation des résultats qui ne favorisent pas une « attitude de preuve », etc.

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES GÉOMÉTRIE PREUVE
DÉMONSTRATIONS EN GÉOMÉTRIE APPRENTISSAGE DE LA PREUVE

CHAPITRE 1

PROBLÉMATIQUE

L'auteur du présent mémoire l'a constaté à maintes reprises en échangeant avec ses collègues enseignants : tout enseignant en mathématiques au collégial et à l'université est tôt ou tard préoccupé par les difficultés qu'éprouvent les étudiants à élaborer ou même comprendre les *preuves*.

1.1 Quelques observations à l'origine de cette recherche

Ces difficultés, nous les avons relevées en tant que chargé de cours, pour des cours de première année du baccalauréat en mathématiques ou en informatique (Introduction à la géométrie, Algèbre 1, Calcul 1, Algèbre matricielle), puis comme enseignant au collégial, surtout dans les cours de calcul différentiel et intégral et d'algèbre linéaire. Les collègues consultés ont diagnostiqué grosso modo les mêmes écueils : difficulté de l'élève à comprendre en quoi consiste une preuve, à savoir **quoi** prouver et **pourquoi**, surtout quand le résultat est accessible à l'intuition, ou vérifiable empiriquement ; difficulté à gérer la combinaison des résultats précédemment établis avec ceux de l'énoncé, à savoir quel résultat on peut utiliser dans la preuve et quand, à départager la thèse des hypothèses ; difficulté à différencier une implication de sa réciproque ; à bien saisir le mécanisme logique des preuves par contraposition, par récurrence, par l'absurde ; à discerner les rôles et la portée de l'exemple et du contre-exemple ; etc.

S'il y a consensus sur la nature des difficultés rencontrées, les avis diffèrent sur leurs causes et sur les moyens à prendre pour les aplanir. Cela nous a particulièrement frappés quand nous avons été appelés à donner le cours *Méthodes de preuve* (201-100) au Cégep Ahuntsic [1], à l'automne 1997. Le contenu et les notes de ce cours ont été conçus et rédigés par un groupe de professeurs du Cégep. Les notes s'ouvrent avec des éléments de logique propositionnelle, qui sont suivis d'un inventaire — explications, exemples, applications et problèmes à l'appui — des différentes « méthodes de preuve » utilisées en mathématique : preuves directes, par construction, par contradiction (par l'absurde), par contraposition, par récurrence, par cas, en utilisant un contre-exemple. Un mois après le début du cours, le premier examen passé, nous avions de sérieuses réserves à formuler auprès des concepteurs du cours, avec qui nous eûmes alors des discussions serrées : en mettant l'emphase sur les mécanismes logiques abstraits, indépendamment de la construction des concepts et résultats mathématiques auxquels on les applique, il nous apparaissait que le cours renvoyait aux élèves une image distordue de l'activité mathématique ; image qui place la preuve au centre, comme **le but** à atteindre, plutôt que comme **un outil** permettant d'accéder à une meilleure appréhension du sens. L'effet mesurable dans les copies d'examen était le suivant : pour un problème donné, les élèves cherchaient d'abord quelle « méthode de preuve » appliquer, s'évertuaient beaucoup plus à reproduire un modèle de développement logique qu'à comprendre les idées mathématiques en cause. Ces élèves par ailleurs intelligents pouvaient écrire n'importe quoi, même pour un problème relativement élémentaire, du moment que leur preuve adoptait la forme stricte de celles vues en classe !

Bien sûr, la question n'est pas simple. Comment initier les élèves aux méthodes de preuve sophistiquées des « mathématiques constituées » ? Est-il possible aux élèves d'élaborer de telles preuves avant même qu'ils n'aient accédé aux méthodes ? Quand et comment avoir accès à ces méthodes ? Mais ces questions doivent naturellement être précédées de ces autres : quelles sont les causes des difficultés rencontrées par les élèves face à la preuve ? Comment celle-ci est-elle abordée dans l'enseignement ? Quelles conceptions de la preuve ont les élèves, à la fin du secondaire ?

---

[1] Ce cours est propre aux programmes de mathématiques du Collège Ahuntsic et du Cégep de Sherbrooke, où il remplace le cours de sigle 201-101.

1.2 Deux expérimentations

Nous avons cherché à éclairer ces questions par deux expérimentations, menées auprès d'étudiants du collégial dans le cadre du cours d'*Initiation à la recherche en didactique des mathématiques* (MAT-8391, programme de maîtrise en didactique de l'UQAM).

Avant de résumer les deux travaux auxquels ces deux expérimentations ont donné lieu, une **mise au point terminologique** s'impose : nous faisons pour l'instant des termes « preuve » et « démonstration » des synonymes. Ceux-là doivent jusqu'à nouvel ordre être pris dans leur plus large acception. Il nous semble en effet téméraire de les distinguer a priori, avant que la question de leurs définitions possibles ne soit abordée dans le cadre théorique, au chapitre 2. Notons par ailleurs que les auteurs des « Programmes d'études » du Ministère de l'Éducation du Québec (MEQ) ne semblent pas distinguer les deux termes, si l'on en croit ce qui transparaît des textes de ces programmes, que nous allons décortiquer à la section 1.3.

1.2.1 Trois entrevues

Le premier travail est constitué de trois entrevues, auprès de trois étudiants de niveau collégial en formation continue. (Les trois jeunes dans la vingtaine sont revenus aux études après quelques années d'interruption). Le but des entrevues était de mieux comprendre quelle conception de la preuve se font ces étudiants.

Le protocole d'entrevue est le suivant : l'interviewer soumet sept preuves du théorème sur la somme des angles intérieurs de tout triangle (voir annexe 1). Dans un premier temps, l'étudiant est invité à examiner les preuves. L'interviewer donne au besoin quelques éclaircissements.

- L'interviewer demande ensuite à l'étudiant :
  - *lesquelles parmi ces preuves il retient comme étant des preuves valables du résultat en question ;*

  - *lesquelles le convainquent que le résultat est vrai ; lesquelles lui montrent pourquoi ça marche ;*
  - *lesquelles l'étudiant rejette, comme étant des preuves non valables, ou pas nécessairement valables pour tous les triangles.*

- L'interviewer demande à l'étudiant de se placer dans la situation fictive où il serait enseignant au secondaire (IV ou V) :
  - *quelle preuve il choisirait pour convaincre la classe que le résultat est vrai, pour expliquer à la classe pourquoi ça marche ?*

- L'interviewer demande à l'étudiant :
  - *quelle preuve celui-ci soumettrait à un professeur (de maths) pour avoir la meilleure note possible ?*

Compte tenu du temps alloué à ce travail (un parmi quatre travaux dans le cadre du cours MAT-8391), les analyses a priori et a posteriori n'y étaient pas précédées de l'élaboration d'un cadre théorique. Le cadre théorique qui convenait aurait pu être, du moins en partie, celui du présent mémoire (chapitre 2). Ayant tenu compte d'un tel cadre théorique, nous aurions bien entendu été amenés à repenser à la fois le protocole, les analyses, et peut-être même la façon de mener les entrevues. Tout cela pour dire que les détails du travail ne sont pas tous pertinents au présent mémoire. Nous nous contenterons donc pour l'instant de donner les principales conclusions que nous avions alors tirées, le but étant d'exposer où en étaient nos réflexions sur la preuve avant d'entreprendre le mémoire. Par ailleurs, la liste des preuves soumises aux étudiants est donnée en annexe.

Comme nous l'avons dit, nous voulions cerner comment les étudiants interviewés conçoivent ce qu'est une preuve en géométrie ; par exemple, dans quelle mesure confondent-ils *vérification empirique* et *preuve*. Nous cherchions également à répondre aux questions suivantes :

- Quand s'estiment-ils convaincus ? Quand ils arrivent à visualiser le résultat, à le vérifier « physiquement », ou quand ils arrivent à saisir pourquoi le résultat est vrai à travers un raisonnement déductif rigoureux ?

- Détectent-ils la faille logique d'une argumentation qui fait intervenir ce qu'on veut prouver dans la démonstration ?
- Comment comprennent-ils qu'un énoncé se rapporte à un triangle *quelconque* ? Vont-ils rejeter une argumentation qui ne s'applique qu'à une classe particulière de triangles ?
- Quelle est l'influence du contrat didactique dans leur évaluation d'une preuve ? Est-ce que la qualité d'une preuve (« meilleure note possible ») se mesure à sa complexité, aux nombres de manipulations algébriques qu'elle fait intervenir ?

Les propos recueillis en entrevues semblent montrer que la distinction entre *preuve* et *vérification empirique* n'est pas totalement claire pour ces étudiants. Mais leur conception de la preuve n'est pas non plus « naïve » au point de confondre tout à fait les deux notions. Il semble en fait que la distinction se fasse dans l'esprit de chaque interviewé — consciemment ou inconsciemment — avant tout sur la base du « point de vue ». Tout se passe comme s'il y avait chez chacun deux points de vue distincts :

1. **Un point de vue *personnel*** ; chacun prend connaissance de l'argument pour être intimement convaincu de la validité du résultat. Les « preuves » empiriques (on découpe les bouts de triangles de carton pour grouper les angles autour d'un même sommet ; ou encore, on mesure les angles au rapporteur, et on fait la somme) sont envisagées du point de vue personnel, comme en fait foi ce commentaire d'une interviewée sur la preuve par découpage :

   > *Quand tu mets les morceaux, c'est comme un casse-tête. Si tu fais différents triangles, tu les rassembles ..., ça prouve, là, qu'effectivement, ... les triangles, ça fait bien une barre, puis ça fait bien 180°. Moi je trouve que c'est valable. Mais ! Que c'est pas nécessairement, ... très .. ma-thé-ma-tique.*

   Et elles doivent être présentées aux élèves du secondaire (Cf. la 2e question du protocole) parce que chacun d'eux doit aussi pouvoir appréhender le résultat du point de vue personnel. Par ailleurs, du point de vue personnel, les exigences de rigueur sont beaucoup moins élevées ! Dans le « verbatim » qui suit, l'interviewé s'imagine dans la situation où il est professeur au secondaire. Les noms propres sont ceux que nous avions associés aux preuves soumises (voir l'annexe) :

> *Automatiquement, je prendrais la preuve d'Antoine pour commencer le cours avec. Je suis très visuel. J'aime mieux montrer d'abord. Je m'amènerais avec un triangle en carton, puis clic, clic, clic* (fais mine de découper). *Peut-être celle de Charles aussi. On mesurerait des triangles. Je mettrais ça au tableau : « Voici une autre preuve ». Puis après ça tu fais une vraie preuve* (appuie sur vraie) *mathématique ... Diane, mettons.* (hésite) *Mais même Diane, au secondaire ..?*

2. **Un point de vue *officiel*** (décrit comme étant *mathématique*, *logique*, *algébrique*, *rigoureux*, etc.). L'argument présenté du point de vue officiel doit pouvoir transcender les convictions de chacun, les impressions physiques (sensorielles). Il doit être inattaquable sur le plan de la rigueur et de la logique, et ne doit pas faire intervenir autre chose que des manipulations exactes, purement mathématiques (comme ne le sont pas : *découper ou déplacer un triangle*, *mesurer un angle*, etc.). Il doit pouvoir s'appliquer à un triangle quelconque (si possible, décrit uniquement avec des lettres, comme le spécifiera un des interviewés !). La preuve présentée au prof de maths (Cf. la 3^{e} question du protocole) doit évidemment être valable avant tout du point de vue officiel. L'effet de contrat est ici prépondérant : la preuve du point de vue officiel n'est pas tant perçue comme un outil de validation qu'associée à un certain *rituel* fortement lié au contexte académique, et il n'est pas dit qu'une preuve choisie *du point de vue officiel* est celle qui convainc ou éclaire le plus l'étudiant qui l'a choisie :

> *Comme ici, Diane, Brigitte, ça c'est des preuves ... c'est rigoureux. Tandis qu'avec ça* (montre la preuve « par découpage » d'Antoine)*, oui je le vois très bien, je le visualise, je vois l'angle de 180°. Des affaires comme ça ici* (montre la preuve « par mesurage » de Charles)*, je vois les chiffres. C'est pratique. Je le vois dans ma tête. Tandis que ces preuves-là* (montre les preuves de Brigitte et de Diane)*, c'est plus rigoureux, c'est plus logique, c'est plus vrai — je trouve — mathématiquement parlant, mais c'est pas aussi visuel, c'est pas aussi ... J'ai la formule ici* (montre les preuves de Brigitte et de Diane)*, puis ici je la vois* (montre les preuves d'Antoine et de Charles).

1.2.2 Une situation didactique en classe

Le deuxième travail est basé sur une situation didactique, qui est d'abord décrite et analysée a priori, puis réalisée avec une classe d'étudiants en sciences au collégial, dont les productions et interventions (enregistrées au magnétophone, puis transcrites) sont étudiées. Les questions que devait permettre de creuser le travail sont essentiellement les mêmes que pour le premier travail.

La classe est divisée en petits groupes de quatre étudiants. La situation se déroule sur une période d'environ deux heures. Au début, nous soumettons à chaque groupe une liste (la même que celle du premier travail : voir l'annexe) de sept preuves du théorème sur la somme des angles intérieurs de tout triangle. Chaque groupe doit établir sa propre hiérarchie des preuves soumises : laquelle le groupe préfère, laquelle vient en second, etc. Lesquelles sont jugées non valables par le groupe et pourquoi ? Pour quelles preuves le groupe a-t-il des réserves et quelles sont ces réserves ? Si possible, le groupe doit discuter jusqu'à arriver à un consensus. Dans chaque groupe, un ou une secrétaire prend note des justifications sur une feuille qu'il remet à la fin. Quand tout le monde est prêt, des représentants viennent soumettre à la classe, en la commentant sommairement, la hiérarchie de chaque groupe.

Chaque groupe devait ensuite énoncer et prouver un résultat analogue pour les polygones à n côtés ($n > 2$), après quoi un vote devait désigner la preuve la plus convaincante. Mais une mauvaise gestion du temps nous a forcé à escamoter cette partie de l'activité.

Comme pour le premier travail et pour les mêmes raisons, nous nous contentons de rendre compte des points saillants. L'objectif du travail était grosso modo le même : évaluer quelles conceptions de la preuve ont les étudiants du collégial. Nous espérions de plus que le débat en groupe apporterait un nouvel éclairage : est-ce que les discussions internes dans chaque groupe inciteront les étudiants à formuler leurs appréciations, à justifier leurs objections, à clarifier leur argumentation ? Est-ce que ce premier choc des idées d'étudiants à étudiants amoindrira l'effet de contrat ou est-ce qu'au contraire, l'exigence des présentations devant les pairs et l'enseignant, par son effet de filtre sur les points de vue dissidents, favorisera les conceptions dominantes et le « point de vue officiel » ?

L'analyse des interventions et productions révèle que la dernière hypothèse est à retenir. Nous avions affaire ici à des étudiants en sciences — ce qui n'était pas le cas des trois « interviewés » — et leur évaluation des preuves laisse présager une conception plus proche des « mathématiques constituées ». Les preuves par découpage ou mesurage, par exemple, sont rejetées d'emblée (elles étaient acceptées par les trois interviewés). Mais s'agit-il vraiment ici de convictions profondes ? Plusieurs remarques font penser que l'effet de contrat a été amplifié par le travail en groupe et la présentation devant la classe. On y sent nettement à quel point leur évaluation est liée à l'image qu'ils se font du « rituel mathématique » de la démonstration, lui-même lié au contexte académique, au point de vue « officiel ».

- Ainsi, les étudiants d'un des groupes se déclarent plus satisfaits d'une preuve au sein de laquelle ils ont pourtant détecté une grossière erreur logique (preuve de Francine, voir l'annexe), parce que sa rédaction est conforme au modèle classique : *« Qu'est-ce qui était bon dans sa preuve, c'est qu'elle a descendu ligne après ligne, qu'elle a expliqué ce qu'elle a fait à chaque ligne ».* Ils la placent devant une preuve qu'ils comprennent bien (preuve d'Éric), qui semble les convaincre, mais dont ils évaluent la forme (une référence à un dessin) plutôt que le fond (la validité) : *« Ya bien expliqué, mais en réalité, ce qu'il a dessiné, c'est bon ; mais il faut le faire par déduction logique ».*

- Leurs exigences de *rigueur* va au-delà de ce qui est nécessaire. Dans une des preuves, on suppose — quitte à renommer les sommets si l'un des angles du triangle ABC est obtus — que le pied de la hauteur abaissée de A tombe *sur* le côté BC. Mais une étudiante rejette l'argument, parce qu'on n'a pas le droit de renommer les sommets !

- Une étudiante n'accepte pas la preuve par découpage parce que *« on pourrait pas se mettre à couper notre feuille d'examen ».*

- Un autre la rejette en disant que *« il suffit de trouver un contre-exemple, puis tout vient de tomber ».* Il a appris qu'un exemple ne prouve rien, et qu'un seul contre-exemple suffit pour mettre à bas toute expérimentation, aussi longue et fructueuse soit-elle. Mais la remarque est un peu absurde ici, puisque l'étudiant sait très bien qu'il ne pourra jamais trouver ce contre-exemple.

Dans la mesure où le résultat à prouver est pour ces étudiants parfaitement familier et assimilé depuis longtemps, dans la mesure où ils n'ont pas le moindre doute de sa validité, nous faisions remarquer, en conclusion de ce deuxième travail, que nous ne pouvions avoir un portrait complet de leurs conceptions à partir de leur évaluation des preuves de ce seul résultat. Il aurait fallu enchaîner avec une expérimentation impliquant un résultat mathématique non trivial, nouveau pour eux, et dont ils auraient à produire eux-mêmes une preuve, de façon à les placer dans une véritable problématique de *validation*. Le point de vue « officiel » aurait-il alors été aussi prépondérant ?

Pour des raisons logistiques — essentiellement, le fait de ne pouvoir disposer d'une classe pendant la période estivale — ce prolongement naturel de l'expérimentation ne fait pas l'objet du présent mémoire ; ce qui ne veut pas dire que nous renonçons à l'intégrer un jour à un plus vaste projet de recherche, après avoir reconsidéré le tout à la lumière d'un cadre théorique plus élaboré ; celui qui fait l'objet du chapitre 2, par exemple.

Pour bien comprendre comment les élèves de la fin du secondaire conçoivent la preuve, il importe de déterminer aussi précisément que possible comment celle-ci est abordée dans l'enseignement pré-collégial. Aussi nous faut-il d'abord aller consulter les programmes.

1.3 La preuve dans les programmes du Ministère

Nous chercherons dans les programmes du *Ministère de l'Éducation du Québec* (MEQ) quels objectifs se rapportent à l'apprentissage de la preuve, directement ou indirectement. Nous allons « ratisser large » et prendre en considération tout ce qui touche le raisonnement inductif ou déductif.

1.3.1 Le programme du primaire

Les auteurs du Programme d'études du primaire, qui s'applique depuis 1980[2], n'excluent pas un abord des raisonnements inductif et déductif dès le primaire. Dans la section intitulée « Programme-cadre » du programme mathématique du primaire, il est écrit qu'on devrait mettre « l'accent sur le raisonnement plutôt que sur l'acquisition de techniques opératoires (en arithmétique comme en géométrie) » (section 1.2.1, p. 6). Cela se précise, dans la section « Lignes de force du programme » :

> *Le présent programme vise donc, entre autres choses,* (...) *à promouvoir chez l'enfant le développement de certaines habiletés intellectuelles, comme l'habileté à « structurer »* (...), *l'habileté à « formaliser » (s'initier à une plus grande rigueur d'expression, à l'aide d'une terminologie et d'un symbolisme mieux adapté), l'habileté à « prouver » (à partir de faits admis, énoncer des conclusions sûres, par déduction ou par induction), l'habileté à « mathématiser »* (...) (section 1.3, p. 7).

Cependant, cette « habileté à prouver » n'est mise en rapport avec aucun objectif mathématique précis. Dans la description détaillée des « objectifs » (généraux, terminaux, intermédiaires), ce qui s'en rapproche le plus est sous-jacent aux deux objectifs terminaux du « Domaine de la formation intellectuelle » dans les « Objectifs de formation générale » :

- *Émettre des hypothèses et les vérifier.*
- *Généraliser à partir de cas particuliers* (p. 13).

On revient tout de même sur la question dans le *Fascicule F*[3], « Activités géométriques », mais pour faire une mise en garde : le raisonnement déductif ne doit pas être au centre de l'enseignement de la géométrie au primaire, ce qui ne signifie pas qu'il doit en être exclus.

---

[2] Au moment où l'auteur du mémoire écrit ces lignes, le tout nouveau programme du primaire fait sa « sortie officielle » (été 99). Comme il n'a pas encore pu influer sur les programmes actuels du secondaire, qui sont ceux qui nous occupent principalement, nous avons choisi de ne pas en tenir compte.

[3] Les *fascicules* reprennent les objectifs du programme dans un contexte plus particulier et davantage appliqué.

> *S'il fut un temps où la géométrie s'est posée comme une gymnastique de l'esprit, il faut croire que notre perception est différente actuellement* (Fascicule F, p. 2).
>
> *Il y a différentes façons d'aborder la géométrie. Le niveau le plus fondamental est celui de la connaissance expérimentale de l'espace physique environnant. Alors se développe et s'affine une connaissance intuitive de l'espace, à mesure que l'on arrive à conceptualiser figures, propriétés et transformations géométriques.* (...) *Nous devons centrer nos efforts sur une vaste exploration de l'espace si l'on veut, à un stade plus avancé, envisager une connaissance plus structurée d'une géométrie organisée et présentée sous forme déductive. La déduction, en ce domaine — et surtout dans l'enseignement primaire — ne saurait être envisagée comme un mode d'apprentissage. Au contraire, la connaissance expérimentale et intuitive de l'espace doit devenir le sens même de cette étude. On admettra cependant que le fait d'entraîner l'enfant à faire des déductions simples sur un groupe limité de données n'entre pas en contradiction avec cet énoncé* (p. 4).

Est-ce que cette « connaissance plus structurée d'une géométrie organisée et présentée sous forme déductive » est envisagée dès le secondaire ? Nous y reviendrons, après avoir évalué plus généralement quelle place les concepteurs du programme du secondaire font au raisonnement déductif.

1.3.2 Le programme du secondaire

Comme au primaire, les auteurs du programme d'études du secondaire font savoir d'entrée de jeu que le raisonnement et l'attitude de preuve ont leur place dans l'activité mathématique de l'élève. Mais l'importance qu'occupe cette place va en augmentant, du primaire au secondaire. En effet, le quatrième des quatre *Objectifs globaux* — ceux qui « décrivent dans son ensemble, la **contribution** de la mathématique à la formation fondamentale d'une personne ... » et qui demeurent les mêmes tout au long des cinq années du secondaire — se présente comme suit :

> ***Raisonner***
>
> *Favoriser chez l'élève l'accroissement de l'habileté à émettre des hypothèses et à les vérifier par une démarche inductive ou déductive* (p. 22).

Comment cela s'appliquera-t-il et évoluera-t-il d'une année du secondaire à l'autre ?

- **MATHÉMATIQUE 116**

Dans le programme d'études *Mathématique 116* (secondaire 1), rien de ce qui porte sur l'arithmétique et la préparation à l'algèbre ne semble directement lié à cet objectif global. C'est en géométrie qu'on perçoit sa première manifestation. Dans l' *Objectif général 3*, « Amener l'élève à utiliser ses connaissances relatives aux figures géométriques », on peut lire :

> *... les travaux de chercheurs en didactique apportent des indications selon lesquelles* (...) *l'élève apprend d'abord à reconnaître les formes, puis à analyser les diverses propriétés de ces formes, pour ensuite établir des relations entre les propriétés et faire des déductions simples.*
>
> (...) *C'est, notamment par la géométrie des transformations que l'élève se créera un réseau de relations lui permettant de faire des déductions pour se convaincre de la véracité d'une affirmation* (p. 35).

Dans l' *Objectif terminal 3.2*, « Résoudre des problèmes portant sur des droites ou des angles », on peut lire :

> (...) *L'élève sera aussi capable de faire des déductions simples comme celle qui consiste à déterminer une mesure d'angle en recourant à un ou des énoncés plutôt qu'au mesurage. Tout en utilisant une approche intuitive lui permettant d'entrevoir une solution, l'élève doit acquérir l'habitude d'appuyer son raisonnement sur des définitions ou sur des propriétés pertinentes.*
>
> (...) *L'élève sera ainsi amené à établir des relations et à tirer des conclusions qu'il apprendra à utiliser comme énoncés pouvant justifier ses affirmations* (p. 38).

Les deux derniers des *Objectifs intermédiaires 3.2* précisent dans quels contextes ces déductions vont se faire.

- *Déduire la mesure d'un angle en s'appuyant sur un énoncé (angle plat, droit ou plein ; droites perpendiculaires ; complément, supplément ou bissectrice d'un angle ; angles ayant un même sommet).*

- *Justifier une affirmation dans la résolution d'un problème portant sur des angles ayant un même sommet* (p. 39).

Nous ne pouvons nous empêcher de relever que le raisonnement mobilisé dans le premier de ces objectifs intermédiaires nous semble « minimal » : il ne s'agit somme toute que d'appliquer une définition. Le mot « déduire » est pris ici dans un sens peu restrictif, qui va jusqu'à englober l'implication directe : on ne peut pas (encore) dire que l'élève se trouve véritablement engagé dans un « processus de preuve ». Par contre, le deuxième objectif ouvre a priori une voie plus large, et pourrait donner lieu à des problèmes qui solliciteraient chez l'élève des déductions plus subtiles, voire de courtes chaînes de déductions. La même remarque s'applique aux Objectifs intermédiaires 3.3 et 3.4, cités plus loin.

L'approche de l'étude des triangles (*Objectif terminal 3.3* : « Résoudre des problèmes portant sur des triangles ») est sensiblement la même que pour les angles. On prend tout de même la peine de spécifier que la démonstration n'y est pas centrale :

> (...) *Les propriétés étudiées* (celles des triangles et de leurs droites remarquables) *doivent être des conclusions que les élèves sont amenés à tirer à partir de leurs activités, sans pour autant les avoir démontrées. Dans certains cas, on montrera à l'élève comment on aurait pu déduire des propriétés par un raisonnement rigoureux à partir des définitions ou de propriétés déjà établies* (p. 40).

Comme pour les angles, les deux derniers des *Objectifs intermédiaires 3.3* précisent certains contextes de « déduction » :

- *Déduire la mesure d'un angle ou d'un segment en s'appuyant sur un énoncé propre aux différents ensembles de triangles, aux hauteurs, aux médianes ou aux médiatrices de triangles.*
- *Justifier une affirmation dans la résolution d'un problème portant sur des triangles* (p. 41).

Il en sera de même des deux derniers *Objectifs intermédiaires 3.4*, qui portent sur les quadrilatères :

- *Déduire la mesure d'un angle ou d'un segment en s'appuyant sur un énoncé relatif aux différents ensembles de quadrilatères convexes.*
- *Justifier une affirmation dans la résolution d'un problème portant sur des quadrilatères convexes* (p. 43).

Les objectifs qui portent sur le périmètre et l'aire des polygones, ou sur les représentations des données statistiques, ne sollicitent pas directement le raisonnement inductif ou déductif chez l'élève.

- **MATHÉMATIQUE 216**

Comme en Math 116, les premiers objectifs (généraux, terminaux et intermédiaires), qui portent sur l'algèbre et le raisonnement proportionnel, ne sollicitent pas explicitement le raisonnement inductif ou déductif ; à cette nuance près qu'il est question de « raisonner » (sans plus de précision) à chaque fois que les auteurs insistent sur l'intégration de chaque thème à la résolution de problèmes.

Ici aussi, c'est en géométrie que le raisonnement déductif est plus explicitement requis. L'*Objectif général 3*, « Amener l'élève à utiliser ses connaissances relatives aux figures géométriques », reprend le même énoncé que celui que nous avions extrait du programme Math 116 :

> (...) *l'élève apprend d'abord à reconnaître globalement les formes, puis à analyser les différentes propriétés relatives à ces formes, pour ensuite établir des relations entre les propriétés et faire des déductions simples* (p. 35).

Cette facette de l'Objectif général 3 ne s'appliquera pas tant à l'étude des homothéties (où l'on prolonge le travail sur le raisonnement proportionnel à travers des calculs et des tracés) qu'à l'étude des polygones et du cercle. Dans l'Objectif terminal 3.3, « Résoudre des problèmes portant sur des polygones », on peut lire :

> (...) *L'élève devra poursuivre l'apprentissage amorcé dans le programme de première secondaire et maintenir l'habitude d'appuyer son raisonnement sur des définitions ou sur des propriétés pertinentes* (p. 40).

Les derniers des *Objectifs intermédiaires 3.3* et *3.4* sont les pendants, pour les polygones et le cercle, des Objectifs intermédiaires 3.2, 3.3 et 3.4 dans Math 116.

- *Justifier une affirmation dans la résolution d'un problème portant sur les polygones réguliers* (p. 41).
- *Justifier une affirmation dans la résolution d'un problème portant sur des cercles* (p. 43).

Comme en première secondaire, l'étude de la statistique se fait avant tout par le biais de la représentation et interprétation des données. Mais les auteurs comptent aussi favoriser « le développement d'un esprit critique, logique et analytique » (p. 46) à travers l'élaboration par l'élève de modèles de dénombrement, et leurs applications à des problèmes de prédictions probabilistes.

- **MATHÉMATIQUE 314**

Le portrait d'ensemble est sensiblement le même qu'en deuxième secondaire. Si, dans chaque thème, l'élève doit « mettre l'effort sur la compréhension plutôt que sur la mécanique » (p. 28), et est invité à « raisonner » dès lors que le thème est intégré à la résolution de problème, c'est avant tout en géométrie qu'on sollicite plus spécifiquement son raisonnement inductif ou déductif. La remarque, que nous avions extraite de la page 35 (voir un peu plus haut) du Programme d'études Math 216, est reprise telle quelle dans l'*Objectif général 2* (« Amener l'élève à utiliser ses connaissances relatives aux figures géométriques », p. 33). Comme auparavant, au moins un des objectifs intermédiaires de chaque thème géométrique ouvre la voie à des problèmes de déduction. Notons cependant que la relation de Pythagore pourrait permettre une interaction de l'algèbre et de la géométrie dans de tels problèmes.

- *Justifier une affirmation dans la résolution d'un problème utilisant la relation de Pythagore* (Objectifs intermédiaires 1.4, p. 31).
- *Déduire la mesure d'un segment* (qui joint deux sommets d'un solide) *en s'appuyant sur un énoncé approprié.*
- *Justifier une affirmation dans la résolution d'un problème portant sur les solides* (Objectifs intermédiaires 2.3, p. 39).

Le contenu de l'*Annexe* au Programme d'études Math 314 est révélateur, en ce qu'il permet de préciser comment les auteurs conçoivent ces problèmes de géométrie des trois premières années, où il est question de « justifier une affirmation dans la résolution d'un problème » ou de « déduire en s'appuyant sur un énoncé ». L'annexe est constituée des « énoncés » liés aux thèmes géométriques des programmes Math 314, Math 116 et Math 216. Trente-trois résultats classiques de géométrie euclidienne y sont formulés, comme par exemple :

- *Dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse égale la somme des carrés des mesures des autres côtés.*
- *Les angles opposés par le sommet sont congrus.*
- *La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est 180°.*
- *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.*
- *La somme des mesures des angles extérieurs d'un polygone convexe est égale à 360°.*
- *Trois points non alignés déterminent un et un seul cercle.* Etc.

Entre les énoncés abordés en Math 314 et les autres, on y lit la remarque suivante, particulièrement éclairante :

> *Dans le programme de première et deuxième secondaire, l'élève a commencé à bâtir graduellement un système axiomatique. Les énoncés ci-dessous doivent être intégrés à ceux de troisième secondaire pour permettre à l'élève de déduire certaines mesures et de justifier certaines étapes dans la résolution de problèmes* (p. 49).

« Système axiomatique » doit être pris ici au sens large. Il ne s'agit pas d'une axiomatique systématique comme dans les « Éléments » d'Euclide, mais bien d'un corpus de résultats, qui doivent être pris pour acquis sans nécessairement avoir été démontrés, que l'élève assimilera et utilisera dans les problèmes de « justification » ou de « déduction ». Dans le programme de Mathématique 436, on parlera d'« îlot déductif ». Bien que cette expression y soit réservée à la géométrie analytique, on peut penser que ces problèmes où le raisonnement s'appuie sur un ou plusieurs résultats de l'annexe, peuvent eux aussi mettre en oeuvre de courtes chaînes déductives, et constituer de ce fait des « îlots déductifs »[4].

- **MATHÉMATIQUE 436**

Le mot « preuve » apparaît pour la première fois, dans l'introduction du programme Math 436, à la page 3 :

> *Par ailleurs, le programme Mathématique 436 se distingue du programme Mathématique 416 d'abord par la profondeur et l'étendue de la matière étudiée et par la complexité des situations, des problèmes et des applications qu'on propose ; ensuite, par l'emploi d'un vocabulaire poussé et d'un système de notation formelle et par l'application d'exigences de rigueur, d'exactitude, de justification et de preuve constantes dans tout développement pertinent.*

Il sera aussi question de « démonstration » dans l'*Objectif général 1*, « Accroître chez l'élève l'habileté à utiliser l'algèbre », et c'est encore une fois par le biais de la géométrie — plus précisément, de la géométrie analytique — que la démonstration s'immisce dans le domaine de l'algèbre :

> *La géométrie analytique constitue le pont entre l'algèbre et la géométrie. L'élève s'y initiera en étudiant les droites dans le plan cartésien et leurs équations sous diverses formes. Ce sera l'occasion de définir les notions de distance et de pente, qui serviront ensuite dans la démonstration de propositions géométriques* (p. 15).

Cette facette de l'Objectif général 1 sera prise en compte dans l'*Objectif terminal 1.5*, « Résoudre des problèmes de géométrie analytique », après les quatre premiers

[4] L'expression « îlot déductif » n'est définie nulle part par les auteurs du programme. Nous pensons que le concept que cette expression recouvre est plus ou moins l'équivalent des « short local axiomatic sequences » (NCTM, 1989, p. 162), dont il est question dans les « standards de géométrie pour les élèves des grades 9 à 12 ». En effet, plusieurs indices laissent croire que les programmes actuels sont, à bien des égards, influencés par les « Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics », du NCTM ; en particulier, le fait qu'on y prévoit des « îlots déductifs » spécifiquement en géométries analytique et vectorielle, exactement comme le NCTM prévoit de « courtes séquences axiomatiques locales » en géométries analytique et vectorielle. Nous supputons qu'il s'agit de faire de courtes chaînes déductives en s'appuyant sur quelques résultats inter-reliés, qui sont pris pour acquis (axiomatique locale).

objectifs terminaux qui portent sur l'algèbre et les fonctions. Ici, les références à la « démonstration » sont précises et explicites :

> (...) *L'élève pourra démontrer formellement (avec l'enseignante ou l'enseignant d'abord, en équipe ensuite, puis graduellement seul) des propositions géométriques : à l'annexe 2 (page 42), on fournit une liste de propositions simples, intéressantes et facile à traiter. Il est entendu que, pour ces premières démonstrations, on facilitera la tâche à l'élève en la ou le guidant* (...). *On ne devrait pas accorder une grande importance à ces démonstrations au moment de l'évaluation sommative.*
>
> (...) *L'élève pourra parfaire graduellement ses connaissances en géométrie analytique tout en développant son habileté à justifier et à démontrer des propositions (il s'agit de mettre l'effort sur la compréhension plutôt que sur la mécanique de la preuve)* (Objectif terminal 1.5, p. 24).

- *Démontrer des propositions en utilisant la géométrie analytique* (Dernier des Objectifs intermédiaires 1.5, p. 25).

Donnons trois exemples (parmi douze) de ces propositions à démontrer dans l'*Annexe 2*. Celle-ci s'intitule « Îlot déductif en géométrie analytique », et se conclut par la remarque « On peut, bien sûr, démontrer d'autres propositions géométriques ».

- *Le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa mesure égale la moitié de celle du troisième côté.*
- *Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant des trois sommets.*
- *Dans tout triangle, la somme des carrés des mesures des médianes égale les trois quarts de la somme des carrés des mesures des côtés.* Etc.

Les recours à la « démonstration » se font nettement plus explicites en secondaire 4, autant en géométrie synthétique qu'analytique. Dans l'*Objectif général 2*, « Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des situations géométriques », on peut lire :

> *Bien sûr, toutes ces définitions, propriétés et lois serviront à résoudre des problèmes géométriques portant sur des figures à deux ou à trois dimensions. Généralement, l'élève devrait énoncer une proposition ou suggérer une démarche de résolution en la justifiant. La géométrie enseignée doit être logique et raisonnée ; elle doit préparer l'élève aux preuves formelles qui pourront être vues ultérieurement.*

> *« Les élèves ont besoin d'expériences répétées comportant des raisonnements, des discussions et des justifications pour soutenir leurs conjectures avant d'être en mesure de comprendre la nécessité et la valeur d'une preuve formelle*[5] *»* (p. 27).

Dans l'*Objectif terminal 2.1*, « Résoudre des problèmes en utilisant les concepts d'isométrie, de similitude et d'équivalence », on peut lire :

> (...) *Autant sur les solides que sur les figures planes, l'élève résout des problèmes en organisant sa solution, en justifiant les étapes de son raisonnement et en se basant sur les définitions, les théorèmes et les propriétés qu'elle ou il a étudiés précédemment. Dans le but d'arriver graduellement à des preuves formelles, l'élève doit s'efforcer de fournir une argumentation juste et rigoureuse dans des démarches structurées.*
>
> (...) *Elle ou il sera amené à distinguer la conjecture de la certitude et l'hypothèse de la conclusion. Le souci constant de la justification au moment de l'analyse de situations géométriques ou de la résolution d'un problème mènera petit à petit l'élève au raisonnement formel, à la démonstration* (p. 28).

Toujours dans le même ordre d'idées, l'énoncé de l'*Objectif terminal 2.2*, « Résoudre des problèmes à l'aide de rapports trigonométriques », se conclut par le commentaire suivant : « Ici aussi, le souci constant de justification dans la démarche de résolution de problèmes préparera graduellement l'élève au raisonnement formel » (p. 30). Le dernier des *Objectifs intermédiaires 2.1,*

- *Justifier une affirmation dans la résolution d'un problème* (p. 29),

est repris dans les *Objectifs intermédiaires 2.2* (p. 31). Les deux s'accompagnent d'une note qui renvoie à l'*Annexe 3*, page 44. Cette annexe s'intitule « Énoncés géométriques du programme Mathématique 436 ». On présume qu'il s'agit des résultats sur lesquels l'élève pourra appuyer ses justifications. Compte tenu de l'emphase mise sur la démonstration, peut-être l'élève pourrait-il lui-même être amené à prouver, ou à prendre connaissance de la démonstration de certains de ces résultats. Le texte ne le spécifie pas.

---

[5] Cité de Coxford et al., 1991, p. 51.

- **MATHÉMATIQUE 536**

L'esprit est essentiellement le même qu'en Math 436. La plupart des extraits cités ci-dessus sont repris tels quels dans Math 536. L'*Objectif général 1*, « Accroître chez l'élève l'habileté à utiliser l'algèbre », se conclut comme suit :

> *De plus, dans le programme Mathématique 536, démonstrations et preuves devraient être constamment présentes, autant en algèbre qu'en géométrie. L'élève qui suit ce cours poursuivra probablement des études supérieures ; il faut donc lui assurer une préparation appropriée en relevant graduellement le niveau de traitement mathématique* (p. 16).

Comme auparavant, dans les objectifs terminaux et intermédiaires, les appels à la démonstration sont en fait beaucoup plus explicites en géométrie qu'en algèbre. La démonstration est introduite en algèbre principalement par le biais de la géométrie analytique et de la trigonométrie. Signalons une *Introduction aux vecteurs*, où il est prévu qu'« À partir de quelques axiomes, l'élève pourra démontrer des propositions à l'aide des vecteurs » (p. 27).

- *Démontrer l'identité d'expressions trigonométriques* (Objectifs intermédiaires 1.3, p. 23).
- *Démontrer des propositions portant sur le cercle et le triangle rectangle.*
- *Démontrer des propositions portant sur les vecteurs.*
- *Démontrer des propositions à l'aide des vecteurs.*
- *Justifier une affirmation dans la résolution d'un problème.* (Objectifs intermédiaires 2.1, p. 29).

Ces quatre des Objectifs intermédiaires 2.1 s'accompagnent de renvois aux trois annexes. L'*Annexe 1* (p. 37) est constituée des énoncés géométriques des programmes antérieurs du secondaire, énoncés qui pourront permettre « ... à l'élève de déterminer les mesures de certaines figures et de justifier certaines étapes dans la résolution de problèmes » (p. 37). L' *Annexe 2* (p. 42) s'intitule « Îlot déductif sur les vecteurs », et s'ouvre avec la recommandation suivante, que nous faisons suivre de quelques exemples des propositions à démontrer :

> *En utilisant ses connaissances géométriques acquises antérieurement et ses habiletés en démonstration développées précédemment, l'élève devra démontrer certaines propriétés des vecteurs et des propositions en se servant des vecteurs.*

- *Soit* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$, *des vecteurs dans le plan et* r *un scalaire. Démontrer :*

$$\left(r\vec{u} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow \left(r = 0 \quad ou \quad \vec{u} = \vec{0}\right).$$

- *Soit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, *des vecteurs dans le plan. Démontrer :*

$$\left(\vec{u} \perp \vec{v}\right) \Leftrightarrow \left(\vec{u} \cdot \vec{v} = 0\right).$$

- *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu et réciproquement.*
- *Un angle inscrit dans un demi-cercle est droit.* Etc.

L' *Annexe 3* (p. 43) s'intitule « Îlot déductif sur le cercle et sur le triangle rectangle », et s'ouvre avec la recommandation suivante, que nous faisons suivre de quelques exemples des propositions à démontrer :

> *En utilisant ses connaissances géométriques acquises et ses habiletés en démonstration développées précédemment, l'élève devra démontrer les propositions suivantes.* (...)

- *Le diamètre est la plus grande corde d'un cercle.*
- *Toute perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente au cercle et réciproquement.*
- *Dans tout triangle, la bissectrice d'un angle divise le côté opposé en deux segments de longueurs proportionnelles à celle des côtés adjacents.* Etc.

- **MATHÉMATIQUE 416**

Comme les auteurs l'annoncent dans l'introduction du programme Math 436 (p. 3), déjà citée, le programme de Mathématique 416 est moins poussé que celui de Math 436 à la fois quant à l'étendue et la complexité de la matière couverte, qu'en ce qui a trait aux exigences de rigueur, d'exactitude et de formalisation.

Par exemple, les deux derniers paragraphes de l'*Objectif général 1* du programme Math 436 parlait de la géométrie analytique comme d'un pont entre algèbre et géométrie, par lequel l'élève accède « ... à la démonstration de propositions géométriques » (Math 436, p. 15). Il y est aussi question de « formalisation de la mathématique étudiée ... », qui doit « ... se traduire par l'emploi de symboles et de connecteurs logiques et ensemblistes ... » (idem). Or, ces deux paragraphes sont tout simplement absents du programme de Math 416. De même qu'est absent l'objectif terminal 1.5, « Résoudre des problèmes de géométrie analytique » (Math 436, p. 24), dans lequel on trouve les références à la démonstration les plus précises et explicites. Ce qui s'en rapproche le plus en Math 416 est l'*Objectif général 2*, « Amener l'élève à analyser des situations géométriques » (p. 21). On peut y lire :

> *Elle ou il doit maintenant établir le lien entre les étapes de la résolution d'un problème et une argumentation juste et rigoureuse pour établir une preuve. Dans le but d'arriver à des démonstrations de mieux en mieux organisées, il faut mettre l'accent sur le raisonnement proprement dit.* (À comparer à l'extrait de l'*Objectif terminal 1.5*, cité dans le compte rendu du programme Math 436).

Les « appels à la démonstration », on le voit, y sont moins insistants, mais surtout plus flous qu'en Math 436. L'habileté à démontrer, donc, d'**objectif terminal** en 436 passe à **objectif général** en 416. Faut-il en conclure qu'en 416, cette habileté est un objectif qui doit orienter l'enseignement, sans que son atteinte en constitue une priorité, ni même une finalité ? Ce serait là pénétrer les arcanes de l'interprétation sémantique du jargon des programmes du MEQ, ce nous nous garderons bien de tenter !

Constatons tout de même encore que l'annexe « Îlot déductif en géométrie analytique » — le bassin de propositions à démontrer en Math 436 — est absente du programme de 416. Il semble bien que dans l'esprit des auteurs de ces programmes, l'accès à la pensée formelle et au raisonnement déductif soit un « luxe » dont les élèves du programme Math 416 peuvent à la limite se passer.

- **MATHÉMATIQUE 514**

Les mêmes remarques (que pour le programme Math 416) s'appliquent au programme Mathématique 514, version « allégée » du 536, dans laquelle les « coupures » — pour employer un vocabulaire à la mode — n'épargnent pas le raisonnement déductif. En fait foi l'absence de l'*Objectif terminal 2.1* (« Résoudre des problèmes de géométrie », Math 536, p. 28) du programme de Math 514, objectif où les appels à la démonstration et au raisonnement déductif sont les plus explicites.

Avant de commenter la place que font les concepteurs des programmes actuels à la preuve, nous tâcherons de situer sommairement cette place dans une perspective historique récente.

1.3.3 Les programmes précédents

Par rapport au *Programme d'études* du secondaire de 1982, on peut affirmer que le programme actuel marque un net retour de la preuve. En effet, dans le programme de premier cycle du secondaire (1^{re} et 2^{e} secondaires) de 1982, il n'est question ni de preuve, ni de démonstration, ni d'induction, ni de déduction dans aucun des objectifs généraux, terminaux ou intermédiaires. En géométrie par exemple, l'*Objectif général 5* (p. 17) se lit comme suit : « HABITUER l'élève à l'application des notions, des relations ou des propriétés géométriques ». Les *Orientations générales* (p. 12) parlent bien de « Favoriser une participation active de l'élève, (...) par le développement d'une certaine rigueur intellectuelle », mais rien n'est dit de plus précis par la suite.

Il en est de même du programme de second cycle du secondaire (3^{e}, 4^{e} et 5^{e} secondaires) de 1982. Pour donner une idée de l'esprit avec lequel les notions y sont abordées, citons les deux Objectifs intermédiaires (2.5.5 et 2.5.6) qui se rapportent au théorème de Pythagore :

- *APPLIQUER la relation de Pythagore.*
- *ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques relatives à la hauteur dans un triangle rectangle* (p. 24).

Nous relevons tout de même la phrase suivante dans « Les valeurs de l'éducation » :

> *La mathématique véhicule à des degrés divers ces différentes valeurs : les valeurs intellectuelles par la logique, la rigueur, l'analyse, la synthèse, le raisonnement inductif ou déductif, etc. ; les valeurs esthétiques par le travail bien structuré et bien présenté, la beauté de certaines démonstrations ou structures mathématiques,* (...) (section 2.2, p. 11).

Aux programmes Math 436 et Math 536 actuels correspondaient à l'époque l' *Option I* et l' *Option II*, respectivement. Ce sont les deux programmes d'études de 1982 « enrichis » en mathématiques. Outre la remarque ci-dessus, qui est reprise dans la section « Les valeurs de l'éducation », nous y relevons l'*Objectif intermédiaire 4.3.9* (Option I, p. 26), « DÉMONTRER certains théorèmes qui régissent le calcul logarithmique » et l'*Objectif intermédiaire 2.3.14* (Option II, p. 22), « DÉMONTRER l'identité d'expressions trigonométriques ».

Le peu d'emphase mise sur la démonstration, ou sur le raisonnement inductif ou déductif, est d'autant plus étonnant que le contenu du programme de l'Option I s'ouvre avec des éléments (absents du programme actuel) de logique propositionnelle et de théorie des ensembles : proposition, forme propositionnelle, opérateurs logiques, quantificateurs, référentiel, etc. ; sous-ensembles, réunion, intersection, différence, cardinalité, etc. La question se pose : pourquoi initier les élèves à la logique propositionnelle si elle n'est mise en application dans aucune séquence déductive formelle par la suite ? À travers quelques exemples, nous laissons le lecteur juger à quel point « l'attitude de preuve » est peu sollicitée chez l'élève, même dans les objectifs intermédiaires qui mettent en jeu certains éléments de théorie des ensembles ou de logique propositionnelle :

- *UTILISER les lois de De Morgan appliquées aux ensembles* (Objectif intermédiaire 1.2.9, p. 21).
- *Une forme propositionnelle quantifiée étant donnée, TROUVER sa valeur de vérité* (Objectif intermédiaire 1.3.3, p. 21).
- *Un énoncé étant donné, IDENTIFIER les axiomes du corps ordonné des nombres réels qui y sont appliqués.* Etc.

Les *Programmes transitoires* des 4^e et 5^e secondaires se sont appliqués du 1^{er} juillet 1992 au 1^{er} juillet 1996. (Les programmes actuels du secondaire sont apparus l'un après l'autre, année après année à partir de 93 ; sans doute les responsables ont-ils jugés que le délai pour les 4^e et 5^e secondaires serait trop important, d'où la nécessité de ces programmes transitoires). Leur contenu est moins détaillé que ceux des programmes qui les ont précédés et suivis. Du point de vue de l'apprentissage de la preuve, ils portent bien leur nom, en ce qu'ils assurent une transition entre les programmes actuels et ceux de 1982. En 4^e secondaire, on y trouve une introduction à la logique propositionnelle et à la théorie des ensembles, comme dans le programme de 82. Les objectifs intermédiaires sont tous empruntés au programme de 82, mais les deux seuls « DÉMONTRER » en ont été évincés ! Par contre, on sent poindre une certaine sensibilité à l'apprentissage de la preuve, comme dans le programme actuel. En effet, l'*Objectif général 4* du programme transitoire de Math 436, « Favoriser chez l'élève l'analyse de situations géométriques », s'accompagne de l'encadré suivant, qui n'apparaissait pas dans le programme de 1982 :

> *Amener l'élève à appuyer son raisonnement sur des définitions, des propriétés, des théorèmes ou des corollaires, constitue un objectif à long terme.*
>
> *L'un des objectifs du remaniement des programmes en ce qui a trait à la géométrie sera de permettre à l'élève de se bâtir graduellement un système axiomatique en lui présentant les théorèmes ou les corollaires se rattachant aux notions contenues dans chacun des programmes d'études.*
>
> *Durant la période transitoire, nous proposons que les notions de congruence et de similitude soient exploitées en ce sens : que les élèves utilisent les définitions, les propriétés, les théorèmes ou les corollaires se rattachant à ces notions pour justifier les étapes de leur raisonnement dans la résolution d'un problème* (Programme transitoire 436, p. 19).

1.3.4 Conclusion sur les programmes

Que retenons-nous de tout cela ? D'abord, que les concepteurs des programmes actuels semblent mettre de l'avant un retour à l'apprentissage de la preuve. Nous parlons de « retour » parce que d'une part, le programme de 1982 négligeait cet aspect de la formation mathématique, comme nous avons pu le constater. « Retour » parce que d'autre part, les curriculum mathématiques québécois d'avant 82 faisaient, eux, bonne part à la preuve : preuves algébriques et formalisme strict[6] durant les années soixante-dix, dans la mouvance du courant dit « des mathématiques modernes » ; preuves géométriques et axiomatisation non systématique, à travers l'étude de la géométrie euclidienne du « cours classique » d'avant 1964[7].

Par ailleurs, on sent bien que cet apprentissage de la preuve n'est envisagé, par les concepteurs du programme actuel, ni comme dans les années soixante-dix, ni comme dans les années cinquante. L'étude de la logique propositionnelle et de la théorie des ensembles a été abandonnée. Le formalisme et le symbolisme ne sont pas explicitement requis avant la quatrième secondaire, et leur usage n'y est pas érigé en système, comme en fait foi cet extrait de l'*Objectif général 1* du programme actuel Math 436 :

> *La formalisation de la mathématique étudiée dans le programme devrait se traduire par l'emploi de symboles et de connecteurs logiques ou ensemblistes. On leur reconnaît comme avantage la précision et la concision. L'enseignante ou l'enseignant devrait donc les présenter à ses élèves au fur et à mesure des besoins, en les expliquant, puis en incitant les élèves à les utiliser fréquemment* (p. 15).

Pour ce qui est de l'étude de la géométrie, on est loin des enchaînements très « euclidiens » du cours classique. S'il est vrai que l'élève assimile progressivement un corpus croissant de propositions géométriques, avec lesquelles il justifie ensuite certaines étapes en résolution de problèmes, on ne peut dire pour autant qu'il soit véritablement engagé dans une « démarche axiomatique ». Il n'y a, dans l'édification de ce corpus, ni souci de minimalité, ni hiérarchisation (du point de vue du déroulement logique) des propositions, ni préoccupation pour la redondance. On ne spécifie pas quelles propositions doivent être démontrées. Et même si les concepteurs des programmes actuels n'excluent pas la possibilité que ces résultats soient démontrés, ils font passer l'appropriation par les sens et l'intuition avant la démonstration. En effet, dans l'extrait qui va suivre, on semble sous-entendre que le

---

[6] Vraisemblablement, l'introduction à la logique propositionnelle dans le programme de 82 est un vestige du formalisme prescrit par les tenants des « mathématiques modernes ».
[7] Année du *Rapport Parent*.

raisonnement déductif ne sera mis en oeuvre **qu'après** la création d'un réseau de relations, qui s'édifie par des manipulations, des constructions, des mesures, etc.

> (...) *Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant est d'amener l'élève à associer une figure à un ensemble de propriétés. C'est, notamment par la géométrie des transformations que l'élève se créera un réseau de relations lui permettant de faire des déductions pour se convaincre de la véracité d'une affirmation. Les relations entre les connaissances* (...) *doivent être édifiées par l'élève à l'aide de nombreuses activités d'exploration qui lui permettent de manipuler, construire, mesurer, comparer, discuter pour enfin généraliser et intégrer une nouvelle connaissance à celles qu'il possède déjà dans son réseau de connaissances.* (Programme Math 436, p. 35).

Cette préséance des modes plus « empiriques » d'appréhension des propriétés des « objets » géométriques sur le mode déductif d'appréhension, est confirmée par l'organisation des objectifs intermédiaires, ceux qui portent sur la déduction ou la justification étant toujours les derniers de chaque série (un ou deux parmi six à dix objectifs intermédiaires, les autres mettant en oeuvre des moyens empiriques d'appropriation). On pourra également relire l'extrait du fascicule F dans la section 1.3.1, ainsi que le premier extrait du programme Math 116 (section 1.3.2), dans lesquels il apparaît clairement que le raisonnement déductif vient en dernier.

