

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉVALUATION COMPARATIVE DE LA MODÉLISATION DE LA VOLATILITÉ  
CONDITIONNELLE SUR LES MARCHÉS FINANCIERS POUR LE PRIX DES OPTIONS  
EN PÉRIODES TROUBLES

MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
MAÎTRISE EN ÉCONOMIQUE

PAR  
SOUHAIB MADACI

AVRIL 2026

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.12-2023). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

# Remerciements

Je souhaite exprimer ma gratitude à mon directeur de recherche, Alain Paquet, pour son encadrement, sa disponibilité et ses conseils. Je remercie également ma famille et mes amis pour leur soutien constant tout au long de ce travail.

# Résumé

Ce mémoire propose une évaluation comparative de plusieurs modèles de volatilité conditionnelle – Moyenne Mobile, GARCH(1,1), GARCH-M, TGARCH et TV-GARCH – appliqués à la tarification d'options sur les indices boursiers Nikkei 225 (Asie), NASDAQ-100 et S&P 500 (Amérique), ainsi que le CAC 40 (Europe). L'étude s'inscrit dans un contexte de forte instabilité des marchés, marqué par les crises sanitaires, économiques et géopolitiques récentes. L'objectif est de déterminer quels modèles offrent la meilleure précision prédictive dans la tarification d'options, tout en comparant les réactions des marchés financiers de différentes zones géographiques face aux chocs.

L'analyse repose sur des données journalières couvrant la période du 3 janvier 2018 au 31 mars 2025. Après vérification de la stationnarité des rendements et de la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle, les modèles sont estimés, et leurs volatilités sont injectées dans la formule de Black-Scholes. La performance est évaluée à l'aide du "Root Mean Squared Error" (RMSE) entre prix théoriques et observés.

Les résultats montrent que le modèle TV-GARCH se distingue sur le NASDAQ-100 et le Nikkei 225, alors que le modèle TGARCH est plus adapté au CAC 40 en raison d'effets asymétriques marqués. Le modèle GARCH(1,1) se montre plus stable pour le S&P 500. Le modèle de Moyenne Mobile capture les effets dynamiques de court terme, tandis que la spécification GARCH-M met en évidence la prime de risque liée à la volatilité.

**Mots-clés :** Volatilité, GARCH, Black-Scholes, NASDAQ-100, Nikkei 225, CAC 40, S&P 500, RMSE, tarification d'options, prévision financière.

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Remerciements</b>                                  | <b>1</b>  |
| <b>Résumé</b>   | <b>2</b>  |
| <b>Introduction</b>                                   | <b>9</b>  |
| <b>CHAPITRE I</b>                                     | <b>11</b> |
| <b>1 Revue de littérature</b>                         | <b>12</b> |
| 1.1 Introduction de la revue de littérature . . . . . | 12        |
| 1.2 Le modèle de moyenne mobile (MA) . . . . .        | 13        |
| 1.3 Le modèle GARCH(1,1) . . . . .                    | 14        |
| 1.4 Le modèle GARCH-M . . . . .                       | 15        |
| 1.5 Le modèle TGARCH "Threshold GARCH" . . . . .      | 16        |
| 1.6 Le modèle TV-GARCH "Time-Varying GARCH" . . . . . | 18        |
| <b>CHAPITRE II</b>                                    | <b>21</b> |
| <b>2 Méthodologie</b>                                 | <b>22</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .                            | 22        |
| 2.2 Sélection et préparation des données . . . . .    | 22        |
| 2.2.1 Description des données . . . . .               | 22        |
| 2.2.2 Transformation des données . . . . .            | 23        |
| 2.2.3 Tests statistiques préliminaires . . . . .      | 23        |
| 2.3 Estimation des modèles de volatilité . . . . .    | 23        |
| 2.3.1 Moyenne Mobile (MA) . . . . .                   | 23        |
| 2.3.2 Modèle GARCH(1,1) . . . . .                     | 24        |
| 2.3.3 Modèle GARCH-M . . . . .                        | 25        |
| 2.3.4 Modèle TGARCH . . . . .                         | 25        |

|                     |  |           |
|---------------------|--|-----------|
| 2.3.5               | Modèle TV-GARCH . . . . .  | 25        |
| 2.4                 | Simulation des prix théoriques d'options . . . . .                                     | 26        |
| 2.4.1               | Formule de Black-Scholes . . . . .   | 26        |
| 2.4.2               | Adaptation de la volatilité . . . . .  | 27        |
| 2.4.3               | Scénarios de simulation . . . . .  | 27        |
| 2.5                 | Critères d'évaluation de la performance . . . . .                                      | 28        |
| 2.5.1               | Définition du RMSE . . . . .   | 28        |
| 2.5.2               | Justification méthodologique . . . . .   | 28        |
| 2.6                 | Conclusion de la méthodologie . . . . .  | 29        |
| <b>CHAPITRE III</b> |  | <b>30</b> |
| <b>3</b>            | <b>Présentation et analyse des données</b>   | <b>31</b> |
| 3.1                 | Introduction . . . . .   | 31        |
| 3.2                 | Source et nature des données . . . . .   | 31        |
| 3.2.1               | Sélection des indices . . . . .  | 31        |
| 3.2.2               | Périodes d'analyse . . . . .   | 32        |
| 3.2.3               | Transformations des données . . . . .  | 33        |
| 3.3                 | Préparation des variables pour la simulation . . . . .                                 | 33        |
| 3.3.1               | Maturité des options . . . . .   | 33        |
| 3.3.2               | Prix d'exercice et "moneyness" . . . . .   | 34        |
| 3.3.3               | Volatilités et taux d'intérêt . . . . .  | 34        |
| 3.4                 | Description statistique des séries . . . . .   | 34        |
| 3.4.1               | Évolution graphique des prix de clôture des indices . . . . .                          | 34        |
| 3.4.1.1             | Analyse des indices américains . . . . .   | 35        |
| 3.4.1.2             | Analyse des indices européen et asiatique . . . . .                                    | 36        |
| 3.4.2               | Analyse graphique des rendements journaliers . . . . .                                 | 36        |
| 3.4.3               | Statistiques descriptives des rendements journaliers . . . . .                         | 38        |
| 3.5                 | Test de stationnarité des rendements . . . . .   | 39        |
| 3.5.1               | Test d'Augmented Dickey–Fuller (ADF) . . . . .   | 39        |
| 3.5.2               | Hypothèses de test . . . . .   | 39        |
| 3.5.3               | Sélection des retards optimaux . . . . .   | 39        |
| 3.5.4               | Résultats par indice . . . . .   | 39        |
| 3.5.5               | Synthèse des résultats . . . . .   | 40        |
| 3.6                 | Analyse des corrélogrammes des rendements . . . . .                                    | 41        |
| 3.6.1               | Test de Ljung-Box ( $k = 20$ ) . . . . .   | 41        |
| 3.7                 | Vérification de la présence d'un effet ARCH à l'aide des rendements au carré . . . . . | 42        |

|                      |  |           |
|----------------------|--|-----------|
| 3.8                  | Évaluation de la normalité des rendements . . . . .  | 43        |
| 3.8.1                | Histogrammes et tests de normalité des rendements . . . . .  | 43        |
| 3.8.2                | Résultats par indice . . . . .   | 44        |
| 3.9                  | Modélisation de l'espérance conditionnelle des rendements . . . . .  | 44        |
| 3.10                 | Modélisation ARMA des séries de rendements . . . . .   | 45        |
| 3.11                 | Test de multiplicateur de Lagrange pour détecter l'effet ARCH (test LM) . .  | 48        |
| <b>CHAPITRE IV</b>   |  | <b>51</b> |
| <b>4</b>             | <b>Résultats</b>   | <b>52</b> |
| 4.1                  | Estimation de la volatilité par le modèle Moyenne mobile (MA) . . . . .  | 52        |
| 4.1.1                | Traitement des valeurs manquantes . . . . .  | 52        |
| 4.1.2                | Résultats obtenus . . . . .  | 53        |
| 4.2                  | Estimation de la volatilité par les modèles GARCH . . . . .  | 56        |
| 4.2.1                | Modèle GARCH(1,1) . . . . .  | 56        |
| 4.2.2                | Modèle GARCH-M . . . . .   | 57        |
| 4.2.3                | Modèle TGARCH (GJR-GARCH) . . . . .  | 58        |
| 4.2.4                | Modèle TV-GARCH . . . . .  | 59        |
| 4.2.4.1              | Estimation des paramètres TV-GARCH pour les quatre indices : évolution des paramètres $\omega_t$ , $\alpha_t$ et $\beta_t$ . . . . . | 59        |
| 4.3                  | Comparaison des performances des modèles de volatilité . . . . .   | 63        |
| 4.3.1                | Calcul du RMSE . . . . .   | 63        |
| 4.3.2                | Performance sur l'indice NASDAQ-100 . . . . .  | 63        |
| 4.3.3                | Performance sur l'indice S&P 500 . . . . .   | 64        |
| 4.3.4                | Performance sur l'indice CAC 40 . . . . .  | 65        |
| 4.3.5                | Performance sur l'indice Nikkei 225 . . . . .  | 66        |
| 4.4                  | Analyse critique des résultats . . . . .   | 67        |
| 4.5                  | Discussion théorique . . . . .   | 68        |
| 4.6                  | Implications pratiques . . . . .   | 70        |
| <b>CHAPITRE V</b>    |  | <b>71</b> |
| <b>5</b>             | <b>Conclusion générale</b>   | <b>72</b> |
|                      | APPENDICE A – Tests ADF . . . . .  | 75        |
|                      | APPENDICE B – Résultats des modèles ARMA . . . . .   | 83        |
|                      | APPENDICE C – Tests ARCH-LM . . . . .  | 89        |
| <b>Bibliographie</b> |  | <b>93</b> |

# Liste des figures

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.1  | Évolution du prix de l'indice S&P 500 . . . . .   | 35 |
| 3.2  | Évolution du prix de l'indice NASDAQ-100 . . . . .  | 35 |
| 3.3  | Évolution du prix de l'indice CAC 40 . . . . .  | 35 |
| 3.4  | Évolution du prix de l'indice Nikkei 225 . . . . .  | 35 |
| 3.5  | Évolution des rendements journaliers de l'indice S&P 500 . . . . .  | 37 |
| 3.6  | Évolution des rendements journaliers de l'indice NASDAQ-100 . . . . .   | 37 |
| 3.7  | Évolution des rendements journaliers de l'indice CAC 40 . . . . .   | 37 |
| 3.8  | Évolution des rendements journaliers de l'indice Nikkei 225 . . . . .   | 37 |
| 3.9  | Histogramme des rendements de l'indice S&P 500 . . . . .  | 43 |
| 3.10 | Histogramme des rendements de l'indice NASDAQ-100 . . . . .   | 43 |
| 3.11 | Histogramme des rendements de l'indice CAC 40 . . . . .   | 43 |
| 3.12 | Histogramme des rendements de l'indice Nikkei 225 . . . . .   | 43 |
| 4.1  | Évolution comparée des volatilités annualisées estimées par moyenne mobile<br>(61 jours) pour les indices S&P 500, CAC 40, NASDAQ-100 et Nikkei 225<br>(03/01/2025 – 31/03/2025) . . . . .                          | 53 |
| 4.2  | Évolution quotidienne des paramètres TV-GARCH ( $\omega, \alpha, \beta$ ) avec intervalles<br>de confiance bootstrap à 95 % – Indices S&P 500 (gauche) et NASDAQ-100<br>(droite) (03/01/2025–31/03/2025) . . . . .  | 60 |
| 4.3  | Évolution quotidienne des paramètres TV-GARCH ( $\omega, \alpha, \beta$ ) avec intervalles<br>de confiance bootstrap à 95 % – Indices CAC 40 (gauche) et Nikkei 225 (droite)<br>(03/01/2025 – 31/03/2025) . . . . . | 62 |

# Liste des tableaux

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.1  | Statistiques descriptives des rendements journaliers (03/01/2018 – 03/01/2025)  | 38 |
| 3.2  | Tests ADF et tests de tendance(03/01/2018 – 03/01/2025) . . . . .   | 40 |
| 3.3  | Résultats synthétiques du corrélogramme des rendements des indices S&P 500, NASDAQ-100, CAC 40 et Nikkei 225 (03/01/2018 – 03/01/2025) . . . . .  | 41 |
| 3.4  | Résultats synthétiques du corrélogramme des rendements au carré des indices S&P 500, NASDAQ-100, CAC 40 et Nikkei 225 (03/01/2018 – 03/01/2025) . | 42 |
| 3.5  | Résultats des tests de normalité (03/01/2018 – 03/01/2025) . . . . .  | 44 |
| 3.6  | Comparaison des modèles ARMA estimés pour REND_S&P 500 (03/01/2018 – 03/01/2025). . . . .   | 46 |
| 3.7  | Comparaison des modèles AR/ARMA estimés pour REND_NASDAQ100 (03/01/2018 – 03/01/2025) . . . . .   | 47 |
| 3.8  | Comparaison finale des modèles estimés pour REND_CAC40 (03/01/2018 – 03/01/2025) . . . . .  | 48 |
| 3.9  | Test ARCH-LM(6) appliqué à la série REND_SP500 (03/01/2018 – 03/01/2025)  | 49 |
| 3.10 | Test ARCH-LM(8) appliqué à la série REND_NASDAQ100 (03/01/2018 – 03/01/2025) . . . . .  | 49 |
| 3.11 | Test ARCH-LM(12) appliqué à la série REND_CAC40 (03/01/2018 – 03/01/2025)   | 49 |
| 3.12 | Test ARCH-LM(5) appliqué à la série REND_NIKKEI225 (03/01/2018 – 03/01/2025) . . . . .  | 49 |
| 4.1  | Volatilités annualisées estimées par moyenne mobile (61 jours) - Partie 1 . .   | 55 |
| 4.2  | Volatilités annualisées estimées par moyenne mobile (61 jours) - Partie 2 . .   | 56 |
| 4.3  | Paramètres estimés du modèle GARCH(1,1) (03/01/2018 – 03/01/2025) . .   | 57 |
| 4.4  | Paramètres estimés du modèle GARCH-M (03/01/2018 – 03/01/2025) . . . .  | 58 |
| 4.5  | Paramètres estimés du modèle TGARCH (03/01/2018 – 03/01/2025) . . . .   | 58 |
| 4.6  | Somme des carrés des erreurs (SSE) et RMSE pour l'indice NASDAQ-100 (03/01/2025 – 31/03/2025) . . . . .   | 63 |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.7 | Somme des carrés des erreurs (SSE) et RMSE pour l'indice S&P 500 (03/01/2025 – 31/03/2025) . . . . . | 64 |
| 4.8 | Somme des carrés des erreurs (SSE) et RMSE pour l'indice CAC 40 (03/01/2025 – 31/03/2025) . . . . .  | 65 |
| 4.9 | SSE et RMSE pour l'indice Nikkei 225 (03/01/2025 – 31/03/2025) . . . . .                             | 66 |

# Introduction

Les marchés financiers internationaux sont aujourd’hui confrontés à une instabilité accrue, nourrie par la succession de crises sanitaires, économiques et géopolitiques. De la guerre commerciale entre les États-Unis et la Chine à la pandémie de COVID-19, en passant par la flambée inflationniste et les tensions géostratégiques contemporaines, les chocs exogènes ont profondément bouleversé les équilibres financiers mondiaux. Dans ce contexte volatil, les instruments dérivés – notamment les options financières – sont devenus essentiels à la fois comme outils de couverture et de spéculation. Cependant, la précision de leur tarification repose sur des hypothèses parfois éloignées de la réalité des marchés, en particulier l’hypothèse d’une volatilité constante, principe clé dans le modèle original de Black-Scholes.

Face aux limites de cette hypothèse, de nombreux travaux ont proposé des modèles alternatifs capables de mieux modéliser la dynamique conditionnelle de la volatilité. Parmi eux, les modèles de type GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) et leurs extensions se sont imposés comme des références incontournables. Le GARCH(1,1), modèle de base proposé par Bollerslev (1986), reste très utilisé en raison de sa simplicité et de sa capacité à capturer les phénomènes de regroupement de volatilité. Le GARCH-M, quant à lui, introduit l’effet de la volatilité sur le rendement attendu, soulignant la relation entre risque et performance. Le TGARCH (ou GJR-GARCH) permet de prendre en compte l’asymétrie des chocs, en reconnaissant que les mauvaises nouvelles ont un impact souvent plus fort sur la volatilité que les bonnes. Plus récemment, des approches comme le TV-GARCH (Time-Varying GARCH) ont été développées pour modéliser des paramètres évolutifs dans le temps, adaptés aux régimes économiques changeants. Enfin, le modèle de Moyenne Mobile reste, malgré sa simplicité, un point de référence utilisé pour capter des dynamiques plus lentes dans des contextes de volatilité modérée.

Ce mémoire s’inscrit dans cette réflexion méthodologique en proposant une analyse empirique comparative de ces cinq modèles – Moyenne Mobile, GARCH(1,1), GARCH-M, TGARCH et TV-GARCH – dans le cadre de la tarification d’options financières sur quatre indices boursiers majeurs : le NASDAQ-100 et le S&P 500 pour les États-Unis (Amérique), le CAC 40 pour la France (Europe) et le Nikkei 225 pour le Japon (Asie). L’objectif est d’évaluer dans quelle mesure ces modèles parviennent à reproduire les prix observés sur le marché à travers différentes périodes de tension, incluant les phases pré-COVID, COVID, post-COVID, et les périodes de turbulences géopolitiques. L’étude repose sur des données journalières couvrant la période du 3 janvier 2018 au 31 mars 2025, afin de garantir une profondeur temporelle suffisante pour observer les régimes de volatilité variés.

Chaque modèle est estimé à partir des rendements des indices à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. Les volatilités générées sont ensuite injectées dans la formule de Black-Scholes, permettant de calculer les prix théoriques d'options, ensuite comparés aux prix réels observés via le Root Mean Squared Error (RMSE). Cette méthodologie permet non seulement de juger la précision prédictive de chaque modèle, mais également d'observer les réactions différenciées des marchés asiatiques, européens et américains face aux chocs économiques majeurs.

L'intérêt de cette recherche est motivé par la pertinence : d'une part, de confronter dans un cadre empirique un ensemble de modèles classiques, asymétriques et adaptatifs, rarement analysés conjointement ; et d'autre part, d'adopter une approche multipays comparant les performances des modèles sur des marchés aux structures, aux comportements et aux sensibilités économiques distinctes. Ainsi, ce mémoire se veut une étape nécessaire dans un programme de recherche plus large visant à traiter explicitement de l'impact des crises (dont celle de la COVID), de tensions géopolitiques, de régimes de turbulence et, plus généralement, de non-linéarités dans les marchés financiers.

Afin de répondre à cette problématique, ce mémoire est structuré en cinq chapitres. Le chapitre 1 propose une revue critique des principaux modèles de volatilité, de la Moyenne Mobile aux modèles conditionnels comme le GARCH(1,1), GARCH-M, TGARCH et TV-GARCH, en mettant l'accent sur leur usage en période de crise pour la tarification d'options. Le chapitre 2 décrit la méthodologie adoptée, le chapitre 3 présente la sélection, la transformation et la validation statistique des données issues des indices Nikkei 225, NASDAQ-100, S&P 500 et CAC 40. Enfin, le chapitre 4 est consacré à l'estimation des modèles (Moving Average, GARCH(1,1), GARCH-M, TGARCH et TV-GARCH) et leur intégration dans la formule de Black-Scholes, expose les résultats empiriques obtenus sur les quatre indices, analyse les performances comparées des modèles, et discute des différences observées selon les zones géographiques et les périodes de turbulence. Enfin, le chapitre 5 propose une conclusion générale du mémoire, synthétise les principaux résultats, discute des limites rencontrées et ouvre des pistes pour des recherches futures.

# CHAPITRE I

# 1. Revue de littérature

## 1.1 Introduction de la revue de littérature

Dans un environnement financier où les crises successives modifient profondément les dynamiques de marché, la volatilité ne peut plus être appréhendée comme un paramètre stable et prévisible. Elle devient au contraire une variable centrale dans la compréhension des comportements boursiers, en particulier lorsqu'il s'agit de prédire ou de tarifier des instruments financiers sensibles au risque, tels que les options. Face à cette complexité croissante, une question fondamentale se pose : comment modéliser au mieux l'évolution réelle de la volatilité sur les marchés financiers, en tenant compte des régimes de crise et de rupture structurelle qui marquent désormais l'économie mondiale ? La littérature académique, attentive à ces évolutions, a proposé de nombreux cadres théoriques pour capturer les principales caractéristiques empiriques de la volatilité : persistance, regroupement temporel (clustering), asymétrie des réponses aux chocs, et non-stationnarité. Ces travaux ont permis l'émergence de modèles conditionnels de volatilité capables d'aller au-delà des hypothèses rigides du modèle de Black-Scholes, en intégrant les dynamiques propres aux marchés réels. Toutefois, si les modèles traditionnels comme la Moyenne Mobile ou le GARCH(1,1) ont longtemps dominé la modélisation empirique, les récentes mutations des marchés imposent d'explorer des approches plus flexibles, capables de s'adapter aux changements progressifs ou brusques de la structure de volatilité. Dans cette perspective, cette revue propose une analyse critique et comparative des principales approches d'estimation de la volatilité financière. Après une brève présentation des modèles historiques de Moyenne Mobile, l'attention se portera sur les modèles conditionnels GARCH(1,1) et GARCH-M, avant d'aborder les extensions asymétriques avec le TGARCH, et enfin les modèles adaptatifs à paramètres variables avec le TV-GARCH. En s'appuyant sur des résultats théoriques récents et des observations empiriques, cette revue vise à établir une base solide pour évaluer, dans les chapitres suivants, la pertinence de chaque approche dans la tarification d'options appliquée aux indices NASDAQ-100, S&P 500, CAC 40 et Nikkei 225 sur la période récente marquée par de fortes perturbations économiques.

## 1.2 Le modèle de moyenne mobile (MA)

Le modèle de Moyenne Mobile (MA) figure parmi les premières approches développées pour l'estimation de la volatilité financière. Il repose sur une logique simple : calculer une moyenne glissante du carré des écarts des rendements par rapport à leur moyenne locale sur une fenêtre temporelle fixe, afin d'obtenir une approximation de la variance future. Introduit au milieu du XX<sup>e</sup> siècle (Gartley1946), et popularisé pour sa capacité à lisser le bruit des séries de prix (Black1986 ; Shiller1981), le MA est souvent utilisé pour identifier les régimes de volatilité sur des horizons de moyen à long terme.

Son principal atout réside dans sa simplicité et sa capacité à fournir des estimations stables de la volatilité même lorsque les rendements présentent un bruit élevé ou des fluctuations irrégulières. Lorsqu'il est appliqué à des fenêtres longues — comme MA400, MA600 ou MA800 — le modèle parvient à lisser efficacement les variations erratiques de la volatilité, tout en renforçant la stabilité de la prévision de la volatilité estimée. Des travaux récents (Ilomäki, Leppänen et Perttunen 2018) ont montré que ces versions étendues permettent d'améliorer la prédictibilité des rendements annualisés, ce qui est particulièrement utile pour la tarification d'options à échéance éloignée, où la stabilité de la volatilité est cruciale.

Dans une logique de gestion du risque ou de stratégie de market timing, l'usage du MA permet également de filtrer les signaux inutiles et d'améliorer certains indicateurs de performance comme le ratio de Sharpe<sup>1</sup>, Il constitue ainsi une base pédagogique solide et une référence pour évaluer les bénéfices des modèles plus avancés.

Cependant, cette approche présente des limites notables. Elle réagit lentement aux chocs soudains de volatilité, ce qui la rend peu efficace en période de crise ou de changements brusques de régime (Campos-Martins et Sucarrat 2024). Le modèle suppose une volatilité stationnaire, une hypothèse peu réaliste dans les marchés post-crise financière de 2008 ou post-COVID-19. En contexte de forte instabilité, les prévisions peuvent s'avérer largement inexactes (Mikosch et Stărică 2004).

De plus, la performance du modèle est très sensible au choix de la taille de la fenêtre : une fenêtre trop courte accentue le bruit, tandis qu'une trop longue retarde les signaux. Le modèle ne tient pas compte non plus de l'asymétrie des réactions du marché aux chocs positifs ou négatifs, ni des ruptures structurelles potentielles. Il reste donc rigide face aux dynamiques complexes des marchés financiers modernes.

---

1. Le ratio de Sharpe est un indicateur de performance ajustée du risque. Il correspond au rendement excédentaire d'un actif par rapport au taux sans risque, divisé par la volatilité de ses rendements. Plus le ratio est élevé, meilleure est la performance obtenue pour chaque unité de risque supportée.

En résumé, si le modèle MA conserve une utilité en tant que point de repère historique et outil de comparaison, son efficacité reste limitée dans un contexte de forte volatilité. Dans cette étude, il est utilisé comme base de comparaison face à des modèles conditionnels plus performants, tels que le GARCH(1,1), le GARCH-M, le TGARCH ou encore le TV-GARCH, dont la capacité d'adaptation aux régimes de volatilité en fait des outils plus pertinents pour la tarification d'options dans un environnement instable.

### 1.3 Le modèle GARCH(1,1)

Le modèle GARCH(1,1) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", proposé par (Bollerslev 1986), est aujourd'hui l'un des piliers de la modélisation de la volatilité conditionnelle en finance. Conçu pour capturer l'effet empirique de groupement de la volatilité — phénomène selon lequel des périodes de forte variabilité succèdent à d'autres similaires —, il repose sur l'idée que la variance d'un actif dépend à la fois de la variance passée et des chocs récents. Cette approche s'inscrit dans la continuité des travaux fondateurs de (Engle 1982) et a été formalisée dans un cadre théorique robuste par (Francq et Zakoïan 2019).

L'efficacité prédictive du modèle GARCH(1,1) a été largement démontrée, notamment pour les rendements d'indices majeurs comme le S&P 500 et le NASDAQ-100. (Hansen et Lunde 2005) montrent qu'en termes de précision de prévision de la volatilité, le GARCH(1,1) rivalise souvent avec des modèles plus complexes, tandis que (Yang et Wang 2019) confirment son efficacité pour estimer la volatilité implicite d'options sur le 50ETF. De plus, (Ballestra, D'Innocenzo et Tezza 2024) soulignent que même dans les cadres de valorisation d'options sophistiqués, les modèles GARCH standards restent des références solides grâce à leur simplicité structurelle et leur capacité d'ajustement aux dynamiques de court terme.