La fréquence du recours à la déduction ou à la preuve (on parle plutôt de « justifications » en 1re, 2^{e} et 3^{e} secondaires) augmente d'une année à l'autre, mais ce n'est qu'en quatrième secondaire que les auteurs du programme envisagent un recours systématique, « ... par l'application d'exigences de rigueur, d'exactitude, de justification et de preuve constantes dans tout développement pertinent » (Math 436, p. 3). Surtout cantonné à la géométrie, le recours à la déduction gagne petit à petit l'algèbre, mais toujours par l'entremise d'un sujet à saveur géométrique, qui sert de « pont » : les homothéties en 2^{e} secondaire (pont géométrie – raisonnement proportionnel), la relation de Pythagore en 3^{e} secondaire, la géométrie analytique en 4^{e} secondaire, la trigonométrie et les vecteurs en 5^{e} secondaire.

Nous résumons avec ce que nous considérons être les points saillants des programmes actuels du secondaire, en ce qui a trait à la preuve et à son apprentissage.

1. Selon ce que nous évaluons de la vision des concepteurs de ces programmes, ni la preuve ni le raisonnement déductif ne détiennent l'exclusivité de la formation intellectuelle que l'étude de la mathématique cherche à promouvoir. Si déduire et démontrer en sont des éléments importants, cette formation doit aussi amener l'élève à mieux organiser, abstraire, analyser, synthétiser, estimer, généraliser ...

2. Il y a un très net souci des concepteurs de faire de l'apprentissage de la preuve un processus **aussi graduel que possible**. La construction de la rationalité chez l'élève passe par des « hiérarchies d'échelons » qu'il franchit progressivement, à travers des activités d'observation, d'exploration, de construction, de comparaison, d'application, d'inductions, de déductions simples. Le stade de la pensée déductive formelle est le dernier dans la hiérarchie, et il n'est pas dit qu'il soit pleinement atteint en 5^{e} secondaire. En tout état de cause, les concepteurs semblent réfractaires aux longues chaînes déductives complexes, et suggèrent plutôt des problèmes dont la solution ne combine qu'un nombre restreint de résultats apparentés (« îlot déductif » : revoir la 4^{e} note de bas de page).

3. C'est avant tout en **géométrie** que l'apprentissage de la preuve et de la pensée déductive se fait : géométrie synthétique d'abord, puis géométries analytique et vectorielle en fin de secondaire. La *géométrie des transformations* y a un rôle central, car c'est par elle « ... que l'élève se créera un réseau de relations lui permettant de faire des déductions ... » (Math 436, p. 35). Mais les programmes ne sont ni très clairs, ni très précis sous ce rapport, et nous aurions souhaité que quelques exemples éclairent en quoi et comment la géométrie des transformations joue un rôle spécifique.

Dans la prochaine section, nous allons tenter de voir ce qui peut justifier ce choix de la géométrie, comme terrain privilégié d'apprentissage de la preuve ; choix qui semble bien avoir été celui des concepteurs des programmes actuels du secondaire.

1.4 Pourquoi s'intéresser à la preuve en géométrie ?

D'abord, une anecdote. L'auteur du présent mémoire siégeait sur le conseil du *Module de mathématiques* à l'université, en tant que représentant des chargés de cours. Une question délicate est à l'ordre du jour : un parmi les cours *Analyse complexe 1*, *Théorie des graphes* et *Géométrie 1* doit être retiré du tronc commun pour faire de la place aux cours d'options. Le représentant de la section *Math-info* s'inquiète : la théorie des graphes est une branche d'avenir, aux multiples applications, si étroitement liée aux récents développements des nouvelles technologies qu'il serait irresponsable d'en priver les étudiants. Le représentant de la section *Math-stat* rétorque : peut-on vraiment envisager qu'un finissant du bacc. en maths puisse ne connaître des nombres complexes que ce qu'il en a vu au Cégep, si tant est qu'il en ait vu quelque chose ? Mais c'est l'argument du représentant de la section *Math-fondamentale* qui fera l'unanimité : si l'on retire le cours de géométrie, où et quand les étudiants apprendront-ils à faire des preuves ?

Pourquoi donc les concepteurs des programmes actuels associent-ils aussi étroitement géométrie et raisonnement déductif ? Pourquoi cette association refait-elle automatiquement surface dès que deux professeurs de maths, ou plus, discutent de l'enseignement de la preuve. Doit-on y voir plus que l'effet d'une tradition, plus qu'un « tribut » historique aux *Éléments* d'Euclide ?

Dans son double article *Mathématiques modernes et mathématiques de toujours* et *Les mathématiques « modernes », une erreur pédagogique et philosophique ?* (1974), l'éminent mathématicien René Thom aborde la problématique de la preuve en géométrie alors qu'il tente de répondre à la question suivante : en quoi, dans les programmes issus du mouvement dit « des mathématiques modernes », l'abandon de l'étude de la géométrie euclidienne pour la théorie des ensembles, la logique propositionnelle et l'étude des structures algébriques constitue-t-il, à son avis, une erreur pédagogique et philosophique ? Nous ne retiendrons que les éléments de son argumentation qui touchent directement ou indirectement la géométrie euclidienne.

Thom compare algèbre et géométrie à différents niveaux, qui ne sont pas tous pertinents à notre propos. Nous relevons d'abord que « ... la géométrie euclidienne est un intermédiaire naturel (et peut-être irremplaçable) entre le langage usuel et le langage algébrique » (Op. cit., p. 53). Thom appuie cette affirmation sur la comparaison (que nous reproduisons telle quelle) des trois langages au triple point de vue suivant :

1° *Le « sens » d'un élément : peut-on formaliser la classe d'équivalence (en extension) définie par un élément du langage ?*
2° *Ce sens est-il clair à l'intuition ?*
3° *Richesse (ou pauvreté) de la syntaxe.*

On a alors les réponses suivantes :

Langage ordinaire.
1° *La classe d'équivalence définie par un mot (un concept) n'est pas formalisable en général (elle est souvent de nature topologique : invariance d'une gestalt.)*
2° *Néanmoins, le sens du mot est clair.*
3° *La syntaxe est pauvre. (Il y a peu de types de phrases nucléaires en grammaire, et l'enchâssement des phrases l'une dans l'autre comme subordonnées s'arrête rapidement : il y a au plus trois ou quatre degrés de subordination possibles.)*

Géométrie euclidienne.
1° *L'objet défini par un mot, une figure géométrique, est formalisable (= descriptible en peu de mots en fonction des êtres élémentaires, les points). L'équivalence est définie par le groupe métrique.*
2° *Le sens d'un mot est clair, car il coïncide avec l'intuition spatiale de la figure correspondante.*
3° *La syntaxe est riche, car elle décrit toutes les positions spatiales respectives des figures et leurs déplacements. (Néanmoins, elle s'exprime verbalement par un petit nombre de concepts, comme l'incidence, dont la combinatoire n'est pas limitée.)*

Langage formel ou algébrique.
1° *La classe d'équivalence est définie comme l'identité d'un symbole écrit avec lui-même : elle est donc formalisable.*
2° *Le sens d'un symbole algébrique est difficilement construit ou inexistant.*
3° *La syntaxe, qui est la combinatoire des opérations possibles, est riche, car elle est en principe illimitée.*

> (...) *La géométrie permet un éclatement psychologique de la syntaxe, sans avoir à sacrifier le sens, toujours donné par l'intuition spatiale. Et en même temps, le sens d'un élément y est déjà donné par une définition formalisable* (pp. 52-53).

Intermédiaire entre la pensée usuelle et la pensée formelle, la géométrie l'est non seulement du point de vue du langage, mais aussi du point de vue du développement psychologique de l'individu. La géométrie a en effet un rôle « générique » à jouer dans ce développement, l'action du groupe métrique (à laquelle l'élève est d'abord inconsciemment confronté dans les activités de mesure) assurant le rôle de lien paradigmatique entre le continu, initialement informe, et le discontinu, opératoire et structuré.

> *On a beaucoup trop insisté, depuis cinquante ans, sur la reconstruction du continu géométrique à partir des entiers naturels (par la théorie des coupures de Dedekind ou la complétion du corps des rationnels).* (...) *Il ne fait guère de doute que, d'un point de vue psychologique (et pour moi ontologique), le continu géométrique est l'être premier*[8]*. Car avoir conscience, c'est avoir conscience du temps et de l'espace, le continu géométrique est en quelque sorte adhérant à toute pensée consciente. Mais ce continu, primitivement homogène et amorphe, se structure peu à peu, et l'outil fondamental de cette structuration est l'action du groupe métrique, qui seule permet de plaquer le discontinu, l'opératoire sur l'étendue homogène. Mais il s'agit là d'une opération déjà très élaborée ; auparavant, on a toutes les propriétés topologiques du continu, propriétés que la mathématique moderne (la vraie) a dû retrouver par un vrai retour aux sources, en s'affranchissant de la tutelle du groupe métrique.* (...) *Les invariants topologiques, plus profonds, apparaissent plus difficilement à la conscience que les invariants métriques, plus superficiels. De là vient que le passage de la pensée usuelle à la pensée formalisée se fait naturellement par la pensée géométrique. Il en a été ainsi pour l'histoire de la pensée humaine, et* (...) *il devrait en être ainsi du développement normal de la pensée rationnelle* (pp. 70-71).

Thom aborde ensuite le problème de la rigueur. Les tenants des mathématiques modernes ont en effet beaucoup reproché à la géométrie euclidienne (telle que présentée dans la plupart des manuels pré-universitaires, comme version plus ou

---

[8] Comprendre : le continu précède le discontinu.

moins réactualisée des *Éléments*) le caractère imparfait, non rigoureux, de son axiomatique.

> *Certains ont caressé l'espoir d'y substituer une version acceptable de l'axiomatique hilbertienne des « Grundlagen ». Espoir déçu, inutile de le préciser, par l'effroyable complexité de cette construction* (p. 63).

Selon Thom, l'importance de la rigueur en mathématique est probablement surestimée.

> *Le vrai problème qu'a à affronter l'enseignement des mathématiques n'est pas le problème de la rigueur, mais le problème de la construction du « sens », de la « justification ontologique » des objets mathématiques.*
>
> (...) *On sait que l'espoir de donner aux mathématiques un fondement rigoureusement formel s'est trouvé irrémédiablement ruiné par le théorème de Gödel. Il ne semble cependant pas que les mathématiciens, dans leur activité professionnelle, souffrent beaucoup de cette situation. Pourquoi ? Parce que dans la pratique la pensée du mathématicien n'est jamais une pensée formalisée. Le mathématicien donne un sens à toute proposition, ce qui lui permet d'oublier l'expression de cette proposition à l'intérieur de toute formalisation de la théorie, s'il en existe* (...). *On peut, je crois, affirmer en toute sérénité que les seuls procédés formels en mathématique sont les calculs, numérique ou algébrique. Or, peut-on réduire la mathématique au calcul ? Certainement non, car même dans une situation entièrement calculatoire, la démarche même du calcul doit être choisie parmi un très grand nombre de possibilités. Et seule l'interprétation intuitive des quantités manipulées permet de guider ce choix.* (...)
>
> *On n'a pas, je crois, tiré de l'axiomatique hilbertienne la vraie leçon qui s'en dégage ; c'est celle-ci : on n'accède à la rigueur absolue qu'en éliminant la signification*[9] (...). *Mais s'il faut choisir entre rigueur et sens, je choisirai sans hésitation le sens. C'est ce choix qu'on a toujours fait en mathématique, où on opère pratiquement toujours dans une situation semi-formalisée, avec un métalangage qui est le langage ordinaire, non formalisé* (p. 49).

Cela amène R. Thom à réfléchir aux « limites et nécessité de l'axiomatisation », et au rôle qu'y joue la démonstration. En bon topologue, il a la conviction que « ... la

[9] Thom avait-il en tête ici la fameuse recommandation de Hilbert à ses étudiants : « Vous devez à tout moment pouvoir remplacer les mots *point, droite, plan* par les mots *chaise, table* et *chope de bière* » ?

rigueur (ou son contraire, l'imprécision) est fondamentalement une propriété *locale* du raisonnement mathématique » (p. 67) :

> (...) *En extrapolant un mécanisme formel jusqu'à la limite de ses capacités génératives, on a toute chance de construire des formules tellement longues et complexes que toute possibilité d'interprétation intuitive disparaît. Les « théorèmes » ainsi obtenus seront peut-être formellement vrais, mais ils seront sémantiquement insignifiants. Ainsi pour toute théorie intuitive (T), on peut s'attendre à devoir se servir, non pas d'une, mais de plusieurs axiomatisations ; chaque axiomatisation locale (S) a avec la morphologie intuitive (T) une « zone de contact » Z_S, pour laquelle elle est valide ; mais dès qu'on construit dans (S) des formules trop longues et trop compliquées, l'intelligibilité disparaît. Il se produit entre (S) et (T), à la frontière de la zone Z_S, une sorte de* décollage sémantique *qui interdit de prolonger l'isomorphisme (S) → (T) défini par le sens au-delà de Z_S. L'idée que la théorie (T) puisse être engendrée par un seul mécanisme formel (S) est* a priori *aussi invraisemblable que d'admettre que la Terre est plate, qu'on puisse couvrir une variété avec une seule carte.* (...)
>
> *L'avantage indéniable d'une formalisation locale est souvent de préciser les données de l'intuition, et, qualité indispensable, de permettre la communication entre mathématiciens* (pp. 68-69).

D'après nous, le recours à ces « axiomatisations locales » dont il est question dans l'extrait ci-dessus, n'est pas sans lien avec ce que les concepteurs des programmes actuels du secondaire appellent les « îlots déductifs ». Afin de creuser ces liens, reprenons les idées de Thom selon la perspective qui nous occupe, à savoir la géométrie euclidienne en tant que domaine d'apprentissage de la preuve. Sur plusieurs plans, l'étude de la géométrie permet une évolution progressive de la pensée « concrète » du jeune élève à la pensée « formelle » ou « propositionnelle » (selon la terminologie de Piaget) de l'élève avancé.

Les concepts géométriques ont une résonance sensible et perceptive forte, mais peuvent par ailleurs se prêter à plusieurs degrés de formalisation, qui vont des caractérisations purement descriptives des manuels du primaire aux « définitions » données par l'axiomatique de Hilbert, en passant par des systèmes moins stricts comme celui des *Éléments* d'Euclide. De la même façon, les propriétés des concepts et les relations qui lient ceux-ci peuvent être abordées selon différents modes, qui permettent la mise en oeuvre de toute une gamme de raisonnements : empirisme, induction, déduction, avec pratiquement tous les dosages et métissages possibles. Cette position intermédiaire entre le « sensible » et le « formel » qu'occupe la géométrie, est du point de vue psychologique celle d'un passage obligé, car c'est à travers elle que l'enfant structure le continu primitif et informe de l'espace, via la « mesure », pour accéder au discontinu opératoire et structuré. Cela se traduit, du point de vue du langage, par la position intermédiaire qu'occupent les termes de géométrie : quelque part entre le mot courant, non formalisable, dont le « domaine de signification » est de nature topologique, et le symbole de la mathématique algébrico-formaliste, dont l'équivalence définie par lui est réduite à son identité avec lui-même.

Charnière, la position de la géométrie l'est à tous égards, en particulier à l'égard de l'axiomatisation. La richesse combinatoire des figures géométriques et de leurs relations engendre une multitude de résultats secondaires qui, en plus de constituer une source de problèmes de tous les niveaux de difficulté, permet de développer des « axiomatisations locales » : îlots de résultats inter-reliés, restreints en nombre, dont certains sont admis (parce qu'accessibles à l'intuition, vérifiables empiriquement ou inductivement, ou tout simplement déjà montrés) et d'autres sont à démontrer déductivement, à partir des résultats admis.

L'élève qui exerce sa déduction sur un résultat significatif d'un tel îlot, prend conscience de la nécessité de l'axiomatisation pour donner à son raisonnement la rigueur voulue ; mais il peut aussi guider ce raisonnement par son intuition : compte tenu des proportions raisonnables que prennent les chaînes déductives dans ces îlots, compte tenu également du caractère perceptif et intuitif des notions et résultats de la géométrie, l'élève **garde bonne prise sur le sens et l'intuition**. L'élève apprend donc — et c'est là, à notre avis, un aspect à la fois subtil et fondamental de l'apprentissage de la preuve — la difficile et indispensable articulation entre intuition et déduction en démonstration ; et plus généralement, entre sens et rigueur au sein de l'activité mathématique. Rudolph Bkouche (1988a) résume bien ceci, quand il écrit :

> *L'enseignement de la géométrie est difficile, d'autant plus difficile que la géométrie participe de la connaissance rationnelle et de la connaissance sensible et que sa compréhension se situe au carrefour du sensible et de l'intelligible* (p. 9).

Il est un indice sûr de ce que la géométrie est le lieu privilégié des articulations sens-rigueur, intuition-déduction : l'omniprésence des modèles et du langage géométriques, comme support à l'intuition, dans la plupart des branches de la mathématique contemporaine avancée. Bkouche parle de « l'aspect métaphorique » de la géométrie, d'une « *géométrisation* considérée comme *mode de représentation* de phénomènes qui *a priori* ne relève pas de la géométrie » (Bkouche, p. 7) :

> *La géométrisation* (...), *lieu d'élaboration de nouvelles formes d'intuition, s'est développée aujourd'hui dans divers domaines, nous citerons la théorie des équations avec la géométrie algébrique et la géométrie différentielle, la théorie des fonctions avec l'analyse fonctionnelle (l'étude des* espaces *de fonctions et je soulignerai ici la puissance métaphorique du mot espace), la physique contemporaine dont nous avons déjà souligné les liens étroits avec la géométrie qui se sont tissés avec Riemann et Einstein ; et nous pouvons rappeler l'importance des représentations géométriques dans les statistiques et l'analyse de données.* (pp. 8-9).

Et puisqu'il est question de mathématiques avancées, concluons avec ces aspects de la géométrie qui touchent les concepts plus sophistiqués liés à la preuve : notions de *base axiomatique* d'une théorie, de *minimalité*, d'*indépendance* (d'un axiome des autres axiomes de la base), de *modèle* (d'une théorie axiomatisée), etc., dont les géométries (neutre, euclidienne, hyperbolique, projective ...) constituent une source exhaustive d'exemplification.

On le voit, les liens entre géométrie et apprentissage de la preuve sont profonds, multiples, et tiennent à beaucoup plus qu'au simple poids de la tradition. Par ailleurs, ces liens mériteraient d'être étudiés, par des expérimentations, des recherches historiques, des études développementales, etc. (Plusieurs des affirmations de René Thom ne sont avancées que sur la base de son expérience de mathématicien-chercheur et de professeur universitaire, et peuvent parfois paraître péremptoires [10], aussi pénétrante que soit sa réflexion). Le présent mémoire a cependant des ambitions plus modestes, comme nous allons le constater dans la prochaine section.

1.5 But de la recherche

La problématique générale est donc celle de l'apprentissage de la preuve au secondaire. Ainsi que nous l'avons mentionné à la fin de la section 1.2.2, le calendrier nous a contraint à renoncer aux expérimentations. Nous avons alors choisi d'étudier les programmes et les manuels scolaires. Comme nous l'avons fait remarquer dans la section 1.3.4, l'apprentissage de la preuve, tel qu'envisagé par les programmes du secondaire, passe avant tout par l'étude de la géométrie.

Nous avons vu, dans la section précédente, qu'il y a de nombreuses et bonnes raisons pour cela. Comme le problème de l'apprentissage de la preuve — au départ vaste et complexe — est difficilement dissociable de celui de l'étude de la géométrie, comme le problème plus circonscrit de *la preuve en géométrie* est en lui-même passionnant, nous avons retenu l'idée de restreindre le domaine de recherche spécifique au mémoire à l'étude de la preuve **en géométrie**, telle que menée dans une parmi les collections du secondaire les plus utilisées au Québec.

Dans la mesure où nous voulions éviter une recherche trop dispersée, où trop de paramètres entreraient en ligne de compte, deux possibilités s'offraient à nous : ou bien couvrir toute la mathématique, et ne faire porter la recherche que sur une partie du secondaire, ou bien couvrir tout le secondaire, en restreignant le champ d'étude. Il nous est apparu important de couvrir tout le cheminement du secondaire parce que l'apprentissage de la preuve, et plus généralement la construction de la rationalité, sont des processus de longue haleine. Pour les raisons que nous avons invoquées plus haut, la restriction à la géométrie s'est alors imposée tout naturellement.

---

[10] Thom ne s'en cache d'ailleurs pas : « Il est inutile, en un pareil débat, de dissimuler la part de préjugés, de partis pris personnels, qui ne peuvent manquer d'influer sur le jugement » (op. cit., p. 39).

Bien entendu, il ne faudra pas conclure que la preuve ou le raisonnement déductif ne sont jamais sollicités en dehors du matériel géométrique. Mais dès après les premières consultations de la collection à l'étude, nous avons pu affirmer sans trop de risque que l'essentiel de la démarche d'apprentissage de la preuve s'y fait bel et bien en géométrie. En cela, les auteurs de ces manuels sont fidèles au programme du MEQ ; comme ils y sont fidèles, d'ailleurs, quant à l'orientation pédagogique générale, à savoir l'articulation des apprentissages autour de la ***résolution de problèmes***. Dans la collection étudiée, comme dans les autres que nous avons consultées avant d'arrêter notre choix (nous verrons à la section 3.3 sur quelle base s'est fait le choix de la collection), le cheminement se structure sur les nombreux problèmes et exercices, et c'est avant tout à la classification et à l'analyse de ceux-ci que nous allons nous attacher.

Les questions que nous nous posons à ce stade, eu égard à la problématique présentée précédemment, sont les suivantes :

- Est-ce que les problèmes de géométrie proposés par les manuels de la collection suscitent chez l'élève une véritable « attitude de preuve », telle qu'elle est définie par Guy Brousseau, par exemple (voir section 2.1.3) ?
- Quels types de preuves sont sollicités dans ces problèmes ?
- Comment se caractérise le travail demandé à l'élève à chacun des niveaux scolaires ? Que sollicite-t-on chez lui ?
- Comment se caractérise l'évolution d'un niveau scolaire à l'autre ? Est-elle suffisamment progressive ? Y a-t-il des ruptures importantes ?
- Peut-on anticiper à quelles conceptions de la preuve les manuels amènent les élèves, à la fin du secondaire ?
- Est-ce que l'emphase mise sur la géométrie des transformations, dans les programmes du MEQ, a une influence sur la conception et l'élaboration des problèmes en regard de l'apprentissage de la preuve ? Etc.

CHAPITRE 2

CADRE THÉORIQUE

Nous entreprenons maintenant la mise en place d'un cadre conceptuel. Il devra éclairer l'analyse systématique que nous comptons faire des problèmes et exercices de géométrie, tels qu'ils apparaissent dans les manuels d'une collection québécoise du secondaire, dans l'optique de leur relation à la preuve ; plus spécifiquement, dans l'optique de leur relation à l'apprentissage de la preuve, comme celui-ci est proposé aux élèves par les auteurs de la collection, dans la mesure de ce que nous pourrons en évaluer à partir de notre analyse.

2.1 Quelques points de vue sur la preuve permettant d'éclairer l'analyse de son enseignement

Dans un premier temps, nous prendrons connaissance des différents points de vue sur la preuve et son apprentissage, qu'ont les didacticiens et historiens des mathématiques tels que Évelyne Barbin, Gila Hanna, Guy Brousseau, Nicolas Balacheff et Nicolas Rouche. Chacun aborde le sujet d'un point de vue particulier, que nous exposerons d'abord en nous tenant en retrait, pour ensuite tenter de nous forger une idée globale et synthétique — et aussi plus personnelle — de la question. L'élaboration de cette synthèse fera l'objet de la section 2.2. Il ressort tout de même de prime abord ceci : ces auteurs partagent avec nous la conviction que l'apprentissage de la preuve — ou plus généralement de la rigueur — en mathématiques, doit être progressif, tant du point de vue de la compréhension et assimilation des mécanismes en cause (éléments de logique propositionnelle, formalisée ou non, distinction figure-dessin, rôles et portée de l'exemple, du contre-exemple, de la contradiction, etc.), que du point de vue de l'expression et de la communication, orales ou écrites, destinées aux pairs ou à l'enseignant.

La *mise au point terminologique* de la section 1.2 tient toujours : les termes *preuve* et *démonstration* sont pour nous synonymes, jusqu'à nouvel ordre. Comme le dit si bien Nicolas Rouche (1989, p. 9), « ... nous ne pouvons partir d'une définition *a priori* des mots *preuve* ou *démonstration*, puisque nous sommes précisément à la recherche des acceptions plausibles de ces termes selon les contextes, les acquis mathématiques et les intentions de ceux qui prouvent ».

2.1.1 Point de vue historique : analyse épistémologique de la notion de preuve

Pour Évelyne Barbin (1988),

- *associer d'emblée l'idée de démonstration au raisonnement déductif ne va pas de soi ;*
- *affirmer péremptoirement que démontrer c'est convaincre est une façon dogmatique d'aborder la question du sens de la démonstration* (p. 613).

Elle fait reposer ces affirmations, entre autres, sur une analyse de l'évolution historique de la signification même de l'idée de démonstration. Elle relève deux importantes ruptures, aux XVII^{e} et XIX^{e} siècles. Si, chez les Grecs et chez ceux qui les ont pris pour modèle, la démonstration avait pour but « ... de convaincre par un discours fondé sur la raison, le logos » (p. 595) et « apparaît donc comme un acte social qui a pour but de convaincre l'autre » (p. 596), les mathématiciens du XVII^{e} siècle (Torricelli, Descartes, Pascal, Wallis, etc.) estiment qu'elle doit éclairer plus que convaincre, et montrer « ... la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée (...) ; en sorte que si le lecteur la veut suivre, (...) il n'entendra pas moins parfaitement la chose ainsi démontrée, et ne la rendra pas moins sienne, que si lui-même l'avait inventée » (Descartes, 1961). Les Grecs veulent convaincre hors de tout doute, sur la base du raisonnement logico-déductif, dont le paradigme est la preuve par l'absurde. Les mathématiciens du XVII^{e} réfutent cette façon de concevoir la démonstration, sont plutôt soucieux d'amener à « l'évidence », à la compréhension, en privilégiant l'heuristique et l'analyse (par opposition à la synthèse), en s'attachant plus à la démarche et aux méthodes.

C'est par rapport à la dialectique contradiction-évidence qu'a lieu la seconde rupture au XIX^{e} siècle, avec la mise au jour des géométries non euclidiennes, rupture consacrée de façon spectaculaire par le théorème de Gödel moins d'un siècle plus tard. Pour le mathématicien de la fin du XIX^{e} ou du XX^{e} siècle, la base axiomatique d'une théorie mathématique n'est plus envisagée comme l'ensemble des « notions communes », des propriétés consensuelles des concepts que la théorie met en oeuvre, mais bien comme l'ensemble des « règles du jeu », des interrelations entre les objets de la théorie, objets qui n'y sont pas définis autrement que par ce tissu d'interrelations, et qu'on voudrait à la limite coupés de toute autre référent. L'idée de *contradiction* change alors de statut : elle n'est plus absolue, mais relative à une théorie et sa base axiomatique ; si bien que le mathématicien du XX^{e} siècle peut être amené à étudier en parallèle deux théories dont la conjonction est contradictoire. Quant à l'idée d'*évidence*, elle est évincée des considérations du « mathématicien actif » de notre époque.

> *L'idée de contradiction* (...) *intervient d'une toute autre façon dans l'Antiquité et au XX^{e} siècle.* (...) *Chez les Grecs, la contradiction intervient dans un acte social, elle est utilisée pour mieux convaincre l'autre. Aujourd'hui, la contradiction intervient dans un système de propositions mathématiques, elle est utilisée pour produire des résultats mathématiques* (Barbin, p. 611).
>
> *Dans la conception formaliste, l'idée d'évidence n'a aucun sens puisque les « termes » points, droites, plans ne doivent rien devoir à nos représentations physiques : tout est à démontrer. Ce qui fait la réalité des objets mathématiques, ce sont les relations qui existent entre eux* (p. 612).

À travers cet itinéraire historique, Évelyne Barbin a cherché à mettre en relief ce qu'elle appelle « l'historicité » de l'idée de démonstration, pour mieux en souligner la relativité. Les conclusions d'ordre didactique qu'elle tire sont les suivantes.

> (...) *Le premier sentiment de démonstration provient du cheminement même que l'on a adopté pour démontrer, de la construction même de l'objet de connaissance. Si l'on pose que la démonstration est un acte social destiné à convaincre, on gomme ce premier sentiment* (p. 614).
>
> *Quelles peuvent être, aux yeux d'un débutant, les vertus du raisonnement déductif ? L'enseignant répond que le raisonnement déductif convainc, alors que l'élève se contente d'être éclairé. Il y a là un obstacle épistémologique*[11] (p. 614).

Pour l'auteure, c'est la construction de la rationalité qui doit primer, « ce qui nous conduit à privilégier l'élaboration, l'explicitation et le perfectionnement de méthodes de résolution par les élèves » (p. 592). Dans cette optique, elle pose les limites du « débat scientifique » (en tant que stratégie d'apprentissage), qui ne permet pas toujours « le passage de la réussite collective à la réussite personnelle » (p. 615), et dont on ne peut espérer qu'il fera émerger cet outil de validation éminemment sophistiqué qu'est le raisonnement déductif. Car c'est bien ainsi, selon elle, que doit s'insérer le raisonnement déductif dans l'apprentissage : comme cette méthode subtile de démonstration à laquelle l'élève accède progressivement, étape par étape, en améliorant ses méthodes de démonstration, à travers la construction de sa rationalité.

À cette étape de l'édification de notre cadre conceptuel (qui en est encore une d'« observation », de collation des idées), l'article et les réflexions de son auteure nous amène à prendre en compte les *fonctions* qu'auront les preuves auxquelles nous seront confrontés dans notre analyse d'une collection du secondaire : sont-elles sollicitées dans un contexte de débat, pour convaincre l'autre, ou éclairent-elles la compréhension, en une démarche heuristique ; par exemple un contexte de résolution de problèmes ? Le raisonnement déductif apparaît-il d'emblée à l'élève comme seule argumentation susceptible de convaincre l'enseignant, ou est-il envisagé comme une

[11] On aurait pu souhaiter que l'auteure développe cette idée. Est-ce que dans son esprit, cet obstacle est infranchissable au point de conduire à un blocage ? Rappelons que Brousseau considère la notion d'*obstacle épistémologique* (qu'il a reprise de Bachelard) comme celle d'un passage obligé : « Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire qu'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus ». (Brousseau, 1998, p. 125).

des plus sophistiquées parmi différentes méthodes d'appréhension du sens ? Mais peut-être retrouve-t-on les deux attitudes au secondaire, selon les années. Et si la preuve change de fonction dans le cours du cheminement secondaire, ce changement est-il suffisamment graduel ?

2.1.2 Regards sur la preuve dans l'activité mathématique

S'il est possible de mettre en relief la relativité de l'idée de démonstration par l'analyse historique, Gila Hanna, dans son article *Challenges to the Importance of Proof* (1995), la relève au sein même de la communauté mathématique actuelle. Aux tenants du mouvement des « mathématiques modernes » (années soixante-dix), qui ont voulu que le curriculum du secondaire fasse une plus large part à la logique et aux preuves rigoureuses, Gila Hanna prête les deux présupposés suivants :

(1) il existe, dans la théorie mathématique moderne, un critère universel de validité de la preuve ;

(2) la preuve rigoureuse est la marque de commerce de la pratique moderne des mathématiques.

Elle les réfute tous deux. D'une part, l'étude des apports majeurs, du point de vue des fondements, des différentes écoles de la pensée mathématique (logicisme, formalisme, intuitionnisme, quasi-empirisme) l'a amenée à la conclusion [12] que celles-ci ont des vues différentes, voire divergentes, sur le rôle de la preuve et ses critères de validité. À cela s'ajoute les nouvelles formes de preuve, que l'informatique a fait naître, et qui suscitent encore de nombreux débats : « zero-knowledge proofs », « holographic proofs », preuves par calculs informatiques, vérifications empirico-informatiques, etc. On n'a qu'à penser à la récente preuve du théorème des quatre couleurs, que de nombreux mathématiciens rejettent, dans l'impossibilité qu'ils sont de vérifier les dizaines de milliers de cas traités par l'ordinateur.

[12] Malheureusement, l'auteure n'en dit pas plus, et ne renvoie à aucune source sur le sujet. Celui-ci, fort complexe, relève du domaine éminemment abscons de la philosophie des mathématiques, et nous renonçons pour notre part à en rendre compte dans le modeste cadre de ce mémoire.

D'autre part l'auteure, s'appuyant entre autres sur un article de l'éminent William Thurston (1994), affirme que chez de nombreux mathématiciens « actifs » comme Thurston, « une preuve devient véritablement fondée et convaincante pour le mathématicien quand elle l'amène à une véritable compréhension mathématique » (Hanna, 1995, p. 42 [13]). Pour Thurston, la question qu'on doit poser n'est pas « Comment les mathématiciens prouvent-ils les théorèmes ? » mais bien, « Comment les mathématiciens font-ils avancer la compréhension des mathématiques ? ». Et il ajoute :

> *Nous* (les mathématiciens) *n'essayons pas de remplir un abstrait quota de production de définitions, théorèmes et preuves. Ce que nous faisons permet-il vraiment de comprendre et penser plus clairement et plus efficacement les mathématiques, voilà l'aune à laquelle nous mesurons plutôt notre succès* (Thurston, p. 163, cité par Hanna p. 42).

Gila Hanna se dit en parfait accord avec Thurston, y compris quand elle reprend (p. 42) cette opinion d'un article antérieur pour préciser sa pensée :

> *Je ne préconise pas un relâchement des standards de preuve de la part de notre communauté ; j'essaie simplement de décrire comment tout cela fonctionne. Les preuves pointilleuses, qui résistent à l'examen minutieux, sont importantes. ... Deuxièmement, je ne critique pas l'étude mathématique des preuves formelles, pas plus que je ne critique ceux qui mettent leurs énergies à rendre les arguments plus explicites et plus formels. Ce sont là deux activités utiles, qui éclairent notre compréhension des mathématiques* (Hanna, 1983, p. 169).

Hanna dénonce ensuite l'excès contraire et s'en prend à ceux qui, dans le milieu de l'éducation, voudraient voir disparaître la preuve du curriculum mathématique. Selon elle, l'importance du rôle du professeur en classe, et par conséquent du formalisme dont il est l'initiateur, a eu récemment tendance à diminuer : réaction au mouvement des mathématiques modernes, ascendant des nouvelles théories pédagogiques issues du constructivisme, influence du livre *Proofs and Refutations* d'Imre Lakatos (1976), qui prône une heuristique basée sur la construction de contre-exemples (pour Hanna beaucoup moins universellement applicable qu'on le pense). Il est à son avis déplorable qu'une maxime sur l'apprentissage — à savoir, que l'élève construit ses

[13] Notre traduction, comme pour tous les autres extraits des articles de Gila Hanna.

propres modes mathématiques et scientifiques d'apprentissage — ait été interprétée au premier degré, comme une *directive* sur leur fonctionnement en classe. En y refusant à l'enseignant un rôle actif, on prive l'élève d'un accès à des méthodes éprouvées de démonstration, et il est irréaliste (toujours selon Hanna) de penser que l'élève pourra redécouvrir par lui-même ces méthodes sophistiquées.

Dans le même ordre d'idées, Hanna balaie les objections de ceux qui croient que la preuve donne des mathématiques une image autoritaire, infaillible, irréfutable (« The Euclidean Programm », comme en parle Lakatos), qui cherche à imposer aux élèves un corpus de savoirs prédéterminés, donnés a priori (par opposition à « socialement construits »). Pour Hanna, c'est le contraire qui est vrai. Dans la mesure où l'on s'entend sur certaines règles de déduction qui font effectivement autorité (est-ce que ces détracteurs remettent en cause la rationalité ??!), la preuve se veut un argument transparent, pour lequel toute l'information et les règles sont sur la table, ouvertes à la critique. La preuve renvoie à l'élève le message qu'il peut raisonner par lui-même, qu'il n'a pas à accepter le résultat parce qu'on lui impose d'autorité.

Et quelles devraient être les fonctions de la preuve en classe, selon l'auteure ? Si pour les mathématiciens, la fonction de la preuve est de justifier, vérifier et valider le résultat, ils en attendent souvent plus : à ce qu'elle éclaire leur compréhension, la signification du résultat, à ce qu'elle ouvre de nouvelles avenues ; « ... voir non seulement que *cela est vrai*, mais aussi *pourquoi c'est vrai* » (Hanna, 1995, p. 47). Or, en classe, l'élève apprend un résultat nouveau pour lui, mais qu'il sait déjà connu de l'enseignant et de la communauté scientifique. Il sait que le résultat est vrai, mais il veut savoir pourquoi. Ainsi, Gila Hanna pense que la principale fonction de la preuve en classe est plutôt celle d'expliquer. C'est pourquoi la preuve ne devrait pas y être proposée comme un rituel, qui singe les pratiques des « vrais » mathématiciens, mais comme une activité instructive et porteuse de sens. « Aux élèves de niveau secondaire (...), on doit présenter la preuve rigoureuse comme un outil indispensable des mathématiques, mais non pas comme le coeur même de cette science » (Hanna, 1983, p. 89).

Pour que cela réussisse, « on doit s'assurer que les élèves comprennent les concepts en cause, que la structure et la présentation de la preuve en font quelque chose de clair et convaincant, et l'on doit équiper les élèves de tous les outils nécessaires à la compréhension d'une preuve » (Hanna, 1995, p. 47). Il faut que les élèves soient prêts à évaluer non seulement les inférences, mais aussi les données sur lesquelles elles s'appuient. Outre le bagage proprement mathématique, cela implique les niveaux psychologique (clarté de l'énoncé, des notations), logique (organisation des idées, leur enchaînement selon des règles acceptées), culturel (ajustement du niveau de langage, en rapport avec l'expérience).

Quels éléments apporte cet article à la construction de notre cadre conceptuel ? S'il met en évidence, quoiqu'à partir d'une analyse différente, la même bipolarisation que dans l'article d'Évelyne Barbin quant aux fonctions qu'on prête à la preuve — *preuves qui éclairent* versus *preuves qui convainquent* — s'il fait valoir, comme chez Barbin, que les preuves qui éclairent devraient avoir préséance en classe au secondaire (à tout le moins les premières années), l'article de G. Hanna fait aussi ressortir à quel point ces fonctions de la preuve peuvent varier avec le contexte.

Le mathématicien-chercheur ne prête évidemment pas la même fonction à la preuve que l'étudiant. Le mathématicien-chercheur n'envisage pas la preuve de la même façon quand il l'élabore pour valider un résultat à la base de l'édifice mathématique qu'il construit, que quand il la communique, la construction achevée, à ses pairs. L'élève n'envisage pas la preuve qu'il soumet à son professeur, dans un devoir ou un examen, de la même façon que celle qu'il propose oralement à son groupe, dans un « débat scientifique » organisé en classe. L'élève n'envisage pas la preuve de la même façon quand le résultat à prouver est un « classique » du curriculum, dont la validité lui est de ce fait imposée d'autorité, que quand il s'agit pour lui d'un résultat secondaire dont il entend l'énoncé pour la première fois. L'élève n'envisage pas la preuve de la même façon quand le résultat à prouver est aisément accessible à l'intuition, que quand le résultat étonne et va à l'encontre de sa perception immédiate.

Une question se pose alors tout naturellement : quel contexte sera susceptible de susciter une authentique attitude de preuve en classe, tout en y minimisant les « effets de contrat » parasitaires ? Quelles conditions faut-il créer pour que l'élève s'engage dans un véritable processus de preuve, à travers lequel il ressentira de lui-même, sans que cela ne lui soit imposé, la nécessité de comprendre et valider le résultat par la preuve ? Et puisqu'avec ces questions, nous abordons le problème de l'apprentissage de la preuve sur un plan résolument didactique, il était normal — à tout seigneur tout honneur — d'aller voir ce qu'en pense Guy Brousseau.

2.1.3 Analyse didactique : preuve et situations d'enseignement

Brousseau (1998) s'est effectivement attaché à déterminer les conditions d'émergence des processus de preuve chez les élèves de la fin du primaire. Ses expérimentations à partir de la leçon sur « la course à 20 » [14] ont constitué une facette importante de cette recherche. La leçon en question comporte trois phases, après explications des règles et exemples d'usage de la part de l'enseignant.

1. Les élèves jouent plusieurs parties à un contre un, en marquant sur une feuille les nombres choisis, de part et d'autre d'un trait.

2. La classe est partagée en deux équipes. Les parties sont disputées au tableau par deux représentants, qui ne doivent pas consulter leurs coéquipiers. Celui des deux qui gagne rapporte un point à son équipe. Les coéquipiers se rendent vite compte de la nécessité de se concerter, pour établir des stratégies qu'appliquera le prochain représentant envoyé au tableau.

3. Le professeur demande aux élèves d'énoncer des propositions, qui sont les formulations des stratégies gagnantes. Les propositions énoncées sont inscrites au tableau, et aussitôt vérifiées par l'autre équipe. Des points sont attribués aux propositions « acceptées » (qu'on conserve au tableau), mais aussi à l'équipe de ceux qui « prouvent » ou « infirment » les propositions.

[14] L'élève qui commence dit 1 ou 2. Son adversaire ajoute 1 ou 2 à ce qui vient d'être dit, et pourra donc dire 2 ou 3, ou bien 3 ou 4. Le premier joueur ajoute à son tour 1 ou 2 au dernier nombre proclamé, et ainsi de suite. Le premier qui dit 20 gagne.

Ces trois phases de « la course à 20 » vont permettre d'illustrer un schéma général d'analyse des situations didactiques, établi par Brousseau. Le jeu à un contre un réalise ce qu'il appelle une ***situation d'action***. L'élève y développe ses propres stratégies, rejetant (intuitivement ou rationnellement) l'une et adoptant l'autre, chaque stratégie étant mise à l'épreuve de l'expérience et appréciée (implicitement ou explicitement) pour son efficacité.

> *Cette succession d'interactions entre l'élève et le milieu constitue ce que nous appelons une « dialectique de l'action ». Nous utilisons le mot « dialectique » plutôt qu'« interaction » parce que, d'une part l'élève est capable d'anticiper sur les résultats de ses choix, et que d'autre part, ses stratégies sont, en quelque sorte, des propositions confirmées ou infirmées par l'expérience dans une sorte de dialogue avec la situation.*
>
> (...) *La plupart des situations didactiques relèvent d'un schéma de l'action particulier. Mais nous réservons le terme de « dialectique de l'action » au sens strict pour les situations didactiques qui ne rendent pas nécessaire la formulation du modèle utilisé par l'enfant* (Brousseau, 1998, p. 33).

La deuxième phase du jeu réalise ce que Brousseau appelle une ***situation de formulation***.

> *Pour gagner, il ne suffit pas qu'un élève sache jouer (c'est-à-dire qu'il ait un modèle implicite) mais il doit indiquer à ses coéquipiers quelle stratégie il propose.* (...) *La formulation d'une stratégie est le seul moyen qu'a un élève de la faire appliquer par celui qui va au tableau* (p. 35).

Pour que les actions et modèles d'action puissent être explicités par les élèves, ceux-ci doivent construire un langage ou code — uniquement à partir de la langue d'usage ou non, formalisé ou non — adapté à la situation ; la « dialectique de la formulation » fonctionnera alors de manière à leur faire mettre au point une communication efficace. Si les propositions d'un élève sont discutées par d'autres, la discussion ne portera pas sur l'efficacité de sa communication (son message est compris ou ne l'est pas !), mais bien sur la validité du contenu. Les moyens d'y emporter la conviction de l'autre (des autres) pourront varier : autorité, validité, rhétorique, pragmatique, logique.

> *Dans la dialectique de la formulation, ils* (les moyens de convaincre) *échappent au contrôle de l'élève, et restent implicites par opposition à d'autres validations qui apparaissent comme le but ou l'objet de l'étude. Pour obtenir ces dernières, il faut organiser un nouveau type de situation didactique* (p. 37).

Ce nouveau type de situation, que réalise la troisième phase de la leçon, est appelé ***situation de validation*** par Brousseau. Les élèves y gèrent des relations entre une situation « réelle », concrète ou non, et une ou plusieurs déclarations qui portent sur cette situation. Un jugement sur ces déclarations est émis par un des élèves, et le « déclarateur » doit pouvoir à son tour

> (...) *exercer des rétroactions sur l'enfant qui juge : il doit pouvoir protester, refuser une raison qu'il juge fausse, réfuter, prouver à son tour. Ils doivent être donc tous les deux dans des positions* a priori *symétriques, tant du point de vue de l'information qu'ils détiennent que des moyens de rétroaction. Aussi, la discussion professeur-élève est très défavorable, même lorsque le professeur pratique une* maïeutique *raffinée pour effacer son autorité.*
>
> *Par contre, si on veut éviter que la rhétorique, l'autorité, la séduction, les sophismes, l'emportent sur la consistance* (sic)*, la logique, l'efficacité des preuves, on ne peut pas laisser la discussion se libérer des rapports avec la situation, laquelle oriente et contrôle le discours des enfants et lui donne un sens* (p. 40).

Il y a donc une réflexion à faire — et c'est un peu la leçon didactique que donne l'expérimentation sur « la course à 20 » — pour que la situation soit organisée de façon à ce que des mécanismes de régulation s'exercent d'eux-mêmes, au sein des discussions.

> (...) *La situation didactique doit les conduire à évoluer, à réviser leur opinion, à remplacer leur théorie fausse par une théorie vraie. Cette évolution a aussi un caractère dialectique, il faut accepter suffisamment une hypothèse — au moins provisoirement — même pour montrer qu'elle est fausse* (p. 42).

Quand on énonce un théorème, on affirme que ce qu'on dit est vrai, qu'on est prêt à soutenir cette opinion, ce qui exige une « attitude de preuve ». Pour Brousseau, cette attitude n'est pas innée, mais se développe et s'entretient par des situations didactiques particulières — les situations de validation — dans lesquelles l'activité de l'enfant est avant tout sociale, et non pas seulement individuelle.

Selon Brousseau, « faire des mathématiques ne consiste pas seulement à recevoir, apprendre et émettre des messages de mathématiques corrects et pertinents » et le « pourquoi » ne peut pas y être appris « seulement par référence à l'autorité de l'adulte » (p. 39). La vérité mathématique exige « une adhésion, une conviction personnelle, une intériorisation qui par essence ne peut être reçue d'autrui sans perdre justement sa valeur » (p. 39). Or, la genèse de cette intériorisation, mise en évidence par Piaget, « implique aussi des relations spécifiques avec le milieu, en particulier lors de la scolarité » (Brousseau, p. 40). On peut se demander si les situations d'enseignement proposées à l'école favorisent cette intériorisation.

Les résultats expérimentaux, compilés par son équipe à partir d'expériences et d'études cliniques et statistiques dont ont fait l'objet les phases de « la course à 20 », tendent à corroborer les convictions de Brousseau, quant à l'importance du choix de la situation — notamment en regard de sa dimension sociale — et des variables didactiques pour susciter chez l'élève une attitude de preuve. Parmi les résultats qui suivent, les quatre derniers portent plus spécifiquement sur l'interprétation des données du tableau ci-dessous (reproduit de Brousseau, p. 43), dans lequel les « théorèmes » sont les nombres qui doivent être choisis pour gagner à « la course à 20 ».

	Nombre de parties nécessaires à l'émergence d'un théorème						
Théorèmes	20	17	14	11	8	5	2
Situation d'action	1	3	9	15[15]	26	46	–
Sit. formulation après action	1	4	16	–	–	–	–
Sit. de preuve	1	6	10	10	–	–	–
Institutionnalisation	1	4	9	10	10	10	10

[15] *Le théorème 11 apparu à la 15^e^ partie, disparaît après la 30^e^, le théorème 8 ne se maintient que pendant une quinzaine de parties et disparaît, le théorème 5 apparaît à la 46^e^ partie* (Brousseau, p. 43).

1. *Les stratégies et découvertes sont utilisées implicitement avant d'être formulées, pour répondre aux nécessités d'une action en cours.* (...)
2. *La formulation intervient après la conviction et avant la preuve, pour répondre aux nécessités d'une action requérant la communication. Plusieurs formulations précèdent la preuve et s'appuient à la fois sur l'efficacité et sur la rationalité.*
3. *Les théorèmes établis ne servent pas tout d'abord à s'étayer les uns les autres, leur articulation n'est découverte qu'à la fin. Le même théorème est découvert plusieurs fois par un même enfant.*
4. *Ce sont les enfants qui perdent une partie qui veulent le plus expliquer leur échec, ou les conditions de la réussite.*
5. *La démonstration atteint sa valeur mathématique lorsqu'elle a été éprouvée comme moyen de convaincre et comme obligation d'être convaincu. Ce qui ne peut se faire qu'entre « égaux », entre enfants.* (...)
6. *L'explication doit être nécessaire, techniquement et sociologiquement ; si le résultat est évident* (...) *ou accepté par tous, on n'obtient qu'une recette* (p. 28).
7. *Les découvertes* (les nombres 17, 14, 11 ... qu'on doit « dire » pour gagner à coup sûr : voir le tableau ci-dessus) *se font à partir du but, « 20 », et régressent. Elles sont enchaînées mais ralentissent à mesure que l'on s'en éloigne. Conclusion, le schème de la démonstration ne se renforce pas et ne se réapplique pas bien, alors qu'un raisonnement par récurrence*[16] *va apparaître dans la situation de preuve.*
8. *Les débats informels entre élèves de la phase 2 n'apportent aucun nouveau théorème et ne renforcent pas la conviction, au contraire, ils font douter les élèves qui possédaient une preuve.*
9. *La situation de validation permet l'organisation des preuves en une démonstration*[17] *qui, elle, suit le sens de la progression du jeu.*
10. *L'institutionnalisation est de toute façon nécessaire pour étayer les pratiques et l'utilisation ultérieure* (p. 43).

La bipolarisation convaincre-éclairer, telle que nous l'avons rencontrée chez Hanna et Barbin, se nuance ici. Pour Brousseau, convaincre l'autre intervient certes de manière

[16] Comprendre « récurrence à reculons » : ce n'est qu'en situation de validation que les élèves comprennent comment le même raisonnement qui justifie que « pour atteindre 20, il faut atteindre 17 » se réapplique à 17, et permet d'obtenir le « théorème » 14, puis 11, puis 8, etc.

[17] Pour la première fois semble s'exprimer une différence entre les termes « preuve » et « démonstration ». Elle se précisera chez Balacheff par la suite (voir la 19e note de bas de page). Il semble bien que pour Brousseau, le terme « preuve » fasse référence aux arguments de toute nature invoqués par les élèves pour justifier une stratégie. Alors que la « démonstration » serait associée à ces argumentations organisées selon un raisonnement (logique) aussi systématique que possible.

centrale dans l'attitude de preuve, mais — et c'est là qu'on s'éloigne de ce qu'en disent Hanna et Barbin — de façon à faire avancer la construction de connaissances, et une meilleure compréhension des phénomènes. Autrement dit, quand la situation est propice (situation de validation), « convaincre » implique **aussi** « éclairer », « comprendre », « expliquer ». À l'inverse, les expérimentations de Brousseau tendent à montrer que le jeune élève **ne cherche pas spontanément** à pousser sa compréhension jusqu'à la « preuve » quand la situation ne l'y engage pas : les conclusions 5, 6 et 7 de la liste ci-dessus sont révélatrices à cet égard. Tout particulièrement la sixième, qui devrait donner à réfléchir aux intervenants du milieu scolaire, qui ne proposent que trop souvent des résultats « évidents ou acceptés par tous ». Les élèves ne cherchent véritablement à s'éclairer et à expliquer « jusqu'au bout » qu'en situation de validation, où leurs nécessaires interactions se font d'égal à égal. La situation de formulation, quoiqu'elle aussi à caractère social, ne suffit pas à pousser les élèves dans cette voie (Cf. la huitième conclusion).

Il ne faut pas croire, sur la base de la cinquième conclusion, que Brousseau proscrit toute intervention de l'enseignant. La conclusion 10, au contraire, fait bien valoir le rôle essentiel de l'enseignant pour construire un répertoire commun, qui servira de base à la suite du travail sur la preuve. Et ce répertoire ne sera pas constitué que de connaissances, mais aussi de modes implicites et explicites de fonctionnement ; bref, de ces *méthodes* chères à Barbin.

Nous retenons donc pour l'instant que l'organisation des situations d'enseignement et le choix des variables didactiques sont centraux quand il s'agit de susciter une « attitude de preuve ». Mais sur quelle base cela doit-il se faire ? En ce qui a trait au résultat à l'étude, sur lequel portera la preuve, on peut affirmer sans trop de risques qu'il doit être *non évident*, si possible *inconnu* de l'élève, et présenté de façon à ce que l'élève ressente sa *validation* sinon comme une *nécessité intérieure*, du moins comme un *défi personnel*, défi que pourra susciter et nourrir la situation. Le résultat doit se prêter à un raisonnement en tout ou en partie de l'ordre de la déduction, raisonnement à la portée de l'élève, mais sans lui être trop immédiatement accessible. Bref, un résultat stimulant pour l'esprit, qui suscite la curiosité, la recherche, le désir de comprendre.

En ce qui a trait à la situation d'enseignement, la question est plus complexe. Brousseau donne bien un exemple prototypique de situation qui suscite une attitude de preuve — la troisième phase de « la course à 20 » — mais elle demande une mise en scène relativement compliquée, que les contraintes de temps et d'organisation ne permettent pas toujours. Peut-on caractériser plus précisément ces « situations de validation » dont parle Brousseau ? Celui-ci est convaincu, expérimentation à l'appui, que les discussions d'élèves à élèves y sont centrales. Mais quelles autres caractéristiques possèdent-elles ? Quelles conditions doivent satisfaire ces interactions d'élèves à élèves, pour que leur intérêt à rechercher des énoncés vrais et à les valider par le raisonnement n'y soit jamais occulté (par exemple, par un désir d'avoir « raison à tout prix » dans la discussion) ? Quelles conditions permettent que les énoncés faux soient détectés par les élèves, selon des mécanismes intrinsèquement engendrés par la situation ? Peut-être nos lectures subséquentes apporteront-elles des éléments de réponse.

2.1.4 Analyse didactique : rôle du social dans la situation et contrats didactiques

Nicolas Balacheff (1987) établit en quelque sorte le pont entre la perspective de Barbin et Hanna et celle de Brousseau : « ... l'étude des processus de preuve doit être conduite en référence *à la fois* à celui qui les met en oeuvre en tant que *sujet connaissant* et à la *situation* dans laquelle il les met en oeuvre » (p. 148). Inspiré entre autres par Lakatos (1976), Balacheff se penche sur le problème de la contradiction, car « l'une des finalités d'un processus de preuve peut être exprimée comme étant d'assurer l'absence de contradictions formelles ou sémantiques dans la solution d'un problème » (p. 148). Or, ce problème de la contradiction se pose à la fois intrinsèquement (le sujet connaissant) et extrinsèquement (la situation) pour celui qui y est confronté, dans le sens qui suit.

D'une part, l'identification ou non d'une contradiction dépend de l'état des connaissances du « témoin-locuteur » (Balacheff reprend de Robert (1982) le cas de ces étudiants qui traitent de façon indépendante n en exposant et n en indice pour affirmer que

$$\lim_{n \to \infty} u_n^{n+1} + u_n^n + u_n^2 + u_n + 1 = L^2 + L + 1,$$

quand $\{u_n\}$ est une suite qui tend vers $L < 1$. Dans cet exemple, l'enseignant verra une contradiction, mais les étudiants non ; à l'inverse, les élèves estiment contradictoire que la somme des angles de tout triangle vaille 180°, car « un petit triangle ne peut avoir même somme d'angles qu'un triangle plus grand » (p. 149)).

D'autre part, la prise de conscience d'une contradiction et son éventuel dépassement (démarche à la base du *constructivisme*) sont dépendantes d'une double construction — celle de l'affirmation et de sa négation — qui « n'existe que par rapport à une attente déçue, à une conjecture infirmée » (p. 150). Cela suppose, de la part de l'élève, son dégagement de l'action, pour évaluer les conditions de validité et les effets de l'affirmation qu'il soutient. Cette évaluation (explicite ou non, délibérée ou non) se fera au sein d'un *processus de décision*. Or, selon Balacheff, qui rejoint Brousseau sur ce point, ce processus est provoqué non pas par la nature de l'affirmation, mais « par **les exigences de la situation** » (souligné par Balacheff, p. 151). Pour appuyer son propos, il y cite la métaphore de Popper (1991) : quelqu'un à qui l'on vient de rendre vingt pence de monnaie n'hésitera pas à affirmer que les deux pièces ne sont pas des contrefaçons. Mais que la vie d'un homme en dépende, il ira jusqu'à consulter le « chief cashier » de la banque d'Angleterre pour certifier l'authenticité des deux pièces.

De l'évaluation par l'élève du risque lié à sa décision, dépendra son engagement dans différents niveaux de validation, selon une économie de logique « qui veut que l'on ne mobilise pas plus de logique qu'il n'en faut pour les besoins de la pratique » (Bourdieu, 1980, p. 145 ; cité par Balacheff p. 152). Autrement dit, la mobilisation de l'élève dépend des enjeux de la situation proposée. Quand l'élève ne fait qu'agir, la situation ne se prête à aucun travail de validation de sa part. C'est le cas des phases d'appropriation des règles d'un jeu (la première phase de « la course à 20 », par exemple), de fonctionnement d'un matériel ou encore,

> *« ... des situations dans lesquelles l'élève a à exécuter des algorithmes, des suites d'ordre, ou à mettre en oeuvre des pratiques réglées par des habitudes pour lesquelles les questions de la validité et de la consistance ne se posent pas,* (...) *parce que la situation porte a priori sur de « bons objets », de « bonnes relations »* (p. 152).

La *situation de décision*, quant à elle,

> *... demande la mobilisation de moyens de décision et donc de moyens de validation, sans que pour autant soit exigée la production explicite de preuves. C'est une proposition vraie et non la preuve de cette proposition qui doit être produite.* (...) *Les opérations intellectuelles du raisonnement hypothético-déductif (en tant que système légitime et fiable de production d'informations) peuvent être mises en oeuvre sans que pour autant une preuve soit produite* (p. 153).

Balacheff en donne pour exemple des séquences didactiques décrites par Gras (1983), portant sur l'apprentissage de la symétrie orthogonale avec un appareil appelé *symétriseur*. Les élèves doivent prédire, sans avoir à justifier, quelle image d'une figure donnée tracera l'appareil. Ceux qui veulent s'assurer de faire une bonne prédiction tentent de l'appuyer sur un raisonnement, qui restera cependant implicite [18].

Finalement l'auteur, reprenant la terminologie de Brousseau (voir ci-dessus), définit la *situation de validation* :

> *L'objectif est la production d'une preuve (de la vérité ou de la fausseté) d'un énoncé. Cette situation contient organiquement la contrainte de mise en oeuvre de processus de preuve* (p. 153).

---

[18] Si l'ensemble des situations de décision (Balacheff) et celui des situations de formulation (Brousseau) forment des sous-ensembles stricts de l'ensemble des situations d'action, il ne semble pas y avoir de relation d'inclusion entre les deux premiers. En effet, l'exemple que donne Balacheff d'une situation de décision montre que les moyens de validation mis en oeuvre peuvent rester implicites, informulés. À l'inverse, dans la deuxième phase de la course à 20 — le prototype des situations de formulation — l'élève peut formuler une stratégie sans avoir cherché à la valider au préalable. Sa propension à valider la stratégie par le raisonnement avant de la tester au jeu dépendra de son évaluation du risque, de l'enjeu. Sans entrer dans un débat sémantique futile, disons simplement que plus l'enjeu est perçu comme important, plus la situation de formulation a des chances d'être également une situation de décision.

Il donne comme exemple la dernière phase de « la course à 20 », où la consigne donnée aux équipes en lice est d'élaborer des propositions qui permettent de gagner à coup sûr, et pour lesquelles des points sont accordés (*énoncés vrais*, « acceptés ») ou retranchés (*énoncés faux*, « prouvés faux »). Selon Balacheff, la différence fondamentale entre les situations de décision et de validation, est la place qu'y prend l'**interaction sociale**.

> *La mise en débat des décisions, l'injonction de garantir leur validité ou de la dénoncer, permet de transformer la situation de décision en une situation de validation. Une des caractéristiques qui apparaît ainsi déterminante pour la production d'une preuve, est la dimension sociale de la situation* (p. 153).

Cette dimension sociale n'est pas toujours suffisante : l'élève peut refuser d'entrer dans le jeu du débat, par témérité, par indifférence, parce que les enjeux sont trop faibles ... Elle n'est pas nécessaire non plus : « ... le risque dû à une incertitude peut conduire à un effort de synthèse des raisons, des conditions nécessaires à la validité, qui réalise l'explicitation d'une preuve » (p. 153). L'élève plus avancé pourrait aussi être sollicité par une satisfaction purement intellectuelle, la curiosité pour la vérité, l'intérêt suscité par la résolution d'un problème novateur et motivant.

À ces deux types de motivation à la preuve — diminution du risque au sein d'un processus décisionnel ou simple désir de savoir — correspondent deux types de contrat didactique :

- Dans le premier, l'élève accepte d'être protagoniste d'une fiction ou d'un jeu, à travers lequel son activité est orientée vers la maîtrise d'un *savoir-faire*. L'activité de l'**élève-praticien** est guidée par un souci d'**efficacité**.

Balacheff qualifie les preuves alors produites de ***preuves pragmatiques***. Celles-ci s'ancrent dans les faits, dans l'action ; elles se fondent sur des propriétés et relations saisies et utilisées par le sujet, éprouvées par la pratique, mais sans nécessairement avoir été justifiées, ni même explicitées.

- Dans le second, l'élève adhère à une position théorique, et la justification de l'activité est de *connaître*. L'**élève-théoricien** est passé à un lieu où le critère est celui de la **rigueur**.

Balacheff qualifie les preuves alors produites de ***preuves intellectuelles***. Celles-ci exigent du sujet un changement de position : « le locuteur doit prendre une position de théoricien, dans laquelle la connaissance (jusque-là agie) devient l'objet de réflexions, de discours, voire de débats » (p. 158). De telles preuves « ... requièrent notamment l'expression langagière des objets sur lesquelles elles portent et de leurs relations » (p. 157) ; alors que la preuve pragmatique est attestée par l'action, et non par le discours, ce « ... qui ne signifie pas pour autant l'absence de tout langage, mais il n'est pas ici l'outil fondamental d'expression de la connaissance » (p. 158).

Pour Balacheff, il y a en France rupture de contrat lors du passage de la classe de cinquième (deuxième secondaire) — durant laquelle le travail de l'élève en géométrie aura été essentiellement pratique — à la classe de quatrième (troisième secondaire), où l'enseignement de la « démonstration »[19] est un objectif spécifique, et a pour terrain privilégié la géométrie théorique.

> *Mais parce que la géométrie en sixième et en cinquième est d'abord une géométrie de l'observation, la nature des connaissances ainsi construites ne permettra pas de satisfaire d'emblée les exigences propres à la démonstration. Quelle que soit la qualité de la négociation d'un nouveau contrat didactique, il ne pourra y avoir un simple passage des preuves pragmatiques et fondamentalement empiriques, valides jusqu'alors, à la démonstration* (p. 170).

Selon Balacheff, le problème de l'échec de l'enseignement de la démonstration dans les classes françaises de quatrième « ... ne peut être posé uniquement en terme de

---

[19] Pour Balacheff, une *preuve* est « ... une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs ». Une *démonstration* est une preuve qui adopte cette forme particulière, acceptée au sein de la communauté mathématique, à savoir, « ... une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini » (p. 148). La distinction qu'il fait entre preuve et démonstration rejoint donc celle de Brousseau : cf. la 17e note de bas de page.

contrat ou d'analyse de la situation. La nature et le statut des connaissances engagées jouent un rôle essentiel » (p. 170). Voici comment il conçoit l'arrimage de cet enseignement au curriculum :

> *Très tôt, disons dès la sixième, doit être posé le problème de l'évolution des fondements rationnels de l'activité mathématique des élèves en même temps, et avec le même statut, que celui de la construction des savoirs. L'exigence des preuves doit donc pouvoir trouver sa place dès les pratiques mathématiques des premières classes, en acceptant que soit reconnue pour preuves autre chose que des démonstrations au sens strict. Il faudra pour cela prendre en considération la nature de la rationalité des élèves et les conditions de son évolution, mais aussi prendre en charge l'analyse didactique des critères acceptés de preuve qui doivent pouvoir évoluer dans le cours de la scolarité* (p. 170).

Par rapport aux questions soulevées à la fin de la section 2.1.3, à travers lesquelles nous cherchions à obtenir une caractérisation plus précise des situations de validation, nous retenons principalement de l'article de Balacheff que les conditions qui font d'une situation d'enseignement une « situation de validation » sont sujettes à évolution. Cette évolution, en parallèle avec celle du « sujet connaissant », lie de ce fait les conditions d'émergence d'une attitude de preuve à « ... la nature et [au] statut des connaissances engagées » (p. 170). À mesure que la maturité de l'élève croît, le rapport de l'élève au savoir passe progressivement de la sphère du *pratique* à celle du *théorique*. Plus l'élève adhère à une position théorique, moins son engagement (ou non) dans un processus de validation d'un résultat donné dépendra de la situation, des interactions sociales, et plus la nature et le statut du résultat à prouver pèsera lourd.

Les situations de validation sont difficiles à caractériser parce qu'elles sont changeantes. Dans le cours d'un cheminement normal, plus les années passent et moins le recours à des dispositifs et des mises en scène élaborés ne devrait être nécessaire à l'obtention d'une situation de validation. On peut même à la limite espérer que l'attitude de preuve d'un étudiant sérieux à l'université n'a besoin, pour être suscitée, que d'un cours dynamique sur un sujet mathématique intéressant.

En regard de l'analyse que nous comptons faire des problèmes de géométrie dans les manuels, une question se pose : dans quel type de situation l'élève abordera-t-il ces problèmes ? Autrement dit, comment évaluer l'intervention de l'enseignant qui soumet un problème d'un manuel donné ? Que fera l'enseignant du problème dans sa classe ? Cette question est évidemment hors de notre contrôle. Pour avoir consulté les « guides d'enseignement », nous savons déjà que ceux-ci sont de peu de secours à cet égard, les considérations didactiques qui s'y trouvent étant de nature trop générale.

C'est donc dire que, par la force des choses, notre analyse devra porter avant tout sur la nature des preuves sollicitées, par rapport au statut des connaissances mobilisées : contextes et acquis mathématiques, niveaux conceptuels des notions et des raisonnements sous-jacents, finalités des processus de preuve, etc. Nous pourrons nous demander, par exemple, s'il y a ou non des ruptures dans le cours de l'apprentissage tel qu'il est suggéré par les manuels, entre le statut des connaissances et le type de rationalité qui leur est apppliqué ; comme c'est le cas — selon Balacheff — dans l'enseignement de la géométrie en classe de quatrième en France.

Avant de nous pencher de plus près — à travers l'étude de l'article de Nicolas Rouche — sur le rapport de la preuve à la matière mathématique travaillée, faisons le point sur notre cadre d'analyse et les situations d'enseignement. Il ne faut pas conclure de ce qui précède que la nature même du résultat en cause, de la preuve sollicitée dans un problème donné, n'a aucune influence sur la situation. En fait, les deux aspects sont inter-reliés. Même si l'influence du problème sur la situation est indirecte — parce que fonction de l'intervention de l'enseignant — nous tâcherons tout de même d'en tenir compte dans notre analyse, dans la limite de ce que nous pourrons en envisager : est-ce que le problème se prête à un débat ? Est-ce qu'il favorise le débat ? Suscite-t-il des approches différentes, voire des appréhensions ou compréhensions divergentes ? Est-il « déstabilisateur » ? Peut-il déboucher sur un questionnement plus large ? Est-ce qu'il sollicite la recherche ? Etc. Nous essayerons également de rendre compte des apports du guide d'enseignement, quand ils sont significatifs. Nous suggérerons parfois les ouvertures possibles, sur lesquelles l'enseignant pourrait faire déboucher un problème qui s'y prête.

2.1.5 Évolution de la notion de preuve : éléments entrant en jeu dans la justification

Dans son article de 1989, *Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?*, Nicolas Rouche propose une analyse des différents modes de démonstration du point de vue de l'évolution — tant mathématique que psychologique — « du sens et des formes d'accès au sens de la matière mathématique travaillée » (p. 9).

Quand l'élève déclare évidente la proposition

> *La médiatrice d'un segment est le lieu des points équidistant de ses extrémités.*

sur le seul constat de symétrie dans la figure suivante,

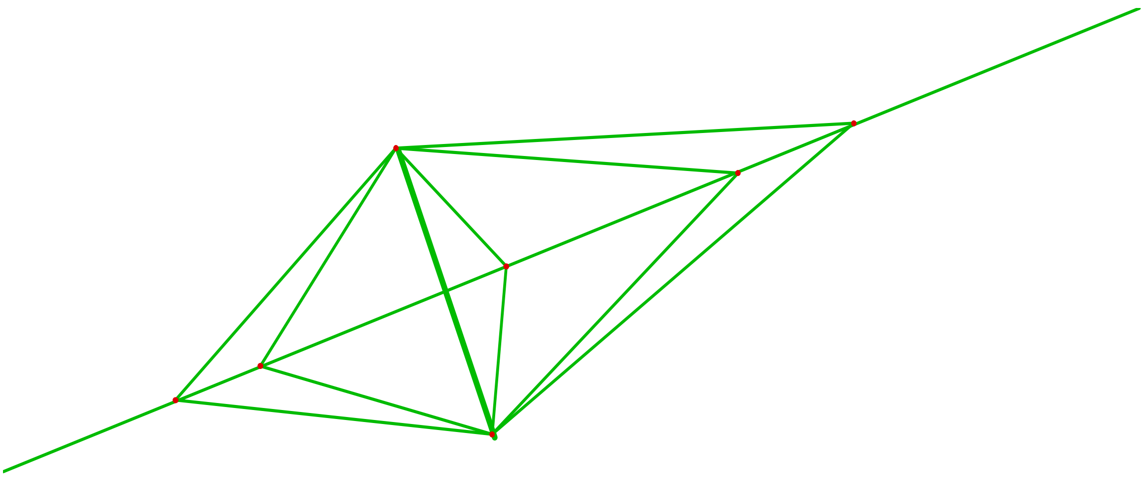


Figure 1 : *le lieu des points équidistant des extrémités d'un segment*

il pose ce que Rouche appelle un *jugement d'une seule venue*. Il s'agit ici d'une *induction* (sûre ou hasardeuse, vraie ou fausse), c'est-à-dire d'une inférence du particulier au général. Ce faisant, l'imagination de l'élève a embrassé tous les autres cas de figures possibles, et sa pensée s'est convaincue que rien ne l'arrêterait dans un tel parcours. Rouche propose la caractérisation suivante d'une proposition vécue comme évidente, à savoir :

a) *qu'on en discerne à vue la réalisation sur un cas particulier ;*

b) *que la pensée s'engage sans accroc dans l'imagination de tous les cas possibles* (p. 14).

Rouche se penche ensuite sur des preuves où est mise en oeuvre ce qu'il appelle *la pensée discursive*. Pour prouver des résultats comme

- *La somme des angles d'un triangle est un angle plat* ;
- *La somme des angles d'un polygone convexe à* n *côtés vaut* (n–2) π ;
- *On peut paver le plan avec des copies isométriques de n'importe quel quadrilatère,*

qui ne suscitent pas une évidence globale immédiate, comme la proposition précédente, on est forcé « de recourir à des évidences partielles, et par conséquent de les enchaîner dans un ordre propre à amener l'évidence de la proposition annoncée » (p. 21). En guise de référence, voici une des trois preuves proposées par Rouche du théorème sur la somme des angles intérieurs du triangle (p. 18).

> *En effet, n'importe quel triangle pave le plan, comme une seule figure suffit à le montrer* (Figure ci-dessous). *Or, en chaque noeud du pavage se retrouve deux fois chacun des angles du triangle.*

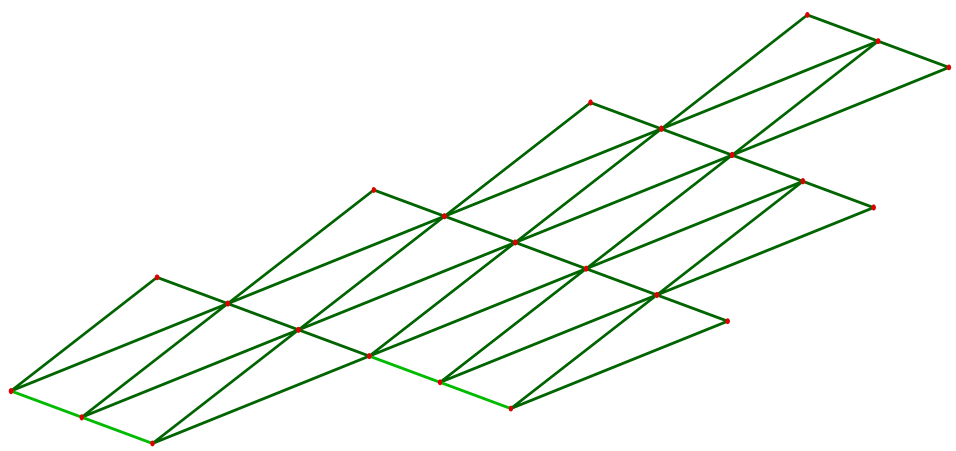


Figure 2 : *tout triangle pave le plan*

L'enchaînement des « évidences partielles » (dans l'exemple, le fait que tout triangle pave le plan, que chaque angle se retrouve deux fois en chaque noeud, que la somme des angles en chaque noeud vaut deux plats) révèle la structure, les relations entre les parties de la figure disséquée, qui « ... se trouve ainsi saisie sur un mode qui se rapproche du mode conceptuel » (p. 21). Cette analyse est rendue nécessaire parce que l'évidence globale n'apparaît pas sur un cas particulier ; autrement dit, la condition a), ci-dessus, n'est pas réalisée.

> *Si la condition b) ne l'est pas non plus, c'est-à-dire si l'ensemble des figures en cause s'avère inaccessible à l'imagination, cet ensemble ne sera plus saisi dans son extension, ce qui rend absolument nécessaire de le saisir en compréhension, c'est-à-dire par des propriétés qui le caractérisent et donc à nouveau sur le mode conceptuel* (pp. 21-22).

Par ailleurs, si les notions engagées dans ces preuves[20] « ont déjà timidement pris quelque distance par rapport au quotidien ... », on n'y trouve « ... aucun de ces caractères qui appartiennent aux mathématiques constituées : des concepts explicitement définis à l'aide de mots et de symboles, des figures présentées comme des illustrations mais dépourvues de rôle dans la preuve, les hypothèses et thèses explicitées séparément, et enfin des arguments empruntés exclusivement aux axiomes et aux propriétés déjà démontrées » (p. 24). Bien qu'elles soient peu formalisées, il s'agit pourtant de vraies preuves, en ce sens qu'« ... elles contraignent l'esprit, qui ne peut prendre avec elles aucune liberté » (souligné par Rouche, p. 24).

> *Et la logique la plus ordinaire est à l'oeuvre dans ces preuves : les déductions y sont de vraies déductions, on ne peut pas, sous peine de ne rien prouver, y utiliser la thèse comme argument* (...). *Quand on est amené, dans de telles preuves, à montrer des choses sur la figure (fut-ce avec des gestes si la preuve n'est pas simplement écrite), montrer ne s'oppose pas à démontrer : toute « monstration » qui contribue à l'univocité du sens est un instrument de la rigueur* (p. 24).

---

[20] En plus de la preuve « par pavage » sur la somme des angles intérieurs du triangle, le lecteur pourra consulter les autres preuves soumises par Rouche, aux pages 18, 19 et 20 de son article.

Avec l'analyse des preuves des deux résultats suivants, Rouche amorce une nouvelle section, dans laquelle le niveau de « mathématisation » des preuves est poussé plus avant :

- *Tout déplacement plan*[21] *est une translation ou une rotation.*
- *Toutes les paraboles ont la même forme.*

Pour démontrer ces deux propositions, Rouche doit

- dans le premier cas, modifier, voire dénaturer les notions familières (les *objets mentaux*, selon la terminologie de H. Freudenthal (1983)) de déplacement et rotation : un déplacement s'applique à tous les points du plan en même temps ; le centre d'une rotation pourrait être situé en dehors du cadre de la figure, etc. ;
- dans le deuxième cas, recourir à une définition analytique des paraboles, ainsi qu'à une expression formalisée (en coordonnées) de l'homothétie.

Au sein même de telles preuves sont forgés

> *... des concepts beaucoup plus « mathématisés », situés à distance considérable des notions quotidiennes* (p. 25).
>
> (...) *Imre Lakatos appelle* proof-generated concepts *ces concepts ainsi constitués pour s'adapter aux exigences des démonstrations. Il a montré sur deux exemples historiques* (...) *comment la recherche des preuves d'une proposition oblige à ajuster les concepts qui y sont engagés et par conséquent réagit sur l'énoncé lui-même.* (...) *Établir un théorème consiste donc, à travers les contradictions et les reprises de la pensée, à ajuster progressivement les uns aux autres à la fois les concepts, l'énoncé et la preuve. Ce n'est nullement un travail déductif, même si son objectif est de produire un morceau de pensée déductive* (p. 28).

Finalement, un énoncé comme

> *Dans un champ*[22] *ordonné, la densité des rationnels implique la propriété archimédienne,*

---

[21] Comprendre : isométrie propre (qui préserve l'orientation).
[22] Dans la terminologie standard, on parlerait plutôt d'un *corps* (*field* en anglais).

met en cause des objets mathématiques purement « conceptuels », qui « ... ne renvoient plus à un monde physique univoque, mais à des mondes imaginables, cohérents et contradictoires[23] ... » (p. 34).

> *Il est hors de propos, à l'examen de cette proposition, de se demander si la densité des rationnels est vraie, ou si la propriété archimédienne est vraie. Il existe des champs qui ne possèdent ni l'une ni l'autre (par ex. les hyperréels de l'analyse non standard). Simplement, la première est ici supposée, et la seconde en découle. Des notions comme celles de vérité, de doute et d'évidence sont transformées par le déplacement de l'attention de la thèse vers l'implication* (p. 32).

En dégageant ces quatre « types » de preuves — *jugement d'une seule venue*, *pensée discursive* du premier type (avec objets mentaux proches des notions familières), *pensée discursive* du second type (avec objets mentaux plus éloignés des notions familières) et finalement, *preuves des « mathématiques constituées »* — comme autant d'étapes dans « ... la construction du sens mathématique » (p. 33), N. Rouche a voulu, entre autres, alimenter les discussions d'ordre didactique sur la preuve des réflexions suivantes :

> *Il n'est sans doute pas facile de passer, dans l'apprentissage de la démonstration, d'un monde de faits où toute contradiction est fautive à un monde d'implications où les contradictions sont domestiquées, non tolérées par endroits, tolérées et étudiées à d'autres* (p. 32).

> *Prouver, démontrer* (...) *s'apprend par étapes, des étapes marquées chacune non seulement par un changement (le plus souvent un accroissement) de l'univers du sens, mais encore par une modification du rapport au sens, des modes d'accès à l'ensemble des référents.*
>
> *À chaque étape sa forme de rigueur, sur laquelle insister.* (...) *Il y a des étapes anté-euclidiennes où la rigueur s'appuie sur des dessins bien faits, des gestes, ...* (...) *Une source de méprise sur la rigueur* (...) *semble bien être la conception assez répandue selon laquelle la* démonstration *serait univoquement définie et qu'en particulier elle exclurait le recours à toute donnée empirique.* (...) *Or la rigueur est non seulement possible, mais s'impose à chaque stade : est-elle autre chose que le sérieux de la pensée ?* (p. 36).

---

[23] Comprendre : chaque monde est intrinsèquement cohérent, mais la conjonction de deux ou plusieurs de ces mondes peut être contradictoire ; par exemple, les géométries euclidienne et hyperbolique.

L'analyse de Rouche sera au centre de la construction de notre cadre conceptuel. Aussi, pour éviter les redites, réserverons-nous nos commentaires sur son article à la section 2.2. Avant de passer à cette section, nous allons toutefois aborder la question de la *figure géométrique*. Comme l'a bien fait valoir Rouche, les preuves géométriques de l'élève qui en est à ses premières armes reposent fortement (voire totalement, dans le cas de certains *jugements d'une seule venue*) sur l'analyse que fait l'élève de la *figure*. Mais ce terme « figure » sous-entend déjà un premier niveau d'abstraction par rapport au « dessin ». La distinction dessin-figure est d'ailleurs à la source de plusieurs difficultés et erreurs chez l'élève, qui doit apprendre à se méfier de sa perception immédiate, et à interpréter la figure à partir des concepts et relations géométriques à l'étude.

2.1.6 Le dessin et la figure en géométrie

D'après nous, donc, la distinction dessin-figure en géométrie s'inscrit tout à fait dans la problématique abordée par Rouche. La *figure géométrique* résulte d'une reconstruction par le sujet qui fait intervenir des éléments de connaissances théoriques, des références aux objets géométriques. En ce sens, l'évolution du *dessin* à la *figure* passe par une conceptualisation et mathématisation accrue. La « figure géométrique » est plus qu'une classe d'équivalence de dessins géométriques : elle charrie (implicitement ou explicitement) avec elle les concepts, définitions, résultats géométriques nécessaires à son élaboration. Le « dessin » peut être moins qu'une représentation planaire de la figure géométrique qu'il modélise, quand celui qui l'exécute interprète mal les consignes et fait une trop grande part à la reproduction purement perceptive, déjouant en cela les *règles du jeu géométrique*.

Colette Laborde et Bernard Capponi (1994) donnent la définition suivante (p. 168), reprise de Parzysz (1988, p. 80) : « la figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit tandis que le dessin en est une représentation ». Les deux auteurs tentent de préciser cette distinction à travers la triade *référent – signifiant – signifié*. Le *référent* est l'idée, le concept géométrique dont le dessin constitue un (parmi une infinité de) *signifiant*(*s*). Le *signifié* est l'interprétation que fait l'observateur du dessin. Elle varie selon le contexte, les connaissances de l'observateur, la théorie (mathématique ou autre) à travers laquelle l'observateur choisit d'interpréter le dessin.

Le dessin ne rend pas compte de toutes les propriétés géométriques de la figure qu'il représente, et « ... une description discursive caractérisant l'objet géométrique est nécessaire pour lever les ambiguïtés inhérentes au dessin » (idem, p. 171). Inversement, certaines propriétés spatiales du dessin ne sont pas propres à la figure. D'où la nécessité de faire travailler les élèves sur la notion de figure géométrique, sur les rapports entre objet géométrique et dessin, par des activités qui demandent une interprétation du dessin du point de vue des connaissances géométriques [24].

Nous touchons là à ce qui devra être un critère d'évaluation des problèmes, exercices et énoncés géométriques des manuels que nous comptons étudier :

- Quelles connaissances géométriques sont mobilisées, implicitement ou explicitement, dans tel ou tel exercice de tracé ?
- Quel statut a la figure géométrique à l'appui d'un problème donné ?
- Est-ce que nature du problème, ou sa formulation, suscite un questionnement de l'élève sur son interprétation de la figure ?
- Est-ce que la nature des problèmes proposés est susceptible d'engendrer, par rétroaction, une remise en question de l'élève qui aurait fait une trop grande part à sa perception de la figure en cause, dans sa solution ? Ou les problèmes proposés laissent-ils au contraire trop de latitude à l'élève à cet égard ? Etc.

---

[24] La thèse soutenue par l'article de Laborde et Capponi est à l'effet que le logiciel *Cabri-Géomètre* permet l'élaboration de telles activités. L'apport potentiel de logiciels comme *Cabri-Géomètre* ou *The Geometer's Sketchpad* à l'apprentissage de la géométrie pourrait constituer en soi un sujet de mémoire, et ne sera pas abordé plus avant dans notre cadre théorique.

2.2 Synthèses sur la preuve : vers l'élaboration d'un cadre d'analyse

Rappelons notre but : l'élaboration d'une grille d'analyse qui permettra de classifier les problèmes et exercices en géométrie, tels qu'ils apparaissent dans une collection du secondaire, sous l'optique de la progression dans l'apprentissage de la preuve. Cette grille sera mise à l'épreuve au moment de la classification systématique des problèmes ; celle-ci appellera sans doute un ajustement de la grille, qui agira en retour sur la classification, jusqu'à ce que ces ajustements successifs aient permis une adéquation satisfaisante de la grille à la classification.

Mais d'ici là, nous devons nous demander quels sont les éléments susceptibles d'éclairer une première élaboration de la grille. Et puisque de preuves il s'agit, ces éléments devront s'articuler sur le questionnement suivant : quel type de preuve sollicite le problème à analyser ? On comprendra alors que l'élaboration de la grille doit passer par l'édification d'une *typologie des preuves*.

2.2.1 Les typologies de Balacheff et Rouche

Une telle typologie est esquissée dans l'article de Nicolas Balacheff (1987), en sus de sa mise au point terminologique sur la différence entre *preuve* et *démonstration* (p. 148 ; voir notre 19e note de bas de page). Balacheff distingue quatre types de preuves, « ... à la fois par le statut des connaissances engagées et par la nature de la rationalité sous-jacente » (p. 163). Les quatre types sont envisagés comme autant de jalons entre les deux pôles que sont les *preuves pragmatiques* et les *preuves intellectuelles* (voir section 2.1.4). Des exemples tirés de productions d'élèves (dont Balacheff ne précise ni l'âge, ni le niveau scolaire ; du moins, pas dans l'article de 1987) illustrent chacun des types. Ces exemples portent tous sur le même problème : dénombrer les diagonales d'un polygone à un nombre quelconque de côtés. On aurait pu souhaiter que Balacheff fasse part du travail d'analyse qui l'a mené à cette typologie. On suppose, entre autres, qu'il a dû prendre en considération des exemples de preuves d'une gamme plus étendue de problèmes, dans la mesure où il affirme avoir tenu compte du « statut des connaissances engagées ». Mais ce n'est pas mentionné dans l'article, et ces autres problèmes, de même que l'analyse des productions auxquelles ils ont pu donner lieu, sont absents des exemples et justifications.

1er type : **l'empirisme naïf**.

« Il consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion » (Balacheff, 1987, p. 163). Par exemple, deux élèves ont dénombré cinq diagonales dans deux pentagones dissemblables. Après qu'ils aient remis leur message à l'observateur, celui-ci leur propose un hexagone. Les deux élèves sont d'accord : *« Ben, y aura 6 diagonales »* (idem, p. 163).

2e type : **l'expérience cruciale**.

« ... [C'] est un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résoud en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse [sic] pour aussi peu particulier que possible » (p. 163). Il en est ainsi de ces élèves qui doutent de leur conjecture sur le dénombrement des diagonales, et proposent : *« On va faire une immense figure pour vérifier »* (p. 164) ; ou de cet autre, qui veut règler un différent avec son partenaire, et lui suggère : *« essaie une fois avec 15 et puis si ça marche, ben ça veut dire qu'ça marche avec les autres »*[25] (p. 164). Pour Balacheff, « ... cette démarche qui reste fondamentalement empirique se distingue de l'empirisme naïf en ce que le problème de la généralisation est effectivement posé et que l'élève se donne un moyen de décider autrement que péremptoirement « (p. 164).

3e type : **l'exemple générique**.

« ... [Il] consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individu » (p. 164). Dans la production suivante, due à Lionel et Laurent (reproduite par Balacheff à la page 164, puis retranscrite en annexe, à la page 173), l'hexagone a

---

[25] Comprendre : « essaie la conjecture sur un polygone à 15 côtés ».

une valeur d'exemple générique. L'argument évolue ensuite vers une formulation qui se dégage des marques du particulier.

Dans un polygone à 6 sommets, il part 3 / diagonales par sommets donc il part / 18 diagonales; mais comme une / diagonale joint deux points: il / n'y a que 9 diagonales : 18□2=9 / et de même avec 7 sommets 8, 9, 10 / 11, ... etc //
alors a 7 sommets il partira 4 diagonales / par sommets //
à chaque fois que l'on ajoute / un sommet >au précédent polygone< on ajoute une diagonale / par sommets >au précédentes diagonales< on divise par / 2 le nombre de toutes les diagonales / et on trouve le nombre de diagonale / du polygone et pour trouver le nombre de / diagonales partant de chaque sommets / on soustré au nombre de / sommet, trois //
mais pour les concaves on enleve encore / 1 diagonale /

4e type : **l'expérience mentale**.
« ... [Elle] invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en oeuvre ; ce qui était le cas pour l'exemple générique » (p. 165). La production suivante, toujours reproduite du même article (p. 165), est retranscrite en annexe à la page 173. On la doit à Cristophe et Bertrand.

En sachant le nombre de sommets d'un / polygone, il partira de chaque point, le / nombre de sommets – (ses deux voisins + lui-même) //
il faudrait multiplier ce qu'on a trouvé par le nombre de sommets / (par chaque sommet, partent le même nombre de diagonales) //
MAIS, on compte chaque diagonale deux fois //
Le nombre de diagonales trouvé est donc à diviser par deux et on / obtient une fois chaque diagonale //

Selon Balacheff, le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles s'opère quelque part entre l'exemple générique et l'expérience mentale, et « ... une marque de ce passage est l'évolution des moyens langagiers mis en oeuvre » (p. 165). Balacheff conclut sur sa typologie en faisant remarquer qu'entre l'expérience mentale et la *démonstration* (qui désigne chez lui — rappelons-le — la forme achevée des preuves mathématiques formelles), il existe vraisemblablement différents types de preuves, qui « ... devraient se différencier par leurs niveaux de décontextualisation, de détemporalisation et de dépersonnalisation (...), ainsi que par leur niveau de formalisme (c'est-à-dire par la part respective de la langue naturelle et du langage symbolique) » (p. 166). Cette typologie des preuves intellectuelles, qui s'inscrirait dans le prolongement de sa typologie des preuves pragmatiques, est pour Balacheff encore à faire.

Nous ne retiendrons pas la typologie de Nicolas Balacheff car le point de vue qu'il y adopte — celui du sujet, de la construction de la preuve par le sujet — n'est pas tout à fait approprié à la démarche d'analyse qui sera la nôtre, compte tenu que nous n'aurons pas accès aux productions d'élèves. Par ailleurs, on voit mal où est pris en compte le « statut des connaissances engagées » dans la description que Balacheff fait des types ; et les exemples ne sont guère plus éclairants sous ce rapport : il n'y a pas de différences significatives, chez les élèves cités par Balacheff, dans leur conception respective de ce qu'est un polygone et ses diagonales ; pas plus qu'il ne semble y avoir divergences dans leur interprétation de la question posée. Or, ce « statut des connaissances engagées » — avec en particulier, le niveau d'abstraction des concepts en jeu, leur distance à l'intuition et au sensible, ainsi que la distance à « l'évidence » du résultat à prouver — est selon notre point de vue fondamental. La « typologie » de Rouche, sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir, nous semble mieux tenir compte de cet aspect.

D'autre part, certains types de preuves sont absents de la classification de Balacheff. On ne voit pas trop bien, par exemple, où faire entrer l'*induction*[26] dans sa typologie : toute démarche empirique n'est pas « naïve » ! Pour finir, Balacheff n'a d'après nous pas suffisamment tenu compte de la distance considérable qui sépare l'élaboration mentale de la preuve de sa rédaction ; ou, ce qui revient au même, il a d'après nous donné trop de poids à la *manifestation écrite* du raisonnement. (Il distingue d'ailleurs les *preuves pragmatiques* des *preuves intellectuelles* sur une base essentiellement langagière). En effet, il nous semble hasardeux de mesurer en quoi diffère le raisonnement de Lionel et Laurent de celui de Christophe et Bertrand (voir ci-dessus),

---

[26] » Induction » dans le sens *d'inférence du particulier au général*, et non dans le sens de *récurrence*.

sur la seule base de leurs productions écrites respectives. Cristophe et Bertrand ont probablement élaboré leur raisonnement à partir d'un exemple, tout comme Lionel et Laurent. Peut-être n'ont-ils tout simplement pas jugé bon de rendre compte de leur démarche de résolution dans sa totalité, et ne la donnent-ils que sous sa forme achevée (d'ailleurs de façon plutôt lapidaire, sans même expliciter la formule). Lionel et Laurent, quant à eux, élaborent leur argumentation à partir de l'exemple d'un polygone à 6 sommets, et expliquent ensuite comment étendre le raisonnement. Les raisonnements ont-il été vraiment différents pour autant ? Peut-être Lionel et Laurent ont-ils cru devoir rendre compte de l'ensemble de leur démarche (d'ailleurs, les ajouts à leur texte, entre crochets (> --- <) dans la transcription, témoignent d'un souci d'être le plus explicite et le plus complet possible). Peut-être ont-ils estimé être plus clair en rédigeant à partir d'un exemple : *écrire* un raisonnement portant sur un polygone à un nombre arbitraire de sommets ne va absolument pas de soi pour un enfant de huit à quinze ans !

Plus pertinente à notre propos nous semble la « typologie » de Nicolas Rouche, telle que nous l'avons décrite dans le résumé de son article de 1989 (voir section 2.1.5) : *jugement d'une seule venue*, *pensée discursive* du premier type (avec objets mentaux proches des notions familières), *pensée discursive* du second type (avec objets mentaux plus éloignés des notions familières) et finalement, *preuves des « mathématiques constituées »* (Rouche, p. 24), auxquelles Balacheff réserve le terme de *démonstration*.

Élaborée principalement du point de vue du « sens et des formes d'accès au sens de la matière mathématique travaillée » (idem, p. 9), la « typologie » de Rouche a, du point de vue de notre recherche, l'avantage suivant sur celle de Balacheff : le type d'une preuve donnée dépend des statuts respectifs du résultat à prouver et des connaissances mathématiques mobilisées, ainsi que de la nature du raisonnement mis en oeuvre. Mais elle **ne dépend pas de la forme** que prendra ce raisonnement. Autrement dit, pour un résultat donné, à un degré de maturité mathématique donné (à un niveau scolaire donné), le type de la preuve ne relèvera plus que de la nature de la rationalité sous-jacente à l'argumentation, indépendamment de l'organisation de celle-ci, de ses manifestations, langagières ou autres. Compte tenu de notre recherche, pour laquelle nous devrons classifier des problèmes à partir des types de preuves qu'ils sollicitent, mais **sans avoir les productions explicites des élèves** sous les yeux, on comprendra que cette exigence, à laquelle répond la typologie de Rouche, est incontournable.

Or, la typologie de Balacheff ne répond pas à cette exigence. Ainsi, les productions qui constituent les exemples de *l'empirisme naïf* et de *l'expérience cruciale* (voir plus haut) procéderaient selon notre optique d'un même type de raisonnement, que nous pourrions décrire comme une *généralisation abusive à partir d'un exemple*. Pour les mêmes raisons et comme nous l'avons fait valoir précédemment, il n'est pas clair pour nous que les productions qui illustrent *l'exemple générique* et *l'expérience mentale* (voir plus haut) procèdent de raisonnements essentiellement différents, et donnent lieu à des types distincts de preuves.

Par ailleurs, la « typologie » de Rouche reste relativement imprécise : il ne s'agit pas tant de « types » de preuves que de jalons posés par Rouche sur toute la durée d'un cheminement d'apprentissage mathématique typique. Dans les prochaines sections, nous tenterons de raffiner ce « découpage » pour élaborer une typologie plus complète des preuves. Comment, pour ce faire, tenir compte des différents points de vue sur la preuve, auxquels les articles de Barbin, Hanna, etc., nous ont donné accès ? Peut-on concevoir une typologie où seraient « croisés » ces différents points de vue ? Comment les concilier, les synthétiser ? Peut-on en trouver un dénominateur commun ?

2.2.2 Points de vue sur la preuve et schémas de bipolarisation

Ce qui frappe d'abord, quand on cherche à répondre à ces questions, c'est que chacun des points de vue sur la preuve abordés jusqu'ici s'articule sur une **bipolarité**, entre les pôles de laquelle on pourra bien sûr imaginer un spectre de possibilités intermédiaires.

- Chez Rouche (Cf. section 2.1.5), cette bipolarisation se fait sur deux plans.

  1er plan : critères de validation utilisés dans la preuve, formes d'accès au sens, types de rapport au résultat.

Amener à l'évidence,	**Contrôler des implications,**
donner un sens au résultat	**créer des modèles disponibles**

<--->

  2e plan : niveau d'abstraction des concepts en jeu, distance des concepts au « réel », au « familier ».

« Objets mentaux »	**Concepts éloignés du sensible,**
proches des perceptions,	**enrichissement des concepts,**
du sensible	**« proof-generated » concepts**

<--->

Mathématisation accrue

On aura compris que les quatre « types » de preuves envisagés par Rouche viennent se placer de la gauche vers la droite dans les deux « continuums » décrits par ces schémas : *jugement d'une seule venue*, *pensée discursive* du premier type (avec objets mentaux proches des notions familières), *pensée discursive* du second type (avec objets mentaux plus éloignés des notions familières), *preuves des « mathématiques constituées »*. De même viennent se placer de la gauche vers la droite les différents niveaux d'interprétation par le sujet de la **figure géométrique** : interprétation purement perceptive du dessin à gauche et reconstruction par le sujet, en référence aux objets géométriques purement théoriques à droite.

- Pour Balacheff et Brousseau (voir sections 2.1.4 et 2.1.3), la bipolarisation est envisagée par rapport aux situations d'enseignement susceptibles ou non de favoriser une « attitude de preuve ». Entre les deux pôles que sont les situations d'action et les situations de validation (celles-ci étant les plus favorables à l'« attitude de preuve »), ces deux auteurs considèrent des zones intermédiaires : situations de décision chez Balacheff, situations de formulation chez Brousseau.

Formulation ....

Action .... **Décision** **Validation**

<-->

Interactions sociales accrues

Si passer des situations d'action aux situations de formulation ou de décision nécessite une interaction sociale accrue, Brousseau fait bien valoir que l'accès aux situations de validation n'est pas spontané — du moins, pas chez les plus jeunes — et que l'interaction sociale ne suffit pas. Pour accéder au dernier stade qu'est la « validation », cette interaction sociale doit prendre place dans des situations didactiques particulières, que nous avons cependant du mal à caractériser. Pour sa part, Balacheff souligne que le passage au stade de la validation pourrait naître de la simple satisfaction intellectuelle chez l'élève plus avancé. Celui-ci adhèrera alors à une position théorique, au centre de laquelle il mettra la connaissance, et non les conséquences de l'action. Cela amène Balacheff à éclairer la bipolarisation initiale à la lumière des *contrats didactiques sous-jacents*.

Pratique **Théorie**

Savoir-faire **Connaissance**

Efficacité **Rigueur**

<-->

Pas de preuve Preuves pragmatiques Preuves intellectuelles

- Hanna et Barbin (voir sections 2.1.2 et 2.1.1), finalement, envisagent la bipolarisation sur le plan des finalités de celui qui prouve.

Montrer pourquoi c'est vrai, **Montrer que c'est vrai,**

éclairer **convaincre**

<-->

2.2.3 Recherche d'un dénominateur commun

De prime abord, il serait tentant de laisser guider notre choix d'un dénominateur commun par nos observations sur les étudiants du collégial auprès desquels nous avons expérimenté (voir sections 1.2.1 et 1.2.2). Nous avons vu que ceux-ci envisagent l'évaluation d'une preuve selon deux points de vue simultanés, un point de vue que nous avons qualifié de *personnel* et un autre que nous avons appelé *officiel*. Et si le dénominateur commun des bipolarisations était justement : *prouver pour soi* ou *prouver pour autrui* ? Quand on *prouve pour soi*, quand on cherche à comprendre, à donner un sens au résultat pour soi-même, on cherche forcément une preuve qui éclaire ; on ne se contente pas de montrer que le résultat est vrai, mais on cherche pourquoi il est vrai : « to see not only *that* it is true, but also *why* it is true » (Hanna, 1995, p. 47). Une méthode de résolution, une preuve constructive ou algorithmique seront préférées à une preuve par l'absurde ou par récurrence.

L'élève qui cherche à prouver pour lui-même cherche autant que possible à se rapprocher de l'évidence, du monde sensible, et il y prend appui chaque fois que c'est possible, ce qui peut le mener à prendre en considération certains éléments d'empirisme. Les figures, les exemples lui sont bienvenus. Il n'envisagera le raisonnement logico-déductif comme méthode d'analyse et moyen d'appréhension du sens qu'à un stade relativement avancé de sa maturité mathématique ; pas avant d'avoir adhéré à une position de *théoricien*, comme le relève Balacheff, ce qui pourrait ne se faire que quand d'*élève*, il est devenu *étudiant*.

La preuve en tant qu'acte social, qui vise à emporter *l'adhésion de l'autre*, est une preuve que le *mathématicien formé* voudra convaincante. Pour celui-ci, le rapport avec l'autre force à *expliciter* l'argumentation mise de l'avant. Il cherchera donc à asseoir une telle preuve sur des arguments irréfutables, avec lesquels son interlocuteur ne peut que tomber d'accord (axiomes, définitions formelles, séquences déductives, etc.). Il verra à y mettre en oeuvre des concepts aussi précisément et objectivement circonscrits que possible ; par conséquent, éloignés des perceptions, du sensible. Il lui fera épouser la forme dans laquelle l'autre est le plus susceptible de se retrouver, qui sera celle du standard commun, établi par la communauté : académique, mathématique, scientifique, selon le contexte.

Mais en est-il de même en classe, pour les élèves ? Les expérimentations de Brousseau (voir section 2.1.3) montrent que le caractère social d'une situation de classe (situation de formulation dans la « course à 20 », par exemple) n'est pas suffisant pour que la cohérence et la logique l'emporte sur la rhétorique, l'autorité, la séduction, les sophismes. Chez l'élève, « convaincre l'autre » ne passe pas nécessairement par un recours à plus de rigueur.

Si le degré de rigueur mobilisée par l'élève pour convaincre l'autre dépend de la situation, il dépend également de l'interlocuteur, comme nos expérimentations tendent à le montrer. Rappelons en effet que l'appréciation de différentes preuves d'un même résultat variait chez les étudiants interviewés (voir section 1.2.1) selon qu'on leur demandait :

- laquelle parmi les preuves ils choisiraient pour convaincre leurs pairs que le résultat est vrai ;
- laquelle ils soumettraient à un professeur de mathématiques pour avoir la meilleure note possible.

Le caractère social est certainement plus accentué dans le premier des deux scénarios. Cela n'a pas empêché les étudiants interviewés de choisir des preuves selon un *point de vue personnel* pour convaincre leur pair, et des preuves selon un *point de vue officiel* pour soumettre au professeur de mathématiques.

Nos deux expérimentations semblent également montrer que les deux pôles (*prouver pour soi*, point de vue *personnel* – *prouver pour autrui*, point de vue *officiel*) **coexistent** dans l'esprit de nombreux élèves du secondaire et du collégial. Dans une perspective psychologique, nous pensons que cette bipolarisation n'est pas vécue par l'élève comme une dichotomie, et que le poids respectif de chacun des pôles varie constamment.

De même que, selon Piaget, le développement de l'intelligence de l'enfant est d'abord sollicité, en même temps que la naissance du langage, par sa socialisation, de même que « (...) les faits d'échanges, avec l'adulte lui-même ou avec les autres enfants, (...) dans la mesure où ils conduisent à formuler l'action propre et à faire le récit des actions passées, (...) transforment les conduites matérielles en pensée » (Piaget, 1964, p. 33), de même l'élève qui doit régulièrement soumettre des preuves à l'enseignant ou les discuter avec ses pairs (dans un cadre où ces discussions sont adéquatement balisées) prend conscience de la nécessité d'étayer ses arguments sur des bases plus solides, et est ainsi progressivement amené à en augmenter la part de rigueur.

> *C'est, en effet, vis-à-vis des autres qu'on est porté à chercher des preuves, tandis qu'on se croit toujours soi-même d'emblée, avant précisément que les autres ne nous aient appris à discuter les objections et avant qu'on ait intériorisé une telle conduite sous la forme de cette discussion intérieure qu'est la réflexion* (idem, p. 45).

C'est donc dire que cette différenciation entre les points de vue personnel et officiel ne nous apparaît pas figée, mais sujette à évolution, en un mouvement de va-et-vient, exactement comme à la naissance de la réflexion chez l'enfant : petit à petit, l'élève fait siens la plus grande rigueur, le plus grand formalisme[27] exigés par le point de vue officiel, qui finissent par s'incorporer au point de vue personnel, si bien que la frontière entre les deux s'estompe peu à peu, en même temps qu'évolue le rapport à la preuve.

Il en découle que pour une preuve donnée, l'évaluation de sa proximité à chacun des deux pôles (prouver pour soi – prouver pour autrui) ne dépend pas intrinsèquement de cette preuve, mais varie avec le cheminement individuel de son évaluateur. Une typologie des preuves basée sur cette bipolarisation risquerait donc d'être particulièrement « glissante ».

---

[27] Dans ce qui va suivre, nous employons le terme « formalisme » dans son acception la plus large, à savoir : l'application systématique de la plus grande rigueur (qui ne s'appuierait idéalement que sur le raisonnement logico-déductif) et précision (définitions idéalement axiomatisées) possibles. Mais cela ne sous-entend pas nécessairement un recours exclusif au langage symbolique, ce que désigne le terme « formalisme » au sens strict. La même remarque s'appliquera à l'adjectif « formel ».

2.2.4 Intuition versus logico-déductif

Une seconde tentative de synthèse des différents points de vue sur la preuve nous amène à considérer, pour une preuve donnée, les parts respectives allouées à l'intuition et au raisonnement logico-déductif. Il nous apparaît soutenable, en effet, que dans chacun des schémas de bipolarisation que nous avons décrits un peu auparavant, le pôle de gauche « tire » la preuve du côté de l'intuition, alors que la part du logico-déductif a nettement plus de chance d'être importante pour une preuve située à droite du spectre.

Intuition,	**Logico-déductif,**
moins de formalisme	**plus de formalisme**

<-->

Afin de creuser cette idée, nous avons cherché dans un premier temps à préciser ce que recouvre le terme *intuition*. Le dictionnaire *Robert* en donne la définition suivante : « Forme de connaissance immédiate qui ne recourt pas au raisonnement ». C'est dans la préface de son livre *Intuition in Science and Mathematics* (1987) qu'Efraim Fischbein a le mieux condensé ses idées et conceptions sur l'intuition.

> *L'intuition a ses racines dans la façon typiquement syncrétique de penser de l'enfant et des êtres humains des civilisations naissantes. Mais elle ne survit pas chez les adultes et dans les cultures à un stade avancé de développement que comme un simple résidu. Nous affirmons que* l'intuition est l'expression d'une nécessité profonde de notre comportement intellectuel.
>
> *Dans le cours même de notre raisonnement, de nos tentatives par essais-erreurs, nous devons nous appuyer sur des idées et représentations qui apparaissent, subjectivement, comme certaines, cohérentes et intrinsèquement claires. On ne peut douter de tout à tout moment. Cette attitude serait paralysante. On doit prendre pour acquises certaines représentations et conceptions. Celles-ci doivent apparaître, subjectivement, comme d'autonomes et cohérentes connaissances, totalement et directement acceptables, de manière à ce que le processus de raisonnement continue de fonctionner productivement.*
>
> *Donc, une intuition se présente comme une telle conception cristallisée — trop souvent, prématurément close — à travers laquelle le vague ou l'insuffisance d'information est masquée par des mécanismes particuliers qui produisent un*

> *sentiment d'immédiateté, de cohérence et de confiance* (10e page de la préface, notre traduction).

Risquons notre propre définition : relations supputées, structurations implicites au sein des faits, des données et des phénomènes, issues d'un sentiment de validité de ces relations qui s'impose immédiatement, et qui sert de tremplin au raisonnement. Ce sentiment peut être basé sur des perceptions, sur des inductions ou déductions pressenties (et généralement non encore explicitées), et évolue avec le développement conceptuel de l'individu. Elle est fonction des connaissances construites antérieurement par cet individu, et ne peut se réduire à la pure perception. Pour une situation donnée, l'intuition variera donc d'un individu à l'autre, et variera aussi dans le temps (en une évolution discontinue, par à-coups) chez le même individu. Le rapport à l'intuition évolue lui aussi avec l'individu. Celui-ci pourra la tenir d'emblée pour certitude, ou cherchera à la valider (par l'expérimentation, par le raisonnement ...) selon qu'il aura appris ou non à « s'en méfier » ; car bien entendu, l'intuition peut être source d'erreurs.

Si ce qu'en fait chaque individu varie, elle est tout de même présente à tous les stades du développement. Même le résultat le plus abstrait, le raisonnement déductif le plus formel[28] nécessitent un premier abord par l'intuition ; sinon, comment choisir, parmi la multitude d'enchaînements logiques possibles, celui qui mène au résultat ? René Thom (cité par Largeault, 1993) oppose *intuition* et *déduction* dans cette belle métaphore : « La déduction est à l'aveugle ce que l'intuition est au paralytique, l'une avance et ne voit pas, l'autre voit mais n'avance pas ».