Cependant, malgré ses nombreux avantages, le modèle GARCH(1,1) présente certaines limites identifiées dans la littérature récente, principalement lorsqu'il est appliqué à des contextes de forte instabilité ou de long terme. Premièrement, le modèle repose sur l'hypothèse de stationnarité de la variance inconditionnelle, ce qui implique que la volatilité moyenne ne varie pas dans le temps. Or, cette hypothèse peut être remise en question en présence d'événements extrêmes — tels que la crise financière de 2008 ou la pandémie de COVID-19 — qui induisent des ruptures structurelles dans la dynamique de la volatilité (Campos-Martins et Sucarrat 2024; Ross 2018). Toutefois, cette contrainte peut être tolérée dans le cas de séries relativement stables ou à horizon court, où la stationnarité constitue un compromis acceptable, notamment en gestion du risque ou en prévision opérationnelle.

Deuxièmement, le GARCH(1,1) suppose une réaction symétrique de la volatilité aux chocs

positifs et négatifs. Or, plusieurs travaux empiriques (Glosten, Jagannathan et Runkle 1993; Lee 2017) montrent que les marchés financiers réagissent plus fortement aux mauvaises nouvelles qu'aux bonnes, phénomène connu sous le nom d'asymétrie de volatilité. Bien que cette limite soit réelle, elle n'empêche pas le modèle GARCH(1,1) d'offrir une modélisation pertinente dans des marchés matures ou en dehors des périodes de crise. Des extensions simples telles que le TGARCH ou l'EGARCH permettent de capturer ces effets asymétriques sans remettre en cause la structure fondamentale du modèle.

Enfin, dans les applications de tarification d'options, il a été observé que le GARCH(1,1) peut produire des estimations biaisées lorsque la volatilité comporte une composante de long terme ou une dynamique non stationnaire. Des variantes intégrant des effets de persistance prolongée, comme les modèles hybrides proposés par (Ballestra, D'Innocenzo et Tezza 2024), permettent d'introduire une flexibilité supplémentaire dans la structure de volatilité.

Ainsi, bien que le modèle GARCH(1,1) ne capture pas toutes les dimensions de la dynamique de volatilité, il demeure une référence incontournable, à la fois par son efficacité, sa simplicité et sa large applicabilité. Dans cette étude, il sert de modèle de base pour évaluer l'apport de spécifications plus flexibles telles que le TGARCH ou le TV-GARCH, dans un objectif de comparaison rigoureuse.

## 1.4 Le modèle GARCH-M

Le modèle GARCH-M "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity-in-Mean" constitue une extension naturelle du GARCH(1,1), introduite pour modéliser la relation entre le risque et le rendement attendu. Développé initialement par (Engle, Lilien et Robins 1987), le modèle GARCH-M intègre explicitement la variance conditionnelle dans l'équation de rendement, permettant ainsi d'évaluer l'effet du risque sur le rendement exigé par les investisseurs. Concrètement, le modèle postule que plus la volatilité anticipée est élevée, plus le rendement attendu doit être important pour compenser le risque accru, traduisant ainsi la notion de prime de risque (Cai, 2022; Nugroho et al., 2019). L'application du GARCH-M à différents marchés financiers a révélé son intérêt théorique et pratique. Par exemple, (Tardiana et al. 2024) ont montré que, dans le marché de l'or, l'intégration de facteurs macroéconomiques comme les taux d'intérêt de la Réserve Fédérale au sein d'un modèle GARCH-M améliorerait sensiblement la qualité de prédiction par rapport à un modèle GARCH classique, confirmée par de meilleurs critères d'information (AIC et BIC) et une augmentation significative de la log-vraisemblance. De même, (Nugroho et al. 2019) en comparant les performances empiriques de plusieurs modèles GARCH sur des indices majeurs comme le S&P 500, ont observé que

le GARCH-M se classait parmi les meilleurs pour représenter la volatilité conditionnelle lorsqu'une prime de risque significative est présente.

Cependant, l'efficacité du modèle GARCH-M dépend fortement du contexte économique et de la nature de l'actif analysé. Certaines études, telles que celles de (Mishra et Mishra 2024), ont constaté que sur le marché indien (NSE Nifty 50), la prime de risque capturée par le GARCH-M n'était pas toujours significative, notamment en période de volatilité modérée ou en l'absence de chocs macroéconomiques majeurs. Cette limite souligne que le GARCH-M est particulièrement adapté aux environnements financiers où l'aversion au risque varie de manière perceptible dans le temps. Par ailleurs, plusieurs critiques méthodologiques ont été soulevées à l'encontre du GARCH-M. Premièrement son estimation repose souvent sur des hypothèses de normalité des résidus, hypothèses qui sont fréquemment invalidées dans la pratique, en raison de la présence de queues épaisses dans les distributions de rendements (Cai, 2022). Deuxièmement, l'hypothèse d'une relation linéaire entre le risque conditionnel et le rendement peut être trop restrictive; dans de nombreux marchés émergents, la relation peut être non linéaire ou instable (Mishra et Mishra, 2024).

Malgré ces limitations, le GARCH-M conserve une pertinence théorique forte en tant que pont entre la modélisation de la volatilité et la théorie financière du risque-rendement. Il permet de tester explicitement l'hypothèse fondamentale selon laquelle les investisseurs exigent un rendement plus élevé pour porter un risque accru, ce qui en fait un modèle précieux dans l'analyse de la volatilité conditionnelle et de la tarification d'actifs. Dans le cadre de cette étude, le GARCH-M sera ainsi utilisé pour évaluer si la dynamique du risque, mesurée par la volatilité anticipée, explique de manière significative les variations des rendements observés sur les indices NASDAQ-100, S&P 500, CAC 40 et Nikkei 225 entre 2018 et 2025.

## 1.5 Le modèle TGARCH "Threshold GARCH"

Le modèle Threshold GARCH (TGARCH), également connu sous le nom de GJR-GARCH, a été développé par (Glosten, Jagannathan et Runkle 1993) pour surmonter une limitation majeure du GARCH(1,1) traditionnel : son incapacité à capturer l'asymétrie des réactions de volatilité aux chocs positifs et négatifs. Contrairement au GARCH symétrique, le TGARCH introduit un terme additionnel qui permet à la volatilité de réagir différemment selon le signe du choc sur le rendement, offrant ainsi une modélisation plus réaliste du phénomène de l'effet de levier observé sur les marchés financiers (Cai et Stander, 2019). Empiriquement, le TGARCH s'est révélé particulièrement performant pour modéliser la dynamique de la volatilité en période de crise financière. Par exemple, (Chen 2023) a montré que le GJR-GARCH, une

forme spécifique du TGARCH, surpassait les autres variantes GARCH dans la modélisation de la volatilité du S&P 500 pendant la crise financière mondiale de 2008. En comparant les modèles à l'aide des critères d'information (AIC ou BIC) et la fonction de perte QLIKE<sup>2</sup>, les résultats démontrent que le TGARCH offre de meilleures performances en estimation et en prévision de la volatilité lors de chocs financiers majeurs par rapport au modèle GARCH standard. L'efficacité du TGARCH repose principalement sur sa capacité à capturer l'effet asymétrique des nouvelles économiques : les mauvaises nouvelles (baisse des prix) tendent à accroître la volatilité plus fortement que les bonnes nouvelles de même amplitude. Cette caractéristique a été confirmée par plusieurs études, notamment par (Jankovic 2020), qui a démontré que dans des marchés caractérisés par des alternances de phases haussières et baissières "bull et bear markets", les modèles asymétriques comme le TGARCH et l'EGARCH offrent une meilleure précision de prévision que le modèle GARCH symétrique, notamment en périodes de fortes turbulences. Sur le plan méthodologique, des avancées récentes ont également renforcé l'intérêt pour le TGARCH. (Cai et Stander 2019) ont développé une méthode d'estimation par quasi-maximum de vraisemblance à quantile (-quantile QMLE) spécifiquement adaptée aux modèles TGARCH, améliorant ainsi la robustesse des prévisions de densité pour des séries financières caractérisées par des queues épaisses. Leur approche montre que les prévisions basées sur la "Value-at-Risk" (VaR) avec le TGARCH surpassent celles basées uniquement sur la volatilité conditionnelle traditionnelle.

Cependant, malgré ses qualités, le modèle TGARCH n'est pas exempt de limitations. Premièrement, l'identification et l'estimation des effets asymétriques exigent souvent des volumes de données importants pour obtenir des résultats statistiquement significatifs. Deuxièmement, en présence de structures de volatilité plus complexes (comme des doubles seuils ou des comportements non linéaires profonds), le modèle TGARCH classique peut devenir insuffisant, nécessitant l'extension vers des modèles double-seuil (Double-Threshold GARCH) ou à volatilité régimes-mixtes. Enfin, comme l'ont observé (Suhendar et Herlina 2024) dans leur étude sur les rendements de l'Ethereum, bien que le TGARCH permette de modéliser efficacement l'asymétrie dans la réponse des volatilités aux bonnes et mauvaises nouvelles, les résultats dépendent fortement de la nature de l'actif sous-jacent : sur des marchés très spéculatifs ou émergents, la réactivité de la volatilité peut s'écarter significativement des prédictions linéaires simples.

Ainsi, bien que le TGARCH s'impose aujourd'hui comme l'un des modèles les plus pertinents pour capter les effets asymétriques de la volatilité, son application optimale suppose une

---

2. La fonction de perte QLIKE (Quasi-Likelihood) mesure l'écart entre la volatilité prédite et la volatilité réalisée. Elle pénalise fortement les sous-estimations de volatilité, ce qui la rend particulièrement adaptée à l'évaluation des modèles GARCH en présence de chocs violents ou de périodes de forte incertitude.

bonne connaissance des caractéristiques du marché étudié et, dans certains cas, l'intégration de variantes ou d'adaptations méthodologiques. Dans le cadre de cette étude, le TGARCH sera utilisé pour évaluer sa capacité à capturer les dynamiques asymétriques de volatilité sur les indices NASDAQ-100, S&P 500, CAC 40 et Nikkei 225 entre 2018 et 2025, en comparaison avec les autres modèles étudiés.

## 1.6 Le modèle TV-GARCH “Time-Varying GARCH”

Le modèle "Time-Varying GARCH" (TV-GARCH) constitue une réponse aux limites structurelles des modèles GARCH standards, notamment leur hypothèse de stationnarité de la volatilité. Dans un environnement financier marqué par des crises successives telles que la crise financière de 2008 ou la pandémie de COVID-19, la volatilité des marchés devient clairement non stationnaire, évoluant sous l'influence de chocs structurels. Le modèle TV-GARCH, développé par (Amado et Teräsvirta 2013, 2017), autorise les paramètres du modèle GARCH à varier de manière continue dans le temps, permettant ainsi d'adapter dynamiquement la structure de la volatilité aux transformations économiques et financières (Campos-Martins et Sucarrat, 2024).

Concrètement, le TV-GARCH repose sur une décomposition multiplicative de la variance conditionnelle, séparant une composante de long terme, susceptible de changer au fil du temps, d'une composante de court terme qui suit une dynamique GARCH stationnaire. Cette architecture flexible permet de capturer à la fois les évolutions lentes (changements macroéconomiques structurels) et rapides (chocs financiers soudains) de la volatilité. (Munoz Mendoza 2023) montre que cette approche améliore considérablement la précision des prévisions de volatilité par rapport aux modèles GARCH classiques, notamment en utilisant des techniques non paramétriques telles que les splines lissées et la régression locale.

Sur le plan méthodologique, le TV-GARCH introduit une transition progressive entre les régimes de volatilité grâce à des fonctions logistiques ou spline pour modéliser l'évolution temporelle des paramètres. Cette flexibilité contraste avec les approches plus rigides comme le Markov-Switching GARCH, qui impose des transitions abruptes entre régimes. Dans le package R `tvgarch`, présenté par (Campos-Martins et Sucarrat 2024), l'estimation repose sur une approche de quasi-maximum de vraisemblance robuste aux erreurs de spécification de la distribution des innovations, garantissant une plus grande fiabilité en contexte de données financières non normales.

Empiriquement, plusieurs études confirment l'apport du TV-GARCH. (Campos-Martins et

Sucarrat 2024) montrent, à travers des simulations et des applications sur données réelles, que le modèle capture efficacement les évolutions de l'incertitude financière post-2008 et post-COVID-19, en s'adaptant aux changements progressifs dans la variance non conditionnelle. (Munoz Mendoza 2023) renforce cette conclusion en démontrant que le TV-GARCH, lorsqu'il est estimé avec des méthodes non paramétriques basées sur le filtre de Kalman, offre des performances prédictives supérieures, notamment pour les marchés émergents comme l'IPSA chilien.

Cependant, malgré ses atouts, le modèle TV-GARCH présente certaines limites. Premièrement, son estimation est computationnellement plus lourde que celle des modèles GARCH standards, nécessitant souvent des algorithmes numériques sophistiqués et une grande quantité de données. Deuxièmement, comme souligné par (Amado et Teräsvirta 2013), une mauvaise spécification du processus de transition peut conduire à des biais dans l'estimation des paramètres de volatilité, affectant ainsi la qualité des prévisions. Enfin, la détection préalable du nombre de changements structurels demeure une étape critique mais délicate, en particulier pour les séries temporelles courtes.

Malgré ces défis, le TV-GARCH s'impose aujourd'hui comme une avancée méthodologique majeure pour modéliser la volatilité non stationnaire dans les marchés financiers contemporains. Dans le cadre de cette étude, son usage permettra d'évaluer dans quelle mesure l'intégration d'une dynamique temporelle des paramètres améliore la capacité de prédiction et de tarification des options sur les indices NASDAQ-100, SP 500, CAC 40 et Nikkei 225 entre 2018 et 2025, en comparaison avec les modèles stationnaires traditionnels.

À la lumière des différentes approches examinées, allant des modèles simples de Moyenne Mobile aux modèles conditionnels asymétriques et adaptatifs comme le TGARCH et le TV-GARCH, il apparaît que la modélisation de la volatilité nécessite une prise en compte fine de l'évolution temporelle et de l'asymétrie des chocs de marché. Les modèles étudiés mettent en évidence des forces et des limites spécifiques selon la stabilité des périodes et la nature des chocs économiques, soulignant l'importance d'une approche adaptée au contexte. Dans ce prolongement, l'étude que nous entreprenons se justifie par la nécessité d'évaluer empiriquement, dans un cadre rigoureux et comparatif, la capacité réelle de ces modèles à refléter la volatilité observée sur plusieurs indices boursiers internationaux durant une période marquée par des transformations économiques majeures. L'originalité de notre démarche repose sur l'intégration d'une perspective dynamique à travers l'analyse du modèle TV-GARCH, permettant d'apprécier plus finement les variations structurelles de la volatilité, tout en positionnant ces résultats face aux méthodes classiques. Cette approche vise à mieux

comprendre comment les modèles de volatilité peuvent être adaptés aux marchés financiers contemporains, où l'instabilité devient une caractéristique systémique plutôt qu'exceptionnelle.

# CHAPITRE II

## 2. Méthodologie

### 2.1 Introduction

Dans un environnement financier marqué par une succession de crises et une volatilité accrue des marchés, la capacité à modéliser correctement la dynamique de la volatilité devient un enjeu central pour la tarification d'options et la gestion des risques. À cet effet, ce chapitre expose la méthodologie adoptée pour comparer la performance prédictive de cinq modèles d'estimation de la volatilité — Moyenne Mobile, GARCH(1,1), GARCH-M, TGARCH et TV-GARCH — appliqués aux principaux indices boursiers internationaux : NASDAQ-100, S&P 500, CAC 40 et Nikkei 225.

La démarche repose sur une estimation successive des modèles à partir des rendements journaliers de ces indices, suivie de l'injection des volatilités estimées dans la formule de Black-Scholes afin de générer les prix théoriques des options. La qualité des prévisions sera ensuite évaluée à l'aide du critère du "Root Mean Squared Error" (RMSE), en comparant les prix théoriques aux prix de marché observés. Cette approche comparative vise à identifier les modèles offrant la meilleure adéquation aux différentes dynamiques de marché rencontrées entre 2018 et 2025, période marquée par de fortes perturbations économiques.

### 2.2 Sélection et préparation des données

#### 2.2.1 Description des données

L'étude repose sur un ensemble de données constitué des prix de clôture quotidiens de quatre grands indices boursiers : le NASDAQ-100 et le S&P 500 pour les États-Unis, le CAC 40 pour l'Europe, et le Nikkei 225 pour l'Asie. Le choix de ces indices se justifie par leur représentativité des dynamiques financières internationales et par leur forte liquidité, garantissant une qualité statistique adéquate pour les estimations. La période d'observation s'étend du 2 janvier 2018 au 31 mars 2025, couvrant ainsi plusieurs phases de marché distinctes, notamment la pandémie

de COVID-19, la reprise économique post-pandémique et les récentes tensions bancaires et géopolitiques.

## 2.2.2 Transformation des données

Les séries de prix ont été transformées en rendements logarithmiques afin de stabiliser la variance et de faciliter l'application des modèles conditionnels de volatilité. Le rendement journalier  $r_t$  est défini comme :

$$r_t = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (2.1)$$

où  $P_t$  et  $P_{t-1}$  représentent respectivement les prix de clôture de l'indice aux dates  $t$  et  $t - 1$ .

## 2.2.3 Tests statistiques préliminaires

Avant l'estimation des modèles, des tests de stationnarité de type Augmented Dickey-Fuller (ADF) ont été réalisés sur les séries de rendements pour s'assurer de l'absence de racine unitaire. La stationnarité est une condition préalable nécessaire à l'application des modèles de volatilité conditionnelle tels que GARCH et ses extensions. Par ailleurs, des tests d'hétéroscédasticité (comme le test d'ARCH de Engle) ont été effectués pour détecter la présence de volatilité conditionnelle dans les séries, justifiant ainsi l'utilisation de modèles ARCH-GARCH.

Cette étape de préparation permet de garantir la robustesse et la validité des estimations ultérieures, tout en assurant la comparabilité des résultats obtenus pour l'ensemble des indices étudiés.

## 2.3 Estimation des modèles de volatilité

La modélisation de la volatilité est effectuée séparément pour chacun des indices boursiers sélectionnés, en appliquant successivement les cinq modèles retenus. Chaque modèle est estimé selon une méthodologie rigoureuse, en tenant compte des spécificités propres à la dynamique de la volatilité financière.

### 2.3.1 Moyenne Mobile (MA)

Le premier modèle utilisé est celui de la Moyenne Mobile (MA). La volatilité est estimée à partir de la moyenne glissante des carrés des écarts des rendements par rapport à leur moyenne arithmétique, calculée sur une fenêtre temporelle fixe de taille  $q$ , selon la formule :

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q (r_{t-i} - \bar{r}_t)^2 \quad (2.2)$$

avec :

$$\bar{r}_t = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q r_{t-i} \quad (2.3)$$

où  $r_{t-i}$  représente le rendement au temps  $t - i$  et  $\bar{r}_t$  la moyenne des rendements observés. Dans cette étude, la fenêtre de moyenne mobile a été fixée à 61 jours, ce qui correspond approximativement à trois mois de cotation. Cet horizon permet d'obtenir une estimation de la volatilité suffisamment lissée pour atténuer l'effet du bruit quotidien, tout en restant réactive aux variations récentes du marché. Cette méthode repose sur un calcul direct, sans optimisation paramétrique, ce qui en fait un outil simple et transparent. Toutefois, la Moyenne Mobile présente certaines limites : elle se caractérise par une réactivité réduite aux chocs récents et ne tient pas compte de la dynamique conditionnelle de la volatilité, contrairement aux modèles issus de la famille GARCH.

### 2.3.2 Modèle GARCH(1,1)

Pour mieux représenter la dépendance dynamique de la variance, le modèle GARCH(1,1) proposé par Bollerslev (1986) est estimé. Dans ce cadre, le rendement est exprimé sous la forme :

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (2.5)$$

où la moyenne conditionnelle  $\mu_t$  est spécifiée à l'aide d'un modèle ARMA( $p, q$ ) :

$$\mu_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}. \quad (2.6)$$

La dynamique de la variance conditionnelle est ensuite donnée par :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (2.7)$$

Dans cette spécification,  $\sigma_t^2$  représente la variance conditionnelle, et  $\omega$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont les paramètres à estimer. L'estimation est réalisée par la méthode du Maximum de Vraisemblance (MLE), en maximisant la fonction de vraisemblance de la série observée. Ce modèle permet de prendre en compte l'effet de mémoire et la persistance des chocs sur la volatilité, caractéristiques majeures des séries financières.

### 2.3.3 Modèle GARCH-M

Le modèle GARCH-M (GARCH-in-Mean) constitue une extension du GARCH standard en introduisant la volatilité conditionnelle dans l'équation du rendement. Il est spécifié comme suit :

$$r_t = \mu_t + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2), \quad \mu_t \sim ARMA(p, q) \quad (2.8)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad (2.9)$$

où  $\lambda$  mesure l'influence directe de la volatilité sur le rendement attendu. L'estimation se fait également par Maximum de Vraisemblance, en maximisant la vraisemblance jointe de l'équation de rendement et de l'équation de variance. Ce modèle est particulièrement pertinent pour tester empiriquement l'existence d'une prime de risque sur les marchés financiers.

### 2.3.4 Modèle TGARCH

Par ailleurs, pour tenir compte de l'asymétrie dans la réaction de la volatilité face aux bonnes et mauvaises nouvelles, le modèle TGARCH (Threshold GARCH) est estimé. Il est formulé comme :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad (2.10)$$

avec  $D_{t-1}$  une variable indicatrice telle que :

$$D_{t-1} = \begin{cases} 1, & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

Dans ce modèle, le paramètre  $\gamma$  capte l'effet différentiel des chocs négatifs sur la volatilité. L'estimation repose sur le Maximum de Vraisemblance, permettant de détecter empiriquement l'effet de levier, phénomène couramment observé sur les marchés actions.

### 2.3.5 Modèle TV-GARCH

Enfin, pour modéliser la variabilité progressive des paramètres de volatilité, le modèle TV-GARCH "Time-Varying GARCH" est utilisé. Dans ce cadre, la variance conditionnelle est spécifiée par :

$$\sigma_t^2 = \omega_t + \alpha_t \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_t \sigma_{t-1}^2 \quad (2.12)$$

où  $\omega_t$ ,  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  évoluent de manière continue dans le temps. L'estimation du modèle TV-GARCH peut être réalisée selon deux approches principales : l'algorithme de maximum local de vraisemblance, qui consiste à maximiser la vraisemblance de manière locale à l'aide d'une fonction de pondération temporelle, et le filtre de Kalman, dans le cadre d'une formulation en espace-état.

Dans ce travail, le modèle TV-GARCH a été estimé à l'aide du package `tvqarch` sous R, en recourant à l'algorithme de Maximum local de vraisemblance, permettant ainsi aux paramètres d'évoluer continuellement dans le temps afin de capturer les changements dans la volatilité. Cette approche permet de capturer de manière flexible les changements structurels et les évolutions progressives de la volatilité observés dans les marchés financiers récents.

Ainsi, l'ensemble des modèles est estimé en respectant les spécificités structurelles de la volatilité conditionnelle, permettant une comparaison rigoureuse de leur performance prédictive dans les chapitres ultérieurs.

## 2.4 Simulation des prix théoriques d'options

Après l'estimation des volatilités conditionnelles issues des différents modèles, celles-ci sont utilisées pour simuler les prix théoriques d'options, en recourant à la formule classique de Black-Scholes (1973). Cette approche permet de traduire les prévisions de volatilité en valorisations concrètes, directement comparables aux prix observés sur les marchés financiers. Les prix observés des options utilisés pour la comparaison empirique sont issus de la base de données Bloomberg, ce qui garantit l'exactitude et la fiabilité des cotations de marché.

### 2.4.1 Formule de Black-Scholes

La formule de Black-Scholes pour le prix théorique d'une option d'achat européenne (call) est donnée par :

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (2.13)$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)(T-t)}{\sigma_t\sqrt{T-t}} \quad (2.14)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_t\sqrt{T-t} \quad (2.15)$$

avec :

- $C_t$  : prix théorique de l'option d'achat au temps  $t$
- $S_t$  : prix de l'actif sous-jacent au temps  $t$
- $K$  : prix d'exercice de l'option
- $r$  : taux d'intérêt sans risque constant
- $T - t$  : durée résiduelle jusqu'à l'échéance (exprimée en années)
- $\sigma_t$  : volatilité conditionnelle estimée à partir de chaque modèle
- $N(\cdot)$  : fonction de répartition de la loi normale standard

## 2.4.2 Adaptation de la volatilité

Pour les besoins de cette étude, la volatilité  $\sigma$  utilisée dans la formule de Black-Scholes est celle estimée quotidiennement à partir des différents modèles de volatilité conditionnelle (Moving Average, GARCH(1,1), GARCH-M, TGARCH et TV-GARCH). Cette volatilité, initialement calculée sur une base journalière, est annualisée avant son intégration dans la formule, selon la convention :

$$\sigma_{\text{annuelle}} = \sigma_{\text{journalière}} \times \sqrt{N} \quad (2.16)$$

où  $N$  représente le nombre moyen de jours de bourse par an.

L'hypothèse d'un taux d'intérêt sans risque constant est retenue, conformément aux standards du modèle de Black-Scholes. Les options simulées sont de type européen (exercables uniquement à l'échéance) et supposées sans dividendes.

## 2.4.3 Scénarios de simulation

Les simulations sont effectuées pour différentes maturités (court, moyen et long terme) et pour plusieurs niveaux de moneyness (at-the-money, in-the-money, out-of-the-money), afin d'évaluer la robustesse des modèles dans divers contextes de marché.

Ainsi, cette méthodologie permet de confronter les prix théoriques obtenus à partir des modèles

à ceux observés sur les marchés, en testant leur capacité à reproduire les comportements réels via une approche empirique rigoureuse.

## 2.5 Critères d'évaluation de la performance

Pour évaluer la performance prédictive des modèles de volatilité, la qualité des simulations de prix d'options sera mesurée à l'aide du critère du Root Mean Squared Error (RMSE). Ce critère permet de quantifier l'écart entre les prix théoriques des options, calculés à partir des volatilités estimées, et les prix observés sur les marchés.

### 2.5.1 Définition du RMSE

Le RMSE est défini par la formule suivante :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( P_i^{\text{théorique}} - P_i^{\text{réel}} \right)^2} \quad (2.17)$$

où :

- $n$  est le nombre total d'observations
- $P_i^{\text{théorique}}$  est le prix de l'option obtenu par simulation selon la formule de Black-Scholes, utilisant la volatilité estimée par chaque modèle
- $P_i^{\text{réel}}$  est le prix de marché observé pour l'option

Le RMSE mesure donc la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne. Plus le RMSE est faible, plus le modèle est performant dans sa capacité à reproduire les prix de marché.