Mais qu'en est-il du rapport à l'intuition dans les processus de preuve ? Pour Fischbein (1987, p. 212[29]), ce rapport est essentiellement dialectique, car il y a une « ... profonde contradiction entre *la nature des mathématiques* et la nature du *raisonnement mathématique* », contradiction dont on peut retrouver la trace autant dans l'histoire des mathématiques que dans son apprentissage, tel que vécu par

---

[28] Voir la 27e note de bas de page.
[29] Notre traduction.

l'enfant ; contradiction fondamentale, dont un des termes est l'intuition, et que Fischbein décrit comme suit :

> *La dynamique du raisonnement mathématique — et généralement, de tout type de raisonnement scientifique — inclut des composantes psychologiques variées, telles convictions et expectatives, visualisations schématiques, analogies et paradigmes. Il ne s'agit pas de simples vestiges de formes plus primitives de raisonnements. Ce sont des éléments actifs, et véritablement productifs de tout type de raisonnement.*
>
> *Cela mène — comme je l'ai dit — à une contradiction dialectique profonde. On a besoin de « flashes » et de « filons » intuitifs*[30] *pour être en mesure de penser productivement. Mais en même temps, la principale tâche du raisonnement mathématique est de se « purifier » en éliminant tous supports et arguments extra-logiques* (p. 212).

Dans la prochaine section, nous tenterons de faire valoir que cette relation dialectique entre intuition et preuve est fondamentalement instable, parce qu'entraînée dans un mouvement général d'évolution du rapport de l'élève à la preuve, et plus généralement au savoir. L'analyse de cette évolution nous amènera à faire le point sur l'apprentissage de la preuve. Pour l'instant, nous anticipons sur cette analyse pour conclure sur la bipolarisation *intuition – logico-déductif*, en regard de la typologie des preuves encore à élaborer. Nous concluons essentiellement de la même façon que dans la section 2.2.3 : nous ne retenons pas comme critère d'évaluation d'une preuve donnée la proximité à l'intuition et au logico-déductif parce que le concept d'intuition est trop « fuyant », trop changeant d'un individu à l'autre. Même en supposant que les élèves arrivent tous au même stade de leur rapport à l'intuition à un moment fixé du curriculum scolaire (ce qui n'est généralement pas le cas), évaluer et caractériser ce stade serait beaucoup trop hasardeux.

[30] C'est la meilleure traduction que nous ayons pu trouver pour *intuitive prompts and incentives*. Les guillemets sont de nous.

2.2.5 L'évolution du rapport de l'élève à la preuve au cours de son apprentissage

Selon nous, l'évolution du rapport à l'intuition chez l'élève se fait parallèlement, et de façon analogue, à celle que nous avons décrite plus haut (voir section 2.2.2), par laquelle la différenciation entre les points de vue personnel et officiel s'estompe. De fait, cette évolution implique tous les aspects du rapport à la preuve. À mesure que sa « maturité mathématique » augmente, l'élève-étudiant apprend à se méfier de sa perception, des pièges de l'empirisme et de « l'évidence », à discerner les concepts de leurs représentations sensibles, à distinguer dessin et figure ; il apprend à asseoir ses raisonnements sur des bases logiques plus strictes — ceux-ci gagnant petit à petit leur indépendance de la situation qui les a fait naître — à s'imposer une plus grande rigueur d'argumentation, même quand il n'y a nécessité de convaincre personne d'autre que soi-même. De la même manière, l'élève apprivoise progressivement son intuition, la dompte en cherchant à valider les pseudo-certitudes qu'elle cherche à imposer, et apprend à en faire un instrument qui guide ses déductions — comme dans la métaphore de Thom — plutôt que de leur faire obstacle.

Dans le résumé qui suit, le terme « formalisme » est à prendre au sens large, et fait référence à la recherche d'une précision systématique dans l'usage des termes et concepts mathématiques en jeu. De ce formalisme devrait donc découler un recours à des définitions aussi exactes que possible, ce qui mènera ultimement à une axiomatisation de la théorie. Nous n'envisageons pas le « formalisme » sous son acception stricte de recours exclusif au langage symbolique. De fait, nombreux sont ceux qui pensent que l'usage systématique du symbolisme constitue un obstacle à une prise en charge de la preuve par l'élève. Par exemple, le NCTM (1989, p. 126) recommande que les arguments déductifs exprimés discursivement reçoivent une attention accrue en géométrie, par rapport aux « preuves en deux colonnes »[31].

---

[31] Les « preuves en deux colonnes » constituent, dans le milieu scolaire anglo-saxon, la forme de preuve où le symbolisme est le plus systématiquement utilisé.

En résumé, donc, l'apprentissage de la preuve se présente comme un processus d'appropriation-intériorisation progressive :

- de la distanciation
  - au sensible,
  - à la perception,
  - à l'intuition ;
- des exigences
  - de l'adhésion de l'autre à notre argumentation,
  - de sa bonne communication,
  - de son explicitation et rationalisation ;
- des méthodes et processus de validation, qui vont dans le sens d'un accroissement
  - de la rigueur,
  - de la contribution du logico-déductif,
  - du formalisme.

Les auteurs auxquels nous nous sommes référés jusqu'à maintenant semblent s'accorder sur le fait que, quel que soit le point de vue par lequel on aborde cet apprentissage, il doit se faire par étapes, et qu'un passage trop brusque d'un pôle à l'autre du spectre ne permet pas cette appropriation qui en est l'essence même.

CHAPITRE 3

MÉTHODOLOGIE

Dans ce chapitre, nous décrirons comment nous avons élaboré une grille d'analyse des problèmes et exercices de géométrie, tels qu'ils se présentent dans les manuels récents du secondaire basés sur le programme actuel (MEQ, 1993). Nous préciserons ensuite en quoi consiste cette grille. À l'aide de celle-ci, nous espérons pouvoir cerner en quoi les problèmes proposés aux différents niveaux sont susceptibles ou non de développer chez les élèves une « attitude de preuve ».

Il s'agira, plus précisément, de déterminer ce qu'exige la résolution d'un problème donné : sollicite-t-elle ou non une validation ? Si oui, de quel ordre ? Nous avons cherché à caractériser de quel ordre est la validation sollicitée en l'associant aux types de preuve qu'elle met en jeu. Pour atteindre cet objectif, nous avons donc été amené — comme nous l'avions précédemment annoncé — à élaborer d'abord notre propre *typologie des preuves*.

3.1 Une typologie des preuves

Cette typologie des preuves a été confinée aux preuves de géométrie. Rappelons en effet (Cf. sections 1.4 et 1.5) que nous avons choisi de restreindre la problématique générale de l'apprentissage de la preuve à ce qu'en véhicule l'étude de la géométrie, pour les raisons suivantes :

- retracer l'apprentissage de la preuve dans chaque branche des mathématiques aurait donné lieu à une recherche trop dispersée ; se restreindre à une année ou deux du curriculum aurait été aller à l'encontre de la nature même de cet apprentissage ;
- les programmes du Ministère de l'Éducation du Québec font passer l'apprentissage de la preuve principalement par l'étude de la géométrie ;
- pour des raisons que nous avons essayé de comprendre et analyser dans la section 1.4, l'étude de la géométrie a des liens privilégiés avec l'apprentissage de la preuve, et cet état de fait est reconnu et admis par une large part de la communauté mathématique.

Se restreindre aux preuves de géométrie porte évidemment à conséquence, et il ne fait pas de doute que notre typologie serait à réévaluer (dans le sens probable d'un élargissement) si d'autres branches des mathématiques entraient en ligne de compte.

Compte tenu de l'usage que nous comptons en faire — compte tenu, entre autres, que nous voulons « évaluer » les problèmes de géométrie a priori, en regard de la validation qu'ils sollicitent, des types de preuve qu'ils mettent en jeu, sans avoir accès aux productions correspondantes des élèves —, cette typologie a été élaborée en tenant compte des exigences suivantes :

a) le type de preuve sollicitée dépend des statuts respectifs du résultat à prouver et des connaissances mathématiques mobilisées, ainsi que de la nature des raisonnements susceptibles d'être mis en oeuvre, mais ne prend pas en compte les manifestations (langagières, organisationnelles) de ces raisonnements, puisque celles-ci dépendent des résolutions élaborées par les élèves ;

b) la détermination du type de preuve, forcément fonction du niveau de scolarisation (on ne retrouve pas les mêmes exigences en secondaire 1 qu'en secondaire 2 ou 3 ...), doit cependant se faire selon des critères relativement stables et faciles à évaluer pour un niveau scolaire donné ; en particulier, pas trop changeants d'un individu à l'autre.

Par exemple, l'idée de s'appuyer sur la bipolarisation *prouver pour soi – prouver pour autrui* (voir section 2.2.3) ou sur la bipolarisation *intuition – logico-déductif* (voir section 2.2.4) doit être rejetée parce que la typologie résultante ne répondrait pas à l'exigence b). Par ailleurs, nous évaluons que les « types » de preuves envisagés par Rouche (voir section 2.2.1) répondent aux exigences sus-mentionnées. Nous avons donc été amenés à considérer la bipolarité suivante, sur le plan des *sources de validation mobilisées* :

Source de validation :	Source de validation :
le sensible	**le raisonnement logico-déductif**

<-->

Le schéma est proche de celui que nous avions déduit des travaux de Rouche, sur le plan du *niveau d'abstraction des concepts en jeu*, de la *distance des concepts au « réel » et au « familier »*. Il est également compatible avec les schémas que nous avions déduits des travaux de Brousseau, Balacheff, Hanna et Barbin (Cf. section 2.2.2).

Avant de retenir cette bipolarisation comme critère général de classification des preuves, nous l'avons mise à l'épreuve en distinguant des types de preuves (sur la base de l'analyse théorique présentée au chapitre précédent, en partant plus spécifiquement des travaux de Rouche) selon les sources de validation que celles-ci mobilisaient, et en classifiant ensuite d'après ces types un assortiment de preuves bien caractérisées. Après une série d'ajustements, nous en sommes arrivés à considérer la typologie qui va suivre. Elle se découpe d'abord selon trois grandes classes :

1. Source de validation : le sensible.
2. Source de validation double : argumentation raisonnée qui s'articule sur le sensible.
3. Source de validation : le raisonnement logico-déductif.

Nous différencions ensuite deux sous-catégories pour chacune des trois grandes classes, et donnons des exemples qui viennent préciser chacune des sous-catégories.

Source de validation : le sensible

- **Le jugement d'une seule venue**

  Exemple 1. Celui décrit dans l'article de Rouche (1989, p. 13), sur le constat de symétrie dans la figure 1, par lequel l'élève se convainc que la médiatrice d'un segment est le lieu des points équidistant des extrémités.

  Exemple 2. Après avoir pris connaissance de la figure 3 ci-dessous, l'élève déclare « évidente » la proposition selon laquelle une droite qui coupe deux droites parallèles déterminent des angles correspondants congrus.

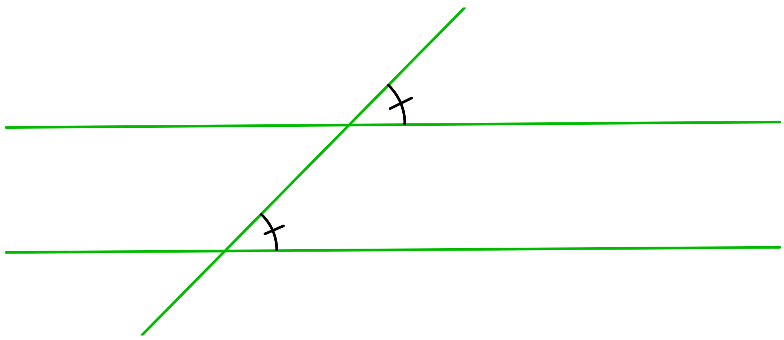


Figure 3 : *des angles correspondants*

Le « jugement d'une seule venue » s'applique aux énoncés évalués par l'élève (à tort ou à raison) comme « évidents », ce qui signifie que l'élève s'en remet totalement à ce que lui suggère son intuition. Rappelons que Rouche (p. 14) caractérise une proposition vécue comme évidente lorsque :

- l'*on en discerne à vue la réalisation sur un cas particulier ;*
- *la pensée s'engage sans accroc dans l'imagination de tous les cas possibles.*

C'est bien ce qui se passe dans les deux exemples ci-dessus : si les figures 1 et 3 réalisent un cas particulier des propositions qu'elles illustrent, l'élève en perçoit d'emblée le caractère *générique*. Autrement dit, une conviction quasi immédiate s'impose à l'élève selon laquelle tout autre représentant de la classe d'équivalence définie par la figure vérifie la proposition énoncée. Notons qu'une situation peut être évaluée *à tort* comme étant générique. C'est le cas, par exemple, de ces deux élèves (Balacheff, 1987, p. 163) qui affirment que les polygones ont autant de diagonales que de sommets parce qu'ils ont dénombré cinq diagonales dans deux pentagones dissemblables (voir section 2.2.1).

- **L'induction empirique**

  Exemple 3. Pour montrer que la somme des mesures des angles intérieurs de tout triangle est 180°, des élèves découpent les bouts de triangles cartonnés et les juxtaposent ; ou encore, mesurent au rapporteur les angles de divers triangles et calculent les sommes.

Contrairement à celui qui est en jeu dans le *jugement d'une seule venue*, le résultat échappe ici à l'intuition de l'élève, qui le valide empiriquement, par une expérimentation, une induction à partir de cas de figure, où son évaluation sera perceptive, et ne fera pas appel au raisonnement déductif.

Source de validation double : argumentation raisonnée articulée sur le sensible

- **L'expérience mentale**

  Exemple 4.[32] La preuve d'Euclide du critère côté-angle-côté de congruence des triangles. Soient ΔABC et ΔDEF deux triangles tels que les côtés AB et AC soient respectivement congrus aux côtés DE et DF, et tels que les angles $\angle A$ et $\angle D$ compris entre ces côtés, soient congrus. Transportons ΔABC sur ΔDEF de façon à faire coïncider le sommet A avec le sommet D, et le côté AB avec le côté DE. Comme $\angle A$ et $\angle D$ sont congrus, le côté AC viendra se placer sur la demi-droite DF, et comme les côtés AC et DF sont congrus, les points C et F ne peuvent que coïncider. Mais alors, les côtés BC et EF coïncident, et par suite les angles $\angle B$ et $\angle E$, et les angles $\angle C$ et $\angle F$.

[32] N. Rouche (1989, p. 11) mentionne que R. Bkouche (1988b) a commenté cette preuve. Elle est pour ce dernier une « lecture raisonnée du dessin ».

Exemple 5. La preuve suivante (attribuée à Clairaut) que d'un point sur une droite, on peut élever une et une seule perpendiculaire à cette droite. Soit *A* un point sur une droite. Traçons une demi-droite *AB* choisie de sorte que les deux angles adjacents α et β, formés par cette demi-droite et la droite de départ, soient visiblement inégaux ; disons $\alpha > \beta$ (voir figure ci-dessous). Faisons pivoter la demi-droite *AB* autour du point *A*, de façon à ce que l'angle β augmente tandis que l'angle α diminue. Pour une et une seule position de *AB*, on aura égalité entre les deux angles, qui vaudront chacun la moitié d'un angle plat, soit un droit.

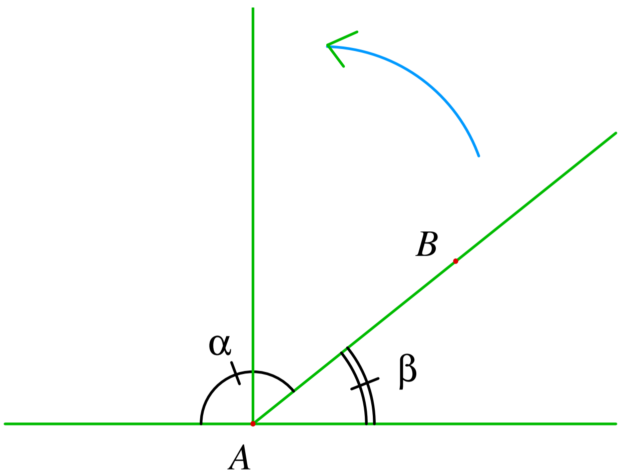


Figure 4 : *l'unique perpendiculaire passant par A*

Les résultats à montrer dans ces deux exemples sont d'un accès aisé à l'intuition. Si les « preuves » qu'on en donne épousent la forme d'une description d'expérience « physico-mécanique », personne ne s'attend à ce que cette expérience soit menée effectivement, et la nature de la démarche est en fait beaucoup plus intellectuelle qu'empirique. Autrement dit, et on nous passera l'expression, l'expérience est « bidon » ! Il s'agit bien plutôt de véritables raisonnements, qui prennent appui sur le sensible, et qui cherchent à « creuser » l'intuition initiale, à lui donner une base plus solide. Par exemple :

- L'exemple 4 permet d'appuyer l'intuition initiale sur le fait que sur une demi-droite d'extrémité *D* donnée, il n'y a qu'un et un seul point *F* tel que le segment *DF* soit congru à un segment *AC* donné.
- L'exemple 5 permet d'appuyer l'intuition initiale sur le fait qu'une fonction continûment croissante, qui prend ses valeurs de 0 à 180, atteint la valeur 90 une et une seule fois.
- Les deux exemples utilisent implicitement le fait que sur un côté d'une droite donnée, on ne peut tracer qu'une et une seule demi-droite de sommet donné, pour former avec la droite un angle congru à un angle (de mesure) donné(e).

Ces « expériences mentales » ont donc la fonction (consciente ou non) de ramener le résultat en cause, par le raisonnement, à des « évidences plus fondamentales », sans que ces évidences soient énoncées explicitement, sans même nécessairement qu'elles soient intérieurement formulées. Ici plane le fantôme de la démarche axiomatique, qui reste implicite, dans un contexte qui colle par ailleurs fortement au sensible.

- **L'argument empirico-déductif**

  Exemple 6. La preuve « par pavage » (Rouche, 1989, p. 18 ; voir notre figure 2) du théorème sur la somme des angles intérieurs du triangle.

  Exemple 7. Le calcul suivant de l'aire du cercle, sachant la formule de son périmètre. On découpe le cercle en secteurs congrus, et on les ré-agence pour faire un « quasi-parallélogramme ».

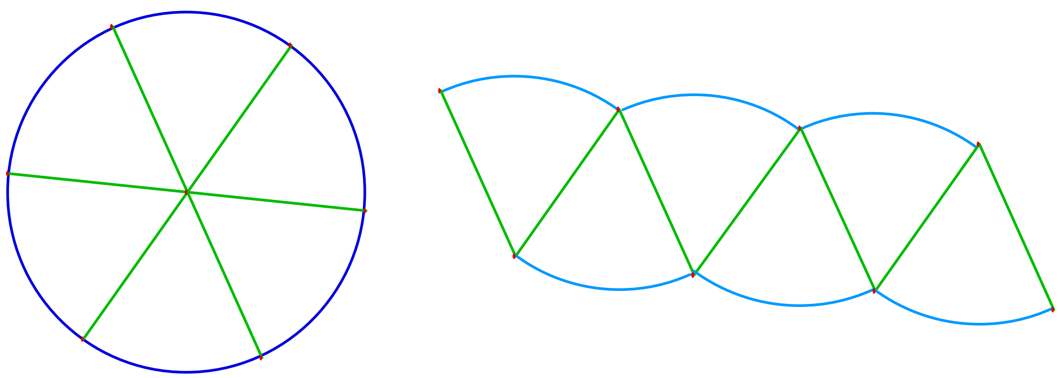


Figure 5 : *l'aire du cercle*

Plus le nombre de secteurs est grand, plus la figure de droite est proche d'un parallélogramme. À la limite (avec des secteurs infiniment minces), on obtient un parallélogramme dont la hauteur est le rayon du cercle, dont la base est son demi-périmètre, et dont l'aire donne par conséquent la formule de l'aire du cercle.

Les résultats des exemples 6 et 7 sont beaucoup moins accessibles à l'intuition que dans les deux exemples précédents. Ce type de preuves se distingue du type précédent en ce que le raisonnement n'y a pas pour point de départ l'intuition première du résultat. Ici est mis à profit ce que Rouche appelle *la pensée discursive* : une série « d'évidences partielles » s'enchaîne pour mener à l'évidence du résultat annoncé. Or, s'il est vrai que cet enchaînement met en oeuvre la pensée logico-déductive, un ou plusieurs résultats intermédiaires font l'objet d'une validation qui n'est que purement perceptive. Dans l'exemple 6, l'élève accepte que tout triangle pave le plan sur sa seule perception de la figure 2. Qu'il veuille vérifier le résultat plus formellement, il devra prouver que les tuiles sont bien « jointives », ce qui ne peut guère se faire qu'en invoquant le théorème sur la somme des angles intérieurs ! L'argument de l'exemple 7 repose sur un passage à la limite, lui aussi traité comme une intuition perceptive.

Source de validation : le raisonnement logico-déductif

- **La déduction locale**

  Exemple 8. La mesure des angles d'un triangle équilatéral est de 60°. En effet, les trois angles du triangle équilatéral sont congrus (on suppose que ce résultat a déjà été montré), et la somme de leurs mesures donne 180. Donc, chacun mesure $180 \div 3 = 60$.

  Exemple 9. Deux angles opposés par le sommet sont congrus car ils ont un supplémentaire en commun.

  Exemple 10. Une droite qui coupe deux droites parallèles détermine des angles alternes-internes congrus. On suppose déjà montrée la congruence entre angles opposés par le sommet et entre angles correspondants, quand une sécante coupe deux droites parallèles. Il suffit alors de constater que les deux angles alternes-internes sont congrus à un même troisième angle, opposé par le sommet pour l'un et correspondant pour l'autre.

Il s'agit ici d'obtenir un nouveau résultat en combinant deux ou trois résultats précédemment établis. La combinaison est mentalement d'une seule venue (elle consiste le plus souvent en une implication directe), et ne nécessite pas une organisation particulière, un enchaînement hiérarchisé temporellement. Dans l'exemple 10, par exemple, on peut invoquer la congruence des angles correspondants d'abord, et celle des angles opposés par le sommet ensuite, ou l'inverse, sans que cela ne change quoi que ce soit à l'argumentation.

- **L'enchaînement déductif**

  Exemple 11. La preuve classique du théorème sur la somme des angles intérieurs de tout triangle ΔABC : on invoque l'axiome de la parallèle pour tracer l'unique parallèle à BC qui passe par A. On conclut à partir de la congruence des angles alternes-internes ainsi formés.

  Exemple 12. La preuve standard de la relation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$, obtenue en calculant l'aire d'un carré de côté $a + b$ de deux façons différentes.

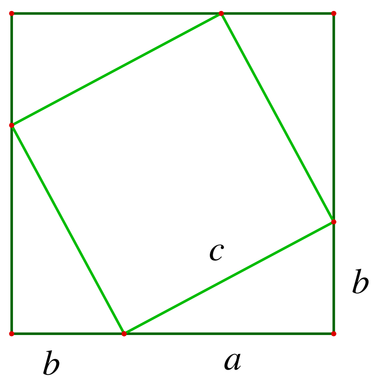


Figure 6 : *une preuve du théorème de Pythagore*

« Démonstration » pour Balacheff, « preuve des mathématiques constituées » pour Rouche : un nouveau résultat est inféré — selon les règles de la déduction logique — de la combinaison de résultats déjà établis (théorèmes ou axiomes), par la mise en oeuvre de ce que Rouche appelle *la pensée discursive*. Mais contrairement à ce qui se passe dans la catégorie précédente, le raisonnement (le plus souvent une série d'implications) nécessite une organisation temporelle, un enchaînement hiérarchisé. Dans l'exemple 11, on ne peut invoquer la congruence des angles alternes-internes **avant** d'avoir considéré, en vertu de l'axiome de la parallèle, l'unique parallèle à BC qui passe par A. Dans l'exemple 12, l'une des façons de calculer l'aire du carré de côté $a+b$ consiste à additionner les aires de quatre triangles rectangles (congrus au triangle de départ) à celle d'un carré de côté c. Mais il faut **auparavant** avoir prouvé que le quadrilatère au centre (figure 6) est bien un carré de côté c.

Le niveau de difficulté de telles preuves pourra varier considérablement selon le nombre de résultats intermédiaires mobilisés, selon la complexité de leur combinaison, selon le niveau d'abstraction et de mathématisation des concepts en jeu (Cf. section 2.1.5). Créer des sous-catégories pour tenir compte de ces difficultés est hasardeux : dans l'ensemble de ces preuves, le nombre des résultats intermédiaires à combiner est théoriquement non borné ; et le niveau d'abstraction des concepts en jeu est relatif à la maturité mathématique de celui qui a rédigé la preuve, ou de celui qui en prend connaissance.

Une fois cette typologie précisée, nous avons ensuite élaboré une grille d'analyse des problèmes. Elle doit permettre de cerner ce à quoi fait appel la résolution d'un problème donné du point de vue de la validation. Elle est constituée de catégories à partir desquelles seront classifiés les problèmes et exercices de géométrie. Un premier canevas consiste à associer tel ou tel problème au type de preuve que sa résolution met en jeu, et donc à créer une catégorie pour chacun des six types de preuve de notre typologie. Mais ce premier canevas a dû être raffiné : d'une part, certains problèmes ne sollicitent aucune validation chez l'élève, et nous avons dû créer une catégorie pour les englober. D'autre part, nous avons voulu rendre compte de ce que la formulation du problème, selon le contexte et la situation proposée, introduit parfois des éléments déstabilisateurs, qui forcent à préciser une définition, à repenser les « objets mentaux » vers une conception plus abstraite, à distinguer dessin et figure géométrique. Nous verrons plus loin à quoi cette prise en compte a donné lieu.

3.2 Vers l'élaboration d'une grille d'analyse

Comme celle de la typologie, l'élaboration de la grille s'est faite en une série d'ajustements successifs. Un premier canevas mis en place, il est mis à l'épreuve par une première tentative de classification et d'analyse des problèmes. Cette tentative appelle une révision de la grille, qui agit à son tour sur l'analyse, et ainsi de suite. Nous ne rendrons bien sûr compte que du résultat final, obtenu après que ce mouvement de va-et-vient ait permis une adéquation satisfaisante de la grille à l'analyse, et une polyvalence de la grille suffisante pour permettre l'analyse de l'ensemble des problèmes de géométrie.

3.2.1 Quelques considérations et précisions préliminaires

Tel qu'annoncé, chaque catégorie correspond au type de preuves que la résolution du problème sollicite a priori chez l'élève. Ainsi, les catégories B et C regroupent les problèmes dont la résolution sollicite un *jugement d'une seule venue* et une *induction empirique*, respectivement (source de validation : le sensible). Les catégories G et H regroupent les problèmes dont la résolution sollicite une *expérience mentale* et un *argument empirico-déductif*, respectivement (source de validation : raisonnement articulé sur le sensible). Les catégories M et N regroupent les problèmes dont la résolution sollicite une *déduction locale* et un *enchaînement déductif*, respectivement (source de validation : le raisonnement logico-déductif). La catégorie A est constituée de ces « applications directes », dans lesquelles l'élève met en pratique une consigne, exécute un algorithme, applique une définition ou un résultat récemment abordé ; ces problèmes pour lesquels les questions de validité et de cohérence ne se posent pas (aucune validation n'est donc exigée de l'élève dans ce cas), et parmi lesquels on retrouve entre autres tous les exercices de tracé [33].

---

[33] Nous parlons bien ici d'exercices de **tracé** et non de **construction** (à la règle et au compas). Ceux-ci, au contraire des exercices de tracé, exigent de l'élève qu'il appuie l'élaboration de la figure de justifications géométriques, débouchant ultimement sur de véritables raisonnements.

◊ **Problèmes frontières**

Bien entendu, la classification d'un problème donné est parfois difficile à faire. Les distinctions entre les catégories A et B ainsi qu'entre les catégories A et M sont souvent problématiques ; nous aurons l'occasion d'y revenir. Nous ajouterons parfois une lettre en indice pour rendre compte de ce qu'un problème est à la frontière de deux catégories. Par exemple, quand il ne s'agit que d'appliquer un résultat précédemment abordé pour répondre à la justification demandée, nous dirons :

- que le problème est dans la catégorie M (déduction locale, implication directe) si l'élève doit **trouver** quel résultat appliquer ;
- que le problème est dans la catégorie A si le résultat à appliquer **s'impose de lui-même**, soit qu'il vienne tout juste d'être vu, soit que l'énoncé en fasse part, soit que le contexte en prescrive l'application sans doute possible.

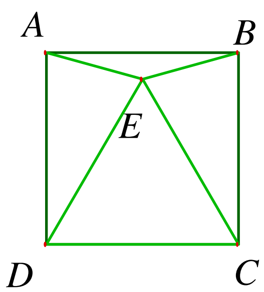
Or, certains problèmes sont à la frontière entre les deux. Nous noterons par exemple M_A ces problèmes pour lesquels le contexte suggère l'unique résultat à appliquer de façon quasi explicite. Pour les exemples, on se référera à ceux qui suivent les descriptions des catégories A et M, section suivante.

Le lecteur aura sans doute déjà conclu — compte tenu des types de preuves associés — que plus grand est le rang alphabétique de la catégorie d'un problème donné, plus proche est sa solution du raisonnement logico-déductif et de façon générale, plus forte devrait y être la sollicitation à la preuve. De prime abord (peut-être serons nous amené à reconsidérer cette affirmation après l'analyse !), nous pensons qu'il devrait en être ainsi, sauf sans doute en ce qui a trait à la catégorie M. Bien que la nature de l'inférence demandée par les problèmes de la catégorie M soit de l'ordre de la déduction pure, ces déductions sont souvent si immédiates, les implications sous-jacentes si directes qu'on ne peut guère parler que d'une faible incitation à la preuve, d'une faible sollicitation du raisonnement logico-déductif ; le cas limite étant ces problèmes classés M_A (Cf. paragraphe précédent), qui ne favorisent en rien « l'attitude de preuve ».

◊◊ **Complexité des raisonnements de type N**

Dans le même ordre d'idée, nous avons déjà fait valoir que le niveau de complexité au sein de la catégorie N peut varier considérablement (revoir la description de *l'enchaînement déductif*, section 3.1). Pour rendre compte du niveau de sophistication du raisonnement sollicité par un problème donné dans cette catégorie, nous tenterons d'estimer le nombre minimum de résultats intermédiaires à établir pour mener à bien la résolution. Nous ferons suivre la lettre N de ce nombre, entre parenthèses.

> *Exemple 13* (Réflexions 536, tome 1, p. 252, problème c) ; légèrement modifié pour les besoins de l'exposé). *On construit un triangle équilatéral CDE sur le côté CD d'un carré ABCD, avec le point E situé du même côté de la droite CD que A et B. On joint A et E et B et E. Trouve en la justifiant la valeur de chacun des douze angles intérieurs de la figure.*



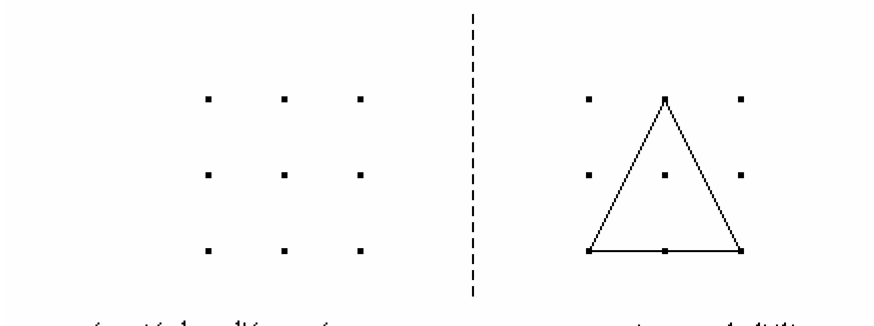
L'élève sait que la mesure de $\angle CDE$, $\angle DEC$, $\angle ECD$ est de 60° puisque ΔCDE est équilatéral (le résultat a déjà été abordé). Il en déduit que la mesure de $\angle EDA$ et $\angle ECB$ est de 90°–60° = 30°. Des congruences entre les segments AD et ED d'une part, et BC et EC d'autre part, congruences données par hypothèses, il infère que ΔADE et ΔCBE sont isocèles et par suite, que les angles à leur base sont congrus. L'élève en déduit la mesure de ces angles, considérant la somme des mesures des angles intérieurs dans ΔADE et ΔCBE. Restent les mesures des angles intérieurs à ΔABE, qui s'obtiennent soustractivement. Il s'agit bien ici d'un problème de la catégorie N, puisqu'on ne parvient à sa résolution qu'en enchaînant, dans un ordre précis, au moins six inférences interdépendantes, et qu'au moins cinq résultats intermédiaires (nous ne comptons pas les duplications dues à la symétrie) sont des passages obligés, pour déterminer la mesure des angles intérieurs à ΔABE. Un tel problème sera donc classé N(5).

◊◊◊ **Difficultés surajoutées**

Pour faire cas de certaines nuances, nous affectons la catégorie d'un problème donné d'une apostrophe (') quand ce problème présente une difficulté supplémentaire, dont la seule classification littérale ne rend pas compte. La nature de la difficulté est ensuite précisée en indice. Ainsi, un problème classé $M'_{\text{algèbre}}$ est un problème de type M dont la résolution demande par surcroît quelque manipulation algébrique ; ce sera le cas, par exemple, de nombreux problèmes qui portent sur la relation de Pythagore.

À l'égard de l'apprentissage de la preuve, cinq types de difficultés « surajoutées » méritent qu'on s'y attarde. Un problème classé $B'_{\text{conception}}$ ou $B'_{\text{perception}}$ confronte les conceptions courantes, les perceptions immédiates de l'élève, et l'éveille à la nécessité de prendre du recul avant d'aborder un problème. Ici peut naître un doute, un questionnement (« Pourquoi ce n'est pas comme je l'avais d'abord pensé » ?) qui sollicitent une « attitude de preuve », et pour lesquels la recherche de la réponse constituera un point de départ possible à une démarche de preuve. Le problème de l'exemple 14 confronte l'élève à l'idée erronée qu'une dilatation double la mesure des angles. Il est donc classé $B'_{\text{conception}}$. Dans la figure qui accompagne l'exemple 15, nous avons placé à gauche le géoplan qui est présenté à l'élève en même temps que l'énoncé, et à droite la réponse de l'élève qui ne se sera pas suffisamment méfié de sa perception. Le problème de l'exemple 15 est donc classé $B'_{\text{perception}}$.

> *Exemple 14* (Carrousel, sec. 1, tome 2, p. 190, problème j)). *Avec une loupe qui grossit deux fois, on observe un angle de* 30°. *Quelle est la mesure de l'angle à travers la loupe ?*
>
> *Exemple 15* (Carrousel, sec. 1, tome 2, p. 258, n°6 ; légèrement modifié pour les besoins de l'exposé). *Si cela est possible, trace un triangle équilatéral en reliant trois points de ce géoplan.*



Dans le même ordre d'idée, un problème classé A'$_{\text{définition}}$ introduit dans son énoncé un élément déstabilisateur, qui force à préciser une définition, à repenser vers une conception plus abstraite les « objets mentaux » sur lesquels doit travailler l'élève dans le problème. De ce point de vue, un tel problème contribue donc à la prise de conscience chez l'élève :

- de la distance entre le concept mathématique et l'image intuitive ou perceptive qu'il s'en faisait ;
- plus globalement, de l'importance des définitions et du formalisme (formalisme au sens large : voir la 27^{e} note de bas de page).

Or, nous l'avons vu, cette prise de conscience est centrale dans les processus d'apprentissage de la preuve et de construction de la rationalité. De même, un problème classé B'$_{\text{dessin-figure}}$ — formulé et illustré de façon à déstabiliser l'élève par rapport à l'interprétation qu'il doit faire de la figure — amène l'élève à distinguer la figure géométrique de ce qu'en représente le dessin, et touche de ce fait à cet autre aspect essentiel de l'apprentissage de la preuve, plus spécifique à la géométrie. Pour des exemples, on se référera à ceux qui suivent les descriptions des catégories A et B, section suivante.

Finalement, un problème classé M'$_{\text{logique propositionnelle}}$ fait travailler la logique propositionnelle, toujours dans le contexte de la géométrie. Le raisonnement proprement géométrique sollicité par le problème que présente l'exemple suivant est de la catégorie M. En effet, l'élève doit déduire de la définition de *rectangle*, qu'il a lui-même énoncé un peu auparavant, la valeur de vérité de la réciproque qu'on lui demande de formuler. Cette formulation présentant une difficulté supplémentaire, le problème est classé $M'_{\text{logique propositionnelle}}$.

Exemple 16 (Réflexions, Math 436, tome 2, p. 5, n°4 ; légèrement modifié pour les besoins de l'exposé). *Donne la réciproque de la conditionnelle suivante et indique si elle est une implication logique : « Si un quadrilatère a un angle droit, alors c'est un rectangle ».*

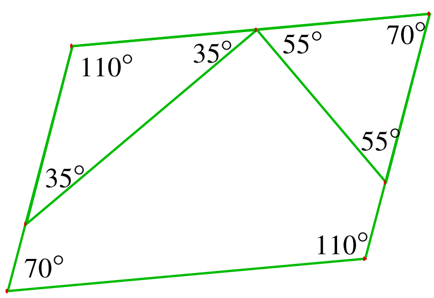
3.2.2 La grille d'analyse

Nous appuyons maintenant les descriptions des catégories A, B et C, G et H, et finalement M et N, de quelques exemples puisés dans la collection à l'étude.

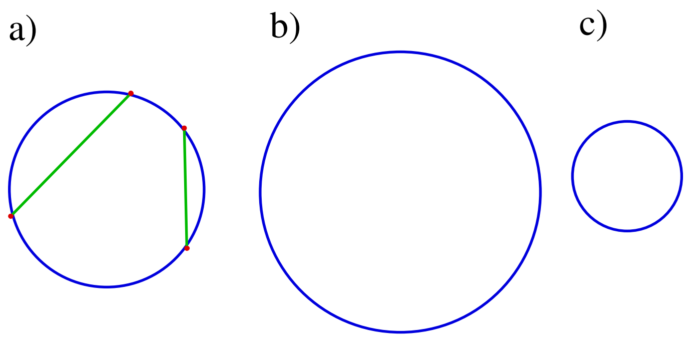
- **CATÉGORIE A**

On applique directement une définition, un résultat, un algorithme, sans que les questions de validité ou de cohérence ne se posent. Cela implique que l'énoncé se présente, dans la plupart de ces cas, sous la forme d'une directive et non d'une question. Les exercices de tracé, par exemple, tombent dans cette catégorie. L'application est directe, mais suppose tout de même la compréhension-intégration d'un énoncé, d'une définition, et son adéquation (en un jugement d'une seule venue) à un cas de figure.

Exemple 17 (Carrousel, sec. 1, tome 2, p. 205). *Déduis les mesures manquantes dans la figure ci-dessous.*

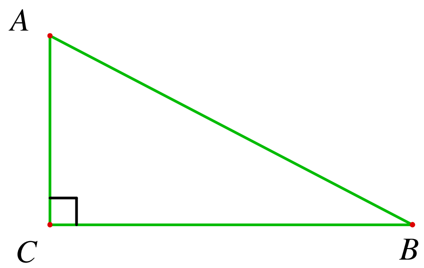


Exemple 18 (Carrousel, sec. 2, tome 2, p. 109). *À l'aide de deux cordes et des médiatrices de ces cordes, détermine la position exacte du centre de chaque cercle.* (L'élève vient de voir que les médiatrices des cordes d'un cercle se coupent au centre du cercle).



- **Catégorie A'**$_{\text{définition}}$, avec élément déstabilisateur surajouté, qui force à préciser une définition, à revenir sur certains concepts ; dans l'exemple qui suit, on invite l'élève à une réflexion sur le concept de hauteur.

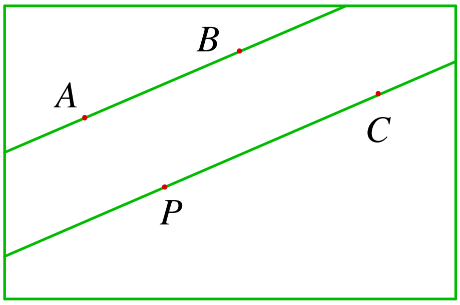
Exemple 19 (Carrousel, sec. 1, tome 2, p. 254). *Trace les trois hauteurs de ce triangle rectangle. Que se passe-t-il de particulier ?*



- **CATÉGORIE B**

Les problèmes ou exercices qui sollicitent un *jugement d'une seule venue*, jugement sur la validité duquel l'élève doit cependant statuer, contrairement à ce qui se passe pour la catégorie A. L'énoncé du problème prend la forme d'une question, et non d'une directive. Rappelons que l'élève porte un jugement d'une seule venue quand, son intuition lui suggèrant la solution à partir du seul constat sur un cas particulier, il la qualifie d'« évidente » (Cf. section 3.1).

> *Exemple 20* (Carrousel, sec. 1, tome 2, p. 182). *Quelle caractéristique les droites représentées dans le même plan* (voir figure ci-dessous) *ont-elles ? Que peut-on affirmer de la distance entre ces droites ?*

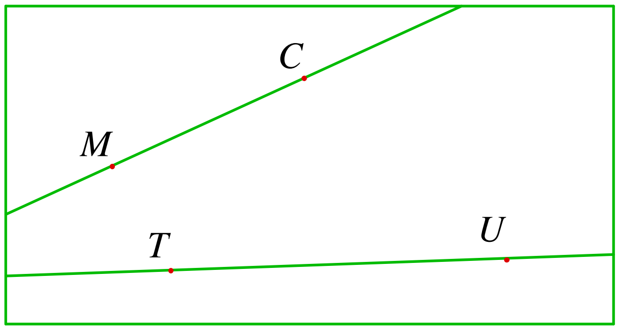


> *Exemple 21* (Carrousel, sec. 2, tome 2, p. 104). *Quel est le nom de tout axe de symétrie d'un cercle ?*

Dans ces deux exemples, l'élève se base sur une évaluation perceptive pour répondre à une question que vraisemblablement, il considérera comme « évidente ». Pour bien comprendre la différence entre les catégories A et B, il est important de préciser que la définition du parallélisme n'a pas encore été formulée au moment où l'énoncé de l'exemple 20 apparaît ; de fait, elle vient un peu **après** l'exercice. De même, le fait que les diamètres sont portés par les axes de symétrie du cercle n'a pas été énoncé explicitement au moment où la question que nous reprenons comme exemple 21 est soumise à l'élève. Par contre, des activités de pliage ont déjà mis l'élève sur la piste. Il ne s'agit donc pas d'un simple exercice de mémorisation et vérification, appliquées à un résultat ou une définition qui viennent d'être vus (auquel cas l'exercice aurait été classé A). Ici, l'élève doit évaluer par lui-même quelle réponse est pertinente, et doit statuer sur sa validité.

- **Catégorie B'**$_{\text{dessin-figure}}$, avec élément qui déstabilise l'élève par rapport à l'interprétation qu'il doit faire du dessin ; dans l'exemple qui suit, le fait que le point de rencontre des sécantes soit en dehors du cadre.

Exemple 22 (Carrousel, sec. 1, tome 2, p. 179). *Les droites illustrées dans le plan ci-dessous sont-elles sécantes ? Justifie ta réponse.*



- **CATÉGORIE C**

Les problèmes ou exercices qui sollicitent une *induction empirique* (Cf. section 3.1). Comme pour la catégorie précédente, un constat sur un cas particulier peut suggérer la solution, mais la pensée ne s'engage pas spontanément dans l'imagination de tous les cas possibles ; du moins, pas avant d'avoir repris la figure selon quelques (deux, trois ?) configurations distinctes. Cela suppose entre autres que l'énoncé du problème sollicite une *généralisation* de la part de l'élève, et que la validité de cette généralisation ne soit pas immédiatement accessible à l'intuition.

Exemple 23 (Carrousel, sec. 2, tome 2, p. 111). *Quelle est la propriété de tout triangle inscrit dans un cercle et dont l'un des côtés est un diamètre ? Construis-en quelques-uns pour t'aider à répondre.*

Le fait qu'un angle inscrit qui intercepte un diamètre soit droit n'est généralement pas perçu d'emblée par l'apprenti-géomètre. (Il faut aussi préciser que le résultat n'a encore jamais été formulé au moment où l'exercice apparaît dans le livre). La recommandation dans l'énoncé confirme que les auteurs de l'exercice attendent de l'élève une induction empirique.

Il faut être bien conscient qu'en classant un problème donné dans la catégorie C, nous évaluons à la fois le problème **et le contexte** ; avec en tout premier lieu, le stade mathématique atteint par l'élève auquel ce problème est soumis. L'exemple qui va suivre est extrait d'un manuel de première secondaire. L'élève n'a pas à sa disposition les critères de congruence des triangles, et ne connaît que quelques résultats de base (congruence des angles opposés par le sommet, somme des angles intérieurs d'un triangle ...). Ces résultats lui ont été présentés dans un cadre d'où tout formalisme est absent. Il est donc raisonnable de penser que l'élève réagira à la question en cherchant à appliquer une forme d'induction empirique. Exception faite, bien sûr, des résultats qui lui apparaîtront évidents, et qui susciteront chez lui un jugement d'une seule venue ; comme ceux, par exemple, qui portent sur le carré. Notons par ailleurs qu'aucune justification n'est demandée.

> *Exemple 24* (Carrousel, sec. 1, tome 2, p. 279). *Outre les caractéristiques de base, certains quadrilatères possèdent d'autres propriétés. Marque un X dans le tableau ci-dessous quand le quadrilatère vérifie la propriété correspondante.*
>
> 1. *Les angles consécutifs sont supplémentaires.*
> 2. *Les diagonales sont congrues.*
> 3. *Les diagonales se coupent en leur milieu.*
> 4. *Les diagonales se coupent perpendiculairement.*

Propriétés	1.	2.	3.	4.
Carré				
Losange				
Rectangle				
Parallélogramme				
Trapèze rectangle				
Trapèze isocèle				
Trapèze				

- **CATÉGORIE G**

Les problèmes ou exemples qui sollicitent une *expérience mentale* (Cf. section 3.1), c'est-à-dire un raisonnement qui prend appui sur le sensible, et par lequel on cherche à « creuser » l'intuition initiale pour l'asseoir sur des bases plus solides ; raisonnement auquel on donne souvent la forme d'une expérience physico-mécanique.

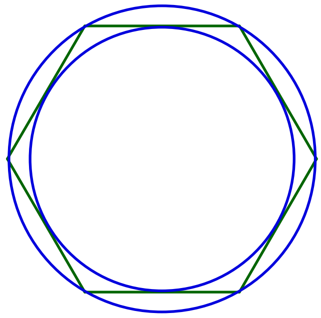
> *Exemple 25* (Carrousel, sec. 1, tome 2, p. 267). *Peut-on construire un triangle dont les mesures des côtés sont 8 cm, 6 cm et 15 cm ? Explique pourquoi.*

Là encore, il faut bien comprendre que la catégorie assignée au problème ne lui est pas qu'intrinsèque, mais tient compte du contexte. Au moment où ce problème est soumis à l'élève (en secondaire 1), l'inégalité du triangle n'a encore jamais été énoncée. On s'attend à ce que l'élève fasse spontanément du côté de 15 cm la base du triangle, et cherche ensuite à placer le troisième sommet à l'intersection de deux traits de compas, compas qu'il aura ouvert à 6 cm et 8 cm. Il constate bien sûr que les arcs de cercle ne s'intersectent pas. En cherchant à élaborer une explication, il pourra évoquer deux bras de 6 cm et 8 cm, articulés aux deux extrémités de la base de 15 cm. (Selon le guide du maître, c'est l'image que l'enseignant devra suggérer à l'élève en panne). Puisque la somme des longueurs de ces bras ne dépasse pas 15, les deux bras ne se rejoignent pas, quelle que soit leur position. Cette « expérience mentale » met donc l'élève sur la piste de l'inégalité triangulaire comme condition nécessaire à la construction d'un triangle à partir de trois longueurs données.

- **CATÉGORIE H**

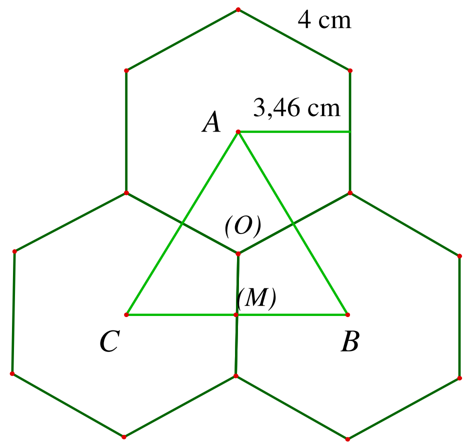
Les problèmes ou exemples qui sollicitent un *argument empirico-déductif* (Cf. section 3.1), c'est-à-dire la mise en oeuvre de la « pensée discursive », par laquelle une série de résultats intermédiaires s'enchaînent pour mener au résultat annoncé, mais où l'un ou plusieurs des résultats intermédiaires mobilisés font l'objet d'une validation qui n'est que perceptive ou intuitive.

Exemple 26 (Carrousel, sec. 2, tome 2, p. 246). *Un hexagone régulier de 30 cm de périmètre est inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre cercle. L'aire de cet hexagone est de 64,95 cm*^{2}. *Détermine l'aire de la couronne formée par ces deux cercles.*



L'élève (de deuxième secondaire) saura bien sûr comment retrouver la mesure du côté de l'hexagone à partir du périmètre. Il a vu que l'hexagone régulier est constitué de six triangles équilatéraux groupés autour du centre. Comme deux des côtés de chacun de ces triangles coïncident avec les rayons du cercle circonscrit, il pourra en déduire la mesure de ces rayons. Par ailleurs, l'orthogonalité d'une tangente au cercle avec le rayon issu du point de tangence n'a pas encore été vue. L'élève acceptera vraisemblablement comme une **évidence perceptive** le fait que l'apothème de l'hexagone est un rayon pour le cercle inscrit. Il n'a de toutes façons pas le choix : montrer ce résultat est hors de sa portée. Il appliquera alors la formule de l'aire d'un polygone régulier à l'étude dans ce chapitre, pour trouver la mesure de l'apothème — et par suite, celle du rayon du cercle inscrit — à partir de la valeur de l'aire. L'élève a donc bien combiné déductivement des résultats, dont certains n'ont fait l'objet d'une validation que purement perceptive.

Exemple 27 (Carrousel, sec. 2, tome 2, p. 246). *On a placé 3 hexagones réguliers, comme dans l'illustration ci-dessous. Chaque hexagone a 4 cm de côté et 3,46 cm d'apothème. On a relié les centres de ces hexagones afin de former un triangle équilatéral. Quelle est l'aire de ce triangle équilatéral ?*



Dans cet exemple, le poids relatif de la composante « déduction » dépend de ce qu'exige l'enseignant du point de vue de la justification. Si l'élève n'a rien à justifier, il peut à la limite déclarer « évident » le fait que la base *CB* du triangle est deux fois l'apothème de l'hexagone, et que la hauteur *AM* est une fois et demi son côté. La partie déductive du raisonnement est alors réduite à la simple application de la formule de l'aire du triangle, avec repérage des données ad hoc. Dans un tel contexte, le problème est à la frontière des catégories B et H, et pourra être classé H_B ou même B.

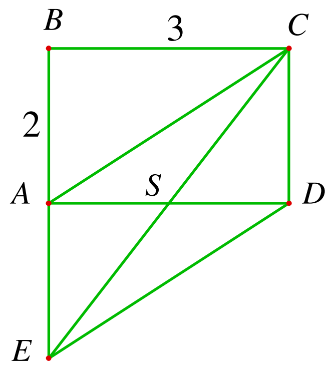
Mais l'enseignant pourrait aussi exiger de l'élève qu'il justifie son calcul des mesures du côté et de la hauteur de Δ*ABC*. Au stade où en est l'élève (en deuxième secondaire), celui-ci ne peut guère, dans un premier temps, qu'admettre comme une évidence perceptive le fait que *O*, point commun aux trois hexagones, est au centre de Δ*ABC* ; de même, il admettra comme une évidence perceptive le fait que la droite *AM* est axe de symétrie pour la figure. (Incidemment, le guide de l'enseignant suggère de partir de cette prémisse). Seulement alors peut-il mesurer la hauteur de Δ*ABC* en additionnant les mesures de *AO* et *OM* : il invoque le fait que *AO* est le côté d'un des six triangles équilatéraux qui forment l'hexagone du haut, pour justifier que *AO* mesure 4 cm ; il invoque la symétrie dans la figure pour justifier le fait que *CB* passe au milieu du côté vertical des deux hexagones du bas, et ainsi établir que *OM* mesure 2 cm. De telles déductions, articulées autour d'évidences perceptives, font bien du problème un problème de la catégorie H.

- **CATÉGORIE M**

Les problèmes ou exercices qui sollicitent une *déduction locale* (Cf. section 3.1) : on combine deux ou trois résultats ou axiomes précédemment énoncés, pour obtenir un nouveau résultat. La combinaison est mentalement d'une seule venue (elle consiste le plus souvent en une implication directe), et ne nécessite pas un enchaînement hiérarchisé temporellement. Par ailleurs, l'élève doit trouver par lui-même quel résultat il doit appliquer. Quand l'énoncé ou le contexte prescrit sans doute possible de quel résultat il s'agit, le problème est plutôt placé dans la catégorie A.

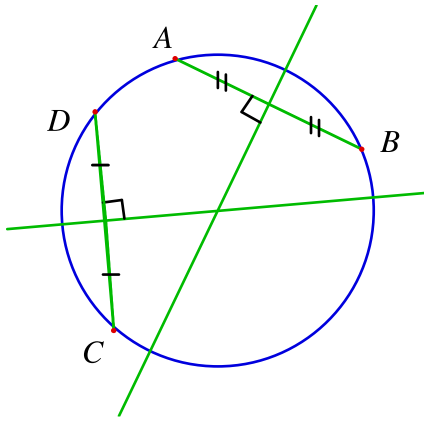
> *Exemple 28* (Carrousel, sec. 1, tome 2, p. 264). *Écris le raisonnement qui permet de convaincre quelqu'un que la mesure des angles d'un triangle équilatéral est 60°.* (L'élève a vu qu'un triangle équilatéral est aussi équiangle, et sait que la somme des mesures des angles intérieurs de tout triangle est de 180°).

> *Exemple 29* (Carrousel, sec. 1, tome 2, p. 284). *On forme un parallélogramme ACDE à partir d'un rectangle ABCD de 3 cm sur 2 cm, comme suit.*
> *Donne les deux énoncés qui permettent de déduire que le point S est à 1,5 cm du point A.*
> (L'élève a vu que dans un parallélogramme, et en particulier dans un rectangle, les côtés opposés sont congrus et les diagonales se coupent en leur milieu).



- **Catégorie $\mathbf{M_A}$**, où le contexte suggère l'unique résultat à appliquer de façon quasi explicite (voir section 3.2.1).