### 2.5.2 Justification méthodologique

Ce choix méthodologique s'explique par la capacité du RMSE à pénaliser fortement les écarts importants, garantissant ainsi une évaluation rigoureuse de la précision des prévisions. Par ailleurs, l'utilisation d'un critère basé sur les prix plutôt que sur la seule volatilité permet d'évaluer directement la pertinence pratique des modèles dans un contexte de valorisation financière.

Les RMSE seront calculés séparément pour chaque modèle, pour chaque indice boursier, et sur différentes maturités d'options, afin de permettre une analyse comparative détaillée. Cette approche permettra d'identifier non seulement le modèle offrant la meilleure performance globale, mais également celui qui est le plus adapté dans différents contextes de marché (marchés stables, périodes de crise, fluctuations marquées de la volatilité).

Ainsi, l'évaluation de la performance reposera sur une base objective et cohérente, garantissant la robustesse des comparaisons effectuées dans les chapitres d'analyse empirique.

## **2.6 Conclusion de la méthodologie**

Ce chapitre a présenté la démarche méthodologique adoptée pour évaluer la performance prédictive des modèles de volatilité appliqués aux marchés financiers. L'estimation des volatilités, la simulation des prix théoriques d'options via la formule de Black-Scholes, ainsi que l'évaluation des écarts par le RMSE, constituent les fondements de l'analyse comparative à venir. La méthodologie ainsi établie prépare le terrain pour l'étape suivante, qui portera sur la présentation et la préparation des données utilisées dans l'étude.

# CHAPITRE III

## 3. Présentation et analyse des données

### 3.1 Introduction

Pour modéliser la volatilité des marchés financiers avec précision, encore faut-il s'appuyer sur des données fiables, pertinentes et représentatives de la réalité économique. Ce chapitre constitue ainsi une étape essentielle : il dévoile les fondations empiriques sur lesquelles repose l'analyse à venir.

Nous y présentons les indices boursiers sélectionnés, issus des principales zones économiques mondiales — États-Unis, Europe et Japon — ainsi que les séries de prix utilisées, collectées quotidiennement entre janvier 2018 et mars 2025. Cette période, marquée par des chocs majeurs tels que la pandémie de COVID-19 et les tensions géopolitiques récentes, offre un terrain d'observation idéal pour tester la robustesse des modèles de volatilité.

Les données ont été structurées avec soin, transformées pour garantir leur stabilité statistique, et enrichies de variables clés comme les prix d'exercice, les maturités ou encore les taux sans risque. Elles serviront non seulement à estimer les modèles, mais aussi à simuler des prix d'options et à évaluer la performance prédictive de chaque approche.

En d'autres termes, ce chapitre pose les bases concrètes de l'analyse empirique : il éclaire ce que les chiffres révèlent, prépare leur mise en forme, et trace le chemin vers les résultats que nous chercherons à interpréter dans le chapitre suivant.

### 3.2 Source et nature des données

#### 3.2.1 Sélection des indices

Cette étude porte sur quatre indices boursiers majeurs appartenant à trois zones économiques distinctes : le NASDAQ-100 et le SP 500 pour les États-Unis, le CAC 40 pour l'Europe et le Nikkei 225 pour le Japon. Le choix de ces indices se justifie par leur représentativité dans leurs économies respectives ainsi que par leur forte capitalisation et liquidité, garantissant la

qualité statistique des estimations.

Le SP 500 constitue l'indice de référence du marché américain, englobant un large éventail de secteurs. Il présente généralement une volatilité plus stable, en raison de la taille de ses entreprises et de la profondeur de son marché.

Le NASDAQ-100, fortement concentré dans les technologies, est plus sensible aux cycles d'innovation et aux anticipations de croissance. Il affiche par conséquent une volatilité plus élevée et des réactions plus abruptes aux annonces économiques. Notons d'ailleurs que ces deux indices américains peuvent aussi être particulièrement sensibles à la politique monétaire de la Réserve fédérale américaine.

Le CAC 40, représentatif du marché européen, est davantage influencé par les annonces macroéconomiques, les variations de politique monétaire de la BCE, ainsi que par les crises sectorielles. On y observe fréquemment des phénomènes d'effet de levier<sup>3</sup>.

Le Nikkei 225 reflète l'économie japonaise, historiquement marquée par des phases alternées de déflation, d'intervention de la Banque du Japon et de politiques monétaires ultra-accommodantes, ce qui se traduit par une volatilité structurellement cyclique.

Ainsi, ces quatre marchés permettent d'examiner la volatilité dans des environnements financiers contrastés, ce qui est essentiel pour tester la capacité des modèles à s'adapter à des dynamiques de marché hétérogènes.

Les cours de clôture quotidiens, extraits de la plateforme Bloomberg, couvrent la période allant du 2 janvier 2018 au 31 mars 2025. Cette période englobe des régimes de marché contrastés — périodes de stabilité, de forte incertitude (pandémie de COVID-19, crise énergétique, tensions géopolitiques) et de reprise — ce qui en fait un cadre idéal pour tester la robustesse des modèles de volatilité conditionnelle.

### 3.2.2 Périodes d'analyse

Dans un souci de rigueur méthodologique, la période d'observation a été divisée en deux phases distinctes :

- La période du 3 janvier 2018 au 3 janvier 2025 est utilisée pour l'estimation des modèles et le calcul des volatilités conditionnelles.
- La période du 3 janvier au 31 mars 2025 est réservée à la validation hors échantillon "out-of-sample". Elle permet d'évaluer la capacité prédictive des modèles en confrontant

---

3. Ce phénomène s'explique par une réaction plus forte du marché face aux mauvaises nouvelles que face aux bonnes, ce qui augmente la volatilité lorsque les prix baissent, un comportement typique de l'effet de levier.

les prix d'options simulés aux prix observés sur les marchés.

Cette séparation stricte entre l'échantillon d'estimation et la phase de test s'inscrit dans une démarche de validation empirique rigoureuse, conforme aux standards de l'économétrie financière. Elle permet de juger la performance des modèles non pas sur leur capacité à ajuster le passé, mais sur leur aptitude à anticiper des mouvements futurs de marché.

### 3.2.3 Transformations des données

Avant d'estimer les modèles de volatilité, il est essentiel de préparer les séries de prix pour garantir leur validité statistique. La première étape a consisté à transformer les prix de clôture journaliers en rendements logarithmiques, selon la formule suivante :

$$r_t = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (3.1)$$

où  $r_t$  représente le rendement au jour  $t$ , et  $P_t$ , le prix de clôture de l'indice à cette date. Cette transformation est couramment utilisée en finance pour éliminer les effets de tendance et rendre les séries plus adaptées aux modèles économétriques.

Une série de tests de stationnarité, notamment le test Augmented Dickey-Fuller (ADF), a ensuite été appliquée aux rendements obtenus. Les résultats ont permis de confirmer que la non stationnarité des séries de rendement puisse être statistiquement rejetée, condition indispensable pour l'estimation correcte des modèles de type GARCH et ses variantes.

Cette phase de transformation, bien que technique, est déterminante : elle assure que les rendements utilisés dans les modèles reflètent une dynamique exploitable, dénuée de biais structurels liés à des tendances ou à des chocs permanents dans les rendements.

## 3.3 Préparation des variables pour la simulation

La simulation des prix théoriques d'options repose sur la définition d'un ensemble de variables clés, nécessaires à l'application du modèle de Black-Scholes, à partir des volatilités estimées selon les différents modèles étudiés.

### 3.3.1 Maturité des options

Dans un souci de réalisme et de simplification analytique, la maturité des options simulées a été fixée à trois mois. Ce choix s'explique par le fait que les options à trois mois sont largement utilisées dans la pratique financière, notamment pour les produits dérivés standards. Elles

représentent un compromis idéal : suffisamment longues pour capter les anticipations de volatilité, mais pas trop éloignées pour rester sensibles aux dynamiques de marché à court terme. Cette hypothèse permet également de standardiser les comparaisons intermodèles, tout en allégeant le volume des simulations.

### 3.3.2 Prix d'exercice et "moneyness"

Concernant les prix d'exercice, plusieurs niveaux ont été retenus autour du prix "spot" afin de couvrir les principales configurations du marché : options dans la monnaie "ITM", à la monnaie "ATM" et hors de la monnaie "OTM". Ces valeurs ont été sélectionnées à partir des cours moyens observés sur les indices étudiés, de manière à refléter des cas représentatifs.

### 3.3.3 Volatilités et taux d'intérêt

Les volatilités conditionnelles sont calculées à partir des rendements journaliers des indices sur la période du 3 janvier 2018 au 3 janvier 2025, selon cinq modèles : Moyenne Mobile, GARCH(1,1), GARCH-M, TGARCH et TV-GARCH. Ces estimations sont ensuite utilisées pour simuler les prix d'options sur la période de validation allant du 3 janvier au 31 mars 2025, selon une approche strictement hors échantillon.

Le taux d'intérêt sans risque est supposé constant à 2% annuel, conformément aux pratiques empiriques en tarification d'options. Enfin, les volatilités obtenues sont annualisées à partir des estimations quotidiennes selon la formule :

$$\sigma_{\text{annuelle}} = \sigma_{\text{journalière}} \times \sqrt{252} \quad (3.2)$$

Cette configuration permet de garantir des hypothèses claires, homogènes et comparables entre modèles, tout en conservant un ancrage solide dans la réalité des marchés financiers.

## 3.4 Description statistique des séries

### 3.4.1 Évolution graphique des prix de clôture des indices

L'observation des graphiques des prix de clôture des indices étudiés entre janvier 2018 et mars 2025 permet de dresser un premier panorama des dynamiques boursières à l'échelle internationale. Les quatre indices — S&P 500, NASDAQ-100, CAC 40 et Nikkei 225 — présentent des trajectoires globalement haussières, mais marquées par des ruptures nettes en périodes de crise.

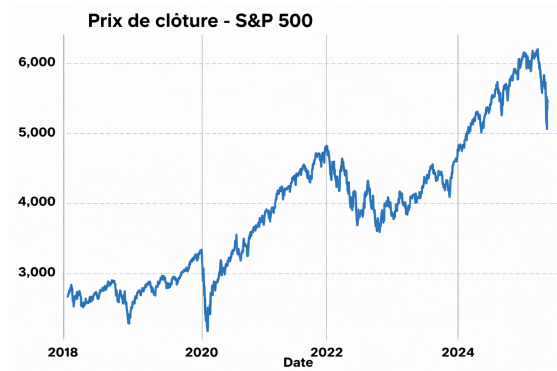


FIGURE 3.1 – Évolution du prix de l'indice S&P 500



FIGURE 3.2 – Évolution du prix de l'indice NASDAQ-100

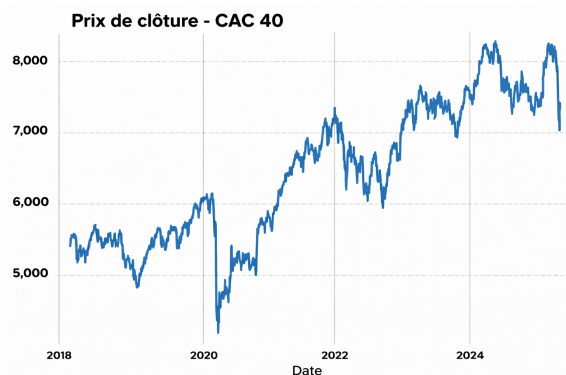


FIGURE 3.3 – Évolution du prix de l'indice CAC 40



FIGURE 3.4 – Évolution du prix de l'indice Nikkei 225

### 3.4.1.1 Analyse des indices américains

Les graphiques des indices S&P 500 et NASDAQ-100 sur la période 2018-2025 présentent une trajectoire globalement haussière, interrompue par des épisodes de forte correction. Tous deux subissent un effondrement brutal en mars 2020, lié à la crise du COVID-19, suivi d'un rebond rapide stimulé par les mesures de relance monétaire et budgétaire.

Le S&P 500, représentatif de l'ensemble du marché américain, progresse de manière régulière jusqu'à atteindre un sommet en 2021, puis connaît une phase de consolidation en 2022, marquée par des inquiétudes liées à l'inflation et au resserrement monétaire. Il repart ensuite à la hausse en 2023 et 2024, avant de subir une nouvelle correction nette début 2025, probablement en réaction à un contexte macroéconomique plus tendu.

Le NASDAQ-100, composé principalement de valeurs technologiques, suit une dynamique plus marquée : sa croissance entre 2019 et 2021 est plus rapide et accentuée, reflet de l'envolée

des valeurs tech. Toutefois, il enregistre également une correction plus prolongée entre 2022 et 2023, sous l'effet de la hausse des taux d'intérêt, à laquelle les entreprises technologiques sont particulièrement sensibles. Après un fort rebond en 2024, l'indice chute de nouveau début 2025, dans un mouvement similaire à celui du S&P 500, mais avec une amplitude plus élevée. Ainsi, bien que les deux indices évoluent de manière synchronisée sur les grandes tendances, le NASDAQ-100 affiche une volatilité plus prononcée, amplifiant les hausses comme les baisses, en raison de sa concentration sectorielle.

### **3.4.1.2 Analyse des indices européen et asiatique**

Les graphiques des indices CAC 40 (France) et Nikkei 225 (Japon) entre 2018 et 2025 montrent une progression globale positive, mais avec une volatilité plus modérée comparée aux indices américains. Tous deux subissent une forte chute en mars 2020, liée à la crise sanitaire, suivie d'une reprise progressive à partir de l'été 2020.

Le CAC 40 se redresse lentement et atteint ses niveaux les plus élevés à la fin de 2023, avant d'entrer dans une phase d'instabilité début 2025. Sa courbe est marquée par des mouvements de correction moins abrupts, reflétant une structure sectorielle plus traditionnelle et une sensibilité accrue aux facteurs géopolitiques européens, notamment les tensions en Ukraine et les pressions énergétiques.

Le Nikkei 225, quant à lui, suit une trajectoire plus irrégulière. Après une stagnation prolongée jusqu'en 2020, il entame une hausse significative entre 2021 et 2024, soutenue par des politiques monétaires ultra-accommodantes. Il atteint un sommet historique en 2024, avant d'enregistrer une chute brutale début 2025, probablement influencée par des ajustements monétaires ou des facteurs exogènes.

En somme, si le CAC 40 et le Nikkei 225 partagent une sensibilité commune aux chocs mondiaux, leurs mouvements restent moins amples que ceux des indices américains. Le CAC reflète davantage les dynamiques économiques de la zone euro, tandis que le Nikkei répond de manière plus décalée et spécifique au contexte japonais.

## **3.4.2 Analyse graphique des rendements journaliers**

Afin de mieux appréhender les propriétés statistiques des séries financières, souvent masquées par les courbes de prix, les rendements journaliers offrent une vision directe de la volatilité quotidienne, des ruptures de tendance et des comportements extrêmes.

Et en vue d'évaluer la présence de phénomènes tels que l'hétéroscédasticité conditionnelle, la volatilité agrégée, et le "clustering" des chocs, le recours à ces graphiques appuie l'utilisation

de modèles GARCH, TGARCH et autres variantes dans la suite du mémoire.

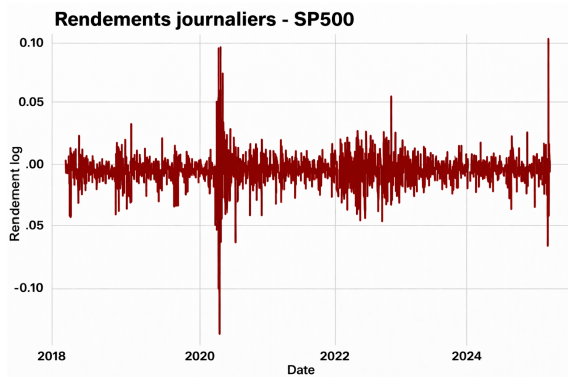


FIGURE 3.5 – Évolution des rendements journaliers de l'indice S&P 500

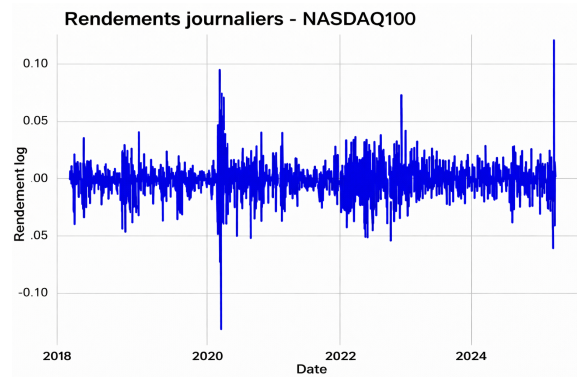


FIGURE 3.6 – Évolution des rendements journaliers de l'indice NASDAQ-100

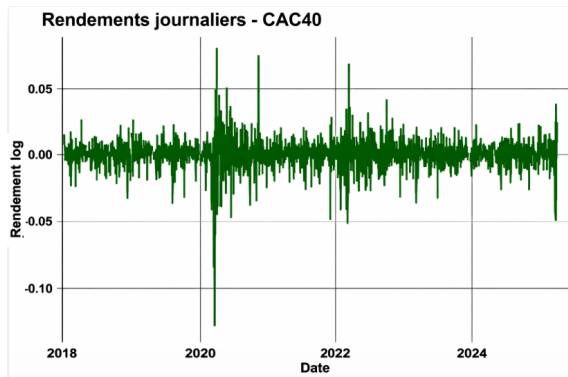


FIGURE 3.7 – Évolution des rendements journaliers de l'indice CAC 40

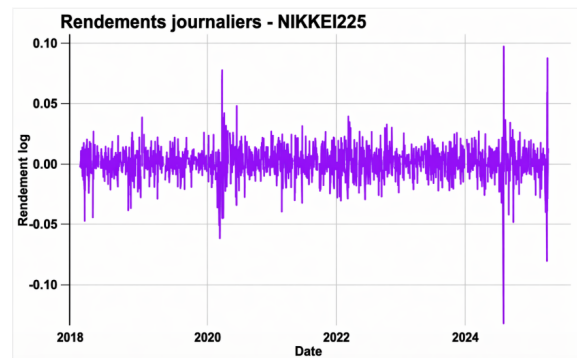


FIGURE 3.8 – Évolution des rendements journaliers de l'indice Nikkei 225

Les graphiques des rendements journaliers mettent en évidence une volatilité importante et variable dans le temps, avec des pics marqués notamment autour de mars 2020 (crise du COVID-19) et début 2025. Le S&P 500 et le NASDAQ-100 affichent des amplitudes plus élevées, traduisant une sensibilité accrue aux chocs macroéconomiques et financiers. Le NASDAQ-100, en particulier, présente une volatilité plus intense, typique des valeurs technologiques. Le CAC 40 et le Nikkei 225 montrent une volatilité plus modérée, bien que ponctuée de pics extrêmes, notamment en période de crise. Ces observations suggèrent la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle, justifiant le recours à des modèles GARCH pour l'estimation de la volatilité.

### 3.4.3 Statistiques descriptives des rendements journaliers

Après avoir analysé visuellement les graphiques des rendements journaliers, il est désormais plus approprié d'examiner leurs statistiques descriptives afin de mieux cerner leurs caractéristiques fondamentales. Ces indicateurs — tels que la moyenne, l'écart-type, l'asymétrie et la kurtosis — permettent d'évaluer la tendance centrale, la dispersion, et les comportements extrêmes des séries, éléments clés pour justifier le recours à des modèles économétriques adaptés à la modélisation de la volatilité.

TABLE 3.1 – Statistiques descriptives des rendements journaliers (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Indice     | Moyenne | Écart-type | Asymétrie | Kurtosis |
|------------|---------|------------|-----------|----------|
| S&P 500    | 0.00045 | 0.0132     | -0.693    | 17.574   |
| NASDAQ-100 | 0.00062 | 0.0158     | -0.366    | 10.067   |
| CAC 40     | 0.00038 | 0.0121     | -0.977    | 16.564   |
| Nikkei 225 | 0.00013 | 0.0128     | -0.468    | 14.666   |

Les statistiques descriptives confirment plusieurs caractéristiques typiques des séries financières. Tous les indices présentent des rendements moyens positifs, indiquant une performance haussière sur le long terme. Le NASDAQ-100 affiche la moyenne et la médiane les plus élevées, traduisant sa forte dynamique. En revanche, le Nikkei 225 présente le rendement moyen le plus faible.

Le NASDAQ-100 est également l'indice le plus volatil, avec un écart-type de 0,0158, tandis que le CAC 40 est le plus stable. L'asymétrie négative est marquée pour tous les indices, en particulier pour le CAC 40 et le S&P 500, ce qui souligne la fréquence des rendements négatifs extrêmes. Enfin, la kurtosis très élevée, notamment pour le S&P 500 (14,6) et le CAC 40 (13,6), révèle une forte leptokurticité, signe de la présence de chocs de grande amplitude. Ces résultats confortent le choix de modèles conditionnels pour modéliser la volatilité.

L'analyse statistique des rendements met en évidence des propriétés stylisées typiques des séries financières : une volatilité importante, une asymétrie généralement négative et une leptokurticité marquée. Ces éléments sont souvent associées avec des rendements financiers dont la volatilité peut être décrite par la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle et justifient pleinement l'utilisation de modèles tels que GARCH et ses variantes dans le chapitre suivant pour une modélisation rigoureuse de la volatilité et une tarification plus précise des options.

## 3.5 Test de stationnarité des rendements

### 3.5.1 Test d'Augmented Dickey–Fuller (ADF)

Avant d'estimer les modèles de volatilité conditionnelle, il est nécessaire de vérifier la stationnarité des séries de rendements journaliers. En effet, les modèles de type GARCH reposent sur l'hypothèse que les rendements sont stationnaires, c'est-à-dire qu'ils fluctuent autour d'une moyenne stable et ne présentent pas de racine unitaire.

Dans cette étude, la spécification du test ADF retenue inclut systématiquement une Constante, car elle permet d'accommoder l'effet de la valeur initiale  $y(0)$  en échantillon fini, ce qui améliore la validité et la robustesse du test. Aucune procédure de sélection de la constante n'est appliquée : celle-ci est conservée dans la régression.

### 3.5.2 Hypothèses de test

On teste les hypothèses suivantes :

- $H_0$  : « il existe une racine unitaire  $\phi = 0$  » contre  $H_1$  : «  $\phi \neq 0$  »
- $H'_0$  : « le coefficient de la tendance est nul  $B = 0$  » contre  $H'_1$  : «  $B \neq 0$  »

### 3.5.3 Sélection des retards optimaux

Les retards optimaux utilisés dans la spécification du test ADF sont déterminés à l'aide du critère MAIC, qui constitue l'approche privilégiée pour la sélection du nombre de retards dans les tests de racine unitaire.

Selon ce critère, les séries `REND_SP500` et `REND_NASDAQ100` présentent un retard optimal de  $P = 8^*$ . Pour la série `REND_CAC40`, le MAIC retient un ordre  $P = 4^*$ , tandis que pour `REND_NIKKIE225`, le retard optimal sélectionné est de  $P = 1^*$ .

### 3.5.4 Résultats par indice

Afin d'évaluer la stationnarité des séries de rendements, le test Augmented Dickey-Fuller (ADF) a été appliqué selon deux spécifications : un modèle comprenant une constante et une tendance linéaire (Modèle 3), ainsi qu'un modèle incluant uniquement une constante (Modèle 2). Dans le premier cas, deux tests sont examinés : la significativité de la tendance ainsi que le test de racine unitaire. Dans le second cas, seul le test de racine unitaire est considéré. Le tableau suivant synthétise les résultats obtenus pour les quatre indices étudiés.

TABLE 3.2 – Tests ADF et tests de tendance(03/01/2018 – 03/01/2025)

| Indice     | Modèle   | Test            | Statistique | p-valeur | Conclusion        |
|------------|----------|-----------------|-------------|----------|-------------------|
| S&P 500    | Modèle 3 | Tendance        | 0.59841     | 0.549    | Non significative |
|            |          | racine unitaire | -12.874     | 0.000    | Rejet $H_0$       |
|            | Modèle 2 | racine unitaire | -12.862     | 0.000    | Rejet $H_0$       |
| NASDAQ-100 | Modèle 3 | Tendance        | 0.38553     | 0.699    | Non significative |
|            |          | racine unitaire | -13.409     | 0.000    | Rejet $H_0$       |
|            | Modèle 2 | racine unitaire | -13.407     | 0.000    | Rejet $H_0$       |
| CAC 40     | Modèle 3 | Tendance        | 0.19904     | 0.842    | Non significative |
|            |          | racine unitaire | -17.333     | 0.000    | Rejet $H_0$       |
|            | Modèle 2 | racine unitaire | -17.337     | 0.000    | Rejet $H_0$       |
| Nikkei 225 | Modèle 3 | Tendance        | 0.45110     | 0.652    | Non significative |
|            |          | racine unitaire | -29.526     | 0.000    | Rejet $H_0$       |
|            | Modèle 2 | racine unitaire | -29.529     | 0.000    | Rejet $H_0$       |

### 3.5.5 Synthèse des résultats

L'analyse de la stationnarité des séries de rendements  $REND\_SP500$ ,  $REND\_NASDAQ100$ ,  $REND\_CAC40$  et  $REND\_NIKKIE225$ , menée à l'aide du test Augmented Dickey-Fuller selon deux spécifications (avec constante et tendance, puis avec constante seule), a permis de déterminer la nature des processus sous-jacents à chaque série. Dans l'ensemble, les résultats conduisent au rejet de l'hypothèse de racine unitaire, indiquant que toutes les séries étudiées sont stationnaires. Dans la première spécification incluant une constante et une tendance, l'hypothèse de tendance s'est révélée non significative pour l'ensemble des indices, justifiant son exclusion du modèle final. La seconde spécification, conservant uniquement une constante, a permis de tester la présence d'une racine unitaire. Les statistiques de test obtenues se sont avérées nettement inférieures aux valeurs critiques, avec des p-valeurs nulles, confirmant la stationnarité des séries.

La validation de la stationnarité constitue une étape préalable indispensable à toute modélisation dynamique, en particulier pour les modèles de volatilité conditionnelle. Dans la continuité de cette démarche, la section suivante est consacrée à l'analyse des corrélogrammes des séries, afin d'examiner la présence d'éventuelles dépendances dans les rendements et leurs carrés, indicateurs clés de l'hétéroscédasticité.