  Exemple 30 (Carrousel, sec. 2, tome 2, p. 107). *On a construit les médiatrices des cordes AB et DC. Que peut-on affirmer à propos du point d'intersection des deux médiatrices ? Justifie ta réponse par l'énoncé approprié.*



Il faut préciser qu'un peu auparavant (pas immédiatement auparavant cependant, auquel cas le problème aurait été classé A), à l'intérieur de la même section, apparaît dans un encadré l'énoncé suivant : « Les médiatrices des cordes d'un cercle se rencontrent toutes au centre du cercle ».

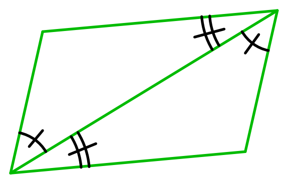
- **CATÉGORIE N**

Les problèmes ou exercices qui sollicitent un *enchaînement déductif* (Cf. section 3.1) : un nouveau résultat est inféré de la combinaison de résultats (théorèmes ou axiomes) déjà établis, selon les règles de la déduction logique. Contrairement à ce qui se passe pour la catégorie M, le raisonnement (le plus souvent une série d'implications) nécessite une organisation temporelle, un enchaînement hiérarchisé ; autrement dit, une **séquence** déductive. Cela suppose entre autres qu'il y a au moins un résultat intermédiaire à montrer, ce qui n'est pas le cas pour la catégorie M. Rappelons (voir section 3.2.1) que pour rendre compte (en partie) de la complexité du raisonnement sollicité, nous faisons suivre la lettre N du nombre **minimum** de résultats intermédiaires par lesquels on doit passer pour arriver à la conclusion escomptée (voir également l'exemple 13). Bien entendu, il y a en général plus d'un chemin possible, et le nombre que nous estimons (donné entre parenthèses) fait référence au chemin que nous croyons le plus direct.

> *Exemple 31* (Réflexions, 536, tome 1, p. 263). *Démontre ce théorème du parallélogramme : « Dans un parallélogramme, les côtés opposés et les angles opposés sont congrus ».*

Le problème est posé aux élèves de secondaire 5. Au début du manuel, on leur a exposé ce qu'est un système déductif, un axiome, un théorème, une démonstration, etc. Les critères de congruence des triangles ont été énoncés, en tant que théorèmes.

La démonstration la plus simple du théorème en cause consiste sans doute à tracer une des deux diagonales du parallélogramme, et à établir la congruence des deux triangles ainsi formés par le critère « angle-côté-angle ».

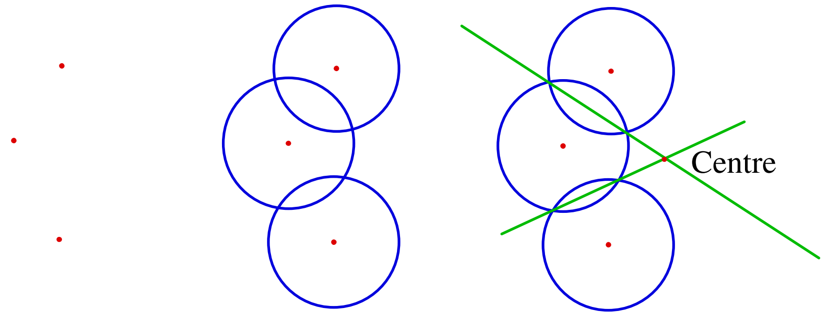


Il y a alors deux résultats intermédiaires à établir :

1. les congruences des deux paires d'angles alternes-internes de part et d'autre de la diagonale ;
2. la congruence des deux triangles.

Le problème est donc classé N(2).

> *Exemple 32* (Carrousel, sec 2, tome 2, p. 113). *Voici une autre méthode pour trouver le centre du cercle passant par trois points donnés. Analyse-la et explique-la.*



Au moment où ce problème est soumis, en secondaire 2, l'élève a vu que les diagonales d'un losange s'intersectent à angle droit, en leur milieu. Il a également vu que le centre du cercle qui passe par les sommets d'un triangle (le cercle circonscrit) est à l'intersection des médiatrices. Le chemin le plus direct qui permet à l'élève de justifier la construction (c'est d'ailleurs probablement le seul chemin possible, compte tenu de ses connaissances) passe par trois résultats intermédiaires :

1. quand deux cercles sécants sont de même rayon, le quadrilatère qui a pour sommets les deux centres et les points d'intersection des cercles est un losange ;
2. la droite qui joint les points d'intersection des cercles porte une des diagonales du losange, et croise l'autre diagonale à angle droit, en son milieu ;
3. or, l'autre diagonale du losange est le segment qui joint les centres ; la droite qui joint les points d'intersection est donc médiatrice du segment qui joint deux des points par lesquels on veut faire passer le cercle.

L'élève peut alors conclure que les droites qui joignent les points de rencontre des trois cercles sécants deux à deux, s'intersectent bien au centre du cercle cherché, puisque ces droites sont les médiatrices du triangle formé par les trois points donnés au départ. Dans la mesure où « *Analyse-la et explique-la* » suppose qu'on attend de l'élève une justification mathématique de ce type, le problème est donc classé N(3).

> *Exemple 33* (Carrousel, sec. 2, tome 2, p. 112). *Un archéologue trouve un morceau de poterie qui semble provenir d'une assiette. Explique comment il peut s'y prendre pour en trouver le diamètre précis.*

L'élève a vu que les médiatrices des cordes s'intersectent au centre du cercle. Il repère donc d'abord le centre à l'aide des médiatrices de deux cordes non parallèles, pour ensuite compléter le cercle (sur un carton) et mesurer son diamètre. Dans la mesure où ces opérations doivent se faire dans cet ordre précis, on peut dire qu'il s'agit d'un problème de la catégorie N. Par ailleurs, trouver la mesure du diamètre en connaissant les positions du centre et d'un point du cercle est si immédiat et élémentaire — même pour l'élève de secondaire 2 auquel ce problème est soumis — qu'on hésite à parler d'une véritable séquence déductive. Pour rendre compte de ce que le problème est à la frontière de la séquence déductive et de la déduction locale, nous lui assignons la « cote » $N_M(1)$.

Les catégories que nous venons de décrire constituent donc les maillons de notre grille d'analyse. Cette description est résumée dans le tableau synoptique qui précède la classification, au début du chapitre 4. Avant d'utiliser cette grille pour la classification, elle même à la base de l'analyse qui suivra au chapitre 5, nous justifions le choix de la collection à laquelle la classification des problèmes s'applique.

3.3 Le choix de la collection à l'étude

Compte tenu du projet de recherche qui est le nôtre, la collection que nous nous proposions de retenir devait répondre aux critères suivants : des manuels de mathématiques basés sur le programme actuel, couvrant les cinq années du secondaire, et d'usage courant au Québec. Au moment où nous entreprenions l'élaboration du mémoire, les deux collections **complètes** [34] répondant à ces critères, les plus utilisées dans les commissions scolaires francophones du Québec, étaient les suivantes :

- *Carrousel*, qui devient *Réflexions* en quatrième et cinquième secondaires pour les programmes de 436 et 536 ; sous la direction de Guy Breton. Les Éditions CEC inc., Montréal.

[34] La collection « Mathophilie » n'a pas été retenue parce qu'au moment où nous entreprenions le mémoire, elle ne comptait que les tomes de quatrième et cinquième secondaires.

- *Scénario* ; Marcel Soulières et Jean-Guy Thibaudeau pour secondaire 1, Sylvio Guay et Steeve Lemay pour les autres niveaux. Les éditions HRW ltée, Laval.

De ces collections, la dernière n'a pas été retenue, à cause de la façon très particulière dont la matière y est organisée. Pour bien comprendre, nous résumons le mode de fonctionnement de la collection. Chaque tome débute par une série de « scénarios » : des situations-problèmes (avec mise en contexte) que l'élève est invité à travailler, seul ou en équipe. Cette résolution fait appel à plusieurs habiletés mathématiques, et combine le plus souvent plus d'une branche (algèbre et géométrie, arithmétique et statistique, etc.). Pour développer les habiletés nécessaires, l'élève doit consulter la « boîte à outils », qui est constituée de la théorie et des exercices purement mathématiques. Nous en tenir à l'analyse des seuls exercices de la « boîte à outils » n'aurait pas rendu justice à la collection. D'autre part, isoler, pour en rendre compte, la partie géométrique des problèmes soumis comme « scénarios » eut été un véritable casse-tête, ces scénarios étant justement conçus avec le souci pédagogique d'intégrer les différentes branches des mathématiques.

Pour ces raisons, nous avons donc décidé de laisser cette collection de côté, et de nous attacher uniquement à l'analyse du contenu géométrique de la collection *Carrousel-Réflexions*. L'apprentissage de la preuve y a certainement fait l'objet d'un souci particulier puisqu'entre autres, la « réflexion 3 » (*Les relations métriques*) du programme 536 (secondaire 5, tome 1) porte sur la construction d'un système déductif en géométrie, sur les notions d'*axiome*, de *théorème*, de *terme primitif* et de *démonstration* ; le tout appuyé de « topos » sur l'histoire des mathématiques grecques.

Cependant, le premier abord des exercices et problèmes dans cette collection nous laissait présager une approche insatisfaisante de l'apprentissage de la preuve selon nos critères ; critères que nous nous attachions par ailleurs à préciser de jour en jour. L'analyse plus poussée qui a suivi a en partie confirmé ces premières impressions, mais nous a aussi amené à les nuancer. Quoiqu'il en soit, nous nous sommes vite rendu compte que le nombre des problèmes à classifier était énorme. Pour ne pas trop disperser l'analyse, nous avons alors pris les décisions suivantes :

1. Nous en tenir au profil « fort » du cheminement mathématique, qui se termine avec les programmes de 436 et 536. Nous laissons donc de côté l'analyse des tomes qui portent sur les programmes de 416 et 514 : un apprentissage de la preuve déficient dans le cheminement « fort » le sera **a fortiori** dans le cheminement faible !

2. Nous en tenir à la géométrie plane. Les éléments de géométrie dans l'espace abordés dans la collection sont centrés sur des apprentissages très spécifiques, principalement le développement du « sens spatial ». La pensée déductive y est assez peu sollicitée et quand elle l'est, les difficultés liées à la visualisation dans l'espace constituent des éléments perturbateurs, qui rendent difficile l'évaluation et l'analyse de la part de pensée déductive sollicitée.

3. Laisser de côté la géométrie analytique ; nous en tenir à la géométrie synthétique. Ici aussi, le calcul en coordonnées, qui repose essentiellement sur un apprentissage de nature « algébrico-fonctionnelle », vient brouiller les cartes, et rend ardue l'évaluation et l'analyse de la part de pensée déductive sollicitée.

CHAPITRE 4

CLASSIFICATION DES PROBLÈMES

Nous entreprenons maintenant la classification des problèmes et exercices de géométrie dans la collection *Carrousel* (*Réflexions*), à partir du cadre conceptuel érigé au chapitre précédent. Il s'agit d'assigner à chaque problème (que nous identifions un à un) une des sept catégories qui forment les maillons de notre grille d'analyse (voir chapitre 3). Nous n'énoncerons explicitement que certains de ces problèmes (il y en a ***beaucoup***, constructivisme oblige !) :

- soit qu'ils nous semblent typiques, d'une façon ou d'une autre ;
- soit que leur classification ait posé quelque difficulté ;
- soit que nous ayons quelque commentaire à faire sur la formulation, sur la « valeur ajoutée » au problème par le *Guide d'enseignement*, sur les pistes d'enseignement ouvertes par le problème, sur ce qui nous semble une « occasion ratée », etc.

Ces commentaires constitueront en quelque sorte l'amorce de l'analyse et interprétation de la classification, analyse et interprétation qui viendront au chapitre 5.

Nous réservons les caractères italiques aux énoncés extraits des manuels, alors que nos commentaires et appréciations seront écrits en caractères droits. Comme guide de référence, le tableau synoptique de la page suivante facilitera la bonne intelligence de la classification, qui commence immédiatement après.

CATÉGORIE **A**	**Application directe** d'une définition, d'un résultat, d'un algorithme, que le contexte ou l'énoncé impose. Rien à valider.
CATÉGORIE **B**	**Jugement d'une seule venue**, sur la validité duquel l'élève doit cependant statuer. Il s'en remet pour cela à sa perception, à son intuition.
CATÉGORIE **C**	**Induction empirique** ; suppose que l'énoncé sollicite de l'élève une généralisation, dont la validité échappe à l'intuition de l'élève qui cherchera à l'établir empiriquement.
CATÉGORIE **G**	**Expérience mentale** ; raisonnement qui prend appui sur le sensible, en épousant la forme d'une expérience physico-mécanique intériorisée.
CATÉGORIE **H**	**Argument empirico-déductif** ; des résultats intermédiaires — dont un ou plusieurs ne font l'objet d'une validation que perceptive ou intuitive — sont enchaînés par la mise en oeuvre de la « pensée discursive », pour mener au résultat escompté.
CATÉGORIE **M**	**Déduction locale** ; application directe d'un, deux ou trois résultats déjà établis, en une combinaison d'un seul tenant, non hiérarchisée dans le temps. L'élève doit trouver de lui-même quel(s) résultat(s) appliquer.
CATÉGORIE **N**	**Enchaînement déductif** ; l'élève combine des résultats déjà établis (théorèmes ou axiomes) selon les règles de la déduction logique. L'enchaînement est hiérarchisé temporellement. Entre parenthèses après la lettre N : le nombre minimum de résultats intermédiaires par lesquels on doit passer.

X et Y des catégories quelconques parmi les sept ci-dessus. Alors,

Catégorie X_Y : de la catégorie X, mais à la frontière de Y. Les plus fréquents : M_A (le contexte suggère le résultat à appliquer de façon quasi explicite) et N_M (le résultat intermédiaire est immédiat).
Catégorie X' : de la catégorie X, avec difficulté surajoutée. La nature de la difficulté est précisée en indice. Du point de vue de l'apprentissage de la preuve, les plus importantes : $X'_{\text{conception}}$ $X'_{\text{perception}}$ $X'_{\text{définition}}$ $X'_{\text{dessin-figure}}$

CARROUSEL MATHÉMATIQUE

Première secondaire

Tome 1

Itinéraire 1. Les opérations

Itinéraire 2. L'exponentiation

Itinéraire 3. Les chaînes d'opérations

Itinéraire 4. Les nombres entiers

Itinéraire 5. Les suites

Itinéraire 6. Les fractions

Itinéraire 7. Les fractions en action

Tome 2

Itinéraire 8. Les nombres décimaux

Itinéraire 9. Les nombres décimaux en action

Itinéraire 10. Les pourcentages

Itinéraire 11. La statistique

Itinéraire 12. Les figures géométriques

(...)

- Page 163

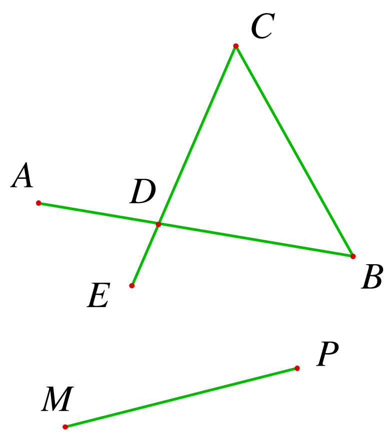
Le segment AB est noté $\overline{AB}$.

a) *Comment noterais-tu :* **A**

1) *le segment PC ?* 2) *le segment CM ?*

b) *À l'aide de ta règle graduée en millimètres, détermine* **A**

1) m $\overline{AB}$
2) m $\overline{CE}$
3) m $\overline{ED}$
4) m $\overline{PM}$



Si l'on imagine un segment qui se prolonge indéfiniment au-delà de l'une de ses extrémités, on obtient une demi-droite.

c) *Combien y a-t-il d'extrémités dans une demi-droite ?*

A'définition

Si l'on imagine un segment qui se prolonge indéfiniment au-delà de ses deux extrémités, on obtient une droite.

d) *Combien d'extrémités une droite a-t-elle ?*

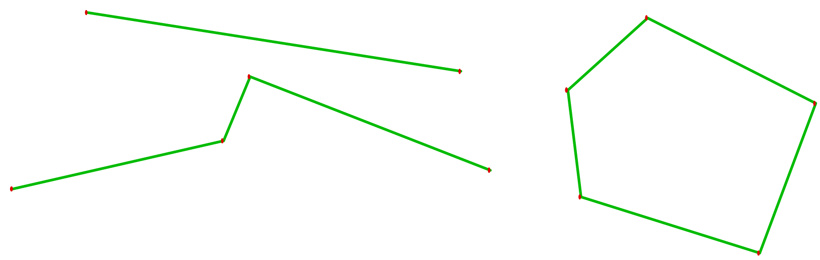
A'définition

- Page 164

On a tracé dans ce plan trois lignes brisées.

e) *Donne la définition d'une ligne brisée.* **A'**définition

f) *Combien de ces lignes brisées reviennent à leur point de départ ?* **A**



g) *Est-il possible qu'une ligne brisée fermée ne soit formée que de deux segments ?* **B**

h) *Combien de segments au minimum doit-on avoir pour former une ligne brisée fermée ?* **B**

i) 1) *Est-il vrai qu'un polygone a toujours autant de sommets que de côtés ?* **B**
2) *Combien de diagonales compte un polygone :*
à quatre côtés ? **B**
à cinq côtés ? **C**

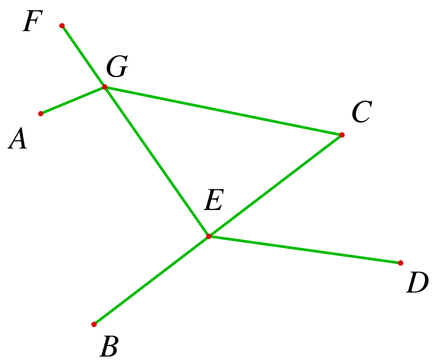
Nous estimons que l'élève considérera quelques exemples distincts avant d'affirmer pour de bon que tous les polygones à cinq côtés ont cinq diagonales. Quant aux quadrilatères, ils donneront vraisemblablement lieu à un jugement d'une seule venue.

- Page 165

1. **B**
2. **A**
3. **A**

4. *En te référant au plan ci-contre, détermine les énoncés vrais.* **A**

a) m $\overline{FG}$ = m $\overline{AG}$
b) $\overline{GC} \cong \overline{BC}$
c) m $\overline{BE}$ + m $\overline{EC}$ = m $\overline{BC}$
d) $\overline{BE} \cong \overline{AG}$
e) m $\overline{GC}$ = m $\overline{CG}$



Nous assignons ici la cote A même si l'élève doit statuer sur la vérité de l'énoncé, car cette « pseudo-validation » n'est ici qu'un prétexte à une activité de mesure.

5. **A**

- Page 167

6.	**A**
7.	**B**
8.	**B**
9.	**A**

10. *$\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ désignent-ils le même segment ?* **B'**$_{\text{définition}}$

11	**B**

- Page 168

LE SPHINX **B'**$_{\text{conception-définition}}$

Quelles sont les dimensions :
a) *d'un plan ?* b) *d'un point ?*
Quelle est la largeur d'un segment ?
Quelle est la longueur d'une droite ?

- Page 169

Exercices de mesure et d'estimation :

1.	**A**	2.	**A**
3.	**A**	4.	**A**
5.	**A**		

- Page 170

6.	**A**	7.	**A**
8.	**A**	9.	**A**
10.	**A**	11.	**A**
12.	**A**	13.	**A**

- Page 171

a)	**B**
b)	**B**
c)	**B**

- Page 172

d)	**A**
e)	**B**
f)	**B**

- Page 173

a), b) et c) : exercices de conversions (non géométriques).

1.	**A**	2.	**A**
3.	**B**	4.	**B**

- Page 174

5 à 20 : exercices de conversions (non géométriques).

21.	**A**	22.	**A**

- Page 177

a)	**B**

- Page 178

b) *Quelle est la caractéristique principale d'une équerre ?* **B**

... B et non A, dans la mesure où la définition d'angle droit ne vient qu'après.

c)	**B**
d)	**A**

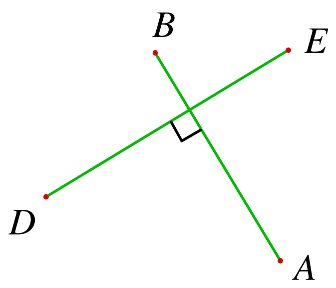
- Page 179

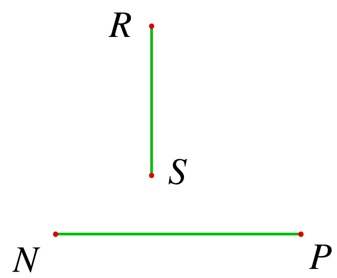
e) *Les notations MC et CM désignent-elles une même droite ?*
Justifiez votre réponse. **B'**$_{\text{définition}}$

f) Voir notre exemple 22, section 3.2.2. **B'**$_{\text{dessin-figure}}$

g) *Dans le plan ci-dessous,* $\overline{AB}$ *est perpendiculaire à* $\overline{DE}$ *, mais* $\overline{RS}$ *est-il perpendiculaire à* $\overline{NP}$ *?* **B'**$_{\text{définition}}$

h) *À quelle condition deux segments sont-ils perpendiculaires ?*
B'$_{\text{définition}}$





- Page 180

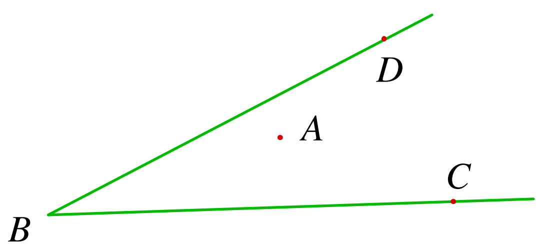
i) **A** j) **A**

- Page 181

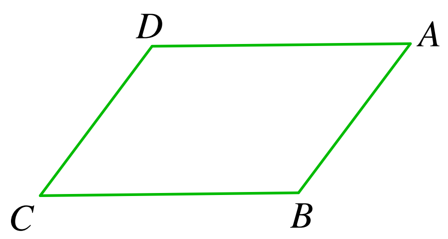
Définitions de la distance entre deux points et de la distance entre un point et une droite.

k) *Trace sur ta feuille de travail le segment dont la longueur est la distance de A à C et du point A à la droite BC*

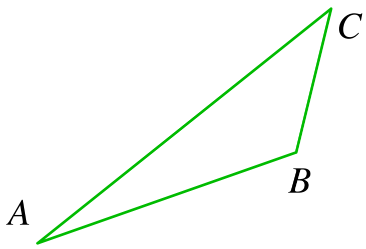
1) **A'**définition



2) **A''**définition-dessin-figure



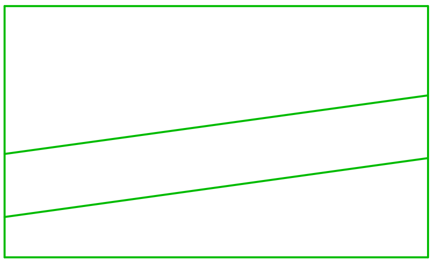
3) **A’’**définition-dessin-figure



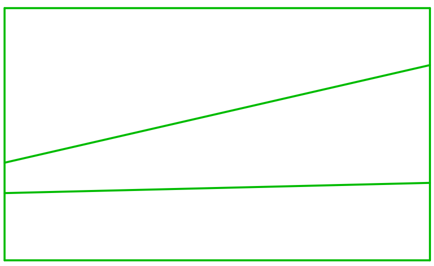
Dans 2) et 3), l'élève doit prolonger le segment $\overline{BC}$ pour localiser le pied de la perpendiculaire abaissée de *A* sur la droite *BC*. Il prend donc conscience que les points *B* et *C* déterminent d'autres objets géométriques que celui qu'exhibe explicitement la figure, à savoir le segment $\overline{BC}$.

l) *Dans chaque cas, trace le segment représentant la distance entre les deux droites si cela est possible.*

1) **A’**définition



2) **A’’**conception-définition dessin-figure



Notons qu'au moment où les exercices k) et l) apparaissent, la définition de la distance entre deux droites n'a pas été énoncée. L'élève doit donc la reconstituer à partir des définitions de la distance entre deux points et de la distance entre un point et une droite. L'élève doit ensuite concevoir que la distance entre les deux droites dans 2) est nulle parce que ces deux droites s'intersectent. Or — difficulté supplémentaire — l'intersection est hors du cadre de la figure.

- Page 182

m) **B**
n) **B**
o) **B**

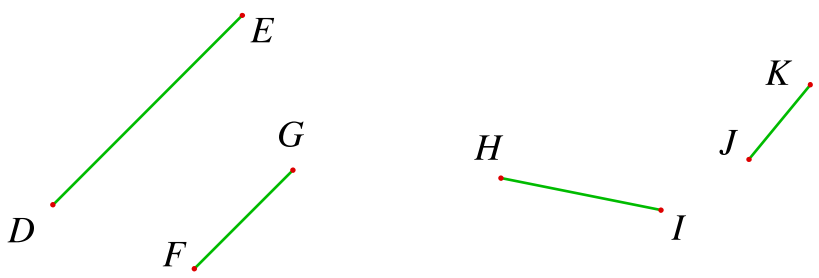
Les problèmes n) et o) constituent notre exemple 20, section 3.2.2.

p) **B**

- Page 183

1. **A**
2. **B**
3. **B**

4. *Indique si les deux segments donnés sont parallèles :*
   a) $\overline{DE}$ *et* $\overline{FG}$ **B**
   b) $\overline{HI}$ *et* $\overline{JK}$ **B'**définition



5. *Un seul des énoncés suivants est acceptable pour définir des segments parallèles. Lequel ?* **B'**définition

A) *Deux segments parallèles sont deux segments supportés par des droites parallèles.*
B) *Deux segments parallèles sont deux segments qui ne se rencontrent pas.*

6. **B**

- Page 184

7. **A**
8. **A**
9. a) **A**
   b) **B**
   c) **B**

- Page 185

10. **B'**$_{\text{définition}}$ (une illusion d'optique)
11. **B'**$_{\text{définition}}$ (une illusion d'optique)
12. **B**
13. **A**
14. **A**

- Page 186

LE SPHINX
a) **B** b) **A**

- Page 188

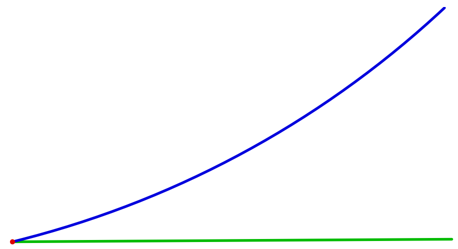
a) **A** b) **A**
c) **B**

- Page 189

d) **A**

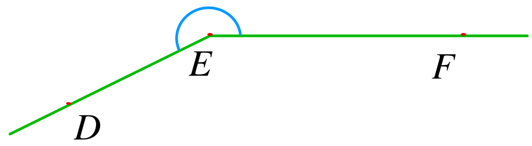
- Page 190

e) *La figure ci-dessous est-elle un angle ?* **B'**définition



f) **B**

g) *Comment pouvez-vous mesurer cet angle ?* **B'**conception



Nous avons hésité entre les catégories B et M. Dans la mesure où l'additivité de la mesure angulaire n'a jamais été énoncée, il ne peut s'agir de déduire la mesure de l'angle de cet « axiome-résultat ». Nous pensons donc que l'élève vivra la procédure additive (l'angle plat plus un angle aigu) ou soustractive (l'angle plein moins un angle obtu) comme un jugement d'une seule venue. Par ailleurs, il y a ici difficulté surajoutée, puisque certains élèves ne reconnaissent pas l'objet géométrique comme un angle dans ce cas, et ont de la difficulté à utiliser le rapporteur à bon escient.

i) **B**

j) Il s'agit de notre exemple 14, section 3.2.1.

B'conception-perception

- Page 194

1. **A** 2. **A**

- Page 195

3.	**A**	4.	**A**
5.	**A**	6.	**A**
7.	**A**		

- Page 196

8. **A**

9. *Est-il vrai qu'un angle qui mesure 360° a la même apparence qu'un angle nul ?* **B'**$_{\text{concepion-perception}}$

LE SPHINX

◊ *Est-il possible de dessiner un quadrilatère qui a*
a) *un angle rentrant ?* **B**
b) *deux angles rentrants ?* **C**

◊ ◊ *Est-il vrai qu'un angle de 360°, c'est le plan tout entier ?* **B'**$_{\text{conception}}$

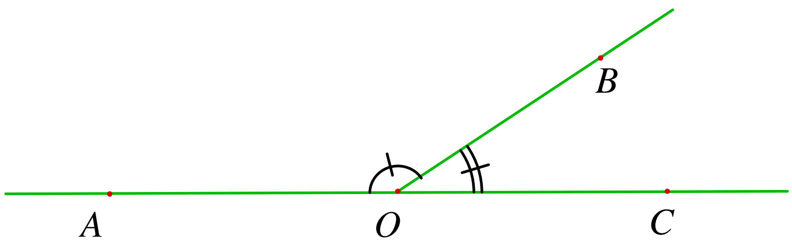
- Page 197

A) a) **A**

- Page 198

b)	**A**	c)	**A**
d)	**A**		

e) *Quelle est la mesure de l'angle compris entre les deux bissectrices des angles AOB et BOC ?* **B**



Voilà ce que nous pourrions appeler une **occasion ratée** ! Nous attribuons la « cote » B dans la mesure où aucune justification n'est demandée, ni même mentionnée dans le guide d'enseignement ! L'élève risque de tracer les deux bissectrices à l'oeil ; peut-être se donnera-t-il la peine de mesurer ? Sa perception, combinée à l'intuition (vague) qu'il se fait du phénomène, devrait l'amener à conclure sans trop d'hésitation que l'angle est droit. Nous ne pensons[35] pas qu'il sera spontanément porté à creuser cette intuition. Dommage ! La justification est tout à fait à sa portée. Bien entendu, l'enseignant avisé pourra demander plus à ses élèves, et faire de l'exercice un problème de la catégorie N(1).

- Page 199

B) a) **A**

- Page 200

b) **A**

- Page 201

C)	a)	**A**	b)	**A**
	c)	**A**	d)	**A**
D)	a)	**A**		

- Page 202

b)	**A**	c)	**A**
d)	**B**	e)	**B**

JOGGING

1.	**A**	2.	**A**

- Page 203

3.	**A**	4.	**A**
5.	**A**	6.	**A**
7.	**A'**$_{\text{algèbre}}$	8.	**A**

[35] Cette conviction s'appuie entre autres sur les travaux de Brousseau : voir section 2.1.3.

9. *La somme de deux angles est 150°. Est-il possible que ces deux angles soient aigus ? Si oui, trace-les dans ton cahier.*

M

Pour les problèmes de 9 à 21, le guide d'enseignement recommande d'accorder de l'importance au « ... raisonnement plus qu'à la technique ou au dessin ». Le guide ajoute : « On pourrait demander aux élèves de justifier leurs réponses et, dans certains cas, expliquer leur démarche ou leur raisonnement ». Pour le problème 9, dans la mesure où l'élève cherche à creuser son intuition si on lui demande d'expliquer sa démarche, celui-ci en vient à comprendre et formuler comment il a fait intervenir la définition d'angle aigu pour partager le total de 150° ; nous pensons qu'il y a alors bel et bien déduction (locale).

10. *Est-il possible que deux angles complémentaires soient congrus ? Si oui, trace-les dans ton cahier.*

$\mathbf{M_B}$

Mêmes remarques que pour le problème 9 sauf qu'ici, la déduction est plus immédiate ; pratiquement immédiate, en fait.

- Page 204

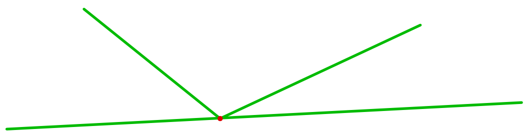
11. *Est-il possible que deux angles supplémentaires soient tous les deux obtus ? Si oui, trace-les dans ton cahier.*

M

12. **A**
13. $\mathbf{M_B}$
14. **A**
15. *Est-il possible que deux angles opposés par le sommet soient non congrus ? Si oui, trace-les dans ton cahier.*

$\mathbf{M_B'}_{\text{conception}}$

... dans la mesure où certains élèves conçoivent la figure suivante comme étant constituée d'angles opposés par le sommet.



16. *Est-il possible que des angles adjacents soient en même temps supplémentaires ? Si oui, trace-les dans ton cahier.* **M_B**

17. *Est-il possible que des angles adjacents soient en même temps opposés par le sommet ? Si oui, trace-les dans ton cahier.* **$M_{C'}$**$_{\text{définition}}$

Dans la même veine que les problèmes 9, 10, 11, 13, 15 et 16, celui-ci est nettement plus exigeant, et difficile à classer. Pour trouver la réponse, l'élève considérera vraisemblablement plus d'une configuration. Il devra comprendre en quoi l'unique configuration valide — deux angles plats de part et d'autre d'une même droite — est bien constituée d'angles qui satisfont simultanément aux définitions d'angles opposés par le sommet, et d'angles adjacents.

18. *Est-il possible que deux angles obtus soient adjacents ? Si oui, trace-les dans ton cahier.* **M_B**

19. *Est-il possible que deux angles aigus soient adjacents et supplémentaires ? Si oui, trace-les dans ton cahier.* **M**

20. *Est-il possible que deux angles opposés par le sommet soient supplémentaires ? Si oui, trace-les dans ton cahier.* **M**

21. **A**

- Page 205

22. **A**

23. La partie *« Déduis les mesures manquantes... »* constitue notre exemple 17, section 3.2.2. **A**

    La partie *« trouves-y les paires d'angles congrus, complémentaires, supplémentaires »* est quant à elle cotée...

    ...B

24. **A**

25. *Voici trois énoncés* **A**

1– *Les angles opposés par le sommet sont congrus.*

2– *Les angles adjacents qui ont leur côtés extérieurs perpendiculaires sont complémentaires.*

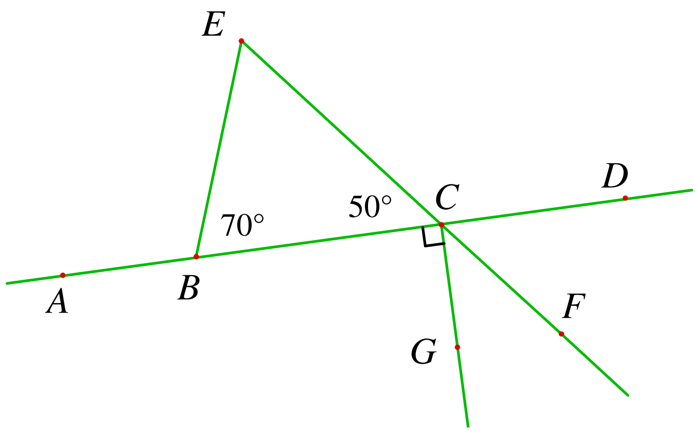
3– *Les angles adjacents qui ont leur côtés extérieurs en ligne droite sont supplémentaires.*

Parmi ces trois énoncés, indique celui qui permet de déduire que

a) m $\angle DCF = 50°$

b) m $\angle ABE = 110°$

c) m $\angle FCG = 40°$



Nous aurions classé le problème dans la catégorie M si l'élève avait eu à trouver par lui-même, dans le matériel précédent, quels énoncés appliquer. En l'état, le problème est réduit à une simple routine, et ce bien que les auteurs du manuel aient prétendu en faire un problème de déduction. (Il y a un code de couleurs associées à la numérotation des problèmes, par lequel les numéros en rouge sont ceux qui font appel à la déduction logique (sic). Le n° 25, page 205, est « rouge » !).

- Page 206

26.	**A**	27.	**A**
28. a)	$\mathbf{M_A}$	b)	**A**

LE SPHINX

Un problème d'algèbre : la géométrie n'est qu'un prétexte.

- Page 208

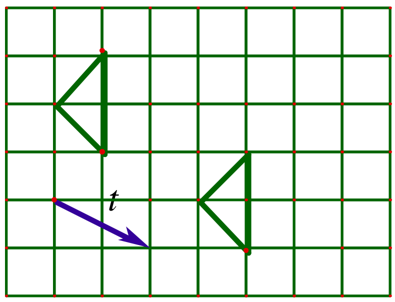
1.	**A**	2.	**A**
3.	**A**	4.	**A**
5.	**A**	6.	**A**
7.	**A**	8.	**A**
9.	**A**	10.	**A**
11. a)	$\mathbf{M_A}$	b)	**A**
12.	**A**		
13. a)	$\mathbf{M_A}$	b)	**A**

Itinéraire 13. Transformations des figures

Essentiellement des exercices de tracés et de lecture de tracés (« lire » les paramètres d'une transformation à partir du tracé des préimage et image d'une figure donnée). Par exemple, l'exercice de lecture de tracé suivant :

- Page 219

2. *Indique si l'image a été obtenue par la translation indiquée par la flèche.*
3.



Nous en faisons un exercice de la catégorie B (plutôt que A) parce que l'élève a à statuer sur la validité du jugement qu'il pose. Nous sommes bien conscient cependant que, compte tenu du contexte, il ne doutera pas longtemps de cette validité, s'il en doute jamais ; si bien que le problème pourrait tout aussi bien être classé A ou B_A. Donc,

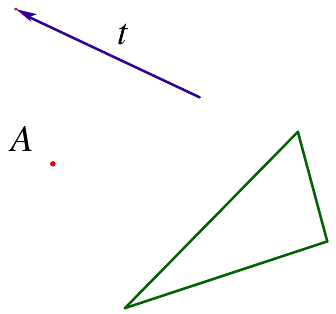
27 exercices de tracés, classés **A**
24 exercices de lecture de tracés, classés **B**

Nous relevons de plus les deux exercices suivants :

- Page 223

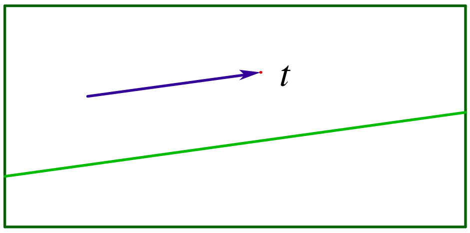
11. *À partir du point A, trace la flèche de la translation qui défait le travail effectué par le translation donnée.*

B'$_{\text{conception-définition}}$



12. *Trace l'image de la droite par la translation donnée.*

A'$_{\text{définition}}$



Itinéraire 14. Triangles et quadrilatères

(...)

- Page 250

a) **A**

c) *Est-il vrai que tout polygone est décomposable en triangles ?* **C**

- Page 252

a) **A** b) **A**

c) **A**

- Page 253

d) **A** e) **A**

f) **A**

- Page 254

g) Il s'agit de notre exemple 19, section 3.2.2 : **A'**$_{\text{définition}}$

h) **A** i) **A**

- Page 256

1. **A**

2. *Est-il possible de construire le triangle décrit ? Si oui, construis-le à main levée dans ton cahier.*

a) *triangle rectangle isocèle* **B**

b) *triangle obtusangle scalène* **B**

c) *triangle acutangle équilatéral* **B**

d) *triangle rectangle équilatéral* **C**

... et non B, ni M, dans la mesure où l'élève ne connaît pas encore le théorème sur la somme des angles intérieurs.

e) *triangle acutangle scalène* **B**

f) *triangle obtusangle isocèle* **B**

g) *triangle obtusangle équilatéral* **C**

Même remarque qu'en d).

h) *triangle rectangle scalène* **B**

- Page 257

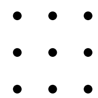
3. a) **A** b) **B**
   c) **B**

4. a) **A** b) **B**
   c) **B**

- Page 258

5. **B**

6. *Voici un géoplan formé de neuf points :*



a) *Si cela est possible, trace un triangle rectangle isocèle en ne reliant que trois points de ce géoplan.* **B**

b) *Si cela est possible, trace un triangle isocèle non rectangle en ne reliant que trois points de ce géoplan.* **B**

c) *Si cela est possible, trace un triangle scalène en ne reliant que trois points de ce géoplan.* **B**

d) *Si cela est possible, trace un triangle équilatéral en ne reliant que trois points de ce géoplan.* **B**

L'exercice d) coïncide pratiquement avec l'exemple 15, section 3.2.1. Dans notre exemple, nous avions intentionnellement omis l'injonction de ne relier que trois points du géoplan. Avec cette injonction, les exercices b) et d) sont moins immédiats, et relèvent un peu plus de la « devinette » ; devinette pas spécialement enrichissante du point de vue mathématico-géométrique. Nous faisions valoir, section 3.2.1, que sans l'injonction de ne relier que trois points du géoplan, on pouvait espérer voir « sortir » — toujours pour d) — des réponses comme

Le problème ainsi formulé se voyait pour cette raison attribuer la « cote » B'$_{\text{perception}}$. En ce qui a trait à l'apprentissage de la preuve, il nous apparaît plus formateur de corriger et commenter les erreurs perceptives véhiculées par les deux figures ci-dessus, que d'accentuer l'angle « devinette » de l'exercice.

- Page 259

7.	**B'**$_{\text{devinette}}$	
8.	**B**	(**A** pour le tracé)

- Page 260

9.	**A**	
10.	**A**	
11.	**B**	
12.	**B**	(**A** pour le tracé)
13.	**B**	(**A** pour le tracé)
14.	**B**	(**A** pour le tracé)

- Page 261

15. *Voici quatre triangles. Chaque membre de l'équipe en découpe un. Ensuite, chacun coupe les 3 pointes en suivant les pointillés et les juxtapose l'une à l'autre de sorte qu'elles aient le même sommet.* **B**

Figure : quatre triangles dissemblables à découper.

a) *Quelle sorte d'angle les 3 pointes réunies par leur sommet forment-elles ?*
b) *Quelle est la mesure d'un angle plat ?*
c) *Que peut-on affirmer de la somme des mesures des angles d'un triangle ?*

Nous assignons la « cote » B parce que la démarche est ici imposée, et parce que l'élève ne se questionne pas sur la validité de la réponse suggérée (pas très subtilement) en b) ; pas plus qu'il ne s'interroge sur le nombre d'essais à faire pour établir cette validité. **Occasion ratée** : le trop grand « dirigisme » de l'énoncé fait passer l'élève à côté de ce qui aurait dû être un problème de la catégorie C.

- Page 262

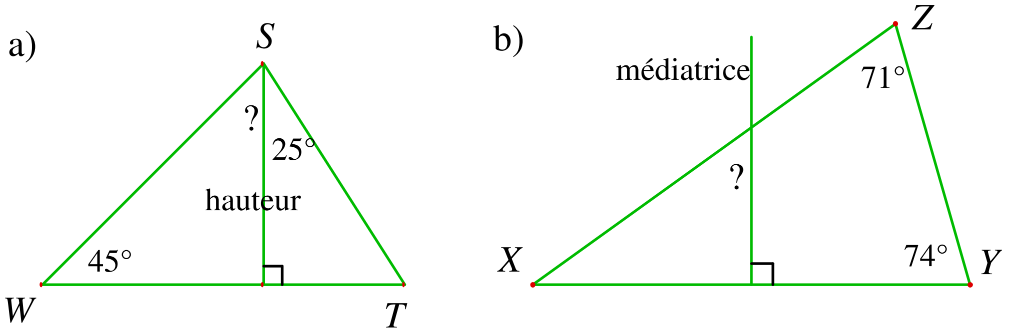
16. **A** 17. **A**

18. a) *Quel nom donne-t-on à deux angles dont la somme de leur mesure est 90° ?* **A**
    b) *Quelle caractéristique les 2 angles aigus d'un triangle rectangle possèdent-ils ?*
    c) *Écris un raisonnement qui peut me convaincre de ce que tu viens d'affirmer.* $\mathbf{M_A}$

Dans une section où il n'est question que de la somme des mesures des angles intérieurs du triangle, et avec la réponse suggérée en a), voilà une déduction (locale) pas trop exigeante !

- Page 263

19. *Sans rien mesurer, déduis des indications fournies la mesure d'angle demandée.*
    a) $\mathbf{M_A}$ b) **N**(1)



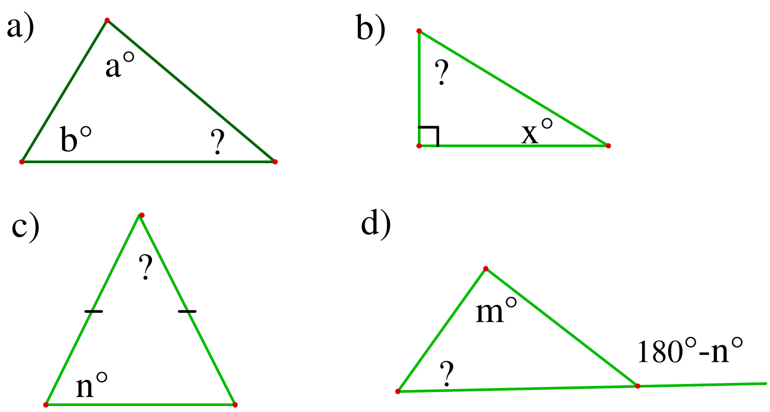
Appelons *H* le pied de la hauteur abaissée de *S* sur $\overline{WT}$ dans a). L'élève peut appliquer directement le théorème sur la somme des angles intérieurs au triangle *WSH*, et trouver la mesure demandée. Compte tenu de l'exercice précédent (n°18), et du fait que la section entière porte sur le théorème de la somme des angles intérieurs, nous estimons que son application est ici immédiate, et assignons pour cette raison la cote M_A au problème a). Par contre, pour répondre à b), l'élève **doit** trouver la mesure de l'angle *ZXY* **avant** la mesure demandée ; d'où la cote N(1) pour le problème b).

20. a) **N**(1) b) **N**(1)
21. **M**
22. **M**

- Page 264

23. Il s'agit de notre exemple 28, section 3.2.2 : **M**
24. **M**
25. *Dans chaque cas, trouve une expression qui peut représenter la mesure demandée.*

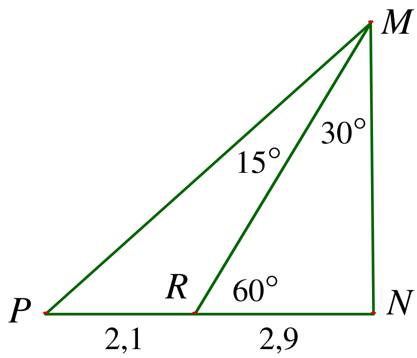
a)	**A'**$_{\text{algèbre}}$	b)	**A'**$_{\text{algèbre}}$
c)	**M'**$_{\text{algèbre}}$	d)	**M'**$_{\text{algèbre}}$



26. **M**
27. **M**

- Page 265

28. *Déduis la mesure de $\overline{MN}$ à partir des indications fournies sur cette figure.*
N(3)



Notons que le guide d'enseignement recommande que l'élève justifie sa démarche, d'abord oralement, puis par écrit. Les trois étapes intermédiaires, qui sont des passages obligés, sont les suivantes :

1. La mesure de l'angle *PNM* est de 90° (ou encore, la mesure de l'angle *MRP* est de 120°).
2. La mesure de l'angle *MPN* est de 45°, et est donc égale à celle de l'angle *PMN*.
3. Le triangle *PNM* est isocèle. (L'élève a vu qu'un triangle isoangle est isocèle).

Il peut alors conclure que la mesure de $\overline{MN}$ est égale à celle de $\overline{PN}$, soit

$$2{,}1 + 2{,}9 = 5.$$

29. **N**(2)

30. a) 1. **N**(1) 2. **N**(3)

b) **A**

31. **M**

LE SPHINX

Un problème d'algèbre : la géométrie n'est qu'un prétexte.

- Page 266

1° *On veut construire un triangle dont on connaît* ***les mesures des 3 côtés****.*

a) *Coupe 3 bâtonnets à café à 9 cm, 3 cm et 5 cm.*

b) *Construis un triangle avec ces 3 bâtonnets.* **A**

c) *Quelle* ***condition*** *les mesures des segments doivent-elles remplir pour que tu puisses construire un triangle avec ces 3 segments ?* **G**

Ce dernier problème est analogue à celui que nous présentions comme exemple 25, section 3.2.2. Voir également un peu plus bas, au compte rendu de la page 267.

d) *Remplace le bâtonnet de 3 cm par un bâtonnet de 10 cm. Combien de formes triangulaires différentes es-tu capable de construire avec ces 3 segments ?*

B'perception

- Page 267

e) *Voici le film de la construction d'un triangle ayant des côtés de 10 cm, 9 cm et 5 cm. En suivant ce procédé, construis ce même triangle sur une feuille.* **A**
f) *En utilisant le même procédé, construis un triangle dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm. Quelle sorte de triangle obtiens-tu ?* **B**
g) *Peut-on construire un triangle dont les mesures des côtés sont 8 cm, 6 cm et 15 cm ? Explique pourquoi.* **G**

C'est notre exemple 25, section 3.2.2.

2° *On veut construire un triangle dont on connaît* ***la longueur d'un côté et les mesures des angles situés aux extrémités****.*
a) *On veut construire un triangle ayant un côté de 8 cm avec des angles de 50° et 60° situés aux extrémités de ce côté.*
   1) *Trace un segment de 8 cm.* **A**
   2) *Avec ton rapporteur, construis des angles de 50° et 60°aux extrémités de ce segment.* **A**
   3) *Complète le triangle.* **A**
b) *Construis le triangle qui a des angles de 15° et 130° aux extrémités d'un côté de 6 cm.* **A**
c) *Construis le triangle qui a des angles de 60° et 140° aux extrémités d'un côté de 6 cm. Qu'observe-t-on de particulier dans ce dernier cas ?* **B**
d) *Quelle mesure maximale totale les deux angles aux extrémités d'un segment peuvent-ils avoir lorsqu'on veut former un triangle ?* **G**

L'organisation du problème n°2 semble montrer que les auteurs de celui-ci veulent faire vivre à l'élève le théorème sur la somme des angles intérieurs comme une véritable *expérience mentale*. Dans la section précédente, ce théorème était abordé empiriquement. Dans la présente section, l'élève constate que pour faire se rejoindre les deux côtés non tracés du triangle, ceux-ci doivent être « inclinés l'un vers l'autre », et la somme des angles à leur base doit être en deçà de 180°. Nos félicitations aux auteurs, donc, pour les qualités didactiques de ce problème, du point de vue de la construction du sens et de la rationalité.

Nous avons cependant une réserve à faire sur la partie d) : la façon dont elle est rédigée ne contribue pas à clarifier le statut de la valeur limite, 180°. L'énoncé pourrait amener l'élève peu sûr de son jugement à croire que cette valeur maximale peut être atteinte à l'intérieur d'un triangle ! L'occasion aurait pourtant été belle de mettre l'élève en contact avec le concept de limite : si 180° n'est jamais atteint, en quoi peut-on dire qu'il s'agit d'un maximum ? Quelles sont les valeurs qui **peuvent être atteinte à l'intérieur d'un triangle** ? Jusqu'où ces valeurs peuvent-elles aller ? Et qu'advient-il alors du troisième angle ? Etc.

3° *On veut construire un triangle dont on connaît **les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle que forment ces deux côtés**.*

a) 1) **A**

2) **A**

3) **A**

b) *Construit le triangle qui a un angle de 90° formé par des côtés de 5 cm et 9 cm.* **A**

c) **A**

- Page 268

d) *Geneviève s'est amusée à construire des triangles en augmentant la mesure de l'angle, mais en gardant constantes les mesures des côtés formant cet angle.*

Figure : quatre triangles de 3 cm et 4 cm de côtés, aux bords d'un angle de, respectivement, 30°, 60°, 90° et 120°.

En observant ces constructions, elle fait les affirmations suivantes. Détermine lesquelles sont vraies.

1) *La mesure d'un angle dans un triangle peut varier entre 0° et 180°.* **G**
2) *Plus la mesure d'un angle est grande, plus la mesure du côté opposé à cet angle est grande.* **G**
3) *Dans un triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.* **G**
4) *Dans un triangle, au plus petit côté est opposé le plus petit angle.* **G**

Nous assignons la cote G dans la mesure où l'enseignant demandera plus que la simple réponse par oui ou par non, et saura amener l'élève à verbaliser une « justification ». Celle-ci sera alors vraisemblablement de l'ordre de l'expérience mentale et pourra, par exemple, aller comme suit : « plus on agrandit l'angle, plus l'écart entre les deux extrémités des côtés augmente, et plus le troisième côté va être grand ».

- Page 269

JOGGING

1.	**A**	2.	**B**
3.	**B**		

- Page 270

4.	**A**	5.	**A**
6.	**A**	7.	**A**
8.	$\mathbf{M_A}$	9.	**B**
10.	$\mathbf{M_A}$		

- Page 271

11.	$\mathbf{M_A}$	12.	**M**
13.	**B'**$_{\text{devinette}}$		

LE SPHINX
Combien de triangles isocèles remplissent les deux conditions suivantes ? L'un des côtés mesure 4 cm et l'un des angles mesure 80°. **M**

- Page 273

a) *Vrai ou faux ?* **A**

1) *Tout rectangle est un parallélogramme, un trapèze et un quadrilatère.*
2) *Tout parallélogramme est un trapèze et un quadrilatère.*
3) Etc.

Même si l'élève a à statuer sur la valeur de vérité de l'énoncé, nous assignons la cote A plutôt que B parce que l'élève « lit » directement la réponse dans le diagramme, juste au-dessus de l'exercice.

b) **B**

- Page 274

1. **A'**$_{\text{définition}}$ 2. **A**

3. Nous ne comprenons pas cet exercice.

4. **B'**$_{\text{définition}}$

5. *Dessine un cube coupé de façon à montrer :*
a) *un triangle équilatéral ;* b) *un carré ;*
c) *un rectangle ;* d) *un trapèze non rectangle ;*
e) *un trapèze isocèle non rectangle.* **B'**$_{\text{spatialité}}$

- Page 276

6. **B** 7. **B**

- Page 277

8. **B** 9. **B**

- Page 278

10. **B'**$_{\text{spatialité}}$ 11. **B**

12. *Jacques a-t-il raison ? « Si l'on fait coïncider parfaitement un côté de chacun de deux triangles équilatéraux congrus, on forme nécessairement un losange ».* **M** ...

... si l'enseignant exige une justification ; B sinon.

13. **A**

- Page 279

14. C'est notre exemple 24, section 3.2.2. Rappelons qu'il s'agit de déterminer, parmi onze propriétés (nous n'en avions énumérées que quatre), lesquelles sont vérifiées par chaque type de quadrilatères. Il y a donc un tableau de 77 cases à remplir (7 quadrilatères et 11 propriétés). Pour ce faire, l'élève devrait, selon nous, exercer un jugement d'une seule venue 52 fois (en particulier, à chaque fois qu'il s'agit du carré), et une induction empirique 25 fois. La partie significative (non « routinière ») de l'exercice est celle qui porte sur l'induction empirique. D'où la classification :

C ... décomposé en **52 fois B** et **25 fois C**

- Page 280

15.	**A**	16.	**A**
17.	**A**	18.	**A**

Dans la mesure où le tableau de la page précédente a été rempli et corrigé, il s'agit bel et bien d'après nous d'applications directes. Si les propriétés du carré, du rectangle et du losange n'ont pas encore été « institutionnalisées », nous avons alors affaire à quatre exercices de la catégorie B.