## 3.6 Analyse des corrélogrammes des rendements

TABLE 3.3 – Résultats synthétiques du corrélogramme des rendements des indices S&P 500, NASDAQ-100, CAC 40 et Nikkei 225 (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Lag | S&P 500 |       | NASDAQ-100 |       | CAC 40 |       | Nikkei 225 |       |
|-----|---------|-------|------------|-------|--------|-------|------------|-------|
|     | Q-Stat  | p-val | Q-Stat     | p-val | Q-Stat | p-val | Q-Stat     | p-val |
| 1   | 40.400  | 0.000 | 39.032     | 0.000 | 0.298  | 0.585 | 0.548      | 0.459 |
| 2   | 59.587  | 0.000 | 43.032     | 0.000 | 11.294 | 0.004 | 1.940      | 0.379 |
| 3   | 61.592  | 0.000 | 46.006     | 0.000 | 11.348 | 0.010 | 4.303      | 0.231 |
| 6   | 99.593  | 0.000 | 56.616     | 0.000 | 32.147 | 0.000 | 4.628      | 0.592 |
| 12  | 246.29  | 0.000 | 139.43     | 0.000 | 46.522 | 0.000 | 10.601     | 0.563 |
| 18  | 270.87  | 0.000 | 151.20     | 0.000 | 66.611 | 0.000 | 14.576     | 0.691 |
| 20  | 274.73  | 0.000 | 153.17     | 0.000 | 67.462 | 0.000 | 15.842     | 0.726 |

L'analyse des corrélogrammes révèle la présence d'autocorrélations significatives aux premiers retards pour trois des quatre indices étudiés (S&P 500, NASDAQ-100 et CAC 40). Les p-values associées au test de Ljung-Box sont très faibles pour ces séries, ce qui conduit à rejeter l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation globale. Cela indique que la moyenne conditionnelle de leurs rendements n'est pas constante et qu'une dynamique temporelle est présente. L'estimation d'un modèle ARMA pour ces indices se justifie donc pleinement avant la modélisation de la variance conditionnelle par des modèles GARCH.

En revanche, pour le Nikkei 225, les p-values du test de Ljung-Box demeurent toutes largement supérieures au seuil de 5%, montrant l'absence d'autocorrélation significative. La moyenne conditionnelle  $y$  est donc bien représentée par une simple constante.

### 3.6.1 Test de Ljung-Box ( $k = 20$ )

On considère l'hypothèse nulle suivante :  $H_0 : a_1 = a_2 = \dots = a_{20} = 0$  (pas d'autocorrélation) contre  $H_1 : \exists j \in [1, 20]$  tel que  $a_j \neq 0$ . Avec  $\chi^2(20) \approx 31,41$  au seuil de 5%, on obtient :

- S&P 500 :  $Q_{(20)} = 274,73 > 31,41$
- NASDAQ-100 :  $Q_{(20)} = 153,17 > 31,41$
- CAC 40 :  $Q_{(20)} = 67,46 > 31,41$
- Nikkei 225 :  $Q_{(20)} = 15,842 < 31,41$

Pour les indices S&P 500, NASDAQ-100 et CAC 40, le test de Ljung-Box révèle une autocorrélation globale significative jusqu'au lag 20, ce qui suggère une structure de dépendance temporelle exploitable, notamment dans le cadre de modèles ARMA ou GARCH. En revanche, pour le NIKKIE225, la statistique  $Q_{(20)}$  est inférieure au seuil critique, indiquant l'absence d'autocorrélation significative globale, bien que quelques retards soient localement significatifs.

### 3.7 Vérification de la présence d'un effet ARCH à l'aide des rendements au carré

L'analyse des rendements au carré permet de détecter une éventuelle dépendance conditionnelle dans la variance, souvent observée dans les séries financières. Pour cela, nous avons examiné les correlogrammes des rendements au carré pour chacun des quatre indices étudiés. Cette méthode repose sur le test global de Ljung-Box, appliqué ici à l'ordre  $k = 20$ , avec l'hypothèse nulle  $H_0 : a_1 = a_2 = \dots = a_{20} = 0$ . Le rejet de  $H_0$  signale la présence d'un effet ARCH, justifiant le recours à des modèles de type GARCH. Les résultats synthétiques des tests sont présentés dans les tableaux suivants.

TABLE 3.4 – Résultats synthétiques du correlogramme des rendements au carré des indices S&P 500, NASDAQ-100, CAC 40 et Nikkei 225 (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Lag | S&P 500 |       | NASDAQ-100 |       | CAC 40 |       | Nikkei 225 |       |
|-----|---------|-------|------------|-------|--------|-------|------------|-------|
|     | Q-Stat  | p-val | Q-Stat     | p-val | Q-Stat | p-val | Q-Stat     | p-val |
| 1   | 361.90  | 0.000 | 283.78     | 0.000 | 23.629 | 0.000 | 384.98     | 0.000 |
| 2   | 754.15  | 0.000 | 459.09     | 0.000 | 104.62 | 0.000 | 425.84     | 0.000 |
| 3   | 994.21  | 0.000 | 591.90     | 0.000 | 206.90 | 0.000 | 457.20     | 0.000 |
| 6   | 1559.6  | 0.000 | 786.49     | 0.000 | 569.14 | 0.000 | 467.00     | 0.000 |
| 12  | 1930.6  | 0.000 | 1008.0     | 0.000 | 895.89 | 0.000 | 498.42     | 0.000 |
| 18  | 2127.6  | 0.000 | 1224.9     | 0.000 | 949.55 | 0.000 | 498.09     | 0.000 |
| 20  | 2147.0  | 0.000 | 1281.3     | 0.000 | 945.00 | 0.000 | 499.52     | 0.000 |

L'analyse des correlogrammes des rendements au carré a révélé la présence claire d'un effet ARCH pour l'ensemble des indices étudiés. Pour le SP500, la statistique  $Q(20)$  atteint 2147.0 avec des autocorrélations élevées jusqu'au lag 20, ce qui témoigne d'une hétéroscédasticité conditionnelle très marquée. Le NASDAQ-100 présente une configuration similaire, avec une statistique  $Q(20)$  de 1281.3 et des autocorrélations fortement significatives à tous les

lags. Concernant le CAC 40, bien que les valeurs des autocorrélations soient légèrement plus modérées, la statistique  $Q(20)$  reste élevée à 945.00, confirmant la présence d'un effet ARCH. Enfin, même si la moyenne conditionnelle du NIKKIE225 est modélisée par une constante, l'analyse des rendements au carré révèle également une forte dépendance dans la variance, avec un  $Q(20)$  de 499.52 et une autocorrélation très marquée au premier lag.

### 3.8 Évaluation de la normalité des rendements

La normalité des rendements est une hypothèse initialement présumée dans de nombreux modèles financiers. Elle peut être évaluée empiriquement à l'aide de l'histogramme, des coefficients de Skewness (asymétrie), de Kurtosis (aplatissement) et de la statistique de Jarque-Bera (JB). Cette dernière suit une loi  $\chi^2(2)$  et permet de tester l'hypothèse nulle suivante :

- $H_0$  : les rendements suivent une loi normale
- $H_1$  : les rendements ne suivent pas une loi normale

#### 3.8.1 Histogrammes et tests de normalité des rendements

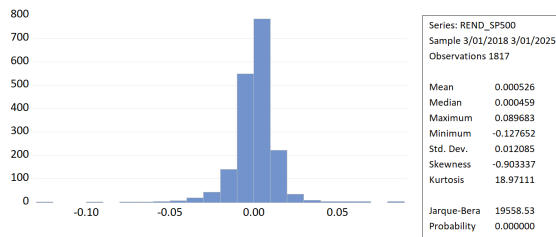


FIGURE 3.9 – Histogramme des rendements de l'indice S&P 500

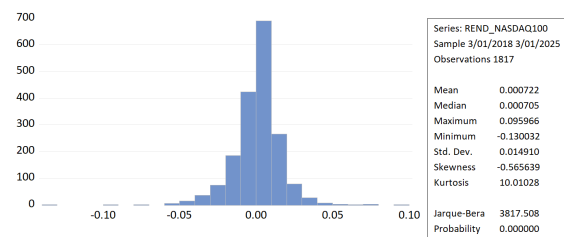


FIGURE 3.10 – Histogramme des rendements de l'indice NASDAQ-100

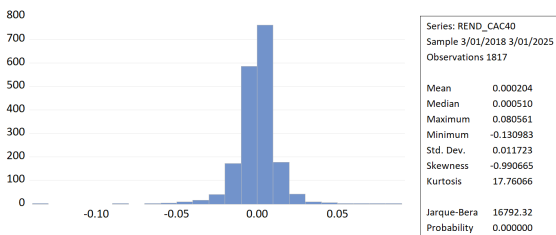


FIGURE 3.11 – Histogramme des rendements de l'indice CAC 40

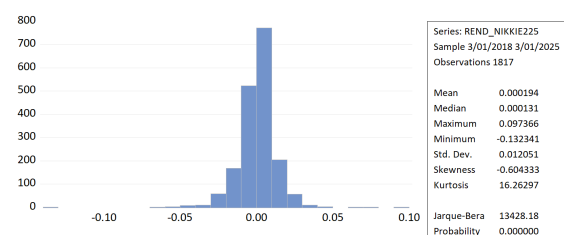


FIGURE 3.12 – Histogramme des rendements de l'indice Nikkei 225

### 3.8.2 Résultats par indice

TABLE 3.5 – Résultats des tests de normalité (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Indice     | Skewness | Kurtosis | Jarque-Bera | p-value  |
|------------|----------|----------|-------------|----------|
| S&P 500    | -0.903   | 18.971   | 19558.53    | 0.000000 |
| NASDAQ-100 | -0.565   | 10.010   | 3817.508    | 0.000000 |
| CAC 40     | -0.990   | 17.760   | 16792.32    | 0.000000 |
| Nikkei 225 | -0.604   | 16.262   | 13428.18    | 0.000000 |

Pour l'ensemble des indices analysés, la kurtosis est largement supérieure à 3, indiquant une distribution leptokurtique (plus de valeurs extrêmes que dans une loi normale). La skewness est négative dans tous les cas, montrant une asymétrie à gauche. La statistique de Jarque-Bera est très élevée et les p-values nulles rejettent systématiquement l'hypothèse de normalité.

Cela confirme que les rendements financiers présentent une distribution non normale, ce qui justifie le recours à des modèles de variance conditionnelle tels que les modèles GARCH, souvent associés à des distributions alternatives (Student, GED, etc.).

## 3.9 Modélisation de l'espérance conditionnelle des rendements

La modélisation de l'espérance conditionnelle des rendements constitue une étape essentielle dans l'analyse des séries financières. Elle permet de capturer la composante systématique des rendements, c'est-à-dire la part prévisible en fonction de l'information disponible à la date  $t - 1$ . Cette composante est notée  $\mu_t = E[r_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ , et les rendements peuvent ainsi être représentés sous la forme suivante :

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad \text{avec} \quad \mu_t = E[r_t | \mathcal{F}_{t-1}] \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow r_t = \text{ARMA}(p, q) + \varepsilon_t \quad (3.4)$$

Dans ce cadre, les modèles autorégressifs à moyenne mobile (ARMA) sont couramment utilisés pour modéliser cette dynamique.

### 3.10 Modélisation ARMA des séries de rendements

La pertinence d'un modèle ARMA repose sur sa capacité à représenter la dynamique conditionnelle des rendements, de manière à capturer les dépendances temporelles observées dans la série. Lorsque le modèle est correctement spécifié, les résidus obtenus doivent se comporter comme un bruit blanc, c'est-à-dire ne présenter aucune autocorrélation significative. L'objectif de cette section est ainsi d'identifier la structure ARMA la plus adaptée pour modéliser la série des rendements journaliers du S&P 500, en s'appuyant sur les critères d'information usuels et les tests de diagnostic des résidus.

Afin de modéliser la composante prévisible des rendements du S&P 500, plusieurs modèles ARMA ont été estimés et comparés à l'aide des critères d'information d'Akaike (AIC), de Schwarz (SC) et de Hannan-Quinn (HQ), ainsi que par l'analyse des résidus. Parmi les modèles évalués, le modèle ARMA(9,1) s'est distingué comme étant le plus performant. Il présente la valeur AIC la plus faible de l'ensemble des spécifications testées ( $AIC = -5.9561$ ), ce qui reflète une meilleure qualité d'ajustement avec une complexité maîtrisée.

De plus, les tests de diagnostic appliqués aux résidus ont confirmé la bonne spécification du modèle. Des tests LM robustes d'autocorrélation, construits à partir d'une régression des résidus sur leurs retards et d'un estimateur asymptotiquement robuste de type Newey–West pour la matrice de variance-covariance, ont été appliqués pour les ordres 1, 4 et 12. Les statistiques LM sont très faibles et les p-values associées sont toutes largement supérieures à 0.05 (respectivement 0,9889 ; 0,9994 ; 1,0000), ce qui conduit à ne pas rejeter l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation résiduelle. Ces résultats indiquent que la dynamique conditionnelle des rendements est correctement captée par le modèle ARMA(9,1), et que les résidus peuvent être considérés comme blancs.

La majorité des coefficients estimés sont statistiquement significatifs, notamment les composantes AR(1), AR(4), AR(6), AR(7), AR(8), AR(9) et MA(1), ce qui confirme la pertinence des variables incluses. À l'inverse, le modèle ARMA(9,9), bien qu'il affiche un AIC comparable, n'a pas convergé, présente plusieurs coefficients non significatifs et laisse apparaître des résidus autocorrélés, le rendant moins fiable. En conséquence, le modèle ARMA(9,1) est retenu comme le plus approprié pour représenter l'espérance conditionnelle  $E(r_t|F_{t-1})$  des rendements du S&P 500.

TABLE 3.6 – Comparaison des modèles ARMA estimés pour REND\_S&P 500 (03/01/2018 – 03/01/2025).

| Modèle    | AIC     | SC      | Résidus blancs ? | Coefficients significatifs ?      |
|-----------|---------|---------|------------------|-----------------------------------|
| AR(1)     | -5.9027 | -5.8928 | Non              | AR(1) oui, C non                  |
| ARMA(1,1) | -5.9057 | -5.8957 | Non              | AR & MA oui, C non                |
| AR(9)     | -5.9555 | -5.9211 | Oui              | Tous AR oui, C non                |
| ARMA(9,1) | -5.9561 | -5.9189 | Oui              | AR(1,4,6,7,8,9), MA(1) oui, C non |
| ARMA(9,9) | -5.9557 | -5.8696 | Non (lags 19–20) | MA(5–9) non significatifs         |

L'analyse de la série REND\_NASDAQ100 suit la même méthodologie. Plusieurs spécifications ont été testées pour modéliser l'espérance conditionnelle  $E(r_t|F_{t-1})$ . Le modèle AR(1), bien que simple et avec un coefficient significatif, laisse apparaître une autocorrélation persistante dans les résidus. Le modèle ARMA(1,1), bien que légèrement plus performant, souffre du même problème. Les modèles ARMA(9,1) et ARMA(9,9) ont été également estimés. Bien qu'ils offrent des critères AIC légèrement meilleurs, leur complexité accrue n'est pas justifiée, en particulier dans le cas du modèle ARMA(9,1), où le terme MA(1) n'est pas significatif. Le modèle ARMA(9,9) introduit de nombreux coefficients MA non significatifs, et les résidus présentent une autocorrélation marginale au lag 19. Le modèle AR(9), quant à lui, parvient à éliminer l'autocorrélation résiduelle, et plusieurs coefficients (AR(1), AR(6), AR(7), AR(8), AR(9)) sont statistiquement significatifs. Il s'agit d'un modèle parcimonieux, stable et bien spécifié.

Afin d'évaluer plus rigoureusement la présence d'éventuelles dépendances temporelles résiduelles, des tests LM robustes ont été appliqués aux résidus du modèle AR(9). Les ordres 1, 4 et 12 ont été retenus afin de couvrir des horizons courts, intermédiaires et plus étendus. Les statistiques LM obtenues sont faibles et leurs p-values sont toutes supérieures au seuil de 0.05 (respectivement 0,9202 ; 0,9998 ; 0,9519), ce qui ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation résiduelle. Le modèle capture donc efficacement la dynamique conditionnelle des rendements du NASDAQ-100, et les résidus peuvent être considérés comme blancs. En conséquence, le modèle AR(9) est retenu.

TABLE 3.7 – Comparaison des modèles AR/ARMA estimés pour REND\_NASDAQ100 (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Modèle    | AIC     | Résidus blancs ? | Coefficients significatifs ?   |
|-----------|---------|------------------|--------------------------------|
| AR(1)     | -5.4821 | Non              | AR(1) oui, C non               |
| AR(9)     | -5.5021 | Oui              | AR(1,6–9) oui, C non           |
| ARMA(1,1) | -5.4806 | Non              | AR(1) & MA(1) oui, C non       |
| ARMA(9,1) | -5.5043 | Oui              | MA(1) non significatif, C non  |
| ARMA(9,9) | -5.5010 | Presque          | Plusieurs MA non significatifs |

Plusieurs spécifications ont été estimées pour la série REND\_CAC40 afin de modéliser  $E[R_t | F_{t-1}]$ . Le modèle AR(7) s’est d’abord distingué par plusieurs coefficients significatifs, mais ses résidus montraient encore de l’autocorrélation aux lags élevés. Le modèle MA(7), bien que performant, souffrait également de résidus non totalement blancs. L’introduction conjointe des composantes autorégressives et de moyenne mobile a permis d’estimer le modèle ARMA(7,7), qui présentait un bon ajustement mais avec une complexité élevée (14 paramètres) et plusieurs coefficients non significatifs.

Afin d’atteindre un compromis entre performance et parcimonie, le modèle ARMA(7,1) a été testé. Il affiche le meilleur critère AIC (-6.0266), une structure résiduelle parfaitement blanche, et l’ensemble des coefficients AR(1–2, 4–7) et MA(1) sont statistiquement significatifs. La validité de ce modèle a été confirmée par des tests LM robustes d’autocorrélation appliqués aux résidus. Les ordres 1, 4 et 12 ont été examinés, couvrant différents horizons temporels. Les statistiques LM sont très faibles et les p-values largement supérieures à 0,05 (respectivement 0,9953 ; 1,0000 ; 1,0000), indiquant l’absence d’autocorrélation résiduelle. Cela confirme que le modèle ARMA(7,1) capture correctement la dynamique conditionnelle des rendements du CAC 40.

Sa complexité modérée, combinée à des diagnostics satisfaisants et à la significativité de ses coefficients, renforce sa stabilité et sa lisibilité. Ces résultats justifient pleinement le choix du modèle ARMA(7,1) comme spécification retenue pour l’estimation de l’espérance conditionnelle des rendements du CAC 40.

TABLE 3.8 – Comparaison finale des modèles estimés pour REND\_CAC40 (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Modèle    | AIC     | Résidus blancs ?      | Coefficients significatifs ?           |
|-----------|---------|-----------------------|--|
| AR(7)     | -5.9771 | Non, (lags 18–20)     | AR(2,4,5,6,7) oui, C non               |
| MA(7)     | -5.9628 | Non, (lags 9, 18, 20) | MA(2–7) oui, C non                     |
| ARMA(7,7) | -5.9940 | Oui                   | AR(1–3,6,7), MA(1–5) oui ; MA(6–7) non |
| ARMA(7,1) | -6.0266 | Oui                   | AR(1–2,4–7), MA(1) oui ; C non         |

Contrairement aux autres indices, l’analyse de la série REND\_NIKKEI225 révèle une situation particulière. En effet, les autocorrélations observées aux différents retards demeurent faibles et statistiquement non significatives, et la statistique de Ljung–Box  $Q(20)$  (15,842 ;  $p = 0,726$ ) ne permet pas de rejeter l’hypothèse nulle d’absence d’autocorrélation globale au seuil de 5%. Cela suggère que la série ne présente pas de dynamique linéaire exploitable par un processus ARMA. Par conséquent, la modélisation de l’espérance conditionnelle repose sur une simple spécification constante du type :

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad \text{où} \quad \mu = E[r_t]$$

L’estimation de ce modèle simple par les moindres carrés montre une moyenne inconditionnelle de 0.000194, statistiquement non significative ( $p = 0.4926$ ), confirmant l’absence de structure prévisible dans les rendements du Nikkei 225. Ainsi, l’espérance conditionnelle est modélisée par une constante, en l’absence de mémoire temporelle détectable.

### 3.11 Test de multiplicateur de Lagrange pour détecter l’effet ARCH (test LM)

Afin de confirmer statistiquement la présence d’hétéroscédasticité conditionnelle dans les séries de rendements, le test de multiplicateur de Lagrange (ARCH-LM) a été appliqué. Ce test consiste à régresser les carrés des résidus du modèle de moyenne sur leurs propres retards et à évaluer la statistique  $Obs \times R^2$ , laquelle suit une loi du  $\chi^2$  sous l’hypothèse nulle  $H_0$  d’homoscédasticité (absence d’effet ARCH). Le choix du nombre de retards  $q$  pour chaque série a été effectué en s’appuyant sur l’observation du correlogramme des résidus au carré, en retenant le nombre de retards significativement autocorrélés ( $p < 5\%$ ), ce qui permet une spécification adaptée à la structure empirique de chaque série.

TABLE 3.9 – Test ARCH-LM(6) appliqué à la série REND\_SP500 (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Statistique        | Valeur   | Interprétation                                   |
|--------------------|----------|--|
| F-statistic        | 125.2689 | Présence forte d'hétéroscédasticité (effet ARCH) |
| Prob(F)            | 0.0000   | Rejet de $H_0$ : variance non constante          |
| Obs*R-squared (LM) | 532.6204 | Effet ARCH significatif détecté                  |
| Prob(Chi-square)   | 0.0000   | Rejet clair de $H_0$                             |

TABLE 3.10 – Test ARCH-LM(8) appliqué à la série REND\_NASDAQ100 (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Statistique        | Valeur   | Interprétation                             |
|--------------------|----------|--|
| F-statistic        | 57.12142 | Présence d'hétéroscédasticité (effet ARCH) |
| Prob(F)            | 0.0000   | Rejet de $H_0$ : variance non constante    |
| Obs*R-squared (LM) | 366.2701 | Effet ARCH significatif                    |
| Prob(Chi-square)   | 0.0000   | Rejet clair de $H_0$                       |

TABLE 3.11 – Test ARCH-LM(12) appliqué à la série REND\_CAC40 (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Statistique        | Valeur   | Interprétation                          |
|--------------------|----------|---|
| F-statistic        | 44.08671 | Effet ARCH très significatif            |
| Prob(F)            | 0.0000   | Rejet de $H_0$ : variance non constante |
| Obs*R-squared (LM) | 411.4181 | Effet ARCH fortement présent            |
| Prob(Chi-square)   | 0.0000   | Rejet clair de $H_0$                    |

TABLE 3.12 – Test ARCH-LM(5) appliqué à la série REND\_NIKKEI225 (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Statistique        | Valeur   | Interprétation                          |
|--------------------|----------|---|
| F-statistic        | 133.7144 | Effet ARCH très significatif            |
| Prob(F)            | 0.0000   | Rejet de $H_0$ : variance non constante |
| Obs*R-squared (LM) | 489.5605 | Forte présence d'un effet ARCH          |
| Prob(Chi-square)   | 0.0000   | Rejet clair de $H_0$                    |

Les résultats obtenus sont sans équivoque. Pour le SP500, le correlogramme montrait des autocorrélations significatives jusqu'au retard 6, justifiant le test à cet ordre (ARCH-LM avec  $q = 6$ ) ; la statistique  $Obs \times R^2$  s'élève alors à 334.35 ( $p = 0.0000$ ). De même, pour le NASDAQ100,

les barres significatives s'étendaient jusqu'au retard 8, avec une statistique de 202.61. Le CAC40, quant à lui, présentait une structure plus persistante, avec des autocorrélations significatives jusqu'au retard 12, et un résultat de 370.13. Enfin, pour le NIKKIE225, les premiers 5 retards étaient significatifs, avec une statistique de 342.14 . Dans tous les cas, les p-values sont nulles, entraînant le rejet systématique de l'hypothèse nulle de non-effet ARCH. Ces résultats confirment l'existence d'une hétéroscédasticité conditionnelle dans les rendements de tous les indices étudiés. Ils ouvrent naturellement la voie à une modélisation plus fine de la volatilité, que nous mettons en œuvre dans le chapitre qui suit. Ce dernier est consacré à l'estimation de différents modèles de volatilité et à leur intégration dans la formule de Black-Scholes, afin d'en évaluer la performance sur les quatre indices retenus.

# CHAPITRE IV

## 4. Résultats

### 4.1 Estimation de la volatilité par le modèle Moyenne mobile (MA)

Afin de générer une estimation dynamique de la volatilité conditionnelle à des fins de tarification d'options, nous avons adopté un modèle de moyenne mobile glissante (Moving Average) sur une période de 61 jours ouvrables, correspondant à une durée de vie standard de trois mois pour une option européenne. Ce choix repose à la fois sur sa simplicité opérationnelle et sur son adéquation avec les pratiques courantes dans les marchés financiers.

Les volatilités journalières ont été estimées selon la formule suivante :

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (r_{t-i} - \bar{r})^2 \quad m = 61 \quad (4.1)$$

où  $r_t$  représente le rendement logarithmique du jour  $t$ , et  $\sigma_t$  la volatilité estimée à la date  $t$ . Ces volatilités ont ensuite été annualisées selon la relation usuelle :

$$\sigma_{\text{annuelle},t} = \sqrt{\sigma_t^2} \times \sqrt{252} \quad (4.2)$$

#### 4.1.1 Traitement des valeurs manquantes

Les séries de rendements, notamment pour les indices NIKKEI225 et NASDAQ100, comportaient quelques valeurs manquantes (NA) dans la fenêtre mobile de 61 jours précédant la période de validation (03 janvier – 31 mars 2025).

Ces valeurs manquantes proviennent principalement du fait que certains marchés étaient fermés lors de jours fériés propres à leur zone géographique, entraînant l'absence de cotation pour certains indices alors que d'autres continuaient de s'échanger.

Afin de préserver la continuité de l'estimation, les valeurs manquantes ont été remplacées,

dans chaque fenêtre, par la moyenne locale des rendements disponibles. Cette stratégie permet d'éviter les biais d'exclusion tout en maintenant la robustesse statistique de l'estimation.

### 4.1.2 Résultats obtenus

Les volatilités ainsi estimées ont été calculées jour par jour sur toute la période de validation à l'aide d'une moyenne mobile sur une fenêtre de 61 jours. Un graphique comparatif des volatilités annualisées est présenté ci-dessous, tandis que les tableaux suivants en donnent le détail numérique.

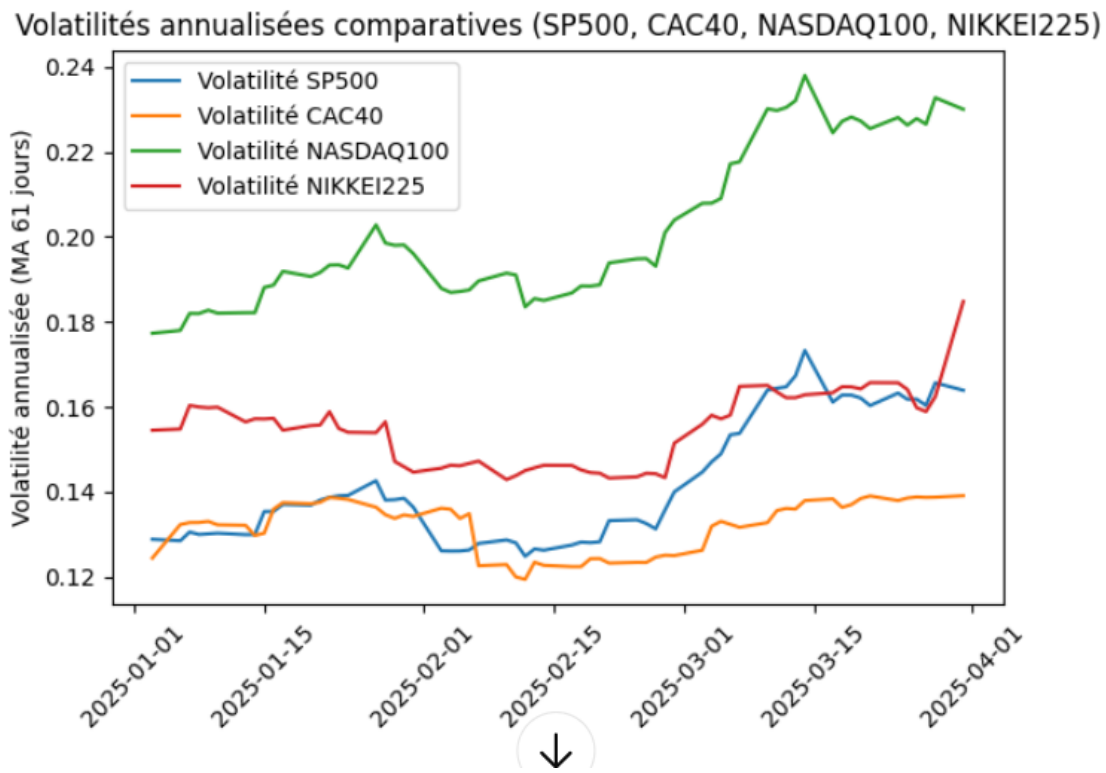


FIGURE 4.1 – Évolution comparée des volatilités annualisées estimées par moyenne mobile (61 jours) pour les indices S&P 500, CAC 40, NASDAQ-100 et Nikkei 225 (03/01/2025 – 31/03/2025)

Le graphique met en évidence des comportements de volatilité différenciés entre les quatre indices boursiers. Le NASDAQ-100 présente des niveaux de volatilité plus élevés et une variabilité importante, ce qui suggère une plus grande sensibilité de ce marché aux nouvelles économiques et financières au cours de la période étudiée.

Le S&P 500 évolue dans une plage de volatilité plus réduite et relativement régulière, reflétant un marché plus large et davantage stabilisé par la diversification sectorielle.

Le CAC 40 se caractérise par des niveaux de volatilité globalement faibles, avec toutefois des mouvements ponctuels, traduisant l'influence d'événements spécifiques mais de portée plus limitée.

Le Nikkei 225 adopte une trajectoire intermédiaire entre les marchés américains et européens, marquée par une hausse plus nette de la volatilité en fin de période, ce qui témoigne de phases d'incertitude accrues.

Ainsi, le graphique confirme que les marchés ne réagissent pas de manière uniforme aux chocs et aux changements d'environnement économique, ce qui motive une analyse distincte pour chaque marché afin de tenir compte de leurs spécificités propres.

En vue de simuler les prix des options, les valeurs numériques exactes correspondantes sont reportées dans les tableaux 4.1 et 4.2 ci-dessous.

TABLE 4.1 – Volatilités annualisées estimées par moyenne mobile (61 jours) - Partie 1

| Date       | Vol_SP500 | Vol_CAC40 | Vol_NASDAQ100 | Vol_NIKKEI225 |
|------------|-----------|-----------|---------------|---------------|
| 2025-01-03 | 0.128846  | 0.124422  | 0.177310      | 0.154501      |
| 2025-01-06 | 0.128507  | 0.132314  | 0.177991      | 0.154787      |
| 2025-01-07 | 0.130562  | 0.132776  | 0.181988      | 0.160349      |
| 2025-01-08 | 0.129985  | 0.132799  | 0.181962      | 0.159971      |
| 2025-01-09 | 0.130125  | 0.133053  | 0.182752      | 0.159795      |
| 2025-01-10 | 0.130281  | 0.132248  | 0.182040      | 0.159928      |
| 2025-01-13 | 0.129941  | 0.132136  | 0.182149      | 0.156460      |
| 2025-01-14 | 0.129963  | 0.129747  | 0.182162      | 0.157198      |
| 2025-01-15 | 0.135379  | 0.130279  | 0.188103      | 0.157158      |
| 2025-01-16 | 0.135398  | 0.135935  | 0.188645      | 0.157315      |
| 2025-01-17 | 0.137056  | 0.137454  | 0.191890      | 0.154518      |
| 2025-01-20 | 0.136874  | 0.137208  | 0.190682      | 0.155595      |
| 2025-01-21 | 0.138080  | 0.137567  | 0.191633      | 0.155735      |
| 2025-01-22 | 0.138721  | 0.138698  | 0.193358      | 0.158860      |
| 2025-01-23 | 0.139082  | 0.138494  | 0.193417      | 0.154918      |
| 2025-01-24 | 0.139177  | 0.138221  | 0.192660      | 0.154031      |
| 2025-01-27 | 0.142633  | 0.136391  | 0.202828      | 0.153932      |
| 2025-01-28 | 0.138079  | 0.134627  | 0.198550      | 0.156489      |
| 2025-01-29 | 0.138170  | 0.133763  | 0.198007      | 0.147160      |
| 2025-01-30 | 0.138509  | 0.134587  | 0.198105      | 0.145915      |
| 2025-01-31 | 0.136382  | 0.134234  | 0.196049      | 0.144641      |
| 2025-02-03 | 0.126135  | 0.136153  | 0.187893      | 0.145581      |
| 2025-02-04 | 0.126079  | 0.135920  | 0.186930      | 0.146282      |
| 2025-02-05 | 0.126101  | 0.133741  | 0.187150      | 0.146153      |
| 2025-02-06 | 0.126332  | 0.134873  | 0.187508      | 0.146702      |
| 2025-02-07 | 0.127867  | 0.122628  | 0.189626      | 0.147248      |
| 2025-02-10 | 0.128695  | 0.122898  | 0.191472      | 0.142894      |
| 2025-02-11 | 0.128015  | 0.119984  | 0.191027      | 0.143819      |
| 2025-02-12 | 0.124833  | 0.119426  | 0.183522      | 0.145020      |
| 2025-02-13 | 0.126579  | 0.123451  | 0.185487      | 0.145671      |
| 2025-02-14 | 0.126285  | 0.122714  | 0.185034      | 0.146270      |
| 2025-02-17 | 0.127493  | 0.122413  | 0.186796      | 0.146235      |
| 2025-02-18 | 0.128191  | 0.122417  | 0.188452      | 0.145163      |
| 2025-02-19 | 0.128069  | 0.124272  | 0.188417      | 0.144545      |
| 2025-02-20 | 0.128257  | 0.124309  | 0.188702      | 0.144390      |

TABLE 4.2 – Volatilités annualisées estimées par moyenne mobile (61 jours) - Partie 2

| Date       | Vol_SP500 | Vol_CAC40 | Vol_NASDAQ100 | Vol_NIKKEI225 |
|------------|-----------|-----------|---------------|---------------|
| 2025-02-21 | 0.133240  | 0.123246  | 0.193869      | 0.143252      |
| 2025-02-24 | 0.133431  | 0.123415  | 0.194828      | 0.143536      |
| 2025-02-25 | 0.132544  | 0.123395  | 0.194892      | 0.144384      |
| 2025-02-26 | 0.131288  | 0.124646  | 0.193102      | 0.144261      |
| 2025-02-27 | 0.135736  | 0.125097  | 0.201015      | 0.143346      |
| 2025-02-28 | 0.139999  | 0.125006  | 0.203948      | 0.151467      |
| 2025-03-03 | 0.144655  | 0.126275  | 0.207895      | 0.155916      |
| 2025-03-04 | 0.147068  | 0.131916  | 0.207929      | 0.158032      |
| 2025-03-05 | 0.148946  | 0.133068  | 0.209042      | 0.157190      |
| 2025-03-06 | 0.153432  | 0.132372  | 0.217191      | 0.158038      |
| 2025-03-07 | 0.153765  | 0.131665  | 0.217662      | 0.164837      |
| 2025-03-10 | 0.163964  | 0.132767  | 0.230139      | 0.165051      |
| 2025-03-11 | 0.164373  | 0.135594  | 0.229733      | 0.163511      |
| 2025-03-12 | 0.164716  | 0.136115  | 0.230441      | 0.162162      |
| 2025-03-13 | 0.167312  | 0.135956  | 0.232049      | 0.162170      |
| 2025-03-14 | 0.173285  | 0.137954  | 0.237989      | 0.162844      |
| 2025-03-17 | 0.161124  | 0.138357  | 0.224484      | 0.163335      |
| 2025-03-18 | 0.162797  | 0.136363  | 0.227204      | 0.164738      |
| 2025-03-19 | 0.162775  | 0.137021  | 0.228204      | 0.164706      |
| 2025-03-20 | 0.162073  | 0.138443  | 0.227253      | 0.164231      |
| 2025-03-21 | 0.160304  | 0.139043  | 0.225468      | 0.165711      |
| 2025-03-24 | 0.163247  | 0.137962  | 0.228087      | 0.165674      |
| 2025-03-25 | 0.161791  | 0.138552  | 0.226289      | 0.164102      |
| 2025-03-26 | 0.161823  | 0.138806  | 0.227840      | 0.159797      |
| 2025-03-27 | 0.160333  | 0.138704  | 0.226512      | 0.158895      |
| 2025-03-28 | 0.165659  | 0.138749  | 0.232737      | 0.162417      |
| 2025-03-31 | 0.163905  | 0.139103  | 0.230018      | 0.184793      |

Ces volatilités conditionnelles seront utilisées comme intrants dans la formule de Black-Scholes pour la tarification des options dans la section suivante.

## 4.2 Estimation de la volatilité par les modèles GARCH

### 4.2.1 Modèle GARCH(1,1)

Dans cette section, nous avons estimé un modèle GARCH(1,1) sur les séries de rendements journaliers des indices SP500, NASDAQ-100, CAC 40 et Nikkei 225, sur la période allant de janvier 2018 à janvier 2025. Ce modèle, largement utilisé en finance, permet de capter l'hétéroscédasticité conditionnelle typique des séries financières, en modélisant la dépendance temporelle de la variance à travers les chocs passés (terme ARCH) et la persistance de la

volatilité (terme GARCH).

Les estimations, obtenues par la méthode du maximum de vraisemblance, montrent que la condition de stationnarité est respectée pour les quatre indices, avec une somme des coefficients  $\alpha + \beta$  toujours inférieure à 1. Cette propriété garantit que les chocs passés ont un impact décroissant dans le temps et que la variance conditionnelle converge vers une moyenne de long terme. On observe également une forte persistance de la volatilité, comme le montrent les valeurs élevées de  $\beta$ , particulièrement pour le NASDAQ-100 et le Nikkei 225.

TABLE 4.3 – Paramètres estimés du modèle GARCH(1,1) (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Indice     | $\omega$              | $\alpha$ (ARCH) | $\beta$ (GARCH) | $\alpha + \beta$ |
|------------|-----------------------|-----------------|-----------------|------------------|
| SP500      | $4.65 \times 10^{-6}$ | 0.1979          | 0.7782          | 0.9761           |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000) |                  |
| NASDAQ-100 | $5.87 \times 10^{-6}$ | 0.1513          | 0.8301          | 0.9814           |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000) |                  |
| CAC 40     | $8.77 \times 10^{-7}$ | 0.1912          | 0.7501          | 0.9413           |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000) |                  |
| Nikkei 225 | $1.12 \times 10^{-5}$ | 0.1236          | 0.7975          | 0.9211           |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000) |                  |

## 4.2.2 Modèle GARCH-M

Le modèle GARCH-M (GARCH-in-Mean) permet d'introduire un lien direct entre le risque, mesuré par la volatilité conditionnelle, et le rendement attendu. Ce modèle est souvent utilisé pour tester l'existence d'une prime de risque dans les marchés financiers : plus la volatilité est élevée, plus les investisseurs exigeraient un rendement élevé en compensation.

Nous avons estimé ce modèle pour les indices SP500, NASDAQ-100, CAC 40 et Nikkei 225, sur la période allant de janvier 2018 à mars 2025. Les résultats montrent que le terme GARCH-M est significatif uniquement pour l'indice Nikkei 225, avec un coefficient estimé à 8.0383 ( $p = 0.0061$ ). Cela suggère que, sur le marché japonais, la volatilité conditionnelle joue un rôle direct dans la détermination des rendements, traduisant une prime de risque mesurable.

En revanche, pour les indices SP500, NASDAQ-100 et CAC 40, le terme GARCH-M n'est pas significatif, ce qui indique qu'il n'existe pas de relation claire entre le risque et le rendement attendu pendant la période considérée. Toutefois, pour l'ensemble des indices, la somme  $\alpha + \beta$  reste inférieure à 1, ce qui garantit la stationnarité du processus de variance conditionnelle.

TABLE 4.4 – Paramètres estimés du modèle GARCH-M (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Indice     | $\omega$              | $\alpha$ (ARCH) | $\beta$ (GARCH) | GARCH-M          |
|------------|-----------------------|-----------------|-----------------|------------------|
| SP500      | $4.66 \times 10^{-6}$ | 0.1978          | 0.7782          | 1.4079           |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000) | p-value (0.5573) |
| NASDAQ-100 | $5.87 \times 10^{-6}$ | 0.1513          | 0.8303          | 0.3112           |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000) | p-value (0.8813) |
| CAC 40     | $8.14 \times 10^{-6}$ | 0.1860          | 0.7564          | 4.5311           |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000) | p-value (0.1866) |
| Nikkei 225 | $1.25 \times 10^{-5}$ | 0.1294          | 0.7891          | 8.0383           |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000) | p-value (0.0061) |

### 4.2.3 Modèle TGARCH (GJR-GARCH)

Le modèle TGARCH (ou GJR-GARCH) est une extension du modèle GARCH qui permet de capturer les effets asymétriques dans la dynamique de la volatilité. En effet, ce modèle distingue l'impact des chocs positifs et négatifs : les rendements négatifs (mauvaises nouvelles) peuvent engendrer une augmentation plus marquée de la volatilité, phénomène couramment observé dans les marchés financiers et désigné sous le nom d'effet levier.

Dans cette section, nous avons estimé le modèle TGARCH pour les indices SP500, NASDAQ-100, CAC 40 et Nikkei 225, sur la période allant de janvier 2018 à janvier 2025. Les résultats révèlent que le **coefficient d'asymétrie**  $\gamma$  est significatif dans les quatre cas, ce qui confirme la présence d'un effet levier sur l'ensemble des marchés étudiés. Cela suggère que les chocs négatifs ont, en moyenne, un impact plus fort sur la volatilité future que les chocs positifs.

Par ailleurs, la somme  $\alpha + \beta + \gamma/2$  reste inférieure à 1 pour chaque indice, ce qui garantit la stationnarité du processus de variance conditionnelle. L'effet d'asymétrie est particulièrement marqué pour le SP500 et le CAC 40, mais il est aussi statistiquement robuste pour le Nikkei 225 et le NASDAQ-100.

TABLE 4.5 – Paramètres estimés du modèle TGARCH (03/01/2018 – 03/01/2025)

| Indice     | $\omega$              | $\alpha$ (ARCH) | $\gamma$ (Asymétrie) | $\beta$ (GARCH) |
|------------|-----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|
| SP500      | $4.57 \times 10^{-6}$ | 0.0706          | 0.2035               | 0.7917          |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000)      | p-value (0.000) |
| NASDAQ-100 | $6.25 \times 10^{-6}$ | 0.0496          | 0.1418               | 0.8303          |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000)      | p-value (0.000) |
| CAC 40     | $6.48 \times 10^{-6}$ | 0.0134          | 0.2605               | 0.8060          |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000)      | p-value (0.000) |
| Nikkei 225 | $7.93 \times 10^{-6}$ | 0.0077          | 0.1485               | 0.8579          |
|            | p-value (0.000)       | p-value (0.000) | p-value (0.000)      | p-value (0.000) |

## 4.2.4 Modèle TV-GARCH

Dans le cadre de cette étude, nous avons choisi d'appliquer le modèle TV-GARCH "Time-Varying GARCH" afin de capter les dynamiques évolutives de la volatilité sur les marchés financiers. Contrairement aux modèles GARCH classiques qui supposent une structure constante des paramètres, le modèle TV-GARCH permet de mieux refléter les changements structurels et les chocs transitoires en intégrant des paramètres qui varient dans le temps. Cette flexibilité le rend particulièrement pertinent pour analyser des périodes marquées par des incertitudes ou des ajustements fréquents des marchés, comme celle comprise entre janvier et mars 2025.

### 4.2.4.1 Estimation des paramètres TV-GARCH pour les quatre indices : évolution des paramètres $\omega_t$ , $\alpha_t$ et $\beta_t$

L'évolution quotidienne des paramètres  $\omega_t$ ,  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  estimés pour chaque jour de la période étudiée est présentée dans les figures ci-dessous pour les indices S&P 500, NASDAQ-100, CAC 40 et Nikkei 225.

Afin d'intégrer l'incertitude associée aux estimations, les trajectoires de  $\omega_t$ ,  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  sont présentées avec des intervalles de confiance à 95 %, obtenus par bootstrap à 1 000 réplifications. Concrètement, les résidus standardisés du modèle TV-GARCH ont été ré-échantillonnés et le modèle ré-estimé à chaque réplification ; pour chaque date  $t$ , les bornes inférieure et supérieure correspondent alors aux quantiles 2,5 % et 97,5 % de la distribution bootstrap des paramètres.

Les zones ombrées figurant sur les graphiques traduisent ces intervalles de confiance. Elles fournissent une information complémentaire essentielle : en plus de l'évolution temporelle des paramètres, elles indiquent le degré de précision statistique des estimations. Des bandes resserrées signalent une forte précision et une faible variabilité des paramètres, tandis que des bandes plus larges reflètent une incertitude plus importante, souvent associée à des épisodes de volatilité accrue ou à des ruptures de dynamique des marchés.

Ces figures constituent ainsi un outil de synthèse permettant d'analyser, pour chaque marché, l'évolution des paramètres dans le temps tout en tenant compte de l'incertitude statistique inhérente à leur estimation.

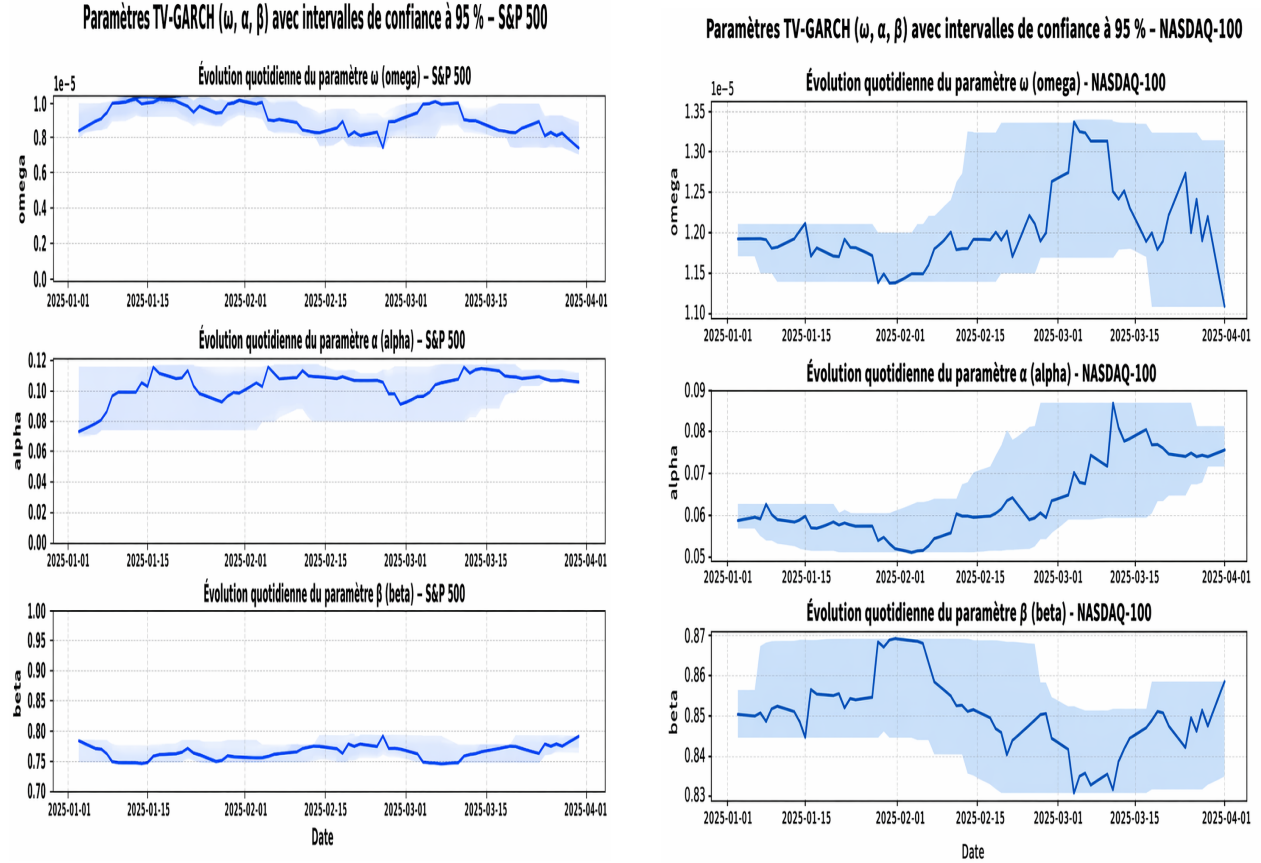


FIGURE 4.2 – Évolution quotidienne des paramètres TV-GARCH ( $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ) avec intervalles de confiance bootstrap à 95 % – Indices S&P 500 (gauche) et NASDAQ-100 (droite) (03/01/2025–31/03/2025)

Les trajectoires temporelles des paramètres  $\omega_t$ ,  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  mettent en évidence des dynamiques contrastées entre le S&P 500 et le NASDAQ 100, tout en confirmant une forte persistance conditionnelle dans les deux marchés.

**Niveau de variance de long terme ( $\omega_t$ )** Pour le S&P 500,  $\omega_t$  demeure relativement stable autour de  $[0.8, 1.0] \times 10^{-5}$ , avec des ondulations modérées à la mi-janvier et fin février. À l'inverse, le NASDAQ 100 révèle une hausse progressive de  $\omega_t$  depuis début février, culminant mi-mars, puis un repli fin mars. Cette bosse de  $\omega_t$  sur le NASDAQ 100 témoigne d'un relèvement transitoire du niveau de variance inconditionnelle, cohérent avec une phase de marché plus agitée pour les valeurs de croissance.

**Réactivité de court terme ( $\alpha_t$ )** Sur le S&P 500,  $\alpha_t$  évolue principalement entre 0.08 et 0.11, avec deux pics (mi-janvier et tout début mars) qui signalent une sensibilité accrue des volatilités conditionnelles aux chocs récents. Le NASDAQ 100 part de niveaux plus faibles

( $\sim 0.055$ – $0.06$ ) puis connaît une tendance haussière à partir de février, atteignant un maximum autour de la mi-mars ( $\sim 0.085$ ) avant de se stabiliser légèrement au-dessus de  $0.07$ . Cette montée de  $\alpha_t$  traduit une amplification de l'impact des nouvelles informations sur la volatilité de court terme, plus marquée pour le NASDAQ 100.

**Mémoire de long terme ( $\beta_t$ ) et persistance ( $\alpha_t + \beta_t$ )** Le S&P 500 affiche un  $\beta_t$  plus bas et plus variable ( $\sim 0.74$ – $0.79$ ), avec un creux fin janvier/début février puis un redressement graduel vers fin mars. Le NASDAQ 100 présente un  $\beta_t$  plus élevé et plus lisse ( $\sim 0.84$ – $0.86$ ), en recul de fin janvier à début mars, puis en reprise fin mars. Par conséquent, la persistance  $\alpha_t + \beta_t$  est élevée dans les deux indices mais reste plus forte sur le NASDAQ 100 (souvent  $\sim 0.90$ – $0.94$ ) que sur le S&P 500 (généralement  $\sim 0.86$ – $0.90$ ). Cette différence implique une mémoire plus longue des chocs de volatilité sur le NASDAQ 100.

Les deux indices confirment une forte persistance TV-GARCH, avec une mémoire plus longue et une réactivité croissante sur le NASDAQ 100 à partir de février–mars. Le S&P 500 reste plus stable, avec des épisodes de chocs brefs mais rapidement absorbés. Ces caractéristiques différenciées sont cohérentes avec la composition sectorielle des indices et se traduisent par des profils distincts de volatilité conditionnelle utiles à la tarification et à la couverture des options.