- Page 281

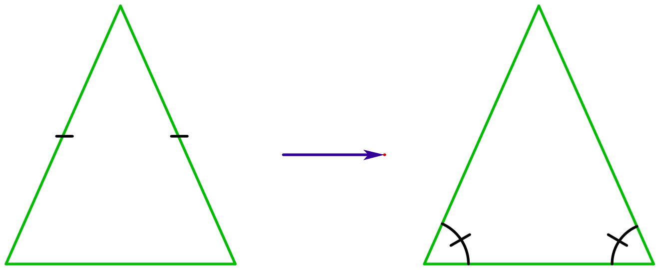
19.	**M**	20.	**A**
21.	**B**	22.	**B**

- Page 282

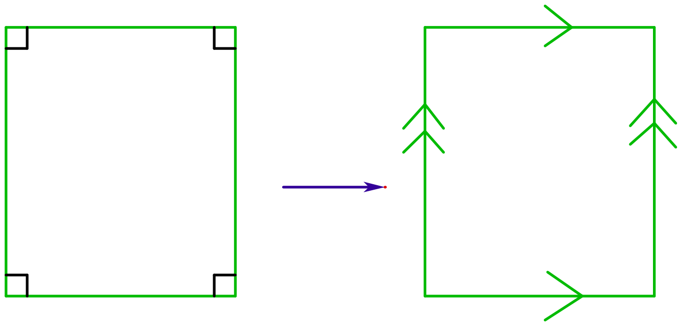
23. *Complète la phrase qui traduit chaque illustration.*

B' logique propositionnelle

a) *Si un triangle est isocèle, alors il est ?????*



b) *Si un triangle est équilatéral, alors il est ?????*
c) *Si un quadrilatère est un rectangle, alors il est un ?????*



d) *Si un quadrilatère est un carré, alors il est un ?????*
e) *Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors il est un ?????*

Il y a une figure pour chaque sous-question, mais nous n'en reproduisons que deux. Même si l'on ne sollicite chez l'élève qu'un jugement d'une seule venue, le problème amène par surcroît l'élève à prendre conscience :

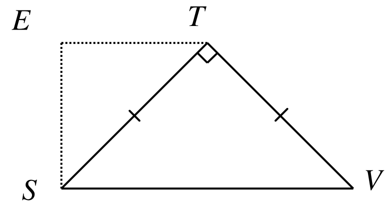
– des liens entre définitions et équivalence, entre définitions et implications ;
– de la différence entre implication et équivalence, entre implication et implication réciproque.

24. **A** 25. **A**

- Page 283

26. **M** 27. **M**
28. **M**

29. *On a formé un trapèze rectangle à partir du triangle rectangle isocèle STV, comme le montre l'illustration ci-dessous. Quelles caractéristiques le second triangle possède-t-il ?* **N**(3)



La cote de ce problème, comme celle des autres problèmes de la page 283, n'est valable que dans la mesure où l'enseignant exigera de l'éleve qu'il justifie ses affirmations. Le fait que l'angle *SET* est droit découle de la définition de trapèze rectangle. Pour établir que le triangle *SET* est de plus isocèle, l'élève devra passer par les résultats intermédiaires suivants :

1. l'angle *TSV* mesure 45° (car les angles à la base d'un triangle rectangle isocèle sont de 45°) ;
2. la mesure de l'angle *TSE* est de $90° - 45° = 45°$;
3. la mesure de l'angle *ETS* est de $180° - 90° - 45° = 45°$;

L'élève en conclura que le triangle *STE* est isoangle-isocèle.

30.		$\mathbf{M_A}$	31.		**N**(2)
32.		**M**			
33.	a)	**M**	b)		**M**
	b)	**M**	d)		**M**

- Page 284

34. Notre exemple 29, section 3.2.2. **M**

35.	a)	**B**	b)	**B**

c) *Voici différents parallélogrammes ayant les mêmes mesures de côtés.* (*Figure :* quatre parallélogrammes dissemblables, ayant les mêmes mesures de côtés). *En plus des mesures des deux côtés, quelle autre mesure doit-on connaître pour construire un parallélogramme donné ?* **B**

Comme c'est souvent le cas dans cette collection, la question en dit trop ! Pourquoi ne laisse-t-on pas à l'élève la tâche d'établir si une seule autre mesure suffit, ou si les mesures de 2 (ou peut-être même 4 !) angles sont nécessaires ? Qu'on laisse à l'élève la tâche d'établir, et « l'opportunité » de se tromper ! Il est vrai que la question suivante — l'analogue de c) pour les losanges — est formulée de façon à ne pas « vendre la mèche ». Mais comme elle vient après c), et qu'un losange est un parallélogramme, la « mèche » est déjà vendue…

d) *Voici différents losanges qui ont tous la même mesure de côté.* (*Figure :* quatre losanges dissemblables, mais de même côté). *Que doit-on connaître, en plus de la mesure des côtés, pour construire un losange donné ?* **B**

e) *Peut-on construire un losange si l'on ne connaît que les mesures de ses diagonales ? Si oui, pourquoi ?* **M**

Ici, c'est bien sûr le « pourquoi ? » qui fait la différence entre la cote B et la cote M. L'élève doit retrouver les deux propriétés du losange qui lui permettent de conclure : les diagonales se coupent à angle droit, en leurs milieux.

- Page 285

36. Dix constructions à la règle et au rapporteur. **A**

- Page 286

37. Six constructions. **A**

38. *Trouve le périmètre d'un triangle isocèle dont deux des côtés mesurent respectivement 6 cm et 8 cm.*

A' conception

L'élève prend ici conscience qu'un problème peut admettre plus d'une solution.

39. **A**

LE SPHINX
Si l'on déroule le cylindre en carton d'un rouleau de papier, on obtient un parallélogramme. Voici deux parallélogrammes que l'on a obtenus à partir d'un cylindre de carton : (Figure). *Quelle propriété les parallélogrammes qui peuvent former un cylindre possèdent-ils ? Indice : Les deux parallélogrammes suivants n'ont pas cette propriété.* (Figure). **B'** devinette

Sans les figures, on aurait eu affaire à un problème de la catégorie C. Avec les figures, l'élève n'a qu'à trouver quelle propriété possèdent les deux premiers parallélogrammes, que ne possèdent pas les deux autres. Incidemment, les deux premiers ont une diagonale perpendiculaire à l'un des côtés.

- Page 288

1.		**A**	2.	**B**
3.	a)	**B**	b)	**B**
	c)	**B**	d)	$\mathbf{M_B}$
	e)	$\mathbf{M_B}$		
4.	a)	**M**	b)	**M**
	c)	**M**		
5.		**M**		

- Page 289

6.	**A**	7.	**A**
8.	**M**	9.	**M**
10.	**M**	11.	**A**
12.	**A**	13.	**A**
14.	**A**		

- Page 290

15.		**A**		
16.	a)	**B**	b)	**B**
	c)	**B**	d)	**B**
	e)	**B**		
17.	a)	**M**	b)	**M**
	c)	**M**		
18.	a)	**M**	b)	**M**
	c)	**M**	d)	**M**
19.	a)	**M**	b)	**M**
20.		**A**	21.	**A**

Itinéraire 15. Périmètre et aire

Nous passons rapidement sur cet itinéraire. La résolution des problèmes de calcul d'aires ou de périmètres consiste le plus souvent à appliquer une formule, et ces problèmes sont pour cette raison classés A. Bien sûr, les auteurs ajoutent parfois des difficultés : manipulations algébriques, devinettes, problèmes en mots, comme le problème ci-dessous. Mais ces difficultés sont extra-géométriques, et nous n'en tiendrons pas compte. Nous ne comptabiliserons pas non plus les problèmes de changement d'unités de mesure, ou d'estimation d'aires.

- Page 297

12. *On a posé une corde autour d'une piscine rectangulaire. La corde se vend 18¢ le mètre. Le coût de la corde utilisée est de 6,12 $ La piscine a une longueur de 11 m. Quelle est sa largeur ?*

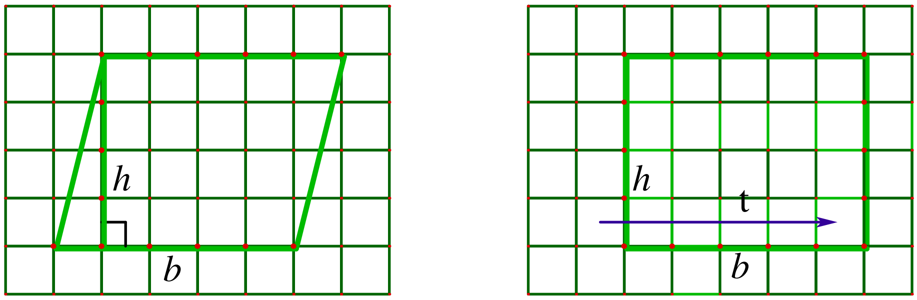
A’’$_{\text{algèbre-problème-en-mots}}$

Quand un calcul d'aire passe par la décomposition d'un polygone en triangles et quadrilatères, nous assignons la cote B, car cette décomposition se fait en un jugement d'une seule venue, mais n'est par ailleurs ni tout à fait directe, ni unique. Dans l'itinéraire 15, nous dénombrons (en comptant toutes les sous-questions) **99** exercices de la **catégorie A**, et **36** exercices de la **catégorie B**. À cela s'ajoutent les problèmes suivants.

- Pages 304 et 305

n) *En observant les deux figures, expliquez la règle proposée dans chaque cas*

1) *Aire du parallélogramme* = $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{h}$ **H**



2) *Aire du trapèze* = $[(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{h}\,]/2$ **H**

Figure : un trapèze et son image par une rotation de 180°, autour du milieu d'un des côtés.

3) *Aire du triangle* = $[\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{h}\,]/2$ **H**

Figure : un triangle et son image par une rotation de 180°, autour du milieu d'un des côtés.

4) *Aire du losange* = $[\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{d}\,]/2$ **H**

Figure : les deux moitiés supérieures d'un losange translatées, pour donner un rectangle.

Nous assignons la cote H parce que les explications qu'on demande à l'élève reposent toutes sur l'additivité de l'aire. Or, ce principe (ou axiome) n'a jamais été énoncé, ni même invoqué. Il est par ailleurs vécu par l'élève comme une évidence perceptive ; tout comme le fait que l'image et la préimage des rotations forment bien des parallélogrammes en 2) et 3) ; ou qu'en 1), le découpage du parallélogramme en un triangle rectangle plus un trapèze rectangle soit toujours possible. Ce n'est en l'occurence pas le cas : qu'il suffise de considérer un parallélogramme allongé très incliné !

- Page 314

31. *Imaginons un triangle formé par une corde attachée à 3 clous. Deux des clous (A et C) sont fixes et le clou B est mobile, de sorte que l'on peut*

modifier la forme du triangle ABC. Où devrait-on placer le clou B pour que l'aire du triangle ABC soit

a) *maximale ?* **H**

b) *minimale ?* **M**

Là encore, nous assignons la cote en prenant pour acquis que l'enseignant demandera à l'élève de justifier sa réponse (sans quoi le problème est classé B). En a), l'élève appuiera son raisonnement sur l'évidence perceptive que la hauteur du triangle est maximale quand le point B se projette sur le milieu de $\overline{AC}$ (quand B est au sommet de l'ellipse décrite par la pointe du clou). L'argument en b) est plus direct : pour minimiser la hauteur, le point B doit être aligné avec A et C. Comme pour le problème n° 2 de la page 267 (Itinéraire 14), on peut cependant déplorer que la rédaction de l'énoncé traite le cas limite si cavalièrement, en laissant entendre qu'il donne lieu à un véritable triangle.

- Page 315

32. *Sépare-t-on un trapèze en deux trapèzes ayant la même aire si l'on relie :*

a) *les points milieux des côtés non parallèles ?*
Justifie ta réponse. **M**

b) *les points milieux des côtés parallèles ?*
Justifie ta réponse. **M**

Deuxième secondaire

Tome 1

Itinéraire 1. Diverses formes de représentation

Itinéraire 2. Les proportions

Itinéraire 3. Les homothéties

Comme cela avait été le cas pour les *transformations des figures* (Itinéraire 13, secondaire 1), cet itinéraire s'ouvre avec une série d'exercices de tracés (catégorie A) et quelques lectures de tracés (catégorie B). Ainsi, des pages 112 à 147, nous comptons **32** exercices de la **catégorie A** et **6** exercices de la **catégorie B**. Nous ne comptabilisons pas les exercices qui ne font strictement appel qu'au raisonnement proportionnel, même si le contexte est géométrique. C'est le cas des numéros 16 à 28, pages 140 à 143. À partir de la page 148, les problèmes proposés méritent qu'on s'y attarde de plus près.

- Page 148

3. **A**

4. *Deux figures congrues ou parfaitement superposables sont-elles semblables ? Justifie ta réponse.* **B'**définition

5. *Vrai ou faux ?*
   a) *Un triangle isocèle ne peut être semblable qu'à un autre triangle isocèle.* **B**
   b) *Tous les rectangles sont semblables.* **B'**conception
   c) *Tous les triangles rectangles sont semblables.* **B'**conception
   d) *Deux polygones réguliers ayant un même nombre de côtés sont nécessairement semblables.* **B**

Nous assignons la cote B et non M parce que le guide d'enseignement stipule que l'élève n'a pas à justifier. Bien entendu, l'enseignant pourrait en décider autrement. Par ailleurs, le guide invite celui-ci à profiter de l'exercice pour souligner à l'élève la différence entre une implication et sa réciproque : ici,

« semblable » implique « mêmes propriétés », mais « mêmes propriétés » n'implique pas « semblable ». Autre « bon point » pour les auteurs, du point de vue de la construction de la rationalité : les questions b) et c) confrontent l'élève en mettant en conflit la conception courante véhiculée par le mot « semblable » et la signification mathématique de ce terme.

6. **A**

- Page 149

7. **A**

- Page 150

8. **A** 9. **A**

- Page 151

Numéros 10, 11, 12 et 13 : raisonnement proportionnel.

- Page 152

14. **M** 15. **A**
16. **B**

- Page 163

1. **A** 2. **B**
3. **A**

- Page 164

4. **A** 5. **A**
6. **B**

- Page 165

7. **A** 8. **A**
9. **A**

- Page 166

10. **B** 11. **A**

12. **A** 13. $\mathbf{M_A}$

Itinéraire 4. Le calcul algébrique
Itinéraire 5. Les équations

Tome 2

Itinéraire 6. Les transformations du plan cartésien

Comme nous l'avions annoncé à la fin de la section 3.3, nous ne comptabilisons pas les problèmes de cet itinéraire car ils reposent trop fortement sur le calcul en coordonnées. À travers les exercices, l'élève est amené à constater quel est l'effet des transformations sur les coordonnées cartésiennes. Il s'agira ensuite pour lui d'appliquer les règles qui auront ainsi été établies. Les avoir classés, ces exercices se seraient donc retrouvés dans les catégories A ou B. Nous signalons tout de même les quelques exercices suivants.

- Page 16

27. *Exprime symboliquement la règle de toute translation dans laquelle la figure initiale et l'image peuvent être superposées par un glissement vertical :*

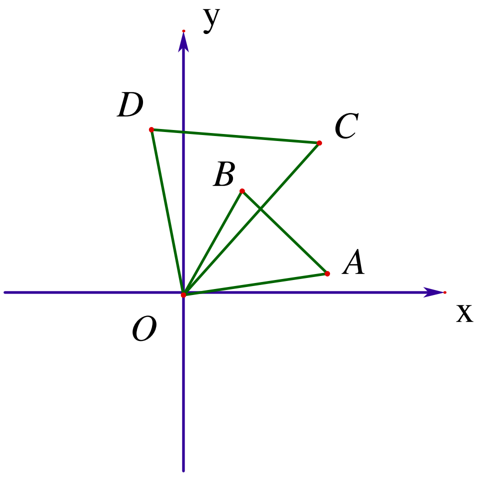
$$(x, y) \mapsto (???\ ,\ ???)$$ **M**

- Page 29

21. *Que peut-on dire de la translation* $t : (x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ *si* $a = 0$ *et* $b = 0$ *?* $\mathbf{A'}_{\text{conception-définition}}$

- Page 32

37. *Peut-on associer par une rotation les deux triangles représentés ici ? Justifie ta réponse.* **M**



38. *Une droite et son image forment un angle congru à l'angle de rotation. Que penses-tu de cette affirmation ?* **B**

On peut se demander à quelle catégorie passe le problème si l'élève doit justifier ce qu'il affirme ; ce qu'il aura de la difficulté à faire, quand la droite ne passe pas par le centre de rotation. Le problème se pose en général : sur quelle base rationnelle aborder la géométrie des transformations, quand tout le contenu géométrique n'y est avancé qu'en tant qu'évidences perceptives ? Nous aurons l'occasion d'y revenir.

Itinéraire 7. Le pourcentage

Itinéraire 8. Le cercle

(...)

- Page 102

a) **A** b) **B**

- Page 103

c)		**A**	d)	**A'**$_{\text{définition}}$
e)		**A'**$_{\text{définition}}$		
f)	1)	**B**	2)	**B**
	3)	**A**	4)	**B**
g)	1)	**B**	2)	**B**
	3)	**A'**$_{\text{définition}}$	4)	**A'**$_{\text{définition}}$
h)	1)	**B**	2)	**B**
i)	1)	**B**	2)	**B**
	3)	**A**		

- Page 104

j)	1)	**B**	2)	**B**
	3)	**A'**$_{\text{définition}}$		
k)		**A**		

l) Il s'agit de notre exemple 21, section 3.2.2. **B**

m)	**A**	n)	**B**
o)	**B**	p)	**B**

q) *On trace une corde dans un cercle de 10 cm de rayon. En laissant fixe l'une des extrémités de la corde, on déplace l'autre extrémité. Quelles sont*
la longueur maximale **B**
et la longueur minimale **B'**$_{\text{conception}}$
que peut atteindre la corde ?

Encore un problème de limite traité cavalièrement (voir problème 31 p. 314 et problème 2 p. 267, secondaire 1) : peut-on encore parler d'une corde quand celle-ci est réduite à un point !

r) *Cindy affirme qu'elle est capable de tracer trois points par lesquels ne peut passer aucun cercle. Cela est-il possible ?*
C

- Page 105

s)	**A**	t)	**A**
u)	**B**		

v) *Trace la médiatrice du segment joignant les points B et C ci-contre.* **A**

w) *Trace trois cercles passant tous par les points B et C.* **A**

x) *Combien de cercles peuvent passer par les points B et C ?* **B**

y) *Trace un cercle passant par les trois points D, E et F après avoir trouvé le centre du cercle.* **H**
Figure : les trois points *D, E* et *F,* non alignés

z) 1) *Peut-on tracer un deuxième cercle passant par les mêmes points ?* **B**
2) *Combien de cercles peuvent passer par les trois points D, E et F ?* **B**

La question y) mérite qu'on s'y attarde. À travers les exercices v), w) et x), l'élève a vécu comme une évidence perceptive le fait que les cercles qui passent par B et C ont leur centre sur la médiatrice de $\overline{BC}$. En s'appuyant sur ce résultat, l'élève pourra déduire que le centre qu'on lui demande de trouver en y), est à l'intersection des médiatrices de $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ et $\overline{DF}$. Pour qu'un tel raisonnement — qui fait du problème un problème de la catégorie H — soit mis en oeuvre, l'enseignant devra exiger des élèves qu'ils trouvent le centre autrement qu'à tâtons.

- Page 106

1.	**A**	2.	**A**
3.	**A**	4.	**A**
5.	**A**		

- Page 107

6.	**A**		
7. a)	**A**	b)	**B**

8.	**A**	9.	**A**
10.	**A**		

11. Variables et fonctions ; la géométrie n'est qu'un prétexte.

12.	**A**	13.	**A**
14.	**A**		

15. Notre exemple 30, section 3.2.2. **M_A**

- Page 108

16.	**A**	17.	**A**
18.	**A**	19.	**A**
20.	**A**		

- Page 109

21. **A**

22. Notre exemple 18, section 3.2.2. **A**

23.	**A**	24.	**A**

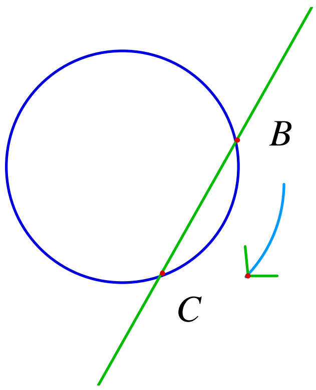
- Page 110

25. *Est-il possible de trouver la position exacte du centre d'un cercle en traçant les médiatrices de deux cordes parallèles ?* **M**
26. *Trace deux droites parallèles. Trace ensuite un cercle tangent aux deux droites.* **H**

... dans la mesure où l'enseignant demandera une construction exacte, à la règle et compas, ou à la règle graduée et équerre. Une telle construction est à la portée de l'élève : il a vu que le rayon réalise la plus courte distance entre le centre du cercle et la tangente, et il peut intuitivement en induire que ce rayon forme un angle droit avec la tangente. Il appuiera aussi sa construction sur l'évidence intuitive-perceptive que le centre est exactement à mi-distance entre les deux droites parallèles.

27. a)	**B**	b)	**M_A**
28.	**B**		
29.	**B**		

30. *Quel nom la droite BC portera-t-elle si l'on fait glisser le point B jusqu'en C ?* **B'**$_{\text{conception-définition}}$



Enfin un passage à la limite qui ne malmène pas les définitions précédentes !

- Page 111

31. *Quelle est la propriété de tout triangle ayant son sommet au centre d'un cercle et ses autres sommets sur le cercle ? Justifie ta réponse.* **M**

32. Notre exemple 23, section 3.2.2. **C**

33. a) **A** b) Raisonnement proportionnel.
34. Problème d'algèbre.
35. a) **A** b) Raisonnement proportionnel.

- Page 112

36. **M**

37 et 38 : problèmes d'algèbre.

39. **A**

40. Notre exemple 33, section 3.2.2. **N**$_{\mathbf{M}}$(1)

41. Analogue au problème 26, p. 110. Les mêmes remarques s'appliquent. **H**

42. **A**

- Page 113

43. Raisonnement proportionnel.

44. Notre exemple 32, section 3.2.2. **N**(3)

CLUB MATH **M**

- Page 114

a) **A** b) **B**

c) Raisonnement proportionnel.

- Page 115

d), e), f), g) h) : raisonnement proportionnel, variables et fonctions.

i) *Deux cercles sont-ils toujours semblables ?*
Justifiez votre réponse. **B'**$_{\text{définition}}$

Compte tenu du travail qui vient d'être fait sur le périmètre du cercle et le nombre π, les auteurs attendent de l'élève qu'il réponde oui, et qu'il donne la justification suivante : les différentes mesures possibles de « l'unique côté » des cercles sont toutes dans la même proportion. Encore une fois, les auteurs étendent une définition (la similitude des polygones) à un cas limite comme si ça allait de soi, sans même soulever la possibilité qu'il y ait des questions à se poser !

j) et k) : raisonnement proportionnel.

- Page 116 et 117 : estimations de circonférences.

- Page 118

6. Estimations.

7.	**A**	8.	**A**
9.	**A**	10.	**A**
11.	**A**	12.	**A**
13.	**B**		

- Page 119

14 et 15 : variables et fonctions.

16.	**A**	17.	**A**
18. a)	**A**	b)	**B**
19.	**A**	20.	**A**

- Page 120

21. **A**

22 et 23 : problèmes d'algèbre.

24. **A**

25, 26 et 27 : problèmes d'algèbre.

28. **B**

- Page 121

29. *À la course du 1500 m, les points de départ des coureurs ou coureuses dans chaque corridor ne sont pas alignés. Explique pourquoi.* $\mathbf{M_A}$

30.	**B**	31.	**B**
32.	**A**	33 : problème d'algèbre.	

CLUB MATH **A**

- Page 122

a)	**A**	b)	**A**
c)	**A**	d)	**A**

- Page 123

e)	**B**	f)	**A**
g)	**A**	h)	**A**
i)	**A**		

- Page 124

j)	**A**	k)	**B**

l) *Une mesure d'arc en degrés est-elle équivalente à une mesure de longueur ? Expliquez pourquoi.* $\mathbf{M_A}$

m) **B**

JOGGING

1.	**A**		

- Page 125

2.	**A**	3.	**A**
4.	**A**	5.	**A**
6.	**A**	7.	**A**

- Page 126

8.	**A**	9.	**A**
10. a)	**B**	b)	**M**$_{\mathbf{A}}$
11.	**B**	12.	**M**

- Page 127

13.	**A'**$_{\text{raisonnement proportionnel}}$		
14.	**A**		
15.	**A**	16.	**A**
17.	**A**	18.	**A**
19.	**A**	20.	**A**

21. *Calcule la mesure d'un angle au centre qui intercepte entre ses côtés un arc congru :*
    a) *au rayon du cercle ;* b) *au diamètre du cercle.*

A''$_{\text{algèbre-conception}}$

L'élève applique le raisonnement proportionnel qu'on lui a fait travailler dans les problèmes précédents, en établissant l'égalité proportionnelle avec le rapport de la circonférence sur l'angle de 360°. Mais une difficulté conceptuelle s'ajoute, parce qu'il n'y a pas ici de données empiriques. L'élève doit accepter de faire le pas qui consiste à écrire l'égalité proportionnelle en fonction de la variable *r*, la mesure du rayon. Il constate alors bien sûr que la variable « se simplifie », et qu'il est en mesure de résoudre.

- Page 128

22.	**A'** raisonnement proportionnel		
23.	**A**	24.	**A**
25.	**A**		

- Page 129

26.	**A**	27.	**A**
28.	**A**	29.	**A**

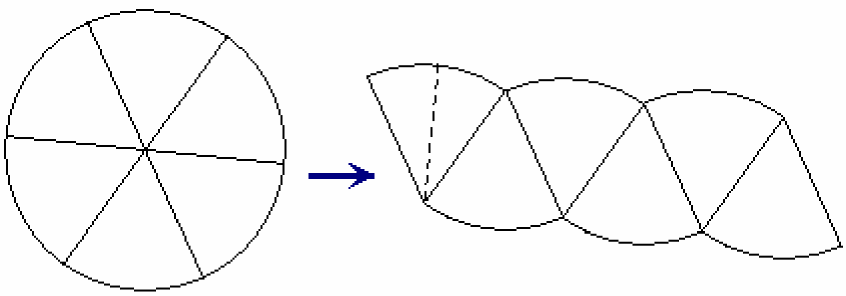
CLUB MATH **A'** algèbre

- Page 130

a)	**A**	b)	**A**

- Page 137

Comment trouver l'aire d'un disque ?
1^er raisonnement
On découpe le disque en secteurs que l'on dispose de façon à former une figure se rapprochant d'un parallélogramme.



En découpant le disque en un plus grand nombre de secteurs, on se rapproche encore davantage de la forme d'un parallélogramme. (Figure).

a) *Si l'on découpe le disque en un très grand nombre de secteurs, quelle figure forme-t-on à la limite ?* **B**

b) *Est-il vrai que la mesure de la base de cette figure correspond alors à la moitié de la circonférence du cercle, soit π r unités ?* **B**

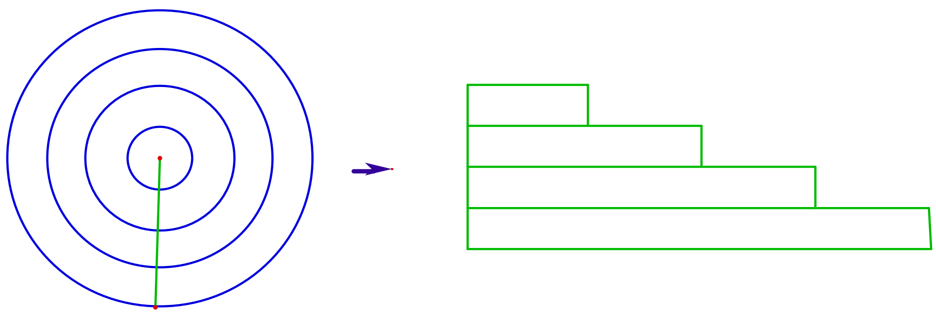
c) *Est-il exact que sa hauteur correspond au rayon du disque ?* **B**

d) *Quelle expression représente alors l'aire du disque ?* **B**

Les auteurs justifient donc la formule de l'aire du cercle par un argument empirico-déductif (voir notre exemple 7, section 3.1). Notre classification porte ici sur les questions, et non sur l'ensemble de la démarche ; celle-ci recevrait la cote H si elle faisait l'objet d'un véritable « problème », mais ce n'est certainement pas le cas ici. On peut d'ailleurs se demander quel est l'intérêt des questions formulées en b) et c) : elles fournissent la réponse ! On y fait passer le « constructivisme » de « philosophie d'enseignement » à « mode pédagogique » !

- Page 138

2^e raisonnement
On découpe le disque en bandes circulaires pour former une figure se rapprochant d'un triangle rectangle.



En découpant le disque en un plus grand nombres de bandes, ...

Etc. Les mêmes remarques s'appliquent que pour les questions de la page 138, et mènent à la classification des questions e), f) et g) suivante :

e) **B** f) **B**
g) **B**

CARREFOUR (discussions de groupe)

i) *Quel est le rapport de l'aire d'un disque de rayon r avec celle d'un carré de côté r ?* **A**

j) *Kim dispose de 24 m de clôture pour construire un enclos pour son chien. Il veut que son chien profite de la plus grande surface possible. Quelle forme doit-il donner à son enclos pour obtenir la plus grande aire possible ?* **$\mathbf{H_G}$**

Problème intéressant et difficile à classer. Est-ce que les élèves compareront l'aire du carré et du cercle, à périmètre égal, et concluront en une forme d'argument empirico-déductif ? Est-ce qu'ils invoqueront l'expérience mentale qui consiste à « étaler » et « repousser » le plus possible une corde fermée, pour finalement former un cercle ? Ils pourraient aussi considérer quelques figures de 24 m de périmètre, dont ils calculeront l'aire, pour conclure en une forme d'induction empirique. Probablement un peu tout ça.

- Page 140

3.	**A**		

- Page 141

4.	**A**	5.	**A**
6.	**A**	7.	**A**
8.	**B**	9.	**A'**$_{\text{pourcentage}}$
10.	**A**	11.	**A**
12.	**A**	13.	**A**

- Page 142

14.	**A**	15.	**A**
16.	**A**	17.	**A**
18. a)	**A**	b)	**B**
19.	**A**	20.	**A**

- Page 143

21.	**A'**$_{\text{problème en mots}}$		

22. **A'**$_{\text{problème en mots}}$

23.	**A**	24.	**A**

25. *Quelle est l'aire du plus grand disque que l'on peut voir sur cet écran d'ordinateur ?* **H**

Figure : un écran d'ordinateur où apparaissent les mesures 22 cm par 28 cm.

Problème analogue au problème 41, p. 112 et au problème 26, p. 110. Les mêmes remarques s'appliquent.

26. a)	**A'**$_{\text{algèbre}}$	b)	**B**

- Page 144

27.	**A**	28.	**A'**$_{\text{algèbre}}$

CLUB MATH **A'**$_{\text{algèbre}}$

- Page 145

a)	**A**	b)	**B**
c)	**A'**$_{\text{algèbre}}$	d)	**A**

- Page 146

CARREFOUR (discussions de groupe)

e)	**A'**$_{\text{raisonnement proportionnel}}$
f)	**B**
g)	**B'**$_{\text{perception}}$

JOGGING

1.	**A**	2.	**A**

- Page 147

3.	**A**	4.	**A**
5.	**A**	6.	**A**
7.	**A**	8.	**A**
9.	**A**	10.	**A**

- Page 148

11.	**A**	12.	**A**
13.	**A**	14.	**A**
15.	**A'**$_{\text{algèbre}}$		

- Page 149

CLUB MATH **B**

- Page 154

1.	**A**		
2. a)	**B**	b)	**A**
3.	**A**		

- Page 155

4.	**A**	5.	**A**
6.	**A**	7.	**A**
8.	**A**	9.	**A**

- Page 156

10.	**A**	11.	**A**
12.	**A**	13.	**B**
14.	**B**		

Itinéraire 9. La probabilité de résultats

Itinéraire 10. Les polygones réguliers

(...)

- Page 210

b) *Qu'entend-on par ligne brisée fermée ? Donne un exemple d'une ligne brisée non fermée.* **B**

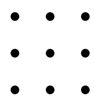
c) *Quelles sont les propriétés que peuvent avoir des polygones ?* **B**

- Page 211

d)	**A**	e)	**A**
f)	**A**	g)	**A**
h)	**A**		

- Page 212

i) *On forme des polygones en traçant une ligne brisée fermée dont les sommets sont des points d'un géoplan de 9 points.*



1) *Quel est le nom du polygone ayant le plus grand nombre de côtés que l'on peut tracer dans ce géoplan ? (Il est à noter que le segment passant par trois points alignés compte pour un seul côté et que l'on exclut les polygones croisés.)* **B**

2) *Quel est le nom du polygone convexe ayant le plus grand nombre de côtés que l'on peut tracer dans ce géoplan ?* **B**

j) *Réponds aux deux questions précédentes en utilisant un géoplan de 16 points.* **B'**$_{\text{essais-erreurs}}$

L'élève fera sans doute plusieurs essais avant de porter un jugement d'une seule venue sur ce qu'il croira être la bonne réponse. Si une telle démarche a quelque chose d'empirique, il ne s'agit cependant pas d'après nous d'un problème de la catégorie C parce que l'empirisme ne mène pas à une induction, c'est-à-dire à une inférence du particulier au général. La même remarque s'applique aux autres problèmes de la page 212.

k)	**B'**$_{\text{essais-erreurs}}$	l)	**B'**$_{\text{essais-erreurs}}$
m)	**B'**$_{\text{essais-erreurs}}$	n)	**B'**$_{\text{essais-erreurs}}$

- Page 213

a)	**A**	b)	**B**

- Page 214

c)	**A**	d)	**A'** variables et fonctions
e)	**A**		

- Page 215

f)	**A**	g)	**A**
h)	**B**		

- Page 216

i)	**B**	j)	**A**
k)	**B**	l)	**B**
m)	**B**		

Les pages 214, 215 et 216 portent sur la somme des mesures des angles intérieurs et extérieurs d'un polygone convexe. Comme s'est souvent le cas, les auteurs imposent leur démarche de justification-validation des résultats, et cette démarche est « découpée » en étapes qui font chacune l'objet d'un exercice. La validation sollicitée chez l'élève est alors de cet ordre : répondre à des questions comme *« est-il vrai que la tortue tourne toujours d'un tour complet (360°) quel que soit le polygone convexe qu'elle parcourt ? »*. Si la démarche dans sa globalité aurait pu faire l'objet d'un problème de la catégorie G ou H, ce n'est pas le cas des exercices auxquels elle donne lieu ici, qui sont tous classés A ou B.

- Page 217

1.	**B**	2.	**B**
3.	**A**	4.	**A**
5.	**A**		

- Page 218

6.		**A**	7.		**A**
8.		**A**	9.		**A**

- Page 219

10.	a)	**M_A**	b)	**M_A**
	c)	**M_A**	d)	**M_A**
11.	a)	**A**	b)	**A**
	c)	**A**	d)	**M**
12.	a)	**A**	b)	**A**
	c)	**A**	d)	**M**

- Page 220

13 et 14 : problèmes d'algèbre à contexte géométrique.

15.		**M**		
16.	a)	**A**	b)	**A**
	c)	**M**		

- Page 221

17. *Les quadrilatères concaves ont une propriété intéressante.*

Figure : quatre quadrilatères concaves dissemblables, avec la mesure des trois angles non rentrants.

a) *Reproduis et remplis le tableau suivant à partir des quadrilatères ci-dessus.* **A**

Quadrilatère	*I*	*II*	*III*	*IV*
m $\angle A$ + m $\angle B$ + m $\angle C$	?	?	?	?
m $\angle ADC$	?	?	?	?

b) *Énonce la propriété observée.* **B**

c) *Justifie cette propriété.* **N**(1)

Le fait que la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère donne 360° n'a été établi que pour les quadrilatères convexes. L'élève doit donc d'abord étendre le résultat aux quadrilatères non convexes, et justifier que la mesure de l'angle rentrant plus la mesure des trois angles $\angle A$, $\angle B$ et $\angle C$ non rentrants donne aussi 360°. Seulement alors peut-il conclure que

$$\text{m } \angle A + \text{m } \angle B + \text{m } \angle C = \text{m } \angle ADC.$$

18. a)	**A’**$_{\text{algèbre}}$	b)	**A’**$_{\text{algèbre}}$
19.	**A’**$_{\text{algèbre}}$		

- Page 222

20, 21 et 22 : problèmes d'algèbre à contexte géométrique.

23.	**M**		

- Page 223

a)	**A**	b)	**B**

- Page 224

c)	**C**	d)	**C**
e)	**B**	f)	**A**
g)	**A**	h)	**B**
i) 1)	**B**	2)	**A**
j)	**A**	k)	**A**

- Page 225

l)	**B’**$_{\text{essais-erreurs}}$		

Voir le problème j), de la page 212.

m)	**A**	n) 1)	**B**

- Page 226

2)	**B**	3)	**B**
4)	**B**	5)	**B**

- Page 227

o)	**A**	p)	**C**

- Page 228

q)	**C**	r) 1)	**B**
2)	**B**	3)	**M**

- Page 229

s)	**A**	t)	**M**
u)	**A**	v)	**M**
w)	**B**	x)	**B**
y)	**M**		

- Page 230

a)	**A**

- Page 232

b)	**B**	c)	**B**
d)	**B**		

- Page 233

e)	**A**	f)	**A**

- Page 234

g)	**M**	h)	**A**
i)	**A**		

JOGGING

1.	**A**	2.	**A**

- Page 235

3.	a)	**A**	b)	**B**
4.		**A**	5.	**A**
6.		**M**	7.	**M**
8.		**A**	9.	**A**
10.		**A**	11.	**A**
12.		**A**	13.	**A**
14.		$\mathbf{M_A}$	15.	$\mathbf{M_A}$
16.		$\mathbf{M_A}$	17.	**A'**$_{\text{algèbre-pourcentage}}$

- Page 236

18.	a)	**M**	b)	**A**
19.		**M**	17.	**M**

- Page 237

1.	**A**	2.	**A**
3.	**A**	4.	**A**
a)	**A'**$_{\text{algèbre}}$	b)	**A'**$_{\text{algèbre}}$
c)	**A'**$_{\text{algèbre}}$		

- Page 238

CARREFOUR (discussions de groupe)

d)	$\mathbf{M_A}$	e)	**A**
f)	**M**		

g) *À partir de deux cercles de même rayon, on trace deux polygones réguliers* (inscrits) *différents. Si l'on compare les périmètres de ces deux polygones, que peut-on dire de celui qui a le plus grand périmètre ?* **H**

Nous évaluons le problème dans le cas où les élèves ont à justifier ce qu'ils avancent, sans quoi il tombe plutôt dans la catégorie B. Du fait que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points, les élèves pourront déduire que l'arc qui relie deux points sur le cercle est plus long que le côté de tout polygone inscrit qui a ces points comme sommets. Les élèves pourront alors appuyer leur argumentation sur l'évidence perceptive que plus un polygone inscrit a de côtés, plus il est « proche » du cercle et plus son périmètre est grand. Certains pourraient aussi argumenter directement à partir de l'inégalité du triangle, en comparant des polygones réguliers à 5 et 10, ou 6 et 12 côtés, par exemple. L'enseignant devrait alors exiger plus, selon nous, et faire valoir qu'un tel argument ne tient pas s'il faut comparer des polygones à 6 et 7 côtés.

JOGGING

1.	**A**	2.	**A**
3.	**A**		

- Page 239

4.	**A**	5.	**A**

6 : raisonnement proportionnel.

7.	**A**

8, 9, 10 et 11 : algèbre et raisonnement proportionnel.

- Page 240

12 à 18 : algèbre et raisonnement proportionnel.

- Page 241

CLUB MATH : algèbre et combinatoire.

a)	**B**	b)	**A**

- Page 242

c)	**A**	d)	**B**
e)	**B**	f)	**A**
g)	**B**		

JOGGING

1. a) **A** b) **A**

	c)	**A**		d)	**A**

- Page 243

2.		**A**	3.		**A**
4.		**A**	5.		**A**
6.	a)	**A**		b)	**A**
	c)	**A**		d)	**B**
7.		**B**	8.		**A**

- Page 244

9.	$\mathbf{A'}_{\text{algèbre}}$	10.	$\mathbf{A'}_{\text{algèbre}}$
11.	$\mathbf{A'}_{\text{algèbre}}$	12.	**B**
13.	$\mathbf{A'}_{\text{algèbre}}$	14.	**A**
15.	**A**		

- Page 245

16.	$\mathbf{M_A}$	17.	**A**
18.	**A**	19.	$\mathbf{M_A}$
20.	**M**	21	**A**

- Page 246

22.	**A**	23.	$\mathbf{A'}_{\text{algèbre}}$
24.	$\mathbf{A'}_{\text{algèbre}}$		

25. Il s'agit de notre exemple 26, section 3.2.2. **H**

26. **M**

27. Il s'agit de notre exemple 27, section 3.2.2. **H**

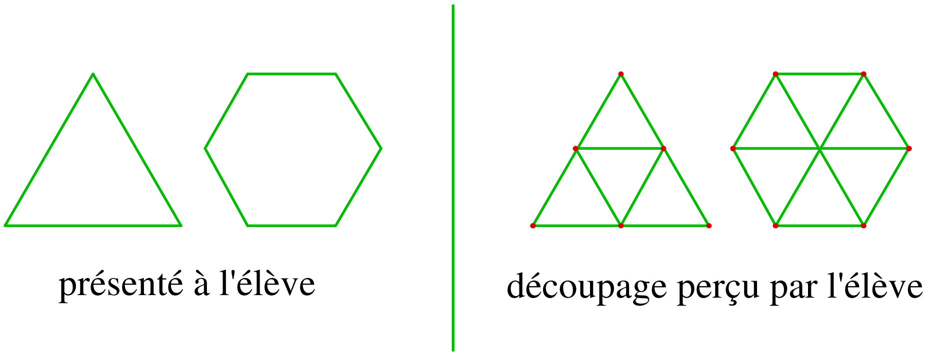
- Page 247

28.		**M**	29.		$\mathbf{A'}_{\text{proportions}}$
30.	a)	**B**		b)	**B**
	c)	**B**			

Secondaire 2, tome 2

CLUB MATH
Un triangle équilatéral a le même périmètre qu'un hexagone régulier. Quel est le rapport aire du triangle / aire de l'hexagone ?

H



Nous assignons la cote H en tenant compte de ce que le guide d'enseignement suggère d'attendre comme justifications. L'enseignant exigera de l'élève qu'il justifie que la mesure du côté du triangle est double de celle du côté de l'hexagone ; ce que l'élève peut bien sûr déduire de l'égalité des périmètres. Le découpage à droite, ainsi que la congruence de tous les petits triangles du découpage, apparaîtront alors à l'élève comme une évidence perceptive, et il ne verra certainement pas la pertinence de « montrer » cette congruence. L'enseignant aura d'autant plus de difficulté à exiger de l'élève un argument plus formel que cette congruence s'impose d'elle-même à la perception. Par ailleurs, un argument plus formel **est à la portée** de l'élève : les petits triangles dans le grand triangle sont isocèles et donc iso-angles. Comme le troisième angle mesure 60°, les deux autres mesurent (180–60)/2 = 60°, et les petits triangles sont équilatéraux ; etc. Un enseignant exigeant pourrait donc faire « grimper la cote » du problème à N(3) ou N(4) en exigeant une telle argumentation. Ce problème reviendra effectivement en 4^e^ secondaire (436, tome 2, p. 90 n°21), et les auteurs demanderont alors une justification plus rigoureuse à l'élève.

- Page 254

1.		**A**		
2.	a)	$\mathbf{M_A}$	b)	$\mathbf{M_A}$
3.	a)	**A**	b)	**A**

4.		**A**			

- Page 255

5.		**A**			
6.	a)	**A**		b)	**B**
7.	a)	**A**		b)	**B**
8.	a)	**B**		b)	**A**
9.		**A**	10.		**B**
12.	a)	**A**		b)	$\mathbf{M_A}$
13.		**A**	14.		**A**

- Page 256

15.		**A**	16.		$\mathbf{M_A}$
17.		**A**			
18.	a)	$\mathbf{M_A}$		b)	**A**

Itinéraire 11. La probabilité d'événements

Troisième secondaire

Tome 1

Itinéraire 1. Le sens spatial

Itinéraire 2. Les relations

Itinéraire 3. La relation de Pythagore

(...)

- Page 176

a) **A** b) : variables et fonctions

Secondaire 2, tome 2

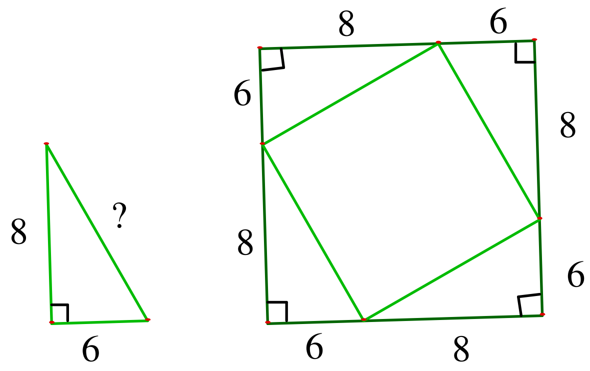
- Page 177

c) :	variables et fonctions	d)	**A'**$_{\text{algèbre}}$
e) :	variables et fonctions	f)	**B**
g) :	variables et fonctions	h)	**A**

- Page 178

a)	**A**	b)	**B**
c)	**A**	d)	**B**
e)	**B**	f)	**A**
g)	**B**		

h) *Les cathètes*[36] *d'un triangle rectangle mesurent 6 et 8 unités. Trouvez la mesure de l'hypoténuse à partir de la construction proposée.* **H**



On cherche ici à faire retrouver à l'élève la relation de Pythagore par l'argument classique, à partir du calcul de l'aire du grand carré. Le fait que celui-ci soit constitué de quatre triangles rectangles congrus et d'un carré sera vécu par l'élève comme une évidence perceptive.

- Page 179

i)	**B**	j)	**B**

[36] Les *cathètes* sont les deux petits côtés du triangle rectangle.

- Page 180

k) **B** l) : algèbre
m) : algèbre

- Page 181

n) 1) **A** 2) **A**
3) **A'**$_{\text{algèbre}}$

o) *Un triangle qui vérifie la relation $c^2 = a^2 + b^2$ est-il nécessairement rectangle ? Cela revient à se poser la question qui suit. Est-il possible de construire deux triangles rectangles ayant les mêmes cathètes et qui ne sont pas superposables ?* **B**

Notons qu'immédiatement en dessous apparaît en encadré :

Un triangle dont les mesures vérifient la relation $c^2 = a^2 + b^2$ est un triangle rectangle

Nous déplorons ici le laxisme dans l'élaboration et la rédaction du problème o). Pourquoi l'élève comprendrait-il qu'il y a équivalence entre les deux questions ? Verra-t-il seulement qu'il y a un rapport ? Quand on sait à quel point les élèves ont de la difficulté à distinguer une implication de sa réciproque, on se serait attendu à ce que la réciproque du théorème de Pythagore soit amenée avec plus de circonspection !

p) **A**

- Page 182

a) **A** b) **A**

- Page 183

a) **A** b) **A**

- Page 184

1. **A** 2. **A'**$_{\text{algèbre}}$

- Page 185

3.	**A'**$_{\text{algèbre}}$	4.	**A**
5.	**A**	6.	**A'**$_{\text{algèbre}}$

- Page 186

7.	**A**	8.	**A'**$_{\text{algèbre}}$
9.	**A**	10.	**B**
11.	**A**		

- Page 187

12. **A**

13, 14, 15 et 16 : problèmes d'algèbre.

17.	**A**	18.	$\mathbf{M_A}$

19 et 20 : problèmes d'algèbre.

- Page 188

21.	$\mathbf{M_A}$	22.	$\mathbf{M_A}$
23.	$\mathbf{M_A}$	24.	$\mathbf{M_A}$

- Page 189

25.	**A**	26.	**M'**$_{\text{spatialité}}$
27.	**A**	28.	**A**
28.	$\mathbf{N_M}$(1)		

- Page 190

30.	**A**	31.	**B**
32.	**A'**$_{\text{proportions}}$		

33. *Deux triangles isocèles ont des côtés congrus mesurant 5 cm. L'un d'eux a une base qui mesure 6 cm et l'autre une base qui mesure 8 cm. Lequel a la plus grande aire ? Justifie chaque étape de ta démarche par un énoncé géométrique approprié.* **N**(2)

L'élève a vu que l'axe de symétrie d'un triangle isocèle supporte une médiane et une hauteur. Il en déduit que la hauteur abaissée sur la base de chaque triangle isocèle le sépare en deux triangles rectangles congrus dont les bases sont deux fois moins longues que les bases du triangle isocèle. Le théorème de Pythagore lui permet alors de calculer les mesures des hauteurs, puis les valeurs des aires.

34. **A**

- Page 191

35.	**A**	36.	**A**
37.	**A**		

- Page 192

38.	**A'**$_{\text{spatialité}}$	39.	**A**
40.	**N**(1)	41.	**A**
42	**A**	43.	**A**

- Page 193

44. a)	**H**	b)	**A**
45.	**A**	46.	**M'**$_{\text{spatialité}}$
47.	**M'**$_{\text{spatialité}}$		

- Page 194

48.	**A**	49.	$\mathbf{M_A}$
50.	**N**(2)	51.	**N**(2)
52.	**A'**$_{\text{physique}}$	53.	**B**

- Page 194

54. *Cette pyramide à base carrée est régulière (triangles latéraux, isocèles et congrus). Trouve la hauteur h de cette pyramide d'après les mesures données. Justifie les étapes de ta démarche.* **H'**$_{\text{spatialité}}$

Figure : une pyramide régulière droite, à base carrée. On donne la mesure du côté de la base (12 cm) et d'un des côtés des faces congrues (15 cm).

L'élève appuiera son raisonnement sur l'évidence perceptive que le sommet de la pyramide se projette orthogonalement au centre de la base carrée ; ce centre constituant, avec le sommet et l'un des coins de la base, les sommets d'un triangle rectangle. Le petit coté de ce triangle est la demie diagonale de la base carrée, dont l'élève peut calculer la mesure avec Pythagore. Il pourra ensuite réappliquer Pythagore pour calculer la mesure de la hauteur. Les deux problèmes suivants sollicitent le même type d'arguments :

55. **H'**$_{\text{spatialité}}$ 56. **H'**$_{\text{spatialité}}$

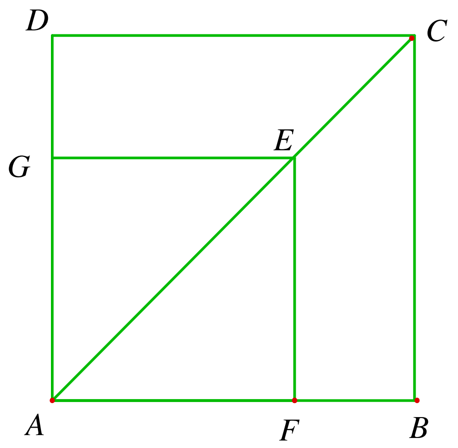
- Page 212

PROBLÈMES et STRATÉGIES
Le plus court chemin
Une fourmi est en A sur une boîte de conserve de 20 cm de diamètre et de 20 cm de hauteur. Elle veut se rendre en B. Comme elle s'est blessée à une patte, elle veut prendre le plus court chemin. Quelle distance minimale doit-elle parcourir ? **H'**$_{\text{spatialité}}$

Figure : une fourmi, sur le bord du couvercle d'une boîte de conserve, en A. Le point B, diamétralement opposé à A, est sur l'autre couvercle.

La rubrique *« Problèmes et Stratégies »* a pour devise (en encadré) : *« Stratégie : Faire différentes tentatives ».* On se demande quelles tentatives peut faire l'élève pour résoudre *« Le plus court chemin »*, dans l'impossibilité qu'il est de calculer la longueur de tout chemin autre que celui qui fournit la solution.

La moitié de l'aire
On trace un carré de 8 unités de côté. L'une de ses diagonales est $\overline{AC}$ *. Ensuite, on trace un autre carré intérieur AFEG dont l'aire est la moitié de celle du carré original. Quelle est la longueur de la diagonale* $\overline{AE}$ *?*
N'(1)$_{\text{conception}}$



Les diagonales du cube
Un cube présente deux sortes de diagonales dont le rapport est constant. Quelle est la valeur de ce rapport ? Utilise les données numériques de ton choix **N'**(1)$_{\text{spatialité}}$

Figure : un cube, avec une grande et une petite (la diagonale d'une face) diagonale tracée

- Page 214

À LA MENSA **M**$_{\mathbf{A}}$

PROUVE-LE DONC !
Montre que la médiane AM du triangle ABC partage ce triangle en deux triangles de même aire. **M**

- Page 216

1.	**B**	2.	**B**
3.	**M**	4.	**A**

- Page 217

5.	**A**	6.	**N'**(1)$_{\text{spatialité}}$
7.	**A**		

- Page 218

8.	**A**	9 : (théorie des) nombres	

10.	**M**	11.	**M**
12.	**A**	13, 14 et 15 :	(théorie des) nombres
16.	**M**		

Itinéraire 4. Le calcul algébrique

Tome 2

Itinéraire 5. Aire et volumes des solides
Itinéraire 6. Les relations linéaires

Itinéraire 7. La composition de transformations

Comme pour l'itinéraire 13 de première secondaire (*Transformations des figures*) et l'itinéraire 3 (*Les homothéties*) de deuxième secondaire, nous passerons rapidement sur cet itinéraire. La plupart des problèmes consistent à appliquer la règle d'une transformation, où à déterminer cette règle à partir d'une figure et son image. Nous dénombrons ainsi **134** exercices de **catégorie A** et **96** exercices de **catégorie B**. Signalons de plus les quelques exercices suivants.

- Page 175

  11. *Une transformation qui associe toute droite à une droite parallèle respecte-t-elle nécessairement la perpendicularité dans les figures ?* **M**

- Page 191

  b) *Est-on assuré que le résultat de la composition de deux isométries est une isométrie ? Justifie ta réponse.* **M'**$_{\text{conception-définition}}$

- Page 199

  18. *Pourquoi une réflexion est-elle aussi une symétrie glissée ?* **B'**$_{\text{définition}}$

- Page 203

  20. *Est-il vrai que toute isométrie est finalement une composée d'un nombre fini de réflexions ? Justifie ta réponse.* **H**

Dans le problème précédent (n°19, p.199, subdivisé en 10 exercices de la catégorie B que nous avons comptabilisés dans les 96 mentionnés plus haut), l'élève a considéré (empiriquement, à partir d'exemples) toutes les compositions de deux isométries possibles. Dix des seize possibilités sont illustrées dans le livre, de façon suffisamment explicite pour que l'élève puisse « lire » — en un jugement d'une seule venue — le résultat de la composition sur la figure. L'exercice demande à l'élève de statuer sur le résultat de la composition, mais pas de justifier ce résultat. Il n'est donc pas question pour l'élève d'établir formellement (sur quelle base pourrait-il le faire, d'ailleurs ?) que, par exemple, la composition de deux réflexions selon deux axes parallèles donne une translation. L'élève en a simplement pris acte dans l'exercice 19.