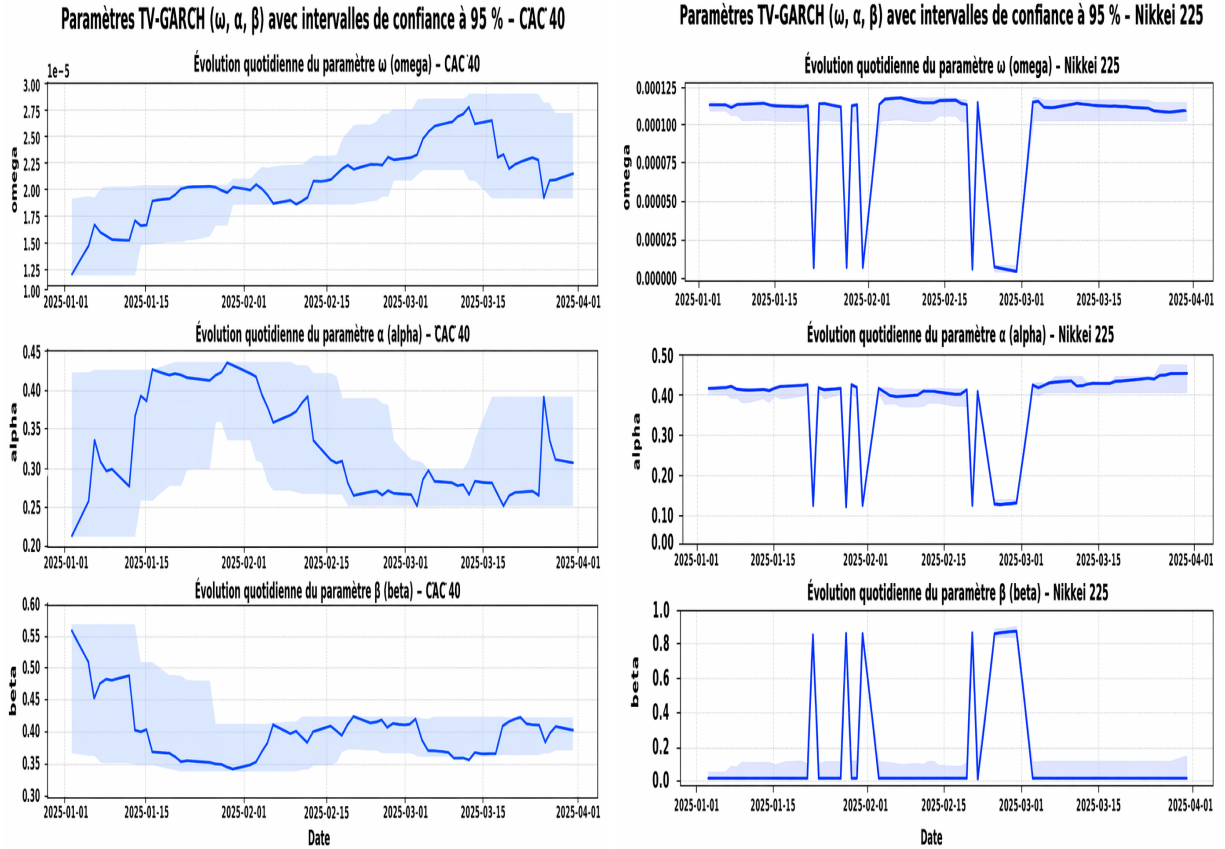


FIGURE 4.3 – Évolution quotidienne des paramètres TV-GARCH ( $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ) avec intervalles de confiance bootstrap à 95 % – Indices CAC 40 (gauche) et Nikkei 225 (droite) (03/01/2025 – 31/03/2025)

L'analyse comparative des paramètres GARCH ( $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ) appliqués aux indices CAC 40 et Nikkei 225 entre janvier et mars 2025 révèle des dynamiques contrastées. Le CAC 40 présente une structure plus stable, avec un paramètre  $\omega$  faible et régulier, une réactivité modérée aux chocs récents ( $\alpha$ ) et une persistance de la volatilité ( $\beta$ ) en légère baisse, traduisant un retour progressif à la stabilité. En revanche, le Nikkei 225 montre une plus grande instabilité :  $\omega$  affiche des sauts ponctuels,  $\alpha$  augmente significativement en mars-avril, et  $\beta$  oscille fortement entre des phases de mémoire quasi nulle et des périodes très persistantes. Ces différences reflètent des comportements de marché distincts et des sensibilités divergentes aux chocs économiques.

## 4.3 Comparaison des performances des modèles de volatilité

### 4.3.1 Calcul du RMSE

Le calcul de la racine moyenne des erreurs quadratiques (RMSE) permet d'évaluer la précision des modèles de volatilité dans la tarification des options. La RMSE est calculée selon la formule suivante :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_i^{réel} - P_i^{modèle})^2} \quad (4.3)$$

où  $P_i^{réel}$  représente le prix observé sur le marché et  $P_i^{modèle}$  le prix théorique déterminé par le modèle de Black-Scholes.

### 4.3.2 Performance sur l'indice NASDAQ-100

Le tableau suivant regroupe les mesures de performance des modèles appliqués au NASDAQ-100 pour différents prix d'exercice.

TABLE 4.6 – Somme des carrés des erreurs (SSE) et RMSE pour l'indice NASDAQ-100 (03/01/2025 – 31/03/2025)

| Prix exercice | GARCH(1,1)      | GARCH-M         | Moving Avg.      | TGARCH          | TV-GARCH        |
|---------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|
| <b>21100</b>  | SSE : 810785.73 | SSE : 644288.80 | SSE : 1299538.21 | SSE : 689381.97 | SSE : 419327.53 |
|               | RMSE : 114.36   | RMSE : 101.94   | RMSE : 144.78    | RMSE : 105.45   | RMSE : 82.24    |
| <b>21200</b>  | SSE : 733997.45 | SSE : 584666.77 | SSE : 1230200.44 | SSE : 784840.65 | SSE : 351163.04 |
|               | RMSE : 108.81   | RMSE : 97.11    | RMSE : 140.86    | RMSE : 112.51   | RMSE : 75.26    |
| <b>21300</b>  | SSE : 964560.00 | SSE : 828229.29 | SSE : 1692967.88 | SSE : 555863.48 | SSE : 475418.35 |
|               | RMSE : 124.73   | RMSE : 115.58   | RMSE : 165.25    | RMSE : 94.69    | RMSE : 87.57    |
| <b>21400</b>  | SSE : 605192.70 | SSE : 769302.81 | SSE : 1043111.17 | SSE : 535710.67 | SSE : 438128.22 |
|               | RMSE : 98.80    | RMSE : 111.39   | RMSE : 129.71    | RMSE : 92.95    | RMSE : 84.06    |
| <b>21500</b>  | SSE : 687813.15 | SSE : 503799.67 | SSE : 617196.99  | SSE : 469709.66 | SSE : 304626.43 |
|               | RMSE : 105.33   | RMSE : 90.14    | RMSE : 99.77     | RMSE : 87.04    | RMSE : 70.10    |

Sur l'échantillon NASDAQ-100, la comparaison met en évidence la supériorité nette du TV-GARCH, qui affiche à chaque prix d'exercice les plus faibles erreurs (RMSE moyen  $\approx 79,85$ ) et la plus faible sensibilité au strike (amplitude max–min  $\approx 17,47$ ), ce qui en fait le modèle le plus précis et le plus robuste. TGARCH suit en deuxième position (RMSE moyen  $\approx 98,53$ ; amplitude  $\approx 25,47$ ), tandis que GARCH-M n'est compétitif qu'aux strikes les plus bas avant de se dégrader (RMSE moyen  $\approx 103,23$ ; amplitude  $\approx 25,44$ ). GARCH(1,1) reste en retrait (RMSE moyen  $\approx 110,41$ ; amplitude  $\approx 25,93$ ). La Moyenne mobile est nettement la moins performante et la plus instable (RMSE moyen  $\approx 136,07$ ; amplitude  $\approx 65,48$ ). En pratique, pour la tarification des options sur le NASDAQ-100, il convient de privilégier TV-GARCH, avec TGARCH comme alternative, tandis que GARCH-M et GARCH(1,1) sont secondaires et que la Moyenne mobile n'est pas adaptée à une tarification fine.

### 4.3.3 Performance sur l'indice S&P 500

Les performances des modèles pour l'indice S&P 500 sont résumées dans le tableau ci-dessous.

TABLE 4.7 – Somme des carrés des erreurs (SSE) et RMSE pour l'indice S&P 500 (03/01/2025 – 31/03/2025)

| Prix exercice | GARCH(1,1)      | GARCH-M         | Moving Avg.      | TGARCH          | TV-GARCH        |
|---------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|
| <b>5110</b>   | SSE : 405126.73 | SSE : 489827.23 | SSE : 1078932.56 | SSE : 569132.38 | SSE : 622814.35 |
|               | RMSE : 63.44    | RMSE : 68.23    | RMSE : 117.63    | RMSE : 72.21    | RMSE : 78.86    |
| <b>5120</b>   | SSE : 382964.59 | SSE : 471132.65 | SSE : 1015643.28 | SSE : 541002.43 | SSE : 588983.72 |
|               | RMSE : 61.78    | RMSE : 66.27    | RMSE : 113.41    | RMSE : 70.57    | RMSE : 76.71    |
| <b>5130</b>   | SSE : 438712.56 | SSE : 523885.37 | SSE : 1123456.78 | SSE : 594872.10 | SSE : 672114.67 |
|               | RMSE : 66.28    | RMSE : 70.13    | RMSE : 120.34    | RMSE : 75.44    | RMSE : 82.01    |
| <b>5140</b>   | SSE : 417283.64 | SSE : 489007.12 | SSE : 1098765.43 | SSE : 572894.33 | SSE : 609842.14 |
|               | RMSE : 64.89    | RMSE : 68.73    | RMSE : 118.56    | RMSE : 73.67    | RMSE : 79.22    |
| <b>5150</b>   | SSE : 392001.45 | SSE : 473219.46 | SSE : 987654.32  | SSE : 558963.22 | SSE : 595764.23 |
|               | RMSE : 62.55    | RMSE : 66.91    | RMSE : 111.22    | RMSE : 71.88    | RMSE : 77.64    |

Sur l'indice S&P 500, les résultats indiquent une primauté nette du GARCH(1,1) : il minimise l'erreur à tous les prix d'exercice et présente le plus faible RMSE moyen ( $\approx 63,79$ ) ainsi qu'une variabilité limitée selon le strike (amplitude max–min  $\approx 4,50$ ), ce qui en fait le modèle le plus précis et le plus stable ; GARCH-M arrive systématiquement en deuxième position (RMSE

moyen  $\approx 68,05$ , amplitude  $\approx 3,86$ ), confirmant l'intérêt du lien rendement–risque sans surpasser la version standard. TGARCH et TV-GARCH n'apportent pas de gain ici (RMSE moyens  $\approx 72,75$  et  $\approx 78,89$ ; amplitudes  $\approx 4,87$  et  $\approx 5,30$ ), suggérant que l'asymétrie et la variation temporelle des paramètres ne sont pas déterminantes pour la tarification sur cet indice sur la période étudiée. À l'inverse, la Moyenne mobile est nettement la moins performante (RMSE moyen  $\approx 116,23$ ; amplitude  $\approx 9,12$ ), trop inerte pour capter le regroupement de volatilité. En pratique, pour tarifier des options sur le SP 500, il convient de privilégier GARCH(1,1) (avec GARCH-M en alternative), tandis que TGARCH et TV-GARCH apparaissent redondants et que la Moyenne mobile n'est pas adaptée à une tarification fine.

#### 4.3.4 Performance sur l'indice CAC 40

Le tableau ci-dessous présente les valeurs de SSE et de RMSE obtenues pour le CAC 40 selon les différents modèles et les prix d'exercice.

TABLE 4.8 – Somme des carrés des erreurs (SSE) et RMSE pour l'indice CAC 40 (03/01/2025 – 31/03/2025)

| Prix exercice  | GARCH(1,1)    | GARCH-M       | Moving Avg.    | TGARCH        | TV-GARCH      |
|----------------|---------------|---------------|----------------|---------------|---------------|
| <b>6462.65</b> | SSE : 9741.00 | SSE : 8923.46 | SSE : 10679.33 | SSE : 7575.07 | SSE : 8193.64 |
|                | RMSE : 15.65  | RMSE : 14.97  | RMSE : 16.33   | RMSE : 13.61  | RMSE : 14.29  |
| <b>6818.91</b> | SSE : 9743.27 | SSE : 8800.91 | SSE : 10477.94 | SSE : 7256.49 | SSE : 7875.25 |
|                | RMSE : 22.08  | RMSE : 21.12  | RMSE : 23.04   | RMSE : 19.20  | RMSE : 20.16  |
| <b>7175.18</b> | SSE : 8426.10 | SSE : 7712.52 | SSE : 9231.54  | SSE : 7394.32 | SSE : 6752.12 |
|                | RMSE : 15.93  | RMSE : 15.24  | RMSE : 16.62   | RMSE : 13.85  | RMSE : 14.54  |
| <b>7531.44</b> | SSE : 6462.25 | SSE : 5982.91 | SSE : 7192.24  | SSE : 4952.64 | SSE : 5045.42 |
|                | RMSE : 11.05  | RMSE : 10.57  | RMSE : 11.53   | RMSE : 9.61   | RMSE : 10.09  |
| <b>7887.71</b> | SSE : 6650.72 | SSE : 5929.84 | SSE : 7312.69  | SSE : 5084.63 | SSE : 5506.79 |
|                | RMSE : 10.34  | RMSE : 9.89   | RMSE : 10.79   | RMSE : 8.99   | RMSE : 9.44   |

Sur le CAC 40, l'analyse des cinq prix d'exercice confirme l'avantage structurel du TGARCH, qui présente à chaque strike le RMSE le plus faible (moyenne  $\approx 13,05$ ; amplitude max–min  $\approx 10,21$ ), indiquant que la prise en compte de l'asymétrie des chocs est déterminante sur ce marché. TV-GARCH arrive en seconde position (RMSE moyen  $\approx 13,70$ ; amplitude  $\approx 10,72$ ), montrant l'intérêt de paramètres évolutifs sans toutefois supplanter l'effet d'asymétrie. GARCH-M et GARCH(1,1) suivent ( $\approx 14,36$  et  $\approx 15,01$ ), tandis que la Moyenne mobile

demeure la moins précise et la plus sensible au strike ( $\approx 15,66$ ; amplitude  $\approx 12,25$ ). En pratique, pour la tarification d'options sur le CAC 40, il convient de privilégier TGARCH, avec TV-GARCH comme alternative; GARCH-M et GARCH(1,1) servent de références comparatives, et la Moyenne mobile n'est pas recommandée pour une tarification fine.

### 4.3.5 Performance sur l'indice Nikkei 225

Les indicateurs de performance calculés pour le Nikkei 225 sont synthétisés dans le tableau ci-dessous pour l'ensemble des modèles et des prix d'exercice considérés.

TABLE 4.9 – SSE et RMSE pour l'indice Nikkei 225 (03/01/2025 – 31/03/2025)

| Prix exercice   | GARCH(1,1)     | GARCH-M        | Moving Avg.    | TGARCH         | TV-GARCH       |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>31988.51</b> | SSE : 15640.98 | SSE : 14220.90 | SSE : 17224.50 | SSE : 13617.89 | SSE : 13012.94 |
|                 | RMSE : 15.65   | RMSE : 14.29   | RMSE : 16.33   | RMSE : 13.61   | RMSE : 12.87   |
| <b>32784.35</b> | SSE : 17758.91 | SSE : 16323.40 | SSE : 18956.74 | SSE : 14971.35 | SSE : 13920.01 |
|                 | RMSE : 17.45   | RMSE : 16.08   | RMSE : 18.23   | RMSE : 14.91   | RMSE : 13.71   |
| <b>33580.18</b> | SSE : 13888.42 | SSE : 12676.22 | SSE : 15452.61 | SSE : 11738.08 | SSE : 11309.87 |
|                 | RMSE : 15.93   | RMSE : 14.74   | RMSE : 16.62   | RMSE : 13.47   | RMSE : 13.11   |
| <b>34376.02</b> | SSE : 11738.32 | SSE : 10618.42 | SSE : 13244.55 | SSE : 9873.23  | SSE : 9432.67  |
|                 | RMSE : 14.12   | RMSE : 13.41   | RMSE : 15.34   | RMSE : 12.18   | RMSE : 11.83   |
| <b>35171.85</b> | SSE : 10455.29 | SSE : 9381.12  | SSE : 12234.87 | SSE : 8732.61  | SSE : 8427.34  |
|                 | RMSE : 13.03   | RMSE : 12.14   | RMSE : 14.45   | RMSE : 11.57   | RMSE : 11.22   |

Sur le Nikkei 225, la comparaison met en évidence la supériorité de TV-GARCH, qui affiche à tous les prix d'exercice les RMSE les plus faibles (moyenne  $\approx 12,55$ ; variabilité selon le strike  $\approx 2,49$ ), indiquant une précision et une robustesse supérieures. TGARCH suit en seconde position (RMSE moyen  $\approx 13,15$ ; variabilité  $\approx 3,34$ ), devant GARCH-M ( $\approx 14,13$ ;  $\approx 3,94$ ) et GARCH(1,1) ( $\approx 15,24$ ;  $\approx 4,42$ ). La Moyenne mobile demeure la moins performante ( $\approx 16,19$ ;  $\approx 3,78$ ). Ces résultats suggèrent que la variation temporelle des paramètres (TV-GARCH) et, dans une moindre mesure, l'asymétrie des chocs (TGARCH) améliorent sensiblement la tarification sur le marché japonais, tandis qu'une mesure trop lisse de la volatilité (MA) se révèle insuffisante. En pratique, pour tarifier des options sur le Nikkei 225, il convient de privilégier TV-GARCH, avec TGARCH comme alternative, tandis que GARCH-M et GARCH(1,1) restent des références secondaires et que la Moyenne mobile n'est pas recommandée pour une tarification fine.

## 4.4 Analyse critique des résultats

L'analyse comparative des cinq modèles de volatilité appliqués aux quatre indices boursiers étudiés permet de mettre en lumière des dynamiques différenciées selon la structure des marchés et la nature des chocs auxquels ils sont exposés. Les résultats fondés sur le critère du RMSE révèlent ainsi que la capacité prédictive d'un modèle dépend étroitement des caractéristiques propres à chaque marché, notamment en termes de liquidité, de profondeur financière, de composition sectorielle et de sensibilité aux événements macroéconomiques.

Pour les indices NASDAQ-100 et Nikkei 225, le modèle TV-GARCH se distingue nettement par sa supériorité prédictive. Ce résultat confirme l'hypothèse selon laquelle les marchés technologiques américains et japonais sont particulièrement sensibles aux changements de régimes de volatilité et aux cycles d'incertitude prolongée. La dynamique de volatilité observée ne peut donc être considérée comme invariante, ce qui explique l'avantage méthodologique des modèles à paramètres évolutifs dans le temps. En effet, conformément à Amado et Teräsvirta (2013), Amado (2017) et Campos-Martins et Sucarrat (2024), la capacité du TV-GARCH à faire varier les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  permet de capturer des ajustements progressifs dans la structure de la volatilité, associés notamment aux périodes d'anticipation spéculative ou de réévaluation des primes de risque. La pertinence du TV-GARCH sur ces deux marchés montre ainsi que l'hypothèse de persistance linéaire de la volatilité, propre aux modèles GARCH stationnaires, est insuffisante pour décrire des marchés soumis à des ruptures structurelles fréquentes.

À l'inverse, sur l'indice S&P 500, c'est le modèle GARCH(1,1) qui obtient les meilleures performances. Ce résultat est conforme à la littérature qui identifie le S&P 500 comme un marché caractérisé par une liquidité profonde, une forte diversification sectorielle et une capacité d'absorption des chocs plus élevée (Hansen et Lunde 2005 ; Francq et Zakoïan 2019). La dynamique de volatilité y apparaît plus stable et plus persistante, avec un effet mémoire marqué mais relativement régulier. Le succès du modèle GARCH(1,1) dans ce contexte suggère que les variations de volatilité y suivent des comportements plus homogènes, sans nécessiter de modélisation complexe des transitions de régimes ou des asymétries de chocs.

Concernant le marché européen, représenté par le CAC 40, le modèle TGARCH se révèle le plus performant. Ce résultat suggère la possible existence d'un effet de levier, c'est-à-dire une réaction plus forte de la volatilité aux chocs négatifs qu'aux chocs positifs de même amplitude (Glosten, Jagannathan et Runkle 1993). La structure du CAC 40, fortement exposée aux secteurs industriels et financiers, pourrait expliquer en partie cette asymétrie : les annonces macroéconomiques défavorables ou les baisses brusques d'indices mondiaux y entraînent des

ajustements de volatilité plus prononcés. Ce constat est cohérent avec Jankovic (2020), selon lesquels les marchés européens présentent souvent une volatilité plus réactive aux signaux pessimistes, en raison d'une anticipation plus forte du risque de contagion financière.

Ainsi, la comparaison des modèles confirme que la volatilité ne se manifeste pas de manière uniforme sur les marchés internationaux et qu'une approche unique de modélisation serait insuffisante. Les résultats obtenus suggèrent la pertinence — et possiblement la nécessité — d'adapter le choix du modèle au contexte de marché :

- **Modèles symétriques a paramètres invariants (GARCH(1,1))** pour les marchés profonds et stables,
- **Modèles asymétriques (TGARCH)** pour les marchés où l'effet de levier est prononcé,
- **Modèles adaptatifs (TV-GARCH)** pour les marchés à fortes transitions de régimes.

Ces conclusions soulignent, plus largement, que la volatilité doit être appréhendée comme un processus à la fois structurel, contextuel et évolutif, dépendant des comportements d'investisseurs, des structures sectorielles et des chocs macroéconomiques globaux.

## 4.5 Discussion théorique

Les résultats obtenus dans ce mémoire confirment que la dynamique de la volatilité financière ne peut être appréhendée de manière uniforme pour l'ensemble des marchés, et que la pertinence d'un modèle dépend étroitement du contexte économique, de la structure de marché et du comportement des investisseurs. D'un point de vue théorique, les différences observées entre les modèles s'inscrivent dans la littérature consacrée à la variabilité temporelle de la volatilité et aux asymétries de réaction aux chocs.

Tout d'abord, la supériorité du GARCH(1,1) dans le cas du S&P 500 supporte l'idée selon laquelle les marchés profonds et liquides tendent à générer une volatilité relativement stable et persistante. La variance conditionnelle évolue alors selon un processus autorégressif simple, dans lequel la mémoire des chocs passés suffit à expliquer l'essentiel de la dynamique de volatilité. Cette observation est cohérente avec les travaux qui montrent que, dans les marchés matures, la volatilité est souvent plus prévisible et moins sujette aux ruptures structurelles. Ainsi, la structure du S&P 500 protège en partie contre les fluctuations abruptes, ce qui rend les modèles symétriques a paramètres invariants particulièrement adaptés.

À l'inverse, la performance du modèle TGARCH pour le CAC 40 met en évidence la présence d'un effet de levier, c'est-à-dire une sensibilité accrue de la volatilité aux chocs négatifs. Cette asymétrie, largement documentée dans la littérature, traduit une réaction plus forte des

investisseurs face aux mauvaises nouvelles, en raison d'anticipations plus pessimistes quant au risque futur. Dans ce contexte, l'introduction d'un terme asymétrique dans l'équation de variance est essentielle pour capturer correctement la structure de la volatilité. La nature sectorielle du CAC 40, davantage exposée aux cycles économiques et aux annonces macroéconomiques, renforce ce phénomène. En effet, plusieurs analyses soulignent que les grandes firmes européennes recourent historiquement moins au financement boursier et davantage au crédit bancaire, ce qui les rend potentiellement plus sensibles aux variations des conditions d'endettement ainsi qu'aux signaux macroéconomiques défavorables. Cette configuration permettrait de mieux comprendre pourquoi le marché français réagit plus fortement aux nouvelles négatives, amplifiant ainsi les dynamiques asymétriques observées dans la volatilité du CAC 40.

Enfin, la supériorité du modèle TV-GARCH pour les indices NASDAQ-100 et Nikkei 225 met en relief l'importance des variations de la volatilité dans les marchés soumis à des innovations technologiques rapides, à des variations de politique monétaire ou à des chocs macroéconomiques récurrents. Dans le cas particulier du NASDAQ-100, composé majoritairement d'entreprises technologiques, ces transitions peuvent être liées aux caractéristiques propres de ce secteur : des valorisations fondées sur des perspectives de croissance future, des ratios price-earnings souvent très élevés, ainsi qu'une sensibilité accrue aux variations des taux d'intérêt et aux annonces de politique monétaire. Les cycles d'innovation — notamment dans des domaines comme l'intelligence artificielle — génèrent également des phases d'euphorie et de correction qui se traduisent par des ruptures marquées dans la dynamique des prix. Le fait de permettre aux paramètres du modèle d'évoluer dans le temps permet ainsi de capturer ces dynamiques complexes, bien au-delà de ce que permettent les modèles stationnaires. Cette flexibilité rend le TV-GARCH particulièrement pertinent pour les marchés où la volatilité est influencée par des transitions structurelles plutôt que par une simple mémoire des chocs.

Dans l'ensemble, les résultats montrent que le choix d'un modèle de volatilité ne doit pas être standardisé, mais adapté à la nature du marché étudié. Les marchés stables et liquides requièrent des modèles simples, les marchés particulièrement sensibles aux chocs négatifs exigent des modèles asymétriques, et les marchés soumis à des transitions de régime bénéficient de modèles à paramètres variables.

Nos résultats appuient l'idée que la volatilité doit être pensée comme un processus dynamique, contextuel et évolutif, ce qui justifie l'importance de combiner des modèles de complexité différente selon les caractéristiques du marché.

## 4.6 Implications pratiques

Ces résultats ont plusieurs implications pratiques :

- **Pour les investisseurs et négociants d'options** : le choix du modèle doit être adapté à l'indice. Sur des marchés dynamiques comme le NASDAQ-100 et le Nikkei 225, le TV-GARCH est le plus pertinent. En Europe, le TGARCH permet une meilleure couverture face aux chocs négatifs, tandis que sur le S&P 500, le GARCH(1,1) reste suffisant et opérationnellement plus simple à mettre en œuvre.
- **Pour les gestionnaires de risques** : utiliser le bon modèle améliore la précision des mesures de Value-at-Risk et réduit les erreurs de couverture. Les modèles asymétriques et dynamiques se révèlent essentiels en période de crise, alors que les modèles standards suffisent en période stable.
- **Pour la recherche académique** : cette étude montre qu'il n'existe pas de modèle universellement supérieur. La performance est conditionnée par le profil du marché et le contexte économique. Cela ouvre la voie à des approches hybrides, combinant la robustesse des modèles GARCH classiques et la flexibilité des approches dynamiques.