Le guide d'enseignement suggère la réponse suivante au n°20 : *« Oui parce qu'avec un certain nombre de réflexions, on peut effectuer une rotation, une réflexion ou une translation ».* Comme pour beaucoup de ce qui touche à la géométrie des transformations, la rigueur et la circonspection font défaut ici, selon nous. Les auteurs passent d'une implication à sa réciproque sans le moindre discernement. L'élève a constaté empiriquement (ou appréhendé intuitivement) que la composition de deux réflexions selon deux axes sécants donne une rotation. Pourquoi serait-il autorisé à conclure, sans autre forme de procès, que **toute** rotation s'écrit comme le produit de deux réflexions ? C'est pourtant ce sur quoi s'appuient les auteurs pour formuler leur réponse. Aucun exercice ne porte, de près ou de loin, sur cette implication réciproque. L'élève a travaillé la composition de deux réflexions selon deux axes sécants à partir d'**un exemple, et un seul**. Affirmer que l'élève a perçu le caractère générique de cet exemple, c'est déjà beaucoup (trop) s'avancer ; et l'on s'attend en plus à ce qu'il ait pu conclure sur la réciproque de l'implication ?!!! Il n'est probablement même pas capable de la formuler ! Comment s'étonner, dès lors, que les élèves aient de la difficulté à distinguer équivalence et implication.

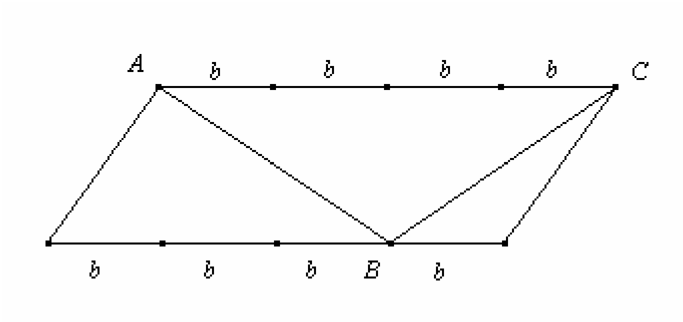
- Page 213

13. *En quoi est changé un triangle transformé par une homothétie dont le rapport tend vers 0 ?* **B'**$_{\text{conception-définition}}$

- Page 222

  PROUVE-LE DONC !

  - *On a partagé les bases d'un parallélogramme en 4 parties congrues. La hauteur issue de A rencontre la base au premier point de division. On joint les points A et C au point B. Lequel des segments AB ou BC est le plus long ? Prouve ta réponse.* **M'**$_{\text{perception}}$



Il s'agit d'une application directe du théorème de Pythagore. Par ailleurs, la construction crée l'illusion d'optique que le segment *AB* est plus long que le segment *BC*.

- *Démontre que* $S \circ t \circ r \circ sg$ (S pour symétrie*,* t pour translation*,* r pour rotation*,* sg pour symétrie glissée) *ne peut être autre chose qu'une translation ou une rotation.* **H**

Comme dans l'exercice 20, page 203, l'élève doit s'appuyer sur ce qu'il a vu des compositions d'isométries, et considérer les possibilités successives pour $r \circ sg$, puis $t \circ (r \circ sg)$, et finalement $S \circ (t \circ r \circ sg)$. Comme ces compositions ont été abordées sur une base empirique — bien mince : un constat à partir d'un seul exemple ! — nous assignons la cote H.

Itinéraire 8. Analyse de données statistiques

RÉFLEXIONS MATHÉMATIQUES

Quatrième secondaire programme 436

Tome 1

Réflexion 1. Les fonctions
Réflexion 2. Le calcul algébrique
Réflexion 3. La factorisation
Réflexion 4. Les fonctions polynomiales

Tome 2

Réflexion 5. Les isométries

Cette « réflexion » débute par un exposé sur les *« différents types d'énoncés »* : conditionnelle et biconditionnelle, implication et équivalence logique, définitions, propriétés. Le texte suivant fait partie de l'introduction : *« Au second cycle du secondaire, on s'attardera davantage aux **propriétés des figures** et aux **relations** qu'on peut établir entre elles. En plus de les observer, on tentera de **démontrer** ces propriétés et ces relations. Au premier cycle, la géométrie était descriptive ; elle devient maintenant de plus en plus **déductive** ».* Parmi les exercices qui portent sur l'implication et l'équivalence logique, nous ne retenons que ceux à contenu géométrique.

- Page 4

3. *Détermine si la conditionnelle donnée est une implication logique.*
   a) *Si un angle mesure 150°, alors il est obtus.*
   Mlogique propositionnelle
   b) *Si un quadrilatère a un angle droit, alors c'est un rectangle.*
   Mlogique propositionnelle
   c) *Si un polygone a trois côtés, alors il a trois angles.*
   Mlogique propositionnelle
   d) **M**logique prop. e) **M**logique prop.

- Page 5

4. *Donne la réciproque de chacune des conditionnelles de l'exercice précédent et indique si elle est une implication logique.*

   M'$_{\text{logique propositionnelle}}$

5. *En te référant à l'exercice 1, détermine les cas pour lesquels la conditionnelle et sa réciproque peuvent constituer une équivalence logique.*

   M'$_{\text{logique propositionnelle}}$

7.	**M**	8.	**M**
9.	**M**	10.	**M**

- Page 8

1.	a)	**B**	b)	**M'**$_{\text{définition}}$

- Page 9

2.	a)	**B**	b)	**M'**$_{\text{définition}}$

- Page 10

3.	a)	**B**	b)	**M'**$_{\text{définition}}$

- Page 11

4.	a)	**M'**$_{\text{définition}}$	b)	**M'**$_{\text{définition}}$
5.		**B**	6.	**A'**$_{\text{définition}}$
7.		**A'**$_{\text{définition}}$	7.	**M**$_{\mathbf{B}}$

- Page 12

9.	**M'**$_{\text{définition}}$	10.	**M**$_{\mathbf{B}}$
11.	**M'**$_{\text{définition}}$	12.	**A'**$_{\text{définition}}$

- Page 14

1.	**B**	2.	**B**

3.	**B**	4.	**B**
5.	**B**	6.	**B**

- Page 15

7.	**B**	8.	**B**
9.	**B**	10.	$\mathbf{M_B}$

INVESTISSEMENT

1. $\mathbf{M_B}$

- Page 16

2.	**B**	3.	**B**
4.	**B**	5.	$\mathbf{M_B}$

- Page 17

6.	**B**	7.	$\mathbf{A'}_{\text{définition}}$

- Page 20

c)	**B**	d)	**A**

- Page 21

a)	**B**	b)	**A**

- Page 23

1.	a)	**B**	b)	**B**
2.	a)	**B**	b)	**B**
	c)	**B**		

- Page 24

d)	**B**	e)	**B**
f)	**B**	g)	**B**
h)	**B**		

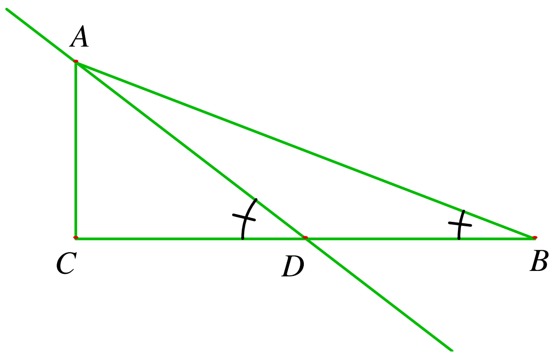
- Page 25

3.	a)	**B**	b)	**B**
	c)	**B**		

- Page 26

4.	a)	**B**	b)	**B**
5.		**B**	6.	**B**
7.	a)	**B**	b)	**B**
8.	a)	**B**	b)	**B**

9. *Sur papier ou à l'aide d'un logiciel approprié, réalise quelques constructions et vérifie si la conjecture de Mathias est sensée. « Dans le triangle ABC, la médiane issue de A détermine sur le côté opposé un angle ADC qui est le double de l'angle B ».* **C**



- Page 27

10.		**C**		
11.	a)	**B**	b)	**C**
12.	a)	**B**	b)	**C**
13.	a)	**B**	b)	**C**
	c)	**C**		

FORUM
a) **B**

- Page 28

a)	**B**	b)	**B**
c)	**A**	d)	**A**
e)	**B**	f)	**B**

g) *On peut démontrer cette conjecture* (les angles opposés par le sommet sont congrus). *Complète la preuve suivante, qui en fait un théorème.* **B**

La preuve du théorème (les angles opposés par le sommet sont congrus) suit, avec quelques mots cachés que l'élève doit trouver (d'où la cote B). Outre le fait que cette preuve soit imposée à l'élève, qui n'a pas même essayé de l'établir par lui-même, plus troublante encore est la nature même de celle-ci. Nous y reviendrons au chapitre 5, dans la section 5.2.4.

- Page 29

h)	**A**	i)	**B**
j)	**B**	k)	**B**

- Page 30

l) **B**

L'élève doit trouver les mots cachés dans la preuve qu'une sécante à deux droites parallèles détermine des angles alternes-internes et correspondants congrus. La preuve proposée consiste à amener une des droites parallèles sur l'autre par une translation. Les mêmes remarques que pour le problème g) de la page 28 s'appliquent.

- Page 31

m)	**B**	n)	**B**

Mêmes remarques pour n) que pour les problèmes l), p. 30 et g), p. 28.

- Page 32

1.	$\mathbf{M_A}$	2.	$\mathbf{M_A}$
3.	$\mathbf{M_A}$	4.	$\mathbf{M_A}$
5.	**B**	6.	**M**

- Page 33

7. a)	$\mathbf{M_B}$	b)	$\mathbf{N_M}(1)$
8.	$\mathbf{M_B}$	9.	$\mathbf{M_B}$
10.	$\mathbf{M'}_{\text{raisonnement proportionnel}}$		

- Page 34

11.	**B**	12.	**B**

- Page 35

FORUM

a)	**M**	b)	**M**

- Page 36

c)	**B**	d)	$\mathbf{M_B}$
e)	**A**		

- Page 37

f)	**B**	g)	**B**

- Page 38

1.	**M**	2.	**M**
3.	**M**	4.	**M**

FORUM

a)	**A**	b)	**B**

- Page 40

5. c)	$\mathbf{M'}_{\text{définition}}$	d)	$\mathbf{M'}_{\text{définition}}$

e) $\mathbf{M'}_{\text{définition}}$

6. **A**

- Page 41

8. **B**

- Page 42

11.	**A**	12.	**B**
13.	$\mathbf{M_B}$	14.	$\mathbf{M_B}$

- Page 43

15.	$\mathbf{N_M}(1)$	16.	**M**
17.	**B**	18.	**M**

- Page 44

19.	$\mathbf{M_B'}_{\text{algèbre}}$	20.	$\mathbf{M_B'}_{\text{algèbre}}$
21.	**B**		
22. a)	**B**	b)	**M**

- Page 45

24.	**M**	25.	**M**
26. a)	$\mathbf{N_M}(1)$	b)	**B**

- Page 46

27.	**M**	28.	$\mathbf{N_M}(1)$

- Page 47

1.	**B**	2.	$\mathbf{M_B}$
3.	$\mathbf{M_B}$	4.	$\mathbf{M_B}$
5.	$\mathbf{M_B}$		

- Page 48

a)	**B**	b)	**A**

- Page 50

c)	**B**

IDENTIFICATION DES ISOMÉTRIES

a)	**B**

- Page 51

b)	**B**

- Page 52

1.	**B**	2.	**B**
3.	**B**		

- Page 53

4.	**B**	5.	**B**
6.	**B**	7.	**B**
8.	**B**		

- Page 54

9.	a)	**B**	b)	**M**
	c)	**B**	d)	**M**
	e)	**B**	f)	**M**
	g)	**B**	h)	**B**
	i)	**M**		
10.	a)	**A**	b)	**A**
	c)	**B**		

FORUM

a)	**M**	b)	**M**

c) *L'identité est la transformation qui associe chaque point à lui-même. À quel type d'isométrie appartient l'identité ? Justifiez votre réponse.*
M'$_{\text{conception-définition}}$

M (plutôt que B) dans la mesure où l'élève doit justifier sa réponse. L'élève est par ailleurs déstabilisé par rapport à ses conceptions et aux définitions de chaque isométrie, compte tenu du caractère particulier de l'identité.

d) **B'**$_{\text{conception-définition}}$

- Page 55

a) **B** b) **A'**$_{\text{définition}}$
c) **A'**$_{\text{définition}}$

- Page 56

d) **B** e) **A'**$_{\text{définition}}$
f) **A'**$_{\text{définition}}$

- Page 57

g) **B** h) **A'**$_{\text{définition}}$
i) **A'**$_{\text{définition}}$

- Page 58

j) **B** k) **A'**$_{\text{définition}}$

- Page 60

l) **M** m) **B**
n) **B**

o) *Voici la table de composition de toutes les isométries. Reproduis et complète cette table.* (Dans la table, S désigne une symétrie, *t* une translation, *r* une rotation et *sg* une symétrie glissée). **B**

o	*t*	*r*	s	*sg*
t				
r				
s				
sg				

Cette table a déjà été complétée en secondaire 3 (tome 2, p. 199, n°19). Dix des seize possibilités étaient alors illustrées d'exemples, à partir desquels l'élève devait statuer (en un jugement purement perceptif) sur le résultat de la composition. Ici, l'élève doit refaire le travail par lui-même.

- Page 61

1. *Dans chaque cas, deux figures isométriques sont présentées. Identifie et décris l'isométrie qui applique la figure 1 sur la figure 2.*

a)	**B**	b)	**B**
c)	**B**	d)	**B**
e)	**B**	f)	**B**
g)	**B**	h)	**B**

- Page 62

2. *On donne une figure et son image par une isométrie. Identifie l'isométrie en traçant tous les éléments qui la définissent.*

a)	**B**	b)	**B**
c)	**B**	d)	**B**
e)	**B**	f)	**B**

- Page 63

3. *On donne deux figures isométriques. Identifie l'isométrie qui les associe en traçant tous les éléments qui la définissent.*

a)	**B**	b)	**B**
c)	**B**	d)	**B**
e)	**B**	f)	**B**

Dans ces trois problèmes des pages 61, 62 et 63, l'élève identifie l'isométrie d'après l'illustration d'une figure et de son image, en un jugement d'une seule venue. Nous avons ensuite hésité pour la partie de la question qui porte sur la description des éléments qui définissent l'isométrie. L'élève fait-il une déduction locale, pour déterminer ces éléments ? Dans la mesure où il vient tout juste de voir la procédure détaillée, qui permet de déterminer les éléments définissant une isométrie donnée, nous pensons que l'élève applique directement cette procédure, une fois le type d'isométrie identifié. La description des éléments définissants devient donc une tâche de type A, et le problème reçoit globalement la cote B, plutôt que M.

- Page 64

4.		**A**	5.		**B**
6.	a)	**B**		b)	**B**
	c)	**B**		d)	**B**

- Page 65

9. *On a composé deux isométries. Identifie et décris précisément l'isométrie équivalente à cette composée en traçant les éléments nécessaires.*

a)	**B**	b)	**B**
c)	**B**	d)	**B**
e)	**B**	f)	**B**

- Page 66

10.	a)	**B**		b)	**B**
	c)	**B**		d)	**B**

- Page 67

11.	a)	**B**		b)	**B**
12.		**A**	13.		**B**

- Page 68

14.	a)	**B**	b)	**B**
16.		**B**	17.	**M**

FORUM

a) *Tranh prétend qu'une translation peut toujours être remplacée par la composition de deux réflexions. Qu'en pensez-vous ?* **H**

C'est le problème dont nous déplorions l'absence en secondaire 3 : voir le commentaire qui suit le problème n°20, p. 203, sec. 3, tome 2. Ici, on fait prendre conscience à l'élève que les propositions

- la composée de deux réflexions selon deux axes parallèles donne une translation ;
- toute translation est la composée de deux réflexions ;

sont deux propositions distinctes, a priori indépendantes. De deux choses l'une : ou bien le problème 20, p. 203 (sec. 3) aurait dû apparaître plus tard (après le présent *« Forum »*), ou bien ce *« Forum »* aurait dû apparaître plus tôt. Nous sommes d'avis qu'il aurait pu être tenu en secondaire 3.

Du point de vue du formalisme, le traitement de la composition des isométries, dans la présente *« Réflexion 5 »* (sec. 4) n'a pratiquement pas progressé par rapport au traitement dans l'*« itinéraire 7 »* (*La composition des transformations,* sec. 3). L'effet d'une composition est encore et toujours admis comme une évidence perceptive. Pour établir cet effet formellement, il faudrait dans un premier temps montrer qu'une isométrie est complètement déterminée par l'image de trois points non colinéaires. Ce résultat n'a pas été abordé jusqu'à maintenant — il ne le sera jamais, de fait — et n'a pas même été énoncé.

Il est vrai que sa démonstration est épineuse. Mais qu'à cela ne tienne : admettons-le sur une base intuitive ou axiomatique, ou donnons-en une justification semi-formelle. Sur la prémisse de ce résultat, démontrer formellement que « la composée de deux réflexions selon deux axes parallèles donne une translation » est à la portée de l'élève. Mieux encore, l'argument met en évidence la puissance du raisonnement déductif : si l'on peut conclure en connaissant l'effet d'une isométrie sur un triplet quelconque de points non colinéaires, qu'il suffise de choisir trois points dont l'image est particulièrement facile à trouver ; trois points sur les deux axes de réflexions, par exemple, dans le cas qui nous occupe. La justification de chaque composition (les seize du tableau des compositions possibles : voir problème o) page 60) peut alors donner lieu à une série de véritables raisonnements déductifs, riches d'enseignement, et à la portée de l'élève de 3^{e} ou 4^{e} secondaire. Dommage qu'on soit passé à côté.

Quoiqu'il en soit, l'énoncé du présent « forum » en 4^{e} secondaire, constitue certainement un bon pas vers l'édification des bases formelles de la composition des isométries. Nous lui assignons la cote H parce que

- d'une part, le raisonnement qui permet à l'élève de trouver les axes de réflexions en fonction du vecteur de translation est un véritable raisonnement déductif ;
- d'autre part, l'égalité entre la composition des deux réflexions et la translation reste informelle — empirico-perceptive en fait, puisque l'élève vérifie cette égalité sur quelques points — tant qu'on n'a pas invoqué le fait central qu'une isométrie est complètement déterminée par son effet sur trois points non colinéaires.

b) *Il ajoute qu'une rotation est aussi le résultat de la composition de deux réflexions. Qu'en pensez-vous ?* **H**

c) *Pourrait-on en déduire qu'une symétrie glissée peut toujours être remplacée par la composition de trois réflexions ? Expliquez.* **M**

- Page 69

a) 1) **B** 2) **B**

- Page 70

b) 1) **B** 2) **B**
3) **B**

- Page 71

c)	1)	**A**	2)	**B**

- Page 72

d)		**B**

- Page 73

e)		**B**	f)	**B**
g)		**B**		

- Page 75

1.		**B**	2.	**B**
3.	a)	**B**	b)	**B**
4.		$\mathbf{M_B}$	5.	**B**
6.		**B**		

- Page 76

7.	a)	**B**	b)	**B**
	c)	**B**	d)	**B**
	e)	**B**	f)	**B**

- Page 77

8.		**B**		
9.	a)	**A**	b)	**M**
10.		**B**	11.	**B**

- Page 78

12.		**B**		
13.	a)	**M**	b)	**B**

- Page 79

15.	a)	**B**	b)	**B**
16.	a)	**B**	b)	**M**
17.		**M**		

FORUM

a)	**M**	b)	**M**
c)	**M**		

- Page 80

a)	**M**	b)	**B**
c)	**M**		

- Page 81

1. *Complète la démonstration de l'énoncé suivant.* **B**

Suit la démonstration (appuyée d'une figure) que les angles opposés d'un parallélogramme sont congrus. Une diagonale est tracée, et on montre la congruence des deux triangles ainsi formés. Certains mots cachés doivent être trouvés par l'élève ; d'où la cote. Les trois questions qui suivent sont du même style. Mais l'importance de la partie cachée va en augmentant. Dans le problème 3, l'élève doit vraiment trouver quel résultat appliquer, et non simplement suppléer un mot manquant.

2. **B**

- Page 82

3.	a)	**M**	b)	**M**

- Page 83

4.	a)	**M**	b)	$\mathbf{M_B}$
	c)	$\mathbf{M_B}$		
5.	a)	**M**	b)	**M**
	c)	$\mathbf{M_B}$	d)	$\mathbf{M_B}$

6.	a)	$\mathbf{M_B}$	b)	**M**
	c)	$\mathbf{M_B}$	d)	$\mathbf{M_B}$
7.	a)	$\mathbf{M_B}$	b)	$\mathbf{M_B}$
	c)	**M**	d)	$\mathbf{M_B}$
	e)	**M**	f)	$\mathbf{M_B}$
	g)	$\mathbf{M_B}$	h)	**M**

- Page 84

8. a) **M** b) **M**

9. *On joint les deux extrémités de la base d'un triangle isocèle au milieu des côtés congrus. Démontre que ces deux segments sont congrus.* **N**(1)

Après tout ce travail sur les critères de congruence des triangles, enfin un problème où l'élève **doit trouver par lui-même** quels sont les triangles dont la congruence doit être établie ! Enfin un problème qui sollicite une véritable **séquence** déductive (séquence bien courte, il est vrai, mais séquence tout de même). Ce sera également le cas du problème suivant.

10. *Un cerf-volant est un quadrilatère qui a deux paires de côtés consécutifs congrus et des côtés opposés non congrus. Démontre qu'un cerf-volant a deux angles opposés congrus.* **N**(1)

FORUM

a) **M** b) **M**

- Page 86

7. **B** 8. **B**

- Page 87

9. **B** 10. **B**

- Page 88

11.	**M**	12.	**C**
13.	**C**	14.	**M**

15.	a)	**M**	b)	**M**
	c)	**M**	d)	**M**

- Page 89

16.	a)	**M**	b)	**M**
	c)	**M**	d)	**M**
	e)	**M**		
17.	a)	**M**	b)	**M**
	c)	**M**	d)	**M**
	e)	**M**		
18.	a)	**M**	b)	**M**
	c)	**M**		

- Page 90

19.	a)	**M**	b)	**M**
20.		**N**(1)		

21. Ce problème est analogue au problème du *CLUB MATH*, présenté en 2^{e} secondaire (tome 2, p. 247), sauf que la congruence entre les quatre petits triangles n'est à montrer que dans la partie b). La cote est donc N(2) pour a) et M pour b), qu'on déduit bien sûr de a).

	a)	**N**(2)	b)	**M**
	c)	**B**		
22.		**M**		

- Page 91

1.	a)	**M**	b)	**M**
	c)	**M**		
2.		**M**		
3.	a)	**B**	b)	**M**
4.		**M**		

Réflexion 6. Les systèmes d'équations à deux variables
Réflexion 7. La géométrie analytique
Réflexion 8. L'analyse de données statistiques

Réflexion 9. Les figures semblables

Nous passons rapidement sur les deux premiers sujets : *« Les similitudes »* et *« Propriétés des figures semblables »*. Les problèmes tournent tous autour d'applications directes. Nous dénombrons ainsi **48** exercices de la **catégorie A** et **44** exercices de la **catégorie B**. Nous relevons également le forum suivant.

- Page 377

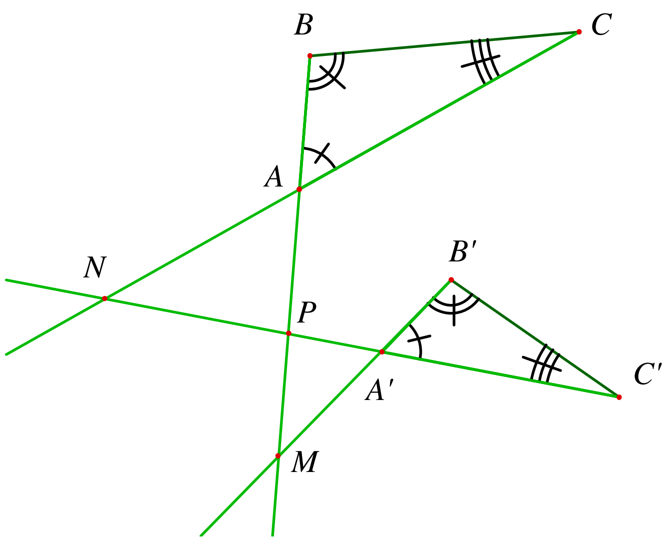
FORUM
Voici deux figures semblables. Leurs angles homologues sont congrus.

a) *Démontrez que si l'on prolonge deux paires de côtés homologues, on forme des angles M et N congrus.*

N(1)

b) *Qu'en est-il si les côtés homologues sont proportionnels ?*

M



Sujet 3 : LA SIMILITUDE DES TRIANGLES

- Page 392

a)	**B**	b)	**B**
c)	**B**	d)	**B**
e)	**M**	f)	**M**

- Page 393

  a) *Complète la démonstration de la première condition minimale de similitude de deux triangles.* **B**

  Suit l'énoncé et la preuve que deux triangles qui ont deux angles congrus sont semblables. Certains mots sont cachés, et l'élève doit les trouver. Les quatre exercices suivants sont du même type.

- Page 394

  b) **B**

- Page 395

  c) **B**

- Page 396

  d) **B**

- Page 397

e)	**B**	f)	**A**
g)	**B**		

- Page 398

  h) **B**

- Page 399

  i) **B**

- Page 400

1.	$\mathbf{M_B}$	2.	$\mathbf{M_B}$
3.	$\mathbf{M_B}$	4.	$\mathbf{M_B}$

- Page 401

5.	a)	**B**	b)	**B**
	c)	**B**	d)	**B**
6.	a)	**B**	b)	**B**
	c)	**B**	7.	$\mathbf{M_B}$

- Page 402

8.	**M**	9.	$\mathbf{M_B}$
10.	$\mathbf{M_B}$		

FORUM
Dans le triangle rectangle ABC, on a abaissé la hauteur CE. Démontrez qu'on a ainsi formé deux triangles semblables (ACE et CBE). **N**(1)

Dans la mesure où les élèves doivent établir la similitude entre chacun des triangles *ACE* et *CBE* et le grand triangle *ABC* avant d'établir la similitide escomptée (par transitivité), nous assignons la cote N(1) plutôt que M.

Sujet 4 : À PROPOS DES MESURES DE FIGURES SEMBLABLES

- Page 403

a) $\mathbf{B'}_{\text{spatialité}}$

- Page 404

b)	**A**	c) : conversion

La longueur de la lame

a)	**B**	b)	**B**

INVESTISSEMENT

1.		**A**	2.	**A**

- Page 405

3.		**A**		
4.	a)	**A**	b)	**A**
5.		**A**	2.	**A**
6.	a)	**B'**$_{\text{perception}}$	b)	**A**
7.	a)	**B'**$_{\text{spatialité}}$	b)	**B'**$_{\text{spatialité}}$

- Page 406

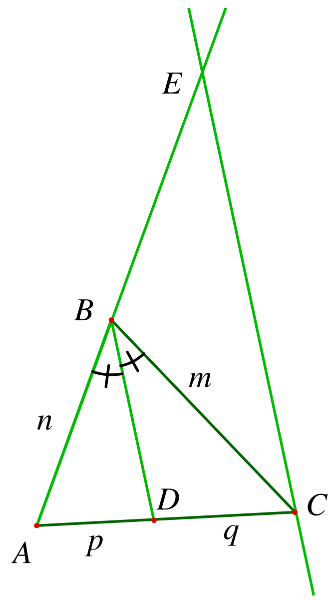
3.		**A**		
4.	a)	**A**	b)	**A**
5.		**A**	2.	**A**

FORUM

Faites la preuve que :
« La bissectrice d'un angle dans un triangle divise le côté opposé en deux segments proportionnels aux mesures des côtés formant cet angle ».

(Pour vous aider, on donne la construction qu'il faut réaliser pour faire cette démonstration, c'est-à-dire on trace une parallèle à $\overline{BD}$ passant par C et on prolonge le côté $\overline{AB}$.)

N(5)



Une séquence déductive exigeante, dont les cinq résultats intermédiaires pourraient être les suivants :

1. m $\angle ABD$ = m $\angle BEC$ (correspondants)
2. m$\angle DBC$ = m $\angle BCE$ (alternes-internes)

3. Ces quatre angles sont donc congrus, en particulier $\angle BEC$ et $\angle BCE$: le triangle BCE est par conséquent iso-angle.
4. Le triangle BCE est isocèle, et m $\overline{BE}$ = m $\overline{BC}$ = m.
5. Mais Thalès donne l'égalité proportionnelle :

$$\frac{\text{m } \overline{AB}}{\text{m } \overline{BE}} = \frac{\text{m } \overline{AD}}{\text{m } \overline{DC}}.$$

En combinant 4 et 5, on obtient l'égalité proportionnelle escomptée, à savoir

$$n / m = p / q.$$

PÉRIMÈTRES ET AIRES DES FIGURES SEMBLABLES

Activité 1 : Rapports de périmètres et rapports d'aires

a) **B**

- Page 407

b) **A**

Activité 2 : Des preuves formelles

a) *Complète la démonstration de cet énoncé.* **B**

Suit la démonstration que les périmètres de figures semblables sont dans le même rapport que les mesures des côtés. Certains mots sont cachés, et doivent être trouvés par l'élève. Il en sera de même pour l'exercice de la page suivante, qui porte sur le rapport des aires.

- Page 408

b) **B**

- Page 409

1. a) **A** b) **A**
   c) **A** d) **A**
2. a) $\mathbf{M_A}$

3 : volumes.

- Page 410

4 : volumes.

5.	a)	**A**		b)	**A**
6.		**A**	7.		$\mathbf{M_A}$
8.		**A**	9.		**A**
10.		**A**			

- Page 411

11.		**A**

12, 13, 14 et 15 : volumes.

FORUM

a)	**M**	b)	**M**
c)	**N**(2)		

- Page 414

8.	a)	**B**		b)	**B**
	c)	**B**		d)	**B**
9.	a)	**A**		b)	**A**

- Page 415

10.	$\mathbf{M_B}$	11.	**B**
12.	$\mathbf{M_B}$	13.	$\mathbf{M_B}$
14.	$\mathbf{M_B}$**’**$_{\text{algèbre}}$		

- Page 416

15.		**B**			
16.	a)	**B**		b)	**B**
	c)	**B**			
17.		$\mathbf{M_B}$	18.		$\mathbf{M_B}$
19.		$\mathbf{M_B}$	20.		$\mathbf{M_B}$

- Page 417

21. **B**

22. a) **B** b) **B**

    c) **B** d) **M**

23 : géométrie analytique.

24 et 25 : volumes.

- Page 418

26, 27, 28 et 29 : volumes.

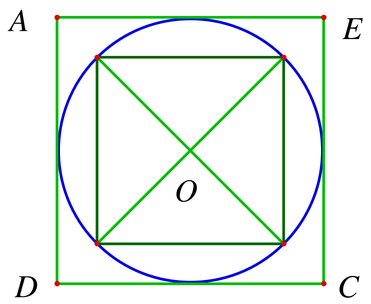
30. **B**

- Page 419

31. **B’**$_{\text{algèbre}}$

32. *Un carré est tracé (inscrit) dans un cercle qui lui-même est inscrit dans un carré. Quel est le rapport des aires de ces deux carrés ?*

N’(1)$_{\text{variables et fonction}}$



L'élève doit d'abord calculer la mesure du côté du petit carré en fonction de r, le rayon du cercle, en appliquant le théorème de Pythagore ; la mesure du côté du grand carré étant bien sûr $2r$. La difficulté (extra-géométrique) réside dans le fait que l'élève doit accepter de travailler avec r sans connaître sa valeur ; sans même, en fait, que la variable n'apparaisse dans l'énoncé ou la figure. À cela s'ajoute la difficulté de comprendre l'effet sur l’aire d'un changement de dimensions.

33.	**B**	34.	$\mathbf{M_B}$
35	$\mathbf{M_B}$	36	$\mathbf{M_B}$

- Page 420

1.	a)	**B**	b)	**B**
	c)	**B**		
2.	a)	**B**	b)	**B**
3.	a)	$\mathbf{M_B}$	d)	**B**
4.		$\mathbf{M_B}$		

- Page 421

5 : volumes.		6.	**B**
7 : raisonnement proportionnel.			
8.	**B**	9.	**B**

Sujet 5 : RÉSOLUTION DE TRIANGLES

Nous sortons ici de la géométrie synthétique pour entrer dans le monde de la trigonométrie. Nous ne comptabiliserons pas les problèmes auxquels cette introduction à la « trigo » donne lieu. Ils consistent tous en applications plus moins directes, et auraient été classés dans les catégories A, B, ou parfois M.

RÉFLEXIONS MATHÉMATIQUES

Cinquième secondaire programme 536

Tome 1

Réflexion 1. Les fonctions réelles
Réflexion 2. L'optimisation

Réflexion 3. Les relations métriques

Comme nous l'avions annoncé dans la section 3.3, cette troisième « réflexion » porte sur la construction d'un système déductif en géométrie. On y aborde les notions d'*axiome*, de *théorème*, de *terme primitif* et de *démonstration*, le tout appuyé de « topos » sur l'histoire des mathématiques grecques.

Sujet 1 : UN SYSTÈME DÉDUCTIF

(...)

- Page 243

  a) *Trouve quelques mots du vocabulaire de la géométrie qui peuvent être considérés comme des termes primitifs. Par exemple, pars d'un mot comme « triangle » et formule sa définition. Ensuite, définis chacun des termes géométriques utilisés dans la première définition. Continue de cette façon jusqu'à ce que tous les termes primitifs soient identifiés.*
  M'$_{\text{conception-définition}}$

- Page 244

  b) *Habituellement, on dit que l'espace est constitué de points, de droites et de plans. Est-ce que ces termes peuvent-être définis ?* **B'**$_{\text{conception-définition}}$

- Page 245

  c) *Quel axiome permet d'affirmer que deux points sont toujours alignés ?* **B**
  d) *En n'utilisant que les trois termes primitifs introduits jusqu'à maintenant, ou les mots déjà définis, donne une définition de :*
     1) *droites sécantes ;* **M'**$_{\text{définition}}$
     2) *droites parallèles.* **M'**$_{\text{définition}}$

- Page 246

Aucun problème, ni exercice. Nous ne pouvons cependant nous empêcher de relever la « bourde » suivante :

D'autre part, la notion de ***parallélisme*** *conduit à un axiome qui semble évident dans l'espace tel qu'on le perçoit.*
Axiome de la parallèle
Par un point pris hors d'une droite passe une et une seule parallèle à cette droite. (Encadré)

- Page 247

e) *En n'utilisant que les termes déjà introduits, définis les mots « segments » et « triangle ».* **M'**$_{\text{définition}}$

Axiome des demi-plans
Toute droite d appartenant à un plan donné détermine, dans ce plan, deux sous-ensembles de points, appelés ***demi-plans****, tels que* : etc.

f) *Illustre à l'aide de dessins les différentes possibilités de l'axiome des demi-plans selon que les points A et B sont ou ne sont pas sur la droite d (4 cas).* **A'**$_{\text{définition}}$

g) 1) **M'**$_{\text{définition}}$ 2) **M'**$_{\text{définition}}$

- Page 248

h)	**A**	i)	**M**
j)	**B**	k)	**B**
l)	**A**		

- Page 249

m)	**A**	n)	**B**
o)	**M'**$_{\text{définition}}$	p)	**B'**$_{\text{définition}}$

- Page 250

1.	**M'**$_{\text{définition}}$	2.	**M'**$_{\text{définition}}$
3.	**M'**$_{\text{définition}}$	4.	**M'**$_{\text{définition}}$

4.	**B**	5.	**M’**$_{\text{définition}}$

- Page 251

7.	**B**	8.	**M’**$_{\text{définition}}$
9.	**M’**$_{\text{définition}}$	10.	**A**

11. *En te référant aux définitions et aux axiomes déjà introduits, justifie l'énoncé suivant : « Si les demi-droites AB et AC sont opposées, et si les demi-droites AC et AD sont opposées, alors les demi-droites AB et AD sont confondues. »* **N**(2)

12.	**M’**$_{\text{définition}}$	13.	**M’**$_{\text{définition}}$
14.	**M’**$_{\text{définition}}$		
15. a)	**B**	b)	**M**

FORUM

a)	**M**	b)	**M**

- Page 252

a)	**B**	b)	**A**

c) Il s'agit de notre exemple 13, section 3.2.1. **N**(5)

- Page 253

a)	**A**	b)	**B**

- Page 254

c) **A’**$_{\text{logique propositionnelle}}$

- Page 258

a) **A**

- Page 259

b)	**A**	c)	**A**
d)	**A’**$_{\text{définition}}$	e)	**M’**$_{\text{définition}}$

- Page 261

f) Preuve dont certains mots ou groupes de mots sont cachés, à compléter. Même chose pour les problèmes des pages 261 et 262. **B**

g) **B**

- Page 262

h) **B**

- Page 263

Dans la plupart des problèmes de cette page, l'élève doit appliquer un des trois critères de congruence des triangles à une paire de triangles qui est spécifiée dans l'énoncé ; d'où les cotes qui vont suivre.

1.	**M**	2.	**M**
2.	**M**	3.	**M**
4.	**M**	5.	**M**
6.	**M**	7.	**M**
8.	**M**	9.	**M**

10. Notre exemple 31, section 3.2.2. **N**(2)

FORUM

a)	**M**	b)	**M**

Sujet 2 : LA SIMILITUDE

- Page 266

a)	**M**	b)	**B**

- Page 267

a)	**M**	b)	**B**
c)	**B**		

- Page 268

d)	**A**		

- Page 269

e)	**M**	f)	**B**
g)	**A**	h)	**B'**$_{\text{conception}}$

- Page 270

i)	**B**	j)	**B**
k)	**M**		

- Page 272

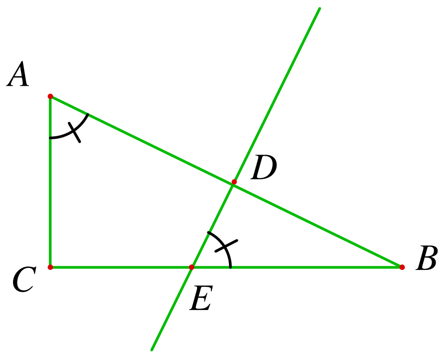
a) *Découvre la relation entre ces valeurs et formule l'énoncé qui pourrait ressembler à un théorème.* **C**

Il s'agit pour l'élève de trouver le résultat suivant, à partir de mesures prises dans différents triangles par le logiciel « Cabri-Géomètre » :

> la bissectrice de tout angle d'un triangle détermine sur le côté du triangle qu'elle croise deux segments dont les longueurs sont dans la même proportion que les longueurs des côtés du triangle au bord de l'angle.

INVESTISSEMENT

1. *Dans cette figure, on affirme que les triangles ACB et EDB sont semblables. Décris une similitude qui les associe et trouve l'homologue de* $\overline{EB}$ *.* **M**



- Page 273

2.	a)	**M**		b)	**M**
	c)	**M**			
3.		**M**	4.		**M**
5.	a)	**A**		b)	**A**
7.		**M**	8.		**M**

- Page 274

8.	a)	**M**		b)	**N**(1)
	c)	**M**			
9.		**B'**$_{\text{définition}}$			

10. La solution à ce problème, qui paraît difficile de prime abord, est directe si l'on applique le théorème vu à la page 272 : D'où la cote ... ... **M**

11.	**A**	12.	**A**

13 : arithmétique.

14. Encore une application du théorème de la page 272. **M**

- Page 275

FORUM

a)	1)	**M**	2)	**N**(2)
	3)	**M**	4)	**N**(2)
b)		**N**(2)		

Sujet 3 : LE TRIANGLE RECTANGLE

Relation de Pythagore

a) *Lis attentivement la preuve suivante ; explique-la ensuite à un ou une autre élève.*

Suit la preuve du théorème de Pythagore : on abaisse la hauteur sur l'hypoténuse et on montre la similitude des deux petits triangles ainsi formés avec le grand triangle (critère AA). Les égalités proportionnelles qui en découlent donnent la relation de Pythagore. La preuve pourrait être classée N(2). La question, elle, est inclassable.

- Page 276

Réciproque du théorème de Pythagore

b) *Lis attentivement la preuve suivante ; explique-la ensuite à un ou une autre élève.*

Autre question inclassable. La preuve, elle, pourrait être classée N(3). Elle consiste à construire un triangle rectangle dont les cathètes ont mêmes mesures que deux des côtés du triangle donné. La relation de Pythagore s'applique au triangle construit, et l'on conclut à la congruence des deux triangles par le critère CCC.

- Page 277

c)	**A**	d)	**A**
e)	**A**	f)	**A**

- Page 278

g)	**A**	h)	**A**

Projection orthogonale

a)	**B**	b)	**B**
c)	**B**		

- Page 279

d)	**B**	e)	**A**

- Page 280

f) **A**

INVESTISSEMENT

1. a) **M** b) **N**(2)

- Page 281

2. a) **B** b) **N**(2)

3 : algèbre.

4. a) **B** b) **B**

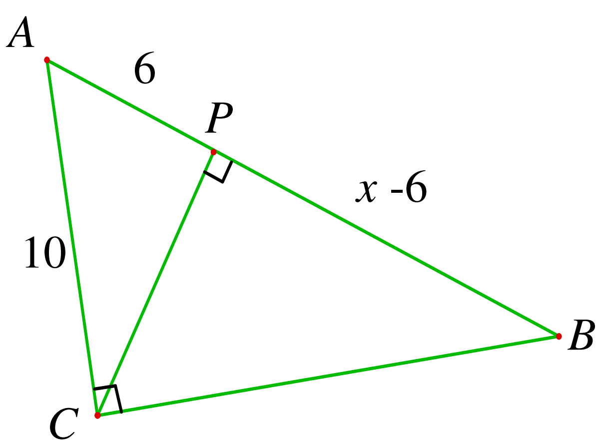
- Page 282

5. a) **A** b) $\mathbf{M_A}$

6. **M** 7. **B**

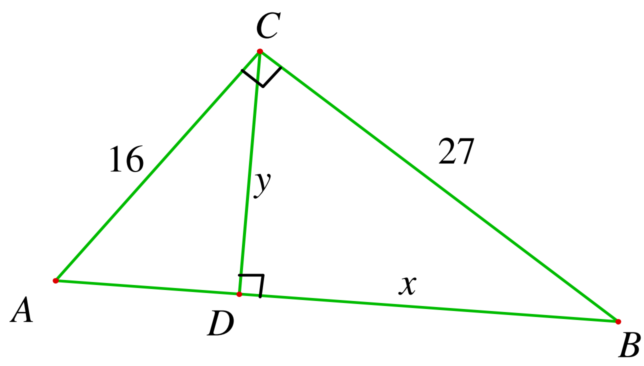
8. *Trouve la valeur de chaque mesure inconnue et donne l'énoncé qui supporte ce calcul.*

a) **M**



b) **M**

c) **N**(1)



Comparons a) et c). Au moment où le problème n°8 est soumis à l'élève, il a vu, dans la preuve du théorème de Pythagore, que la hauteur abaissée sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle le partage en deux triangles qui lui sont semblables. Plusieurs corollaires ont été énoncés et démontrés, dont les deux suivants : *chaque cathète est moyenne proportionnelle entre la longueur de sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière,* et *le produit des cathètes est égal au produit de la hauteur par l'hypoténuse*. Pour résoudre a), l'élève peut déduire de la similitude des triangles *APC* et *ABC*, l'égalité proportionnelle

$$\frac{10}{6} = \frac{x}{10},$$

d'où il tire la valeur de *x*. En assignant la cote M, nous ne tenons compte ni de la manipulation algébrique — extérieure qu'elle est au raisonnement proprement géométrique —, ni de la soustraction (élémentaire et directe) à faire pour établir que *x* est la mesure de l'hypoténuse du grand triangle.

Pour résoudre c), l'élève doit établir que $\sqrt{16^2 + 27^2}$ est la mesure de l'hypoténuse, en invoquant le théorème de Pythagore. Le premier des deux corollaires lui donne ensuite l'égalité proportionnelle

$$\frac{x}{27} = \frac{27}{\sqrt{16^2 + 27^2}} \quad (*),$$

dont il déduit la valeur de x ; le second corollaire lui donne l'égalité $16 \times 27 = y \times \sqrt{16^2 + 27^2}$ (∗∗), d'où il tire y.

On pourra objecter que l'élève peut écrire les deux égalités (∗) et (∗∗) avant d'avoir calculé la mesure de l'hypoténuse, qu'il aura notée provisoirement $\mathrm{m}(\overline{AB})$. La question se pose donc : a-t-on vraiment affaire à une séquence déductive hiérarchisée dans le temps ? Nous pensons que oui, dans la mesure où l'élève ne peut mener à bien les calculs de x et de y qu'avec la valeur de $\mathrm{m}(\overline{AB})$. Par ailleurs, comme ces calculs sont indépendants, nous assignons au problème la « cote » N(1), sans considérer la manipulation algébrique comme une étape intermédiaire. Les problèmes b), d) et f) du n°8 sont analogues à a). Le problème e) est analogue à c), avec en sus une difficulté algébrique (une substitution donne lieu à une équation du second degré, à résoudre).

d) **M**

- Page 283

e)	**N'**(1)$_{\text{algèbre}}$	f)	**M**
9.	**M**	10.	**M**
11.	**M**	12.	**M**

- Page 284

13.	**M**	14.	**M**
15. a)	**M**	b)	**M**
16.	**M'**$_{\text{algèbre}}$	17.	**N**(3)

- Page 285

18. a)	**B**	b)	**M**

19. *Le triangle ABC est rectangle en C. On trace les médianes BN et CM qui se coupent perpendiculairement en P. La cathète BC mesure 18 unités et l'angle A mesure 30°. Détermine la mesure de la médiane BN.*

Quelle cote donner à ce problème ? Il est illustré d'une figure fautive à dessein (sans jeu de mot !). De fait, quand l'angle *A* mesure 30°, les médianes ne peuvent se croiser à angle droit. Mais la justification formelle que la construction n'est pas possible est difficile, et demande une séquence déductive qui passe par au moins cinq étapes intermédiaires. Nous assignons donc la cote : **N'**(5)$_{\text{dessin-figure}}$

Par ailleurs, le guide d'enseignement parle d'une « situation impossible », sans spécifier que l'élève doive en justifier l'impossibilité. Ce même guide suggère une solution dans le cas où l'hypothèse m $A = 30°$ est mise de côté, solution qui pourrait être classée N(3).

20.	**N**(1)	21.	**M'**$_{\text{algèbre}}$
22.	**M'**$_{\text{algèbre}}$		

- Page 286

FORUM

a) *Soit un rectangle ABCD et un point P pouvant varier sur* $\overline{AB}$. *On cherche à comprendre dans quelles conditions le triangle CPD sera rectangle en P.*

b) *Soit* $a = \text{m}\ \overline{AD} = \text{m}\ \overline{BC}$, $b = \text{m}\ \overline{AB} = \text{m}\ \overline{CD}$,
$b_1 = \text{m}\ \overline{AP}$ *et* $b_2 = \text{m}\ \overline{PB}$.

Figure : le rectangle *ABCD*, avec *P* sur $\overline{AB}$, dans la fenêtre d'un logiciel de géométrie.

1) *Construisez un rectangle de façon à pouvoir faire varier sa longueur et sa largeur. Nommez les sommets A, B, C et D. Ajoutez un point P lié au segment AB.* **A**

2) *Est-il possible de placer P de façon à ce que ∠CPD soit droit ? Est-ce toujours possible, peu importe les dimensions du rectangle ?*

   Pour voir les différentes possibilités, demandez à l'ordinateur d'afficher la mesure de ∠CPD et les longueurs des segments. **H**

3) *Formulez et démontrez un théorème de la forme : « Le triangle CPD est rectangle en P si et seulement si ???? », où l'énoncé met en relation les longueurs des segments AD, AP et PB.* **M'**$_{\text{algèbre}}$

Pour justifier sa réponse en 2) — à savoir, qu'on ne peut avoir un angle droit si $a > b/2$ — l'élève se basera vraisemblablement sur l'évidence perceptive qu'en prenant *P* au milieu de *AB*, on a l'angle ∠*CPD* maximum, pour un rectangle *ABCD* fixé. Or, quand $a = b/2$, le segment qui joint *P* et sa projection sur *DC* sépare *ABCD* en deux carrés congrus, et il est facile de montrer que $\angle CPD$ est droit. Pour l'élève, l'affirmation suivante constituera une autre « évidence perceptive », à savoir : quand $a > b/2$, la mesure de $\angle CPD$ est forcément plus petite que 90°. D'où la cote H.

La condition nécessaire et suffisante pour que $\angle CPD$ soit droit est la suivante : $b_1 b_2 = a^2$; elle découle de deux applications du théorème de Pythagore, combinées avec quelques manipulations algébriques bien choisies.

b)	1)	**B**	2)	**M'**$_{\text{algèbre}}$
	3)	**M'**$_{\text{algèbre}}$		

Sujet 4 : LE CERCLE
(...)

- Page 287

a) *Donne une définition d'un cercle.* **M'**$_{\text{définition}}$

b)	1)	**B**	2)	**B**
	3)	**B**	4)	**A**
c)		**M'**$_{\text{définition}}$	d)	**B**
e)		**B**		

- Page 288

f)	**B**	g)	**B**
h)	**B**		

- Page 289

i) **M**

Des cordes dans un cercle

a)		**B**		
b)	1)	**B**	4)	**M**

- Page 290

c) **N**(2)

d)	1)	**B**	4)	**N**(3)
e)		**B**		
f)	1)	**B**	4)	**M**

- Page 291

	5)	**B**	8)	**N**(1)
g)		**B**		
h)	1)	**B**	4)	**N**(1)
	5)	**B**	8)	**N**(1)

- Page 292

1.	**B**	2.	**B**
3.	**B**	4.	**A**
5.	**M'**$_{\text{problème en mots}}$	6.	**C**

- Page 293

7.	**M'**$_{\text{problème en mots}}$	8.	**M'**$_{\text{problème en mots}}$

9. *Trois cercles de même rayon sont tangents deux à deux. Prouve que les trois centres ainsi que les trois points de tangence forment chacun* (sic) *un triangle équilatéral.*

Pour montrer que les trois centres sont les sommets d'un triangle équilatéral, l'élève combine le fait (énoncé plus tôt) que les centres et le point de tangence de deux cercles tangents sont alignés, avec le fait que les trois cercles sont de même rayon. Le raisonnement sollicité est donc de la catégorie **M**. (Ces deux faits sont combinés sans hiérarchie). Montrer que les trois points de tangence forment un triangle équilatéral est l'exact analogue du problème présenté au *CLUB MATH* en 2^{e} secondaire (tome 2, p. 247), ou du problème n°21, 4^{e} sec., tome 2, p. 90 ; problème auquel nous avions assigné la cote de … …**N**(2).

10.	a)	**N**(2)	b)	**N**(2)

- Page 294

11.		**M**	12.		**M**
13.		**M**	14.		**N**(2)
15.	a)	**M**		b)	**M**
16.		**N**(3)	17.		**M**

- Page 295

18.	**M**	19.	**M**
20.	**M**	21.	**N**(1)
22.	**M**		
FORUM	**N**(2)		

- Page 296

a)	**B**

- Page 297

b)	**A**

- Page 298

c)	**A**	d)	**A**
e)	**M**		

- Page 299

f)	**M**	g)	**A**

- Page 301

h)	**N**(2)	i)	**B**

INVESTISSEMENT

1.	a)	**A**		b)	**A**

- Page 302

2.	a)	**A**		b)	**A**
3.	a)	**A**		b)	**A**
4.		**M**	5.		**M**
6.		**M**			

- Page 303

7.		**M**	8.		**C**
9.	a)	**A**		b)	**A**
10.		**B**			
11.	a)	**M**		b)	**M**
12.		**A**			

- Page 304

FORUM

a)	**M**	b)	**M**

LES ANGLES DU CERCLE

a) **A**

- Page 305

b) **B**

- Page 306

c) L'élève essaie de trouver une relation entre la mesure d'un angle inscrit et la mesure (en degrés) de l'arc qu'il intercepte, en faisant des essais avec le logiciel Cabri-Géomètre. **C**

- Page 307

d) **B**

- Page 308

e)	**N**(1)	f)	**N**(1)
g)	**N**(1)		

- Page 309

h)	**C**	i)	**N**(2)

- Page 310

j)	**C**	k)	**N**(2)

- Page 311

1.	a)	**A**	b)	**A**
	c)	**A**	d)	**A**
	e)	**A**	f)	**A**
	g)	**A**	h)	**A**
2.		$\mathbf{M'}_{\text{algèbre}}$		

- Page 312

3.	a)	**A**	b)	**A**
	c)	**A**	d)	**A**
4.	a)	$\mathbf{M_A}$	b)	$\mathbf{M_A}$
	c)	$\mathbf{M_A}$	d)	**M**
	e)	$\mathbf{M_A}$	f)	**M**

- Page 313

5.	a)	$\mathbf{M_A}$	b)	$\mathbf{M_A}$
	c)	$\mathbf{M_A}$	d)	$\mathbf{M_A}$
6.		$\mathbf{M_A}$	7.	**M**
8.		**M**	9.	**M**
10.		**N**(1)	11.	**M**

- Page 314

12.	a)	**N**(1)	b)	**N**(1)
	c)	**N**(2)		

FORUM

a)	**M**	b)	**M**

- Page 315

LES DISTANCES DANS LE CERCLE

a) L'élève essaie de trouver une relation entre les distances d'un point *P* à l'intersection intérieure au cercle de deux cordes de ce cercle, et les extrémités de ces cordes, en faisant des essais avec Cabri-Géomètre. **C**

- Page 316

b)	**B**	c)	**N**(3)
d)	**C**		

- Page 317

e)	**B**	f)	**B**
g)	**N**(3)	h)	**N**(3)

- Page 318

1.	a)	**A**	b)	**A**
	c)	**A**	d)	**A**
2.	a)	**A**	b)	**A**
	c)	**A**	d)	**A**

- Page 319

3.		**A**	4.	**N**(1)
5.		**M**	6.	**M**
7.	a)	**M**	b)	**M**

- Page 320

8.	**M**	9.	**M**
10.	**N**(1)		

- Page 321

11.	**M**	12.	**M**

FORUM

1)	**M**	2)	**M**

- Page 324

12. a)	$\mathbf{M}_{\mathbf{A}}$	b)	**M**
13.	**M**	14.	**M**
15.	**M**	16.	**M**
17.	**N**(1)	18.	**N**(1)
19.	**M**		

- Page 325

20.	**M**	21.	**M**
22. a)	**M**	b)	**M**
23.	**M**	24.	**M**

- Page 326

25.	**M**	26.	$\mathbf{M'}_{\text{algèbre}}$
27.	**M**	28.	**M**
29.	**M**		

- Page 327

30.	**M**	31.	**M**
32.	**M**		
33. a)	**M**	b)	**M**

- Page 328

34.	**M**	35.	**M**

36.	a)	**M**	b)	**M**
	c)	**M**		
37.	a)	**N**(1)	b)	**M**

- Page 329

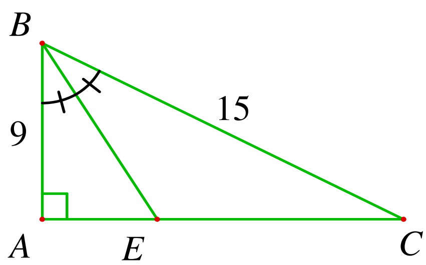
38.	**N**(3)	39.	**N**(2)
40.	**M**	41.	**M**

42 : programme à élaborer à la calculatrice graphique.