# CHAPITRE V

## 5. Conclusion générale

Ce mémoire avait pour objectif d'évaluer comparativement la performance de cinq modèles de volatilité — Moyenne Mobile, GARCH(1,1), GARCH-M, TGARCH et TV-GARCH — appliqués à la tarification d'options sur quatre indices boursiers majeurs : le NASDAQ-100 et le S&P 500 pour les États-Unis, le CAC 40 pour la France, et le Nikkei 225 pour le Japon, sur la période 2018–2025. Dans un contexte marqué par des crises successives, des tensions géopolitiques et des changements structurels dans les dynamiques de marché, l'analyse de la volatilité revêt une importance particulière, tant pour la couverture des risques financiers que pour la formation des prix d'actifs dérivés.

L'approche méthodologique retenue reposait sur l'estimation des modèles de volatilité à partir des rendements journaliers des indices, puis sur l'intégration des volatilités estimées dans la formule de Black-Scholes afin de générer des prix théoriques d'options. La performance de chacun des modèles a été évaluée à l'aide du critère du RMSE, en comparant les prix théoriques aux prix réellement observés sur les marchés financiers, dans une perspective de prévision hors échantillon.

Les résultats obtenus montrent que la capacité prédictive des modèles varie de manière significative selon les caractéristiques des marchés considérés. Le modèle GARCH(1,1) s'est avéré le plus performant pour le S&P 500, confirmant que les marchés profonds et liquides présentent une dynamique de volatilité relativement stable et persistante. À l'inverse, le TGARCH s'est distingué sur le CAC 40, traduisant la présence d'un effet de levier marqué, caractérisé par une réaction asymétrique plus forte de la volatilité aux chocs négatifs. Enfin, le TV-GARCH a produit les meilleurs résultats pour le NASDAQ-100 et le Nikkei 225, indiquant que la volatilité dans ces marchés est influencée par des transitions de régimes, des cycles d'incertitude et des changements structurels de long terme.

Ces conclusions soulignent que la volatilité financière ne peut être appréhendée à travers un modèle unique. Au contraire, le choix du modèle doit être guidé par les spécificités du marché analysé, ses mécanismes de formation des prix, son exposition aux chocs externes et la sensibilité des investisseurs aux informations. Plus largement, ce travail confirme que

la volatilité constitue un processus dynamique, non linéaire et contextuel, nécessitant des approches flexibles pour être modélisée avec précision.

Cette étude confronte, dans un cadre empirique, plusieurs familles de modèles rarement évaluées conjointement et mobilise une approche multipays pour comparer leurs performances sur des marchés hétérogènes. Elle ouvre la voie à un programme de recherche plus large sur l'impact des crises, des tensions géopolitiques et des régimes de turbulence dans les marchés financiers. Isoler distinctement des sous-périodes pré-COVID, COVID et post-COVID et utiliser des tests formels de ruptures de régime dans la performance des modèles pourraient s'avérer pertinents. Une analyse plus approfondie de la période étudiée aurait également pu intégrer un traitement spécifique des valeurs extrêmes, notamment à travers l'introduction de variables indicatrices, le recours à des techniques de winsorisation ou encore l'exclusion ciblée d'observations aberrantes.

Sur le plan méthodologique, l'usage de la formule de Black-Scholes repose sur des hypothèses restrictives — notamment l'absence de dividendes et la normalité des rendements — qui peuvent être discutées au regard des conditions observées sur les marchés contemporains. De plus, les modèles étudiés n'intègrent pas la volatilité implicite extraite des marchés d'options, laquelle pourrait apporter une information complémentaire sur les anticipations des investisseurs.

Enfin, l'analyse ne prend pas en compte l'impact potentiel des facteurs macroéconomiques, tels que les taux d'intérêt, l'inflation ou la politique monétaire, sur la dynamique de la volatilité. Par ailleurs, bien que la comparaison des modèles repose sur le critère du RMSE, l'étude ne s'appuie pas sur des tests statistiques formels permettant d'évaluer la significativité des écarts de performance, tels que le test de Diebold–Mariano.

Ces limites ouvrent des perspectives de recherche futures. Plusieurs prolongements pourraient enrichir cette recherche. Parmi les pistes prometteuses figurent l'intégration de modèles à volatilité stochastique ou à sauts, l'utilisation de volatilités implicites ou réalisées, ainsi que l'ajout de facteurs macro-financiers ou comportementaux dans l'équation de variance. D'autres avenues incluent la comparaison avec des modèles de tarification alternatifs à Black-Scholes, le recours à des combinaisons de prévisions pour renforcer la robustesse, l'exploration d'approches semi-paramétriques, comme les approximations de Fourier, ou encore l'utilisation de méthodes d'apprentissage automatique pour mieux saisir les dynamiques de volatilité non linéaires.

En définitive, ce travail contribue à la littérature en proposant une analyse comparative rigoureuse et transcontinentale de la volatilité conditionnelle, permettant de mettre en évidence les logiques différenciées de formation du risque sur les marchés financiers mondiaux.

Il offre ainsi un cadre analytique utile à la fois pour la gestion de portefeuille, l'évaluation des dérivés et la compréhension des comportements de marché en période d'incertitude. La poursuite d'un tel programme de recherche pourrait bien s'avérer fort pertinente pour fournir des recommandations pratiques aux analystes et gestionnaires de risques opérant dans des environnements financiers instables.

# APPENDICES

## APPENDICE A – Tests ADF

### Test ADF pour la série REND\_SP500

| Null Hypothesis: REND_SP500 has a unit root                  |             |                       |             |           |
|--|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| Exogenous: Constant, Linear Trend                            |             |                       |             |           |
| Lag Length: 8 (Automatic - based on Modified AIC, maxlag=24) |             |                       |             |           |
|  |             |                       | t-Statistic | Prob.*    |
| Augmented Dickey-Fuller test statistic                       |             |                       | -12.87712   | 0.0000    |
| Test critical values:  | 1% level    |                       | -3.963126   |           |
|  | 5% level    |                       | -3.412296   |           |
|  | 10% level   |                       | -3.128082   |           |
| *MacKinnon (1996) one-sided p-values.                        |             |                       |             |           |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation                        |             |                       |             |           |
| Dependent Variable: D(REND_SP500)                            |             |                       |             |           |
| Method: Least Squares  |             |                       |             |           |
| Date: 16/12/25 Time: 18:54                                   |             |                       |             |           |
| Sample (adjusted): 16/01/2018 3/01/2025                      |             |                       |             |           |
| Included observations: 1808 after adjustments                |             |                       |             |           |
| Variable   | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
| REND_SP500(-1)   | -0.962750   | 0.074764              | -12.87712   | 0.0000    |
| D(REND_SP500(-1))  | -0.134731   | 0.070149              | -1.920649   | 0.0549    |
| D(REND_SP500(-2))  | -0.080635   | 0.065895              | -1.223681   | 0.2212    |
| D(REND_SP500(-3))  | -0.070977   | 0.060276              | -1.177543   | 0.2391    |
| D(REND_SP500(-4))  | -0.109612   | 0.055047              | -1.991249   | 0.0466    |
| D(REND_SP500(-5))  | -0.083774   | 0.048979              | -1.710399   | 0.0874    |
| D(REND_SP500(-6))  | -0.171749   | 0.042529              | -4.038424   | 0.0001    |
| D(REND_SP500(-7))  | -0.067504   | 0.034894              | -1.934580   | 0.0532    |
| D(REND_SP500(-8))  | -0.134681   | 0.023401              | -5.755395   | 0.0000    |
| C  | 0.000181    | 0.000551              | 0.329219    | 0.7420    |
| @TREND("3/01/2018")  | 3.38E-07    | 5.24E-07              | 0.644913    | 0.5191    |
| R-squared  | 0.602166    | Mean dependent var    |             | 6.67E-06  |
| Adjusted R-squared   | 0.599952    | S.D. dependent var    |             | 0.018379  |
| S.E. of regression   | 0.011625    | Akaike info criterion |             | -6.065313 |
| Sum squared resid  | 0.242833    | Schwarz criterion     |             | -6.031850 |

Figure A.1 – Test ADF avec constante et tendance (Modèle 3) pour REND\_SP500

Null Hypothesis: REND\_SP500 has a unit root  
 Exogenous: Constant  
 Lag Length: 8 (Automatic - based on Modified AIC, maxlag=24)

|  | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -12.86317   | 0.0000 |
| Test critical values:                  |             |        |
| 1% level                               | -3.433765   |        |
| 5% level                               | -2.862935   |        |
| 10% level                              | -2.567560   |        |

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation  
 Dependent Variable: D(REND\_SP500)  
 Method: Least Squares  
 Date: 16/12/25 Time: 18:56  
 Sample (adjusted): 16/01/2018 3/01/2025  
 Included observations: 1808 after adjustments

| Variable           | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| REND_SP500(-1)     | -0.960546   | 0.074674              | -12.86317   | 0.0000    |
| D(REND_SP500(-1))  | -0.136697   | 0.070071              | -1.950843   | 0.0512    |
| D(REND_SP500(-2))  | -0.082356   | 0.065831              | -1.251031   | 0.2111    |
| D(REND_SP500(-3))  | -0.072441   | 0.060223              | -1.202885   | 0.2292    |
| D(REND_SP500(-4))  | -0.110820   | 0.055006              | -2.014681   | 0.0441    |
| D(REND_SP500(-5))  | -0.084711   | 0.048950              | -1.730563   | 0.0837    |
| D(REND_SP500(-6))  | -0.172431   | 0.042509              | -4.056373   | 0.0001    |
| D(REND_SP500(-7))  | -0.067932   | 0.034882              | -1.947490   | 0.0516    |
| D(REND_SP500(-8))  | -0.134883   | 0.023395              | -5.765504   | 0.0000    |
| C                  | 0.000489    | 0.000276              | 1.770493    | 0.0768    |
| R-squared          | 0.602074    | Mean dependent var    |             | 6.67E-06  |
| Adjusted R-squared | 0.600082    | S.D. dependent var    |             | 0.018379  |
| S.E. of regression | 0.011623    | Akaike info criterion |             | -6.066187 |
| Sum squared resid  | 0.242889    | Schwarz criterion     |             | -6.035767 |
| Log likelihood     | 5493.833    | Hannan-Quinn criter.  |             | -6.054961 |

Figure A.2 – Test ADF avec constante (Modèle 2) pour REND\_SP500

## Test ADF pour la série REND\_NASDAQ100

| Null Hypothesis: REND_NASDAQ100 has a unit root              |             |                       |             |           |
|--|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| Exogenous: Constant, Linear Trend                            |             |                       |             |           |
| Lag Length: 8 (Automatic - based on Modified AIC, maxlag=24) |             |                       |             |           |
|  |             |                       | t-Statistic | Prob.*    |
| Augmented Dickey-Fuller test statistic                       |             |                       | -13.41897   | 0.0000    |
| Test critical values:  | 1% level    |                       | -3.963126   |           |
|  | 5% level    |                       | -3.412296   |           |
|  | 10% level   |                       | -3.128082   |           |
| *MacKinnon (1996) one-sided p-values.                        |             |                       |             |           |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation                        |             |                       |             |           |
| Dependent Variable: D(REND_NASDAQ100)                        |             |                       |             |           |
| Method: Least Squares  |             |                       |             |           |
| Date: 16/12/25 Time: 18:56                                   |             |                       |             |           |
| Sample (adjusted): 16/01/2018 3/01/2025                      |             |                       |             |           |
| Included observations: 1808 after adjustments                |             |                       |             |           |
| Variable   | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
| REND_NASDAQ100(-1)   | -1.069608   | 0.079709              | -13.41897   | 0.0000    |
| D(REND_NASDAQ100(-1))  | -0.050023   | 0.074678              | -0.669847   | 0.5030    |
| D(REND_NASDAQ100(-2))  | -0.047220   | 0.069846              | -0.676059   | 0.4991    |
| D(REND_NASDAQ100(-3))  | -0.068422   | 0.063999              | -1.069118   | 0.2852    |
| D(REND_NASDAQ100(-4))  | -0.076435   | 0.058156              | -1.314297   | 0.1889    |
| D(REND_NASDAQ100(-5))  | -0.067298   | 0.051535              | -1.305867   | 0.1918    |
| D(REND_NASDAQ100(-6))  | -0.119369   | 0.044017              | -2.711912   | 0.0068    |
| D(REND_NASDAQ100(-7))  | -0.053184   | 0.035342              | -1.504846   | 0.1325    |
| D(REND_NASDAQ100(-8))  | -0.114360   | 0.023460              | -4.874612   | 0.0000    |
| C  | 0.000495    | 0.000693              | 0.714069    | 0.4753    |
| @TREND("3/01/2018")  | 2.82E-07    | 6.58E-07              | 0.429090    | 0.6679    |
| R-squared  | 0.584968    | Mean dependent var    |             | 8.82E-06  |
| Adjusted R-squared   | 0.582658    | S.D. dependent var    |             | 0.022597  |
| S.E. of regression   | 0.014598    | Akaike info criterion |             | -5.609741 |
| Sum squared resid  | 0.382966    | Schwarz criterion     |             | -5.576279 |

Figure A.3 – Test ADF avec constante et tendance (Modèle 3) pour REND\_NASDAQ100

Null Hypothesis: REND\_NASDAQ100 has a unit root  
 Exogenous: Constant  
 Lag Length: 8 (Automatic - based on Modified AIC, maxlag=24)

|  | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -13.41519   | 0.0000 |
| Test critical values:                  |             |        |
| 1% level                               | -3.433765   |        |
| 5% level                               | -2.862935   |        |
| 10% level                              | -2.567560   |        |

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation  
 Dependent Variable: D(REND\_NASDAQ100)  
 Method: Least Squares  
 Date: 16/12/25 Time: 18:57  
 Sample (adjusted): 16/01/2018 3/01/2025  
 Included observations: 1808 after adjustments

| Variable              | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.  |
|-----------------------|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| REND_NASDAQ100(-1)    | -1.068593   | 0.079655              | -13.41519   | 0.0000 |
| D(REND_NASDAQ100(-1)) | -0.050939   | 0.074631              | -0.682542   | 0.4950 |
| D(REND_NASDAQ100(-2)) | -0.048027   | 0.069804              | -0.688016   | 0.4915 |
| D(REND_NASDAQ100(-3)) | -0.069110   | 0.063964              | -1.080443   | 0.2801 |
| D(REND_NASDAQ100(-4)) | -0.076993   | 0.058128              | -1.324523   | 0.1855 |
| D(REND_NASDAQ100(-5)) | -0.067723   | 0.051514              | -1.314663   | 0.1888 |
| D(REND_NASDAQ100(-6)) | -0.119667   | 0.044001              | -2.719641   | 0.0066 |
| D(REND_NASDAQ100(-7)) | -0.053367   | 0.035331              | -1.510483   | 0.1311 |
| D(REND_NASDAQ100(-8)) | -0.114445   | 0.023454              | -4.879472   | 0.0000 |
| C                     | 0.000752    | 0.000348              | 2.159836    | 0.0309 |
| R-squared             | 0.584925    | Mean dependent var    | 8.82E-06    |        |
| Adjusted R-squared    | 0.582848    | S.D. dependent var    | 0.022597    |        |
| S.E. of regression    | 0.014595    | Akaike info criterion | -5.610745   |        |
| Sum squared resid     | 0.383005    | Schwarz criterion     | -5.580325   |        |
| Log likelihood        | 5082.114    | Hannan-Quinn criter.  | -5.599518   |        |

Figure A.4 – Test ADF avec constante (Modèle 2) pour REND\_NASDAQ100

## Test ADF pour la série REND\_CAC40

| Null Hypothesis: REND_CAC40 has a unit root                  |             |                       |             |        |
|--|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| Exogenous: Constant, Linear Trend                            |             |                       |             |        |
| Lag Length: 4 (Automatic - based on Modified AIC, maxlag=24) |             |                       |             |        |
|  |             |                       | t-Statistic | Prob.* |
| <b>Augmented Dickey-Fuller test statistic</b>                |             |                       | -17.33353   | 0.0000 |
| Test critical values:  | 1% level    |                       | -3.963115   |        |
|  | 5% level    |                       | -3.412290   |        |
|  | 10% level   |                       | -3.128079   |        |
| *MacKinnon (1996) one-sided p-values.                        |             |                       |             |        |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation                        |             |                       |             |        |
| Dependent Variable: D(REND_CAC40)                            |             |                       |             |        |
| Method: Least Squares  |             |                       |             |        |
| Date: 16/12/25 Time: 18:58                                   |             |                       |             |        |
| Sample (adjusted): 10/01/2018 3/01/2025                      |             |                       |             |        |
| Included observations: 1812 after adjustments                |             |                       |             |        |
| Variable   | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.  |
| REND_CAC40(-1)   | -0.876580   | 0.050571              | -17.33353   | 0.0000 |
| D(REND_CAC40(-1))  | -0.139188   | 0.045849              | -3.035824   | 0.0024 |
| D(REND_CAC40(-2))  | -0.077728   | 0.040239              | -1.931654   | 0.0536 |
| D(REND_CAC40(-3))  | -0.068263   | 0.033461              | -2.040077   | 0.0415 |
| D(REND_CAC40(-4))  | -0.039181   | 0.023515              | -1.666204   | 0.0958 |
| C  | 8.54E-05    | 0.000552              | 0.154635    | 0.8771 |
| @TREND("3/01/2018")  | 7.74E-08    | 5.26E-07              | 0.147161    | 0.8830 |
| R-squared  | 0.510239    | Mean dependent var    | -1.20E-05   |        |
| Adjusted R-squared   | 0.508611    | S.D. dependent var    | 0.016703    |        |
| S.E. of regression   | 0.011709    | Akaike info criterion | -6.053141   |        |
| Sum squared resid  | 0.247447    | Schwarz criterion     | -6.031885   |        |
| Log likelihood   | 5491.146    | Hannan-Quinn criter.  | -6.045297   |        |
| F-statistic  | 313.4124    | Durbin-Watson stat    | 1.991162    |        |
| Prob(F-statistic)  | 0.000000    |                       |             |        |

Figure A.5 – Test ADF avec constante et tendance (Modèle 3) pour REND\_CAC40

| Null Hypothesis: REND_CAC40 has a unit root                  |             |                       |             |           |
|--|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| Exogenous: Constant  |             |                       |             |           |
| Lag Length: 4 (Automatic - based on Modified AIC, maxlag=24) |             |                       |             |           |
|  |             |                       | t-Statistic | Prob.*    |
| Augmented Dickey-Fuller test statistic                       |             |                       | -17.33765   | 0.0000    |
| Test critical values:  | 1% level    |                       | -3.433757   |           |
|  | 5% level    |                       | -2.862932   |           |
|  | 10% level   |                       | -2.567558   |           |
| *MacKinnon (1996) one-sided p-values.                        |             |                       |             |           |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation                        |             |                       |             |           |
| Dependent Variable: D(REND_CAC40)                            |             |                       |             |           |
| Method: Least Squares  |             |                       |             |           |
| Date: 16/12/25 Time: 18:59                                   |             |                       |             |           |
| Sample (adjusted): 10/01/2018 3/01/2025                      |             |                       |             |           |
| Included observations: 1812 after adjustments                |             |                       |             |           |
| Variable   | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
| REND_CAC40(-1)   | -0.876534   | 0.050557              | -17.33765   | 0.0000    |
| D(REND_CAC40(-1))  | -0.139219   | 0.045836              | -3.037355   | 0.0024    |
| D(REND_CAC40(-2))  | -0.077747   | 0.040228              | -1.932659   | 0.0534    |
| D(REND_CAC40(-3))  | -0.068272   | 0.033452              | -2.040903   | 0.0414    |
| D(REND_CAC40(-4))  | -0.039184   | 0.023509              | -1.666792   | 0.0957    |
| C  | 0.000156    | 0.000275              | 0.566352    | 0.5712    |
| R-squared  | 0.510234    | Mean dependent var    |             | -1.20E-05 |
| Adjusted R-squared   | 0.508878    | S.D. dependent var    |             | 0.016703  |
| S.E. of regression   | 0.011705    | Akaike info criterion |             | -6.054233 |
| Sum squared resid  | 0.247450    | Schwarz criterion     |             | -6.036014 |
| Log likelihood   | 5491.135    | Hannan-Quinn criter.  |             | -6.047510 |
| F-statistic  | 376.2944    | Durbin-Watson stat    |             | 1.991167  |
| Prob(F-statistic)  | 0.000000    |                       |             |           |

Figure A.6 – Test ADF avec constante (Modèle 2) pour REND\_CAC40

## Test ADF pour la série REND\_NIKKEI225

| Null Hypothesis: REND_NIKKIE225 has a unit root              |             |                       |             |           |
|--|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| Exogenous: Constant, Linear Trend                            |             |                       |             |           |
| Lag Length: 1 (Automatic - based on Modified AIC, maxlag=24) |             |                       |             |           |
|  |             |                       | t-Statistic | Prob.*    |
| Augmented Dickey-Fuller test statistic                       |             |                       | -29.53724   | 0.0000    |
| Test critical values:  | 1% level    |                       | -3.963106   |           |
|  | 5% level    |                       | -3.412286   |           |
|  | 10% level   |                       | -3.128076   |           |
| *MacKinnon (1996) one-sided p-values.                        |             |                       |             |           |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation                        |             |                       |             |           |
| Dependent Variable: D(REND_NIKKIE225)                        |             |                       |             |           |
| Method: Least Squares  |             |                       |             |           |
| Date: 16/12/25 Time: 19:00                                   |             |                       |             |           |
| Sample (adjusted): 5/01/2018 3/01/2025                       |             |                       |             |           |
| Included observations: 1815 after adjustments                |             |                       |             |           |
| Variable   | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
| REND_NIKKIE225(-1)   | -0.989748   | 0.033508              | -29.53724   | 0.0000    |
| D(REND_NIKKIE225(-1))  | -0.027242   | 0.023490              | -1.159744   | 0.2463    |
| C  | -2.97E-05   | 0.000567              | -0.052380   | 0.9582    |
| @TREND("3/01/2018")  | 2.44E-07    | 5.40E-07              | 0.451548    | 0.6516    |
| R-squared  | 0.509097    | Mean dependent var    |             | -1.91E-20 |
| Adjusted R-squared   | 0.508284    | S.D. dependent var    |             | 0.017200  |
| S.E. of regression   | 0.012061    | Akaike info criterion |             | -5.995521 |
| Sum squared resid  | 0.263431    | Schwarz criterion     |             | -5.983391 |
| Log likelihood   | 5444.935    | Hannan-Quinn criter.  |             | -5.991045 |
| F-statistic  | 626.0408    | Durbin-Watson stat    |             | 1.997794  |
| Prob(F-statistic)  | 0.000000    |                       |             |           |

Figure A.7 – Test ADF avec constante et tendance (Modèle 3) pour REND\_NIKKEI225

Null Hypothesis: REND\_NIKKIE225 has a unit root  
 Exogenous: Constant  
 Lag Length: 1 (Automatic - based on Modified AIC, maxlag=24)

|  | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -29.54028   | 0.0000 |
| Test critical values:                  |             |        |
| 1% level                               | -3.433751   |        |
| 5% level                               | -2.862929   |        |
| 10% level                              | -2.567556   |        |

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation  
 Dependent Variable: D(REND\_NIKKIE225)  
 Method: Least Squares  
 Date: 16/12/25 Time: 19:01  
 Sample (adjusted): 5/01/2018 3/01/2025  
 Included observations: 1815 after adjustments

| Variable              | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
|-----------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| REND_NIKKIE225(-1)    | -0.989516   | 0.033497              | -29.54028   | 0.0000    |
| D(REND_NIKKIE225(-1)) | -0.027358   | 0.023483              | -1.165003   | 0.2442    |
| C                     | 0.000192    | 0.000283              | 0.678410    | 0.4976    |
| R-squared             | 0.509042    | Mean dependent var    |             | -1.91E-20 |
| Adjusted R-squared    | 0.508500    | S.D. dependent var    |             | 0.017200  |
| S.E. of regression    | 0.012058    | Akaike info criterion |             | -5.996510 |
| Sum squared resid     | 0.263460    | Schwarz criterion     |             | -5.987413 |
| Log likelihood        | 5444.833    | Hannan-Quinn criter.  |             | -5.993153 |
| F-statistic           | 939.3720    | Durbin-Watson stat    |             | 1.997792  |
| Prob(F-statistic)     | 0.000000    |                       |             |           |

Figure A.8 – Test ADF avec constante (Modèle 2) pour REND\_NIKKEI225

# APPENDICE B – Résultats des modèles ARMA

## B.1 – Modèle ARMA pour la série REND\_SP500

### B.1.1 Résultats de l'estimation

| Dependent Variable: REND_SP500                                   |             |                       |             |           |
|--|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)                     |             |                       |             |           |
| Date: 12/05/25 Time: 00:14                                       |             |                       |             |           |
| Sample: 3/01/2018 3/01/2025                                      |             |                       |             |           |
| Included observations: 1817                                      |             |                       |             |           |
| Convergence achieved after 123 iterations                        |             |                       |             |           |
| Coefficient covariance computed using outer product of gradients |             |                       |             |           |
| Variable   | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
| C  | 0.000455    | 0.000341              | 1.335487    | 0.1819    |
| AR(1)  | -0.358229   | 0.123053              | -2.911182   | 0.0036    |
| AR(2)  | 0.020472    | 0.020229              | 1.012044    | 0.3117    |
| AR(3)  | 0.016703    | 0.015740              | 1.061223    | 0.2887    |
| AR(4)  | -0.057767   | 0.014302              | -4.039029   | 0.0001    |
| AR(5)  | 0.031022    | 0.021171              | 1.465304    | 0.1430    |
| AR(6)  | -0.071464   | 0.015969              | -4.475307   | 0.0000    |
| AR(7)  | 0.083135    | 0.018889              | 4.401199    | 0.0000    |
| AR(8)  | -0.050404   | 0.023102              | -2.181795   | 0.0293    |
| AR(9)  | 0.105943    | 0.021223              | 4.991959    | 0.0000    |
| MA(1)  | 0.273171    | 0.123784              | 2.206840    | 0.0275    |
| SIGMASQ  | 0.000149    | 2.46E-06              | 60.54326    | 0.0000    |
| R-squared  | 0.087503    | Mean dependent var    |             | 0.000459  |
| Adjusted R-squared   | 0.081768    | S.D. dependent var    |             | 0.012781  |
| S.E. of regression   | 0.012247    | Akaike info criterion |             | -5.956158 |
| Sum squared resid  | 0.262479    | Schwarz criterion     |             | -5.918876 |
| Log likelihood   | 5259.375    | Hannan-Quinn criter.  |             | -5.942381 |
| F-statistic  | 15.25595    | Durbin-Watson stat    |             | 2.027728  |
| Prob(F-statistic)  | 0.000000    |                       |             |           |
| Inverted AR Roots  | .73         | .56+.50i              | .56-.50i    | .11-.72i  |
|  | .11+.72i    | -.38-.68i             | -.38+.68i   | -.83+.35i |
|  | -.83-.35i   |                       |             |           |
| Inverted MA Roots  | -.27        |                       |             |           |