43.	**N**(3)

- Page 330

44. *Le triangle ABC est rectangle en A et $\overline{BE}$ partage l'angle ABC en deux parties congrues. On sait que* m $\overline{AB}$ = *9 cm et* m $\overline{BC}$ = *15 cm. Détermine la mesure de* $\overline{BE}$. **M**



Pour résoudre, l'élève doit combiner au théorème de Pythagore le théorème sur la bissectrice, qu'il a vu à la page 272 du présent volume. S'il y a deux résultats à combiner, la combinaison n'est pas hiérarchisée dans le temps, d'où la cote. La même remarque s'applique à la plupart des problèmes cotés M dans la section.

45.	**M**	46.	**M**
47.	**M**		

- Page 331

48.	**M**	49.	**N**(1)

50.		**N**(1)	51.	**M**

- Page 332

1.		**M**	2.	**M**
3.		**M**	4.	**M**
5.		**M**	6.	**M**

- Page 333

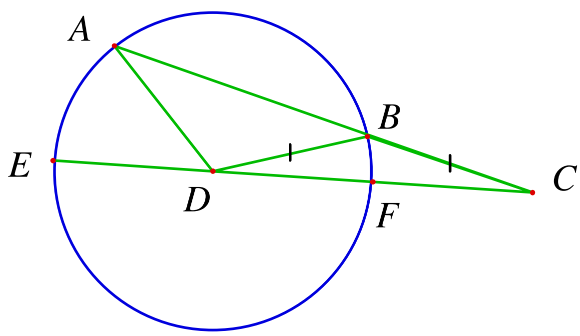
7.		**M**	8.	**M**
9.	a)	**M**	b)	**M**
	c)	**M**		
10.		**M**	11.	**M**

- Page 334

12.		**N**(4)	13.	**M**
14.		**M**		

- Page 336

Démontre que la mesure de l'angle ADE vaut trois fois la mesure de l'angle C.
N(3)



Réflexion 4. Les fonctions exponentielles et logarithmique

Tome 2

Réflexion 5. Les distributions statistiques
Réflexion 6. Les vecteurs
Réflexion 7. Les fonctions trigonométriques
Réflexion 8. Lieux géométriques et coniques

Nous ne couvrons ni la *Réflexion 6*, ni la *Réflexion 8*, parce que la matière traitée y repose trop fortement sur le calcul en coordonnées, et sort du domaine de la géométrie synthétique pour passer à celui de la géométrie analytique. Comme nous l'avons relevé dans la section 1.5, il ne faut pas en conclure que la pensée déductive et le recours à la démonstration n'y sont pas sollicités. Nous laissons de côté ces deux « réflexions » parce que l'interférence avec le calcul algébrique rend difficile l'évaluation dans les problèmes de la part faite au raisonnement déductif.

Dans le chapitre suivant, nous tenterons d'analyser et d'interpréter la classification du présent chapitre. Nous chercherons aussi à évaluer ce qu'a pu apporter la grille d'analyse dans toute cette démarche.

CHAPITRE 5

ANALYSE DES RÉSULTATS

Quelles conclusions pouvons-nous tirer de la classification du précédent chapitre ? En quoi nous aide-t-elle à répondre aux questions que nous nous posions à la section 1.5 ? Qu'amène la grille à la base de cette classification, du point de vue de l'analyse ? Mais rappelons (section 1.5) d'abord les principales questions auxquelles cette analyse devait chercher à répondre.

- Est-ce que les problèmes de géométrie proposés par la collection suscitent chez l'élève une véritable « attitude de preuve » ?
- Quels types de preuves sont sollicités dans ces problèmes ?
- Comment se caractérise le travail demandé à l'élève à chacun des niveaux scolaires ? Que sollicite-t-on chez lui ?
- Comment se caractérise l'évolution d'un niveau scolaire à l'autre ? Est-elle suffisamment progressive ? Y a-t-il des ruptures importantes ?

5.1 Analyse des résultats par niveau scolaire

Nous faisons suivre la compilation des résultats niveau par niveau d'une première analyse, relativement sommaire. Des « difficultés surajoutées » (les « cotes » affectées d'une apostrophe, avec la nature de la difficulté surajoutée en indice), nous ne retiendrons que celles qui nous intéressent du point de vue de l'apprentissage de la preuve. Ce sont les suivantes (X désigne une catégorie quelconque) :

- $X'_{\text{perception}}$
- $X'_{\text{conception}}$
- $X'_{\text{définition}}$
- $X'_{\text{dessin-figure}}$
- $X'_{\text{logique propositionnelle}}$

ou toute combinaison de celles-ci. Nous invitons le lecteur qui veut comprendre en quoi ces difficultés surajoutées contribuent à l'apprentissage de la preuve, à relire la fin de la section 3.2.1. Rappelons également que la signification des lettres correspondant aux catégories est donnée dans la section 3.2.2, et résumée dans le tableau du début du chapitre 4, page 118.

Ce même lecteur se demande sans doute pourquoi les autres difficultés surajoutées ($X'_{\text{algèbre}}$, $X'_{\text{proportion}}$, $X'_{\text{variables et fonctions}}$, etc.) ont été relevées dans la classification du chapitre 4, si nous ne les retenons pas dans la compilation. Simplement parce qu'elles permettent de mieux justifier l'attribution de la catégorie d'un problème donné. Par exemple, tel ou tel problème classé M peut sembler de prime abord demander plus qu'une simple *déduction locale*. En précisant que la catégorie du problème est en fait $M'_{\text{algèbre}}$, par exemple, nous faisons valoir que la nature de la difficulté tient à quelque chose de plus qu'au seul raisonnement géométrique, et que nous évaluons la part déductive du raisonnement proprement géométrique, en dépit du « brouillage » causé par la difficulté algébrique surajoutée, comme étant effectivement de type M.

Secondaire I

286 problèmes de la **catégorie A** **219** problèmes **B** **30** problèmes **C** **7** problèmes **G** **5** problèmes **H** **44** problèmes **M** **14** problèmes $\mathbf{M_A}$ ou $\mathbf{M_B}$ **1** problème $\mathbf{M_C}$ **9** problèmes **N**, subdivisés en **4** problèmes **N**(1) **2** problèmes **N**(2) **3** problèmes **N**(3)	$X'_{\text{définition}}$: **21** $X'_{\text{conception}}$: **8** $X'_{\text{perception}}$: **1** $X'_{\text{dessin-figure}}$: **4** $X'_{\text{logique propositionnelle}}$: **1**
	... répartis dans ...
Itinéraire 12. Les figures géométriques *Itinéraire 13. Les transformations des figures* *Itinéraire 14. Triangles et quadrilatères* *Itinéraire 15. Périmètre et aire*	

Précisons d'abord que les « difficultés surajoutées » le sont toutes dans des problèmes de catégorie A ou B. On est bien sûr frappé de prime abord par la prépondérance des problèmes de ces catégories. Il y en a 505 sur 615, soit 82% de la totalité des problèmes. Ici, le travail principalement exigé de l'élève en est un de mise en place des notions, des définitions. Les problèmes qui présentent des difficultés surajoutées des trois premiers types (définition, conception, perception), au nombre de 26 (5% des 505 problèmes des catégories A et B), apparaissent dans l'itinéraire 12, et forcent un retour, une réflexion sur les concepts qui viennent consolider cette mise en place.

Les cinq problèmes de la catégorie H portent sur la justification des formules d'aires (itinéraire 15). Les problèmes des catégories C, H et N, de même que la majorité des problèmes de la catégorie M se retrouvent dans l'itinéraire 14 : *Triangles et quadrilatères*. Le théorème sur la somme des angles intérieurs d'un triangle est ici mis à contribution pour les premières déductions, qui sont majoritairement des déductions locales (58 problèmes de catégories M, M_A ou M_B pour 9 problèmes de catégorie N). Globalement, la progression en secondaire 1 nous apparaît donc relativement bien aménagée, les sept principales catégories étant sollicitées, avec des définitions élémentaires introduites par le biais de problèmes des catégories A ou B, et les premières propriétés des figures et résultats qui s'y rapportent, travaillés selon des modes variés d'appréhension, par le biais de problèmes des autres catégories.

Secondaire II

315 problèmes de la **catégorie A** **121** problèmes **B** **6** problèmes **C** **0** problème **G** **7** problèmes **H** **26** problèmes **M** **21** problèmes $\mathbf{M_A}$ **1** problème $\mathbf{N_M}$ (1) **2** problèmes **N**, subdivisés en **1** problème **N**(1) **1** problème **N**(3)	$X'_{\text{définition}}$: **9** $X'_{\text{conception}}$: **6** $X'_{\text{perception}}$: **1**
	... répartis dans ...
Itinéraire 3. Les homothéties *Itinéraire 8. Le cercle* *Itinéraire 10. Les polygones réguliers*	

Comme en secondaire 1, on constate ici que les problèmes des catégories A et B prédominent (436 sur 499, soit 88% de la totalité des problèmes). Règle générale, les itinéraires qui portent sur la géométrie des transformations — l'*Itinéraire 13* en 1re secondaire, le présent *Itinéraire 3* (*Les homothéties*), l'*Itinéraire 7* en 3^{e} secondaire — ne sont constitués que de problèmes des catégories A ou B, à quelques très rares exceptions près. Nous aurons l'occasion d'y revenir à la section 5.2.4. Par ailleurs, on peut penser que comme en secondaire 1, un travail de mise en place des définitions a été rendu nécessaire par l'introduction au *cercle* (*Itinéraire 8*). Les difficultés surajoutées se retrouvent d'ailleurs toutes dans l'itinéraire 8, et viennent appuyer cette mise en place. Ce qui est plus étonnant, c'est bien sûr le peu de problèmes des autres catégories : 2 problèmes C, 4 problèmes H et un problème N(3) sur le cercle ; 4 problèmes C, 3 problèmes H et un problème N(1) sur les polygones. Plus encore qu'en secondaire 1, le raisonnement déductif n'est sollicité pratiquement qu'en des déductions locales (2 problèmes N pour 47 problèmes M ou M_A).

Secondaire III

182 problèmes de la **catégorie A** **111** problèmes **B** **0** problème **C** **0** problème **G** **8** problèmes **H** **11** problèmes **M** **2** problèmes $\mathbf{M_A}$ ou $\mathbf{M_B}$ **1** problème $\mathbf{N_M}$ (1) **7** problèmes **N**, subdivisés en **4** problèmes **N**(1) **3** problèmes **N**(2)	X'$_{\text{définition}}$: **3** X'$_{\text{conception}}$: **2** X'$_{\text{perception}}$: **1** ... répartis dans ...
Itinéraire 3. La relation de Pythagore *Itinéraire 7. La composition des transformations*	

Contrairement à ce qu'on serait en droit d'attendre, la proportion de problèmes des catégories A et B va en augmentant ! Nous avons maintenant 293 problèmes de ces catégories parmi les 322 que compte la totalité des problèmes, soit 91%. Alors que la proportion des problèmes qui sollicitent une déduction (catégories M, M_A, M_B, N_M et N) va en diminuant : 68 sur 615 (11%) en secondaire 1, 50 sur 499 (10%) en secondaire 2, et 21 sur 322 (moins de 7%) en secondaire 3. Tous les problèmes des catégories autres que A et B se retrouvent dans l'itinéraire 3.

Secondaire IV, programme **436**

103 problèmes de la **catégorie A** **269** problèmes **B** **8** problèmes **C** **0** problème **G** **2** problèmes **H** **102** problèmes **M** **54** problèmes $\mathbf{M_A}$ ou $\mathbf{M_B}$ **3** problèmes $\mathbf{N_M}$ (1) **9** problèmes **N**, subdivisés en **6** problèmes **N**(1) **2** problèmes **N**(2) **1** problème **N**(5)	$X'_{\text{définition}}$: **17** $X'_{\text{conception}}$: **2** $X'_{\text{perception}}$: **1** $X'_{\text{logique propositionnelle}}$: **7**
	... répartis dans ...
Réflexion 5. Les isométries *Réflexion 9. Les figures semblables*	

Les problèmes des catégories A et B sont encore très présents : 372 sur 550, soit 68% de la totalité des problèmes. Il n'y a que 9 problèmes de la catégorie N (neuf séquences déductives), réparties à peu près également entre les deux « réflexions » ; c'est bien peu, compte tenu de la plus grande maturité de l'élève de secondaire 4, comparée à celle de l'élève de 1^re^ ou 2^e^ secondaires. Par contre, la proportion des problèmes qui sollicitent une déduction (catégories M, M_A, M_B, N_M et N) est allée en augmentant : 168 sur 550, soit 31% de la totalité des problèmes. Cette augmentation est due au grand nombre de problèmes des catégories M, M_A et M_B. Le travail « déductif » est donc certainement plus présent que dans les trois années précédentes, mais sa répartition entre les catégories M et N (12 problèmes N pour 156 problèmes M, soit moins de 8%) en dit long sur la façon dont les auteurs conçoivent ce travail. Là-dessus aussi, nous aurons l'occasion de revenir, dans les sections 5.2.1 et 5.2.3.

Secondaire V, programme **536**

65 problèmes de la **catégorie A** **64** problèmes **B** **6** problèmes **C** **0** problème **G** **1** problème **H** **166** problèmes **M** **11** problèmes $\mathbf{M_A}$ **52** problèmes **N**, subdivisés en **22** problèmes **N**(1) **18** problèmes **N**(2) **9** problèmes **N**(3) **1** problème **N**(4) **2** problèmes **N**(5) ... répartis dans ...	$X'_{\text{définition}}$: **12** $X'_{\text{conception}}$: **3** $X'_{\text{dessin-figure}}$: **1** $X'_{\text{logique propositionnelle}}$: **7**
Réflexion 3. Les relations métriques	

Les problèmes des catégories A et B sont encore très présents : 129 sur 365, soit 35% de la totalité des problèmes. Les problèmes qui sollicitent une déduction (catégories M, M_A et N) constituent maintenant 63% de la totalité des problèmes : la progression amorcée en secondaire 4 continue. Mais sur les 229 problèmes « déductifs », seulement 52 sont de la catégorie N, ce qui ne constitue qu'un maigre 23%. Les 23 problèmes avec « difficultés surajoutées » résultent d'un intéressant travail sur la définition formelle (la recherche de « termes primitifs »), dans le cadre de la construction d'un système déductif, qui amorce la *Réflexion 3* : *Les relations métriques*.

5.2 Évolution d'un niveau scolaire à l'autre

Essayons maintenant d'avoir une vision plus globale du cheminement de l'élève à travers tout le secondaire. Le tableau suivant devrait nous faciliter la tâche.

	Sec. I	Sec. II	Sec. III	436	536
A	286	315	182	103	65
B	219	121	111	269	64
$\mathbf{M_A}$ ou $\mathbf{M_B}$	14	21	2	54	11
C ou $\mathbf{M_C}$	31	6	0	8	6
G	7	0	0	0	0
H	5	7	8	2	1
M	44	26	11	102	166
N(1) ou $\mathbf{N_M}$(1)	4	2	5	9	22
N(2)	2	0	3	2	18
N(3)	3	1	0	0	0
N(4)	0	0	0	0	1
N(5)	0	0	0	1	2
total des **N**	9	3	8	12	43

Nous avons organisé différemment les catégories pour refléter les regroupements que nous allons bientôt dégager de notre *interprétation des données*. Nous avons déjà mentionné la très nette prédominance des problèmes de catégories A et B, à tous les niveaux ; sauf peut-être en cinquième secondaire, où les problèmes de catégorie M prennent le dessus. Si l'on réunit les problèmes des catégories A, B, M_A, M_B et M, la prédominance est alors écrasante, ce qui est selon nous significatif. Essayons de voir pourquoi.

5.2.1 Interprétation des données : pensées directes et déductions

Les problèmes des catégories A, B, M_A, M_B et M rassemblent, pour toute la durée du secondaire, 2186 problèmes sur un grand total de 2344 problèmes, et constituent de ce fait 93% des problèmes. Nous en tirons une première conclusion : les auteurs semblent privilégier avant tout ces problèmes ou exercices dans lesquels l'élève ne mobilise qu'une pensée directe, pensée « d'un seul tenant », qui s'exerce sans « retour sur elle-même », et qu'on pourrait presqu'à la limite dire, sans « réflexion » ; ces problèmes ou exercices où le mode d'apprentissage privilégié est la répétition — la quantité effarante de ces problèmes en est symptomatique — ce qu'on appelle, dans le jargon des enseignants, « la drill ». Il est entre autres significatif que les problèmes de *construction* soient absents de la collection, alors que les exercices de *tracé* sont nombreux (voir la 33[e] note au bas de la page 97, pour la distinction).

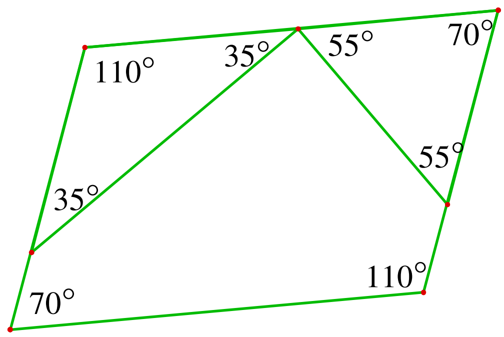
Il nous semble en effet que les problèmes de la catégorie M (et a fortiori, les problèmes des catégories M_A ou M_B) doivent être considérés de ce point de vue. Comme nous le faisions remarquer à la section 3.2.1, même si l'inférence demandée par les problèmes de la catégorie M est de l'ordre de la déduction pure, cette déduction est directe, et dans la grande majorité des cas à peu près immédiate, car elle fait intervenir un ou deux résultats vus peu auparavant. Or, l'adéquation de ces résultats au cas de figure en cause est mentalement presque toujours d'une seule venue. « Déduction » ici ne signifie pas « sophistication de la pensée ». Elle signifie seulement que la validation de l'élève s'appuie sur sa mémoire (un résultat déjà vu) plutôt que sur son intuition, mais le « geste intellectuel » de cette validation est le même.

Comment expliquer cette prédominance des problèmes de catégories A, B, M_A, M_B et M, quand on sait que cette compilation **ne porte que sur des problèmes de géométrie synthétique**. Rappelons que selon les programmes du MEQ (voir section 1.3), la géométrie synthétique devrait être le vecteur privilégié de la pensée déductive. Cela nous amène à nous interroger sur la conception qu'ont les auteurs de la collection, de ce qu'est la « pensée déductive ». Conception à notre avis beaucoup trop « lâche », trop « élastique », comme l'illustre la formulation du problème suivant, dans lequel nous avons souligné l'impératif « *Déduis* » :

Exemple 17-bis (Carrousel, secondaire 1, tome 2, p. 205, n°23).

Déduis *les mesures manquantes dans la figure ci-dessous et trouves-y les paires d'angles :*

a) *congrus ;*
b) *complémentaires ;*
c) *supplémentaires.*



Si trouver les mesures d'angles manquantes constitue vraiment une déduction, alors l'épicier du coin est un émule de Sherlock Holmes chaque fois qu'il rend la monnaie ! Pour un autre exemple éloquent, on se référera[37] au n°25, secondaire 1, tome 2, page 205 dans « Carrousel », que nous avons exposé et commenté au chapitre 4. Remarquons tout de même à la décharge des auteurs que cet emploi abusif du mot « déduire » se retrouve également dans les programmes du MEQ (voir la page 13 du mémoire).

5.2.2 Interprétation des données : l'attitude de preuve

Entre les problèmes dont la résolution est directe, comme ceux dont il vient d'être question, et les problèmes dont la résolution n'est accessible que par un enchaînement déductif plus complexe (catégorie N), devraient se situer tous ces problèmes qui

[37] Nous suggérons au lecteur de se repérer dans le chapitre 4 d'abord à l'aide des pieds de pages, qui donnent le niveau scolaire et le tome.

portent sur un résultat que l'intuition n'appréhende que partiellement ; problèmes des catégories C, G ou H, problèmes qui stimulent la curiosité et la réflexion. Or, ce qui frappe quand on consulte les seules données du tableaude la section 5.2 (page 250), c'est le peu de problèmes des catégories C, G et H.

Cette observation, appuyée de l'évaluation plus systématique faite au chapitre 4, nous amène à formuler le commentaire suivant : d'après nous, les problèmes proposés dans la collection, ainsi que le contexte dans lequel ils sont formulés, ne sont pas suffisamment favorables à l'essor d'une véritable « attitude de preuve ». Règle générale, les problèmes, leur formulation et le contexte de leur formulation semblent peu stimuler la curiosité, soit que le résultat soit trop facile d'accès à l'intuition ou à la perception (ce que reflète entre autres le grand nombre de problèmes de catégorie B), soit que la formulation soit trop directive et « tue » l'éventuel questionnement, morcelant ce qui aurait dû être un problème de la catégorie C ou H en une suite d'exercices des catégories A et B. On pourra se référer, par exemple, aux problèmes suivants, commentés par nous dans le chapitre 4 :

- Problème n°15 p. 261, secondaire 1, tome 2.
- Problème n°18 p. 262, secondaire 1, tome 2.
- Problème n°35 p. 284, secondaire 1, tome 2.
- Les problèmes des pages 214, 215 et 216, secondaire 2, tome 2.

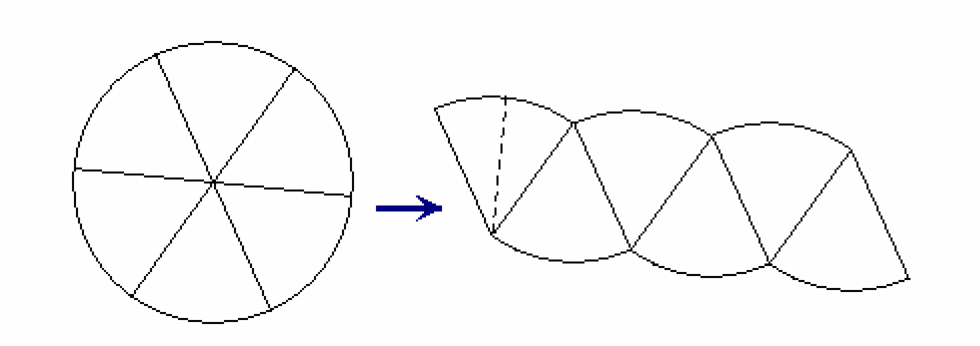
Peu de problèmes sont abordés de façon à solliciter une véritable interpellation, à déstabiliser l'élève, à susciter des appréhensions ou compréhensions divergentes, à provoquer un débat ; bref, à engager l'élève dans une véritable dialectique de la validation (Cf. section 2.1.3). Cela tient avant tout au choix des résultats abordés dans les problèmes, résultats nettement pas assez stimulants. Le rapport de l'élève aux mathématiques en est un d'*application* (problèmes des catégories A, B, et même M), plutôt que de *réflexion*.

> *Mais il y a aussi la façon de soumettre le problème à l'élève. On objectera que sous ce rapport, la marge de manoeuvre est mince dans un livre, et que c'est à l'enseignant en classe de trouver un mode ad hoc de présentation, qui saura faire naître le questionnement. C'est vrai. Mais cela n'empêche pas qu'un*

minimum de réflexion sur ces enjeux (exploitations possibles de la situation) ne doive présider à la rédaction des problèmes. Il est aussi du rôle des concepteurs (par le biais, entre autres, des guides d'enseignement ; le guide d'enseignement de la collection à l'étude est en l'occurrence de peu de secours) de mettre en évidence les intentions sous-jacentes à certaines situations, et de montrer les exploitations possibles. L'exemple suivant est à notre avis significatif :

Exemple 34 (Carrousel, secondaire 2, tome 2, p. 137).

Comment trouver l'aire d'un disque ?
On découpe le disque en secteurs que l'on dispose de façon à former une figure se rapprochant d'un parallélogramme.



En découpant le disque en un plus grand nombre de secteurs, on se rapproche encore davantage de la forme d'un parallélogramme. (Figure).

a) *Si l'on découpe le disque en un très grand nombre de secteurs, quelle figure forme-t-on à la limite ?*
b) *Est-il vrai que la mesure de la base de cette figure correspond alors à la moitié de la circonférence du cercle, soit πr unités ?*
c) *Est-il exact que sa hauteur correspond au rayon du disque ?*
d) *Quelle expression représente alors l'aire du disque ?*

Pourquoi poser des questions qui n'en sont pas ? La formulation en b) et c) frôle le ridicule. La formulation en a) aussi, tout compte fait, dans la mesure ou le mot *parallélogramme* apparaît deux fois juste au-dessus. Voilà un auteur en mal de « constructivisme », qui tient mordicus à poser des questions. Mais voilà aussi du constructivisme bien mal compris, et une occasion ratée de soumettre à l'élève un problème de la catégorie H.

Nous devons aussi signaler les bons coups. Ce sont en général ces problèmes peu nombreux, cotés C, H ou G, qu'on trouve surtout en secondaire 1. (Les manuels de secondaire 1 et secondaire 5 sont à bien des égards les mieux conçus de la collection). Par exemple, la séquence qui porte sur l'inégalité du triangle (secondaire 1, tome 2), pages 266, 267 et 268 (avec une réserve sur le passage à la limite, comme nous l'avons signalée dans notre commentaire, au chapitre 4). Le tableau des propriétés des quadrilatères, à remplir (secondaire 1, tome 2, p. 279). Le problème g), p. 238, secondaire 2, tome 2. Le *« Forum »* de la page 68, secondaire 4, tome 2. Et nous relevons pour finir quatre intéressantes séquences de secondaire 5 (tome 1, p. 272, p. 286, p. 306, p. 315), par lesquelles l'élève formule un résultat à partir d'explorations avec le logiciel *Cabri-Géomètr*e, résultat qu'il sera amené à démontrer formellement par la suite.

5.2.3 Interprétation des données : les séquences déductives

La carence de problèmes de la catégorie H est également à mettre en lien avec cette autre carence, celle des problèmes de la catégorie N, puisque les problèmes de ces deux catégories sollicitent une *séquence déductive*. Ici aussi, il faut considérer la cinquième secondaire à part, avec sa *« Réflexion 3 »*, qui débute par la construction d'un système déductif en géométrie, et dans laquelle les séquences déductives et les problèmes cotés N se font nettement plus nombreux.

Parce que la combinaison des résultats intermédiaires à enchaîner n'y est pas d'une seule venue et doit se faire selon une organisation précise, c'est dans la séquence déductive (qu'elle soit de type N ou de type H) que l'élève apprend à bien gérer les liens logiques entre ces résultats : contrôler les implications, distinguer implication et réciproque, ne pas utiliser la thèse comme argument, faire intervenir à bon escient les propriétés des figures déjà montrées, distinguer parmi ces propriétés lesquelles caractérisent la figure (donnent lieu à une équivalence logique) et lesquelles sont partagées par d'autres figures, etc. Le travail sur les séquences déductives est donc central dans l'apprentissage de la preuve. L'élève y apprend par surcroît l'importance qu'a la bonne maîtrise d'un **répertoire de résultats** ; il prend conscience du caractère architectonique de l'édifice géométrique, de la puissance du raisonnement déductif, qui permet de grossir ce répertoire en combinant les résultats qui y sont déjà.

Or, il faut bien le dire, ce travail sur les séquences déductives ne nous apparaît pas satisfaisant dans la collection à l'étude. Pour les cinq années, on dénombre 98 problèmes de catégorie H, N ou N_M, soit seulement 4% des 2340 problèmes. Là-dessus, 44 se retrouvent en 536, soit près de la moitié, si bien qu'on peut se demander si le programme de secondaire 5, tel que présenté dans la collection, n'est pas en rupture avec ceux des années précédentes. L'apprentissage de la preuve est un processus de longue haleine, et la compilation de notre classification montre que la préparation de l'élève aux raisonnements déductifs plus complexes, pendant les quatre premières années, est insuffisante.

On remarque également que parmi les 75 problèmes de catégorie N, 42 sont de type N(1) ou N_M(1) (séquences déductives qui ne passent que par un seul résultat intermédiaire), 25 sont de type N(2) (séquences déductives à deux résultats intermédiaires), **ce qui ne laisse que 8 problèmes** de type N(3), N(4) ou N(5) (séquences déductives à plus de deux résultats intermédiaires), pour toute la durée du secondaire. Est-il possible que les auteurs de la collection aient interprété ce que le programme du MEQ désigne par « îlot déductif » dans un sens trop large ? Les auteurs des programmes du MEQ ont voulu restreindre le nombre des résultats admis axiomatiquement, pour une portion donnée de la matière géométrique travaillée. Cela n'implique de prime abord rien sur la façon dont seront combinés ces résultats. Les concepteurs de la collection semblent au contraire avoir interprété cela comme une restriction portant aussi sur la longueur des chaînes déductives sollicitées.

Regardons de plus près où ces problèmes de type H ou N auraient dû s'insérer pour assurer une évolution plus progressive de l'apprentissage. En secondaire 1, on compte 14 problèmes de type H ou N, ce qui de prime abord peut sembler raisonnable, compte tenu que l'élève fait ses premières armes. On compte 10 problèmes de type H ou N en 2^{e} secondaire, 16 en 3^{e} secondaire et 14 en 4^{e} secondaire. C'est donc dans les trois années centrales, particulièrement en secondaire 4, que la carence est la plus manifeste.

Par exemple, dans cette partie de la *Réflexion 5* (*Les isométries*) du programme 436 qui porte sur les critères de congruence des triangles, il faut attendre plus de vingt problèmes (tous cotés M ou M_B) avant que n'apparaisse un premier problème de catégorie N(1), où l'élève trouve par lui-même à quelle paire de triangles appliquer le critère de congruence ad hoc (voir le problème n°9, p. 84, 436, tome 2, dans notre chap. 4). Il sera suivi d'un autre problème de catégorie N(1), puis plus loin (p. 90, n°20 et n°21) de deux autres, de catégories N(1) et N(2), respectivement. C'est tout ! Si les critères de congruence des triangles ne se prêtent pas aux séquences déductives, qu'est-ce qui s'y prêtera ??!!!

5.2.4 Interprétation des données : la géométrie des transformations

Dans les commentaires qui accompagnent la classification du chapitre 4 (voir n°20, p. 203, sec. 3, tome 2 et problème o), p. 60, sec. 4, tome 2) nous avons relevé que la composition des isométries est étudiée deux fois, en 3^e^ et 4^e^ secondaires, sans que la nature du traitement — essentiellement empirico-intuitif — ne marque quelque progrès que ce soit d'un niveau à l'autre. Voilà pourtant selon nous un autre sujet où les séquences déductives auraient pu — auraient dû ! — être à l'honneur.

Comme nous le faisions remarquer dans le commentaire au « *Forum* » de la page 68 (436, tome 2), il suffit de montrer dans un premier temps (sur une base formelle ou semi-formelle) qu'une isométrie est complètement déterminée par l'image de trois points non colinéaires. Partant de cette prémisse, établir formellement l'effet de la composition de deux isométries peut donner lieu à une séquence déductive à la portée de l'élève de secondaire 4, ou peut-être même de secondaire 3 : il suffit de choisir judicieusement trois points non colinéaires auxquels on applique les isométries de la composition, et de montrer que l'effet sur ces trois points est le même que l'effet de l'isométrie qu'on suppute être l'isométrie résultante. Si l'effet sur les trois points est le même, on peut conclure. Ce type d'argument montre la puissance du raisonnement déductif, en plus d'ouvrir la voie à une mine de problèmes possibles : déterminer la résultante de toute combinaison de deux isométries, montrer que toute rotation est la composée de deux réflexions, que toute translation est la composée de deux réflexions, que toute isométrie est la composée d'une translation avec une ou deux réflexions, que toute isométrie est la composée de trois réflexions ou moins, etc.

La géométrie des transformations est abordée, en 3e et 4e secondaires, sur une base qui est encore beaucoup trop empirique, et le fait que les problèmes qui se rapportent aux transformations soient pratiquement tous de catégorie A ou B est significatif à cet égard. Mais il y a plus grave. Cette géométrie des transformations intervient ensuite dans les preuves pour y jouer un rôle ambigu. En secondaire 4, après un préambule où l'on fait faire à l'élève de la logique propositionnelle, où on lui explique ce que sont un théorème et une démonstration, viennent quelques-unes de ces démonstrations, appliquées à des résultats que l'élève connaît déjà : voir les problèmes g) p. 28, l) p. 30 et n) p. 31 du manuel de 436, second tome.

On y montre par exemple la congruence des deux angles *AOB* et *COD*, opposés par le sommet *O*, en considérant la rotation de 180° autour de *O*. Cette rotation applique l'angle *AOB* sur l'angle *COD*, et comme les rotations conservent les mesures des angles, on conclut. Le problème, c'est que les propriétés des rotations invoquées ici ont toutes été admises sur une base qui n'a été que perceptive ou empirique. On peut se demander en quoi la congruence des angles opposés par le sommet est-elle moins intuitivement évidente que la conformité[38] d'une rotation. La géométrie des transformations vient ici **court-circuiter le processus de formalisation** de telle façon que l'élève pourrait, selon nous, mal en saisir les enjeux. Elle vient asseoir certaines sources de validation qui pourraient s'avérer des obstacles au travail géométrique ultérieur, visant le développement d'une attitude de preuve. La situation ne sera corrigée qu'en partie en secondaire 5, avec la mise en place d'un système déductif plus strict, dans lequel cependant les critères de congruence des triangles seront « démontrés » par des argumentations basées sur la géométrie des transformations.

La mise en place d'un système déductif pourrait fort bien commencer en 4e secondaire, peut-être même avant, quitte à ne pas chercher une axiomatisation qui soit nécessairement minimale. On pourrait alors bâtir ce système déductif à un rythme

[38] Rappelons qu'une transformation est dite *conforme* si elle préserve la mesure des angles.

plus posé, gagnant le net avantage de « jouer franc-jeu » avec l'élève, c'est-à-dire de ne pas faire passer pour formels des arguments qui ne le sont qu'à moitié. Quant à la géométrie des transformations, elle serait un objet d'étude parmi d'autres, à traiter avec les mêmes exigences de rigueur que le reste.

5.3 Bilan sur la collection à l'étude

L'apprentissage de la preuve a certainement été un souci des auteurs de la collection. La logique propositionnelle et les notions d'axiome, de théorème, de démonstration sont abordées en secondaire 4, puis reprises plus systématiquement en secondaire 5, avec la construction d'un *système déductif en géométrie*. Les problèmes qui présentent une difficulté surajoutée de type $X'_{\text{définition}}$, $X'_{\text{conception}}$, $X'_{\text{perception}}$ reviennent avec régularité, et témoignent de ce que les auteurs ont cherché à faire évoluer l'élève vers une plus grande maturité mathématique, vers une rationalité plus distanciée des cheminements empiriques par lesquels celui-ci a d'abord forgé ses conceptions. Le type $X'_{\text{dessin-figure}}$ est probablement, à cet égard, celui qui a été le plus négligé (seulement 5 problèmes de type $X'_{\text{dessin-figure}}$, dont 4 en secondaire 1).

Par ailleurs, notre analyse fait ressortir que l'évolution dans l'apprentissage de la preuve n'a pas été « gérée » avec la vigilance voulue par les auteurs de la collection :

- les raisonnements directs, d'un seul tenant, sont omniprésents, la pensée déductive exercée sur une argumentation indirecte, en séquence, est sous-représentée par des séquences qui sont de toutes façons trop courtes ;
- si les manuels de 1^re^ et 5^e^ secondaires nous apparaissent comme les plus réussis, ceux de 2^e^, 3^e^ et 4^e^ secondaires n'assurent pas d'après nous une transition suffisamment graduelle entre les deux : non seulement le niveau de formalisation reste-t-il pratiquement le même durant ces trois années, mais les problèmes de catégories C, H ou G qui sollicitent une argumentation hybride (articulée à la fois sur le sensible et sur l'induction ou la déduction), qui mobilisent des schèmes cognitifs à mi-chemin entre le jugement d'une seule venue et la pensée déductive formelle, en sont pratiquement absents ;
- du point de vue des situations d'enseignement, « l'attitude de preuve » ne nous semble pas toujours adéquatement sollicitée, et l'élève est peu confronté à des

questionnements qui l'engagent dans une véritable dialectique de la validation : les résultats abordés ne sont généralement pas assez surprenants, pas assez stimulants ; la formulation des problèmes, contexte pris en compte, a trop souvent tendance à désamorcer la curiosité.

5.4 Retour sur la grille et conclusion

Comme le lecteur l'a sans doute constaté, la classification des problèmes à l'aide de notre grille d'analyse nous a permis d'avoir une vue d'ensemble sur l'évolution du cheminement proposé à l'élève à l'égard de l'apprentissage de la preuve, dans la collection à l'étude. La grille d'analyse permet donc en quelque sorte un recul, que la simple inspection des problèmes, aussi minutieuse eût-elle été, n'aurait pas rendu possible. La gradation en trois grandes classes de validations — par le sensible, par une argumentation raisonnée articulée sur le sensible, par le raisonnement logico-déductif — permet, dans une certaine mesure :

- de vérifier si la même gradation se reflète dans le cheminement ;
- de jauger la progression sur toute la durée du curriculum secondaire ;
- d'en relever les ruptures, le cas échéant.

La distinction, à l'intérieur de la troisième classe, des catégories M et N, de même que l'évaluation du nombre de résultats intermédiaires mobilisés dans les problèmes de la catégorie N [39] , peuvent de prime abord sembler des considérations trop « pointues ». A posteriori, elles nous apparaissent au contraire indispensables, puisqu'elles permettent d'évaluer la progression en complexité des combinaisons logiques mises en oeuvre. Comme nous l'avons fait valoir dans la section 5.2.3, quand cette complexité reste en deçà d'un certain seuil — celui de la *séquence déductive* — l'élève n'est pas confronté aux principaux obstacles et difficultés inhérents à l'apprentissage de la preuve.

[39] Une telle évaluation aurait également pu se faire pour les problèmes de la catégorie H. Mais nous avons jugé ceux-ci trop peu nombreux pour qu'elle vaille la peine.

Nous sommes par ailleurs bien conscients de ce que gagnerait notre analyse en rigueur et en profondeur si la grille faisait l'objet d'une expérimentation « sur le terrain », par la conception d'épreuves soumises aux élèves, et qui reprendraient différents « niveaux » de validation. Il s'agirait alors d'évaluer dans quelle mesure la grille rend éventuellement compte des gradations, des niveaux de complexité, de l'évolution possible. Mais ça, c'est une autre histoire !

Quant aux apports et à l'intérêt de la présente étude sur le plan de l'enseignement, nous espérons qu'ils sont non négligeables. Nous sommes d'avis que notre grille d'analyse peut aider au choix éclairé des problèmes et exercices à soumettre aux élèves, de façon à ce que ce choix aménage une évolution progressive à travers tout le curriculum du secondaire. Nous pensons également que notre grille d'analyse peut être mise à profit dans la conception et l'élaboration de séquences d'intervention visant à développer une attitude de preuve. Mais ça aussi, c'est une autre histoire ...

BIBLIOGRAPHIE

Balacheff, Nicolas. 1982. *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*. Laboratoire I.M.A.G. (Grenoble), vol. 3, n°3, pp. 261-304.

Balacheff, Nicolas. 1987. *Processus de preuve et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics, vol. 18, n°2, mai 87, pp. 147-176.

Barbin, Evelyne. 1988. *La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques*. Bulletin de l'A.P.M.E.P., n° 36, décembre 88, pp. 591-620.

Bkouche, Rudolph. 1988a. *Enseigner la géométrie, pourquoi ?* IREM de Lille, pp. 1-13.

Bkouche, Rudolph. 1988b. *De la démonstration.* Colloque Inter-IREM de Géométrie, Montpellier.

Bourdieu, Pierre. 1980. *Le sens pratique*. Éditions de Minuit, Paris.

Breton, Guy, en coll. avec André Deschênes, Antoine Ledoux et Benoît Côté. 1997. *Réflexions mathématiques*. Les éditions CEC inc. Montréal.

Breton, Guy, en coll. avec Denis Fortin. 1994. *Carrousel mathématique*. Les éditions CEC inc. Montréal.

Brousseau, Guy. 1975. *Études de l'influence des conditions de validation sur l'apprentissage d'un algorithme.* IREM de Bordeaux.

Brousseau, Guy. 1977. *Étude des processus d'apprentissage en situations scolaires.* IREM de Bordeaux, cahier n°18.

Brousseau, Guy. 1998. *Théorie des situations didactiques.* Éditions La pensée sauvage, Paris.

Coxford, Arthur F. Jr., Linda Burks, Claudia Giamati et Joyce Jonik. 1991. *Geometry from multiple Perspectives*. Curriculum and Evaluations Standards for School Mathematics, Addenda Series, Grades 9 to 12. The National Council of Teachers of Mathematics Inc. Reston, Virginie.

Fischbein, Efraim. 1987. *Intuition in Science and Mathematics. An educational Approach*. D. Reidel Publishing Cie, Dordrecht, Pays-Bas.

Freudenthal, Hans. 1983. *Didactical Phenomenology of mathematical Structures*. D. Reidel Publishing Cie, Dordrecht, Pays-Bas.

Gras, Régis. 1983. *Instrumentation de notions mathématiques. Un exemple : la symétrie*. Petit x, n°1, pp. 7-40. Éd. IREM de Grenoble.

Hanna, Gila. 1983. *Rigorous Proof in mathematics Education.* OISE Press, Toronto.

Hanna, Gila. 1995. *Challenges to the Importance of Proof.* For the Learning of Mathematics, vol. 15, n° 3, novembre 95, pp. 42-49.

Laborde, Colette, et Bernard Capponi. 1994. *Cabri-Géomètre, constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique*. Recherche en didactique des mathématiques, vol. 14, n° 12, pp. 165-210.

Lakatos, Imre. 1976. *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press, Cambridge.

Largeault, Jean. 1993. *Intuition et intuitionnisme*. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris.

MEQ. 1993-1996. *Programmes d'études, Mathématique 116, Mathématique 216, Mathématique 314, Mathématique 416, Mathématique 436, Mathématique 514, Mathématique 536.* Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec. Québec.

NCTM. 1989. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* The National Council of Teachers of Mathematics Inc. Reston, Virginie.

Parzysz, Bernard. 1988. *Knowing vs Seeing, Problems of the plane Representations of Space Geometry Figures.* Educational Studies in Mathematics, vol. 19, n°1, pp 79-92.

Piaget, Jean. 1964. *Six Études de psychologie.* Coll. Folio/Essais. Éditions Denoël, Paris.

Popper, Karl R. 1991. *La connaissance objective.* Flammarion, Paris.

Robert, André. 1982. *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur.* Thèse d'état, Université de Paris VII.

Rouche, Nicolas. 1989. *Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?* Dans La démonstration mathématique dans l'histoire. Colloque Inter-Irem *Épistémologie et histoire des mathématiques*, pp. 8-38.

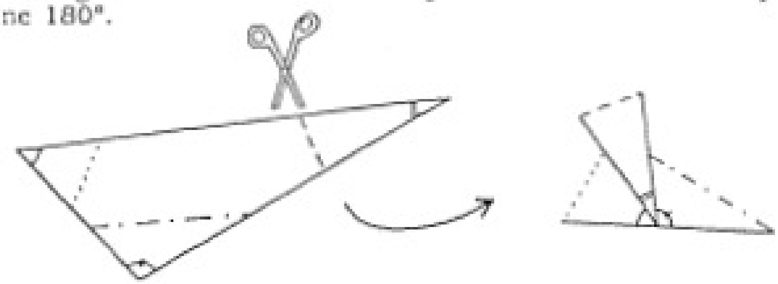
Thom, René. 1974. *Mathématiques modernes et mathématiques de toujours*, suivi de *Les mathématiques « modernes », une erreur pédagogique et philosophique ?* Dans Pourquoi la mathématique ?, sous la dir. de Robert Jaulin, pp. 39-88. Éditions 10-18, Paris.

Thurston, William P. 1994. *On Proof and Progress in Mathematics.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 30, n° 2, pp. 161-177.

ANNEXE

Liste des preuves soumises aux étudiants dans le cadre de deux expérimentations menées au collégial. Elle s'inspire d'un document intitulé « *Justifying and Proving in School Mathematics* » (document de travail de Celia Hoyle, Institute of Education, Université de Londres).

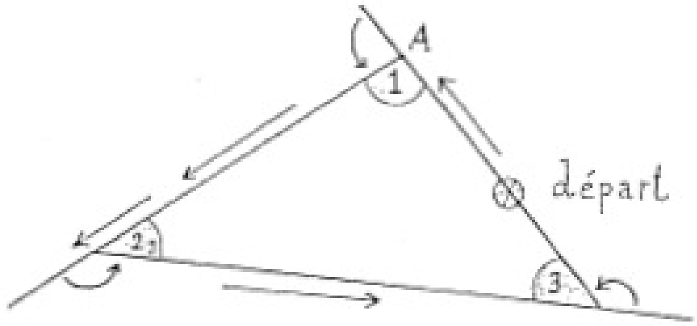
Preuve d'Antoine.
Dans un triangle de carton, j'ai découpé les angles et les ai juxtaposés. Les 3 angles forment alors une ligne droite, c'est-à-dire que leur total donne 180°.



Figure, preuve d'Antoine

Je l'ai essayé avec des triangles de toutes les formes, et ça marche à chaque fois. Donc, c'est vrai.

Preuve de Brigitte.



Figure, preuve de Brigitte

Je marche sur les côtés du triangle, avec un "compteur" qui enregistre en degrés chaque rotation que j'effectue. Le long des côtés du triangle, le compteur ne bouge pas puisque je me déplace en ligne droite. À chaque coin — par exemple, au sommet *A*, voir sur la figure — le compteur enregistre une rotation de (180° – *l'angle intérieur*). Par exemple, au sommet *A*, je tourne de (180° – *l'angle* 1). Mais après avoir parcouru tout le triangle, j'ai fait un tour complet sur moi-même ; le compteur a donc enregistré une rotation de 360°. On a alors,

$$360° = (180° - l'angle\ 1) + (180° - l'angle\ 2) + (180° - l'angle\ 3).$$

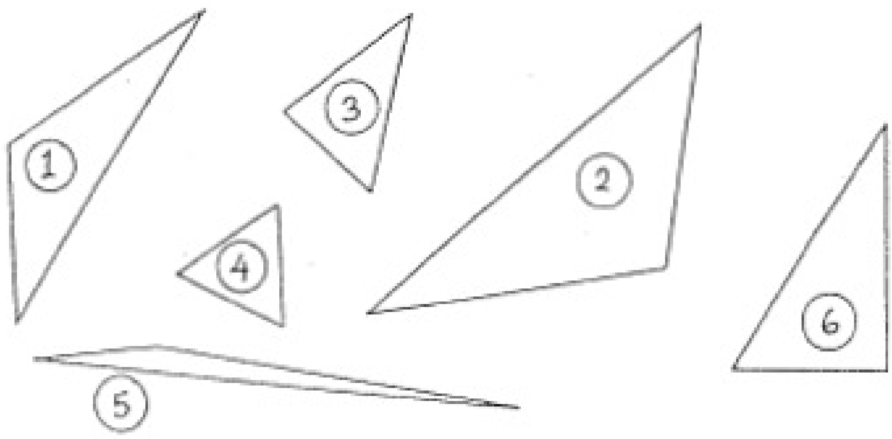
Faisant passer les angles intérieurs à gauche de l'égalité, et le 360° à droite, ça donne

$$\begin{aligned} angle\ 1 + angle\ 2 + angle\ 3 &= 180° + 180° + 180° - 360° \\ &= 180°. \end{aligned}$$

et c'est exactement ce qu'on voulait montrer !

Preuve de Charles.
J'ai mesuré les angles de toutes sortes de triangles (voir figure) avec précision. Ça m'a donné le tableau suivant :

	angle 1	*angle 2*	*angle 3*	total
Triangle 1	123	24	33	180
Triangle 2	107	32	41	180
Triangle 3	80	40	60	180
Triangle 4	60	60	60	180
Triangle 5	165	4	11	180
Triangle 6	90	58	32	180



Figure, preuve de Charles

Donc, le résultat est vrai !

Preuve de Diane.
D'abord, un rappel. Une droite qui coupe deux parallèles détermine avec celles-ci deux paires d'angles égaux, appelés *angles alternes-internes*. Dans la figure ci-dessous, les angles 1 et 3 sont alternes-internes, et ils sont égaux. Il en est de même des angles 2 et 4.

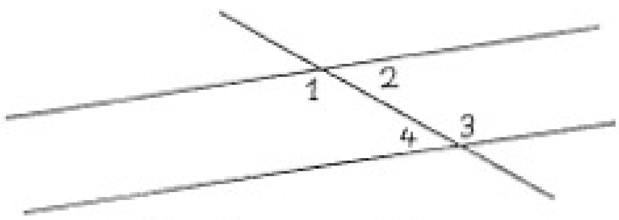


Figure 1, preuve de Diane

Revenons à la preuve. Soit ABC un triangle. Je trace la droite d, qui est la parallèle à $\overline{BC}$ qui passe par A. Soit M et N deux points de d, de part et d'autre de A, avec M du même côté que B.

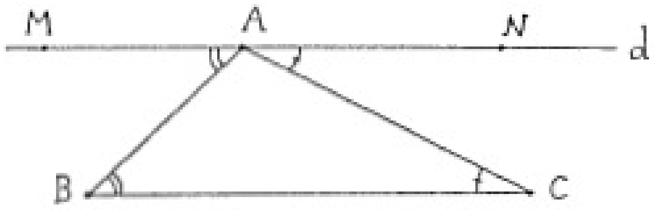
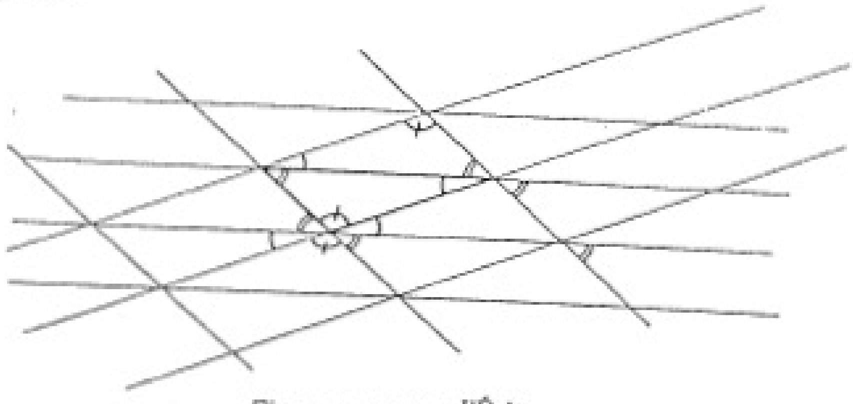


Figure 2, preuve de Diane

Alors, $\angle MAB = \angle ABC$
(angles alternes-internes par rapport aux parallèles d et BC),
$\angle NAC = \angle ACB$ (même chose).
Mais, $\angle MAB + \angle BAC + \angle NAC = 180°$ (par construction),
ce qui implique que
$$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°,$$
et c'est ce qu'on voulait démontrer.

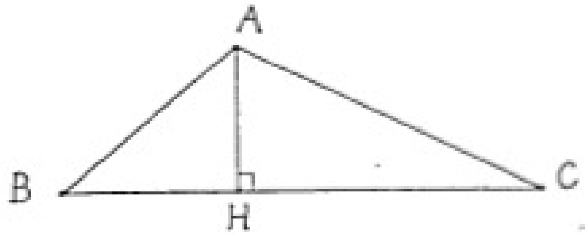
Preuve d'Éric.
Je me sers du triangle donné comme d'une petite "tuile", avec laquelle je "pave" le plan.



Figure, preuve d'Éric

Dans ce pavage du plan, je note tous les angles égaux. Autour d'un point de jonction du pavage, la somme des angles est de 360°. Comme chaque angle apparait deux fois autour de chaque point (voir figure), cela établit bien le résultat voulu.

Preuve de Francine.
En abaissant la hauteur du sommet d'un triangle au côté opposé à ce sommet, je sais qu'il y a deux possibilités : ou bien le pied de la hauteur tombe *sur* le côté opposé, ou bien il est sur la droite, mais *à l'extérieur* du côté opposé. Je sais par ailleurs que quelle que soit la forme d'un triangle ABC donné, il y a au moins une des trois hauteurs dont le pied est *sur* le triangle. Quitte à renommer les sommets, je vais donc supposer que le pied de la hauteur abaissée du sommet A est *sur* le côté $\overline{BC}$, comme dans la figure ci-dessous. Soit H le pied de cette hauteur.



Figure, preuve de Francine

Comme le triangle ΔABH est rectangle en H, on a :

$$\angle ABH + \angle BAH = 90°.$$

Comme le triangle ΔACH est rectangle en H, on a :

$$\angle ACH + \angle CAH = 90°.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC &= \angle ABH + \angle ACH + \angle BAC \\ &= \angle ABH + \angle ACH + (\angle BAH + \angle CAH) \\ &= (\angle ABH + \angle BAH) + (\angle ACH + \angle CAH) \\ &= 90° + 90° \\ &= 180°,\end{aligned}$$

et c'est exactement ce qu'on voulait prouver.

Preuve de Gérard.
Je trace la diagonale d'un carré, formant ainsi deux triangles. Comme la diagonale du carré partage l'angle droit en deux angles égaux, ces angles valent 45°. Il y a donc dans chaque triangle, un angle droit, plus deux angles de 45°, ce qui fait bien en tout :

$$90° + 45° + 45° = 180°.$$

Donc, le résultat est vrai.

Figure, preuve de Gérard