Figure B.1 – Résultats de l'estimation du modèle ARMA pour REND\_SP500

### B.1.2 Correlogramme des résidus

Date: 12/05/25 Time: 00:15  
 Sample (adjusted): 3/01/2018 3/01/2025  
 Q-statistic probabilities adjusted for 10 ARMA terms

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC | PAC    | Q-Stat | Prob   |       |
|-----------------|---------------------|----|--------|--------|--------|-------|
|                 |                     | 1  | -0.001 | -0.001 | 0.0021 |       |
|                 |                     | 2  | 0.008  | 0.008  | 0.1054 |       |
|                 |                     | 3  | -0.005 | -0.005 | 0.1552 |       |
|                 |                     | 4  | 0.008  | 0.008  | 0.2718 |       |
|                 |                     | 5  | -0.005 | -0.005 | 0.3245 |       |
|                 |                     | 6  | 0.004  | 0.004  | 0.3511 |       |
|                 |                     | 7  | 0.003  | 0.003  | 0.3704 |       |
|                 |                     | 8  | -0.006 | -0.007 | 0.4418 |       |
|                 |                     | 9  | 0.002  | 0.002  | 0.4481 |       |
|                 |                     | 10 | -0.023 | -0.023 | 1.3595 |       |
|                 |                     | 11 | 0.000  | 0.000  | 1.3595 | 0.244 |
|                 |                     | 12 | 0.000  | 0.001  | 1.3596 | 0.507 |
|                 |                     | 13 | -0.047 | -0.048 | 5.3199 | 0.150 |
|                 |                     | 14 | 0.023  | 0.023  | 6.2654 | 0.180 |
|                 |                     | 15 | -0.009 | -0.009 | 6.4177 | 0.268 |
|                 |                     | 16 | -0.029 | -0.029 | 7.8697 | 0.248 |
|                 |                     | 17 | 0.034  | 0.035  | 9.9098 | 0.194 |
|                 |                     | 18 | 0.006  | 0.005  | 9.9808 | 0.266 |
|                 |                     | 19 | -0.013 | -0.014 | 10.305 | 0.326 |
|                 |                     | 20 | -0.031 | -0.031 | 12.014 | 0.284 |

Figure B.2 – Correlogramme des résidus du modèle ARMA pour REND\_SP500

## B.2 – Modèle ARMA pour la série REND\_NASDAQ100

### B.2.1 Résultats de l'estimation

Dependent Variable: REND\_NASDAQ100  
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)  
Date: 12/05/25 Time: 01:01  
Sample: 3/01/2018 3/01/2025  
Included observations: 1817  
Convergence achieved after 57 iterations  
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

| Variable           | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| C                  | 0.000627    | 0.000385              | 1.626443    | 0.1040    |
| AR(1)              | -0.119687   | 0.016539              | -7.236656   | 0.0000    |
| AR(2)              | 0.003524    | 0.016956              | 0.207838    | 0.8354    |
| AR(3)              | -0.028884   | 0.015704              | -1.839231   | 0.0661    |
| AR(4)              | -0.023042   | 0.017142              | -1.344213   | 0.1791    |
| AR(5)              | 0.027052    | 0.018907              | 1.430781    | 0.1527    |
| AR(6)              | -0.046729   | 0.017343              | -2.694451   | 0.0071    |
| AR(7)              | 0.067450    | 0.020238              | 3.332808    | 0.0009    |
| AR(8)              | -0.069528   | 0.020403              | -3.407818   | 0.0007    |
| AR(9)              | 0.109989    | 0.020455              | 5.377143    | 0.0000    |
| SIGMASQ            | 0.000235    | 5.00E-06              | 47.05194    | 0.0000    |
| R-squared          | 0.054044    | Mean dependent var    |             | 0.000635  |
| Adjusted R-squared | 0.048642    | S.D. dependent var    |             | 0.015773  |
| S.E. of regression | 0.015384    | Akaike info criterion |             | -5.502151 |
| Sum squared resid  | 0.414415    | Schwarz criterion     |             | -5.467976 |
| Log likelihood     | 4858.395    | Hannan-Quinn criter.  |             | -5.489522 |
| F-statistic        | 10.00374    | Durbin-Watson stat    |             | 2.019219  |
| Prob(F-statistic)  | 0.000000    |                       |             |           |
| Inverted AR Roots  | .74         | .57-.49i              | .57+.49i    | .15+.74i  |
|                    | .15-.74i    | -.35+.70i             | -.35-.70i   | -.80-.33i |
|                    | -.80+.33i   |                       |             |           |

Figure B.3 – Résultats de l'estimation du modèle ARMA pour REND\_NASDAQ100

## B.2.2 Correlogramme des résidus

Date: 12/05/25 Time: 01:02  
Sample (adjusted): 3/01/2018 3/01/2025  
Q-statistic probabilities adjusted for 9 ARMA terms

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC | PAC    | Q-Stat | Prob   |       |
|-----------------|---------------------|----|--------|--------|--------|-------|
|                 |                     | 1  | 0.003  | 0.003  | 0.0121 |       |
|                 |                     | 2  | 0.001  | 0.001  | 0.0127 |       |
|                 |                     | 3  | -0.002 | -0.002 | 0.0169 |       |
|                 |                     | 4  | 0.004  | 0.004  | 0.0452 |       |
|                 |                     | 5  | -0.005 | -0.005 | 0.0932 |       |
|                 |                     | 6  | 0.006  | 0.006  | 0.1470 |       |
|                 |                     | 7  | -0.003 | -0.003 | 0.1611 |       |
|                 |                     | 8  | -0.004 | -0.004 | 0.1861 |       |
|                 |                     | 9  | -0.004 | -0.004 | 0.2118 |       |
|                 |                     | 10 | -0.050 | -0.051 | 4.7342 | 0.030 |
|                 |                     | 11 | 0.006  | 0.007  | 4.8078 | 0.090 |
|                 |                     | 12 | 0.017  | 0.017  | 5.3390 | 0.149 |
|                 |                     | 13 | -0.038 | -0.039 | 7.9264 | 0.094 |
|                 |                     | 14 | 0.025  | 0.026  | 9.0199 | 0.108 |
|                 |                     | 15 | -0.014 | -0.015 | 9.3789 | 0.153 |
|                 |                     | 16 | -0.018 | -0.017 | 9.9263 | 0.193 |
|                 |                     | 17 | 0.021  | 0.022  | 10.714 | 0.218 |
|                 |                     | 18 | 0.019  | 0.018  | 11.357 | 0.252 |
|                 |                     | 19 | 0.016  | 0.017  | 11.825 | 0.297 |
|                 |                     | 20 | -0.017 | -0.020 | 12.355 | 0.338 |

Figure B.4 – Correlogramme des résidus du modèle ARMA pour REND\_NASDAQ100

## B.3 – Modèle ARMA pour la série REND\_CAC40

### B.3.1 Résultats de l'estimation

| Dependent Variable: REND_CAC40                                   |             |                       |             |           |
|--|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)                     |             |                       |             |           |
| Date: 12/05/25 Time: 01:54                                       |             |                       |             |           |
| Sample: 3/01/2018 3/01/2025                                      |             |                       |             |           |
| Included observations: 1817                                      |             |                       |             |           |
| Convergence achieved after 80 iterations                         |             |                       |             |           |
| Coefficient covariance computed using outer product of gradients |             |                       |             |           |
| Variable   | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
| C  | 0.000207    | 0.000328              | 0.630833    | 0.5282    |
| AR(1)  | -0.490226   | 0.183317              | -2.674199   | 0.0076    |
| AR(2)  | 0.070407    | 0.018516              | 3.802379    | 0.0001    |
| AR(3)  | 0.039934    | 0.018899              | 2.112978    | 0.0347    |
| AR(4)  | 0.033094    | 0.013274              | 2.493133    | 0.0127    |
| AR(5)  | 0.052885    | 0.018268              | 2.894899    | 0.0038    |
| AR(6)  | -0.081719   | 0.018113              | -4.511529   | 0.0000    |
| AR(7)  | 0.009913    | 0.030745              | 0.322429    | 0.0072    |
| MA(1)  | 0.489486    | 0.185723              | 2.635575    | 0.0085    |
| SIGMASQ  | 0.000140    | 2.24E-06              | 62.26908    | 0.0000    |
| R-squared  | 0.023267    | Mean dependent var    |             | 0.000200  |
| Adjusted R-squared   | 0.018471    | S.D. dependent var    |             | 0.011963  |
| S.E. of regression   | 0.011852    | Akaike info criterion |             | -6.026625 |
| Sum squared resid  | 0.257488    | Schwarz criterion     |             | -5.996678 |
| Log likelihood   | 5563.535    | Hannan-Quinn criter.  |             | -6.015584 |
| F-statistic  | 4.851587    | Durbin-Watson stat    |             | 2.002581  |
| Prob(F-statistic)  | 0.000002    |                       |             |           |
| Inverted AR Roots  | .47+.24i    | .47-.24i              | .13         | -.06+.64i |
|  | -.06-.64i   | -.73+.32i             | -.73-.32i   |           |
| Inverted MA Roots  | -.49        |                       |             |           |

Figure B.5 – Résultats de l'estimation du modèle ARMA pour REND\_CAC40

### B.3.2 Correlogramme des résidus

Date: 12/05/25 Time: 01:56  
 Sample (adjusted): 3/01/2018 3/01/2025  
 Q-statistic probabilities adjusted for 8 ARMA terms

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC | PAC    | Q-Stat | Prob   |       |
|-----------------|---------------------|----|--------|--------|--------|-------|
|                 |                     | 1  | 0.001  | 0.001  | 0.0005 |       |
|                 |                     | 2  | -0.001 | -0.001 | 0.0027 |       |
|                 |                     | 3  | 0.000  | 0.000  | 0.0030 |       |
|                 |                     | 4  | 0.003  | 0.003  | 0.0220 |       |
|                 |                     | 5  | -0.003 | -0.003 | 0.0401 |       |
|                 |                     | 6  | 0.005  | 0.005  | 0.0794 |       |
|                 |                     | 7  | -0.015 | -0.015 | 0.4898 |       |
|                 |                     | 8  | -0.014 | -0.014 | 0.8761 |       |
|                 |                     | 9  | 0.008  | 0.008  | 0.9847 | 0.321 |
|                 |                     | 10 | 0.010  | 0.010  | 1.1805 | 0.554 |
|                 |                     | 11 | -0.005 | -0.005 | 1.2346 | 0.745 |
|                 |                     | 12 | -0.007 | -0.007 | 1.3242 | 0.857 |
|                 |                     | 13 | -0.035 | -0.035 | 3.5559 | 0.615 |
|                 |                     | 14 | 0.056  | 0.056  | 9.2985 | 0.157 |
|                 |                     | 15 | -0.001 | -0.001 | 9.2997 | 0.232 |
|                 |                     | 16 | 0.003  | 0.003  | 9.3180 | 0.316 |
|                 |                     | 17 | -0.001 | -0.001 | 9.3217 | 0.408 |
|                 |                     | 18 | -0.067 | -0.068 | 17.771 | 0.059 |
|                 |                     | 19 | -0.024 | -0.024 | 18.840 | 0.064 |
|                 |                     | 20 | 0.008  | 0.007  | 18.967 | 0.089 |

Figure B.6 – Correlogramme des résidus du modèle ARMA pour REND\_CAC40

## APPENDICE C – Tests ARCH-LM

### Test ARCH-LM appliqué à la série REND\_SP500

| Heteroskedasticity Test: ARCH                 |             |                       |             |        |
|---|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| F-statistic                                   | 125.2689    | Prob. F(6,1804)       | 0.0000      |        |
| Obs*R-squared                                 | 532.6204    | Prob. Chi-Square(6)   | 0.0000      |        |
| Test Equation:                                |             |                       |             |        |
| Dependent Variable: RESID^2                   |             |                       |             |        |
| Method: Least Squares                         |             |                       |             |        |
| Date: 16/06/25 Time: 23:44                    |             |                       |             |        |
| Sample (adjusted): 11/01/2018 3/01/2025       |             |                       |             |        |
| Included observations: 1811 after adjustments |             |                       |             |        |
| Variable                                      | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.  |
| C   | 3.62E-05    | 9.80E-06              | 3.689682    | 0.0002 |
| RESID^2(-1)                                   | 0.206715    | 0.023326              | 8.861863    | 0.0000 |
| RESID^2(-2)                                   | 0.327542    | 0.023713              | 13.81290    | 0.0000 |
| RESID^2(-3)                                   | 0.045115    | 0.024856              | 1.815038    | 0.0697 |
| RESID^2(-4)                                   | -0.084368   | 0.024856              | -3.394221   | 0.0007 |
| RESID^2(-5)                                   | 0.099855    | 0.023713              | 4.210968    | 0.0000 |
| RESID^2(-6)                                   | 0.135711    | 0.023327              | 5.817752    | 0.0000 |
| R-squared                                     | 0.294103    | Mean dependent var    | 0.000134    |        |
| Adjusted R-squared                            | 0.291755    | S.D. dependent var    | 0.000456    |        |
| S.E. of regression                            | 0.000384    | Akaike info criterion | -12.89044   |        |
| Sum squared resid                             | 0.000265    | Schwarz criterion     | -12.86917   |        |
| Log likelihood                                | 11679.29    | Hannan-Quinn criter.  | -12.88259   |        |
| F-statistic                                   | 125.2689    | Durbin-Watson stat    | 2.009478    |        |
| Prob(F-statistic)                             | 0.000000    |                       |             |        |

Figure C.1 – Résultats empiriques du test ARCH-LM appliqué à REND\_SP500

## Test ARCH-LM appliqué à la série REND\_NASDAQ100

| Heteroskedasticity Test: ARCH                 |             |                       |             |        |
|---|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| F-statistic                                   | 57.12142    | Prob. F(8,1800)       | 0.0000      |        |
| Obs*R-squared                                 | 366.2701    | Prob. Chi-Square(8)   | 0.0000      |        |
| Test Equation:                                |             |                       |             |        |
| Dependent Variable: RESID^2                   |             |                       |             |        |
| Method: Least Squares                         |             |                       |             |        |
| Date: 16/06/25 Time: 23:41                    |             |                       |             |        |
| Sample (adjusted): 15/01/2018 3/01/2025       |             |                       |             |        |
| Included observations: 1809 after adjustments |             |                       |             |        |
| Variable                                      | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.  |
| C   | 7.20E-05    | 1.38E-05              | 5.232867    | 0.0000 |
| RESID^2(-1)                                   | 0.202935    | 0.023526              | 8.625810    | 0.0000 |
| RESID^2(-2)                                   | 0.257849    | 0.023999              | 10.74430    | 0.0000 |
| RESID^2(-3)                                   | 0.003716    | 0.024621              | 0.150912    | 0.8801 |
| RESID^2(-4)                                   | -0.032716   | 0.024535              | -1.333414   | 0.1826 |
| RESID^2(-5)                                   | 0.087083    | 0.024536              | 3.549198    | 0.0004 |
| RESID^2(-6)                                   | 0.109849    | 0.024622              | 4.461396    | 0.0000 |
| RESID^2(-7)                                   | -0.029103   | 0.023999              | -1.212645   | 0.2254 |
| RESID^2(-8)                                   | 0.060976    | 0.023527              | 2.591739    | 0.0096 |
| R-squared                                     | 0.202471    | Mean dependent var    | 0.000212    |        |
| Adjusted R-squared                            | 0.198926    | S.D. dependent var    | 0.000548    |        |
| S.E. of regression                            | 0.000491    | Akaike info criterion | -12.39706   |        |
| Sum squared resid                             | 0.000433    | Schwarz criterion     | -12.36969   |        |
| Log likelihood                                | 11222.14    | Hannan-Quinn criter.  | -12.38696   |        |
| F-statistic                                   | 57.12142    | Durbin-Watson stat    | 2.002810    |        |
| Prob(F-statistic)                             | 0.000000    |                       |             |        |

Figure C.2 – Résultats empiriques du test ARCH-LM appliqué à REND\_NASDAQ100

## Test ARCH-LM appliqué à la série REND\_CAC40

| Heteroskedasticity Test: ARCH                 |             |                       |             |        |
|---|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| F-statistic                                   | 44.08671    | Prob. F(12,1792)      | 0.0000      |        |
| Obs*R-squared                                 | 411.4181    | Prob. Chi-Square(12)  | 0.0000      |        |
| Test Equation:                                |             |                       |             |        |
| Dependent Variable: RESID^2                   |             |                       |             |        |
| Method: Least Squares                         |             |                       |             |        |
| Date: 16/06/25 Time: 23:47                    |             |                       |             |        |
| Sample (adjusted): 19/01/2018 3/01/2025       |             |                       |             |        |
| Included observations: 1805 after adjustments |             |                       |             |        |
| Variable                                      | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.  |
| C   | 4.60E-05    | 1.23E-05              | 3.750706    | 0.0002 |
| RESID^2(-1)                                   | -0.051626   | 0.023456              | -2.200920   | 0.0279 |
| RESID^2(-2)                                   | 0.091481    | 0.023474              | 3.897116    | 0.0001 |
| RESID^2(-3)                                   | 0.373842    | 0.023563              | 15.86552    | 0.0000 |
| RESID^2(-4)                                   | 0.179874    | 0.024626              | 7.304349    | 0.0000 |
| RESID^2(-5)                                   | -0.044440   | 0.024701              | -1.799122   | 0.0722 |
| RESID^2(-6)                                   | -0.082885   | 0.024681              | -3.358282   | 0.0008 |
| RESID^2(-7)                                   | -0.061416   | 0.024681              | -2.488394   | 0.0129 |
| RESID^2(-8)                                   | 0.160349    | 0.024701              | 6.491638    | 0.0000 |
| RESID^2(-9)                                   | 0.219251    | 0.024626              | 8.903368    | 0.0000 |
| RESID^2(-10)                                  | 0.028750    | 0.023564              | 1.220099    | 0.2226 |
| RESID^2(-11)                                  | -0.034300   | 0.023473              | -1.461246   | 0.1441 |
| RESID^2(-12)                                  | -0.118667   | 0.023456              | -5.059172   | 0.0000 |
| R-squared                                     | 0.227932    | Mean dependent var    | 0.000135    |        |
| Adjusted R-squared                            | 0.222762    | S.D. dependent var    | 0.000525    |        |
| S.E. of regression                            | 0.000463    | Akaike info criterion | -12.50985   |        |
| Sum squared resid                             | 0.000384    | Schwarz criterion     | -12.47025   |        |
| Log likelihood                                | 11303.14    | Hannan-Quinn criter.  | -12.49523   |        |
| F-statistic                                   | 44.08671    | Durbin-Watson stat    | 2.010135    |        |
| Prob(F-statistic)                             | 0.000000    |                       |             |        |

Figure C.3 – Résultats empiriques du test ARCH-LM appliqué à REND\_CAC40

## Test ARCH-LM appliqué à la série REND\_NIKKEI225

| Heteroskedasticity Test: ARCH                 |             |                       |             |        |
|---|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| F-statistic                                   | 133.7144    | Prob. F(5,1806)       | 0.0000      |        |
| Obs*R-squared                                 | 489.5605    | Prob. Chi-Square(5)   | 0.0000      |        |
| Test Equation:                                |             |                       |             |        |
| Dependent Variable: RESID^2                   |             |                       |             |        |
| Method: Least Squares                         |             |                       |             |        |
| Date: 16/06/25 Time: 23:48                    |             |                       |             |        |
| Sample (adjusted): 10/01/2018 3/01/2025       |             |                       |             |        |
| Included observations: 1812 after adjustments |             |                       |             |        |
| Variable                                      | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.  |
| C   | 7.82E-05    | 1.24E-05              | 6.321627    | 0.0000 |
| RESID^2(-1)                                   | 0.591773    | 0.023522              | 25.15812    | 0.0000 |
| RESID^2(-2)                                   | -0.222437   | 0.027327              | -8.139910   | 0.0000 |
| RESID^2(-3)                                   | 0.094016    | 0.027736              | 3.389716    | 0.0007 |
| RESID^2(-4)                                   | -0.028163   | 0.027328              | -1.030553   | 0.3029 |
| RESID^2(-5)                                   | 0.027635    | 0.023523              | 1.174814    | 0.2402 |
| R-squared                                     | 0.270177    | Mean dependent var    | 0.000146    |        |
| Adjusted R-squared                            | 0.268156    | S.D. dependent var    | 0.000568    |        |
| S.E. of regression                            | 0.000486    | Akaike info criterion | -12.41791   |        |
| Sum squared resid                             | 0.000426    | Schwarz criterion     | -12.39969   |        |
| Log likelihood                                | 11256.63    | Hannan-Quinn criter.  | -12.41119   |        |
| F-statistic                                   | 133.7144    | Durbin-Watson stat    | 2.000430    |        |
| Prob(F-statistic)                             | 0.000000    |                       |             |        |

Figure C.4 - Résultats empiriques du test ARCH-LM appliqué à REND\_NIKKEI225

# Bibliographie

- AMADO, C. et T. TERÄSVIRTA (2013). « Modelling changes in the unconditional variance of long stock return series ». In : *Journal of Empirical Finance* 21, p. 137-150.
- BALLESTRA, L. V., E. D'INNOCENZO et C. TEZZA (2024). *GARCH option valuation with long-run and short-run volatility components : A novel framework ensuring positive variance*. Prépublication, arXiv :2410.14513.
- BLACK, F. (1986). « Noise ». In : *Journal of Finance* 41.3, p. 529-543.
- BOLLERSLEV, T. (1986). « Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity ». In : *Journal of Econometrics* 31.3, p. 307-327.
- BOYLE, P. P. (1977). « Options : A Monte Carlo approach ». In : *Journal of Financial Economics* 4.3, p. 323-338.
- CAI, Y. (2022). « Research on stock market volatility : Evidence from the Shenzhen Composite Index based on GARCH-class models ». In : *BCP Business & Management (GBMS 2022)*. T. 28, p. 12-18.
- CAI, Y. et J. STANDER (2019). « The threshold GARCH model : Estimation and density forecasting for financial returns ». In : *Journal of Financial Econometrics* 17.1, p. 1-34. DOI : 10.1093/jjfinec/nbz014.
- CAMPOS-MARTINS, F. et G. SUCARRAT (2024). « Modeling nonstationary financial volatility with the R package tvgarch ». In : *Journal of Statistical Software* 108.9. DOI : 10.18637/jss.v108.i09.
- CHEN, X. (2023). « Comparing various GARCH-type models in the estimation and forecasts of volatility of S&P 500 returns ». In : *SHS Web of Conferences* 169, p. 01077. DOI : 10.1051/shsconf/202316901077.
- ENGLE, R. F. (1982). « Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation ». In : *Econometrica* 50.4, p. 987-1007.

- ENGLE, R. F., D. M. LILIEN et R. ROBINS (1987). « Estimating time varying risk premia in the term structure : The ARCH-M model ». In : *Econometrica* 55.2, p. 391-407.
- FRANCQ, C. et J.-M. ZAKOÏAN (2019). *GARCH Models : Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Wiley.
- GARTLEY, H. M. (1946). *Profits in the Stock Market*. Lambert-Gann Publishing.
- GLOSTEN, L. R., R. JAGANNATHAN et D. E. RUNKLE (1993). « On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks ». In : *Journal of Finance* 48.5, p. 1779-1801.
- HANSEN, P. R. et A. LUNDE (2005). « A forecast comparison of volatility models : Does anything beat a GARCH(1,1) ? ». In : *Journal of Applied Econometrics* 20.7, p. 873-889.
- ILOMÄKI, J., M. LEPPÄNEN et J. PERTTUNEN (2018). « Moving average rules and predictability in international stock markets ». In : *International Review of Financial Analysis* 58, p. 136-147.
- JANKOVIC, M. K. (2020). « Testing different GARCH models for bull and bear markets ». Mém. de mast. Erasmus University Rotterdam.
- LEE, S. (2017). « Risk-neutral option pricing under GARCH intensity model ». In : *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 114.3, p. 619-638. DOI : 10.12732/ijpam.v114i3.17.
- MIKOSCH, T. et C. STĂRICĂ (2004). « Nonstationarities in financial time series, long-range dependence, and the IGARCH effects ». In : *Review of Economics and Statistics* 86.1, p. 378-390.
- MISHRA, R. R. et S. MISHRA (2024). « Asymmetric effects and volatility clustering in NSE NIFTY 50 ». In : *Asian Journal of Economics, Business and Accounting* 24.11, p. 142-152. DOI : 10.9734/ajeba/2024/v24i1111547.
- MUÑOZ MENDOZA, J. A. (2023). « Estimación y predicción en modelos GARCH con parámetros suavemente variables en el tiempo ». Mém. de mast. Universidad de Concepción.
- NUGROHO, D. B., T. MAHATMA et Y. PRATOMO (2021). « GARCH models under power transformed returns ». In : *Austrian Journal of Statistics* 50.4, p. 1-18. DOI : 10.17713/ajs.v50i4.1075.
- ROSS, G. J. (2018). *Modeling financial volatility in the presence of abrupt changes*. Prépublication, arXiv :1212.6016.

- SHILLER, R. J. (1981). « Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends? » In : *American Economic Review* 71.3, p. 421-436.
- SUHENDAR, V. A. et M. HERLINA (2024). « Analisis volatilitas return Ethereum menggunakan model TGARCH ». In : *Bandung Conference Series : Statistics* 4.1, p. 115-124. DOI : 10.29313/bcss.v4i1.10673.
- TARDIANA, A. L., H. AKBAR, G. FIRMANSYAH et A. M. WIDODO (2024). « Integration of GARCH models and external factors in gold price volatility prediction ». In : *Eduvest – Journal of Universal Studies* 4.5, p. 4011-4023. DOI : 10.55927/eduvest.v4i5.6063.
- YANG, Y. et S. WANG (2019). *Forecasting volatility with GARCH models : An empirical study of 50ETF options*. Rapp. tech. No. 3403420. Quantitative Finance Research Centre, University of Technology Sydney. DOI : 10.2139/ssrn.3403420.